Exercícios de Matemática Discreta e Programação

2011-2012
Folha 4

Estruturas Algébricas

Para um sistema algébrico $(I, +, \times)$ considere as seguintes propriedades:

(A1) Para todo $a, b, c \in I$, $(a + b) + c = a + (b + a)$ (Associatividade)
(A2) Para todo $a, b \in I$, $a + b = b + a$ (Comutatividade)
(A3) Existe um elemento $0 \in I$, tal que para todo $a \in I$, $a + 0 = 0 + a = a$ (Elemento identidade)
(A4) Para todo $a \in I$, existe um elemento em I denotado por $-a$ e designado de simétrico de a, tal que $a + (-a) = 0$ (Elemento Identidade)
(M1) Para todo $a, b, c \in I$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (Associatividade)
(M2) Para todo $a, b \in I$, $a \times b = b \times a$ (Comutatividade)
(M3) Existe um elemento $1 \in I$, tal que para todo $a \in I$, $a \times 1 = 1 \times a = a$ (Elemento identidade)
(M4) Para todo $a \in I$, existe um elemento em I denotado por $-a$ e designado de simétrico de a, tal que $a + (-a) = 0$ (Elemento Identidade)
(D) Para todo $a, b, c \in I$, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (Distributividade) neste caso dizemos que $\times$ é distributivo relativamente a $+$.
(C) Para todo $a, b, c \in I$, e $a \neq 0$, $a \times b = a \times c \Rightarrow b = c$ (Cancelamento subtractivo)

(1) Quais dos seguintes sistema $(I, +, \times)$ satisfazem a propriedade [A1] a [A4], [M1] a [M4], [D] e [C], quando consideramos $+$ e $\times$ as operações usuais?
  (a) Todos os inteiros pares
  (b) Todos os inteiros ímpares
  (c) Todos os inteiros positivos
  (d) Todos os inteiros não negativos
  (e) $(\mathbb{Z}_6, +_6, \times_6)$
  (f) $(\mathbb{Z}_7, +_7, \times_7)$

(2) Mostre que se $g : A \to B$ é um homomorfismo de um sistema algébrico $(A, \otimes)$ em $(B, \triangle)$, e $(A_1, \otimes)$ é uma subalgebra de $A, \otimes)$, então a imagem de A_1 por g é uma subalgebra de $(B, \triangle)$.

(3) Mostre a intersecção de duas relações de congruência é também uma relação de congruência.

(4) Mostre que a composição de duas relações de congruência não necessariamente uma relação de congruência.

(5) Determine o zero dos semi-grupos $(\mathcal{P}(X), \cap)$ e $(\mathcal{P}(X), \cup)$ onde X é um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Estas estruturas definem monoides? Em caso afirmativos, qual é a unidade?

(6) Seja $\Sigma = \{a, b\}$ um alfabeto e A o conjunto que inclui a palavra vazia λ e todas as palavras com símbolos em Σ que começam com a. Mostre que $(A, \cdot, \lambda)$ é um monóide.

(7) Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um semi-grupo para a operação $x \otimes y = \max(x, y)$. É um monóide?

(8) Seja $S = \{a, b\}$. Mostre que $(S^S, \circ)$ é um semi-grupo não comutativo.

(9) Seja $(S, \otimes)$ um semi-grupo e $z \in S$ um zero à esquerda. Mostre que para todo $x \in S$, $x \otimes z$ é também um zero à esquerda.

(10) Um elemento $a \in S$, onde $(S, \otimes)$ é um sem i-grupo, diz-se cancelável à esquerda se para todo $a \in S$, $a \otimes x = x \otimes a \Rightarrow x = y$. Mostre que se a e b são canceláveis à esquerda, então $a \otimes b$ é também cancelável à esquerda.

(11) Mostre que todo o semi-grupo finito tem um idempotente.
(12) Mostre que um semi-grupo com mais do que um idempotente não pode ser um grupo.
(13) Mostre que o conjunto de todos os elementos invertíveis de um monóide forma um grupo para a mesma operação.
(14) Mostre num monóide o conjunto dos inversos à esquerda (inversos à direita) formam um sub-monóide.
(15) Determine uma gramática que permita gerar a linguagem $L = \{xx : \; x = x_1x_2 \ldots x_n \text{ e } x_i \in \{a, b\}\}$.
(16) Consider a seguinte gramática tendo por símbolos terminais $\{a, b\}$:

$$S \to a \;\; S \to Sa \;\; S \to b \;\; S \to bS$$

Descreva através duma expressão regular o conjunto das palavras geradas pela gramática.
(17) Escreva as gramáticas das seguintes linguagens
  (a) O conjunto dos números inteiros ímpares não negativos
  (b) O conjunto dos números inteiros pares que são escritos sem o dígito zero.
(18) Determine uma gramática que permita gerar

$$L = \{w : \; w \text{ tem o mesmo número de } a\text{'s e de } b\text{'s}\}$$

(19) Determine uma gramática que permita gerar

$$L = \{w : \text{ o número de 0's em } w \text{ é o dobro do números de 1's}\}$$

(20) Apresente uma gramática regular que permita gerar cadeias de 0s e 1s tendo um número par de 0s e um número par de 1s.
(21) Se $(G, \otimes)$ é um grupo abeliano, então para todos $a, b \in G$ mostre que $(a \otimes b)^n = a^n \otimes b^n$.
(22) No grupo de simetria S_3 determine todos os elementos a e b tais que
  (a) $(a \otimes b)^2 \neq a^2 \otimes b^2$
  (b) $a^2 = e$
  (c) $a^3 = e$
(23) Mostre que num grupo $(G, \otimes)$, se para todo $a, b \in G$, $(a \otimes b)^2 = a^2 \otimes b^2$, então $(G, \otimes)$ é abeliano.
(24) Mostre que quando num grupo todo o elemento é inverso de si próprio, o grupo é abeliano.
(25) Escreva as tabelas de composição para $(\mathbb{Z}_7, +_7)$ e $(\mathbb{Z}_7 - \{[0]\}, +_7)$.
(26) Dadas as permutações de elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^2, δ^{-1}, e $\alpha\beta\gamma$. Resolva a equação $\alpha x = \beta$.
(27) Para $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ e $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ e os operadores $\otimes$ e $\triangle$ dados pelas tabelas de composição:

$\otimes$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_1	p_4	p_5	p_3
p_3	p_3	p_5	p_1	p_2	p_4
p_4	p_4	p_3	p_5	p_1	p_2
p_5	p_5	p_4	p_2	p_3	p_4

$\triangle$	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_1	q_4	q_1	q_5	q_3	q_2
q_2	q_3	q_5	q_2	q_1	q_4
q_3	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_4	q_2	q_4	q_1	q_5	q_3
q_5	q_5	q_3	q_4	q_2	q_1

(28) Mostre que o conjunto dos polinómios na variável x para a operação de adição é um grupo.
(29) Determine todos os subgrupos de

(a) $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$
(b) $(\mathbb{Z}_5, +_5)$
(c) $(\mathbb{Z}_7 - \{[0]\}, \times_7)$
(d) $(\mathbb{Z}_{11} - \{[0]\}, \times_{11})$

(30) Determine o grupo das rotações rígidas dum rectângulo, que não é quadrado. Mostre que é um subgrupo de $(D_4, \diamond)$.

(31) Determine todos os subgrupos de S_4 gerados pelas permutação

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(32) Mostre que o conjunto dos elementos a de um grupo $(G, \otimes)$ tal que $a \otimes x = x \otimes a$ para todo $x \in G$ é um subgrupo de G.

(33) Determine todos os inteiros x que satisfazem $x \mod 7 = 1$, $x \mod 9 = 6$, $x \mod 11 = 5$, e $0 \leq x \leq 1000$.

(34) Determine a representação residual módulo $m_1 = 4$, $m_2 = 3$, e $m_3 = 5$ dos inteiros $\mathbb{Z}_{60}$.

(35) Calcule o inverso de cada elemento de $\mathbb{Z}_7$, usando o teorema de Fermat.