

# Metody numeryczne

Wrocław, 27 stycznia 2022

## 1. Iteracyjne rozwiązywanie równań nieliniowych

### 1.1. Metoda bisekcji

#### 1.1.1. Zasada kontrakcji Banacha

**Definicja 1.1** (Odwzorowanie zwężające). *Niech  $(X, \rho)$  będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że odwzorowanie  $\Phi : X \rightarrow X$  jest zwężające, jeśli istnieje stała  $k \in (0; 1)$  taka, że dla dowolnych  $x, y \in X$  zachodzi nierówność  $\rho(\Phi(x), \Phi(y)) \leq k\rho(x, y)$ .*

**Definicja 1.2** (Zasada kontrakcji Banacha). *Niech  $(X, \rho)$  będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech  $\Phi : X \rightarrow X$  będzie kontrakcją. Wtedy:*

1. *Odwzorowanie  $\Phi$  jest ciągłe.*
2. *Odwzorowanie  $\Phi$  ma dokładnie jeden punkt stały  $x^* \in X$ ,  $x^* = \Phi(x^*)$ .*
3. *Ciąg iteracji  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ , dla każdego  $x_0 \in X$ , jest zbieżny do  $x^*$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .*

#### 1.1.2. Twierdzenie Darboux

**Twierdzenie 1.1** (Darboux). *Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Jeśli  $f(a)f(b) < 0$ , to istnieje taki punkt  $c \in (a, b)$ , dla którego  $f(c) = 0$ .*

#### 1.1.3. Algorytm

1. Przyjmujemy  $a_0 = a, b_0 = b, c_n = \frac{a_n + b_n}{2}, n \geq 0$ .
2. Wyznaczamy wartości  $f(a_n)$  i  $f(c_n)$ .  
Jeśli  $f(a_n)f(c_n) > 0$  to przyjmujemy  $a_{n+1} = c_n$  i  $b_{n+1} = b_n$ .  
Jeśli  $f(a_n)f(c_n) < 0$  to przyjmujemy  $a_{n+1} = a_n$  i  $b_{n+1} = c_n$ .

Jako warunek zakończenia algorytmu możemy przyjąć jedno z kryteriów:  $|b_n - a_n| < \delta$  lub  $|f(c_n)| < \varepsilon$ , gdzie  $\delta > 0$  i  $\varepsilon > 0$  są ustalonymi na początku wielkościami zapewniającymi oczekiwaną dokładność aproksymacji.

#### 1.1.4. Twierdzenie o zbieżności

**Twierdzenie 1.2** (o zbieżności metody bisekcji). *Niech  $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$  będzie ciągiem przedziałów skonstruowanych przy pomocy metody bisekcji. Wówczas ciągi  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  są zbieżne i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x^*,$$

gdzie  $f(x^*) = 0$ . Jeśli  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ , to  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  oraz

$$|c_n - x^*| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0).$$

## 1.2. Metoda Newtona

### 1.2.1. Algorytm

Aby skonstruować metodę Newtona, rozważmy rozwinięcie Taylora funkcji  $f(x)$  w otoczeniu punktu  $x_n$ ,

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + O((x - x_n)^2).$$

Przyjmując  $x = x_{n+1}$  otrzymujemy przybliżenie:

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n), \\ x_{n+1} &\approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned}$$

dla  $n \geq 0$ , gdzie  $x_0$  jest zadany punktem początkowym.

Jako warunek zakończenia algorytmu możemy przyjąć jedno z kryteriów:  $|x_{n+1} - x_n| < \delta$  lub  $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ , gdzie  $\delta > 0$  i  $\varepsilon > 0$  są ustalonymi na początku wielkościami zapewniającymi oczekiwaną dokładność aproksymacji.

Metoda ta nie zawsze jest zbieżna (**zbieżność lokalna**).

### 1.2.2. Twierdzenie o lokalnej zbieżności

**Twierdzenie 1.3** (o lokalnej zbieżności metody Newtona). *Zakładamy, że  $f \in C^2([a, b])$  oraz  $f(x^*) = 0$  i  $f'(x^*) \neq 0$  ( $x^*$  jest pierwiastkiem jednokrotnym). Wtedy istnieje otoczenie punktu  $x^*$  i stała  $C > 0$  takie, że jeśli  $x_0$  należy do otoczenia  $x^*$ , to ciąg konstruowanych przez metodę Newtona przybliżeń  $\{x_n\}$  spełnia nierówność*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$$

oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ .

**Uwaga** Niech  $x^*$  będzie podwójnym zerem funkcji  $f$ , tzn.  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$  i  $f''(x^*) \neq 0$ . Jeśli  $f''(x)$  jest ciągła, to metoda Newtona jest zbieżna linioowo.

## 1.3. Metoda siecznych

Zakładamy, że  $f \in C^2([a, b])$  oraz  $f(x^*) = 0$  i  $f'(x^*) \neq 0$  ( $x^*$  jest pierwiastkiem jednokrotnym). W konstrukcji metody siecznych korzystamy z przybliżenia pochodnej funkcji  $f$  w punkcie  $x_n$  ilorazem różnicowym, tzn.,

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \\ x_{n+1} &\approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \approx x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}, \end{aligned}$$

dla  $n \geq 1$ , gdzie  $x_0$  i  $x_1$  są zadanymi punktami początkowymi.

Jako warunek zakończenia algorytmu możemy przyjąć jedno z kryteriów:  $|b_n - a_n| < \delta$  lub  $|f(c_n)| < \varepsilon$ , gdzie  $\delta > 0$  i  $\varepsilon > 0$  są ustalonymi na początku wielkościami zapewniającymi oczekiwaną dokładność aproksymacji.

### 1.3.1. Twierdzenie o lokalnej zbieżności

**Twierdzenie 1.4** (o lokalnej zbieżności metody siecznych). *Niech  $f \in C^2([a, b])$  oraz  $f(x^*) = 0$  i  $f'(x^*) \neq 0$  ( $x^*$  jest pierwiastkiem jednokrotnym). Wtedy istnieje otoczenie  $U$  punktu  $x^*$  i stała  $K$  takie, że jeśli przybliżenia początkowe  $x_0, x_1 \in U$ , to ciąg  $\{x_n\}$  skonstruowany za pomocą metody siecznych spełnia nierówność*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq K|x_n - x^*|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ .

## 2. Interpolacja za pomocą wielomianów i funkcji sklepanych

### 2.1. Powiązane twierdzenia

#### 2.1.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego

**Twierdzenie 2.1** (o istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego). *Niech dany będzie zbiór  $n+1$  punktów  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ . Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian  $p_n(x)$  stopnia  $n$ , taki że  $p_n(x_i) = y_i$  dla  $i = 0, \dots, n$ .*

#### 2.1.2. Twierdzenie Rolle'a

**Twierdzenie 2.2** (Rolle'a). *Niech  $f \in C([a, b])$  oraz  $f \in C^1((a, b))$ . Wówczas jeśli  $f(a) = f(b)$ , to istnieje taki punkt  $c \in (a, b)$ , że  $f'(c) = 0$ .*

#### 2.1.3. Twierdzenie o błędzie interpolacji

**Twierdzenie 2.3.** *Niech  $f \in C^{n+1}([a, b])$  i niech  $p_n(x)$  będzie wielomianem interpolacyjnym stopnia  $n$ -tego spełniającym warunki interpolacji w węzłach  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ . Wtedy istnieje  $\xi_x \in (a, b)$  taki, że*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

### 2.2. Interpolacja wielomianami Vandermonde'a

Rozważmy wielomian interpolacyjny w postaci naturalnej

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

spełniający warunki interpolacji  $p_n(x_i) = y_i$  dla  $i = 0, 1, \dots, n$ . Wówczas wyznaczenie  $n+1$  współczynników  $a_0, a_1, \dots, a_n$  polega na rozwiązaniu układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Macierz powyższego układu nazywa się macierzą Vandermonde'a.

## 2.3. Interpolacja wielomianami Lagrange’a

Wielomian interpolacyjny Lagrange’a ma postać

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x),$$

gdzie wielomiany  $l_i(x)$  są dane wzorem

$$l_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

## 2.4. Wzór interpolacyjny Newtona

### 2.4.1. Wzór interpolacyjny

Wielomian interpolacyjny Newtona ma postać

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_j] q_j(x),$$

gdzie  $q_0(x) \equiv 1$ ,  $q_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$  dla  $j = 1, \dots, n$ . Natomiast  $f[x_0, x_1, \dots, x_j]$  to iloraz różnicowy zdefiniowany następująco

**Definicja 2.1** (Iloraz różnicowy).

$$\begin{aligned} f[x_i] &:= y_i \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] &:= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}. \end{aligned}$$

### 2.4.2. Tablica trójkątna

Przykładowo dla wielomianu 3-go stopnia tablica trójkątna ilorazów różnicowych ma postać

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ x_1 & f[x_1] & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_3] & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_2, x_3] & & \\ x_3 & f[x_3] & & & \end{array}$$

Zauważmy, że wartości w pierwszym wierszu są szukanymi współczynnikami.

## 2.5. Interpolacja wielomianami Czebyszewa

### 2.5.1. Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju

**Definicja 2.2** (Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju). *Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju  $T_n(x)$  definiujemy rekurencyjnie:*

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{dla } n \geq 1. \end{cases}$$

Dla  $x \in [-1, 1]$  wielomiany Czebyszewa można przedstawić w postaci

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wielomian  $T_n(x)$  dla  $n \geq 1$  ma jednokrotne, rzeczywiste miejsca zerowe  $x_j^*$  leżące w przedziale  $[-1, 1]$  i równe

$$x_j^* = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2n} \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Wielomian  $T_n(x)$  ma  $n+1$  punktów ekstremalnych  $y_j$  w przedziale  $[-1, 1]$ , gdzie

$$y_j = \cos \frac{j\pi}{n} \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, n.$$

### 2.5.2. Błąd interpolacji

Jeśli węzłami  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , są zera wielomianu Czebyszewa  $T_{n+1}$ , to dla  $|x| \leq 1$  mamy następujące oszacowanie błędu interpolacji

$$\max_{x \in [-1; 1]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{x \in [-1; 1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

## 2.6. Interpolacja funkcjami sklejanymi 3-go stopnia

### 2.6.1. Definicja funkcji sklejaney 3-go stopnia

**Definicja 2.3.** Niech dana będzie funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i zbiór węzłów  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Funkcją sklejaną 3-go stopnia dla funkcji  $f$  spełnia następujące warunki:

1. funkcja  $s$  jest wielomianem 3-go stopnia oznaczonym przez  $s_j$  na przedziale  $[x_j, x_{j+1}]$  dla  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ;
2.  $s_j(x_j) = f(x_j)$  i  $s_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$  dla  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ;
3.  $s_j(x_{j+1}) = s_{j+1}(x_{j+1})$  dla  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;
4.  $s_j'(x_{j+1}) = s_{j+1}'(x_{j+1})$  dla  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;
5.  $s_j''(x_{j+1}) = s_{j+1}''(x_{j+1})$  dla  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;
6. spełniony jest jeden z warunków brzegowych

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= s''(x_n) = 0, \\ s'(x_0) &= f'(x_0) \text{ i } s'(x_n) = f'(x_n). \end{aligned}$$

### 2.6.2. Konstrukcja

Niech

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

dla  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Dodatkowo wprowadzamy  $h_j = x_{j+1} - x_j$  dla  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Współczynniki wielomianu  $s_j$  można wtedy obliczyć z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} a_j &= f(x_j), \\ b_j &= \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), \\ d_j &= \frac{1}{3h_j}(c_{j+1} - c_j), \end{aligned}$$

a  $c_j$  rozwiązując równanie macierzowe:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

gdzie macierz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

natomiast wektory  $\vec{x}$  i  $\vec{b}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 3. Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów

#### 3.1. Definicja

[metody najmniejszych kwadratów]

**Definicja 3.1.** Niech  $f \in L_w^2([a, b])$ , czyli  $f$  jest funkcją na przedziale  $[a, b]$  w przestrzeni z normą

$$\|f\|_{2,w} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie  $w(x) \geq 0$  nazywamy wagą. Problem aproksymacji średniokwadratowej definiujemy jako znalezienie  $\bar{a}^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ , takie że

$$\|f - \Phi(\cdot; \bar{a}^*)\|_{2,w} = \min_{\bar{a}} \|f - \Phi(\cdot; \bar{a})\|_{2,w},$$

co można zapisać jako

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^n a_k^* \phi_k(x)|^2 w(x) dx = \min_{\bar{a}} \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x)|^2 w(x) dx.$$

#### 3.2. Rozwiązanie

Warunek konieczny istnienia minimum przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x)|^2 w(x) dx = 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{k,j} a_k - 2\beta_j = 0,$$

gdzie  $\alpha_{k,j} = \langle \phi_k, \phi_j \rangle_w$  oraz  $\beta_j = \langle f, \phi_j \rangle_w$ , gdzie  $\langle f, g \rangle_w$  to iloczyn skalarny zdefiniowany jako  $\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x) dx$ .

W postaci macierzowej powyższy układ równań przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy optymalny wektor współczynników  $\bar{a}^* = \bar{a}$ .

### 3.3. Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Niech dany będzie układ wektorów  $\{\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ . Wówczas proces ortogonalizacji Grama-Schmidta przebiega następująco:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \phi_1, \\ \psi_2 &= \phi_2 - \frac{\langle \phi_2, \psi_1 \rangle}{\langle \psi_1, \psi_1 \rangle} \psi_1, \\ \psi_3 &= \phi_3 - \frac{\langle \phi_3, \psi_1 \rangle}{\langle \psi_1, \psi_1 \rangle} \psi_1 - \frac{\langle \phi_3, \psi_2 \rangle}{\langle \psi_2, \psi_2 \rangle} \psi_2, \\ &\vdots \\ \psi_n &= \phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle \phi_n, \psi_k \rangle}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle} \psi_k. \end{aligned}$$

Otrzymany zbiór  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  jest zbiorem wektorów ortogonalnych.

Aby zbudować w ten sposób zbiór ortonormalny, każdy wektor należy podzielić przez jego normę:

$$\psi_k = \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|}$$

dla  $k = 1, 2, \dots, n$ .

### 3.4. W bazie ortonormalnej

Dla bazy ortonormalnej  $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)\}$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)|^2 w(x) dx = 2a_j - 2\beta_j = 0.$$

W postaci macierzowej powyższy układ równań przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

### 3.5. Wielomiany Legendre’a

Dla bazy wielomianów o współczynnikach rzeczywistych  $\{1, x, x^2, \dots\}$  iloczyn skalarny można zdefiniować jako

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

Przeprowadzając proces ortogonalizacji Gramma-Schmidta dostaniemy wielomiany Legendre’a dane wzorem

$$L_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j$$

dla  $j = 0, 1, \dots$

### 3.6. Aproksymacja dyskretna

Zakładamy, że wartości funkcji  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są znane na danym zbiorze  $m$  punktów  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$ . Określamy normę

$$\|f\|_{w,p} = \left( \sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p w_j \right)^{\frac{1}{p}},$$

gdzie  $w_j \geq 0$  dla  $j = 1, \dots, m$  są wagami. Zadanie aproksymacji dyskretniej formułujemy w następujący sposób: Znaleźć  $\bar{a}^*$  takie, że

$$\|f - \Phi(\cdot; \bar{a}^*)\|_{w,p} = \min_{\bar{a}} \left( \sum_{j=1}^m \|f(x_j) - \Phi(x_j; \bar{a})\|^p w_j \right)^{\frac{1}{p}}$$

## 4. Przybliżone całkowanie

### 4.1. Ogólny wzór

**Definicja 4.1** (Kwadratura). Niech  $f \in C((a, b))$ . Ogólny wzór określający kwadraturę ma postać

$$S(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i,$$

gdzie  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  są węzłami kwadratury, a wartości  $w_0, w_1, \dots, w_n$  są wagami kwadratury.

### 4.2. Kwadratura Newtona-Cotesa

#### 4.2.1. Wzór

Węzły równo rozłożone otrzymujemy w wyniku równomiernego podziału odcinka  $[a, b]$ , tzn.  $x_0 = a, x_i = a + ih, h = \frac{b-a}{n}$ . Wagi kwadratury Newtona-Cotes’a dane są wzorem

$$w_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

gdzie  $l_i(x)$  jest wielomianem Lagrange’a (patrz rozdział 2.3.).



### 4.2.2. Oszacowanie błędu

Zdefiniujmy  $E(f)$  jako błąd kwadratury. Dla kwadratury Newtona-Cotesa:

$$E(f) \leq \frac{b-a}{(n+1)!} \max_{x \in (a,b)} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in (a,b)} \prod_{i=0}^n (x-x_i).$$

### 4.3. Kwaratura trapezu

#### 4.3.1. Wzór

Węzły zadane jako  $x_0 = a, x_1 = b, h = x_1 - x_0$ . Wzór kwadratury

$$S(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)),$$

czyli wagi  $w_0 = w_1 = \frac{h}{2}$ .

#### 4.3.2. Oszacowanie błędu

Zdefiniujmy  $E(f)$  jako błąd kwadratury. Dla kwadratury trapezu:

$$E(f) \leq \frac{1}{12} h^3 \max_{x \in (a,b)} |f''(x)|.$$

### 4.4. Kwadratura Simpsona

#### 4.4.1. Wzór

Węzły zadane jako  $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b, h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ . Wzór kwadratury

$$S(f) = \frac{h}{3} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

czyli wagi  $w_0 = w_2 = \frac{h}{3}$  i  $w_1 = \frac{4h}{3}$ .

#### 4.4.2. Oszacowanie błędu

Zdefiniujmy  $E(f)$  jako błąd kwadratury. Dla kwadratury Simpsona:

$$E(f) \leq \frac{1}{90} h^5 \max_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)|.$$

### 4.5. Kwadratury złożone

#### 4.5.1. Wzór ogólny

Dokonyjemy równomiernego podziału odcinka  $[a, b]$ , tak że

$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_N = b.$$

Ogólny wzór ma postać

$$S(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i \right).$$

### 4.5.2. Oszacowanie błędu

Zdefiniujmy  $E(f)$  jako błąd kwadratury. Ogólnie dla kwadratury złożonej:

$$E(f) \leq C(f) \frac{b-a}{n} h^{r-1},$$

gdzie  $C(f)$  jest stałą zależną tylko od funkcji  $f$  (związaną z kwadraturą prostą),  $h = \frac{b-a}{nN}$ , gdzie  $n+1$  to liczba węzłów kwadratury prostej, a  $N$  liczba podprzedziałów odcinka  $[a, b]$ , natomiast  $r$  to rząd zbieżności danej kwadratury prostej.

### 4.5.3. Wzory

Kwadratura złożona prostokąta:

$$S(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(c_j)h \quad \text{lub} \quad S(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{c_j + c_{j+1}}{2}\right)h \quad \text{lub} \quad S(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(c_{j+1})h.$$

Kwadratura złożona trapezu:

$$S(f) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (f(c_j) + f(c_{j+1})) \quad \text{lub} \quad S(f) = h \sum_{j=0}^{N-1} f(c_j) - \frac{h}{2}(f(c_0) + f(c_N)).$$

Kwadratura złożona Simpsona:

$$S(f) = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{N-1} \left( f(c_j) + 4f(c_{j+\frac{1}{2}}) + f(c_{j+1}) \right).$$

### 4.5.4. Ekstrapolacja Richardsona

Ekstrapolacja Richardsona to metoda poprawiania dokładności wyników otrzymanych przez zastosowanie kwadratur złożonych.

Dla danej funkcji  $f$  dalej będziemy oznaczać kwadraturę  $S(h) := S(f; h)$  jako funkcję parametru  $h$ . Nowa kwadratura ma postać

$$T(h) = \frac{1}{3} \left( 4S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h) \right).$$

### 4.5.5. Oszacowanie błędu ekstrapolacji prostej Richardsona

Zdefiniujmy  $E(f)$  jako błąd ekstrapolacji Richardsona. Wtedy

$$E(f) \leq Ch^3.$$

## 5. Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych

### 5.1. Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych pierwszego rzędu

#### 5.1.1. Twierdzenie Picarda-Lindelöfa

**Twierdzenie 5.1** (Picarda-Lindelöfa). *Niech  $f : P \rightarrow R$  będzie funkcją spełniającą na prostokącie  $P := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ , gdzie  $\delta > 0, \epsilon > 0$ , warunek Lipschitza względem  $y$ , tzn., istnieje stała  $L > 0$  taka, że*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

dla wszystkich  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  i wszystkich  $y_1, y_2 \in [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ . Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $y : [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \rightarrow \mathbb{R}$  zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in (a, b), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

gdzie  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\eta = \min\{\delta, \frac{\epsilon}{M}\}$ ,  $M = \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in P\}$ .

### 5.1.2. Metoda Eulera

Metoda Eulera polega na konstrukcji rozwiązań przybliżonych na podstawie zależności:

1. Metoda Eulera jawna (w przód):  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ,
2. Metoda Eulera niejawna (w tył):  $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ ,

gdzie  $y_0$  jest dane.

Dla  $n = 0, 1, \dots, N$ , wprowadzamy definicję błędu  $e_n := y(x_n) - y_n$ . Błąd metody jawnej Eulera szacujemy jako:

$$|e_{n+1}| \leq \frac{M}{L} (e^{(b-a)L} - 1) h,$$

gdzie stała  $M > 0$  spełnia warunek  $M \geq \frac{O(h^2)}{h^2}$ , a stała  $L$  wynika z warunku Lipschitza (patrz rozdział 5.1.1.).

**Uwaga** Metoda jawna nie zawsze jest stabilna. Przykładowo dla zagadnienia:

$$\begin{cases} y'(x) = -ky(x), & x > 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

gdzie  $k > 0$ , rozwiązanie jest stabilne o ile  $kh < 1$ .

**Uwaga** Metoda niejawna jest absolutnie stabilna.

### 5.1.3. Metoda Rungego-Kutty

Schemat Rungego-Kutty rzędu drugiego ma postać

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n)h, \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + k_1)h, \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \end{cases}$$

W podobny sposób konstruujemy metodę Rungego-Kutty rzędu czwartego

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n)h, \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)h, \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)h, \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3)h, \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases}$$

## 5.2. Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych drugiego rzędu

### 5.2.1. Metoda różnic skończonych

Rozważmy zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = g(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta, \end{cases}$$

gdzie  $q(x) \in C([a, b])$ ,  $q(x) \geq 0$ .

Przybliżone rozwiązanie można otrzymać z równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} 2 + q_1 h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 + q_2 h^2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 + q_{N-1} h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 h^2 \\ g_2 h^2 \\ \vdots \\ g_N h^2 \end{bmatrix}.$$

Oszacowanie błędu przy założeniu  $y \in C^4([a, b])$  to

$$|y(x_i) - y_i| \leq \frac{Mh^2}{24}(x_i - a)(x_i - b).$$

Do rozwiązywania równań różnicowych można wykrozystać metodę przeganiania. W ogólnym schemacie rozważa się układ równań

$$\begin{cases} a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \\ y_0 = \alpha, \\ y_N = \beta. \end{cases}$$

Na początku konstruujemy ciągi

$$L_1 = \frac{-c_1}{b_1}, K_1 = \frac{f_1 - a_1 \alpha}{b_1},$$

$$L_{i+1} = \frac{-c_{i+1}}{a_{i+1} L_i + b_{i+1}}, K_{i+1} = \frac{f_{i+1} - a_{i+1} K_i}{a_{i+1} L_i + b_{i+1}}, i = 1, 2, \dots, N-2$$

Dalej idziemy od końca

$$\begin{aligned} y_N &= \beta, \\ y_{N-1} &= L_{N-1} y_N + K_{N-1}, \\ &\vdots \\ y_i &= L_i y_{i+1} + K_i, \\ &\vdots \\ y_1 &= L_1 y_2 + K_1. \end{aligned}$$

### 5.2.2. Metoda elementów skończonych (Ritza-Galerkina)

Rozważamy zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego drugiego rzędu postaci

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases}$$

gdzie  $p, q, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są danymi funkcjami.

**Uwaga** Ogólny warunek brzegowy  $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$  można łatwo zmienić na jednorodny, wprowadzając nową funkcję

$$\bar{y}(x) = y(x) - \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) - \alpha,$$

która spełnia zagadnienie brzegowe z nieco zmienioną prawą stroną równania.

Przybliżone rozwiązanie  $y_h(x)$  zadane jest wzorem

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \phi_i(x),$$

gdzie funkcje  $\phi_i(x)$  mają postać

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \\ 1 - \frac{|x - x_i|}{h} & \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$

natomiast  $y_i$  wyznacza się z równania macierzowego  $A\vec{y} = \vec{f}$ , gdzie

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_a^b p(x) \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx + \int_a^b q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx, \\ f_j &= \int_a^b f(x) \phi_j(x) dx. \end{aligned}$$

Dla stałych współczynników  $p$  i  $q$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{2p}{h} + \frac{4qh}{6} & \text{dla } j = i, \\ -\frac{p}{h} + \frac{qh}{6} & \text{dla } j \in i-1, i+1, \\ 0 & \text{dla } j \notin i-1, i, i+1. \end{cases}$$

Dla zmiennych współczynników  $p$  i  $q$ :

1.  $j = i$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \left(1 + \frac{x - x_i}{h}\right)^2 dx \\ &\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \left(1 - \frac{x - x_i}{h}\right)^2 dx, \end{aligned}$$

2.  $j = i + 1$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx \\ &\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \left(1 - \frac{x - x_i}{h}\right) \left(1 + \frac{x - x_{i+1}}{h}\right) dx, \end{aligned}$$

3.  $j = i - 1$

$$a_{ij} = -\frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \left(1 + \frac{x - x_i}{h}\right) \left(1 - \frac{x - x_{i-1}}{h}\right) dx.$$

### 5.3. Przybliżone rozwiązywanie równania ciepła

#### 5.3.1. Metoda różnic skończonych

Rozważamy jednowymiarowe równanie ciepła (dyfuzji)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

określone dla  $0 < x < L$ ,  $0 < t < T$ . Ponadto zakładamy, że spełnione są warunki brzegowe

$$u(0, t) = \alpha, \quad u(L, t) = \beta$$

dla  $0 < t < T$  oraz warunek początkowy

$$u(x, 0) = f(x)$$

dla  $0 < x < L$ , gdzie  $f$  jest daną funkcją rzeczywistą. Stała  $c > 0$  nazywa się współczynnikiem przewodzenia ciepła (dyfuzji).

W celu konstrukcji przybliżonego rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego, w pierwszym kroku dokonujemy równomiernego podziału przedziałów  $[0, L]$  i  $[0, T]$ :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = L, \quad h = x_{i+1} - x_i, \\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T, \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k.$$

Wprowadźmy oznaczenie  $u_i^k \approx u(x_i, t_k)$ , gdzie  $u$  jest rozwiązaniem zagadnienia początkowo-brzegowego dla równania ciepła. Dodatkowo definiujemy wektor  $\vec{u}^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_{n-1}^k)^T$ .

Schemat jawny zadany jest równaniem macierzowym

$$\vec{u}^{k+1} = A \vec{u}^k, \\ A = \begin{bmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & 0\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 - 2\lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{c\Delta t}{h^2}.$$

**Uwaga** Aby metoda jawna była stabilna, musi być spełniony warunek Couranta-Friedrichsa-Lewy'ego

$$\lambda < \frac{1}{2}.$$

Schemat niejawny zadany jest równaniem macierzowym

$$B \vec{u}^k = \vec{u}^{k-1},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{c\Delta t}{h^2}.$$

Schemat Cranka-Nicolsona otrzymujemy w wyniku uśrednienia schematu jawnego i niejawnego. Zadany jest równaniem macierzowym

$$A\vec{u}^k = B\vec{u}^{k-1}.$$

## 6. Iteracyjne rozwiązywanie układów równań algebraicznych

### Spis treści

<b>1. Iteracyjne rozwiązywanie równań nieliniowych . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1. Metoda bisekcji . . . . .	1
1.1.1. Zasada kontrakcji Banacha . . . . .	1
1.1.2. Twierdzenie Darboux . . . . .	1
1.1.3. Algorytm . . . . .	1
1.1.4. Twierdzenie o zbieżności . . . . .	1
1.2. Metoda Newtona . . . . .	2
1.2.1. Algorytm . . . . .	2
1.2.2. Twierdzenie o lokalnej zbieżności . . . . .	2
1.3. Metoda siecznych . . . . .	2
1.3.1. Twierdzenie o lokalnej zbieżności . . . . .	3
<b>2. Interpolacja za pomocą wielomianów i funkcji sklepanych . . . . .</b>	<b>3</b>
2.1. Powiązane twierdzenia . . . . .	3
2.1.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego . . . . .	3
2.1.2. Twierdzenie Rolle'a . . . . .	3
2.1.3. Twierdzenie o błędzie interpolacji . . . . .	3
2.2. Interpolacja wielomianami Vandermonde'a . . . . .	3
2.3. Interpolacja wielomianami Lagrange'a . . . . .	4
2.4. Wzór interpolacyjny Newtona . . . . .	4
2.4.1. Wzór interpolacyjny . . . . .	4
2.4.2. Tablica trójkątna . . . . .	4
2.5. Interpolacja wielomianami Czebyszewa . . . . .	4
2.5.1. Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju . . . . .	4
2.5.2. Błąd interpolacji . . . . .	5
2.6. Interpolacja funkcjami sklepanymi 3-go stopnia . . . . .	5
2.6.1. Definicja funkcji sklepanej 3-go stopnia . . . . .	5
2.6.2. Konstrukcja . . . . .	5
<b>3. Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów . . . . .</b>	<b>6</b>
3.1. Definicja . . . . .	6
3.2. Rozwiązanie . . . . .	6
3.3. Ortogonalizacja Grama-Schmidta . . . . .	7
3.4. W bazie ortonormalnej . . . . .	7

3.5.	Wielomiany Legendre’a . . . . .	8
3.6.	Aproksymacja dyskretna . . . . .	8
<b>4.</b>	<b>Przybliżone całkowanie . . . . .</b>	<b>8</b>
4.1.	Ogólny wzór . . . . .	8
4.2.	Kwadratura Newtona-Cotesa . . . . .	8
4.2.1.	Wzór . . . . .	8
4.2.2.	Oszacowanie błędu . . . . .	9
4.3.	Kwadratura trapezu . . . . .	9
4.3.1.	Wzór . . . . .	9
4.3.2.	Oszacowanie błędu . . . . .	9
4.4.	Kwadratura Simpsona . . . . .	9
4.4.1.	Wzór . . . . .	9
4.4.2.	Oszacowanie błędu . . . . .	9
4.5.	Kwadratury złożone . . . . .	9
4.5.1.	Wzór ogólny . . . . .	9
4.5.2.	Oszacowanie błędu . . . . .	10
4.5.3.	Wzory . . . . .	10
4.5.4.	Ekstrapolacja Richardsona . . . . .	10
4.5.5.	Oszacowanie błędu ekstrapolacji prostej Richardsona . . .	10
<b>5.</b>	<b>Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych . . . . .</b>	<b>10</b>
5.1.	Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych pierwszego rzędu	10
5.1.1.	Twierdzenie Picarda-Lindelöfa . . . . .	10
5.1.2.	Metoda Eulera . . . . .	11
5.1.3.	Metoda Rungego-Kutty . . . . .	11
5.2.	Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych drugiego rzędu .	12
5.2.1.	Metoda różnic skończonych . . . . .	12
5.2.2.	Metoda elementów skończonych (Ritza-Galerkina) . . . . .	13
5.3.	Przybliżone rozwiązywanie równania ciepła . . . . .	14
5.3.1.	Metoda różnic skończonych . . . . .	14
<b>6.</b>	<b>Iteracyjne rozwiązywanie układów równań algebraicznych . . .</b>	<b>15</b>