1.1 数学归纳法

1. 试以数学归纳法证明 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 。
   据之, 求 $2^2+4^2+6^2+\cdots+20^2$ 之和。

   证明:

   (1) 当 $n=1$ 时, 左式 $1^2=1$, 右式 $\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$, 两边相等，等式成立。

   (2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ 。
   当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\text{左式}&=1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\
&=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]
\end{aligned}
$$

   即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

   由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

2. 应用数学归纳法或其他方法, 证 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{n}{2n+1}$ 。

   据之, 求 $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ 的值。

   证明:

   (1) 当 $n=1$ 时, 左式 $\frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}=\frac{1}{3}$, 右式 $\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$, 两边相等，等式成立。

   (2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{k}{2k+1}$ 。
   当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\text{左式}&=\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}\\
&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\
&=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}\\
&=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

即当 $n = k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2+0} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
■

3. (a) 试用数学归纳法证明 $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2, n \in \mathbf{N}$ 。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 左式 $\left(1+\frac{3}{1}\right) = 4$, 右式 $(1+1)^2 = 4$, 两边相等，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right) = (k+1)^2$ 。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{左式} &= \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\left(1+\frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2}\right) \\ &= (k+1)^2\left(1+\frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2}\right) \\ &= (k+1)^2\left(1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right) \\ &= (k+1)^2\left(\frac{(k+1)^2+2k+3}{(k+1)^2}\right) \\ &= (k+1)^2+2k+3 \\ &= k^2+2k+1+2k+3 \\ &= k^2+4k+4 \\ &= (k+2)^2 \\ &= [(k+1)+1]^2\end{aligned}$$

即当 $n = k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

(b) 据此, 或用其它方法, 求 $\left(1+\frac{11}{25}\right)\left(1+\frac{13}{36}\right)\left(1+\frac{15}{49}\right)\cdots\left(1+\frac{51}{625}\right)$ 的值。

解:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{11}{25}\right)\left(1+\frac{13}{36}\right)\left(1+\frac{15}{49}\right)\cdots\left(1+\frac{51}{625}\right)\\
&=\left(1+\frac{2(5)+1}{5^2}\right)\left(1+\frac{2(6)+1}{6^2}\right)\left(1+\frac{2(7)+1}{7^2}\right)\cdots\left(1+\frac{2(25)+1}{25^2}\right)\\
&=\frac{(25+1)^2}{(4+1)^2}\\
&=27\frac{1}{25}
\end{aligned}
$$

4. 利用数学归纳法, 证明 $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}, n\in\mathbf{N}$ 。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 左式 $\cos x$, 右式 $\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}=\cos x$, 两边相等，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2kx}{2\sin x}$ 。
当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\text{左式}&=\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2k-1)x+\cos(2(k+1)-1)x\\
&=\frac{\sin 2kx}{2\sin x}+\cos(2k+1)x\\
&=\frac{\sin 2kx}{2\sin x}+\cos 2kx\cos x-\sin 2kx\sin x\\
&=\frac{\sin 2kx+2\sin x\cos x\cos 2kx-2\sin^2 x\sin 2kx}{2\sin x}\\
&=\frac{\sin 2kx(1-2\sin^2 x)+\sin 2x\cos 2kx}{2\sin x}\\
&=\frac{\sin 2kx\cos 2x+\cos 2kx\sin 2x}{2\sin x}\\
&=\frac{\sin(2kx+2x)}{2\sin x}\\
&=\frac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x}
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

1.2 数学归纳法的应用

1. 若 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$ 为正数, 其等差中项与等比中项之定义为

$$A = \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right),$$
$$G = \left(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}},$$

求证:

(i) $A\left(a_1 + a_n - A\right) \ge a_1 a_n$;

(ii) 利用数学归纳法证明 $A^n \ge a_1 a_2 \cdots a_n$

证明:

这是什么地狱题目啊，我不会做。;-;

2. 设 $a, b, c, d, a_1, a_2, \cdots a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正数。

(a) 证明 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$;

证明:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$
$$ad < bc$$
$$ad + ab < bc + ab$$
$$a(b+d) < b(a+c)$$
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \ \cdots \ (1)$$

$$ad + cd < bc + cd$$
$$d(a+c) < c(b+d)$$
$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \ \cdots \ (2)$$

由 (1) 和 (2), 知 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$。 ■

(b) 试用数学归纳法证明: 若 $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_n}{b_n}$ 则 $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$ 。

证明:

(1) 当 $n = 2$ 时, $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, 则由 (a) 中的证明可知，$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} < \frac{a_2}{b_2}$ 成立。

(2) 假设当 $n = k$ 时不等式成立，即 $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_k}{b_k}$ 则 $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k} < \frac{a_k}{b_k}$ 。
根据假设，

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k} \ \cdots \ (1)$$

根据题意，$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$，将不等式拆开，得到

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{a_k}{b_k} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$$

将上述不等式消分母，得到

$$a_1 b_{k+1} < a_{k+1} b_1$$
$$\vdots$$
$$a_k b_{k+1} < a_{k+1} b_k$$

将上述不等式相加，得到

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) b_{k+1} < (b_1 + b_2 + \cdots + b_k) a_{k+1}$$
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \ \cdots \ (2)$$

由 (1) 和 (2), 知 $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}} \ \cdots \ (3)$。

由于 $\frac{a_k}{b_k} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$，且根据假设，$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k} < \frac{a_k}{b_k}$

所以 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \ \cdots \ (4)$。

由 (3) 和 (4), 知 $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$。

即当 $n = k + 1$ 时，不等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 不等式均成立。 ■

3. 若 n 为正整数, 试利用数学归纳法证明 $3^{4n+2} + 2 \times 4^{3n+1}$ 能被 17 整除。

解:

(1) 当 $n = 1$ 时, $3^{4\times1+2} + 2 \times 4^{3\times1+1} = 3^6 + 2 \times 4^4 = 729 + 2 \times 256 = 1241$ 能被 17 整除。

(2) 假设当 $n = k$ 时等式成立，即 $3^{4k+2} + 2 \times 4^{3k+1}$ 能被 17 整除。

当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= 3^{4k+6} + 2 \times 4^{3k+4} \\
&= 3^4 \times 3^{4k+2} + 2 \times 4^3 \times 4^{3k+1} \\
&= 81 \times 3^{4k+2} + 128 \times 4^{3k+1} \\
&= 17 \times 3^{4k+2} + 64 \times 3^{4k+2} + 128 \times 4^{3k+1} \\
&= 17 \times 3^{4k+2} + 64(3^{4k+2} + 2 \times 4^{3k+1})
\end{aligned}$$

由假设, $3^{4k+2} + 4^{3k+1}$ 能被 17 整除, 所以 $3^{4(k+1)+2} + 2 \times 4^{3(k+1)+1}$ 能被 17 整除。

即当 $n = k + 1$ 时，式子也能被 17 整除。

由数学归纳法原理, 知对一切正整数 n, $3^{4n+2} + 2 \times 4^{3n+1}$ 能被 17 整除。 ■

4. 试用数学归纳法证明: 若 $n \geq 5$, 则 $2^n > n^2$ 。

解:

(1) 当 $n = 5$ 时, $2^5 = 32$, $5^2 = 25$, $32 > 25$, 不等式成立。

(2) 假设当 $n = k$ 时不等式成立，即 $2^k > k^2$ 。

当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{左式} &= 2^{k+1} \\ &= 2 \times 2^k \\ &> 2 \times k^2 \\ &= 2k^2 \end{aligned}$$

现在我们需要证明对于 $k \geq 5$，$2k^2 > (k+1)^2$。

$$\begin{aligned} 2k^2 - (k+1)^2 &= 2k^2 - k^2 - 2k - 1 \\ &= k^2 - 2k - 1 \\ &= (k-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

当 $k \geq 5$ 时, $(k-1)^2 - 2 > 0$，所以 $2k^2 > (k+1)^2$。

即当 $n = k + 1$ 时，不等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 $n \geq 5$, 不等式均成立。 ■

5. 试应用归纳法或其他方法, 证明对所有实数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$,

$n\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right)^2$ 。

证明:

(i) 当 $n = 1$ 时, 左式 $= a_1^2$, 右式 $= (a_1)^2$, $a_1^2 \geq (a_1)^2$, 两边相等，等式成立。

(ii) 假设当 $n = k$ 时等式成立，即 $k\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right)^2$ 。

当 $n = k + 1$ 时, 我们需证明

$(k+1)\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2 + a_{k+1}^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1}\right)^2$。

$$\begin{aligned} \text{左式} &= (k+1)\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2 + a_{k+1}^2\right) \\ &= k\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2\right) + \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2\right) + (k+1)a_{k+1}^2 \\ &\geq \left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right)^2 + \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2\right) + (k+1)a_{k+1}^2 \\ \text{右式} &= \left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1}\right)^2 \\ &= \left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right)^2 + 2\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right)a_{k+1} + a_{k+1}^2 \end{aligned}$$

比较左右两式, 我们只需证明

$$\begin{aligned} \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2\right) + (k+1)a_{k+1}^2 &\geq 2\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right)a_{k+1} + a_{k+1}^2 \\ \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2\right) + ka_{k+1}^2 &\geq 2\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right)a_{k+1} \\ \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2\right) + ka_{k+1}^2 - 2\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right)a_{k+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(a_1-2a_1a_{k+1}+a_{k+1}^2)+(a_2-2a_2a_{k+1}+a_{k+1}^2)+\cdots+(a_k-2a_ka_{k+1}+a_{k+1}^2)\geq 0$$
$$(a_1-a_{k+1})^2+(a_2-a_{k+1})^2+\cdots+(a_k-a_{k+1})^2\geq 0$$

$\because$ 任何数的平方都大于等于 0, $\therefore$ 上式成立。

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切实数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$, 等式均成立。 ■

6. 用数学归纳法证明 $1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$ 。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 左式 $1\times 1!=1$, 右式 $(1+1)!-1=1$, 两边相等，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+k\times k!=(k+1)!-1$ 。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{左式}&=1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+k\times k!+(k+1)\times(k+1)!\\
&=(k+1)!-1+(k+1)\times(k+1)!\\
&=(k+1)!(1+k+1)-1\\
&=(k+1)!(k+2)-1\\
&=(k+2)!-1\\
&=[(k+1)+1]!-1
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

7. 试应用数学归纳法或其他方法, 证明对所有的正整数 n 均有

$1\times\dfrac{2!}{2^2}+2\times\dfrac{3!}{2^3}+3\times\dfrac{4!}{2^4}+\cdots+n\times\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}=\dfrac{(n+2)!}{2^{n+1}}-1$ 。

证明:

(i) 当 $n=1$ 时, 左式 $=1\times\dfrac{2!}{2^2}=\dfrac{1}{2}$, 右式 $=\dfrac{3!}{2^2}-1=\dfrac{6}{4}-1=\dfrac{1}{2}$, 两边相等，等式成立。

(ii) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $1\times\dfrac{2!}{2^2}+2\times\dfrac{3!}{2^3}+3\times\dfrac{4!}{2^4}+\cdots+k\times\dfrac{(k+1)!}{2^{k+1}}=\dfrac{(k+2)!}{2^{k+1}}-1$ 。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{左式}&=1\times\frac{2!}{2^2}+2\times\frac{3!}{2^3}+3\times\frac{4!}{2^4}+\cdots+k\times\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}+(k+1)\times\frac{(k+2)!}{2^{k+2}}\\
&=\frac{2(k+2)!}{2^{k+2}}-1+\frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+2}}\\
&=\frac{2(k+2)!+(k+1)(k+2)!}{2^{k+2}}-1\\
&=\frac{(k+2)!(2+k+1)}{2^{k+2}}-1\\
&=\frac{(k+2)!(k+3)}{2^{k+2}}-1\\
&=\frac{(k+3)!}{2^{k+2}}-1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(k+3)!}{2^{k+2}} - 1 \\
&= \frac{[(k+1)+2]!}{2^{(k+1)+1}} - 1
\end{aligned}
$$

即当 $n = k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

8. (a) 设 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 试用数学归纳法或其它方法证明

$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$, 对所有自然数 n 都成立。

证明:

(1) 当 $n = 1$ 时, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $A^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 两边相等，等式成立。

(2) 假设当 $n = k$ 时等式成立，即 $A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$。

当 $n = k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= A^k \cdot A \\
&= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta - \sin k\theta\cos\theta \\ \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k\theta+\theta) & -\sin(k\theta+\theta) \\ \sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

即当 $n = k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

(b) 若 $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$, 试用 (i) 的结果求满足 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的最小自然 n。

解: 由 (i) 的结果, $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin n\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin n\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos n\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$。

令 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 即 $\cos n\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$, $\sin n\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$。

$\cos n\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1,$

$n\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$

$n = 6k, k \in \mathbf{Z} \ \cdots \ (1)$

$$\sin n\left(\frac{\pi}{3}\right)=0,$$
$$n\left(\frac{\pi}{3}\right)=k\pi, k\in\mathbf{Z},$$
$$n=3k, k\in\mathbf{Z}\ \cdots\ (2)$$

由（1）和（2）可知, 因为 n 是自然数, $n\neq 0$, 所以 n 的最小值为 6。 ■

9. 试用数学归纳法证明 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{(r+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$。

证明:

(i) 当 $n=1$ 时, 左式 $\dfrac{1}{(1+1)!}=\dfrac{1}{2}$, 右式 $1-\dfrac{1}{(1+1)!}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, 两边相等，等式成立。

(ii) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $\displaystyle\sum_{r=1}^{k}\frac{r}{(r+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$ 。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{左式}&=\sum_{r=1}^{k}\frac{r}{(r+1)!}+\frac{k+1}{(k+1+1)!}\\
&=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)(k+1)!}\\
&=1-\frac{k+2-k-1}{(k+2)!}\\
&=1-\frac{1}{(k+2)!}\\
&=1-\frac{1}{[(k+1)+1]!}
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

10. 已知 $f(x)$ 是一函数, 且 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 应用数学归纳法, 试证 $f\left(x^{n}\right)=nf(x)$, $n\in\mathbf{N}$。

证明:

设 $x=y=1$, 则 $f(1)=f(1)+f(1)$, 即 $f(1)=0$。

(i) 当 $n=1$ 时, 左式 $=f(x)$, 右式 $=f(x)+f(1)=f(x)$, 两边相等，等式成立。

(ii) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $f(x^{k})=kf(x)$。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{左式}&=f(x^{k+1})\\
&=f(x^{k}\cdot x)\\
&=f(x^{k})+f(x)\\
&=kf(x)+f(x)\\
&=(k+1)f(x)
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

11. 试用数学归纳法证明 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, n\in \mathbf{Z}^{+}$。

据此, 或其他方法, 计算下列的值:

$\frac{1}{100\times 101}+\frac{1}{101\times 102}+\frac{1}{102\times 103}+\cdots+\frac{1}{199\times 200}$

证明:

(i) 当 $n=1$ 时, 左式 $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$, 右式 $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, 两边相等，等式成立。

(ii) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ 。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2} \\
&= \frac{k+1}{(k+1)+1}
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

解:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{100\times 101}+\frac{1}{101\times 102}+\frac{1}{102\times 103}+\cdots+\frac{1}{199\times 200} \\
&= \frac{199}{199+1}-\frac{99}{99+1} \\
&= \frac{1}{200}
\end{aligned}$$ ■

12. 用数学归纳法证明 $\sum_{r=1}^{n}\frac{2^r r}{(r+1)(r+2)}=\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 左式 $\frac{2^1\cdot 1}{(1+1)(1+2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 右式 $\frac{2^2}{1+2}-1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$, 两边相等，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r r}{(r+1)(r+2)}=\frac{2^{k+1}}{k+2}-1$ 。

当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= \sum_{r=1}^{k} \frac{2^r r}{(r+1)(r+2)} + \frac{2^{k+1}(k+1)}{(k+1+1)(k+1+2)} \\
&= \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{2^{k+1}(k+1)}{(k+3)(k+2)} \\
&= \frac{2^{k+1}}{k+2} + \frac{2^{k+1}(k+1)}{(k+3)(k+2)} - 1 \\
&= \frac{2^{k+1}(k+3) + 2^{k+1}(k+1)}{(k+3)(k+2)} - 1 \\
&= \frac{2^{k+1}(2k+4)}{(k+3)(k+2)} - 1 \\
&= \frac{2^{k+2}(k+2)}{(k+3)(k+2)} - 1 \\
&= \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1 \\
&= \frac{2^{(k+1)+1}}{(k+1)+2} - 1
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

13. 已知当 $k \geq 0$ 时, $2k+3 > 2\sqrt{(k+1)(k+2)}$。
用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1), n \in N$。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 左式 $=1$, 右式 $2(\sqrt{1+1}-1)=2(\sqrt{2}-1)>1$, 不等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1}-1)$。

当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&> 2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&= 2\sqrt{k+1}-2+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{2(k+1)-2\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{2k+3-2\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} \\
&> \frac{2\sqrt{(k+1)(k+2)}-2\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} \\
&= 2\sqrt{k+2}-2 \\
&= 2(\sqrt{(k+1)+1}-1)
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

14. 用数学归纳法证明 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, n \in N$。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 左式 $1\times2\times3=6$, 右式 $\frac{1\times2\times3\times4}{4}=6$, 两边相等，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $\sum_{k=1}^{k} k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= \sum_{k=1}^{k} k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+\frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2][(k+1)+3]}{4}
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

15. 已知 $n \geq 1$, 证明 $5\left(4n^2+1\right)-4(n+1)^2-1>0$。

据此, 用数学归纳法证明 $5^n \geq 4n^2+1, n \in \mathbf{N}$。

证明:

$$\begin{aligned}
&5\left(4n^2+1\right)-4(n+1)^2-1 \\
&=20n^2+5-4n^2-8n-4-1 \\
&=16n^2-8n \\
&=8n(2n-1)
\end{aligned}$$

$\because n \geq 1$, $\therefore 2n-1 \geq 1$, $\therefore 8n(2n-1)>0$。

$\therefore 5\left(4n^2+1\right)-4(n+1)^2-1>0$。 ■

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, $5^1=5$, $4\times1^2+1=5$, $5\geq5$, 不等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时不等式成立，即 $5^k \geq 4k^2+1$。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
5^{k+1} &= 5\times5^k \\
&\geq 5(4k^2+1)
\end{aligned}$$

现在证明 $5(4k^2+1) \geq 4(k+1)^2+1$。

$$5(4k^2+1) \geq 4(k+1)^2+1$$

$$5(4k^2+1)-4(k+1)^2-1 \geq 0$$

由上面的证明, 知 $5(4k^2+1)-4(k+1)^2-1>0$，所以 $5^{k+1} \geq 4(k+1)^2+1$。

即当 $n=k+1$ 时不等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 不等式均成立。 ■

16. 用数学归纳法证明, 对于所有 $n \in N, 7^{2n+1}+1$ 是 8 的倍数。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, $7^{2\cdot1+1}+1=7^3+1=344=8\times43$ 是 8 的倍数，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $7^{2k+1}+1=8m$。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
7^{2(k+1)+1}+1 &= 7^{2k+3}+1 \\
&= 7^{2k+1}\cdot7^2+1 \\
&= 7^{2k+1}\cdot49+1 \\
&= 7^{2k+1}\cdot48+7^{2k+1}+1 \\
&= 7^{2k+1}\cdot48+8m \\
&= 8(7^{2k+1}\cdot6+m)
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

17. 试用数学归纳法证明

$1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)2^n=6+2^{n+1}(2n-3), \quad n\geq1$

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 左式 $1\times2=2$, 右式 $6+2^{1+1}(2\cdot1-3)=6-2^2=6-4=2$, 两边相等，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2k-1)2^k=6+2^{k+1}(2k-3)$ 。

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= 1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2k-1)2^k+(2(k+1)-1)2^{k+1} \\
&= 6+2^{k+1}(2k-3)+(2k+1)2^{k+1} \\
&= 6+2^{k+1}(2k-3+2k+1) \\
&= 6+2^{k+1}(4k-2) \\
&= 6+2^{k+2}(2k-1) \\
&= 6+2^{(k+1)+1}(2(k+1)-3)
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■

18. 用数学归纳法证明对于所有正整数 $n, 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 左式 1, 右式 $4-\frac{1+2}{2^{1-1}}=4-\frac{3}{1}=1$, 两边相等，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^{k-1}}=4-\frac{k+2}{2^{k-1}}$。

当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^{k-1}}+\frac{k+1}{2^k} \\
&= 4-\frac{k+2}{2^{k-1}}+\frac{k+1}{2^k} \\
&= 4-\frac{2(k+2)-(k+1)}{2^k} \\
&= 4-\frac{k+3}{2^k} \\
&= 4-\frac{(k+1)+2}{2^{(k+1)-1}}
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由数学归纳法原理, 知对一切自然数 n, 等式均成立。 ■