

第十二章数列与级数

何胜威

14/2/2023

12.1 数列

12.1.1 有限数列与无限数列

数列 (sequence) : 按照某种法则排列的数。

例子: 2, 4, 6, 8, 10

有限数列 (finite sequence) : 指拥有有限项数的数列。

例子: 1, 2, 3, 4, 5

无限数列 (infinite sequence) : 指拥有无限项数的数列。

例子: 1, 2, 3, ..., n , ...

12.1.2 项

项数 (term) : 数列中项的总数, 通常以 n 表示 ($n \in \mathbb{Z}^+$)。

首项 (first term) : 数列中的第一项。

末项 (last term) : 数列中的最后一项, 在无限数列中没末项。

例子: 1, 2, 3, 4, 5

解: 此数列的首项为 1, 末项为 5, 项数为 5。

12.1.3 通项

通项 (general term) : 数列各项 a_n 与项数 n 之间的关系。

通项公式 (general formula) : 以一个公式表示各项数列 a_n 与项数 n 之间的关系。

例子: 写出从 1 到 8 各整数的 10 倍加 1 的数列, 并求此数列的首项, 末项及其通项公式。

解:

所求数列有 8 项: 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81

\therefore 此数列的首项为 11, 末项为 81, 通项公式为 $a_n = 10n + 1$ 。

练习 12.1.1-12.1.3

1. 写出从 1 到 10 各整数的倒数的数列, 并求此数列的首项, 末项及其通项公式。

解:

所求数列有 10 项: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$

\therefore 此数列的首项为 1, 末项为 $\frac{1}{10}$, 通项公式为 $a_n = \frac{1}{n}$

2. 根据下列各数列的通项公式, 写出其首 5 项:

(a) $a_n = 2n + 1$

解:

数列的首 5 项是:

$$a_1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$a_2 = 2(2) + 1 = 5$$

$$a_3 = 2(3) + 1 = 7$$

$$a_4 = 2(4) + 1 = 9$$

$$a_5 = 2(5) + 1 = 11$$

\therefore 此数列的首 5 项为 3, 5, 7, 9, 11。

(b) $a_n = n(n + 1)$

解:

数列的首 5 项是：

$$a_1 = 1(1 + 1) = 2$$

$$a_2 = 2(2 + 1) = 6$$

$$a_3 = 3(3 + 1) = 12$$

$$a_4 = 4(4 + 1) = 20$$

$$a_5 = 5(5 + 1) = 30$$

∴ 此数列的首 5 项为 2, 6, 12, 20, 30。

3. 写出下列各数列的一个通项公式：

(a) 3, 7, 11, 15, ...

解：

将各项的数据拆解分析后可得：

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 7 = 3 + 4(2 - 1)$$

$$a_3 = 11 = 3 + 4(3 - 1)$$

$$a_4 = 15 = 3 + 4(4 - 1)$$

⋮

$$a_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$$

∴ 此数列的通项公式为 $4n-1$ 。

(b) 2, 5, 10, 17, ...

解：

将各项的数据拆解分析后可得：

$$a_1 = 2 = 1^2 + 1$$

$$a_2 = 5 = 2^2 + 1$$

$$a_3 = 10 = 3^2 + 1$$

$$a_4 = 17 = 4^2 + 1$$

⋮

$$a_n = n^2 + 1$$

∴ 此数列的通项公式为 n^2+1 。

4. 一个数列的通项公式是 $a_n = \frac{2^n}{n+1}$ ，写出它的首 5 项。

解：

数列的首 5 项为：

$$a_1 = \frac{2^1}{1+1} = 1$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{2^3}{3+1} = 2$$

$$a_4 = \frac{2^4}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$a_5 = \frac{2^5}{5+1} = \frac{16}{3}$$

∴ 此数列的首 5 项为 $1, \frac{4}{3}, 2, \frac{16}{5}, \frac{16}{3}$ 。

5. 写出数列 1, 8, 27, 64, ... 的一个通项公式。

解：

将各项的数据拆解分析后可得：

$$a_1 = 1 = 1^3$$

$$a_2 = 8 = 2^3$$

$$a_3 = 27 = 3^3$$

$$a_4 = 64 = 4^3$$

⋮

$$a_n = n^3$$

∴ 此数列的通项公式为 $a_n = n^3$

12.1.4 有限级数与无限级数

级数 (series) : 将数列中的项依次用加号连接的函数。

例子： $1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 8$

有限级数 (finite series) : 指数列中由有限的项组成，再用加号连接。

例子： $1 + 2 + 3 + 4 + 5$

无限级数 (infinite series) : 指数列中由无限多的项组成，再用加号连接。

例子： $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$

求和符号 (summation) : 求和一般使用 \sum 符号表示，读作 sigma。

例子： 求 $\sum_{n=5}^{10} \frac{n^2}{2}$ 的首项、末项和项数。

解:

$$\begin{aligned}a_5 &= \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2} \\a_{10} &= \frac{10^2}{2} = \frac{100}{2} = 50 \\n &= 6\end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n=5}^{10} \frac{n^2}{2}$ 的首项为 $\frac{25}{2}$, 末项为 50, 项数为 6。

例子: 以 Σ 符号表示下列各级数:

(a) $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

解:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_6 = 2$$

$$\therefore 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \sum_{n=1}^6 2。$$

(b) $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$

解:

$$a_1 = 3^1, a_2 = 3^2, a_3 = 3^3, \dots, a_{20} = 3^{20}$$

$$\therefore 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20} = \sum_{n=1}^{20} 3^n。$$

(c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

解:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{(-2)^{1-1}}, a_2 = \frac{1}{(-2)^{2-1}}, a_3 = \frac{1}{(-2)^{3-1}}, \\a_4 &= \frac{1}{(-2)^{4-1}}, a_5 = \frac{1}{(-2)^{5-1}}\end{aligned}$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{(-2)^n}。$$

(d) $2 \times 4 + 4 \times 7 + 6 \times 10 + 8 \times 13 + 10 \times 16$

解:

$$\begin{aligned}a_1 &= [2(1)][3(1)], a_2 = [2(2)][3(2)], a_3 = [2(3)][3(3)], \\a_4 &= [2(4)][3(4)], a_5 = [2(5)][3(5)]\end{aligned}$$

$$\therefore 2 \times 4 + 4 \times 7 + 6 \times 10 + 8 \times 13 + 10 \times 16 = \sum_{n=1}^5 2n(3n+1)。$$

12.2 等差数列与等差级数

12.2.1 等差数列

若数列中每一项 (首项除外) 减去前一项所得的差均相等, 则该数列为等差数列 (arithmetic sequence)。例子: 1, 3, 5, 7, 9。

12.2.2 公差

公差 (common difference) 为等差数列中相等的差, 通常以 d 表示。

以 d 表示等差数列的公差

$$d = a_n - a_{n-1}$$

注: 公差可为负数。

例子: 求等差数列 1, 3, 5, 7, 9 的公差。

解: $d = 3 - 1 = 2$

\therefore 此等差数列的公差为 2。

12.2.3 等差通项公式

等差数列通项公式推导

$$\therefore d = a_n - a_{n-1}$$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d \dots$$

依照此规律可得,

$$a_n = a + (n-1)d$$

等差数列项数推导

$$\therefore a_n = a + (n-1)d$$

$$a_n = a + dn - d$$

$$dn = a_n - a + d$$

$$n = \frac{a_n - a + d}{d}$$

由此可得,

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1$$

注：此公式为额外推导而得，为方便计算求等差数列项数题型，解题时必须先行使用等差数列通项公式进行推导。

练习 12.2.1-12.2.3

- 1. 等差数列 9, 6, 3, ... 的第几项是 -21?
- 2. 求从 1 到 100 所有 5 的倍数之和。
- 3. 若等差数列 13, 21, 29, ... 的首 n 项之和是 910, 求 n 的值。
- 4. 若一等差数列的首 n 项之和 $S_n = n^2 + 3n$, 求
 - (a) 首项;
 - (b) 公差;
 - (c) 第 10 项;
 - (d) 从第 5 项到第 10 项之和。
- 5. -56, -50, -44, ... 是一个等差数列。问从第 1 项加到第几项, 其和才开始是正值?

12.3 等比数列与等比级数

12.3.1 等比数列

若数列中每一项（首项除外）除以前一项所得的商均相等，则此数列为一等比数列 (arithmetic mean)：。例子：1, 2, 4, 8, 16。

12.3.2 公比

公比 (common ratio)：等差数列中相等的差商，通常以 r 表示。
以 r 表示等比数列的公比

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

注：公比可为负数。

例子：求等比数列 1, 2, 4, 8, 16 的公比。

解：

$$r = \frac{2}{1} = 2$$

∴ 此等差数列的公比为 2。

12.3.3 等比通项公式

等比数列通项公式推导

$$\begin{aligned} \because r &= \frac{a_2}{a_1} \\ a_n &= a_{n-1} \times r^{n-1} \\ &= a_1 \times r^{2-1} \\ a_3 &= a_1 \times r^{3-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

依照此规律可得，

$$a_n = ar^{n-1}$$

等比数列项数推导

$$\begin{aligned} \because a_n &= ar^{n-1} \\ \Rightarrow n-1 &= \log_{ar} a_n \end{aligned}$$

由此可得，

$$n = \log_{ar} a_n + 1$$

注：此公式为额外推导而得，为方便计算求等比数列项数题型，解题时必须先行使用等比数列通项公式进行推导。

练习 12.3.1-12.3.3

- 1. 等比数列 2, 6, 18, ... 的第几项是 486?
- 2. 已知一等比数列的第 3 项是 972, 第 8 项是 128, 求此数列的首项, 公比及第 5 项。
- 3. 求 3 与 3888 之间的三个数, 使这五个数形成一个等比数列。

12.3.4 等比中项

等比中项 (geometric mean) 为两数之间的另一个数，且满足等比数列的定义并形成等比数列，通常以 G 表示，但不建议使用简写。

等比中项公式推导

设一数列 x, y , 并求出等比中项。

$$\begin{aligned}\therefore r &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ \frac{G}{x} &= \frac{y}{G} \\ G^2 &= xy\end{aligned}$$

由此可得,

$$G = \pm\sqrt{xy}$$

练习 12.3.4

1. 求 3 与 27 的等比中项。
2. 若三个数 16, x , 9 成一等比数列, 求 x 的值。
3. 若 7, x , $\frac{36}{7}$, y , $\frac{1296}{363}$ 成一等比数列, 求 x 及 y 的值。
4. 若一等比数列的首三项是 $x+12$, $x+4$, $x-2$ 成一等比数列, 求
 - (a) 公比;
 - (b) x 的值;
 - (c) 第 6 项。

12.3.5 等比求和公式

将等比数列中的每项相加所得的式子称为**等比级数 (geometric progression / geometric series)**

等比求和公式推导

设 S_n 表示某等比数列之和可得,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} + ar^n \dots \quad (1)$$

$$(1) \times r \text{ 得 } rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \dots \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ 得 } S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

由此可得,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

当 $r = 1$ 时, $S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} + ar^n$

$S_n = a + a + \dots + a + a$ (共有 n 个 a)

由此可得,

$$S_n = na \quad (r = 1)$$

练习 12.3.5

1. 求等比级数 $4 + 8 + 16 + \dots$ 的首 6 项之和。
2. 若等比数列 108, 72, 48, \dots 的首 n 项之和是 $281\frac{1}{3}$, 求 n 的值。
3. 若一等比数列的首项是 7, 公比是 3, 级数之和是 847, 求
 - (a) 项数;
 - (b) 末项。

12.3.6 无穷等比级数的和

无穷等比级数 (infinite geometric series) 指等比数列中由无限多的项组成, 再用加号连接。**例子:** $2, 4, 8, 16, \dots$

无穷等比级数之和公式推导

此公式推导将会展示三种推导方法。

方法 1:

以概念理解:

已知,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

由于 $r \neq 1$ 且 n 趋近于无穷, 因此 r^n 最终的值将会等于 0。

由此可得,

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

方法 2:

以图示理解:

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

方法 3:

正规公式推导:

已知,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, (r \neq 1)$$

当 n 趋近于无穷 (正无穷) 时,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

$$S_\infty = \frac{a(1-0)}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} (1-0)$$

由此可得,

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}, (|r| < 1)$$

练习 12.3.6

1. 求无穷等比级数 $36 + 12 + 4 + \dots$ 之和。
2. 使用无穷等比级数的求和公式将下列循环小数化为分数:

(a) $0.\dot{2}\dot{3}$

(b) $0.2\dot{1}\dot{3}$

12.4 简易特殊级数之和