Actividad Evaluativa - Eje 4 - Series Infinitas

Melquir Romero, Julian Piñeros y Harold Sabogal

Universidad Área Andina, Bogotá D.C

Fundación Universitaria del Área Andina

Ingeniería en Sistemas

Cálculo Integral

Danilo De Jesús Ariza Agámez

28 de marzo del 2025

En cálculo integral, adentrarse en el mundo de las series infinitas es como observar el infinito a través de una lupa matemática. A primera vista, sumar infinitos términos parece una tarea imposible, pero con las herramientas adecuadas, podemos entender cuándo una serie tiene un valor finito y cuándo no. No basta con ver la fórmula: hay que leer entre líneas, interpretar el comportamiento de las sucesiones y aplicar el criterio correcto en el momento justo.

Este taller nos invita a ir más allá de la intuición y descubrir cómo conceptos como el criterio del término n-ésimo, el criterio integral, o la estructura de una serie telescópica pueden convertirse en aliados para desentrañar el misterio de la convergencia. Exploraremos cómo una simple transformación puede revelar que una suma infinita, en realidad, converge a un número tan real como cualquier otro.

Resolver series no es cuestión de memoria mecánica. Requiere un ojo crítico, capacidad para reconocer patrones, y una sensibilidad especial para identificar cuándo una serie tiene solución cerrada o cuándo se desvanece hacia el infinito. A través de ejercicios guiados, no solo practicaremos las técnicas, sino que entrenaremos la mente para formular preguntas clave: ¿La serie se parece a una geométrica? ¿Podemos aplicar un test directo? ¿Es posible expresarla como una telescópica?

Al final, comprenderemos que trabajar con series infinitas no es solo cuestión de sumar sin parar, sino de descubrir orden dentro del caos, lógica dentro de lo aparentemente inabarcable. Y esa, justamente, es la magia del cálculo.

Objetivo General

Aplicar de manera crítica y estructurada los criterios de convergencia de sucesiones y series infinitas, incluyendo series geométricas, telescópicas, de potencias y otras que requieren pruebas analíticas, con el fin de determinar su comportamiento y, cuando sea posible, hallar sus sumas. Se busca no solo desarrollar la habilidad operativa para aplicar criterios como el del término n-ésimo o el criterio integral, sino también fomentar la interpretación de resultados, la construcción de razonamientos lógicos y el fortalecimiento del pensamiento analítico en el contexto del cálculo integral.

Objetivos Específicos

1. Analizar el comportamiento de sucesiones numéricas, aplicando el concepto de límite para determinar su convergencia o divergencia, y justificando cada resultado con base en propiedades fundamentales del análisis matemático.
2. Aplicar criterios de convergencia en series infinitas, como el criterio del término n-ésimo, la comparación y el criterio integral, para establecer el carácter convergente o divergente de una serie dada.
3. Identificar y resolver series con estructura especial, tales como series telescópicas y geométricas, reconociendo patrones que permitan simplificar la expresión y hallar su suma exacta.
4. Determinar el intervalo y radio de convergencia de series de potencias, utilizando pruebas analíticas (como la prueba de la razón), interpretando el significado de los valores de x que hacen que la serie converja.
5. Desarrollar una argumentación matemática sólida, justificando la selección del criterio

aplicado en cada ejercicio y evaluando la coherencia de los resultados obtenidos con el contexto de la serie o sucesión analizada.

Contenido

Requisitos Previos

Antes de abordar el desarrollo de este taller, es fundamental haber consolidado los conocimientos teóricos y prácticos expuestos en el Referente de Pensamiento del Eje 4, que profundiza en los conceptos de sucesiones, series infinitas, series de potencias, criterios de convergencia y técnicas específicas como el criterio del término n-ésimo, el criterio integral y el tratamiento de series telescópicas.

De igual manera, se considera esencial:

- Haber analizado detalladamente los ejemplos resueltos en el referente, prestando atención a los procedimientos y justificaciones utilizadas.
- Consultar las lecturas complementarias sugeridas, las cuales enriquecen el abordaje teórico y proveen más contextos de aplicación.
- Elaborar una síntesis personal o grupal sobre los principales criterios de convergencia, su aplicación y los tipos de series más comunes.
- Participar activamente en los encuentros sincrónicos o revisar las grabaciones correspondientes, con el fin de aclarar dudas y fortalecer la comprensión del eje temático.

Estos requisitos no solo garantizan una base conceptual sólida, sino que también permiten desarrollar una actitud crítica y reflexiva frente a la resolución de problemas relacionados con series infinitas en el marco del cálculo integral.

Fundamento Teórico

En el estudio del cálculo integral, las sucesiones y series infinitas representan una extensión natural de los conceptos de límite y suma. Mientras que una sucesión es un conjunto ordenado de términos definidos por una ley o fórmula, una serie es la suma de los elementos de una sucesión. El análisis de estos elementos permite modelar comportamientos complejos, predecir patrones, y en muchos casos, hallar valores exactos a partir de expresiones infinitas.

Una de las propiedades más importantes de una sucesión es su convergencia: decimos que una sucesión converge si sus términos se acercan cada vez más a un valor límite fijo cuando n tiende a infinito. Si ese límite no existe, se dice que la sucesión diverge. Este concepto es clave para entender el comportamiento de las series, pues una serie puede converger solamente si la sucesión de sus sumas parciales también lo hace.

El estudio de las series infinitas implica la aplicación de distintos criterios para determinar su convergencia o divergencia. Entre los más usados se encuentran:

- Criterio del término n-ésimo: si $lim\ (n \to \infty)\ a\_n\ \neq\ 0$, entonces la serie $\sum a\_n$ diverge.
- Series geométricas: convergen si $|\ r\ |< 1$, y su suma es $a/(1-r)$
- Series telescópicas: se simplifican al sumar términos que se cancelan parcialmente, permitiendo hallar la suma con facilidad.
- Criterio integral: compara la serie con una integral impropia del tipo $\int f(x)dx$ para determinar convergencia o divergencia.
- Series de potencias: su convergencia depende del valor de x, y se analiza mediante el radio de convergencia, normalmente usando la prueba de la razón:
- $\lim(n \to \infty)\ |\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\ | =\ L$ y converge si $|\ x - a\ |< \frac{1}{L}$

Además, las series de Taylor y Maclaurin permiten representar funciones como sumas infinitas de potencias centradas en un punto, lo que ofrece una herramienta poderosa para la aproximación funcional y el análisis.

Este conjunto de herramientas analíticas no solo permite resolver ejercicios mecánicamente, sino que impulsa el desarrollo del pensamiento lógico y matemático, entrenando al estudiante para enfrentar situaciones donde el análisis cualitativo y cuantitativo se entrelazan. En este taller, cada ejercicio representa una oportunidad para aplicar estos fundamentos y evaluar su comprensión de manera activa.

Desarrollo de la Actividad

En esta sección, se resolverán los ejercicios propuestos aplicando los criterios de convergencia de sucesiones y series infinitas.

1. Convergencia o Divergencia de Sucesiones

Ejercicio A

$a_n = \frac{\ln(n^3)}{5n}$

Desarrollo: Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$\ln(n^3) = 3\ln(n)$, por tanto:

$a_n = \frac{3\ln(n)}{5n}$

Evaluamos el límite cuando n tiende a infinito:

$$\frac{\lim(n \to \infty)\, 3\ln(n)}{5n}$$

Este es un límite del tipo ∞/∞, por lo tanto, aplicamos la regla de $L'H\hat{o}pital$:

Derivada del numerador: $\frac{d}{dn}[3\ln(n)] = \frac{3}{n}$

Derivada del denominador: $\frac{d}{dn}[5n] = 5$

Entonces:

$$\frac{\lim(n \to \infty)\left(\frac{3}{n}\right)}{5} = \frac{\lim(n \to \infty)3}{5n} = 0$$

Conclusión: La sucesión converge.

Límite: $L = 0$

Ejercicio b

Determinar la convergencia o divergencia de la sucesión:

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1}$$

Desarrollo: Tomamos el límite de la expresión completa:

$$\lim(n \to \infty)\left[\frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1}\right]$$

Factorizamos n en el denominador para cada término:

$$\frac{n^2}{2n+1} = \frac{n^2}{n} \times \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = n \times \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\frac{n^2}{2n-1} = \frac{n^2}{n} \times \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = n \times \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$$

Entonces:

$$\lim(n \to \infty)\left[\frac{n}{2 + \frac{1}{n}} - \frac{n}{2 - \frac{1}{n}}\right]$$

Al aplicar el límite:

$$\left(2\ +\frac{1}{n}\right)\rightarrow\ 2, y\ \left(2\ -\frac{1}{n}\right)\rightarrow\ 2\ \Rightarrow\ denominadores\ se\ acercan\ a\ 2$$

Así que:

$$\lim(n\ \rightarrow\ \infty)\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\right]=\ 0$$

Pero, al observar con más detalle:

Tomamos la expresión original y combinamos ambos términos:

$$a_{\mathrm{n}}\ =\ n^{2[(\frac{1}{2n+1})-(\frac{1}{2n-1})]}$$

Calculamos la diferencia de fracciones:

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}=\frac{[(2n-1)-(2n+1)]}{[(2n+1)(2n-1)]}=\frac{-2}{4n^2-1}$$

Entonces:

$$a_{\mathrm{n}}\ =\ n^2\times\frac{-2}{4n^2-\ 1}$$

Simplificamos:

$$a_{\mathrm{n}}\ =\frac{-2n^2}{4n^2-\ 1}$$

Aplicamos el límite:

$$\frac{\lim(n \to \infty)(-2n^2)}{4n^2 - 1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Conclusión: La sucesión converge.

Límite: $L = -\frac{1}{2}$

2. Suma de Serie Infinita

Hallar, si es posible, el valor de la siguiente suma infinita:

$$S = 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \ldots$$

Desarrollo: Observamos que esta serie es una serie geométrica, ya que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una razón constante r = 4/5. Sin embargo, el primer término de esta serie no es 1, sino que el patrón comienza a partir del segundo término (cuando el exponente empieza en 2).

Recordando del referente del pensamiento del Eje 4, se establece que una serie geométrica converge si su razón cumple:

$$|\ r\ | < 1$$

y su suma está dada por:

$$\frac{a}{1 - r}$$

En este caso, la serie tiene dos partes:

- Primer término: 1
- Serie geométrica que inicia en $n = 2$: $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \ ...$

Esta segunda parte es una serie geométrica infinita con:

- Primer término $a \ = \ \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
- Razón $r \ = \frac{4}{5}$

Aplicamos la fórmula de suma:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{16}{25}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{1}{5}} = \left(\frac{16}{25}\right) \times \left(\frac{5}{1}\right) = \frac{16}{5}$$

Por tanto, sumamos ambos componentes:

$$S \ = \ 1 \ + \frac{16}{5} = \frac{5}{5} + \frac{16}{5} = \frac{21}{5}$$

Conclusión: La serie converge.

Suma total: $S \ = \frac{21}{5}$

3. Criterio del Término $n - ésimo$

Ejercicio a

Determinar si la serie diverge con base en el criterio del término n-ésimo:

$$\sum 5^n desde\, n = 0 \ hasta \ \infty$$

Desarrollo:

Según el criterio del término $n - ésimo$, si:

$$\lim(n \to \infty)\, a_{\mathrm{n}} \neq 0 \Rightarrow \ la\ serie\ diverge$$

Tomamos el término general:

$$a_{\mathrm{n}} = 5^{n}$$

Evaluamos el límite:

$$\lim(n \to \infty)\, 5^{n} = \infty$$

Como el límite no tiende a cero, entonces la serie diverge.

Este criterio está claramente explicado en el Referente del Eje 4, donde se indica que, si los términos de la sucesión no se acercan a cero, no hay posibilidad de que la suma converja.

Conclusión: La serie diverge por el criterio del término $n - ésimo$.

Ejercicio b

$$\sum \frac{n!}{3n! + 7}, desde\ n = 0\ hasta\ \infty$$

Desarrollo

Según el criterio del término $n - ésimo$, si:

$$\lim(n \to \infty)\, a_{\mathrm{n}} \neq 0 \Rightarrow \ la\ serie\ diverge$$

Pero si $\lim(n \to \infty)\, a_{\mathrm{n}} = 0$, no se puede concluir si la serie converge o diverge. Este criterio solo detecta divergencia, como se indica en el Referente de Pensamiento del Eje 4.

Tomamos el término general:

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{n!}{3n! + 7}$$

Evaluamos el límite:

$$\lim (n \to \infty) (n!)/(3n! + 7$$

Factorizamos $n!$

en el denominador:

$$= \frac{n!}{n!\left(3 + \frac{7}{n!}\right)} = \frac{1}{3 + \frac{7}{n!}}$$

Cuando $n \to \infty, \frac{7}{n!} \to 0$, entonces:

$$\lim(n \to \infty) a_{\mathrm{n}} = \frac{1}{3}$$

Como el límite no es cero, se concluye que:

$$\sum \frac{n!}{3n! + 7} diverge$$

Conclusión

La serie diverge, ya que el término general no tiende a cero. El criterio del término $n - ésimo$ permite afirmar con certeza la divergencia en este caso.

Ejercicio c

$$\sum \frac{5}{2n}, desde\ n = 0\ hasta\ \infty$$

Desarrollo

Según el criterio del término $n - ésimo$, si:

$$lim\ (n \to \infty)\ a_{\mathrm{n}} \neq 0 \Rightarrow la\ serie\ diverge$$

$lim\ (n \to \infty)\ a_{\mathrm{n}} = 0 \Rightarrow no\ se\ puede\ concluir$, se necesita otro criterio.

Tomamos el término general:

$$a_{\mathrm{n}} = 5/(2n)$$

Evaluamos el límite:

$$\frac{\lim(n \rightarrow \infty)\, 5}{2n} = 0$$

Dado que el límite tiende a cero, no se puede concluir nada sobre la convergencia o divergencia usando solo el criterio del término $n - \acute{e}simo$.

Esto está claramente indicado en el Referente del Eje 4, donde se establece que este criterio solo garantiza divergencia si el límite es distinto de cero. En caso contrario, deben emplearse otros métodos como comparación o integral.

Conclusión

No se puede concluir sobre la convergencia o divergencia usando únicamente el criterio del término $n - \acute{e}simo$. Se requiere aplicar otro criterio para determinar el comportamiento de la serie.

Ejercicio 4 – Serie Telescópica

Enunciado

La siguiente serie se puede expresar como una serie telescópica. Expresarla como tal y hallar su suma:

$\sum \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ desde $n = 0\ hasta\ \infty$

Desarrollo

Para transformar esta serie en forma telescópica, aplicamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3}$$

Multiplicamos ambos lados por $(2n+1)(2n+3)$:

$$1 = A(2n+3) + B(2n+1)$$

Expandimos:

$$1 = 2An + 3A + 2Bn + B$$

Agrupamos:

$$1 = (2A + 2B)n + (3A + B)$$

Igualamos coeficientes:

$$2A + 2B = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$3A + B = 1$$

Sustituyendo $B = -A$ en la segunda ecuación:

$$3A - A = 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Entonces:

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+3)}$$

Es decir:

$$\sum \left[\frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+3)}\right] desde\, n = 0\ hasta\ \infty$$

Observamos los primeros términos:

$$\frac{1}{2(1)} - \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{2(3)} - \frac{1}{2(5)} + \frac{1}{2(5)} - \frac{1}{2(7)} + \ ...$$

Se cancelan todos excepto el primer término:

$$\frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

Conclusión

La serie telescópica converge. Su suma es:

$$S = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 5 – Criterio Integral

Enunciado

Usar el criterio integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie dada:

$\sum \frac{1}{n+3}$ desde $n = 1$ hasta ∞

Desarrollo

Según el criterio integral, si f(n) es una función positiva, continua y decreciente para n ≥ N, entonces:

- Si $\int f(x)dx$ converge, la serie $\sum f(n)$ también converge.
  - Si $\int f(x)dx$ diverge, la serie $\sum f(n)$ también diverge.

Sea $f(x) = \frac{1}{x+3}$, que cumple con ser:

- Positiva para $x \geq 1$
- Continua en $[1, \infty)$
- Decreciente, ya que su derivada es negativa

Aplicamos el criterio integral evaluando:

$$\int \frac{1}{x + 3} dx \text{ desde } x = 1 \text{ hasta } \infty$$

Esta es una integral impropia:

$$\lim(t \to \infty) \int_1^t \frac{1}{x + 3} dx$$

Hacemos el cambio de variable directo:

$\int_1^t \frac{1}{x+3} dx = \ln|x + 3|$ evaluado de 1 $a\ t = ln(t + 3) - ln(4)$

Aplicamos el límite:

$$\lim(t \to \infty)\,[\ln(t + 3) - \ln(4)] = \infty$$

Por tanto, la integral diverge.

Conclusión

La serie $\sum \frac{1}{n+3}$ diverge por el criterio integral, ya que la integral asociada no tiene un valor finito.

Ejercicio 6 – Criterio Integral

Enunciado

Usar el criterio integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie dada. En caso de convergencia, determinar su suma:

$\sum e^{-n}$ desde $n = 1$ hasta ∞

Desarrollo

Sea $f(x) = e^{-x}$, que es:

- Positiva para $x \geq 1$
- Continua en $[1, \infty)$
- Decreciente, ya que su derivada es negativa

Aplicamos el criterio integral:

$$\int e^{-x} dx \text{ desde } x = 1 \text{ hasta } \infty$$

Esta es una integral impropia:

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim(t \to \infty) \int_1^{t} e^{-x} dx$$

Sabemos que:

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

Entonces:

$$\int_1^t e^{-x} dx = [-e^{-x}] de\ 1\ a\ t\ = -e^{-t} + e^{-1}$$

Aplicamos el límite:

$$\lim(t \rightarrow \infty)\,(-e^{-t} + e^{-1}) = 0 + e^{-1} = \frac{1}{e}$$

La integral converge, por tanto, la serie también converge.

Además, la serie es una geométrica con:

- $a = e^{-1}$
- $r = e^{-1}$

Como $|\ r\ | < 1$, usamos la fórmula:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

Conclusión

La serie converge. Su suma es:

$$S = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

Ejercicio 7 – Serie de Potencia

Enunciado

Hallar todos los valores de x para los cuales la serie sea convergente:

$$\sum 4 * \left(\frac{x - 3}{4}\right)^n desde\ n = 0\ hasta\ \infty$$

Desarrollo

Esta es una serie de potencias de la forma:

$$\sum a_n * (x - c)^n$$

en este caso:

- $a_n = 4$
- $c = 3$
- base: $\frac{x-3}{4}$

Identificamos que se trata de una serie geométrica con razón:

$$r = \frac{x - 3}{4}$$

Sabemos que una serie geométrica converge si:

$$|\, r \,| < 1$$

Entonces:

$$\left| \frac{x - 3}{4} \right| < 1$$

Multiplicamos ambos lados por 4:

$$|\, x - 3 \,| < 4$$

Esto define un intervalo de convergencia centrado en $x = 3\ con\ radio$ 4:

$$-4 < x - 3 < 4 \Rightarrow -1 < x < 7$$

Ahora evaluamos los extremos:

$x = -1 \Rightarrow r = \frac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow$ la serie es $\sum 4 * (-1)^n \Rightarrow$ no converge (no tiende a 0)

$$x = 7 \Rightarrow r = \frac{7 - 3}{4} = 1 \Rightarrow la\ serie\ es \sum 4 * 1^n = \sum 4 \Rightarrow diverge$$

Conclusión

La serie converge para:

$$x \in (-1, 7)$$

Y diverge en los extremos $x = -1\ y\ x = 7$.

Enunciado

Hallar el valor de c para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\sum \left(\frac{1}{1 + c}\right)^n \text{desde}\, n = 0 \text{ hasta } \infty = 2$$

Desarrollo

La serie es de la forma:

$$\sum r^n \text{desde}\, n = 0 \text{ hasta } \infty$$

Sabemos que esta es una serie geométrica que converge si $| r | < 1$, y cuya suma es:

$\frac{a}{1 - r}$, donde a = 1 si la suma empieza en $n = 0$

Aquí:

- $r = \frac{1}{1 + c}$
- $a = 1$ $(ya\ que\ r^0 = 1)$
- $S = 2$ $(dado\ por\ el\ enunciado)$

Entonces aplicamos la fórmula:

$$S = \frac{1}{1 - r} = 2$$

Sustituimos $r = \frac{1}{1 + c}$:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1 + c}\right)} = 2$$

Calculamos el denominador:

$1 - \left(\frac{1}{1 + c}\right) = \frac{((1 + c) - 1)}{(1 + c)} = \frac{c}{(1 + c)}$

Entonces:

$\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{1+c}} = 2$

Invierto la fracción del denominador:

$$\frac{1\ +\ c}{c} =\ 2$$

Multiplicamos en cruz:

$$1\ +\ c\ =\ 2c\ \Rightarrow\ 1\ =\ c$$

Conclusión

El valor de c que cumple la igualdad es:

$$c\ =\ 1$$

Conclusiones

El desarrollo de este taller correspondiente al Eje 4 permitió no solo reforzar el conocimiento técnico sobre sucesiones y series infinitas, sino también consolidar una visión más crítica, analítica y contextualizada del cálculo integral. Más allá de aplicar fórmulas, se trató de interpretar el comportamiento de estructuras matemáticas infinitas y argumentar con base en propiedades fundamentales. A continuación, se sintetizan los aspectos clave del proceso:

Se reafirmó que el análisis del límite de una sucesión es el punto de partida esencial para entender su convergencia. Ejercicios como 1.a y 1.b evidenciaron cómo simplificaciones algebraicas y uso de la regla de L'Hôpital son herramientas críticas en este proceso.

En cuanto a series, se evidenció que no basta con que los términos tiendan a cero. El criterio del término $n-ésimo$ fue útil para detectar divergencia (como en 3.a y 3.b), pero también se reconoció su limitación en 3.c, lo cual obligó a considerar otros métodos más robustos.

La serie geométrica fue uno de los pilares del taller. Ejercicios como el 2 y el 8 mostraron cómo aplicar la fórmula de suma $\frac{a}{1-r}$ exige primero analizar la razón y verificar $|\ r\ | < 1$. Además, en el ejercicio 7 se evidenció cómo esta lógica se amplía al estudio de series de potencias, lo cual vincula el tema con representaciones funcionales más complejas.

El criterio integral, trabajado en los ejercicios 5 y 6, permitió reforzar la conexión entre series e integrales impropias. La comparación entre la convergencia de una integral y la de una serie subraya la profunda interrelación de conceptos dentro del análisis matemático. Aquí, el uso del límite y el conocimiento del comportamiento asintótico de funciones como $\frac{1}{x+3}$ y e^{-x} fue determinante.

Las series telescópicas, como se vio en el ejercicio 4, sirvieron para destacar el poder de las fracciones parciales y el reconocimiento de estructuras que permiten cancelaciones sucesivas.

Este método no solo resolvió el problema, sino que resaltó la importancia de transformar expresiones para hacer visibles patrones ocultos.

La manipulación algebraica fina fue esencial: desde simplificar límites hasta descomponer fracciones o reconocer la forma general de una serie. Muchos de los errores potenciales no estaban en el procedimiento formal, sino en pasos previos como la factorización o la organización de los términos.

La interpretación de las condiciones de convergencia (por ejemplo, los extremos del intervalo en una serie de potencias) exigió no solo cálculo, sino razonamiento lógico y argumentativo. Este aspecto fue crucial para dar validez matemática a los resultados obtenidos.

A lo largo del taller, se fortaleció la capacidad de justificar elecciones metodológicas: por qué usar el criterio del término $n - ésimo$ y no el integral, cuándo una serie es geométrica y cuándo no lo es, cómo decidir si una transformación conduce o no a una solución efectiva.

Aunque el contexto de este taller fue académico, los conceptos trabajados tienen aplicaciones reales en áreas como:

Modelado de crecimiento y decaimiento exponencial (series tipo e^{-n})

Aproximación de funciones (series de potencias)

Procesamiento de señales y sistemas dinámicos (series geométricas y telescópicas)

Cálculo de límites infinitos, como base para análisis de algoritmos, fenómenos naturales y comportamiento económico.

En suma, el Eje 4 no fue solo un conjunto de ejercicios sobre series infinitas, sino un espacio para articular conceptos del análisis matemático, fortalecer habilidades de resolución y consolidar un pensamiento matemático más profundo, riguroso y conectado con otras áreas del saber.

Referencias

La principal fuente de consulta y orientación para el desarrollo de este taller fue el documento "Referente de Pensamiento – Eje 4: Sucesiones y Series Infinitas", elaborado por la Universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD. Este material no solo sirvió como base teórica, sino como una guía pedagógica que articula los conceptos fundamentales del cálculo integral con su aplicación en ejercicios y situaciones contextualizadas.

A lo largo de este eje se abordaron temas como:

Convergencia de sucesiones

Series infinitas

Criterios de convergencia (término n-ésimo, integral, etc.)

Series geométricas, telescópicas y de potencias

Intervalos y radios de convergencia

Este referente no solo presenta definiciones y fórmulas, sino que invita al estudiante a razonar, a interpretar los resultados y a tomar decisiones metodológicas fundamentadas. Su lenguaje claro, los ejemplos resueltos y la conexión con recursos audiovisuales lo convierten en una herramienta integral que estimula el pensamiento crítico y favorece la apropiación de saberes.

Además, el referente se destaca por su enfoque por competencias, promoviendo el aprendizaje autónomo y la capacidad de aplicar el conocimiento en contextos reales. Es, por tanto, el único documento necesario para la comprensión profunda del eje y la resolución efectiva de los ejercicios aquí trabajados.