Exercícios de Matemática Discreta e Programação

2011-2012
Folha 3

Teoria de conjuntos

(1) Dados $S = \{2, a, 3, 4\}$ e $R = \{a, 3, 4, 1\}$, indique se são verdadeiras ou falsas as proposições:
  (a) $\{a\} \in S$
  (b) $\{a\} \in R$
  (c) $\{a, 4, \{3\}\} \subseteq S$
  (d) $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subset R$
  (e) $R = S$
  (f) $\{a\} \subseteq S$
  (g) $\{a\} \subseteq R$
  (h) $\emptyset \subset R$
  (i) $\emptyset \subset \{\{a\}\} \subseteq R$
  (j) $\{\emptyset\} \subseteq S$
  (k) $\emptyset \in R$
  (l) $\emptyset \subseteq \{\{3\}, 4\}$

(2) Mostre que
$$(R \subseteq S) \wedge (S \subset Q) \Rightarrow R \subset Q$$

(3) Determine o conjunto potência de:
  (a) $\{a, \{b\}\}$
  (b) $\{1, \emptyset\}$
  (c) $\{X, Y, Z\}$

(4) Dados conjuntos $A = \{x | x \text{é um inteiro e } 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 17\}$, e $C = \{1, 2, 3, \ldots\}$, determine $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup B$, e $A \cup C$.

(5) Mostre que $A \subseteq A \cup B$ e $A \cap B \subseteq A$.

(6) Mostre que
$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

(7) Se $S = \{a, b, c\}$, determine conjuntos disjuntos A_1 e A_2, tais que $A_1 \cup A_2 = S$. Apresente outra solução, diferente da anterior.

(8) Determine:
  (a) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$
  (b) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$
  (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \emptyset$

(9) Liste os elementos de $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$.

(10) Liste os elementos de $A \times B \times C$, B^2, A^3, $B^2 \times A$, e $A \times B$, onde $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$, e $C = \{2, 3\}$.

(11) Use exemplos para mostrar que $A \times B \neq B \times A$ e $(A \times B) \times C \neq B \times A \times (B \times C)$.

(12) Mostre que para conjuntos A e B, se tem
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$
$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$$
Usando um exemplo mostre que
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B).$$

(13) Demonstre as identidades no universo Ω
$$A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap \Omega = A, \quad A \cup \Omega = \Omega$$

(14) Mostre que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(15) Prove que no universo Ω

$$(A \cap B) \cup (A \cap \sim B) = A \text{ e } A \cap (\sim A \cup B) = A \cap B.$$

(16) Mostre que $A \times B = B \times A \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)$.

(17) Mostre que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ se e só se $C \subseteq A$.

(18) Seja $P = \{(1,2),(2,4),(3,3)\}$ e $Q = \{(1,3),(2,4),(4,2)\}$. Determine $P \cup Q$, $P \cup Q$, $dom(P)$, $codom(Q)$, $dom(P \cup Q)$, $codom(P)$, e $codom(P \cap Q)$. Mostre que $dom(P \cup Q) = dom(P) \cup dom(Q)$ e $codom(P \cap Q) \subseteq codom(P) \cap codom(Q)$.

(19) Seja L a relação "menor ou igual que" e D a relação "divide", onde xDy significa "x divide y". Assumindo que L e D estão definidos no conjunto $\{1,2,3,6\}$, escreva L e D na forma dum conjunto, e determine $L \cap D$.

(20) Apresente um exemplo de uma relação que não seja nem reflexiva nem anti-reflexiva.

(21) Apresente um exemplo de uma relação que seja simétrica e anti-simétrica.

(22) Se as relações R e S são ambas reflexivas, simétricas e transitivas, mostre que $R \cap S$ e $R \cup S$ também são reflexivas.

(23) Se a relação R e S são reflexivas, simétricas e transitivas, mostre que $R \cap S$ também é reflexiva, simétrica e transitiva.

(24) Mostre que as relações abaixo são transitivas:
  (a) $R_1 = \{(1,1)\}$
  (b) $R_2 = \{(1,2),(2,2)\}$
  (c) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(2,1)\}$

(25) Dado $S = \{1,2,3,4\}$ e uma relação R e S definida por

$$\{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1)\}$$

mostre que R é não transitiva. Determine uma relação R_1, tal que $R \subseteq R_1$ e seja transitiva. Existe mais alguma relação R_2 que contenha R_1 e também seja transitiva?

(26) Dado $S = \{1,2,\dots,10\}$ e a relação R em S,

$$R = \{(x,y) | x + y = 10\}.$$

Classifique a relação R.

(27) Seja R a relação no conjunto ordenado de pares de inteiros positivos tal que $(x,y)R(u,v)$ se e só se $xv = yu$. Mostre que R é uma relação de equivalência.

(28) Dado um conjunto $S = \{1,2,3,4,5\}$, apresente uma relação de equivalência S que determine a partição $\{\overline{1,2}, \overline{3}, \overline{4,5}\}$. Apresente a relação graficamente.

(29) Mostre que a relação "congruente modulo m" dada por

$$\equiv = \{(x,y) |\ x - y \text{ é divisível por } m\}$$

definida no conjunto dos inteiros é uma relação de equivalência. Demonstre que, se $x_1 \equiv y_1$ e $x_2 \equiv y_2$, então $(x_1 + x_2) \equiv (y_1 + y_2)$.

(30) Considere a relação de compatibilidade no conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$ dada pela matriz

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_2 & 1 & & & & \\
x_3 & 1 & 1 & & & \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & & \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
x_6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5
\end{array}$$

Represente graficamente a relação e seu bloco de compatibilidade maximal.

(31) Mostre que se a relação R é reflexiva, então $\bar{R}$ também é reflexiva. Demonstre que $\bar{R}$ herda também a transitividade, simetria e anti-simetria.

(32) Seja I a relação identidade no conjunto X e R uma relação arbitraria em X, mostre que $I \cup R \cup \bar{R}$ é uma relação de compatibilidade.

(33) Para a relação R no conjunto $\{a, b, c\}$ de matriz $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine as matrizes da relação $\bar{R}$, $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ R \circ R$, e $R \circ \bar{R}$.

(34) Para duas relações de equivalência R e S definidas pelas matrizes $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Obtenha relações de equivalência R_1 e R_2 em $\{1, 2, 3\}$ tais que $R_1 \circ R_2$ seja também uma relação de equivalência.

(35) Desenhe os diagramas de Hasse dos conjuntos abaixo relativamente à relação de ordem parcial "divide" e indique se é uma ordem total.

$$\{2, 6, 24\} \quad \{3, 5, 15\} \quad \{1, 2, 3, 6, 12\} \quad \{2, 4, 8, 16\} \quad \{3, 9, 27, 54\}$$

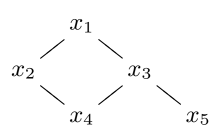
(36) Se R é uma ordem parcial em X e $A \subseteq X$, mostre que $R \cap (A \times A)$ é uma ordem parcial em A.

(37) Apresente um exemplo de um conjunto X, tal que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um conjunto totalmente ordenado.

(38) Apresente um exemplo de uma relação que seja simultaneamente uma ordem parcial e uma relação de equivalência num conjunto X.

(39) Seja S o conjunto de todas as relações que são ordens parciais no conjunto P. Defina uma ordem parcial em S e interprete esta relação em termos dos elementos de P.

(40) A figura abaixo representa o diagrama de Hasse para uma ordem parcial (P, R), onde $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$.



Determine o valor de verdade das proposições: $x_1 R x_2$, $x_4 R x_1$, $x_3 R x_5$, $x_2 R x_5$, $x_1 R x_1$, $x_2 R x_3$, e $x_4 R x_5$. Caso exista determine o maior elemento e o menor elemento em P. Determine os majorantes e minorantes de $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_4, x_5\}$ e $\{x_1, x_2, x_3\}$. Caso existam determine também, para estes conjuntos, o menor dos majorantes e o maior dos minorantes.

(41) Represente os únicos 5 diagramas de Hasse que se podem definir um conjunto com 3 elementos que são ordens parciais.

(42) Seja $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos números naturais juntamente com o número zero. Classifique as funções que se seguem segundo a injectividade e sobrejectividade.

(a) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(n) = n^2 + 2$

(b) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(n) = n \mod 3$

(c) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se n é par} \\ 0 & \text{se n é ímpar} \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ tal que $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se n é par} \\ 1 & \text{se n é ímpar} \end{cases}$

(43) Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}^+$ o conjunto dos inteiros positivos, e $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Classifique as seguintes aplicações quanto à injectividade, sobrejectividade e bijectividade.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(j) = \begin{cases} \text{j/2} & \text{se j é par} \\ \text{(j-1)/2} & \text{se j é ímpar} \end{cases}$

(b) $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, $f(x) =$ maior inteiro $\leq \sqrt{x}$
(c) $f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$, $f(x) = 3x(\mod 7)$
(d) $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$, $f(x) = 3x(\mod 4)$

(44) Se A e B são conjuntos finitos, determine uma condição necessaria e suficiente para que exista uma aplicação injectiva de A para B.

(45) O conjunto abaixo definem funções? Nesse caso, determine o seu domínio e codomínio.
(a) $\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(3,(1,4)),(4,(1,4))\}$
(b) $\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(3,(3,2))\}$
(c) $\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(1,(2,4))\}$
(d) $\{(1,(2,3)),(2,(2,3)),(3,(2,3))\}$

(46) Liste todas as funções do conjunto $A = \{a, b, c\}$ para $B = \{0, 1\}$ e indique em cada caso quando são injectivas, sobrejectivas e bijetivas.

(47) Se $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, mostre que qualquer função de A para A que seja injectiva é sobrejectiva.

(48) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$, onde $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x + 4$.

(49) Mostre que sempre que $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são sobrejectivas, $g \circ f$ é sobrejectiva. A aplicação $g \circ f$ é bijectiva se g e f são bijectivas?

(50) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 2$. Determine f^{-1}.

(51) Quantas funções diferentes pode definir entre os conjuntos dados abaixo? Determine o número de funções injectivas, sobrejectivas e bijectivas?
(a) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3\}$
(b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{1, 2, 3\}$
(c) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

(52) Mostre que existe uma aplicação bijectiva de $A \times B$ para $B \times A$.

(53) Para o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Defina uma função $f : X \to X$ tal que $f \neq I_X$ (diferente da aplicação identidade em X) que seja bijectiva. Determine $f \circ f = f^2$, $f^3 = f \circ f^2$, f^{-1}, e $f \circ f^{-1}$. Consegue definir outre função bijectiva $g : X \to X$ satisfazendo $g \neq I_X$ e $g \circ g = I_X$?

(54) Seja $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros e

$$g(x, y) = x \otimes y = x + y - xy.$$

Mostre que o operador binário $\otimes$ é comutativo e associativo. Determine o elemento identidade e descreva o inverso de cada elemento.

(55) Seja $\otimes$ um operador binário no conjunto dos números naturais, definida por $x \otimes y = x$. Mostre que $\otimes$ não é comutativo, mas é associativo. Que elementos são idempotentes? Existem identidades à direita ou à esquerda?

(56) Seja $x \otimes y$ o menor múltiplo comum de x e y, sendo $\otimes$ definido no conjunto dos inteiros positivos. Mostre que $\otimes$ é comutativo e associativo. Determine o elemento identidade e caracterize e caracterize os elementos que são idempotentes.

(57) Seja $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$. Os operadores $\oplus_n$ e $\otimes_n$ são dados por $x \oplus_n y = (x + y)(\mod n)$ e $x \otimes_n y = xy(\mod n)$. Apresente tabelas de composição para estes operadores para $n = 3$ e 4. Indique o elemento identidade e o elemento zero. O operador $\otimes_n$ é distributivo relativamente a $\oplus_n$?

(58) Mostre que $x \otimes y = x - y$ apresar de não ser um operador binário no conjunto dos números naturais, é um operador binário no conjunto os números inteiros. É comutativo ou associativo?

(59) Quantos operadores binários estão definidos no conjunto $\{0, 1\}$? Apresente as suas tabelas de composição e indique quais são comutativos ou associativos?

(60) Mostre que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

Mostre através de um exemplo que em geral não podemos substituir $\subseteq$ por $=$ na segunda relação. En que condições $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

(61) Mostre que $f : X \to Y$ é bijectiva se e só se, para $A \subset B \subseteq X$, então $f(A) \subset f(B) \subseteq X$

(62) Seja $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ e $f_r : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ dados por $f_r(x) = rx(\bmod n)$, onde $r = 0, 1, \dots, n-1$. Mostre que f_r não é bijectivo se r não é um número primo.

(63) Mostre que $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

(64) Mostre que $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(65) Mostre que $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

(66) Mostre que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável.