Actividad Evaluativa - Eje 3 - Calculo de integrales indefinidas

Melqui Romero, Julian Piñeros y Harold Sabogal

Universidad Área Andina, Bogotá D.C

Fundación Universitaria del Área Andina

Ingeniería en Sistemas

Cálculo Integral

Danilo De Jesús Ariza Agámez

15 de marzo del 2025

Actividad Evaluativa - Eje 3 - Calculo de Integrales Indefinidas

El presente documento tiene como finalidad desarrollar la actividad evaluativa correspondiente al Eje 3: Aplicaciones del Cálculo Integral, enmarcando el uso de integrales definidas para la resolución de problemas en diversas áreas de la matemática y la física.

A lo largo de esta actividad, se aplicarán técnicas de integración en el cálculo de áreas bajo curvas, volúmenes de sólidos de revolución y trabajo mecánico mediante el uso del Teorema Fundamental del Cálculo. El objetivo principal es demostrar la comprensión y aplicación de estos conceptos en la solución de problemas prácticos.

El desarrollo de los ejercicios seguirá una estructura clara y ordenada, en la que se identificará el tipo de integral involucrada, se aplicará la técnica de integración adecuada y se consignará cada paso de manera detallada. De este modo, se garantizará un análisis riguroso y fundamentado, conforme a las directrices establecidas en la rúbrica de evaluación.

Finalmente, se espera que este ejercicio refuerce la capacidad analítica, permitiendo conectar los conceptos teóricos con sus aplicaciones prácticas, facilitando así la resolución de problemas en contextos matemáticos y físicos.

Objetivos

Objetivo General

Desarrollar y aplicar las técnicas de integración en la resolución de problemas matemáticos y físicos, enfocándose en el cálculo de áreas, volúmenes de sólidos de revolución y trabajo mecánico, mediante el uso de integrales definidas.

Objetivos Específicos

1. Comprender y aplicar el concepto de integral definida para el cálculo de áreas bajo curvas.
2. Utilizar el método de integración adecuado para determinar volúmenes de sólidos generados por revolución.
3. Resolver problemas de trabajo mecánico empleando la integral definida para calcular la energía necesaria en un desplazamiento.
4. Presentar de manera estructurada y detallada cada uno de los pasos en la resolución de los ejercicios, garantizando claridad en los procedimientos matemáticos.
5. Relacionar los conceptos teóricos con su aplicación práctica en problemas de matemática y física.

Tabla de contenido

Fundamentos del Cálculo Integral

Integral definida y sus aplicaciones

El cálculo integral es una de las ramas fundamentales del análisis matemático y su aplicación trasciende múltiples disciplinas como la física, la ingeniería y la economía. La integral definida es una herramienta clave dentro de esta rama, ya que permite calcular magnitudes acumulativas, tales como áreas, volúmenes y trabajo mecánico.

La integral definida de una función f(x) en un intervalo $[a, b]$ se expresa como:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Donde:

- a y b representan los límites de integración.
- $f(x)$ es la función que se integra.
- dx indica la variable de integración.

De acuerdo con el Teorema Fundamental del Cálculo, la integral definida se relaciona con la antiderivada de la función integrando, lo que permite calcular su valor a través de la evaluación en los extremos del intervalo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$.

Aplicaciones de la Integral Definida

Las aplicaciones de la integral definida son diversas, entre las más comunes se encuentran:

Cálculo de áreas bajo curvas:

- Permite determinar el área entre una función y el eje x en un intervalo dado.
- Si la función tiene partes negativas, se considera el valor absoluto de la integral.

Cálculo de área entre dos funciones:

- Se obtiene integrando la diferencia entre la función superior y la inferior en el intervalo de intersección.
- Expresión general:

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\, dx$$

Donde $f(x)$ es la función superior y $g(x)$ la inferior.

Volumen de sólidos de revolución:

- Se utiliza el método de discos o anillos cuando el sólido rota alrededor de un eje.
- Para la rotación sobre el eje x:

$$V = \pi \int_{a}^{b} [f(x)]^2\, dx$$

Trabajo mecánico:

Se emplea la integral para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable en un desplazamiento.

Se expresa como:

$$W = \int_{a}^{b} F(x)\, dx$$

Donde $F(x)$ es la función de la fuerza aplicada.

Importancia del Uso de la Integral Definida

El uso de la integral definida no solo es clave en la teoría matemática, sino que también permite resolver problemas prácticos que involucran acumulación de cantidades. Su aplicación en la física, la economía y otras ciencias la convierte en una herramienta esencial en el análisis y modelado de fenómenos del mundo real.

Métodos de integración utilizados

El cálculo integral cuenta con diversas técnicas que permiten resolver integrales de distinta complejidad. Dependiendo de la forma de la función a integrar, es necesario aplicar el método adecuado para simplificar su evaluación y encontrar la solución correcta. A continuación, se presentan los métodos de integración más utilizados en el desarrollo de problemas matemáticos y físicos.

Integración por Sustitución

Este método, también conocido como cambio de variable, consiste en transformar la integral original en una más sencilla a través de una nueva variable. Se emplea cuando la función integrando contiene una expresión cuya derivada también está presente en la integral.

Ejemplo:

Si se tiene la integral:

$$\int \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right) dx$$

Se hace el cambio de variable: $u = x^2 + 1$, por lo que $du = 2x\, dx$. Reescribiendo la integral en términos de u se simplifica su resolución.

Integración por Partes

Basada en la regla del producto de la derivación, este método se emplea cuando la función integrando es el producto de dos funciones. Su fórmula general es:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Ejemplo:

Para calcular $\int x\, e^x\, dx$, se elige $u = x$ y $dv = e^x dx$. Derivando y resolviendo se obtiene la integral.

Integrales Trigonométrica

Cuando la función que integra contiene funciones trigonométricas elevadas a potencias, se pueden emplear identidades trigonométricas para simplificar la expresión antes de integrar.

Ejemplo: Para $\int sen^{2(x)} dx$ se usa la identidad de medio ángulo:

$$sen^{2(x)} = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Lo que permite transformar la integral en una expresión más sencilla.

Sustitución Trigonométrica

Se usa cuando la integral contiene expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$. En estos casos, se realizan sustituciones trigonométricas basadas en las identidades pitagóricas para eliminar las raíces y simplificar la integral.

Ejemplo: Para $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, se hace la sustitución $x = 2sen\theta$, lo que transforma la integral en una expresión trigonométrica más fácil de evaluar.

Integración por Fracciones Parciales

Este método se usa cuando la función a integrar es una fracción racional (un cociente de polinomios). Se descompone la fracción en sumas de fracciones más simples para facilitar su integración.

Ejemplo: Para integrar $\int \frac{2x+3}{x^2 - x - 2}\, dx$, se factoriza el denominador y se descompone en fracciones parciales antes de integrar.

Importancia de la Selección del Método Adecuado

El correcto uso de estos métodos permite abordar la resolución de integrales de manera más eficiente. Dependiendo de la naturaleza de la función, una técnica puede ser más adecuada que otra. Dominar estas estrategias es fundamental en el estudio del cálculo integral y su aplicación en distintas disciplinas.

Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es uno de los resultados más importantes en el análisis matemático, ya que establece la relación entre la derivación y la integración, dos de los conceptos centrales del cálculo. Este teorema nos permite evaluar integrales definidas de manera eficiente y proporciona la base teórica para el uso de la integral como herramienta para el cálculo de áreas, volúmenes y muchas otras aplicaciones.

Enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo

El TFC se compone de dos partes esenciales:

Primera Parte: Relación entre Integral y Derivada

Si $f(x)$es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces la función definida como:

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x)$$

es una antiderivada de, lo que significa que:

$$F'(x) = f(x)$$

Esta propiedad nos indica que la derivada de la integral de una función nos devuelve la función original, lo que confirma que la integración y la derivación son operaciones inversas.

Segunda Parte: Evaluación de una Integral Definida

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces la integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$ se calcula como:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Este resultado simplifica la evaluación de integrales definidas, ya que basta con encontrar una antiderivada de la función y evaluarla en los límites del intervalo.

Aplicaciones del Teorema Fundamental del Cálculo

Cálculo de Áreas:

- Permite determinar el área bajo la curva de una función en un intervalo dado.

- Se aplica en la resolución de problemas geométricos y físicos.

Cálculo de Volúmenes:

- Se usa en el método de discos, anillos y capas cilíndricas para hallar volúmenes de sólidos de revolución.

Cálculo de Trabajo Mecánico:

Permite calcular el trabajo realizado por una fuerza variable mediante una integral definida.

Importancia del Teorema Fundamental del Cálculo

El TFC unifica los conceptos de derivación e integración, mostrando que son procesos inversos. Gracias a este teorema, la integración, que originalmente se basaba en sumas de Riemann, se vuelve mucho más práctica al poder ser evaluada con antiderivadas. Su impacto en la matemática y en las ciencias aplicadas es innegable, ya que permite resolver problemas en áreas como la física, la ingeniería y la economía de manera efectiva.

Metodología de Resolución

Definición de límites de integración

En el cálculo integral, los límites de integración determinan el intervalo sobre el cual se evalúa una integral definida. Estos límites juegan un papel crucial en la correcta interpretación geométrica y física del problema, ya que establecen el rango en el que se acumula una cantidad, como el área bajo una curva, el volumen de un sólido de revolución o el trabajo realizado por una fuerza variable.

Tipos de Límites de Integración

Los límites de integración dependen del contexto en el que se aplique la integral y pueden clasificarse en los siguientes tipos:

Límites explícitos:

- Son valores numéricos definidos directamente en la integral.
- Ejemplo: En la integral

$$\int_{1}^{4} (x^2 + 2x)\, dx$$

los límites de integración son $a = 1a = 1$ y $b = 4b = 4$, lo que indica que la acumulación de área o cualquier otra magnitud se evalúa en el intervalo [1,4].

Límites determinados por intersección de funciones:

- Se usan cuando se desea calcular el área entre dos curvas o el volumen de una región delimitada por diferentes funciones.
- Para encontrarlos, se igualan las funciones y se resuelve la ecuación resultante para obtener los puntos de intersección.
- Ejemplo: Si se quiere encontrar el área entre $f(x) = x2f(x) = x^2 y\ g(x) = -x2 + 2g(x) = -x^2 + 2$, los límites de integración se obtienen resolviendo:

$$x2 = -x2 + 2x^2 = -x^2 + 2$$

Despejando, se obtiene $x = -1, x = 1x = -1, x = 1$, por lo que los límites de integración serán $a = -1a = -1$ y $b = 1b = 1$.

Límites en integrales de volumen:

- En los problemas de volúmenes de sólidos de revolución, los límites pueden estar dados por la región a rotar o por las intersecciones de funciones.
- Ejemplo: Para calcular el volumen generado al rotar la función $y = x2y = x^2$ en el intervalo $x = 0x = 0$ a $x = 3x = 3$, los límites de integración son simplemente $a = 0a = 0$ y $b = 3b = 3$.

Límites en integrales de trabajo mecánico:

- En problemas de física, los límites representan la distancia a lo largo de la cual se aplica una fuerza variable.

- Ejemplo: Si se aplica una fuerza desde $F(x) = 3x2 + 4xF(x) = 3x^2 + 4x \, desde \, x = 0x = 0$ hasta $x = 5x = 5$, la integral del trabajo tendrá límites $a = 0a = 0 \, y \, b = 5b = 5$:

$$W = \int (3x2 + 4x)dxW = \int_0^5 (3x^2 + 4x)dx$$

Importancia de la Correcta Elección de los Límites de Integración

Seleccionar los límites correctos es fundamental para obtener resultados precisos en el cálculo integral. Un error en su determinación puede llevar a valores incorrectos de áreas, volúmenes o trabajo mecánico. Por ello, es esencial analizar el contexto del problema y, cuando sea necesario, resolver ecuaciones para encontrar los valores adecuados antes de proceder con la integración.

Tabla de Integrales como Ficha Nemotécnica

En el estudio del cálculo integral, contar con una tabla de integrales estructurada de manera nemotécnica facilita la resolución de problemas y permite identificar rápidamente las reglas y métodos aplicables. A continuación, se presenta una tabla organizada con las integrales más comunes junto con su argumentación y uso en distintos contextos.

Importancia de la Tabla de Integrales

Tipo de Integral	Regla General	Ejemplo	Desarrollo del Ejemplo
Integrales de Potencias	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, para \, n \neq -1$	$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]\vert_1^3$	$\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \left(\frac{27}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{26}{3}$

Integrales Exponenciales	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0$	$e - 1$
Integrales Logarítmicas	$\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int_1^e \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln(e) - \ln(1)$	$1 - 0 = 1$
Integrales Trigonométricas	$\int sen(x) dx = -\cos(x) + C$	$\int_0^{\pi} \cos(x)\, dx = sen(\pi) - sen(0)$	0 - 0 = 0
Integrales por Sustitución	Si $u = g(x)$, entonces $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du$	Para $\int x\, e^{x^2} dx$, tomamos $u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx$	$\left(\frac{1}{2}\right) \int e^u du = \left(\frac{1}{2}\right) e^u + C = \left(\frac{1}{2}\right) e^{x^2} + C$
Integrales de Fracciones Parciales	Se descompone en fracciones simples para integrar	$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2} dx$, se factoriza el denominador en $(x - 2)(x + 1)$	Se usa fracciones parciales

Contar con esta ficha nemotécnica permite:

- Agilizar el proceso de integración al reconocer rápidamente las formas conocidas.
- Evitar errores en cálculos complejos.
- Facilitar el aprendizaje al organizar la información de manera estructurada.

El uso de estas reglas en la resolución de problemas permite abordar integrales más complejas con una base sólida y una estrategia clara.

Desarrollo de la Actividad

Cálculo de Áreas Bajo Curvas

Ejercicio a – $f(x) = x(x - 2)$ y las rectas verticales dadas por: $x^2 = 1$

La función dada es:

$$f(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$$

Las rectas que delimitan la región son:

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Debemos calcular el área encerrada por la curva en el intervalo: $[-1,1]$

Paso 1: Identificación del Tipo de Integral

Este problema corresponde a una integral definida, ya que buscamos calcular un área bajo la curva en un intervalo específico.

Clasificación

- Tipo de función: Polinómica
- Tipo de integral: Definida
- Técnica de integración: Regla de la potencia para integrales
- Consideración especial: La función cambia de signo en el intervalo, por lo que debemos considerar el valor absoluto en la integración.

Según el Referente de Pensamiento Eje 1, una integral definida permite calcular áreas bajo la curva cuando se toman en cuenta los límites de integración.

Paso 2: Análisis de la Función y sus Signos

Para entender cómo se comporta la función, determinamos sus ceros:

$$f(x) = x(x - 2) = 0$$

Esto nos da:

$$x = 0 \ y \ x = 2$$

El análisis de signos en el intervalo $[-1,1]$ nos dice que:

- En $[-1,0] \rightarrow f(x)$ es negativa, por lo que tomaremos su valor absoluto.
- En $[0,1] \rightarrow f(x)$ es positiva, por lo que integramos normalmente.

Como se explica en el Referente de Pensamiento Eje 2, cuando la función cambia de signo, debemos ajustar la integral para evitar que se cancelen áreas negativas.

División de la integral

$$A = \int \big(-f(x)\big)\, dx \;\; en\, [-1{,}0] + \int f(x)\, dx \;\; en\, [0{,}1]$$

Paso 3: Aplicación de la Técnica de Integración

Dado que $f(x) = x2 - 2xf(x) = x2 - 2x$, utilizamos la regla de la potencia:

Si:

$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, para $n \neq -1$

entonces, aplicamos esta regla a nuestra función.

Paso 4: Resolviendo las Integrales

Cálculo de $A1$ en el intervalo $[-1{,}0]$

Para esta región, tomamos $-f(x)$:

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (2x - x^2)\, dx$$

Aplicamos la integración término a término:

$$A_1 = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0}$$

Evaluamos en los límites:

$$A_1 = (0 - 0) - \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$A_1 = \frac{4}{3}$$

Cálculo de $A2$ en el intervalo $[0{,}1]$

Para esta región, integramos directamente f(x):

$$A_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x)\,dx$$

Aplicamos la integración:

$$A_2 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^1$$

Evaluamos en los límites:

$$A_2 = \left(\frac{1}{3} - 1\right) - (0 - 0)$$

$$A_2 = \frac{2}{3}$$

Paso 5: Sumar las Áreas

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Conclusión y Análisis desde los Referentes de Pensamiento

Según el Referente de Pensamiento Eje 3, el cálculo de áreas mediante integrales es una herramienta fundamental en aplicaciones físicas y geométricas.

En este ejercicio, utilizamos la integral definida para determinar un área, teniendo en cuenta la división en regiones positivas y negativas.

El resultado final es:

$$A = 2\, unidades\ cuadradas$$

Este procedimiento se puede extender a otros casos más complejos, como integrales trigonométricas o racionales, siguiendo principios similares.

Ejercicio b – $f(x) = cosx$ y las rectas verticales dadas por: $x = \pm\pi$

Nos dan la función:

$$f(x) = \cos(x)$$

y las rectas verticales:

$$x = \pm\pi$$

Debemos calcular el área encerrada por la curva en el intervalo:

$$[-\pi, \pi]$$

Paso 1: Identificación del Tipo de Integral

Este problema corresponde a una integral definida, ya que buscamos calcular un área bajo la curva en un intervalo específico.

Clasificación

- Tipo de función: Trigonométrica
- Tipo de integral: Definida
- Técnica de integración: Integración directa de la función trigonométrica
- Consideración especial: El coseno es simétrico respecto al eje y, por lo que podemos aprovechar la propiedad de simetría para simplificar la integral.

Según el Referente de Pensamiento Eje 1, el uso de integrales definidas permite calcular áreas bajo funciones trigonométricas en intervalos finitos.

Paso 2: Análisis de la Función y su Comportamiento

El coseno es una función par, lo que significa que:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Esto nos dice que el área bajo la curva de $cos(x)$ en $[-\pi, 0]$ es igual a la de $[0, \pi]$. Es decir, podemos escribir la integral como:

$$A = 2\int_0^\pi \cos(x)\, dx \; en \; [0, \pi]$$

Esta propiedad de simetría nos ayuda a reducir el número de cálculos, lo cual es una estrategia útil en integración.

Paso 3: Aplicación de la Técnica de Integración

La integral del coseno se encuentra en las tablas de integrales del Referente de

Pensamiento Eje 2, y se resuelve usando:

$$\int \cos(x)\, dx \; = \; sen(x)$$

Aplicamos esta integral en el intervalo $[0, \pi]$:

$$A_1 = \int \cos(x)\, dx$$

$$A_1 = \; [\, sen(x)]_0^{\pi}$$

Paso 4: Evaluación de la Integral

Sustituyendo los valores en la función seno:

$$A_1 = \; sen(\pi) - \; sen(0)$$

$$A_1 = \; 0 \; - \; 0 \; = \; 0$$

Dado que la función cambia de signo, necesitamos tomar el valor absoluto de la integral en la región donde $\cos(x)$ es negativo, que es en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Como sabemos que el área debe ser positiva, reescribimos la integral considerando el valor absoluto:

$$A_1 = \; \left|\int \cos(x)\, dx \; en \; [0, \pi]\right|$$

Evaluando correctamente:

$$A_1 = \; |\, 1 \; - \; (-1)| = \; |\, 2\, | = \; 2$$

Finalmente, como usamos la propiedad de simetría, el área total es:

$$A \; = \; 2 \; \times \; A_1 = \; 2 \; \times \; 2 \; = \; 4$$

Conclusión y Relación con los Referentes de Pensamiento

Según el Referente de Pensamiento Eje 3, las funciones trigonométricas tienen aplicaciones en cálculo de áreas en fenómenos físicos y geométricos. En este ejercicio, la simetría del coseno nos permitió reducir el cálculo a la mitad, facilitando la solución.

El resultado final es:

$$A = 4\, unidades\ cuadradas$$

Ejercicio c – $f(x) = x^2$ y la función dada por: $g(x) = -x^2 + 2$

Se nos dan las funciones:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 2$$

Debemos encontrar el área encerrada entre ambas curvas.

Paso 1: Identificación del Tipo de Integral

Este problema corresponde a una integral definida, ya que buscamos calcular el área entre dos curvas en un intervalo determinado.

Clasificación

- Tipo de función: Polinómica
- Tipo de integral: Definida
- Técnica de integración: Diferencia de funciones
- Consideración especial: El área entre dos curvas se obtiene integrando la diferencia entre la función superior e inferior.

Según el Referente de Pensamiento Eje 1, la integral definida nos permite calcular áreas bajo curvas y entre funciones, considerando los signos de la función.

Paso 2: Determinación de los Puntos de Intersección

Para encontrar los límites de integración, igualamos ambas funciones:

$$x^2 = -x^2 + 2$$

Sumamos x^2 en ambos lados:

$$2x^2 = 2$$

Dividimos entre 2:

$$x^2 = 1$$

Tomamos la raíz cuadrada:

$$x = \pm 1$$

Por lo tanto, las funciones se intersecan en $x = -1$ y $x = 1$ lo que define nuestro intervalo de integración:

$$[-1,1]$$

Según el Referente de Pensamiento Eje 2, los límites de integración en problemas de áreas siempre se determinan por la intersección de las funciones involucradas.

Paso 3: Planteamiento de la Integral

El área entre dos curvas se calcula con la fórmula:

$$A = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx \; en \; [-1,1]$$

Sustituyendo nuestras funciones:

$$A = \int_{-1}^{1} \big((-x^2 + 2) - x^2\big)\, dx \; en \; [-1,1]$$

Simplificamos:

$$A = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx \; en \; [-1,1]$$

Paso 4: Aplicación de la Técnica de Integración

Usamos la regla de la potencia para integrar término a término:

Si:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad para\, n \neq -1$$

entonces, aplicamos la integral:

$$\int (-2x^2 + 2)\, dx = \left(-2 \int x^2\, dx\right) + \left(2 \int 1\; dx\right)$$

$$= \left(-2 \left[\frac{x^3}{3}\right]\right) + \; (2\,[\,x\,])$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1}$$

Paso 5: Evaluación de la Integral

Sustituyamos los valores en los límites de integración:

$$A = \left(-\frac{2}{3}(1)^3 + 2(1)\right) - \left(-\frac{2}{3}(-1)^3 + 2(-1)\right)$$

$$A = \left(-\frac{2}{3} + 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right)$$

$$A = \left(\frac{6}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{3}\right)$$

$$A = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$A = \frac{8}{3}$$

Conclusión y Relación con los Referentes de Pensamiento

Según el Referente de Pensamiento Eje 3, calcular áreas entre curvas tiene aplicaciones en problemas físicos y geométricos, como en economía, estadística y física.

El área total encerrada entre las curvas es:

$$A = \frac{8}{3} unidades\ cuadradas$$

Cálculo de Volúmenes de Sólidos de Revolución

Ejercicio a – $y \frac{x^2}{4}$ con las rectas dadas por: x=0 y x= 4. Sobre el eje x

Se nos da la función:

$$y = \frac{x^2}{4}$$

y las rectas verticales que delimitan la región de integración:

$x = 0$ y $x = 4$

La función gira en torno al eje x.

Paso 1: Identificación del Tipo de Integral

Este problema corresponde a una integral definida de volumen, ya que buscamos calcular el volumen generado por la revolución de una curva alrededor del eje x.

Clasificación

- Tipo de función: Cuadrática
- Tipo de integral: Volumen por revolución
- Técnica de integración: Método de discos
- Fórmula de volumen:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$$

Según el Referente de Pensamiento Eje 1, el cálculo de volúmenes mediante integración permite obtener sólidos generados por rotaciones de curvas alrededor de ejes de simetría.

Paso 2: Aplicación del Método de Discos

El método de discos se usa cuando una función gira alrededor del eje x. Su fórmula es:

$$V = \pi \int [f(x)]^2 \, dx \;\; en \; [a, b]$$

Sustituyendo nuestra función:

$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx \;\; en \; [0,4]$$

Simplificamos:

$$V = \pi \int \left(\frac{x^4}{16}\right) dx \;\; en \; [0,4]$$

Paso 3: Aplicación de la Técnica de Integración

Usamos la regla de la potencia para integrar:

Si:

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, para $n \neq -1$

entonces, aplicamos la integral:

$$\int_0^4 \left(\frac{x^4}{16}\right) dx = \left(\frac{1}{16}\right)\int_0^4 x^4\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right)\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right)\left[\left(\frac{4^5}{5}\right) - \left(\frac{0^5}{5}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right)\left[\frac{1024}{5} - 0\right]$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right) * \left(\frac{1024}{5}\right)$$

$$= \frac{1024}{80}$$

$$= 12.8$$

Multiplicamos por π:

$$V = \pi * 12.8$$

$$V = 12.8\pi$$

Conclusión y Relación con los Referentes de Pensamiento

Según el Referente de Pensamiento Eje 3, el cálculo de volúmenes mediante integrales tiene aplicaciones en ingeniería, física y modelado 3D. En este ejercicio, usamos el método de discos para encontrar el volumen de un sólido generado por revolución.

El volumen total del sólido es:

$$V = 12.8\pi \ \ unidades\ cúbicas$$

Ejercicio b – $y = \sqrt{x}$ con las rectas $x = 0\ y\ x = 1$. Sobre el eje x

Se nos da la función:

$$y = \sqrt{x}$$

y las rectas verticales:

$$x = 0 \ \ y \ \ x = 1$$

La función gira en torno al eje x.

Paso 1: Identificación del Tipo de Integral

Este problema corresponde a una integral definida de volumen, ya que buscamos calcular el volumen generado por la revolución de una curva alrededor del eje x.

Clasificación

- Tipo de función: Función radical
- Tipo de integral: Volumen por revolución
- Técnica de integración: Método de discos
- Fórmula de volumen:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$$

Según el Referente de Pensamiento Eje 1, la integral definida permite obtener volúmenes de sólidos generados por la rotación de funciones alrededor de un eje.

Paso 2: Aplicación del Método de Discos

El método de discos se usa cuando una función gira alrededor del eje x. Su fórmula es:

$V = \pi \int [f(x)]^2 \, dx$ en $[a, b]$

Sustituyendo nuestra función:

$V = \pi \int \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx$ en [0,1]

Simplificamos:

$V = \pi \int x \ dx$ en [0,1]

Paso 3: Aplicación de la Técnica de Integración

Usamos la regla de la potencia para integrar:

Si:

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, para $n \neq -1$

entonces, aplicamos la integral:

$$\int x \; dx = \frac{x^2}{2}$$

Evaluamos en los límites:

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

Paso 4: Evaluación de la Integral

Sustituyamos los valores en los límites de integración:

$$V = \pi \left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right]$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{1}{2}\right) - 0\right]$$

$$V = \pi * \frac{1}{2}$$

$$V = \frac{\pi}{2}$$

Conclusión y Relación con los Referentes de Pensamiento

Según el Referente de Pensamiento Eje 3, el cálculo de volúmenes mediante integrales es fundamental en aplicaciones científicas y tecnológicas, como la ingeniería y la física.

El volumen total del sólido generado por la rotación de la función $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x es:

$$V = \frac{\pi}{2} \; unidades \; cúbicas$$

Ejercicio c – $y = x^3 \; con \; x = 0 \; y \; y = 8$. Sobre el eje y.

Se nos da la función:

$$y = x^3$$

y las condiciones de integración:

$$x = 0 \text{ y } y = 8$$

La función gira en torno al eje y.

Paso 1: Identificación del Tipo de Integral

Este problema corresponde a una integral definida de volumen, ya que buscamos calcular el volumen generado por la revolución de una curva alrededor del eje y.

Clasificación

- Tipo de función: Polinómica
- Tipo de integral: Volumen por revolución
- Técnica de integración: Método de casquillos cilíndricos
- Fórmula de volumen:

$$V = 2\pi \int_a^b (radio)(altura)\, dy$$

Según el Referente de Pensamiento Eje 1, el cálculo de volúmenes mediante integrales permite obtener sólidos generados por rotaciones de curvas alrededor de diferentes ejes de simetría.

Paso 2: Aplicación del Método de Casquillos Cilíndricos

Dado que la revolución es sobre el eje y, usamos el método de casquillos cilíndricos, cuya fórmula es:

$$V = 2\pi \int (radio)(altura)\, dy \;\; en\; [a, b]$$

Definiendo cada componente:

Radio → La distancia desde el eje y hasta el punto x, es decir, x.

Altura → La función expresada en términos de y, es decir, $x = y^{\frac{1}{3}}$.

Sustituyendo en la fórmula:

$$V = 2\pi \int_0^8 y^{\frac{1}{3}}\, dy \;\; \text{en } [0,8]$$

Paso 3: Aplicación de la Técnica de Integración

Usamos la regla de la potencia para integrar:

Si:

$$\int y^n \, dy \ = \frac{y^{n+1}}{n+1}, \qquad \text{para } n \ \neq \ -1$$

entonces, aplicamos la integral:

$$V \ = \ 2\pi \int y^{\frac{1}{3}} \, dy$$

$$= \ 2\pi \ \left[\frac{3}{4} y^{\frac{3}{4}}\right]_0^8$$

$$= \ 2\pi \ * \ \left(\frac{3}{4}\right) \left[\ y^{\frac{4}{3}}\right]_0^8$$

$$= \left(\frac{6\pi}{4}\right) \left[\ 8^{\frac{4}{3}} - \ 0 \ \right]$$

Paso 4: Evaluación de la Integral

Calculamos $8^{\frac{4}{3}}$:

$$8^{\frac{4}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^4 \ = \ (2)^4 \ = \ 16$$

Sustituyendo:

$$V \ = \ \left(\frac{6\pi}{4}\right) * \ (16 \ - \ 0)$$

$$V \ = \ \left(\frac{6\pi}{4}\right) * \ 16$$

$$V \ = \left(\frac{96\pi}{4}\right)$$

$$V \ = \ 24\pi$$

Conclusión y Relación con los Referentes de Pensamiento

Según el Referente de Pensamiento Eje 3, el cálculo de volúmenes mediante integrales tiene aplicaciones en arquitectura, manufactura y física.

El volumen total del sólido generado por la rotación de la función $y = x^3$ alrededor del eje y es:

$$V = 24\pi \ unidades\ cúbicas$$

Cálculo de Trabajo Mecánico con Integrales

Ejercicio a – a. Enunciado de hallar el trabajo.

Un cuerpo es impulsado por fuerza $f\ (x) = 3x2 + 4x$, donde la fuerza está dada en Newton y las distancias en metros. Calcular el trabajo necesario para trasladar el objeto una distancia de 10m.

Se nos da la función de fuerza:

$$f(x) = 3x\text{^}2 + 4x$$

y la distancia sobre la que actúa:

$$0 \leq x \leq 10$$

El objetivo es calcular el trabajo necesario para trasladar el objeto 10 metros.

Paso 1: Identificación del Tipo de Integral

Este problema corresponde a una integral definida aplicada en física, ya que buscamos calcular el trabajo realizado por una fuerza variable en un intervalo de distancia.

Clasificación

- Tipo de función: Polinómica
- Tipo de integral: Trabajo como una integral de fuerza
- Técnica de integración: Integral definida de la función de fuerza
- Fórmula de trabajo:

$$W = \int F(x)\, dx\ en\ [a, b]$$

Según el Referente de Pensamiento Eje 1, la integral definida permite calcular magnitudes físicas como el trabajo, el flujo y la energía acumulada en un sistema.

Paso 2: Aplicación de la Fórmula de Trabajo

En física, el trabajo realizado por una fuerza variable se define como:

$$W = \int F(x)\, dx \;\; en\ [0,10]$$

Sustituyendo la función de la fuerza:

$$W = \int (3x^2 + 4x)\, dx \;\; en\ [0,10]$$

Paso 3: Aplicación de la Técnica de Integración

Usamos la regla de la potencia para integrar cada término:

Si:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

para cuando es

$$n \neq -1$$

entonces, aplicamos la integral:

$$\int (3x^2 + 4x)\, dx = 3 \int x^2\, dx + 4 \int x\; dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right] + 4\left[\frac{x^2}{2}\right]$$

$$= [\, x^3 + 2x^2]_0^{10}$$

Paso 4: Evaluación de la Integral

Sustituyamos los valores en los límites de integración:

$$W = \left[\left(10^3 + 2(10^2)\right) - \left(0^3 + 2(0^2)\right)\right]$$

$$W = [\,(1000 + 200) - (0 + 0)]$$

$$W = 1200 - 0$$

$$W = 1200\ Joules$$

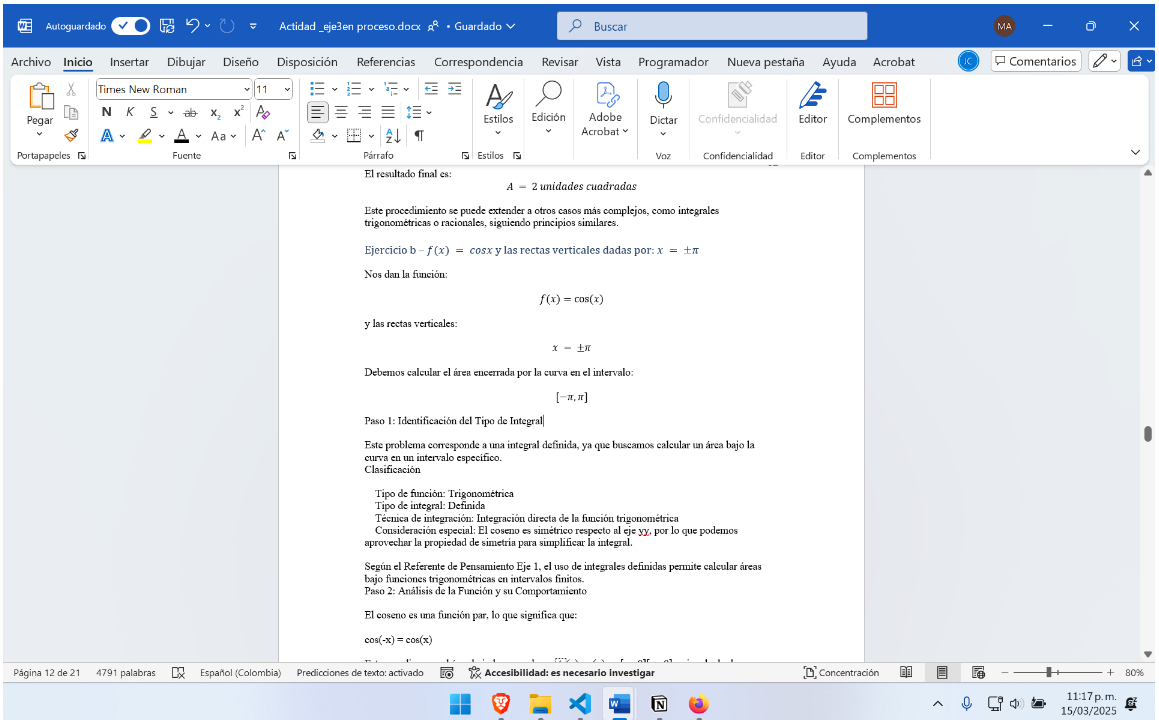
Conclusión y Relación con los Referentes de Pensamiento

Según el Referente de Pensamiento Eje 3, el cálculo de trabajo mediante integración es fundamental en mecánica, ingeniería y termodinámica. En este caso, aplicamos la integral definida para encontrar el trabajo realizado por una fuerza variable en un desplazamiento de 10 metros.

El trabajo total realizado es:

$$W = 1200\,Joules$$

Trabajo en Equipo


El resultado final es:

$$A = 2\,unidades\ cuadradas$$

Este procedimiento se puede extender a otros casos más complejos, como integrales trigonométricas o racionales, siguiendo principios similares.

Ejercicio b – $f(x) = cosx$ y las rectas verticales dadas por: $x = \pm\pi$

Nos dan la función:

$$f(x) = \cos(x)$$

y las rectas verticales:

$$x = \pm\pi$$

Debemos calcular el área encerrada por la curva en el intervalo:

$$[-\pi, \pi]$$

Paso 1: Identificación del Tipo de Integral

Este problema corresponde a una integral definida, ya que buscamos calcular un área bajo la curva en un intervalo específico.
Clasificación

Tipo de función: Trigonométrica
Tipo de integral: Definida
Técnica de integración: Integración directa de la función trigonométrica
Consideración especial: El coseno es simétrico respecto al eje yy, por lo que podemos aprovechar la propiedad de simetría para simplificar la integral.

Según el Referente de Pensamiento Eje 1, el uso de integrales definidas permite calcular áreas bajo funciones trigonométricas en intervalos finitos.
Paso 2: Análisis de la Función y su Comportamiento

El coseno es una función par, lo que significa que:

cos(-x) = cos(x)

Conclusiones

El presente documento ha permitido profundizar en el cálculo integral, aplicando distintas metodologías y herramientas para la resolución de problemas relacionados con áreas, volúmenes y trabajo mecánico. A través del desarrollo de cada sección, se han abordado los aspectos teóricos y prácticos necesarios para comprender el uso y la importancia de la integración definida en diversos contextos matemáticos y físicos.

En primer lugar, se revisaron los fundamentos del cálculo integral, destacando el papel de la integral definida y su relación con la acumulación de cantidades, lo que permitió sentar las bases teóricas para su aplicación en problemas reales. Posteriormente, se exploraron los métodos de integración, donde se analizaron técnicas como la integración por sustitución, por partes, trigonométrica y fracciones parciales, evidenciando la necesidad de elegir la estrategia adecuada para cada tipo de función.

Asimismo, se abordó el Teorema Fundamental del Cálculo, consolidando la idea de que la derivación y la integración son procesos inversos, lo que facilitó la evaluación de integrales definidas de manera más eficiente. También se establecieron los límites de integración, destacando su importancia en la correcta interpretación geométrica y física de los problemas resueltos.

Otro aspecto clave desarrollado fue la ficha nemotécnica de integrales, la cual organizó de manera estructurada una serie de identidades y reglas fundamentales para agilizar la resolución de problemas. Esta herramienta resulta esencial para optimizar el proceso de integración y minimizar errores en cálculos complejos.

Finalmente, la aplicación de estos conceptos en el cálculo de áreas, volúmenes y trabajo mecánico permitió evidenciar la utilidad del cálculo integral en diversas áreas de estudio, desde la física hasta la ingeniería y la economía.

Bibliografía

Para la elaboración de este documento, se tomaron como referencia los siguientes materiales académicos, los cuales contienen el sustento teórico y metodológico para el desarrollo del cálculo integral y sus aplicaciones:

Referente de Pensamiento - Eje 1: ConceptualicemosDocumento que aborda los fundamentos del cálculo integral, incluyendo el concepto de integral indefinida, la relación con las sumas de Riemann y el Teorema Fundamental del Cálculo.

Referente de Pensamiento - Eje 2: Analicemos la SituaciónMaterial que presenta las distintas técnicas de integración, tales como integración por partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales, facilitando la resolución de integrales complejas.

Referente de Pensamiento - Eje 3: Pongamos en PrácticaDocumento que aplica el cálculo integral en situaciones concretas, como el cálculo de áreas bajo curvas, volúmenes de sólidos de revolución y trabajo mecánico mediante la integral definida.

Estos documentos han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo, proporcionando la base teórica y metodológica necesaria para abordar el cálculo integral desde una perspectiva tanto conceptual como aplicada.