Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki
Kierunek studiów: Matematyka stosowana
Specjalność: –

Praca dyplomowa – inżynierska

ZASTOSOWANIE STOCHASTYCZNEJ OPTYMALIZACJI DO GIER CZĘŚCIOWO OBSERWOWALNYCH

Aleksander Jakóbczyk

słowa kluczowe:
tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków).

krótkie streszczenie:
Celem rozprawy jest wyznaczenie nieoczekiwanych strategii w grach częściowo obserwowalnych za pomocą metod stochastycznej optymalizacji. W prawy zostały wprowadzone nowe algorytmy pozwalające na znacznie szybsze wyznaczenie lepszej strategi niż ich oryginalne odpowiedniki. Praca będzie opierać się na wynikach Cauwet i Teytauda z 2018 roku, w których przedstawili nieoczekiwane strategie dla kilku klasycznych gier oraz kilku metod optymalizacji. Podjęta zostanie próba odtworzenia oraz rozszerzenia wyników na kolejną grę. Przeprowadzona zostanie analiza porównawcza dla różnych metod optymalizacji.

Opiekun pracy dyplomowej	dr inż. Andrzej Giniewicz	.....	.....
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:**

a) kategorii A (akta wieczyste)

b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)

** niepotrzebne skreślić*

pieczątka wydziałowa

Wrocław, rok 2023

Wrocław University
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics
Field of study: Mathematics
Specialty: Theoretical Mathematics

Engineering Thesis

TYTUŁ PRACY DYPLOMOWEJ W JĘZYKU ANGIELSKIM

Aleksander Jakóbczyk

keywords:
tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe w języku angielskim (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków)

short summary:
Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy w języku angielskim (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

Supervisor	dr inż. Andrzej Giniewicz	.....	.....
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:**

a) category A (perpetual files)

b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)

** delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2023

Spis treści

Wstęp

Rozdział 1

Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski

Celem algorytmów, które będziemy wykorzystywać, jest znalezienie optymalnej strategii dla graczy w dwuosobowych grach częściowo obserwowalnych. Aby matematycznie opisać pojęcia gry i strategii optymalnej, wprowadzimy kilka podstawowych definicji. Definicje dotyczące podstaw teorii gier pochodzą z prac [7], [8].

1.1 Czym jest gra?

Omówmy zatem, co nazywamy grą w matematyce.

Gra w matematycznej teorii gie to sytuacja, w której gracze wybierają swoje strategie i otrzymują nagrody lub kary w zależności od podjętych decyzji oraz losowych zdarzeń. Teoria gier pozwala na modelowanie i analizowanie takich sytuacji oraz umożliwia znajdowanie rozwiązań, które są optymalne dla graczy.

Matematyczna definicja gry w teorii gier zazwyczaj zaczyna się od określenia następujących elementów:

- Zbioru graczy: Jest to zbiór wszystkich osób biorących udział w grze. Zbiór ten składa się z co najmniej dwóch elementów, w zależności od typu gry.
- Zbioru strategii: Jest to zbiór wszystkich możliwych strategii, które mogą być wybierane przez graczy. Strategia to plan działania gracza, który zakłada, jakie ruchy gracz zamierza podjąć w danej grze.
- Funkcji zwrotu: Funkcja zwrotu określa nagrody lub kary, które gracze otrzymują w zależności od ich strategii i losowych zdarzeń.
- Struktury informacji: Struktura informacji określa, jakie informacje są dostępne dla graczy w momencie podejmowania decyzji. Informacje mogą być pełne lub częściowe, co wpływa na możliwe strategie graczy i ich skuteczność.

Gry mogą być podzielone na kilka kategorii w zależności od kilku różnych kryteriów. Jednym z takich kryteriów jest moment, w którym gracze podejmują decyzje:

Definicja 1.1 (Gra w postaci strategicznej)**.** Jest to typ gry, w której gracze podejmują decyzje w tym samym momencie.

Definicja 1.2 (Gra w postaci ekstensywnej)**.** Jest to typ gry, w której gracze podejmują decyzje we wcześniej ustalonej kolejności.

Przykładami gier w postaci strategicznej są gry kamień papier nożyce, oszust czy też mora. Natomiast przykładami gier w postaci ekstensywnej są szachy, warcaby oraz go.

Gry możemy również dzielić ze względu na posiadaną wiedzę.

Definicja 1.3 (Gra z kompletną informacją)**.** Jest to typ gry, w której gracze mają informacje o możliwych przyszłych wynikach gry i o zbiorach możliwych strategii.

Definicja 1.4 (Gra częściowo obserwowalna)**.** Jest to przeciwnie gier z kompletną informacją.

Przykładami gier z kompletną informacją są szachy, warcaby oraz go. Natomiast przykładami gier częściowo obserwowanymi są wszelkie gry posiadające w rozgrywce pewien elementy losowe takie jak rzut kostką czy też dobieranie kart.

Istnieje jeszcze wiele innych podziałów gier ze wglądu na kategorie takie jak liczba graczy, zbiory dostępnych akcji, możliwość tworzenia koalicji i wiele innych.

1.2 Definicje i Oznaczenia

1.2.1 Strategie proste

Wprowadźmy podstawowe oznaczenia potrzebne nam do tego, aby móc zdefiniować czym jest strategia optymalna:

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$: zbiór graczy,
- $A_i, i \in N$: niepusty zbiór strategii czystych gracza i,
- $m_i = |A_i|$: liczba strategi gracza i,
- $A = \prod_{i \in N} A_i$: zbiór wszystkich strategii gry,
- $u_i : A \to \mathbb{R}$: funkcja wypłaty gracza i,
- $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_i)_{i \in N}$, $a_i \in A_i$: profil gry w strategiach czystych,
- $u_i(a) = u_i(a, a_{-i})$: wypłata gracza i z profilu a,
- $a_{-i} = (a_i)_{i \in N \setminus \{i\}}$: profil wszystkich strategii poza strategią graca i.

Definicja 1.5 (Gra strategiczna)**.** Grą strategiczną nazywamy trójkę $GS = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$.

Definicja 1.6 (Równowaga Nasha w strategiach czystych gry strategicznej)**.** Równowaga Nasha w strategiach czystych gry strategicznej jest to profil gry $a^* = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_N^*) \in A$, takim, że

$$\forall\, i \in N \ \forall\, a_i \in A_i \quad u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geqslant u_i(a_i, a_{-i}^*).$$

Zatem jest to profil gry, w którym istnieje strategia czysta dająca nie gorsze wyniki od dowolnej innej strategii czystej. Okazuje się jednak, że taki stan nie zawsze istnieje w strategiach czystych, np. w grze kamień papier nożyce strategia grania tylko kamienia daje gorsze rezultat przeciwko graniu tylko papieru. Podobnie ze strategią grania tylko nożyc i grania tylko papieru.

1.2.2 Strategie mieszane

Definicja 1.7 (Strategia mieszana)**.** Strategia mieszana σ_i graca i w grze strategicznej $GS = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$. Nazywamy rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze strategi czystych A_i

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{im_i})$$

gdzie σ_{ik} oznacza prawdopodobieństwo, że gracz i zagra strategie czysta $k \in A_i$.

Fakt 1.8. *Strategia czysta jest szczególnym przypadkiem strategij mieszanej, w którym prawdopodobieństwo zagrania jednej z dostępnych strategii wynosi 1.*

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:

- $\Sigma_i = \{\sigma_i : A_i \to [0,1], \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} = 1, \sigma_{ki} \geqslant 0\}$: Zbiór strategii mieszanych gracza i,
- $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$: Profil gry,
- $u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$: Wypłata gracza i z profilu σ,
- $\sigma_{-i} = (\sigma_i)_{i\in N\setminus\{i\}}$: Profil wszystkich strategii poza strategią graca i.

Definicja 1.9 (Równowaga Nasha w strategiach mieszanej gry strategicznej)**.** Profil gry strategicznej σ_i^* jest Równowagą Nasha gdy

$$\forall\, i \in N \;\; \forall\, \sigma_i \in \Sigma_i \quad u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*).$$

Równowaga Nasha interpretujemy jako taki profil gry, w którym żaden z graczy nie opłaca się zmieniać swojej strategi, ponieważ nie skutkuje to zwiększeniem swoich zysków.

1.3 Twierdzenia

Algorytmy 1, 2, 3, 4, 5 wykorzystywane w poniższej pracy oparte są o dwa twierdzenia a dokładniej o szczególne przypadki wynikające z nierówności 1.10 i 1.12 [5].

Twierdzenie 1.10 (Nierówność Hoeffdinga)**.** *Niech $X_1, X_2, \ldots, X_t$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych (i.i.d.) takim, że $a_i \leqslant X_i \leqslant b_i$, wtedy:*

$$S_t = \sum_{i=1}^{t} X_i, \quad c_i = b_i - a_i,$$

$$\mathbb{P}(|S_t - \mathbb{E}(S_t)| \geqslant \epsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right).$$

Lemat 1.11. *Niech $X_1, X_2, \ldots, X_t$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych (i.i.d.) takim, że $0 \leqslant X_i \leqslant 1$, wtedy:*

$$\overline{X}_t = \frac{S_t}{t}, \quad \mu = \mathbb{E}(X_i), \quad \mathbb{P}(|\overline{X}_t - \mu| \leqslant \epsilon) = 1 - \delta,$$

$$\epsilon \leqslant \sqrt{\frac{\ln(2/\delta)}{2t}}.$$

Twierdzenie 1.12 (Empiryczna nierówność Bernsteina)**.** *Niech $X_1, X_2, \ldots, X_t$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych (i.i.d.) takim, że $a \leqslant X_i \leqslant b$, wtedy:*

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_t - \mu| \geqslant \epsilon) \leqslant \delta, \quad \overline{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t}\sum_{i=i}^{t}(X_i - \overline{X}_t)^2,$$
$$|\overline{X}_t - \mu| \leqslant \overline{\sigma}_t\sqrt{\frac{2\ln(3/\delta)}{t}} + \frac{3R\ln(3/\delta)}{t}.$$

Lemat 1.13. *Niech $X_1, X_2, \ldots, X_t$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych (i.i.d.) takim, że $0 \leqslant X_i \leqslant 1$, wtedy:*

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_t - \mu| \leqslant \epsilon) = 1 - \delta,$$
$$\epsilon \leqslant \overline{\sigma}_t\sqrt{\frac{2\ln(3/\delta)}{t}} + \frac{3\ln(3/\delta)}{t}.$$

1.4 Problem porównań wielokrotnych

Załóżmy, że z prawdopodobieństwem $1-\delta$ chcemy ustalić, który z dwóch graczy, p_1 i p_2 jest lepszy. W tym celu będziemy przeprowadzać testy statystyczne, dla których prawdopodobieństwo pomyłki k-tego testu wynosi δ_k. Testy te będą kontynuowane aż do momentu, gdy jeden z graczy zwycięży większość przeważająca liczbę razy. Po przeprowadzeniu n takich testów:

$$\mathbb{P}(\text{Chociaż jeden z } n \text{ testów się pomylił}) \overset{(*)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\delta_k \implies$$
$$\mathbb{P}(\text{Żaden test się nie pomylił}) \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{n}\delta_k,$$

gdzie nierówność oznaczona $(*)$ wynika z faktu, że $\mathbb{P}(X+Y) \leqslant \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)$.

Aby ostateczne prawdopodobieństwo popełnienia błędu było mniejsze niż δ, konieczne jest wprowadzenie odpowiedniej korekty. Możemy zastosować jedna z dwóch poprawek:

1.4.1 Niech n będzie maksymalną liczbą testów jaką pozwalamy wykonać, aby wyznaczyć lepszego gracza. Wtedy $\delta_k = \frac{\delta}{n}$.

1.4.2 Niech δ_k spełnia nierówność $\delta \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k$. Wtedy niezależnie od ilości przeprowadzonych testów, ostateczne prawdopodobieństwo pomyłki będzie nie większe niż δ.

Wykorzystując Lemat 1.13 oraz korektę 1.4.2 otrzymujemy, że dla ciągu $X_1, X_2, \ldots, X_t$ i.i.d. zmiennych losowych takim, że $0 \leqslant X_i \leqslant 1$

$$\epsilon_{t,k} \leqslant \overline{\sigma}_t\sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_k)}{t}} + \frac{3\ln(3/\delta_k)}{t}. \tag{1.1}$$

Wtedy $(\overline{X}_t - \epsilon_{t,k}, \overline{X}_t + \epsilon_{t,k})$ interpretujemy jako przedziałem ufności dla μ o współczynniku ufności $1-\delta_k$.

Lemat 1.14. *Niech $X_1, X_2, \ldots, X_t$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych takim, że $0 \leqslant X_i \leqslant 1$. Dodatkowo niech liczba rozegranych gier będzie funkcja zależną od k $(f(k) = t)$ oraz niech $\delta_k = \frac{\delta}{g(k)}$ gdzie $\delta \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{g(k)}$ i $\ln(g(k)) \in o(f(k))$. Wtedy $\lim\limits_{k\to\infty} e_{f(k),k} = 0$.*

Dowód Lematu 1.14 znajduje się na końcu minimuszej pracy w sekcji Dodatek.

Lemat 1.14 pozwala nam na ograniczane ilości przeprowadzanych testów do wyznaczenia lepszego gracza oraz określa, w jaki spór możemy przeprowadzać testy, aby nie stracić zbieżności. Wynik ten jest istoty, ponieważ podejście oparte o próbę wyznaczenia, który z graczy jest lepszy po każdej rozegranej grze prowadzi do nadmiernej ilości wykonywanych testów. Przykładem funkcjami, jakimi możemy użyć do Lematu 1.14 są $f(k) = k^2, g(k) = \frac{6/\pi^2}{k^2}$. Teaki dobór funkcji oznacza ze k-ty test odbywa się, gdy liczba przeprowadzonych gier wynosi k^2.

Rozdział 2

Algorytmy

2.1 Algorytmy wyścigowe

Do algorytmów wykorzystujących korekty 1.4.1 i 1.4.2 należą algorytmy wyścigowe (Racing Algorytms) [6]. Dwoma najpopularniejszymi typami algorytmów ratingowych są „Hoeffding race" oraz „Bernstein race". Oparte są one odpowiednio o Twierdzenie 1.10 i Twierdzenie 1.13 oraz korektę 1.4.2. Mają one jednak pewną wadę, mogą one wymagać bardzo dużej liczby iteracji, a gdy poziom umiejętności porównywanych graczy jest sobie równy (prawdopodobieństwo wygranej wynosi 50%), wtedy z prawdopodobieństwem równym $1-\delta$ algorytm nigdy się nie zatrzyma.

Aby rozwiązać problemy związane z klasycznymi algorytmami wyścigowymi, wprowadzamy tzw. Limited Racing algorytm. Załóżmy zatem dodatkowy warunek, który mówi, że przerywamy działanie algorytmu, gdy empiryczna wartość oczekiwana z prawdopodobieństwem większym bądź równym $1-\delta$ jest znana z dokładnością co do zadanego ϵ. W naszej pracy przyjmiemy $\epsilon = 0.01$ i $\delta = 0.05$.

2.1.1 Limited Empirical Bernstein Race (LEBR) algorytm

Klasyczny algorytm racingowy opiera się na szeregu ϵ_t, spełniającej warunek, że zdarzenie $\mathcal{E} = \{|\overline{X}_t - \mu| \leqslant \epsilon_t, t \in \mathbb{N}^+\}$ występuje z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $1-\delta$. Dodatkowo niech δ_k będzie dodatnim szeregiem spełniającym $\delta \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$. Wtedy korzystając z Lematu 1.13

$$\epsilon_t = \overline{\sigma}_t \sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_t)}{t}} + \frac{3\ln(3/\delta_t)}{t}.$$

Ponieważ δ_k sumuje się co najwyżej do δ, a $(\overline{X}_t - \epsilon_t, \overline{X}_t + \epsilon_t)$ jest przedziałem ufności dla μ o współczynniku ufności $1-\delta_t$, oznacza to, że zdarzenie $\mathcal{E}$ występuję z prawdopodobieństw nie mniejszym niż $1-\delta$. Podobny rezultat otrzymujemy stosując ϵ_t oparte o Lemat 1.11 jednak zmienia się wtedy postać ϵ_t. W pracy [1] algorytm opierał się o szereg $\delta_t = \frac{c\delta}{t^2}, c = \frac{6}{\pi^2}$. Pseudokod algorytmu, przedstawiony jest jako Algorytm 1, opiera się on na rozgrywaniu t gier i obliczeniu górnej granicy UB $= \min_{1\leqslant k\leqslant t}(\overline{X}_k + c_k)$ oraz dolną granice LB $= \max(0, \max_{1\leqslant k\leqslant t}(\overline{X}_k - c_k))$. Algorytm kończy działanie, gdy różnica między UB a LB jest mniejsza niż 2ϵ. Otrzymane w ten sposób $\overline{X}$ z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $1-\delta$ jest bliskie wartości μ z dokładnością co zadanego ϵ.

Algorithm 1 LEBR

Ensure: precision ϵ, probabilitys δ_k
  $LB \leftarrow 0, \quad UB \leftarrow \infty, \quad t \leftarrow 0, \quad n \leftarrow 1$
  while $UB - LB > 2\epsilon$ **do**
    $t \leftarrow t + 1$
    Obtain X_t
    $\delta_n \leftarrow \frac{6\delta}{\pi^2 n^2}$
    $\epsilon_n \leftarrow \overline{\sigma}_n \sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_n)}{n}} + \frac{3\ln(3/\delta_n)}{n}$
    $LB \leftarrow \max(LB, \overline{X_n} - \epsilon_n)$
    $UB \leftarrow \min(UB, \overline{X_n} + \epsilon_n)$
    $n \leftarrow n + 1$
  end while
  return $\overline{X_t}$

2.1.2 Improved LEBR (ILEBR)

Algorytm 1 jest oparty na korekcie 1.4.2, która zakłada możliwie nieskończoną ilość testów. Jednak dołączenie ograniczenia dotyczącego żądanej dokładności ϵ pozwala nam znaleźć maksymalną ilość testów, jaką należy wykonać, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $1 - \delta$ empiryczna wartość oczekiwana była równa teoretycznej wartości oczekiwanej z dokładnością co do ϵ. Niech $\delta_k = \frac{\delta}{n_{\max}}$ gdzie $n_{\max}$ oznacza maksymalną ilość testów potrzebną do wyznaczenia lepszego gracza. Rozwiązując numerycznie równanie (2.1) wynikające z Lematu 1.11, możemy ustalić maksymalną potrzebną ilość testów, niezależnie od odchylenia standardowego zmiennej losowej X_i

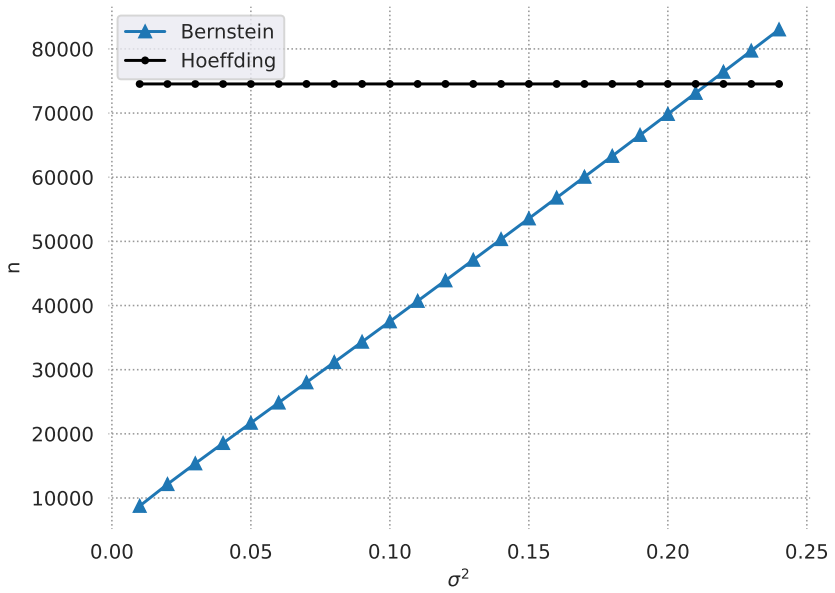
$$\epsilon = \sqrt{\frac{\ln(2n_{\max}/\delta)}{2n_{\max}}}. \tag{2.1}$$

Dla $\epsilon = 0.01$ i $\delta = 0.05$ rozwiązaniem numerycznym równania (2.1) jest $n_{\max} = 74539.85$. Oznacza to, że aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $1 - 0.05$ oszacować prawdopodobieństwo wygrania gry przez pierwszego gracza z dokładnością co do 0.01, maksymalna ilość gier, jaką należy rozegrać między dwoma graczami wynosi $n_{\max} = 74540$.

Powyższą metodę możemy również zastosować w przypadku nierówności Bernsteina. Na początku jednak musimy oszacować z góry $\overline{\sigma}_t$. Przyjmijmy, że X_i to zmienna losowa o rozkładzie zero-jedynkowym. Wtedy maksymalna możliwa wariancja dla takiej zmiennej losowej wynosi $\sigma^2 = 0.25$. Jest to również maksymalna możliwa wartość dla naszej empirycznej wariancji. Podstawiając $\delta_n = \frac{0.05}{n_{\max}}, \epsilon = 0.01$ do Lematu 1.13 otrzymujemy

$$0.01 \leqslant \sqrt{\frac{\ln(\frac{3n_{\max}}{0.05})}{2n_{\max}}} + \frac{3\ln(\frac{3n_{\max}}{0.05})}{n_{\max}}. \tag{2.2}$$

Dla $\epsilon = 0.01$ i $\delta = 0.05$ rozwiązaniem numerycznym równania (2.2) jest $n_{\max} = 86329$. Jednak granice oparte o nierówność Bernsteina zależą od wariancji. Sprawdźmy zatem jak wygląda $n_{\max}$ w zależności od σ^2. Z Rysunku 2.1 widzimy, że algorytm oparty o nierówność Bernsteina szybciej kończy działanie w przypadku gdy jedna z porównywanych strategi jest silnie dominująca. Co więcej, z równania (2.1) wynika, że niezależnie od ilości wykonywanych testów, dla $\delta_n = \frac{0.05}{74540}$ maksymalna ilość gier, po której z prawdopodobieństwem $1 - 0.05$ wiemy, że $|\overline{X_i} - \mu| \leqslant 0.01$ wynosi 74540.



Rysunek 2.1: Wykres maksymalnej potrzebnej ilości testów w zależności od wariancji zmiennych losowych X_i w przypadku gdy liczba przeprowadzonych testów jest równa liczbie gier ($t = n$) dla $\epsilon = 0.01$ i $\delta = 0.05$.

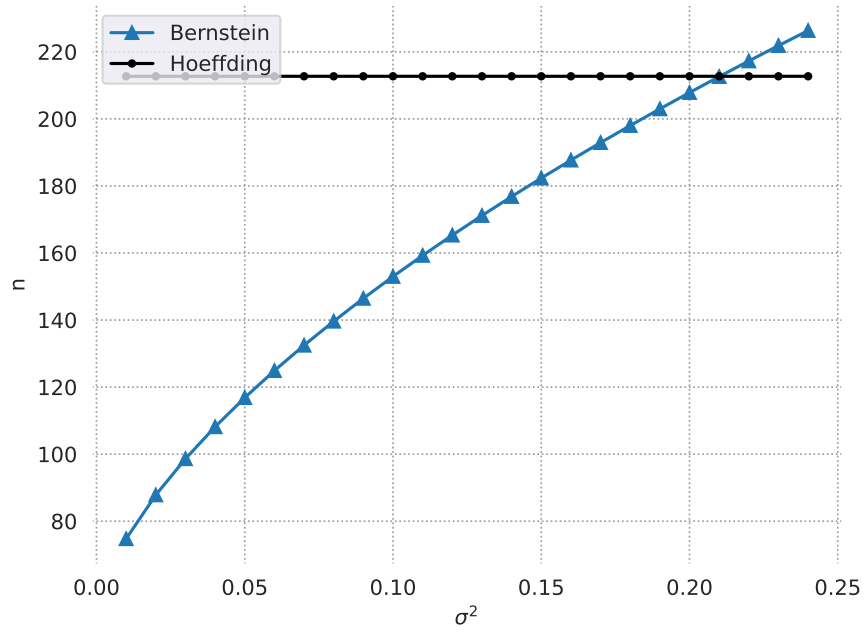
Algorytm 2 jest modyfikacją Algorytmu 1 uwzględniającą ograniczenie na maksymalną liczbę wykonywanych testów, wynikającej z analizy nierówności Bernsteina i Hoeffdinga. W szczególności został dodany warunek zatrzymania algorytmu, gdy liczba wykonanych testów przekroczy $n_{\max}$.

Algorithm 2 ILEBR 1

Ensure: precision ϵ, probability δ
  $LB \leftarrow 0, \quad UB \leftarrow \infty, \quad t \leftarrow 0, \quad n \leftarrow 1$
  Find $n_{\max}$ such as $\epsilon = \sqrt{\frac{\ln(2n_{\max}/\delta)}{2n_{\max}}}$
  $\delta_n = \delta / n_{\max}$
  while $UB - LB > 2\epsilon$ or $n \leqslant n_{\max}$ **do**
    $t \leftarrow t + 1$
    Obtain X_t
    $\epsilon_n \leftarrow \overline{\sigma}_n \sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_n)}{n}} + \frac{3\ln(3/\delta_n)}{n}$
    $LB \leftarrow \max(LB, \overline{X_n} - \epsilon_n)$
    $UB \leftarrow \min(UB, \overline{X_n} + \epsilon_n)$
    $n \leftarrow n + 1$
  end while
  return $\overline{X_t}$

2.1.3 ILEBR 2

Algorytmy 1 i 2 przeprowadzały testy po każdej rozegranej grzęz, czym skutkuje to wytopieniem bardzo dużej ilości testów. Wprowadzamy zatem pewną zmianę do naszych algorytmów. Zamiast przeprowadzać test po każdej rozegranej grze, niech test odbywa się



Rysunek 2.2: Wykres maksymalnej potrzebnej ilości testów w zależności od wariancji zmiennych losowych X_i w przypadku gdy liczba rozegranych gier jest równa liczbie przeprowadzonych testów do kwadratu ($t = n^2$) dla $\epsilon = 0.01$ i $\delta = 0.05$.

w momencie, gdy liczba rozegranych gier będzie równa wartości pewnej funkcji zależnej od ilości przeprowadzonych testów. Na podstawie wyników z artykuł [5] wiemy, że funkcją, która pozwoli nam na polepszenie wyników jest $t = n^2$. Aby uzyskać optymalne wyniki, przeprowadźmy tę samą procedurę, jak w przypadku równań (2.1) i (2.2), ale zamiast stosować $t = n$ w Lematach 1.11 i 1.13 zastosujemy $t = n^2$.

W przypadku granicy opartej o nierówność Hoeffdinga otrzymujemy

$$0.01 = \sqrt{\frac{\ln(2n_{\max}/\delta)}{2n_{\max}^2}} \implies t_{max} = \lceil n_{\max} \rceil^2 = \lceil 213 \rceil^2 = 45369. \tag{2.3}$$

W przypadku granicy opartej o nierówność Bernsteina otrzymujemy

$$0.01 \leqslant \sqrt{\frac{\ln(\frac{3n_{\max}}{0.05})}{n_{\max}^2} + \frac{3\ln(\frac{3n_{\max}}{0.05})}{n_{\max}^2}} \implies t_{max} = \lceil n_{\max} \rceil^2 = \lceil 230.751^2 \rceil = 53247. \tag{2.4}$$

Porównując uzyskane wartości (2.3), (2.4) z wartościami (2.1) i (2.2), widzimy, że udało się nam zmniejszyć maksymalną ilość gier, które należy wykonać z 74540 do 45369. Wprowadźmy więc nowe poprawki do Algorytmu 3.

Algorithm 3 ILEBR 2

Ensure: precision ϵ, probability δ
  $LB \leftarrow 0, \quad UB \leftarrow \infty, \quad t \leftarrow 0, \quad n \leftarrow 1$
  Find $n_{\max}$ such as $\epsilon = \sqrt{\frac{\ln(2n_{\max}/\delta)}{2n_{\max}^2}}$
  $\delta_n = \delta / n_{\max}$
  while $UB - LB > 2\epsilon$ or $n \leqslant n_{\max}$ **do**
    repeat
      $t \leftarrow t + 1$
      Obtain X_t
    until $t = n^2$
    $\epsilon_n \leftarrow \overline{\sigma}_n \sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_n)}{n^2}} + \frac{3\ln(3/\delta_n)}{n^2}$
    $LB \leftarrow \max(LB, \overline{X_n} - \epsilon_n)$
    $UB \leftarrow \min(UB, \overline{X_n} + \epsilon_n)$
    $n \leftarrow n + 1$
  end while
  return $\overline{X_t}$

2.1.4 ILEBR*

Do tej pory Wszystkie stosowane algorytmy wyznaczały nam prawdopodobieństwo wygranej pierwszego gracza. Jednak nam nie zależy na tym, aby dokładnie znać prawdopodobieństwo wygranej graczy. Głównym celem algorytmów jest odnalezienie lepszego z nich. Pozwala nam to na modyfikacje Algorytmu 3 o nowe warunki zatrzymania. Warunie tym jest zatrzymanie działania algorytmu w momencie, gdy górna bądź dolna granica przekroczy wartość 0.5.

Algorithm 4: ILEBR* 1

Ensure: precision ϵ, probability δ
  $LB \leftarrow 0, \quad UB \leftarrow \infty, \quad t \leftarrow 1, \quad n \leftarrow 0$
  Find $n_{\max}$ such as $\epsilon = \sqrt{\frac{\ln(2n_{\max}/\delta)}{2n_{\max}^2}}$
  $\delta_n = \delta / n_{\max}$
  while $(UB - LB > 2\epsilon$ or $n < n_{\max} + 1)$ and $(UB > 0.5$ or $LB < 0.5)$ **do**
    repeat
      $t \leftarrow t + 1$
      Obtain X_t
    until $t = n^2$
    $\epsilon_n \leftarrow \overline{\sigma}_n \sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_n)}{n^2}} + \frac{3\ln(3/\delta_n)}{n^2}$
    $LB \leftarrow \max(LB, \overline{X_n} - \epsilon_n)$
    $UB \leftarrow \min(UB, \overline{X_n} + \epsilon_n)$
    $n \leftarrow n + 1$
  end while
  if $LB > 0.5$ **then**
    return p_1 win
  else if $UB < 0.5$ **then**
    return p_2 win
  else if $\overline{X_n} > 0.5$ **then**
    return p_1 win
  else
    return p_2 win
  end if

2.1.5 ILEBR* 2

Do tej pory skupialiśmy się na ograniczeniu maksymalnej ilości rozgrywanych gier. Jednak oczywiste jest, że nie ma sensu testować, który z graczy jest lepszy, gdy ilość rozegranych gier jest zbyt mała. Jadnak jak wyznaczyć nasze minimalne t, po którym przeprowadzamy pierwszy test? Algorytm oparty na nierówności Bernsteina najszybciej wyznacza wynik, gdy wariancja naszej zmiennej losowej wynosi 0 (jeden z graczy zawsze wygrywa). Dla Algorytmu 4 interesuje nas moment, od którego będziemy w stanie rozróżnić, kiedy dolna lub górna granica przekroczy 0.5. Zatem oszacujmy n_{min} korzystając z Lematu 1.13 dla $\overline{\sigma}_t = 0$ i $t = n^2$.

$$0.5 \leqslant \frac{3\ln(\frac{3n_{\max}}{0.05})}{n_{min^2}} \implies t_{min} = \lceil n_{min} \rceil^2 = \lceil 7.53219 \rceil^2 = 64.$$

Oznacza to, że przy $\epsilon = 0.01$ i $\delta = 0.05$ w przypadku gdy jeden gracz zawsze wygrywa, będziemy w stanie to stwierdzić nie wcześniej niż po rozegraniu 64 grach. Na tej podstawie wyznaczmy nowe $n_{\max}$ uwzględniając pomijanie pierwszych niepotrzebnych testów.

$$0.01 = \sqrt{\frac{\ln(2n_{\max}/0.05)}{2(n_{\max}+7)^2}} \implies t_{max} = \lceil n_{\max} + 6 \rceil^2 = \lceil 205.289 + 7 \rceil^2 = 45369. \qquad (2.5)$$

Chociaż wynik równania (2.5) nie zmniejszył maksymalnej liczby testów jakie należy wykonać, to pozwolił nam on na zmniejszenie ϵ_n. Oznacza to, że stosując odroczenie

pierwszych testów, możemy dokładniej oszacować naszą górną i dolną granicę w stosowanych algorytmach.

Algorithm 5: ILEBR* 2

Ensure: precision ϵ, probability δ
  $LB \leftarrow 0, \quad UB \leftarrow \infty, \quad n \leftarrow 0$
  Find $n_{\max}$ such as $\epsilon = \sqrt{\frac{\ln(2n_{\max}/\delta)}{2n_{\max}^2}}$
  Find n_{min} such as $0.5 = \sqrt{\frac{\ln(2n_{\max}/\delta)}{2(n_{min}+1)^2}}$
  Obtain first X_1,X_2,$X_{n_{min}}$ games
  $t \leftarrow n_{min}^2$
  $\delta_n = \delta / n_{\max}$
  while $(UB - LB > 2\epsilon$ or $n \leqslant n_{\max})$ and $(UB > 0.5$ or $LB < 0.5)$ **do**
    repeat
      $t \leftarrow t + 1$
      Obtain X_t
    until $t = (n + n_{min})^2$
    $\epsilon_n \leftarrow \overline{\sigma}_n \sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_n)}{(n+n_{min})^2}} + \frac{3\ln(3/\delta_n)}{(n+n_{min})^2}$
    $LB \leftarrow \max(LB, \overline{X_n} - \epsilon_n)$
    $UB \leftarrow \min(UB, \overline{X_n} + \epsilon_n)$
    $n \leftarrow n + 1$
  end while
  if $LB > 0.5$ **then**
    return p_1 win
  else if $UB < 0.5$ **then**
    return p_2 win
  else if $\overline{X_n} > 0.5$ **then**
    return p_1 win
  else
    return p_2 win
  end if

2.2 Prawdopodobieństwo popełnienia błędu

Algorytmy typu LEBR cechują się innym prawdopodobieństwem popełnienia błędu niż klasyczne algorytmy racingowe, ze względu na wprowadzony pramateria ϵ. Zajmijmy się zatem wyznaczeniem tego prawdopodobieństwa w zależności od parametrów początkowych δ i ϵ w badanym problemie decyzyjnym. W tym celu wprowadźmy dwie hipotezy odnoście graczy:

- H_a: Gracz pierwszy jest lepszy od gracza drugiego.
- H_b: Gracz drugiego jest lepszy od gracza pierwszego.

Oznacza to, że prawdopodobieństwem popełnienia błędu w naszym przypadku jest prawdopodobieństwo przyjęcia za lepszego gracza osoby o niższym prawdopodobieństwie wygranej.

Oznaczmy prawdopodobieństwo pomyłki w naszych algorytmach typu ILEBR jako α. Załóżmy bez straty ogólności, że teoretyczne prawdopodobieństwo wygrania gry przez pierwszego gracza jest większa od 0.5 ($\mu > 0.5$). Wtedy α możemy wyrazić przy pomocy następującego wzoru

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} > 0.5) \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(k)} + \epsilon_k > 0.5), \tag{2.6}$$

gdzie:

- α: Prawdopodobieństwo popełnienia błędu.
- $f(k)$: Funkcja rozmiaru próby, zależna od liczby przeprowadzonych testów.
- $\epsilon_k = \overline{\sigma}_k \sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_k)}{f(k)}} + \frac{3\ln(3/\delta_k)}{f(k)}$: Zależny od testowanego algorytmu.
- $n_{\max}$: Zależny od przyjętych parametrów ϵ i δ.

Dowód wzoru (2.6) znajduje sie na końcu niniejszej pracy w Dodatku.

Wyrażenie (2.6) pozwala nam określić teoretyczne prawdopodobieństwo wystąpienia pomyłki dla algorytmów typu LEBR. Jednak wzór ten nie pozwala nam w łatwy sposób na wyznaczenie takiej δ, aby prawdopodobieństwo pomyłki nie było większe niż zadane α. Aby moc wyznaczyć metodę znajdywania takiej δ przy zadanym parametrze początkowym ϵ, ograniczmy naszą α wynikającą z równania (2.6)

$$\alpha \leqslant 1 - \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(k)} + \epsilon_k > 0.5) + \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} \leqslant 0.5). \tag{2.7}$$

Wyrażenie (2.7) możemy zapisać przy pomocy dwóch składników. Pierwszym z nich jest

$$\alpha_1 = \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} > 0.5). \tag{2.8}$$

Oraz drugi składnik

$$\alpha_2 = 1 - \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(k)} + \epsilon_k > 0.5). \tag{2.9}$$

Przyjmując, że X_i jest zmienną losowa z rozkładu zero-jedynkowego otrzymujemy, że $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest zmienną losową z rozkładu dwumianowego. Pozwala to nam na zapisanie równań (2.8) i (2.9) w następujący sposób:

$$\alpha_1 = \mathbb{P}_\mu\left(Y_{f(n_{\max})} > \frac{f(n_{\max})}{2}\right), \tag{2.10}$$

$$\alpha_2 = 1 - \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu\left(Y_{f(n_{\max})} > \frac{f(k)}{2} - \overline{\sigma}_{f(k)}\sqrt{2\ln(3/\delta_k)f(k)} - 3\ln(3/\delta_n)\right). \tag{2.11}$$

Spoglądają na Rysunek 2.3 oraz animalizując wyrażenie (2.11) możemy zauważyć, że maksymalne α_2 osiągane jest dla $\mu = 0.5$, zatem

$$\alpha_2 \geqslant \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu\left(Y_{f(n_{\max})} > \frac{f(k)}{2} - \sqrt{\frac{\ln(3/\delta_k)f(k)}{2}} - 3\ln(3/\delta_n)\right). \tag{2.12}$$

Nierówność (2.12) jesteśmy w stanie ograniczyć jeszcze bardziej ze wglądu na fakt że $\delta \in (0, 1]$. Spoglądają na Rysunek 2.3 oraz animalizując nierówność (2.12) widzimy, że wraz z wzrostem parametru δ wartość prawdopodobieństwa α_2 również wzrasta. Oznacza to więc, że jesteśmy w stanie rozszerzyć nasze ograniczenie zastępując $\delta_n = \delta/n_{\max}$ samym $1/n_{\max}$

$$\alpha_2 \geqslant \prod_{k=1}^{n_{\max}} P_\mu \left(Y_{f(n_{\max})} > \frac{f(k)}{2} - \sqrt{\frac{\ln(3n_{\max})f(k)}{2}} - 3\ln(3n_{\max}) \right). \tag{2.13}$$

Wynik otrzymany z nierówności (2.13) jest szczególnie istotny, ponieważ ograniczenie to zależny jawnie tylko od parametrów μ i $n_{\max}$!

W ramach uproszenia zapisy wprowadźmy nową funkcje $F'_\mu(n_{\max})$ w nietepujący sposób

$$F'_1(n_{\max}) = P_\mu \left(Y_{f(n_{\max})} > \frac{f(n_{\max})}{2} \right), \tag{2.14}$$

$$F'_2(n_{\max}) = \prod_{k=1}^{n_{\max}} P_\mu \left(Y_{f(k)} > \frac{f(k)}{2} - \sqrt{\frac{\ln(3n_{\max})}{2} f(k)} - 3\ln(3n_{\max}) \right), \tag{2.15}$$

$$F'_\mu(n_{\max}) = 1 - F'_1(n_{\max})F'_2(n_{\max}). \tag{2.16}$$

Ostatecznie łącząc wyniki otrzymane z (2.10), (2.13) i (2.16) otrzymujemy, że dla $\mu > 0.5$

$$F'_\mu(n_{\max}) \geqslant \alpha. \tag{2.17}$$

Ze względu na symetrie rozważanego problemu, nierówność (2.17) możemy zapisać dla dowolnego μ w następujący sposób

$$F_\mu(n_{\max}) = \begin{cases} F'_{1-\mu}(n_{\max}), & \text{dla } \mu \leqslant 0.5, \\ F'_\mu(n_{\max}), & \text{dla } \mu > 0.5. \end{cases} \tag{2.18}$$

Funkcja (2.18) pozwala nam na wyznaczanie prawdopodobienstwa popoelnienia błędu dla algorytmów typu ILEBR. Co więcej, przy zadanej wartości początkowej parametru ϵ jesteśmy w stanie tak dobrać wartość δ, aby zachodziła nierówność $F_\mu(n_{\max}) \geqslant \alpha$. Taką δ możemy wyznaczyć poprzez znalezienie rozwalnianie układu równań

$$\begin{cases} n_{\max} = \min\left\{ n \in \mathbb{N}^+ : F_\mu(n) < \alpha \right\}, \\ \delta = \dfrac{\exp(2\epsilon^2 f(n_{\max}))}{2n_{\max}}. \end{cases} \tag{2.19}$$

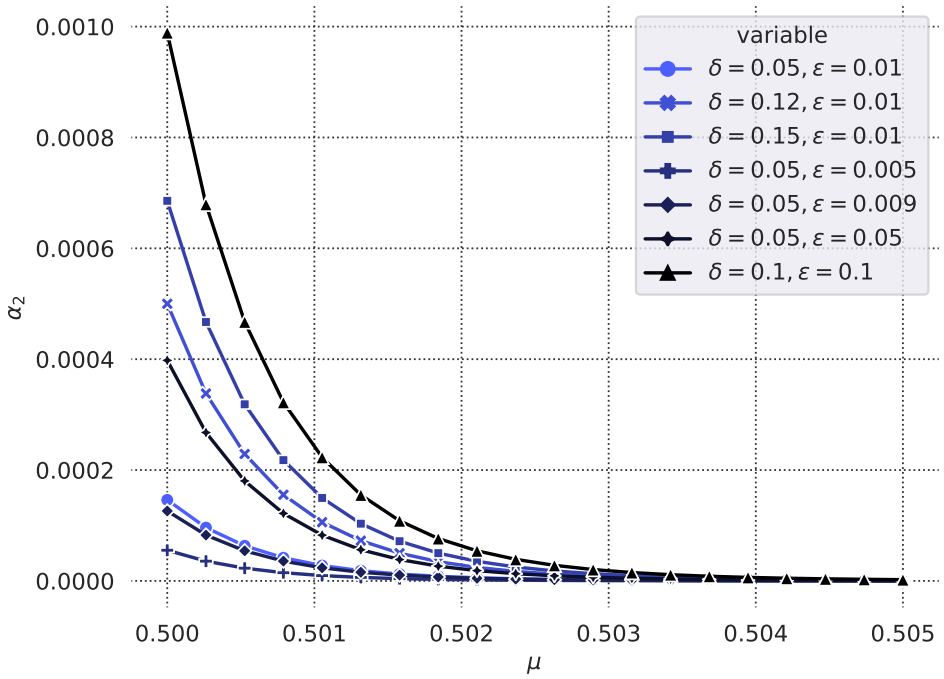
W ramach sprawdzenia wyznaczmy prawdopodobieństwo wyznaczenia złego gracza dla Algorytmu ILEBR* i parametrów początkowych $\mu = 0.497, \delta = 0.05, \epsilon = 0.01$. Wtedy:

$$n_{\max} = 213, \quad \epsilon_n = \overline{\sigma}_n \sqrt{\frac{2\ln(3/\delta_n)}{n^2}} + \frac{3\ln(3/\delta_n)}{n^2}, \quad f(n) = n^2, \quad \delta_n = \frac{\delta}{n_{\max}}. \tag{2.20}$$

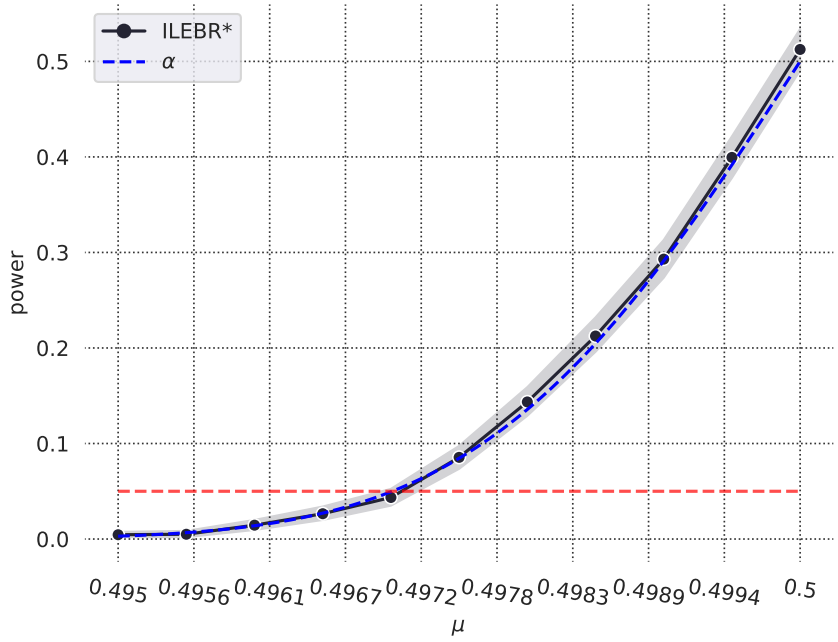
Podstawiają (2.20) do (2.18) otrzymujemy, że

$$F_{0.497}(213) \approx 0.10084 \geqslant \alpha \tag{2.21}$$

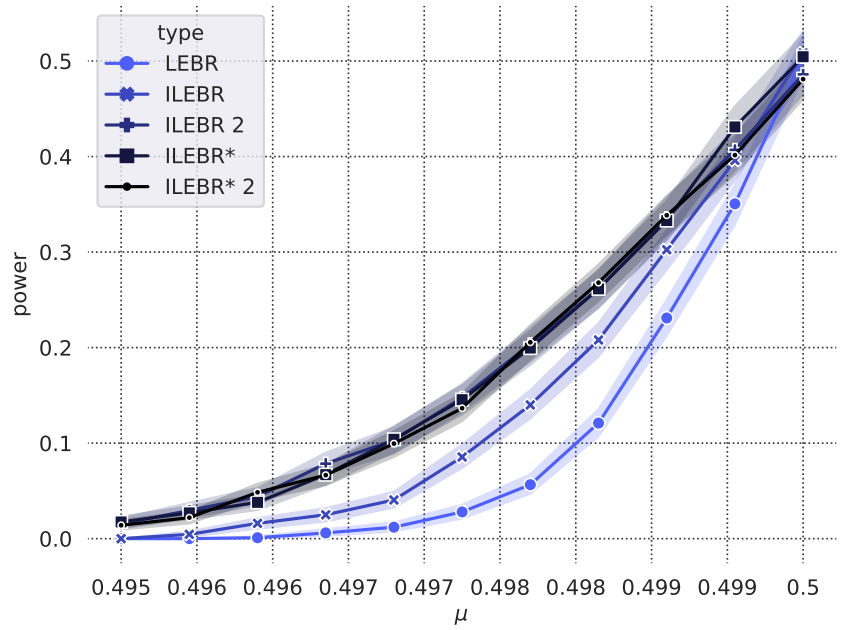
Wynik (2.21) zgadza się z symulacjami dla algorytmu ILEBR* przedstawionymi na Rysunku 2.5.



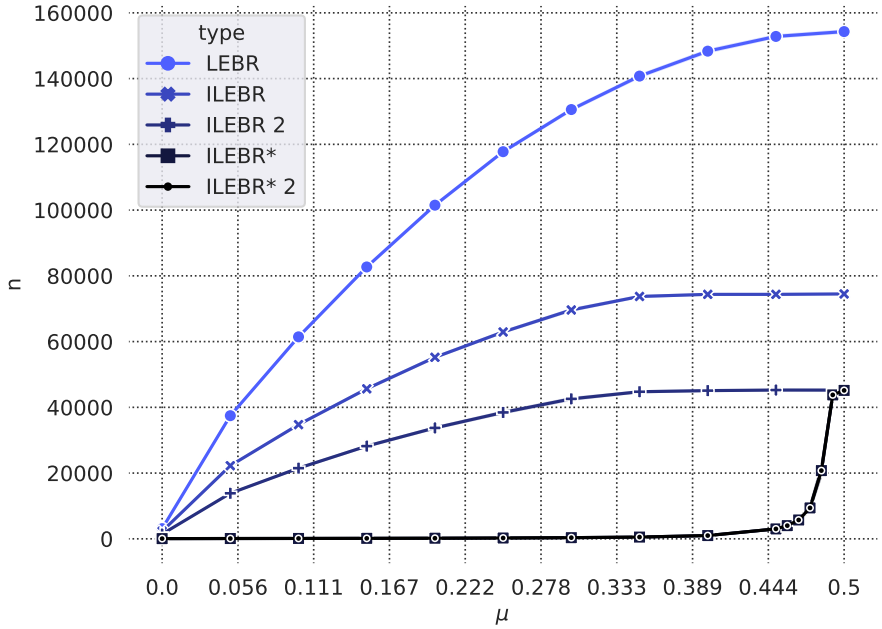
Rysunek 2.3: Wykres wartości prawdopodobieństwa α_2 w zależności od μ, δ i ϵ dla algorytmu ILEBR*.



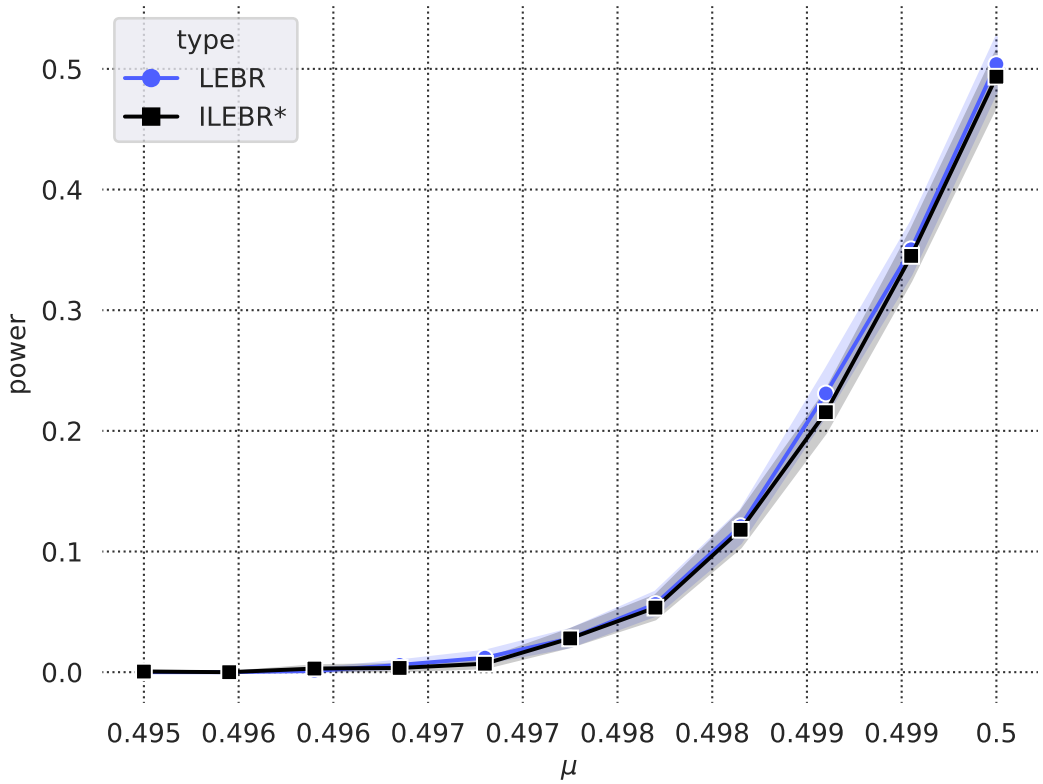
Rysunek 2.4: Wykres wartości prawdopodobieństwa α w zależności od μ dla $\delta = 0.00014848$, $\epsilon = 0.01$ i algorytmu ILEBR*.



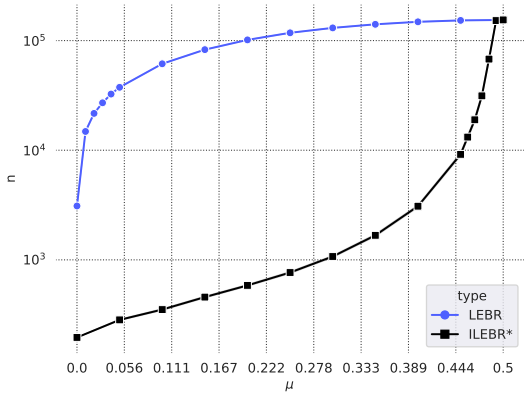
Rysunek 2.5: Wykres prawdopodobieństwa pomyłki w zależności od μ dla $\epsilon = 0.01$ i $\delta = 0.05$.



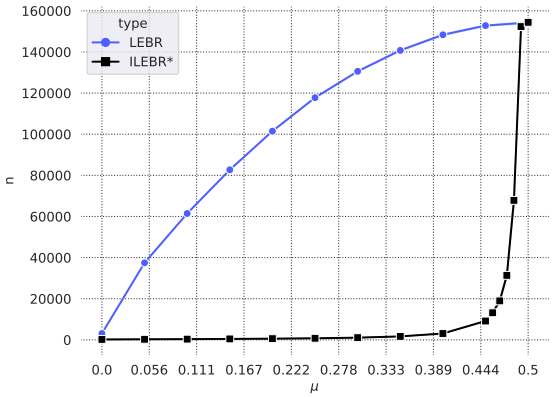
Rysunek 2.6: Wykres sredniej liczby gier potrzebej do rozegrania w zależności od wartosci oczekiwanej zmiennych losowych X_i dla $\epsilon = 0.01$ i $\delta = 0.05$. Na wykresie widoczne są 4 krzywe poniważ wyniki dla algorytmów ILEBR* i ILEBR* 2 pokrywaja się ze sobą.



(a) Wykres prawdopodobieństwa pomyłki w zależności od μ dla $\epsilon = 0.01$.



(b) Wykres prawdopodobieństwa pomyłki w zależności od μ dla $\epsilon = 0.01$ w skali logarytmicznej.



(c) Wykres średniej liczby gier potrzebnej do rozegrania w zależności od μ dla $\epsilon = 0.01$.

Rysunek 2.7: Porwanie algorytmów LEBR oraz ILEBR*.

Co więcej, możemy również wyznaczyć taką warowność parametru δ, żeby $F_{0.497}(n_{\max}) \leqslant 0.05$. Aby to uzyskać, znajdziemy $n_{\max}$ oraz δ spełniające zależność (2.19) przy ustalonym $\epsilon = 0.01$. Rozwiązaniem tego problemu przy zadanych parametrach początkowych jest $n_{\max} = 275, \delta = 0.00014848$. Możemy również zobaczyć, że Rysunku 2.4 przedstawia zgodność symulacji z teoretycznymi rozważaniami.

Patrząc wyłączanie na Rysunek 2.5 możemy zobaczyć, że wszystkie testu cechują się dobrą mocą i działają bardzo dobrze do memento, gdy jeden z graczy ma prawdopodobieństwo wygranej bliskie 0.495. Dodatkowo obszary ściemnione oznaczają 95% przedziały ufności.

Porównując ze sobą wyniki przedstawione na Rysunkach 2.5 i 2.6 możemy stwierdzić, że testem o najlepszej mocy jest testo oparty o algorytm LEBR. Wynika to z wielkości próby, jaką wykorzystywana jest w tym algorytmie (patrz Rysunek 2.6), jednak wymaga on bardzo dłużej liczby gier potrzebnych do rozegrania. Test statystyczny oparty o algorytm ILEBR ma gorsza moc, ale pozwala nam na prawie dwukrotnie zmniejszenie liczby wymaganych gier. Dodatkowo widzimy, że algorytmy ILEBR 2, ILEBR* i ILEBR* 2 cechują się mocą na takim samym poziomie jednak wersje algorytmy oznaczone * pozwalają nam ograniczenie liczby gier potrzebnej do rozegrania, aby test mógł wyznaczyć lepszego gracza. W poniższej pracy będziemy stosować algorytm ILEBR* 2, ponieważ pozwoli on na znacznie zmniejszenie liczby porównań, jakie będziemy przeprowadzacz w celu wyznaczenia lepszego gracza.

Jednakże, jeśli fakt, że algorytmy oznaczone (*) charakteryzują się niższą mocą od algorytmu LEBR przy takich samych parametrach początkowych, stanowi dla nas problem. To możemy łatwo osiągnąć taką samą moc, wystarczy, aby średnie $n_{\max}$ w obu tych algorytmach były sobie równe. Analizując wykresu (Rysunek 2.7) widzimy, że przy zachowaniu tej samej mocy, algorytm ILEBR* jest znacznie szybszy niż jego oryginalny odpowiednik. W naszym przypadku algorytm ILEBR* z parametrami początkowymi $\epsilon = 0.01, \delta = 3.02101484 * 10^{-11}$ zachowuje taką samą moc jak algorytm LEBR z parametrami początkowymi $\epsilon = 0.01, \delta = 0.05$.

2.3 Algorytmy wyznaczania optymalnej strategi

Wszystkie algorytmy przedstawione w tym rozdziale są algorytmami genetycznymi [4]. Algorytm generacyjny to sposób tworzenia nowych rozwiązań dla danego problemu poprzez iteracyjne stosowanie procesu ewolucyjnego. W tym procesie tworzone są nowe rozwiązania, oceniane ich jakość i wybierane najlepsze z nich, aby stworzyć kolejną generację rozwiązań. Ten proces powtarza się, aż zostanie znalezione rozwiązanie spełniające określone kryteria. Algorytm generacyjny może być używany do rozwiązywania różnych rodzajów problemów, takich jak optymalizacja, uczenie maszynowe, tworzenie sztucznej inteligencji i wiele innych. Algorytmy ewolucyjne są często interpretowane jako odwzorowanie procesu ewolucyjnego w naturze, ze względu na swoje odpodobnienie do procesu selekcji naturalnej, w którym najlepsze jednostki są wybierane do reprodukcji i tworzenia nowych pokoleń.

Ogólnie rzecz biorąc, algorytm generacyjny składa się z kilku kluczowych kroków:

- Inicjalizacja: Tworzenie początkowej zbioru rozwiązań dla danego problemu.
- Ocena: Ocena jakości każdego z rozwiązań za pomocą odpowiedniej funkcji celu lub innych miar.
- Selekcja: Wybieranie najlepszych rozwiązań do następnej generacji.
- Krzyżowanie: Łączenie najlepszych rozwiązań z poprzedniej generacji, aby stworzyć nowe rozwiązania dla następnej generacji.

- Mutacja: Losowa zmiana jednego lub więcej elementów w nowych rozwiązaniach, aby zapewnić różnorodność w następnej generacji.

- Powtarzanie: Powtarzanie kroków 2-5, aż zostanie znalezione rozwiązanie spełniające określone kryteria jakości lub osiągnięty zostanie maksymalny poziom iteracji.

Proces znajdowania potencjalnych rozwiązań polega na przeszukiwaniu przestrzeni wszystkich możliwych rozwiązań i wybieraniu tych, które dają najlepsze wyniki. W rzeczywistości jednak często nie mamy fizycznej możliwości sprawdzenia wszystkich możliwych rozwiązań lub ich sprawdzenie jest zbyt czasochłonne bądź kosztowne. Dlatego w algorytmach ewolucyjnych często wykorzystuje się techniki probabilistyczne, które pomagają wybierać, tworzyć i wyszukiwać kolejne rozwiązania.

W niniejszej pracy zaprezentujemy 4 algorytmy, których celem jest znalezienie optymalnej strategii. Trzy pierwsze algorytmy zostaną opisane na podstawie pracy [1]. Czwartym algorytmem jest proponowana przeze mnie metoda, która jest bardzo podobna do Algorytmu 8. Opis tego algorytmu zostanie przedstawiony w dalszej części pracy.

2.3.1 Algorytm iteracyjny

Pierwszym algorytmem, który zostanie przedstawiony, jest algorytm iteracyjny. Jest to metoda bardzo intuicyjna, opierająca się na stopniowym zwiększaniu skuteczności strategii graczy poprzez porównywanie ich wyników. Gdy znajdziemy strategię, która daje lepsze wyniki niż ta poprzednia, staje się ona nowym punktem odniesienia (baseline). Na jej podstawie algorytm będzie kontynuować proces optymalizacji wyników graczy. Nowa strategia jest akceptowana, jeśli wygrywa ona z prawdopodobieństwem większym niż 50% w porównaniu do poprzedniej strategii. Algorytm 6 jest przykładem algorytmem ewolucyjnym typu (1+1) [3].

Algorithm 6: Iterative algorithm

Ensure: precision ϵ, probability δ, random opponent x
  $\sigma \leftarrow 1$ ▷ Inital step-size
  while (termination criterion is not met) **do**
    for all $i = 1$ to lenght of x **do**
      $x'_i \leftarrow x_i + \sigma\mathcal{N}(0,1)$ ▷ Mutation
    end for
    repeat
      play game between x' and x
    until the limited Bernstein race of precision ϵ stop
    if x' better then x **then**
      $x \leftarrow x'$
      $\sigma \leftarrow 1.25\sigma$
    else
      $\sigma \leftarrow 0.84\sigma$
    end if
  end while
  return an approximation x of the optimal strategy

2.3.2 Real Coevolution algorytm

Kolejnym algorytmem ewolucyjnym, którego będziemy używać, jest algorytm koewolucyjny. W przypadku tej metody nowy punkt odniesienia jest wybierany w momencie, gdy nowo znaleziona strategia okazuje się lepsza niż wszystkie dotychczas wybrane strategie. Pseudokod algorytmu koewolucyjnego został przedstawiony jako Algorytm 7.

Algorithm 7: Real Coevolution

Ensure: precision ϵ, probability δ, random opponent x
  $\sigma \leftarrow 1$ ▷ Inital step-size
  $P \leftarrow \{x\}$ ▷ Best point population
  while (termination criterion is not met) **do**
    for all $i = 1$ to lenght of x **do**
      $x'_i \leftarrow x_i + \sigma\mathcal{N}(0,1)$ ▷ Mutation
    end for
    for all $i = 1$ to lenght of P **do**
      repeat
        play game between x' and P_i
      until each limited Bernstein race of precision ϵ stops
    end for
    if x' better then all points in P **then**
      $x \leftarrow x'$
      $P \leftarrow \{P,x'\}$
      $\sigma \leftarrow 1.25\sigma$
    else
      $\sigma \leftarrow 0.84\sigma$
    end if
  end while
  return an approximation x of the optimal strategy

2.3.3 Approx Coevolution 1 algorytm

W przypadku dwóch poprzednich algorytmów nowe rozwiązanie jest tworzone na podstawie poprzednio znalezionego rozwiązania. Możemy jednak zastosować tzw. "podejście Paryskie" (Parisian approach)[2]. W tym podejściu, zamiast porównywać nowo uzyskaną strategię z każdą poprzednio przyjętą, porównujemy ją tylko z jedną losowo wybraną strategią z populacji. Pseudokod algorytmu koewolucyjnego został przedstawiony jako Algorytm 8.

2.3.4 Approx Coevolution 2 algorytm

Ostatnim algorytmem, którym się zajmiemy, jest kolejny algorytm koewolucyjny. Tym razem, zamiast porównywać naszą strategię z jedną losowo wybraną strategią z populacji, tak jak to robiliśmy w przypadku Algorytmu 8, nasza strategia będzie testowana przeciwko losowo wybranemu przeciwnikowi. Pseudokod algorytmu koewolucyjnego został przedstawiony jako Algorytm 9.

Algorithm 8: Approximate Coevolution

Ensure: precision ϵ, probability δ, random opponent x
  $\sigma \leftarrow 1$ ▷ Inital step-size
  $P \leftarrow \{x\}$ ▷ Best point population
  while (termination criterion is not met) **do**
    for all $i = 1$ to lenght of x **do**
      $x'_i \leftarrow x_i + \sigma\mathcal{N}(0,1)$ ▷ Mutation
    end for
    Draw at random an integer *rand* between 1 and the size of P
    repeat
      play game between x' and $rand^{\text{th}}$ individual of P
    until each limited Bernstein race of precision ϵ stops
    if x' better then all points in P **then**
      $x \leftarrow x'$
      $P \leftarrow \{P,x'\}$
      $\sigma \leftarrow 1.25\sigma$
    else
      $\sigma \leftarrow 0.84\sigma$
    end if
  end while
  return an approximation x of the optimal strategy

Algorithm 9: Approximate Coevolution 2

Ensure: precision ϵ, probability δ, random opponent x
  $\sigma \leftarrow 1$ ▷ Inital step-size
  $P \leftarrow \{x\}$ ▷ Best point population
  while (termination criterion is not met) **do**
    for all $i = 1$ to lenght of x **do**
      $x'_i \leftarrow x_i + \sigma\mathcal{N}(0,1)$ ▷ Mutation
    end for
    repeat play game between x' and random individual of P
    until each limited Bernstein race of precision ϵ stops
    if x' better then all points in P **then**
      $x \leftarrow x'$
      $P \leftarrow P,x'$
      $\sigma \leftarrow 2\sigma$
    else
      $\sigma \leftarrow 0.84\sigma$
    end if
  end while
  return an approximation x of the optimal strategy

Chapter 3

Gry

Aby sprawdzić poprawność działania powyższych algorytmów, przetestujemy je na podstawie dwóch gier. Pierwszą z nich będzie popularna gra karciana zwana Wojną. Drugą grą, w której będziemy szukać optymalnej strategii, będzie gra o nazwie Rrrats. Przedstawmy najpierw zasady obowiązujące w obu tych grach.

3.1 Gra w wojnę

Wojna to prosta gra karciana, w której uczestnicy grają przeciwko sobie i używają talii standardowych kart do gry. Celem gry jest zdobycie wszystkich kart od przeciwnika.

Zasady gry są następujące:

- Gracze rozdają po 26 kart, tak aby każdy miał swoje ukryty "magazyny".
- Następnie jedna karta jest odkrywana z każdego magazynu i porównywana ze sobą. Gracz, który ma kartę o wyższej wartości, zabiera obie karty i dokłada je na koniec swojego magazynu. Jeśli karty są takie same, gracze rozgrywają "wojnę".
- Przy wojnie, obaj gracze wykładają z magazynów najpierw jedną kartę rewersem do góry, a następnie odkrywają kolejną kartę rewersem do dołu. Ten gracz, który ma kartę o wyższej wartości, zabiera wszystkie karty i dokłada je do swojego magazynu. Jeśli karty są takie same, proces powtarza się, aż do momentu, gdy jeden z graczy wygra.
- Gra kończy się w monecie, gdy któryś z graczy wygra wszystkie karty.

Same zasady gry nie definiują jednak tego w jaki sposób karty na koniec naszego "magazynu" mogą zostać umieszczane.

Wprowadźmy zatem 3 parametry nazwijmy je odpowiednio A, B, C, których będziemy używać do wyznaczania nieujemnych parametrów $\alpha = \exp(A),\ \beta = \exp(B), \gamma = \exp(C)$. Wtedy, umieśćmy k wygranych kart na końcu naszego "magazynu" niestepujący sposób:

- karty w kolejności malejącej z prawdopodobieństwem równym $\alpha/(\alpha + \beta + \gamma)$
- karty w kolejności rosnącej z prawdopodobieństwem równym $\beta/(\alpha + \beta + \gamma)$
- karty w kolejności losowej z prawdopodobieństwem równym $\gamma/(\alpha + \beta + \gamma)$

3.2 Rrrats!

Rrrats jest prostą grą kościaną typu ekstensywnego, a jej celem jest zdobycie przez poszczególnego gracza najwierniejszej liczby punktów. W każdej swojej turze gracz rzuca dwiema takomskim, aż do momentu, gdy zostanie spełniony warunek stopu, bądź sam uzna, że nie chce już konturować. Gra kończy się w momencie, gdy z głównego stosu znikną wszystkie 31 żetonów (punktów). W grze ożywa się specjalnych których prawdopodobieństw uzyskania otwarci $0, 1, 2$ wynosi odnowienie $3/6, 2/6, 1/6$.

Zasady gry są następujące:

- Grac w swojej turze może rzucić dwoma kosterskimi dowolną ilość razy
- Gracz wykonuje następujące akcje w zależności od uzyskanego wyniku:
  a) Jeśli na kostce wypadło 1, gracz bierze do "reki" żeton ze stosu głównego.
  b) Jeśli wypadło 2, gracz kranie punkt przeciwnikowi i bierze go do swojej "reki". Jeśli to nie możliwe gracz bierze punkt ze stosu głównego.
  c) Jeśli upadło 0, nic się nie dzieje.
  d) Jeśli na obu kostkach wypadło 0, gracz kończy swoją turę i odkłada wszystkie punkty, jakie ma w "ręce".

  Przykład: Jeśli na kostkach wypadnie 0 i 1 gracz pobiera 1 punkt ze stosu głowniowe. Jeśli an kostkach wypadnie 1 i 1 gracz pobiera 2 punkty ze stosu głównego. Jeśli an kostkach wypadnie 1 i 2 gracz pobiera 1 punkty ze stosu głównego i kradnie jeden punkt przeciwnikowi.
- Po każdym żucie gracz decyduje się na to, czy grac dalej, czy zakończyć swoja torę.
- Jeśli gracz ma więcej niż 4 punkty w "rece" tura gracza automatycznie się kończy, a uzyskaną nadwyżkę odkłada się do stosu głównego.
- Jeśli tura dobiegła końca, to gracz przenośni wszystkie punkty uzyskane na "ręce" do swojej puli puntów osobistych.
- Gra kończy się w momencie, gdy liczba punktów na głowy stosie wyniesie 0.

W tym przypadku strategia, której będziemy szukać będzie oparta o 8 parametrów $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$. Przy pomocy tych paramentów wyznaczymy kolejne 8 współczynników $\alpha_1 = \exp(A_1), \alpha_2 = \exp(A_2), \beta_1 = \exp(B_1), \beta_2 = \exp(B_2), \gamma_1 = \exp(C_1), \gamma_2 = \exp(C_2)$. Naszym celem jest wyznaczenie prawdopodobieństwa zdecydowania się na dalszy rzut kośćmi w zależności od ilości punktów posiadanych na "ręce". Wprowadźmy zatem zmienna losowa $Y|K = k, k = \{1, 2, 3\}$. Posłuży ona nam do wyznaczenia prawdopodobieństwo, że gracz zdecydował się na dalszy rzut kośćmi ($Y = 1$) w zależności od ilości posiadanych punktów na "rece". Prawdopodobieństwa wprowadzonej ziemnej losowej określamy w następujący sposób:

$$\mathbb{P}(Y = 1|K = 1) = \alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$\mathbb{P}(Y = 1|K = 2) = \beta_1/(\beta_1 + \beta_2),$$
$$\mathbb{P}(Y = 1|K = 3) = \gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2).$$

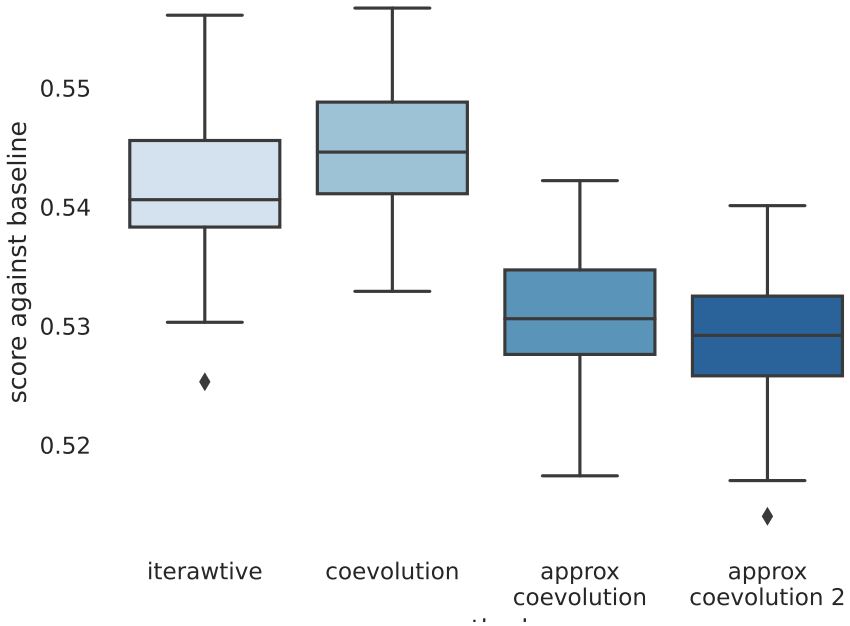
Chapter 4

Wyniki działania algorytmów dla gier

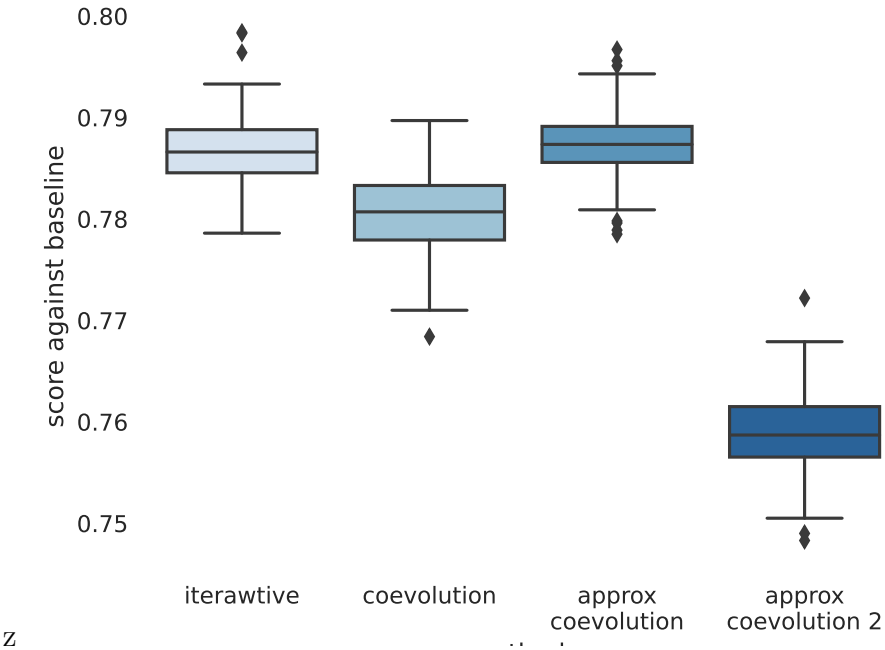
Do przedstawienia wyników dziania przedstawionych algorytmów ożyjemy dwóch. Pierwsza z nich będzie tabela obrazująca prawdopodobieństwo granej strategi uzyskanych przez jazdy z algorytmów przeciwko strategii początkowej. Wyniki przedstawione na Tabelach 4.1 i 4.2 oraz Rysunkach 4.1 i 4.2 pokazują, że każdemu z naszych algorytmów udało się znaleźć strategie dającą średnio wieży winnik od losowej strategi początkowej. Dodatkowo wyznaczone strategię możemy interpretować w prosty do zrozumienia dla człowieka sposób. W grze wojnie istnieje strategia prosta, jest nią układanie kart zawsze w kolejności od największej do najmniejszej. Dodatkowo strategia ta ma 70% szans na wygranie przeciwko strategi układania kart w sposób malejący oraz 53% szans na wygranie przeciwko strategii losowej. Podobnie dla gry Rrrats, algorytmom udało znaleźć się strategię optymalną, patrząc na wyniki z wykresu 4.2 pozwala na ona duże zwiększenie prawdopodobieństwa wygranej. Strategia ta opiera się na kończeniu tury gracza w momencie, gdy uzyska on co najmniej 2 punkty.

	iterawtive	coevolution	approx coevolution	approx coevolution 2
mean	0.541617	0.545225	0.530655	0.528750
std	0.005623	0.005158	0.004900	0.005244
min	0.525300	0.532900	0.517400	0.514000
25%	0.538300	0.541100	0.527600	0.525800
50%	0.540600	0.544600	0.530600	0.529200
75%	0.545575	0.548800	0.534700	0.532500
max	0.556100	0.556700	0.542200	0.540100

Table 4.1: Rezultaty uzyskanych strategi przeciwko strategii początkowej dla gry Rrrats!.



Rysunek 4.1: Wykresy pódełkowe przedwaiajace rezultaty uzyskanych strategi przeciwko strategi poczatkowej dla gry Wojna.



Rysunek 4.2: Wykresy pódełkowe przedwaiajace rezultaty uzyskanych strategi przeciwko strategi poczatkowej dla gry Rrrats.

	iterawtive	coevolution	approx coevolution	approx coevolution 2
mean	0.786629	0.780805	0.787310	0.759073
std	0.003581	0.004265	0.003586	0.004170
min	0.778600	0.768400	0.778500	0.748300
25%	0.784550	0.777925	0.785575	0.756525
50%	0.786600	0.780700	0.787350	0.758700
75%	0.788800	0.783300	0.789125	0.761500
max	0.798400	0.789700	0.796700	0.772200

Table 4.2: Rezultaty uzyskanych strategi przeciwko strategi poczatkowej dla gry Wojna.

Podsumowanie

Podsumowanie w pracach matematycznych nie jest obligatoryjne. Warto jednak na zakończenie krótko napisać, co udało nam się zrobić w pracy, a czasem także o tym, czego nie udało się zrobić.

Dodatek

Dowód Lematu 1.14. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_t$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych takim, że $0 \leqslant X_i \leqslant 1$. Dodatkowo niech liczba rozegranych gier będzie funkcja zależną od k $(f(k) = t)$ oraz niech $\delta_k = \frac{\delta}{g(k)}$ gdzie $\delta \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{g(k)}$ i $\ln(g(k)) \in o(f(k))$.

$$0 \leqslant X_i \leqslant 1 \implies \overline{\sigma}_t^2 \leqslant \frac{1}{4}. \tag{4.1}$$

Podkładają wynik (4.1) do (1.1) otrzymujemy

$$\epsilon_{f(k),k} \leqslant \sqrt{\frac{\ln(\frac{3g(k)}{\delta})}{2f(k)}} + \frac{3\ln(\frac{3g(k)}{\delta})}{f(k)}.$$

Z założeń wiemy ze $ln(g(k)) \in o(f(k))$, zatem

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(\frac{3g(k)}{\delta})}{f(k)} = 0.$$

Co ostatecznie z tw. o trzech ciągach daje nam $e_{f(k),k} = 0$. □

Dowód nierównosci (2.6). Prawdopodobieństwo popełnienia błędu α jest równe sumie prawdopodobieństw pomyłki w momencie przeprowadzenia k-tego testu plus prawdopodobieństwo pomyłki po przeprowadzaniu $n_{\max}$ testów. Z założeń wiemy, że teoretyczna warowność $\mu > 0.5$, zatem

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(1)} + \epsilon_1 \leqslant 0.5) + \\
& \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(1)} + \epsilon_1 > 0.5)\mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(2)} + \epsilon_2 \leqslant 0.5) + \\
& \cdots + \\
& \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(1)} + \epsilon_1 > 0.5)\mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(2)} + \epsilon_2 > 0.5) \ldots \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} + \epsilon_{n_{\max}} \leqslant 0.5) + \\
& \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(1)} + \epsilon_1 > 0.5) \ldots \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} + \epsilon_{n_{\max}} > 0.5)\mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} \leqslant 0.5).
\end{aligned}$$

Korzystając z prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & 1 - \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(1)} + \epsilon_1 > 0.5) + \\
& \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(1)} + \epsilon_1 > 0.5)(1 - \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(2)} + \epsilon_2 > 0.5)) + \\
& \cdots + \\
& \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(1)} + \epsilon_1 > 0.5)\mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(2)} + \epsilon_2 > 0.5) \ldots (1 - \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} + \epsilon_{n_{\max}} > 0.5)) + \\
& \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(1)} + \epsilon_1 > 0.5) \ldots \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} + \epsilon_{n_{\max}} > 0.5)\mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} \leqslant 0.5).
\end{aligned}$$

Powyższa suma upraszcza się przez teleskopowanie do postaci

$$\begin{aligned}\alpha =& 1 - \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(k)} + \epsilon_k > 0.5) + \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} \leqslant 0.5) \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(k)} + \epsilon_k > 0.5) \\ =& 1 - (1 - \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} \leqslant 0.5)) \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(k)} + \epsilon_k > 0.5) \\ =& 1 - \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(n_{\max})} > 0.5) \prod_{k=1}^{n_{\max}} \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_{f(k)} + \epsilon_k > 0.5).\end{aligned}$$

□

Bibliography

[1] Cauwet, M.-L., Teytaud, O. Surprising strategies obtained by stochastic optimization in partially observable games. In *2018 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)* (2018), IEEE, pp. 1–8.

[2] Collet, P., Lutton, E., Raynal, F., Schoenauer, M. Polar IFS+Parisian Genetic Programming=Efficient IFS Inverse Problem Solving. *Genetic Programming and Evolvable Machines 1*, 4 (2000), 339–361.

[3] Droste, S., Jansen, T., Wegener, I. A rigorous complexity analysis of the (1+1) evolutionary algorithm for separable functions with boolean inputs. *Evolutionary Computation 6*, 2 (1998), 185–196.

[4] Figielska, E. Algorytmy ewolucyjne i ich zastosowania. 81–92.

[5] Heidrich-Meisner, V., Igel, C. Non-linearly increasing resampling in racing algorithms. In *European Symposium on Artificial Neural Networks* (2011), Evere, Belgium: d-side publications, pp. 465–470.

[6] Mnih, V., Szepesvári, C., Audibert, J.-Y. Empirical bernstein stopping. In *Proceedings of the 25th international conference on Machine learning - ICML '08* (2008), ACM Press.

[7] Płatkowski, T. Wstęp do teorii gier. *Uniwersytet Warszawski* (2012).

[8] Prisner, E. *Game theory through examples*, vol. 46. American Mathematical Soc., 2014.