2024 年高三上半年数学统测复习

Melvin Chia

高三商 1 — 2024 年 3 月 29 日

1　函数

1.1　啥是函数?

函数（Function）是一种特殊的关系，它把一个集合的元素对应到另一个集合的元素上。函数的**定义域（Domain）**是指所有可能输入/**原像（Preimage）**的集合，函数的**值域（Range）**是指所有可能输出/**映像（Image）**的集合。

打个比方，全世界每个国家都有首都，那么我们可以把每个国家和它的首都对应起来，这就是一个函数。国家就是定义域，首都就是值域。

> **函数的定义**　设 X 和 Y 是两个非空集合，如果存在一个从 X 到 Y 的对应关系 f，使得对于 X 中的任意一个元素 x，都有唯一的 Y 中的元素 y 与之对应，那么称 f 为从 X 到 Y 的一个函数，记作 $f : X \to Y$。

但是，正常情况下，一个国家只有一个首都。所以，如果有哪个国家经过这个对应关系对应到了两个首都，那么这个对应关系就不是函数。

> **啥情况不是函数?**　如果对于 X 中的某个元素 x，存在两个 Y 中的元素 y_1 和 y_2 与之对应，那么这个对应关系就不是函数。

还有，有的国家没有首都，这也是不行的。所以，如果有哪个国家没有对应的首都，那么这个对应关系也不是函数。

> **啥情况不是函数?**　如果 X 中的某个元素 x 没有对应的 Y 中的元素与之对应，那么这个对应关系就不是函数。

1.2 函数的表示

函数可以用很多种方式来表示，最常见的就是用公式来表示。拿上面的例子来说，国家与首都对应的关系可以表示为：

$$f(\text{国家}) = \text{该国家的首都}$$

但是，在数学里，我们一般用字母来表示函数，所以这个函数可以表示为：

$$f(x) = y$$

其中，x 表示国家，y 表示该国家的首都首都。

如果我们要限制函数的定义域，那么我们可以这样表示：

$$f : A \to B,\ f(x) = y$$

这表示函数 f 的定义域是 A，对应域是 B。至于定义域和对应域是什么，开头我们已经概括了，并缺会在下一节细讲。

打个比方，如果我们要限制函数 f 的定义域是所有亚洲国家的集合，值域是城市的集合，那么我们可以在前面加多一些东西

$$f : \text{亚洲国家} \to \text{城市},\ f(\text{国家}) = \text{该国家的首都}$$

好啦，现在我们来看专业一点的东西。如果我们不用国家和首都来举例，而是用数学里的东西，会发生什么事情呢？

作为纯商科学生的我们，经济学都学过需求函数对吧？那就是一个函数，它把商品的价格对应到了商品的需求量上。经济学课本第一册告诉我们，需求函数的一般形式是：

$$Q_d(P) = a - bP$$

或者是，如果我们要限制需求函数的定义域是所有正数，值域是所有实数，那么我们可以表示为：

$$Q_d : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ Q_d(P) = a - bP$$

毕竟，价格不能是负数，对吧？

例题 1

已知函数 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$，求 $f(2)$。

解

将 $x = 2$ 代入 $f(x)$，得到

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\ &= 2 \cdot 4 - 6 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

例题 2

已知函数 $f(x)=2x^2-3x+1$，求 $f(x)=0$ 的解。

解

由 $f(x)=2x^2-3x+1=0$，得到

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+1&=0\\ (2x-1)(x-1)&=0 \end{aligned}$$

所以，$x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$。

例题 3

已知函数 $f(x)=x^2-3x+1$，求 $f(x)=-x$ 的解。

解

由 $f(x)=x^2-3x+1=-x$，得到

$$\begin{aligned} x^2-3x+1&=-x\\ x^2-2x+1&=0\\ (x-1)^2&=0 \end{aligned}$$

所以，$x=1$。

例题 4

已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geq 0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$，求 $f(1)$。

解

由于 $1\geq 0$，所以 $f(1)=2\cdot 1-1=1$。

1.3 定义域、对应域和值域

我们继续拿国家和首都来当例子好了。给定一个函数:

$$f: \text{亚洲国家} \to \text{城市},\ f(\text{国家}) = \text{该国家的首都}$$

如果我叫你求 $f(\text{中国})$，你会怎么做呢？很简单，你只要知道中国的首都是北京，然后你就可以得到 $f(\text{中国}) = \text{北京}$。

但是，如果我叫你求 $f(\text{美国})$，这个时候你就会发现，你得不到答案。因为美国并不是亚洲国家，它不在函数的定义域里，所以它没有对应的值。

因此，函数的**定义域（Domain）**是指所有可能输入的集合。在上面的例子里，亚洲国家就是函数的定义域。

定义域 函数的定义域是指所有可能输入的集合, 记作 D_f。

再来看看对应域。对应域是什么呢？上面的例子里，城市就是函数的**对应域（Codomain）**。对应域里的元素不一定需要是和定义域里的元素的映射。比如，对应域里可以包含一些不是首都的城市。

世界上有千千万万座城市，但是不是每座城市都是一个国家的首都，更何况我们这个函数只对应亚洲国家的首都，比如新山虽然是一座城市，但却不是任何国家的首都。所以，函数的**值域（Range）**是指所有可能输出的集合。在上面的例子里，所有亚洲国家的首都就是函数的值域。

值域 函数的值域是指所有可能输出的集合, 记作 R_f。

所以，总的来说，

函数的定义域、对应域和值域之间 给定一个函数 $f: A \to B$，则其中 A 是函数的定义域，B 是函数的对应域。函数的值域是 B 中所有可能的映像的集合。

举个数学的例子，如果我们有一个函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，它的定义域是所有实数，对应域是所有实数，那么它的值域是什么呢？这个时候，我们就需要看这个函数的公式了。

我们假设这个函数的公式是 $f(x) = x^2$，那么这个函数的值域是什么呢？如果你仔细思考，你会发现，无论 x 是正数还是负数，x^2 都会是正数。所以，这个函数的值域是所有正数的集合。因此，

$$D_f = \mathbb{R},\ R_f = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$$

在考试时，有时候会有一些题目会让你求函数的定义域和值域，即函数输入值（x）的有效范围和输出值（y）的可能范围。这个时候，你就需要根据函数的公式来判断。

例题 5（平方根函数）

已知函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域和值域。

解

由于 $\sqrt{4-x^2}$ 的根号里面不能是负数，所以 $4-x^2\geq 0$，即 $x^2\leq 4$。所以，$-2\leq x\leq 2$，即

$$D_f=[-2,2]$$

又因为对于所有 x，$\sqrt{4-x^2}\geq 0$，所以

$$R_f=\{y\in\mathbb{R}|y\geq 0\}$$

例题 6（绝对值函数）

已知函数 $f(x)=|x-2|$，求 $f(x)$ 的定义域和值域。

解

若将任意实数 x 代入 $f(x)$，则 $|x-2|\geq 0$。所以，

$$D_f=\mathbb{R}$$

又因为对于所有 x，$|x-2|\geq 0$，所以

$$R_f=\{y\in\mathbb{R}|y\geq 0\}$$

例题 7（分数函数）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，求 $f(x)$ 的定义域和值域。

解

由于分母不能为零，所以 $x-2\neq 0$，即 $x\neq 2$。所以，

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}|x\neq 2\}$$

又因为对于所有 x，$\dfrac{1}{x-2}\neq 0$，所以

$$R_f=\{y\in\mathbb{R}|y\neq 0\}$$

例题 8 （增函数）

已知函数 $f(x) = x^2 + 3$，求 $f(x)$ 的定义域和值域。

解

由于 $x^2 + 3$ 对于所有 x 都有定义，所以

$$D_f = \mathbb{R}$$

又因为对于所有 x，$x^2 \geq 0$，两侧加 3 得 $x^2 + 3 \geq 3$，所以

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 3\}$$

例题 9 （一元二次函数）

已知函数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$，求 $f(x)$ 的定义域和值域。

解

由于 $x^2 - 2x + 10$ 对于所有 x 都有定义，所以

$$D_f = \mathbb{R}$$

由于此二次函数是开口向上的，所以它的最小值是在顶点处。要找到顶点，我们可以用配方法：

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 10 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 1 + 10 \\ &= (x-1)^2 - 1 + 10 \\ &= (x-1)^2 + 9 \end{aligned}$$

因此可得顶点为 $(1, 9)$，所以 f(x) 的最小值为 9，即

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 9\}$$

区间表示法 有时候，我们会用中括弧和小括弧而不是不等式来表达区间（两个数之间的任意数字的集合）。中括弧表示闭区间，小括弧表示开区间。比如，$[a, b]$ 表示闭区间，即 $a \leq x \leq b$；(a, b) 表示开区间，即 $a < x < b$。如果是无穷大，我们用 ∞ 表示。比如，$(-\infty, 2]$ 表示 $x \leq 2$。注意，无穷大是开区间。

例题 10 （已知定义域的一元二次函数）

已知函数 $f(x)=x^2-4x-8$，且 $-1\leq x\leq 3$，求 $f(x)$ 的值域。

解

从题目可知，$-1\leq x\leq 3$，所以

$$D_f=[-1,3]$$

由于此二次函数是开口向上的，所以它的最小值是在顶点处。要找到顶点，我们可以用配方法：

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-4x-8 \\ &= x^2-4x+4-4-8 \\ &= (x-2)^2-12 \end{aligned}$$

因此可得顶点为 $(2,-12)$，所以 f(x) 的最小值为-12。

现在我们来看最大值。由于 x^2-4x-8 是一个开口向上的二次函数，所以它的最大值必定在两个端点处。我们已经找到了顶点处的最小值，所以我们只需要找两个端点处的值，然后比较大小即可。即，比较 $f(-1)$ 和 $f(3)$ 的大小。

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2-4\cdot(-1)-8=-3 \\ f(3) &= 3^2-4\cdot 3-8=-11 \end{aligned}$$

由于 $f(-1)<f(3)$，所以 $f(x)$ 的最大值为-3，即

$$R_f=\{y\in\mathbb{R}|-12\leq y\leq -3\}$$

常用集合符号

1. $\mathbb{N}$：自然数（非负整数）的集合，即 $\{1,2,3,\ldots\}$
2. $\mathbb{Z}$：整数，即 $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
3. $\mathbb{Q}$：有理数，可以被写成分数的数，即 $\left\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\right\}$
4. $\mathbb{R}$：实数，包括整数、分数、无限循环小数、圆周率等等
5. $\mathbb{R}^+$：正实数，即 $x>0$
6. $\mathbb{R}^-$：负实数，即 $x<0$
7. $\mathbb{I}$：虚数，即取平方根后得到负数的数
8. $\mathbb{C}$：复数，由实数和虚数组成的数，即 $\{a+bi|a,b\in\mathbb{R}\}$

1.4 合成函数

合成函数（Composite Function）是指把一个函数的输出作为另一个函数的输入。比如，我们有两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，那么它们的合成函数就是 $f(g(x))$。

打个比方，我们有两个函数，一个是把国家对应到首都的函数 $f(x)$，另一个是把首都对应到人口的函数 $g(x)$。那么，如果我们想知道一个国家首都的人口，我们就可以先用 $f(x)$ 得到这个国家的首都，再把这个首都代入 $g(x)$，就可以得到这个国家首都的人口，即

$$\text{国家} \xrightarrow{\text{某国的首都}} \text{该国家的首都} \xrightarrow{\text{某城市的人口}} \text{该国家首都的人口}$$

再来拿数学运算作为例子，假设我们有两个函数，一个是把一个数加上 1 的函数 $f(x) = x + 1$，另一个是把一个数乘以 2 的函数 $g(x) = 2x$。那么，如果我们想知道一个数加 1 后乘以 2 的结果，我们就可以先用 $f(x)$ 得到这个数加 1 的结果，再把这个结果代入 $g(x)$，就可以得到这个数加 1 后乘以 2 的结果，即

$$x \xrightarrow{\text{加 1}} x + 1 \xrightarrow{\text{乘 2}} 2(x + 1)$$

继续那上面的例子，如果我们设“加一”函数为 $f(x) = x + 1$，“乘二”函数为 $g(x) = 2x$，那么我们可以得到合成函数 $f(g(x))$。这个合成函数的意思是，先把 x 乘以 2，再把这个结果加 1。所以，$f(g(x)) = 2x + 1$。

合成函数不只是两个函数的合成，它可以是任意多个函数的合成。比如，我们有三个函数 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$，那么它们的合成函数就是 $f(g(h(x)))$。需要注意的是，合成函数的顺序是从括弧里面开始的，即先计算 $h(x)$，再计算 $g(h(x))$，最后计算 $f(g(h(x)))$。因此，$f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 是不一样的。

如果今天给你 10 个函数组成的合成函数，要写一大堆括号，你会不会觉得很麻烦? 所以，我们可以用一个更简单的方法来表示合成函数。比如，我们有三个函数 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$，其合成函数 $f(g(h(x)))$ 可以表示为 $(f \circ g \circ h)(x)$。当然，如果你用圈圈表示的话，它的运算顺序是从右往左的。同理，$(f \circ g)(x)$ 和 $(g \circ f)(x)$ 是不一样的。

当然，一个函数也可以和自己合成。比如，我们有一个函数将一个数加 1，那么这个函数和自己合成就是将一个数加 1 后再加 1，即 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$。

但是，如果你今天要讲一个函数和自己合成 100 次，你不可能写 100 个括号，或是 100 个圈圈，对吧? 所以，我们可以用一个更简单的方法来表示。比如，$(f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ 可以简写为 $f^5(x)$。

函数和自己合成 对于所有的正整数 n，$f^n(x)$ 表示将函数 $f(x)$ 和自己合成 n 次。

例题 11

已知函数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=x^2$，求 $f(g(x))$。

解

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x^2) \\ &= 2x^2+1 \end{aligned}$$

例题 12

已知函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=\sqrt{x}$，求 $(f\circ g)(x)$。

解

$$\begin{aligned} (f\circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 \\ &= x \end{aligned}$$

例题 13

已知函数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=x^2-4$，求 $(f\circ g)(x)$ 及 $(g\circ f)(x)$。

解

$$\begin{aligned} (f\circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2-4) \\ &= 2(x^2-4)+1 \\ &= 2x^2-8+1 \\ &= 2x^2-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x+1) \\ &= (2x+1)^2-4 \\ &= 4x^2+4x+1-4 \\ &= 4x^2+4x-3 \end{aligned}$$

有时候，题目会给你一个函数 $f(x)$ 和它与另外一个函数 $g(x)$ 的合成函数。这时候会有两种情况，一种是其合成函数为 $f(g(x))$，另一种是其合成函数为 $g(f(x))$。两种情况都有不一样的解法，所以在解题时要注意。

例题 14

已知函数 $f(x)=x+3$，$f(g(x))=x^2+6x+10$，求 $g(x)$。

解

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x^2+3) \\ g(x)+3 &= x^2+6x+10 \\ g(x) &= x^2+6x+7 \end{aligned}$$

例题 15

已知一函数的定义是 $f(x)=x-3$，另一函数 $g(x)$ 满足 $g(f(x))=4x^2-20x+25$，求 $g(x)$。

解

设 $y=f(x)=x-3$，移项后得到 $x=y+3$。

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 4x^2-20x+25 \\ g(y) &= 4(y+3)^2-20(y+3)+25 \\ &= 4(y^2+6y+9)-20y-60+25 \\ &= 4y^2+24y+36-20y-35 \\ &= 4y^2+4y+1 \\ &= (2y+1)^2 \end{aligned}$$

将 y 换回 x，得到 $g(x)=(2x+1)^2$。

1.5 一对一函数、映成函数、一一映成函数

我们继续拿国家和首都来当例，如果我们有一个函数 $f(x)$，它把国家对应到首都，那么这个函数是不是一对一的呢？通常来说，一个首都不可能同时是两个国家的首都，对吧？所以，这个函数是一对一的，或者说将国家映射到首都的函数是一个**一对一函数（One-to-One Function）**。

> **一对一函数的定义** 如果对于函数 $f : A \to B$，对于 B 中的任意一个元素 y，最多只有一個的 A 中的元素 x 与之对应，那么称 f 是一个一对一函数。

那什么函数不是一对一函数呢？如果我们有一个函数 $f(x)$，它把高三商 1 的学生对应到他们数学统测的分数水平 $\{A, B, C, D, F\}$，那么这个函数就不是一对一的，因为肯定有不止一个学生在数学统测中拿到 A。

现在我们来看看什么是**映成函数（Onto Function）**。我们先来看看映成函数的定义：

> **映成函数的定义** 如果对于函数 $f : A \to B$，对于 B 中的任意一个元素 y，至少有一个 A 中的元素 x 与之对应，那么称 f 是一个映成函数。

如果我们有一个函数 $f(x)$，它把一本教科书对应到它所属的学科，那么这个函数就是一个映成函数，因为每一本教科书都属于某一个学科，或者说每一个学科都至少有一本教科书。

最后，我们来看看什么是**一一映成函数（One-to-One Onto Function）**。一一映成函数是一对一函数和映成函数的结合，它既是一对一函数，又是映成函数。也就是说，把它们的定义结合起来，就是一一映成函数的定义：

> **一一映成函数的定义** 如果对于函数 $f : A \to B$，对于 B 中的任意一个元素 y，恰好只有一个 A 中的元素 x 与之对应，那么称 f 是一个一一映成函数。

比如说，如果我们有一个函数 $f(x)$，它把每个人对应到他们的身份证号，那么这个函数就是一个一一映成函数，因为每个人都有一个唯一的身份证号，而每个身份证号也只对应一个人。

那数学的例子来说，如果我们有一个函数 $f(x) = x + 1$，那么这个函数是不是一对一函数呢？是不是映成函数呢？是不是一一映成函数呢？我们来看看。

首先，对于任何一个 x，$f(x)$ 都是该数加 1，不可能有两个数加 1 后得到同一个数，所以这个函数是一对一函数。其次，对于任何一个数 y，只要 $x = y - 1$，就可以得到 y，所以这个函数是映成函数。最后，这个函数是一对一函数，也是映成函数，所以它是一一映成函数。

再来，如果我们有一个函数 $f(x) = x^2$，同一个数字，正负号不同的平方是一样的，所以这个函数不是一对一函数。其次，对于任何一个数 y，只要 $x = \sqrt{y}$ 或 $x = -\sqrt{y}$，就可以得到 y，所以这个函数是映成函数。

1.6 反函数

我们依旧拿国家和首都来当例子。如果我们有一个函数 $f(x)$，它把国家对应到首都，那么我们可以定义一个反函数 $f^{-1}(x)$，它把首都对应到国家。比如，如果 $f(\text{中国}) = \text{北京}$，那么 $f^{-1}(\text{北京}) = \text{中国}$。

> **反函数的定义** 如果函数 $f : A \to B$ 是一个一一映成函数，那么存在一个函数 $f^{-1} : B \to A$，使得 x，$f^{-1}(f(x)) = x$，$f(f^{-1}(x)) = x$。

为什么一定要是一一映成函数才能有反函数呢？因为如果一个函数不是一一映成函数，那么就会有两个不同的 x 对应到同一个 y，那么反函数就不知道应该把 y 对应到哪个 x 了。拿上面举过的例子，若一个函数 $f(x)$，它把高三商 1 的学生对应到他们数学统测的分数水平 $\{A, B, C, D, F\}$，这个函数就不是一对一的，因为肯定有不止一个学生在数学统测中拿到 A。所以，如果硬要定义一个反函数 $f^{-1}(x)$ 将分数水平对应到高三商 1 的学生，那么如果你输入 A，这个反函数就会对应到不止一个学生，这就不符合函数的定义了。

例题 16

已知函数 $f(x) = 2x + 1$，求 $f^{-1}(x)$。

解

首先，我们令 $y = f^{-1}(x)$，那么 $f(y) = x$。所以，

$$\begin{aligned} f(y) = 2y + 1 &= x \\ 2y &= x - 1 \\ y &= \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

例题 17

已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$，$x \neq 2$，求 $f^{-1}(x)$。

解

首先，我们令 $y = f^{-1}(x)$，那么 $f(y) = x$。所以，

$$\begin{aligned} f(y) = \frac{1}{y-2} &= x \\ y - 2 &= \frac{1}{x} \\ y &= \frac{1}{x} + 2 \end{aligned}$$

练习题

定义域和值域

1. 若 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, x 为非零实数，则 $f(x)$ 的值域是什么?
2. 试求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}x^2+1$ 的值域，式中 $x\in\mathbb{R}$。
3. 若 $f(x)=|2x-3|+1$，式中 $0\le x\le 4$，求 $f(x)$ 的值域。
4. 函数 $y=-2x^2+6x-9$ 的值域是什么?
5. 已知函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=2x^2-1$，$x\in(-1,3)$。求 $f(x)$ 的值域。
6. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-1}}{x-1}$ 的定义域。
7. 求函数 $y=x^2-6x-27$，$x\in\mathbb{R}$ 的值域。
8. 已知 $f(x)=\dfrac{2x+k}{k-x}$，且 $f(1)=2$。当 x 取何值时，$f(x)$ 无意义?
9. 求实数函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域。
10. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域。
11. 已知函数 $f(x)=x^2-4$ 的定义域为 $[-1,3]$，求 $f(x)$ 的值域。
12. 函数 $f(x)$ 定义成 $f(x)=(x-1)^2$，求 $f(x)$ 的值域。

合成函数

1. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$，求 $f(x-1)$。
2. 已知函数 $f(x+1)=2x^2+5x+4$，求 $f(3)$。
3. 设 $f(x-1)=x^2-3x+2$, 则 $f(2)=?$
4. 已知函数 $f(x)=3x-1$ 及 $g(3x+1)=f(x+2)$，求 $g(x)$。
5. 若 $g(x)=x-2$, $(f\circ g)(x)=2x^2-5x+7$，求 $f(x)$。
6. 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义成 $x\to 3x-4$, 求另一函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $g\circ f:x\to 9x^2+24x+22$
7. 设 $f:x\to 2x+3$ 及 $g:x\to\dfrac{x}{x+1}$, 式中 $x\neq -1$, 求 $f\circ g$。
8. 一函数定义成 $f:x\to x+1$ 。另一函数 g 使到 $g\circ f:x\to 3x^2+6x$。求函数 g。
9. 一函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义成 $g(x)=3x+1$, 另有一函数 f 使得 $f\circ g(x)=9x^2+6x$ 。求函数 f。
10. 已知 $h(x)=x+5$ 及 $g(x)=x^2+8$。若 $g\circ h(a)=g(3)$, 求 a 的值。

11. 二函数 f, g 定义成 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x + 1$, 试求 $f \circ g(2)$ 之值。
12. 一函数 f 的定义是 $f : x \to x - 3$, 另一函数 g 则使到 $g \circ f : x \to 4x^2 - 20x + 25$, 那么 $g(x)$ 为
13. 已知 $f : x \to 2x - 1$ 及 $g : x \to \dfrac{x}{2}$, 求 $g \circ f$ 。
14. 已知 $f : x \to x + 3$ 及 $f \circ g : x \to x^2 + 6x + 10$, 求 g 。
15. 对于任意实数 x 而言，若 $f(x) = 2x_1$，且 $f[g(x)] = x^2 + x + g(x)$，则 $g(x) = ?$
16. 一函数 f 定义成 $f(3x - 1) = 9x^2 + 3x + 5$, 则 $f(x)$ 的表达式为?
17. 假设函数 f 与 g 分别为 $f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 - 4$ 。求合成函数 $g \circ f$ 和 $f \circ g$。
18. 设 $f(x) = 3x + 2, g(x) = ax + b$, 求合成函数 $f \circ g$ 及 $g \circ f$。求出条件使得 $f \circ g = g \circ f$。
19. 设 $f(x) = 3x - 2, g(x) = 2x^2 + 1, h(x) = ax + b$，求合成函数 $f \circ g$ 及 $g \circ f$。若 $(f \circ g \circ h)(x) = 6x^2 + 12x + 7$, 求 a, b 之值。
20. 设 $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 - 4x + 1$, 试求合成函数 $f \circ g$ 及 $g \circ f$。据此, 试求使 $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ 之 x 值。
21. 函数 f 与 g 之定义为: $f : x \to x^2 + 2x$ 及 $g : x \to 3x - 2$ 。求 $f(2), g(2), (f \circ g)(2)$ 及 $(g \circ f)(2)$ 之值。
22. 若 $f : x \to x + 2$ 及 $g : x \to x^2 - 2x + 1$, 求合成函数 $g \circ f$ 及 $f \circ g$ 。从而求 $g \circ f(2)$ 及 $f \circ g(2)$ 之值。
23. 已知 $f : x \to 2x - 3$ 及 $f \circ g : x \to 6x^2 + 10x - 15, x \in \mathbb{R}$, 求 $g(x)$。
24. 已知函数 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 定义成 $f(x) = \log x$, 函数 $g : S \to \mathbb{R}$ 定义成 $g(x) = \sqrt{2x - 3} - 1$ 。试求 $\mathbb{R}$ 的最大子集 S, 使得 $f \circ g$ 有意义。

反函数

1. 已知 $f(1 - 2x) = 4x + 7$，求 $f^{-1}(-5)$ 的值。
2. 已知 $f(2x - 1) = \dfrac{x - 2}{4x + 3}$，求 $f^{-1}(3)$ 的值。
3. 已知函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义成 $g(x) = x - 2$，$f : [0, \infty) \to (-\infty, 3]$ 为一函数使得 $(g \circ f^{-1})(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 1}{4}$，求 $f(9)$ 的值。
4. 已知 $f : x \to \dfrac{ax + 3}{4x + 5}$ 。若 $f^{-1} = f$, 则 a 之值为?
5. 已知 $x > 2$ 时, 函数 $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + a}$ 的反函数就是 $f(x)$ 本身, 则 a 的值是?
6. 如果 $f : x \to x - 3, g : x \to x^2 - 3$, 求 $(f^{-1} \circ g)(x)$。
7. 已知函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义成 $f(x) = ax + b, -10 \leq x \leq 10$ 其中 a 与 b 为常数。若 $f(4) = 3$ 及 $f(-2) = 6$, 求 $f^{-1}(-1)$ 的值。

8. 已知 $f^{-1}: x \to \dfrac{2x-1}{x+3}, x \neq -3$, 求函数 f.

9. 已知 $f(x) = 2x^2 + 7$ 及 $(g \circ f)(x) = 4x^4 + 22x^2 + 29$, 求 $g(x)$。

10. 若 $f: x \to 4x + 7$, 且 $g: x \to \dfrac{2x+1}{x-1}$, 求 $f^{-1}(x)$，$g^{-1}(x)$，$g^{-1} \circ f^{-1}(3)$。

11. 设 $f: x \to 2x + 3$ 及 $g: x \to \frac{x}{x+1}$, 式中 $x \neq -1$, 求 g^{-1} 。

12. 如果函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义成 $f(x+5) = x^3 + 7x + 8$, 求 $f(8)$ 及 $f^{-1}(8)$ 4. 已知函数 $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}, x \neq -1$。求其反函数的解析式 $f^{-1}(x)$.

13. 若 $f: x \to 3 + \log(x-2)$, 则 $f^{-1}(3) =$?

14. 若 $f(2x-1) = x + 1$, 则 $f^{-1}(x) =$

15. 已知 $f \circ g: x \to 3x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ 且 $g^{-1} \circ f: x \to \sqrt{5x+2}, x \in \left\{x \,\middle|\, x \geq -\frac{2}{5}\right\}$, 求 $f^{-1} \circ f^{-1}(0)$ 的值。

16. 若函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(2x-1) = 5x + 2$, 求 $f^{-1}(3x+1)$。

17. 设 $f(x) = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$, 试求其反函数 f^{-1}。

18. 函数 f 与 g 之定义为 $f: x \to 5x + 3$; $g: x \to 2x - 7$。求 $f \circ g$ 与 $(f \circ g)^{-1}$; f^{-1}, g^{-1} 与 $g^{-1} \circ f^{-1}$。

19. 已知函数 f 定义成 $f: x \to 3 - \dfrac{x}{4}, x \in \mathbb{R}$。如果 $g \circ f^{-1}: x \to 2 - 5x - 3x^2$, 求函数 g。