

Cálculo de Programas

Trabalho Prático

MiEI+LCC — 2020/21

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2021

Grupo nr.	999 (preencher)
a11111	Nome1 (preencher)
a22222	Nome2 (preencher)
a33333	Nome3 (preencher)
a44444	Nome4 (preencher, se aplicável, ou apagar)

1 Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em **Haskell** (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2021t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp2021t.lhs`¹ que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2021t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2021t.lhs > cp2021t.tex
$ pdflatex cp2021t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex --lib
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2021t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2021t.lhs
```

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp2021t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **D** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp2021t.aux
$ makeindex cp2021t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss --lib
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop'
+++ OK, passed 100 tests.'
```

Pode-se ainda controlar o número de casos de teste e sua complexidade, como o seguinte exemplo mostra:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop'
+++ OK, passed 200 tests.'
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **C** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

3.1 Stack

O **Stack** é um programa útil para criar, gerir e manter projetos em **Haskell**. Um projeto criado com o Stack possui uma estrutura de pastas muito específica:

- Os módulos auxiliares encontram-se na pasta *src*.
- O módulos principal encontra-se na pasta *app*.
- A lista de dependências externas encontra-se no ficheiro *package.yaml*.

Pode aceder ao **GHCI** utilizando o comando:

```
stack ghci'
```

Garanta que se encontra na pasta mais externa **do projeto**. A primeira vez que correr este comando as dependências externas serão instaladas automaticamente.

Para gerar o PDF, garanta que se encontra na directoria *app*.

Problema 1

Os tipos de dados algébricos estudados ao longo desta disciplina oferecem uma grande capacidade expressiva ao programador. Graças à sua flexibilidade, torna-se trivial implementar DSLs e até mesmo linguagens de programação.

Paralelamente, um tópico bastante estudado no âmbito de Deep Learning é a derivação automática de expressões matemáticas, por exemplo, de derivadas. Duas técnicas que podem ser utilizadas para o cálculo de derivadas são:

- *Symbolic differentiation*
- *Automatic differentiation*

Symbolic differentiation consiste na aplicação sucessiva de transformações (leia-se: funções) que sejam congruentes com as regras de derivação. O resultado final será a expressão da derivada.

O leitor atento poderá notar um problema desta técnica: a expressão inicial pode crescer de forma descontrolada, levando a um cálculo pouco eficiente. *Automatic differentiation* tenta resolver este problema, calculando o valor da derivada da expressão em todos os passos. Para tal, é necessário calcular o valor da expressão e o valor da sua derivada.

Vamos de seguida definir uma linguagem de expressões matemáticas simples e implementar as duas técnicas de derivação automática. Para isso, seja dado o seguinte tipo de dados,

```
data ExpAr a = X
  | N a
  | Bin BinOp (ExpAr a) (ExpAr a)
  | Un UnOp (ExpAr a)
  deriving (Eq, Show)
```

onde *BinOp* e *UnOp* representam operações binárias e unárias, respectivamente:

```
data BinOp = Sum
  | Product
  deriving (Eq, Show)
data UnOp = Negate
  | E
  deriving (Eq, Show)
```

O construtor *E* simboliza o exponencial de base *e*.

Assim, cada expressão pode ser uma variável, um número, uma operação binária aplicada às devidas expressões, ou uma operação unária aplicada a uma expressão. Por exemplo,

Bin Sum X (N 10)

designa $x + 10$ na notação matemática habitual.

1. A definição das funções *inExpAr* e *baseExpAr* para este tipo é a seguinte:

```
inExpAr = [X, num_ops] where
  num_ops = [N, ops]
  ops = [bin, Un]
  bin (op, (a, b)) = Bin op a b
  baseExpAr f g h j k l z = f + (g + (h × (j × k) + l × z))
```

Defina as funções *outExpAr* e *recExpAr*, e teste as propriedades que se seguem.

Propriedade [QuickCheck] 1 *inExpAr* e *outExpAr* são testemunhas de um isomorfismo, isto é, *inExpAr* · *outExpAr* = *id* e *outExpAr* · *inExpAr* = *id*:

```
prop_in_out_idExpAr :: (Eq a) => ExpAr a -> Bool
prop_in_out_idExpAr = inExpAr · outExpAr ≡ id
prop_out_in_idExpAr :: (Eq a) => OutExpAr a -> Bool
prop_out_in_idExpAr = outExpAr · inExpAr ≡ id
```

2. Dada uma expressão aritmética e um escalar para substituir o X , a função

$$eval_exp :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

calcula o resultado da expressão. Na página 12 esta função está expressa como um catamorfismo. Defina o respectivo gene e, de seguida, teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 2 A função *eval_exp* respeita os elementos neutros das operações.

$$\begin{aligned} prop_sum_idr &:: (Floating a, \mathbb{R} a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_sum_idr a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} sum_idr \textbf{ where} \\ sum_idr &= eval_exp a (Bin Sum exp (N 0)) \\ prop_sum_idl &:: (Floating a, \mathbb{R} a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_sum_idl a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} sum_idl \textbf{ where} \\ sum_idl &= eval_exp a (Bin Sum (N 0) exp) \\ prop_product_idr &:: (Floating a, \mathbb{R} a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_product_idr a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} prod_idr \textbf{ where} \\ prod_idr &= eval_exp a (Bin Product exp (N 1)) \\ prop_product_idl &:: (Floating a, \mathbb{R} a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_product_idl a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} prod_idl \textbf{ where} \\ prod_idl &= eval_exp a (Bin Product (N 1) exp) \\ prop_e_id &:: (Floating a, \mathbb{R} a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop_e_id a &= eval_exp a (Un E (N 1)) \equiv expd 1 \\ prop_negate_id &:: (Floating a, \mathbb{R} a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop_negate_id a &= eval_exp a (Un Negate (N 0)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 3 Negar duas vezes uma expressão tem o mesmo valor que não fazer nada.

$$\begin{aligned} prop_double_negate &:: (Floating a, \mathbb{R} a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_double_negate a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} eval_exp a (Un Negate (Un Negate exp)) \end{aligned}$$

3. É possível otimizar o cálculo do valor de uma expressão aritmética tirando proveito dos elementos absorventes de cada operação. Implemente os genes da função

$$optimize_eval :: (Floating a, Eq a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

que se encontra na página 12 expressa como um hilomorfismo² e teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 4 A função *optimize_eval* respeita a semântica da função *eval*.

$$\begin{aligned} prop_optimize_respects_semantics &:: (Floating a, \mathbb{R} a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_optimize_respects_semantics a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} optimize_eval a exp \end{aligned}$$

4. Para calcular a derivada de uma expressão, é necessário aplicar transformações à expressão original que respeitem as regras das derivadas:³

- Regra da soma:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

²Qual é a vantagem de implementar a função *optimize_eval* utilizando um hilomorfismo em vez de utilizar um catamorfismo com um gene "inteligente"?

³Apesar da adição e multiplicação gozarem da propriedade comutativa, há que ter em atenção a ordem das operações por causa dos testes.

- Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x)$$

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$sd :: Floating a \Rightarrow ExpAr a \rightarrow ExpAr a$$

que, dada uma expressão aritmética, calcula a sua derivada. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 5 A função *sd* respeita as regras de derivação.

```
prop_const_rule :: (IR a, Floating a) => a -> Bool
prop_const_rule a = sd (N a) == N 0

prop_var_rule :: Bool
prop_var_rule = sd X == N 1

prop_sum_rule :: (IR a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_sum_rule exp1 exp2 = sd (Bin Sum exp1 exp2) == sum_rule where
  sum_rule = Bin Sum (sd exp1) (sd exp2)

prop_product_rule :: (IR a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_product_rule exp1 exp2 = sd (Bin Product exp1 exp2) == prod_rule where
  prod_rule = Bin Sum (Bin Product exp1 (sd exp2)) (Bin Product (sd exp1) exp2)

prop_e_rule :: (IR a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_e_rule exp = sd (Un E exp) == Bin Product (Un E exp) (sd exp)

prop_negate_rule :: (IR a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_negate_rule exp = sd (Un Negate exp) == Un Negate (sd exp)
```

5. Como foi visto, *Symbolic differentiation* não é a técnica mais eficaz para o cálculo do valor da derivada de uma expressão. *Automatic differentiation* resolve este problema calculando o valor da derivada em vez de manipular a expressão original.

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$ad :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow a$$

que, dada uma expressão aritmética e um ponto, calcula o valor da sua derivada nesse ponto, sem transformar manipular a expressão original. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 6 Calcular o valor da derivada num ponto *r* via *ad* é equivalente a calcular a derivada da expressão e avalia-la no ponto *r*.

```
prop_congruent :: (Floating a, IR a) => a -> ExpAr a -> Bool
prop_congruent a exp = ad a exp == eval_exp a (sd exp)
```

Problema 2

Nesta disciplina estudou-se como fazer **programação dinâmica** por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.⁴

Para o caso de funções sobre os números naturais (\mathbb{N}_0 , com functor $F X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado **Cálculo de Programas**. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned} fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n + 1) &= f\ n \end{aligned}$$

⁴Lei (3.94) em [?], página 98.

$$f\ 0 = 1$$

$$f\ (n + 1) = fib\ n + f\ n$$

Obter-se-á de imediato

$$fib' = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (fib, f) = (f, fib + f)$$

$$\text{init} = (1, 1)$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.⁵
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável *n*.
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em \mathbb{N}_0 . Seguindo o método estudado nas aulas⁶, de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$f\ 0 = c$$

$$f\ (n + 1) = f\ n + k\ n$$

$$k\ 0 = a + b$$

$$k\ (n + 1) = k\ n + 2\ a$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (f, k) = (f + k, k + 2 * a)$$

$$\text{init} = (c, a + b)$$

O que se pede então, nesta pergunta? Dada a fórmula que dá o *n*-ésimo **número de Catalan**,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \quad (1)$$

derivar uma implementação de C_n que não calcule factoriais nenhuns. Isto é, derivar um ciclo-for

$$cat = \dots \cdot \text{for loop init where } \dots$$

que implemente esta função.

Propriedade [QuickCheck] 7 A função proposta coincide com a definição dada:

$$prop_cat = (\geq 0) \Rightarrow (catdef \equiv cat)$$

Sugestão: Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

Problema 3

As **curvas de Bézier**, designação dada em honra ao engenheiro **Pierre Bézier**, são curvas ubíquas na área de computação gráfica, animação e modelação. Uma curva de Bézier é uma curva paramétrica, definida por um conjunto $\{P_0, \dots, P_N\}$ de pontos de controlo, onde N é a ordem da curva.

O algoritmo de *De Casteljau* é um método recursivo capaz de calcular curvas de Bézier num ponto. Apesar de ser mais lento do que outras abordagens, este algoritmo é numericamente mais estável, trocando velocidade por correção.

⁵Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

⁶Secção 3.17 de [?] e tópico **Recursividade mútua** nos vídeos das aulas teóricas.



Figura 1: Exemplos de curvas de Bézier retirados da [Wikipedia](#).

De forma sucinta, o valor de uma curva de Bézier de um só ponto $\{P_0\}$ (ordem 0) é o próprio ponto P_0 . O valor de uma curva de Bézier de ordem N é calculado através da interpolação linear da curva de Bézier dos primeiros $N - 1$ pontos e da curva de Bézier dos últimos $N - 1$ pontos.

A interpolação linear entre 2 números, no intervalo $[0, 1]$, é dada pela seguinte função:

```
linear1d :: Q → Q → OverTime Q
linear1d a b = formula a b where
  formula :: Q → Q → Float → Q
  formula x y t = ((1.0 :: Q) - (toQ t)) * x + (toQ t) * y
```

A interpolação linear entre 2 pontos de dimensão N é calculada através da interpolação linear de cada dimensão.

O tipo de dados *NPoint* representa um ponto com N dimensões.

```
type NPoint = [Q]
```

Por exemplo, um ponto de 2 dimensões e um ponto de 3 dimensões podem ser representados, respetivamente, por:

```
p2d = [1.2, 3.4]
p3d = [0.2, 10.3, 2.4]
```

O tipo de dados *OverTime a* representa um termo do tipo a num dado instante (dado por um *Float*).

```
type OverTime a = Float → a
```

O anexo C tem definida a função

```
calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
```

que calcula a interpolação linear entre 2 pontos, e a função

```
deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
```

que implementa o algoritmo respectivo.

1. Implemente *calcLine* como um catamorfismo de listas, testando a sua definição com a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 8 Definição alternativa.

```
prop_calcLine_def :: NPoint → NPoint → Float → Bool
prop_calcLine_def p q d = calcLine p q d ≡ zipWithM linear1d p q d
```

2. Implemente a função *deCasteljau* como um hilomorfismo, testando agora a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 9 *Curvas de Bézier são simétricas.*

```
prop_bezier_sym :: [[Q]] → Gen Bool
prop_bezier_sym l = all (<Δ) · calc_difs · bezs ($) elements ps where
  calc_difs = (λ(x, y) → zipWith (λw v → if w ≥ v then w - v else v - w) x y)
  bezs t = (deCasteljau l t, deCasteljau (reverse l) (fromQ (1 - (toQ t))))
  Δ = 1e-2
```

3. Corra a função `runBezier` e aprecie o seu trabalho⁷ clicando na janela que é aberta (que contém, a verde, um ponto inicial) com o botão esquerdo do rato para adicionar mais pontos. A tecla `Delete` apaga o ponto mais recente.

Problema 4

Seja dada a fórmula que calcula a média de uma lista não vazia x ,

$$\text{avg } x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \quad (2)$$

onde $k = \text{length } x$. Isto é, para sabermos a média de uma lista precisamos de dois catamorfismos: o que faz o somatório e o que calcula o comprimento a lista. Contudo, é fácil de ver que

$$\begin{aligned} \text{avg } [a] &= a \\ \text{avg } (a : x) &= \frac{1}{k+1} (a + \sum_{i=1}^k x_i) = \frac{a + k(\text{avg } x)}{k+1} \text{ para } k = \text{length } x \end{aligned}$$

Logo `avg` está em recursividade mútua com `length` e o par de funções pode ser expresso por um único catamorfismo, significando que a lista apenas é percorrida uma vez.

1. Recorra à lei de recursividade mútua para derivar a função `avg_aux = ([b, q])` tal que `avg_aux = (avg, length)` em listas não vazias.
2. Generalize o raciocínio anterior para o cálculo da média de todos os elementos de uma `LTree` recorrendo a uma única travessia da árvore (i.e. catamorfismo).

Verifique as suas funções testando a propriedade seguinte:

Propriedade [QuickCheck] 10 *A média de uma lista não vazia e de uma `LTree` com os mesmos elementos coincide, a menos de um erro de 0.1 milésimas:*

```
prop_avg :: [Double] → Property
prop_avg = nonempty ⇒ diff ≤ 0.000001 where
  diff l = avg l - (avgLTree · genLTree) l
  genLTree = ([lsplit])
  nonempty = (>[])
```

Problema 5

(NB: Esta questão é **opcional** e funciona como **valorização** apenas para os alunos que desejarem fazê-la.)

Existem muitas linguagens funcionais para além do `Haskell`, que é a linguagem usada neste trabalho prático. Uma delas é o `F#` da Microsoft. Na directoria `fsharp` encontram-se os módulos `Cp`, `Nat` e `LTree` codificados em `F#`. O que se pede é a biblioteca `BTree` escrita na mesma linguagem.

Modo de execução: o código que tiverem produzido nesta pergunta deve ser colocado entre o `\begin{verbatim}` e o `\end{verbatim}` da correspondente parte do anexo `D`. Para além disso, os grupos podem demonstrar o código na oral.

⁷A representação em Gloss é uma adaptação de um `projeto` de Harold Cooper.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁸

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L^AT_EX *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina⁹, onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até $i = n$ da função exponencial $\exp x = e^x$, via série de Taylor:

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (3)$$

Seja $e\ x\ n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que $e\ x\ 0 = 1$ e que $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Se definirmos $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ teremos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para $h\ x\ n$ etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$\begin{aligned}
 e\ x\ 0 &= 1 \\
 e\ x\ (n+1) &= h\ x\ n + e\ x\ n \\
 h\ x\ 0 &= x \\
 h\ x\ (n+1) &= x / (s\ n) * h\ x\ n \\
 s\ 0 &= 2 \\
 s\ (n+1) &= 1 + s\ n
 \end{aligned}$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3.1 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$\begin{aligned}
 e'\ x &= prj \cdot \text{for loop init where} \\
 init &= (1, x, 2) \\
 loop\ (e, h, s) &= (h + e, x / s * h, 1 + s) \\
 prj\ (e, h, s) &= e
 \end{aligned}$$

⁸Exemplos tirados de [?].

⁹Cf. [?], página 102.

C Código fornecido

Problema 1

```
expd :: Floating a => a -> a
expd = Prelude.exp
type OutExpAr a = () + (a + ((BinOp, (ExpAr a, ExpAr a)) + (UnOp, ExpAr a)))
```

Problema 2

Definição da série de Catalan usando factoriais (1):

$$\text{catdef } n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan¹⁰:

```
oracle = [
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845,
  35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,
  91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452
]
```

Problema 3

Algoritmo:

```
deCasteljau :: [NPoint] -> OverTime NPoint
deCasteljau [] = nil
deCasteljau [p] = p
deCasteljau l = λpt -> (calcLine (p pt) (q pt)) pt where
  p = deCasteljau (init l)
  q = deCasteljau (tail l)
```

Função auxiliar:

```
calcLine :: NPoint -> (NPoint -> OverTime NPoint)
calcLine [] = nil
calcLine (p : x) = g p (calcLine x) where
  g :: (Q, NPoint -> OverTime NPoint) -> (NPoint -> OverTime NPoint)
  g (d, f) l = case l of
    [] -> nil
    (x : xs) -> λz -> concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z
```

2D:

```
bezier2d :: [NPoint] -> OverTime (Float, Float)
bezier2d [] = (0, 0)
bezier2d l = λz -> (fromQ × fromQ) · (λ[x, y] -> (x, y)) $ ((deCasteljau l) z)
```

Modelo:

```
data World = World { points :: [NPoint]
  , time :: Float
  }
initW :: World
initW = World [] 0
```

¹⁰Fonte: [Wikipedia](#).

```

tick :: Float → World → World
tick dt world = world { time = (time world) + dt }

actions :: Event → World → World
actions (EventKey (MouseButton LeftButton) Down _ p) world =
  world { points = (points world) ++ [(λ(x,y) → map toQ [x,y]) p] }
actions (EventKey (SpecialKey KeyDelete) Down _ _) world =
  world { points = cond (≡ []) id init (points world) }
actions _ world = world

scaleTime :: World → Float
scaleTime w = (1 + cos (time w)) / 2

bezier2dAtTime :: World → (Float, Float)
bezier2dAtTime w = (bezier2dAt w) (scaleTime w)

bezier2dAt :: World → OverTime (Float, Float)
bezier2dAt w = bezier2d (points w)

thicCirc :: Picture
thicCirc = ThickCircle 4 10

ps :: [Float]
ps = map fromQ ps' where
  ps' :: [Q]
  ps' = [0, 0.01 .. 1] -- interval

```

Gloss:

```

picture :: World → Picture
picture world = Pictures
  [ animateBezier (scaleTime world) (points world)
  , Color white · Line · map (bezier2dAt world) $ ps
  , Color blue · Pictures $ [ Translate (fromQ x) (fromQ y) thicCirc | [x,y] ← points world ]
  , Color green $ Translate cx cy thicCirc
  ] where
  (cx, cy) = bezier2dAtTime world

```

Animação:

```

animateBezier :: Float → [NPoint] → Picture
animateBezier _ [] = Blank
animateBezier _ [_] = Blank
animateBezier t l = Pictures
  [ animateBezier t (init l)
  , animateBezier t (tail l)
  , Color red · Line $ [a, b]
  , Color orange $ Translate ax ay thicCirc
  , Color orange $ Translate bx by thicCirc
  ] where
  a@(ax, ay) = bezier2d (init l) t
  b@(bx, by) = bezier2d (tail l) t

```

Propriedades e main:

```

runBezier :: IO ()
runBezier = play (InWindow "Bézier" (600,600) (0,0))
  black 50 initW picture actions tick

runBezierSym :: IO ()
runBezierSym = quickCheckWith (stdArgs { maxSize = 20, maxSuccess = 200 }) prop_bezier_sym

```

Compilação e execução dentro do interpretador:¹¹

```

main = runBezier
run = do { system "ghc cp2021t"; system "./cp2021t" }

```

¹¹Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary UnOp where
  arbitrary = elements [Negate, E]
instance Arbitrary BinOp where
  arbitrary = elements [Sum, Product]
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (ExpAr a) where
  arbitrary = do
    binop <- arbitrary
    unop <- arbitrary
    exp1 <- arbitrary
    exp2 <- arbitrary
    a <- arbitrary
    frequency · map (id × pure) $ [(20, X), (15, N a), (35, Bin binop exp1 exp2), (30, Un unop exp1)]
infixr 5  $\stackrel{?}{=}$ 
( $\stackrel{?}{=}$ ) ::  $\mathcal{R}$  a => a -> a -> Bool
( $\stackrel{?}{=}$ ) x y = (to $_{\mathbb{Q}}$  x) == (to $_{\mathbb{Q}}$  y)
```

Outras funções auxiliares

Lógicas:

```
infixr 0 =>
(>=) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
p => f =  $\lambda$ a -> p a => f a
infixr 0 <=>
(<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
p <=> f =  $\lambda$ a -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4  $\equiv$ 
( $\equiv$ ) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f  $\equiv$  g =  $\lambda$ a -> f a  $\equiv$  g a
infixr 4  $\leq$ 
( $\leq$ ) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f  $\leq$  g =  $\lambda$ a -> f a  $\leq$  g a
infixr 4  $\wedge$ 
( $\wedge$ ) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
f  $\wedge$  g =  $\lambda$ a -> (f a)  $\wedge$  (g a)
```

D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

Problema 1

São dadas:

```
cataExpAr g = g · recExpAr (cataExpAr g) · outExpAr
anaExpAr g = inExpAr · recExpAr (anaExpAr g) · g
hyloExpAr h g = cataExpAr h · anaExpAr g
```

$eval_exp :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a$
 $eval_exp\ a = cataExpAr\ (g_eval_exp\ a)$
 $optimize_eval :: (Floating\ a, Eq\ a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a$
 $optimize_eval\ a = hyloExpAr\ (gopt\ a)\ clean$
 $sd :: Floating\ a \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow ExpAr\ a$
 $sd = \pi_2 \cdot cataExpAr\ sd_gen$
 $ad :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow a$
 $ad\ v = \pi_2 \cdot cataExpAr\ (ad_gen\ v)$

Definir:

Sabe-se que in e out são isomorfismos, logo, out . in = id.

$$\begin{aligned}
& out \cdot \mathbf{in} = id \\
\equiv & \quad \{ \text{def. de inExpAr pelo enunciado} \} \\
& out \cdot [\underline{X}, num_ops] = id \\
\equiv & \quad \{ \text{pelo enunciado : num_ops = either N ops ; fusão-+ ; universal-+} \} \\
& \begin{cases} out \cdot \underline{X} = id \cdot i_1 \\ out \cdot [N, ops] = id \cdot i_2 \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{pelo enunciado : ops = either bin (uncurry Un) ; fusão-+ ; universal-+} \} \\
& \begin{cases} out \cdot \underline{X} = id \cdot i_1 \\ out \cdot N = id \cdot i_2 \cdot i_1 \\ out \cdot [bin, \widehat{Un}] = id \cdot i_2 \cdot i_2 \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{fusão-+ ; universal-+} \} \\
& \begin{cases} out \cdot \underline{X} = id \cdot i_1 \\ out \cdot N = id \cdot i_2 \cdot i_1 \\ out \cdot bin = id \cdot i_2 \cdot i_2 \cdot i_1 \\ out \cdot \widehat{Un} = id \cdot i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{def. bin (op,(a,b)) = Bin op a b ; uncurry aplicado ao ponto ; natural-id ; igualdade extensional ; def-comp ; } \} \\
& \begin{cases} out\ X = i_1\ () \\ out\ (N\ a) = i_2\ (i_1\ a) \\ out\ (Bin\ op\ a\ b) = i_2\ (i_2\ (i_1\ (op,\ (a,\ b)))) \\ out\ (Un\ op\ a) = i_2\ (i_2\ (i_2\ (op,\ a))) \end{cases} \\
& \square
\end{aligned}$$

Então:

$outExpAr\ X = i_1\ ()$
 $outExpAr\ (N\ a) = i_2\ (i_1\ a)$
 $outExpAr\ (Bin\ op\ a\ b) = i_2\ (i_2\ (i_1\ (op,\ (a,\ b))))$
 $outExpAr\ (Un\ op\ a) = i_2\ (i_2\ (i_2\ (op,\ a)))$

Sabe-se ainda, pela lei Base-cata (49 do formulário) que $F\ f = B(id, f)$. Pelo diagrama seguinte podemos confirmar que, comparando com a definição de baseExpAr, as únicas funções que prevalecem no functor F são as funções j, k e z, no entanto, no functor, estas serão todas a mesma, que no caso é o catamorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
ExpAr & \xleftarrow{inExpAr} & 1 + A + BinOp \times ExpAr^2 + UnOp \times ExpAr \\
\downarrow \scriptstyle \langle \! \langle g \! \rangle \! \rangle & & \downarrow \scriptstyle id + id + id \times \langle \! \langle g \! \rangle \! \rangle^2 + id \times \langle \! \langle g \! \rangle \! \rangle \\
F & \xleftarrow{g} & 1 + A + BinOp \times F^2 + UnOp \times F
\end{array}$$

Assim, podemos inferir o seguinte:

$$recExpAr\ f = baseExpAr\ id\ id\ id\ f\ f\ id\ f$$

Passemos ao desenho do diagrama do catamorfismo `eval_exp`:

$$\begin{array}{ccc}
 ExpAr & \xleftarrow{inExpAr} & 1 + A + BinOp \times ExpAr^2 + UnOp \times ExpAr \\
 \downarrow eval_exp = (g_eval_exp) & & \downarrow id + id + id \times (g_eval_exp)^2 + id \times (g_eval_exp) \\
 F & \xleftarrow{g_eval_exp} & 1 + A + BinOp \times F^2 + UnOp \times F
 \end{array}$$

Daqui podemos inferir o seguinte:

```

g_eval_exp a = [g1, [g2, [g3, g4]]]
where g1 () = a
      g2 b = b
      g3 (op, (x, y)) | op == Sum = x + y
                      | op == Product = x * y
      g4 (op, x)      | op == Negate = -x
                      | op == E = expd x

```

Para encontrar o hilomorfismo pedido, comçamos por tentar entender qual seria a parte de divisão e qual a parte de conquista. Depressa percebermos que na parte de divisão é onde devem ser tratados os casos de elementos neutros, e a parte da conquista deve ser apenas sobre o cálculo do valor da expressão.

Considerando as operações possíveis de realizar neste tipo `ExpAr`, o único elemento neutro existente é o 0 na multiplicação. Assim, sempre que pelo menos uma das parcelas do produto é zero, em vez dessa expressão produto passamos a ter o número 0, pois o resultado da multiplicação por 0 é sempre 0.

Depois de fazer esta "limpeza" à expressão no anamorfismo, o que se segue é simplesmente efetuar o seu cálculo, para isso temos já definido em cima o catamorfismo `eval_exp` com o gene `g_eval_exp`.

Ficamos então com o seguinte:

```

clean X = i1 ()
clean (N a) = i2 (i1 a)
clean (Bin op a b) | op == Product & (a == (N 0) ∨ b == (N 0)) = i2 (i1 0)
                  | otherwise = i2 (i2 (i1 (op, (a, b))))
clean (Un op a) = i2 (i2 (i2 (op, a)))
gopt a = g_eval_exp a

```

Para os seguintes genes, o raciocínio foi simplesmente seguir as regras dadas no enunciado, sabendo também que agora, para cada expressão, é recebido um par, sendo o primeiro elemento do par a expressão original e o segundo a expressão derivada.

Chegamos assim ao seguinte resultado:

```

sd_gen :: Floating a =>
  () + (a + ((BinOp, ((ExpAr a, ExpAr a), (ExpAr a, ExpAr a))) + (UnOp, (ExpAr a, ExpAr a)))) -> (ExpAr a)
sd_gen = [g1, [g2, [g3, g4]]]
where g1 () = (X, N 1)
      g2 a = (N a, N 0)
      g3 (op, ((x1, y1), (x2, y2))) | op == Sum = ((Bin op x1 x2), (Bin op y1 y2))
                                   | op == Product = ((Bin op x1 x2), (Bin Sum (Bin Product x1 y2) (Bin Product y1 x2)))
      g4 (op, (x1, x2)) | op == E = ((Un op x1), (Bin Product (Un E x1) (x2)))
                       | op == Negate = ((Un op x1), (Un op x2))

```

A diferença do anterior para o seguinte gene é apenas que em vez de devolver uma expressão, devolvemos o resultado do cálculo dessa expressão. Para isso, em alguns casos, onde é necessário efetuar o cálculo de uma expressão substituindo a incógnita e não apenas o cálculo entre dois números, foi necessário recorrer ao catamorfismo `eval_exp`, já acima definido.

Obtemos então a seguinte definição de `ad_gen`:

```

ad_gen v = [g1, [g2, [g3, g4]]]
where g1 () = (X, 1)

```

$$\begin{aligned}
g2 \ a &= (N \ a, 0) \\
g3 \ (op, ((x1, y1), (x2, y2))) \mid op &\equiv Sum = ((Bin \ op \ x1 \ x2), (y1 + y2)) \\
&\mid op \equiv Product = ((Bin \ op \ x1 \ x2), (eval_exp \ v \ (Bin \ Sum \ (Bin \ Product \ x1 \ (N \ y2)) \ (Bin \ Product \ x2 \ (N \ y2)))) \\
g4 \ (op, (x1, x2)) \mid op &\equiv E = ((Un \ op \ x1), (eval_exp \ v \ (Un \ E \ x1)) * x2) \\
&\mid op \equiv Negate = ((Un \ op \ x1), (-x2))
\end{aligned}$$

Problema 2

Definir

$$\begin{aligned}
c \ 0 &= 1 \\
c \ (n + 1) &= ((dividendo \ n) * c \ (n) \text{ 'div' } (divisor \ n)) \\
dividendo \ 0 &= 2 \\
dividendo \ (n + 1) &= 4 + dividendo \ n \\
divisor \ 0 &= 2 \\
divisor \ (n + 1) &= 1 + divisor \ n \\
loop \ (c, dividendo, divisor) &= (dividendo * c \text{ 'div' } divisor, 4 + dividendo, 1 + divisor) \\
inic &= (1, 2, 2) \\
prj \ (a, b, c) &= a
\end{aligned}$$

por forma a que

$$cat = prj \cdot \text{for loop } inic$$

seja a função pretendida. **NB:** usar divisão inteira. Apresentar de seguida a justificação da solução encontrada.

Apartir da fórmula dada no enunciado, foi possível encontrar a seguinte fórmula recursiva para o cálculo do número de Catalan:

$$C_{n+1} = \frac{4n + 2}{n + 2} * C_n \quad (4)$$

Depois de encontrada a fórmula foi fácil de perceber, a partir de exemplos mostrados nas aulas, que seria necessário transformar a divisão em funções recursivas, uma que calcula o dividendo e outra o divisor. Sendo ambas equações lineares, foi fácil seguir o exemplo mostrado nas aulas que está presente no caderno da disciplina. Assim se chegou às funções recursivas dividendo e divisor.

A maior dificuldade foi o próximo passo, os valores não eram os corretos com a divisão inteira, e o grupo não estava a conseguir perceber o que poderia fazer para contornar essa situação. No entanto depois de o professor esclarecer a dúvida, foi rapidamente entendido que resultaria se simplesmente se fizesse a multiplicação primeiro e só depois a divisão.

Depois de encontrar a definição das funções com recursividade mútua para o cálculo do número de Catalan foi apenas necessário seguir as regras de algibeira disponibilizadas no enunciado para encontrar a definição de loop, inic, e prj, como pedido.

Problema 3

Para perceber qual o gene deste catamorfismo decidimos desenhar o seu diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
NPoint & \xrightarrow{\quad out \quad} & 1 + \mathbb{R} \times NPoint \\
\downarrow calcLine & & \downarrow id + id \times calcLine \\
OverTime \ NPoint & \xleftarrow{\quad g=[g1, g2] \quad} & 1 + \mathbb{R} \times OverTime \ NPoint
\end{array}$$

A partir do diagrama e também da definição de calcLine fornecida foi relativamente imediato encontrar a definição do gene que é a seguinte:

$$\begin{aligned}
calcLine &:: NPoint \rightarrow (NPoint \rightarrow OverTime \ NPoint) \\
calcLine &= cataList \ [h1, h2] \ \textbf{where}
\end{aligned}$$

```

h1 () = nil
h2 (p, x) = g p x
g :: (Q, NPoint → OverTime NPoint) → (NPoint → OverTime NPoint)
g (d, f) l = case l of
  [] → nil
  (x : xs) → λz → concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z

```

A definição do hilomorfismo já foi mais complicada de encontrar. Procedemos, tal como no anterior, ao desenho de um diagrama, que foi sendo preenchido também à medida que íamos percebendo aquilo que o anamorfismo e o catamorfismo deveriam fazer.

Começamos por definir que o anamorfismo (a parte de divisão do hilomorfismo) faria a divisão da lista de NPoint em duas listas do mesmo tipo, tal como se vê que é feito na definição dada no enunciado, então, foi isso que se fez para a definição do anamorfismo. Quanto aos outros casos, o resultado seria exatamente aquele que se pretende na definição de deCasteljau fornecida.

O catamorfismo terá, agora, apenas de fazer o cálculo para OverTime NPoint no caso de receber o par de OverTime NPoint vindo do anamorfismo. Para isso, é chamado o catamorfismo definido acima, o calcLine, tal como na definição original fornecida.

$$\begin{array}{ccc}
 NPoint^* & \xrightarrow{\text{coalg}} & NPoint + NPoint^{*2} \\
 \downarrow \llbracket \text{coalg} \rrbracket & & \downarrow \text{id} + \llbracket \text{coalg} \rrbracket^2 \\
 NPoint^* & \xleftarrow{\text{in}} & NPoint + NPoint^{*2} \\
 \downarrow \llbracket \text{alg} \rrbracket & & \downarrow \text{id} + \llbracket \text{alg} \rrbracket^2 \\
 OverTime\ NPoint & \xleftarrow[\text{alg}=[g1, g2]]{1 + \mathbb{R} \times OverTime\ NPoint} & 1 + \mathbb{R} \times OverTime\ NPoint
 \end{array}$$

```

deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
deCasteljau = hyloAlgForm alg coalg where
  coalg [] = i1 nil
  coalg [p] = i1 p
  coalg l = i2 ((init l), (tail l))
  alg = [g1, g2] where
    g1 l = l
    g2 (l1, l2) = λpt → (calcLine (l1 pt) (l2 pt)) pt
  hyloAlgForm h g = \h → \g

```

Problema 4

A resolução deste problema baseou-se em diagramas. De seguida apresenta-se o diagrama do avg_aux como um split entre as funções avg e length.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A^* & & \\
 & \swarrow \text{avg} & \downarrow \{ \text{avg}, \text{length} \} & \searrow \text{length} & \\
 \mathbb{R} & \xleftarrow[\pi_1]{} & \mathbb{R} \times \mathbb{N}^+ & \xrightarrow[\pi_2]{} & \mathbb{N}^+
 \end{array}$$

Solução para listas não vazias:

$$\text{avg} = \pi_1 \cdot \text{avg_aux}$$

A seguir apresentamos o diagrama do catamorfismo avg_aux, baseado no diagrama apresentado anteriormente.

$$\begin{array}{ccc}
A^* & \xleftarrow{\text{in}} & A + A \times A^* \\
\downarrow \langle [b,q] \rangle = \langle \text{avg}, \text{length} \rangle & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle \\
\mathbb{R} \times \mathbb{N}^+ & \xleftarrow{g=[g1,g2]} & A + A \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}^+
\end{array}$$

Porque se trata de listas não vazias foi necessário definir o catamorfismo para este tipo e, consequentemente o seu out, que se apresentam de seguida. Depois do catamorfismo definido, podemos passar à definição do seu gene com base no diagrama anterior e na definição da função de cálculo da média de uma lista fornecida no enunciado.

```

outNonEmptyList [a] = i1 (a)
outNonEmptyList (a : x) = i2 (a, x)
cataNonEmptyList g = g · recList (cataNonEmptyList g) · outNonEmptyList
avg_aux = cataNonEmptyList [g1, g2] where
  g1 a = (a, 1)
  g2 (a, (b, c)) = ((a + c * b) / (c + 1), c + 1)

```

Solução para árvores de tipo **LTree**:

A adaptação para árvores do tipo LTree é simples e imediata como se pode perceber nos seguintes diagramas.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{LTree } A & & \\
& \swarrow \text{avg} & \downarrow \langle \text{avg}, \text{length} \rangle & \searrow \text{length} & \\
\mathbb{R} & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{R} \times \mathbb{N}^+ & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{N}^+
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{LTree } A & \xleftarrow{\text{in}} & A + (\text{LTree } A)^2 \\
\downarrow \langle [b,q] \rangle = \langle \text{avg}, \text{length} \rangle & & \downarrow \text{id} + \langle [b,q] \rangle^2 \\
\mathbb{R} \times \mathbb{N}^+ & \xleftarrow{g=[g1,g2]} & A + (\mathbb{R} \times \mathbb{N}^+)^2
\end{array}$$

```

avgLTree = π1 · ⟨ gene ⟩ where
  gene = [g1, g2] where
    g1 a = (a, 1)
    g2 ((a1, b1), (a2, b2)) = ((a1 * b1 + a2 * b2) / (b1 + b2), b1 + b2)

```

Problema 5

Inserir em baixo o código **F#** desenvolvido, entre `\begin{verbatim}` e `\end{verbatim}`: