

1 January  
2

3

4

5

6

7

8

0

0

1

## Exercícios de Matemática Discreta e Programação

2011-2012

Folha 2

Lógica Matemática

afirmações

R: O Nuno é rico

H: O Nuno é feliz

seguintes afirmações na forma simbólica

no é pobre mas feliz.

no é rico ou feliz.

no não é nem rico nem feliz.

4. Construa a tabela de verdade para as seguintes fórmulas:
  - (a)  $\neg(\neg P \vee \neg Q)$
  - (b)  $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
  - (c)  $P \wedge (P \vee Q)$
  - (d)  $P \wedge (Q \wedge P)$
  - (e)  $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$
  - (f)  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
5. Assumindo que as variáveis proposicionais  $P$  e  $Q$  são verdadeiras e que  $R$  e  $S$  são falsas, determine o valor de verdade das afirmações:
  - (a)  $P \wedge (Q \vee R)$
  - (b)  $(P \wedge (Q \wedge R)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (R \vee S))$
  - (c)  $(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S)$
6. Mostre que o valor lógico das fórmulas abaixo são independentes das suas componentes:
  - (a)  $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
  - (b)  $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
  - (c)  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
  - (d)  $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$
7. Construa a tabela de verdade das seguintes fórmulas:
  - (a)  $(Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow P$
  - (b)  $\neg(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$
8. Assumindo que os valores de verdade das variáveis proposicionais  $P$  e  $Q$  é verdade e que  $R$  e  $S$  é falso, determine os valores de verdade das seguintes fórmulas.
  - (a)  $(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee ((Q \leftrightarrow \neg P) \rightarrow (R \vee \neg S))$
  - (b)  $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$
  - (c)  $(P \vee (Q \rightarrow (R \wedge \neg P))) \leftrightarrow (Q \vee \neg S)$
9. \*\* Mostre as seguintes implicações
  - (a)  $(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
  - (b)  $P \Rightarrow (Q \rightarrow P)$
  - (c)  $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
10. Mostre as seguintes equivalências
  - (a)  $P \rightarrow (Q \rightarrow P) \leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$
  - (b)  $P \rightarrow (Q \vee R) \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$
  - (c)  $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$
  - (d)  $\neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$
11. Mostre que  $P$  é equivalente às seguintes fórmulas  $\neg\neg P$ ,  $P \wedge P$ ,  $P \vee P$ ,  $P \vee (P \wedge Q)$ ,  $P \wedge (P \vee Q)$ ,  $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ , e  $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ .

12. Mostre as seguintes equivalências

- (a)  $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
- (b)  $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
- (c)  $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
- (d)  $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

13. Mostre que

- (a)  $\neg(P \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q$
- (b)  $\neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q$

14. Escreva uma fórmula equivalente a  $P \wedge (Q \Leftrightarrow R)$  e que contenha a conectiva NAND ( $\uparrow$ ). Obtenha uma fórmula equivalente que contenha apenas a conectiva NOR ( $\downarrow$ ).

15. Construa a tabela de verdade para as funções booleanas descritas pelos circuitos lógicos abaixo:

16. Mostre que o conjunto  $\{\neg, \rightarrow\}$  é funcionalmente completo.

17. Seja a conectiva  $\rightarrow$  definida pela tabela:

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Mostre que  $\{\neg, \rightarrow\}$  é funcionalmente completo.

18. Mostre as seguintes equivalências:

- (a)  $A \rightarrow (P \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge \neg P) \rightarrow C$
- (b)  $(P \rightarrow C) \wedge (Q \rightarrow C) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow C$
- (c)  $((Q \wedge A) \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow (P \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow C$
- (d)  $((P \wedge Q \wedge A) \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow (P \vee Q \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge (P \leftrightarrow Q)) \rightarrow C$

19. Escreva as fórmulas abaixo de forma o mais simples possível preservando a equivalência:

- (a)  $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \wedge R$
- (b)  $P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q))$
- (c)  $(P \wedge (Q \wedge S)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge S))$

20. Escreva de forma equivalente as fórmulas abaixo, de forma que estejam aplicadas apenas a variáveis.

- (a)  $\neg(P \vee Q)$
- (b)  $\neg(P \wedge Q)$
- (c)  $\neg(P \rightarrow Q)$
- (d)  $\neg(P \leftrightarrow Q)$
- (e)  $\neg(P \uparrow Q)$
- (f)  $\neg(P \downarrow Q)$

21. Escreva na forma canônica dum produto-de-somas as fórmulas abaixo:

- (a)  $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge R \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$
- (b)  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
- (c)  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

22. Obtenha a forma normal disjuntiva e conjuntiva das seguintes fórmulas:

- (a)  $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$
- (b)  $Q \wedge (P \vee \neg Q)$
- (c)  $P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$
- (d)  $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$
- (e)  $P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P))$
- (f)  $(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \wedge Q)$

Quais das seguintes fórmulas são tautologias?

23. Escreva as fórmulas abaixo na forma prefixa e na forma sufixa. Assumindo para isso a seguinte ordem de precedência:  $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg$  (onde  $\neg$  tem a maior precedência)

- (a)  $P \rightarrow Q \vee R \vee S$
- (b)  $Q \wedge \neg(R \leftrightarrow P \vee Q)$
- (c)  $P \wedge \neg R \rightarrow Q \leftrightarrow P \wedge Q$
- (d)  $\neg \neg P \vee Q \wedge R \vee \neg Q$

24. Converta as fórmulas prefixas e sufixas em fórmulas completamente parentesadas. Escreva também as fórmulas na forma infixa, utilizando para isso a ordem de precedência do exercício anterior:

- (a)  $\rightarrow \neg P \vee Q \leftrightarrow R \neg S$
- (b)  $\rightarrow \rightarrow PQ \rightarrow \rightarrow QR \rightarrow PR$
- (c)  $P \neg P \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow$
- (d)  $PQ \rightarrow RQ \rightarrow \wedge PR \vee \wedge Q \rightarrow$

25. Mostre que a conclusão  $C$  segue das premissas  $H_1, H_2, \dots$  nos seguintes casos:

- (a)  $H_1 : P \rightarrow Q, \therefore C : P \rightarrow (P \wedge Q)$
- (b)  $H_1 : \neg P \vee Q, H_2 : \neg(Q \wedge \neg R), H_3 : \neg R, \therefore C : \neg P$
- (c)  $H_1 : \neg P, H_2 : P \vee Q \therefore C : Q$
- (d)  $H_1 : \neg Q, H_2 : P \rightarrow Q \therefore C : \neg P$
- (e)  $H_1 : P \rightarrow Q, H_2 : Q \rightarrow R \therefore C : P \rightarrow R$
- (f)  $H_1 : R, H_2 : P \vee \neg P \therefore C : R$

26. Mostre a validade dos seguintes argumentos, onde as premissas aparecem à esquerda e as conclusões à direita:

- (a)  $\neg(P \wedge \neg Q), \neg Q \vee R, \neg R \quad \therefore \neg P$
- (b)  $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C), \neg(B \wedge C), D \vee A \quad \therefore D$
- (c)  $\neg J \rightarrow (M \vee N), (H \vee G) \rightarrow \neg J, H \vee G \quad \therefore M \vee N$
- (d)  $P \rightarrow Q, (\neg Q \vee R) \wedge \neg R, \neg(\neg P \wedge S) \quad \therefore \neg S$
- (e)  $(P \wedge Q) \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S \quad \therefore \neg P \vee \neg Q$
- (f)  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg R, R, P \vee (J \wedge S) \quad \therefore J \wedge S$

27. Quais dos seguintes argumentos são válidos?

- (a)  $P \rightarrow Q, \neg Q \rightarrow R, \neg R, \therefore P$
- (b)  $A \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)), B, \therefore A \rightarrow C$
- (c) Se a Rute comprou um carro de luxo, foi porque ou assaltou um banco ou o seu tio rico morreu. Rute não assaltou um banco ou o seu tio rico não morreu. Consequentemente, o seu tio rico não morreu.
- (d) Hoje é domingo. Amanhã não é domingo. Consequentemente a Lua é feita de queijo verde.
- (e) O livro está na secretária ou na estante. Não está na estante. Consequentemente, está na secretária.
- (f) Se função  $f$  não é contínua, então não é diferenciável. A função  $f$  é diferenciável. Consequentemente, a função  $f$  é contínua.
- (g) Se existe vida em Marte, então os especialistas estão enganados e o governo está a mentir. Se o governo está a mentir, então os especialistas estão certos ou não existe vida em Marte. O governo está a mentir. Consequentemente, existe vida em Marte.
- (h) (Lewis Carroll) Os bebés são ilógicos. Ninguém que consiga domar um crocodilo deve ser menosprezado. Pessoas ilógicas são menosprezadas. Consequentemente, os bebés não conseguem domar crocodilos.
- (i) (Lewis Carroll) Nenhum cão de caça vagueia pelo Zodíaco. Apenas os cometas vagueiam pelo Zodíaco. Só os cães de caça tem a cauda encaracolada. Consequentemente, nenhum cometa tem a cauda enrolada.
- (j) As frutas verdes não são saudáveis. Todas estas maçãs não são saudáveis. Nenhum fruto, que tenha crescido na escuridão é saudável. Estas maçãs não cresceram ao sol. Consequentemente, toda a fruta madura é saudável.