

5.2 圆的标准方程式

(选择题)

1. 求以 $(6, 7)$ 与 $(4, -3)$ 之连线为直径之圆的方程式。

解:

$$\text{半径为 } \frac{\sqrt{(6-4)^2 + (7-(-3))^2}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 10^2}}{2} = \frac{\sqrt{104}}{2} = \frac{2\sqrt{26}}{2} = \sqrt{26},$$

$$\text{圆心为 } \left(\frac{6+4}{2}, \frac{7+(-3)}{2} \right) = (5, 2), \text{ 所以方程式为 } (x-5)^2 + (y-2)^2 = 26. \quad \blacksquare$$

2. 如果圆 $x^2 + y^2 = 4^2$ 上的一点 P 到直线 $4x + 3y - 60 = 0$ 的距离是最小, 求 P 点的坐标。

解:

$$4x + 3y - 60 = 0$$

$$3y = -4x + 60$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 20$$

$$m = -\frac{4}{3}$$

直线穿过圆心的法线方程为

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 0)$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

代入圆的方程得

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x \right)^2 = 4^2$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 16$$

$$\frac{25}{16}x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{256}{25}$$

$$x = \pm \frac{16}{5}$$

$$\text{当 } x = \frac{16}{5} \text{ 时, } y = \frac{12}{5}, \text{ 当 } x = -\frac{16}{5} \text{ 时, } y = -\frac{12}{5}. \quad \blacksquare$$

$$\text{所以 } P \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5} \right).$$

3. 求由圆 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$ 上的一点到直线 $3x + 4y = 2$ 的最短距离。

解:

$$\text{直线 } 3x + 4y = 2 \text{ 与圆心 } (5, 3) \text{ 的距离为 } \frac{|3(5) + 4(3) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15 + 12 - 2|}{5} = 5.$$

$$\text{圆的半径为 } 3, \text{ 所以最短距离为 } 5 - 3 = 2. \quad \blacksquare$$

4. 点 $(5, 3)$ 是圆 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ 的一直径的端点。求此直径另一端点的坐标。

解:

设另一端点为 (x, y) , 已知圆心为 $(2, -1)$, 根据中点公式得

$$\frac{5+x}{2} = 2$$

$$5+x=4$$

$$x=-1$$

$$\frac{3+y}{2} = -1$$

$$3+y=-2$$

$$y=-5$$

所以另一端点的坐标为 $(-1, -5)$ 。 ■

(作答题)

1. 一正方形的四顶点 A, B, C, D 顺序依反时针方向排列。若 A 点的座标为 $(1, 3)$, BD 落于直线 $2x + y + 5 = 0$ 上。试求出 B, C, D 三点的坐标。(不准用图解法。)

解:

直线 $2x + y + 5 = 0$ 的斜率为 -2 , 该直线过点 $(1, 3)$ 的法线斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以法线方程为

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

代入直线方程得

$$2x + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + 5 = 0$$

$$4x + x + 5 + 10 = 0$$

$$x = -3$$

$$y = \frac{1}{2}(-3) + \frac{5}{2} = 1$$

所以正方形的中心为 $M(-3, 1)$ 。

设 B 点和 C 点的坐标为 $(x, -2x - 5)$ 。

$$\frac{AM}{MB} = \tan 45^\circ = 1$$

$$\frac{\sqrt{(-3-1)^2 + (1-3)^2}}{\sqrt{(x+3)^2 + (-2x-6)^2}} = 1$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{(x+3)^2 + 4(x+3)^2}$$

$$20 = 5(x+3)^2$$

$$4 = (x+3)^2$$

$$x+3 = \pm 2$$

$$x = -5, -1$$

所以 B 及 D 的坐标分别为 $(-5, 5)$ 和 $(-1, -3)$ 。

设 C 点的坐标为 (x, y) , 由正方形的性质得

$$\frac{x+1}{2} = -3$$

$$x = -7$$

$$\frac{y+3}{2} = 1$$

$$y = -1$$

所以 C 点的坐标为 $(-7, -1)$ 。

2. 试求以 $A(2, 0)$ 及 $B(6, 0)$ 之连线为直径的圆之方程式。

解:

圆心为 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 0)$, 半径为 $\frac{\sqrt{(6-2)^2 + (0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$ 。

所以方程式为

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4$$

$$x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$$

若此圆与直线 $y = mx$ 相交于 P 及 Q 两点, 试证 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

解:

$$x^2 - 8x + (mx)^2 + 12 = 0$$

$$x^2 - 8x + m^2x^2 + 12 = 0$$

$$(1+m^2)x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$d = 8^2 - 4(1+m^2)12 > 0$$

$$64 - 48(1+m^2) > 0$$

$$48(1+m^2) < 64$$

$$1+m^2 < \frac{4}{3}$$

$$m^2 < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

又, 试求 $OP \times OQ$ 之值, 其中 O 为原点。

解:

设 $m = 0$, 则 $P(2, 0)$, $Q(6, 0)$, 所以 $OP \times OQ = 2 \times 6 = 12$ 。

3. 已知两条直线 $l_1: 2x - 3y + 2 = 0$ 和 $l_2: 3x - 2y + 3 = 0$ 与圆心为 M 的一圆相交, 且 l_1 与 l_2 被截在圆内的两条线段的长度分别为 26 及 24, 求圆心 M 的轨迹方程式。

解:

设圆心为 (x, y) , 半径为 r ,

$$\text{圆心到直线 } l_1 \text{ 的距离为 } \frac{|2x - 3y + 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2x - 3y + 2|}{\sqrt{13}},$$

$$\text{圆心到直线 } l_2 \text{ 的距离为 } \frac{|3x - 2y + 3|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3x - 2y + 3|}{\sqrt{13}}.$$

利用毕氏定理, 得

$$r^2 = \left(\frac{|2x - 3y + 2|}{\sqrt{13}} \right)^2 + 13^2$$

$$r^2 = \left(\frac{|3x - 2y + 3|}{\sqrt{13}} \right)^2 + 12^2$$

两式相等,

$$\begin{aligned} \left(\frac{|2x - 3y + 2|}{\sqrt{13}} \right)^2 + 13^2 &= \left(\frac{|3x - 2y + 3|}{\sqrt{13}} \right)^2 + 12^2 \\ \frac{(2x - 3y + 2)^2}{13} + 169 &= \frac{(3x - 2y + 3)^2}{13} + 144 \\ \frac{(2x - 3y + 2)^2}{13} - \frac{(3x - 2y + 3)^2}{13} &= -25 \\ (2x - 3y + 2)^2 - (3x - 2y + 3)^2 &= -325 \\ 4x^2 + 9y^2 + 4 - 12xy - 12y + 8x - (9x^2 + 4y^2 + 9 - 12xy - 12y + 18x) &= -325 \\ 4x^2 + 9y^2 + 4 - 12y + 8x - 9x^2 - 4y^2 - 9 + 12y - 18x &= -325 \\ -5x^2 + 5y^2 - 10x - 5 &= -325 \\ 5x^2 - 5y^2 + 10x - 320 &= 0 \\ x^2 - y^2 + 2x - 64 &= 0 \end{aligned}$$

■

4. 已知 A 点 (x_1, y_1) , B 点 (x_2, y_2) , 证明以 AB 为直径的圆方程式为 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.
一动圆经过一定点 $P(h, k)$ 与 y 轴相切, 求直径 PR 的端点 R 的轨迹方程式。

解:

$$\text{圆心为 } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right), \text{ 半径为 } \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2}.$$

所以圆的方程式为

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2} \right)^2 \\ x^2 - x(x_1 + x_2) + \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} + y^2 - y(y_1 + y_2) + \frac{y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2}{4} &= \frac{x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2}{4} \\ x^2 - x(x_1 + x_2) + \frac{2x_1x_2}{4} + y^2 - y(y_1 + y_2) + \frac{2y_1y_2}{4} &= \frac{-2x_1x_2 - 2y_1y_2}{4} \\ x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2 + y^2 - y(y_1 + y_2) + y_1y_2 &= 0 \\ (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) &= 0 \end{aligned}$$

■

设 R 点的坐标为 (x, y) , 半径为 r , 则圆心为 $\left(\frac{h+x}{2}, \frac{k+y}{2}\right)$ 。

$$\begin{aligned} \left|\frac{h+x}{2}\right| &= r \\ \left(x - \frac{h+x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{k+y}{2}\right)^2 &= r^2 \\ \left(\frac{x-h}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{2}\right)^2 &= r^2 \\ \frac{(x-h)^2}{4} + \frac{(y-k)^2}{4} &= r^2 \\ (x-h)^2 + (y-k)^2 &= 4r^2 \\ x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= 4\left(\frac{h+x}{2}\right)^2 \\ x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= 4\left(\frac{h^2 + 2hx + x^2}{4}\right) \\ x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= h^2 + 2hx + x^2 \\ y^2 - 2ky + k^2 &= 4hx \\ (y-k)^2 &= 4hx \end{aligned}$$

5.3 圆的一般方程式

(选择题)

1. 一圆的中心为 $(2, 3)$ 且过点 $(3, -2)$, 求该圆之方程式。

解:

圆心到点 $(3, -2)$ 的距离为 $\sqrt{(3-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$, 即为半径。

所以方程式为

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 26 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 &= 26 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 13 &= 0 \end{aligned}$$

2. 求圆 $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ 之半径。

解:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 - 4} \\ &= \sqrt{4 + 25 - 4} = 5 \end{aligned}$$

3. 求圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 之面积。

解:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 - 9} = \sqrt{9 + 4 - 9} = 2 \\ S &= \pi r^2 = 4\pi \end{aligned}$$

4. 若 A 及 B 分别为圆 $x^2 + y^2 - 6y = 0$ 及 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 的圆心, 则直线 AB 之方程式为
解:

$$x^2 + y^2 - 6y = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 9$$

两圆的圆心分别为 $A(0, 3)$ 及 $B(3, 0)$, 所以直线 AB 的斜率为 $\frac{0-3}{3-0} = -1$, 方程式为

$$y - 3 = -1(x - 0) \Rightarrow x + y = 3$$

5. 由点 $A(6, 6)$ 至圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ 之最短距离为
解:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = -4$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = -4 + 9 + 4 = 9$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

圆心为 $(3, 2)$, 半径为 3 。

点 $(6, 6)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{(6-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ 。

所以最短距离为 $5 - 3 = 2$ 。

6. 求点 $(9, 4)$ 到圆 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ 的最短距离。

解:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 5$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5 + 4 + 9 = 18$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

圆心为 $(2, 3)$, 半径为 $3\sqrt{2}$ 。

点 $(9, 4)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{(9-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ 。

所以最短距离为 $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ 。

7. 两个圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ 及 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 的关系是

解:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20 + 4 + 1 = 25$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

圆心为 $(2, 1)$, 半径为 5 。

$$x^2 + y^2 - 6x = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 0$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 9$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$$

圆心为 $(3, 0)$, 半径为 3。

\therefore 两圆的圆心距离为 $\sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < 5-3=2$ 。

\therefore 一个圆在另一个圆内。 ■

8. 求圆心为 $(-3, 0)$ 且将圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的圆周加以平分的圆的方程式。

解:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

圆心为 $(-1, 2)$, 半径为 2。

所求圆的圆心和 $(-1, -2)$ 所成的线段的斜率为 $\frac{0 - (-2)}{-3 - (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$ 。

其过点 $(-1, 2)$ 的法线斜率为 1, 所以方程式为

$$y - 2 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 3$$

代入圆的方程得

$$(x + 1)^2 + (x + 3 - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

当 $x = -1 + \sqrt{2}$ 时, $y = 2 - \sqrt{2}$ 。

所以所求圆的半径为 $\sqrt{(-3 - (-1 + \sqrt{2}))^2 + (0 - (2 - \sqrt{2}))^2} = 2\sqrt{3}$, 方程式为

$$(x + 3)^2 + y^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 12$$

$$x^2 + 6x + y^2 - 3 = 0$$

9. 如果圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 与 x 轴相切于原点, 下列哪项是对的? ■

解:

与 x 轴切于原点, 则圆心在 y 轴上, 半径等于圆心到原点的距离。

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

所以 $D = 0$, $E = -2a$, $F = 0$ 。 ■

10. 已知 P 及 Q 分别是点 $(3, -2)$ 和 $(-1, 4)$ 。若 PQ 是一圆的直径, 求此圆的方程式。

解:

圆心为 $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (1, 1)$, 半径为 $\frac{\sqrt{(3+1)^2 + (-2-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{16+36}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13}$ 。

所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-1)^2 &= (\sqrt{13})^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &= 13 \\ x^2 - 2x + y^2 - 2y - 11 &= 0\end{aligned}$$

■

11. 一圆心在 x 轴上的圆经过 $A(-1, 1)$ 及 $B(1, 3)$ 两点。求此圆的方程式。

解:

设圆心为 $(x, 0)$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+1)^2 + 1} &= \sqrt{(x-1)^2 + 9} \\ (x+1)^2 + 1 &= (x-1)^2 + 9 \\ x^2 + 2x + 1 + 1 &= x^2 - 2x + 1 + 9 \\ 4x &= 8 \\ x &= 2\end{aligned}$$

所以圆心为 $(2, 0)$, 半径为 $\sqrt{(2+1)^2 + 1} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ 。

所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + y^2 &= 10 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 10 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6 &= 0\end{aligned}$$

■

(作答题)

1. (a) 求圆 $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ 的圆心与半径。

解:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 + 8y &= 5 \\ (x-2)^2 + (y+4)^2 &= 5 + 4 + 16 = 25 \\ (x-2)^2 + (y+4)^2 &= 5^2\end{aligned}$$

∴ 圆心为 $(2, -4)$, 半径为 5。

■

(b) 设 O 为坐标之原点, 若直线 OC 割此圆于 P, Q 两点, 求 OP 及 OQ 之长度。(注: C 为圆心)

解:

$$\begin{aligned}m_{OC} &= \frac{0 - (-4)}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2 \\ OC &\Rightarrow y = -2x\end{aligned}$$

将 $y = -2x$ 代入圆的方程得

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (-2x+4)^2 &= 25 \\ x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 16x + 16 &= 25 \\ 5x^2 - 20x + 20 &= 25 \\ 5x^2 - 20x - 5 &= 0 \\ x^2 - 4x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

当 $x = 2 + \sqrt{5}$ 时, $y = -2(2 + \sqrt{5}) = -4 - 2\sqrt{5}$ 。

当 $x = 2 - \sqrt{5}$ 时, $y = -4 + 2\sqrt{5}$ 。

$$\begin{aligned}OP &= \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2 + (-4 - 2\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{4 + 4\sqrt{5} + 5 + 16 + 16\sqrt{5} + 20} \\ &= \sqrt{45 + 20\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{45 + 2\sqrt{500}} \\ &= \sqrt{25 + 20 + 2\sqrt{25 \times 20}} \\ &= 5 + 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}OQ &= \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2 + (-4 + 2\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{4 - 4\sqrt{5} + 5 + 16 - 16\sqrt{5} + 20} \\ &= \sqrt{45 - 20\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{45 - 2\sqrt{500}} \\ &= \sqrt{25 + 20 - 2\sqrt{25 \times 20}} \\ &= 5 - 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

■

(c) 求此圆与 x -轴交点之坐标。

解:

当 $y = 0$ 时,

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + 4^2 &= 25 \\ (x-2)^2 &= 9 \\ x &= 2 \pm 3 \\ x &= 5 \text{ 或 } x = -1\end{aligned}$$

\therefore 交点为 $(5, 0)$ 及 $(-1, 0)$ 。

■

2. 一圆切 x 轴于 $(4, 0)$, 截 y 轴于 $(0, 6)$ 。试求此圆之方程式。

解: 设圆心为 (h, k) , 半径为 r 。

$$(h - 4)^2 + k^2 = r^2$$

$$h^2 + (k - 6)^2 = r^2$$

比较两式得

$$(h - 4)^2 + k^2 = h^2 + (k - 6)^2$$

$$h^2 - 8h + 16 + k^2 = h^2 + k^2 - 12k + 36$$

$$-8h + 16 = -12k + 36$$

$$12k - 8h = 20$$

$$3k - 2h = 5$$

\therefore 圆切 x 轴于 $(4, 0)$, 则 $h = 4$ 。

代入得 $3k - 8 = 5$, $k = \frac{13}{3}$ 。

\therefore 圆心为 $\left(4, \frac{13}{3}\right)$, 半径为 $\sqrt{(4 - 4)^2 + \left(0 - \frac{13}{3}\right)^2} = \frac{13}{3}$ 。

方程式为

$$(x - 4)^2 + \left(y - \frac{13}{3}\right)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - \frac{26}{3}y + \frac{169}{9} = \frac{169}{9}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - \frac{26}{3}y + 16 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 24x - 26y + 48 = 0$$

■

3. 求圆心在 x 轴上, 且经过二已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ 的交点的圆之方程式。

解:

$$x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2x + 14y - 25$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 = -2x + 2y + 3$$

比较两式得

$$2x + 14y - 25 = -2x + 2y + 3$$

$$4x + 12y = 28$$

$$x + 3y = 7$$

$$x = 7 - 3y$$

代入已知圆的方程得

$$\begin{aligned}(7-3y)^2 + y^2 &= 2(7-3y) + 14y - 25 \\ 49 - 42y + 9y^2 + y^2 &= 14 - 6y + 14y - 25 \\ 10y^2 - 50y + 60 &= 0 \\ y^2 - 5y + 6 &= 0 \\ (y-2)(y-3) &= 0 \\ y &= 2 \text{ 或 } y = 3\end{aligned}$$

当 $y = 2$ 时, $x = 7 - 3 \times 2 = 1$; 当 $y = 3$ 时, $x = 7 - 3 \times 3 = -2$ 。

\therefore 两圆的交点为 $(1, 2)$ 及 $(-2, 3)$ 。

\therefore 圆心在 x 轴上, 所以圆心为 $(h, 0)$ 。

$$\begin{aligned}\sqrt{(h-1)^2 + 2^2} &= \sqrt{(h+2)^2 + 3^2} \\ h^2 - 2h + 1 + 4 &= h^2 + 4h + 4 + 9 \\ -6h + 5 &= 13 \\ h &= -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

\therefore 圆心为 $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$, 半径为 $\sqrt{\left(-\frac{4}{3} - 1\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{9} + 4} = \frac{\sqrt{85}}{3}$ 。

方程式为

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{\sqrt{85}}{3}\right)^2 \\ x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 &= \frac{85}{9} \\ 9x^2 + 24x + 16 + 9y^2 &= 85 \\ 9x^2 + 9y^2 + 24x - 69 &= 0 \\ 3x^2 + 3y^2 + 8x - 23 &= 0\end{aligned}$$

■

4. 求通过二圆 $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ 的交点且圆心落于直线 $x + 2y + 3 = 0$ 上的圆之方程式。

解:

两圆的方程式相减得

$$4x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned}x^2 + (-2x - 1)^2 + 4x - 5 &= 0 \\ x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 4x - 5 &= 0 \\ 5x^2 + 8x - 4 &= 0 \\ (5x - 2)(x + 2) &= 0 \\ x &= \frac{2}{5} \text{ 或 } x = -2\end{aligned}$$

当 $x = \frac{2}{5}$ 时, $y = -2 \times \frac{2}{5} - 1 = -\frac{9}{5}$ 。

当 $x = -2$ 时, $y = -2 \times (-2) - 1 = 3$ 。

\therefore 两圆的交点为 $(\frac{2}{5}, -\frac{9}{5})$ 及 $(-2, 3)$ 。

$$x + 2y + 3 = 0 \Rightarrow x = -2y - 3$$

设圆心为 $(-2y - 3, y)$, 半径为 r 。

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(-2y - 3 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{5}\right)^2} &= \sqrt{(-2y - 3 + 2)^2 + (y - 3)^2} \\ \left(-2y - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{5}\right)^2 &= (-2y - 1)^2 + (y - 3)^2 \\ 4y^2 + \frac{68}{5}y + \frac{289}{25} + y^2 + \frac{18}{5}y + \frac{81}{25} &= 4y^2 + 4y + 1 + y^2 + 9 - 6y \\ \frac{86}{5}y + \frac{74}{5} &= -2y + 10 \\ 86y + 74 &= -10y + 50 \\ 96y &= -24 \\ y &= -\frac{1}{4} \\ x &= -2 \times -\frac{1}{4} - 3 = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

\therefore 圆心为 $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$, 半径为 $\sqrt{\left(-\frac{5}{2} - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{9}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{173}}{4}$ 。

方程式为

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{173}}{4}\right)^2 \\ x^2 + 5x + \frac{25}{4} + y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16} &= \frac{109}{16} \\ 16x^2 + 90x + 100 + 16y^2 + 8y + 1 &= 173 \\ 16x^2 + 16y^2 + 80x + 8y - 72 &= 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 10x + y - 9 &= 0\end{aligned}$$

■

5. C 为一圆, 其一弦之中点, 长度及方程分别为 $(1, 1)$, 8 及 $3x - 4y + 1 = 0$ 。若 C 通过点 $(8, 2)$, 求 C 之方程式。

解:

设弦与圆的交点为 $(x, \frac{3x+1}{4})$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{3x+1}{4} - 1\right)^2} &= 4 \\ (x-1)^2 + \left(\frac{3x-3}{4}\right)^2 &= 16 \\ x^2 - 2x + 1 + \frac{9x^2 - 18x + 9}{16} &= 16\end{aligned}$$

$$16x^2 - 32x + 16 + 9x^2 - 18x + 9 = 256$$

$$25x^2 - 50x + 25 = 256$$

$$25(x-1)^2 = 256$$

$$x-1 = \pm \frac{16}{5}$$

$$x = 1 \pm \frac{16}{5}$$

$$x = \frac{21}{5} \text{ 或 } x = -\frac{11}{5}$$

$$\text{当 } x = \frac{21}{5} \text{ 时, } y = \frac{3 \times \frac{21}{5} + 1}{4} = \frac{17}{5}。$$

$$\text{当 } x = -\frac{11}{5} \text{ 时, } y = \frac{3 \times \left(-\frac{11}{5}\right) + 1}{4} = -\frac{7}{5}。$$

所以已知 C 过点 $(8, 2)$ 、 $\left(\frac{21}{5}, \frac{17}{5}\right)$ 及 $\left(-\frac{11}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ 。

设圆的方程式为 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ，代入三点得

$$68 + 16g + 4f + c = 0$$

$$16g + 4f + c = -68 \cdots (1)$$

$$\frac{146}{5} + \frac{42g}{5} + \frac{34f}{5} + c = 0$$

$$42g + 34f + 5c = -146 \cdots (2)$$

$$\frac{34}{5} - \frac{22g}{5} - \frac{14f}{5} + c = 0$$

$$22g + 14f - 5c = 34 \cdots (3)$$

$$(3) + (2) \Rightarrow 64g + 48f = -112$$

$$\Rightarrow 4g + 3f = -7 \cdots (4)$$

$$(1) \times 5 \Rightarrow 80g + 20f + 5c = -340 \cdots (5)$$

$$(3) + (5) \Rightarrow 102g + 34f = -306$$

$$\Rightarrow 3g + f = -9 \cdots (6)$$

$$(6) \times 3 \Rightarrow 9g + 3f = -27 \cdots (7)$$

$$(4) - (7) \Rightarrow -5g = 20$$

$$\Rightarrow g = -4$$

$$\text{代入}(6) \Rightarrow 3 \times -4 + f = -9$$

$$\Rightarrow f = 3$$

$$\text{代入}(1) \Rightarrow 16 \times -4 + 4 \times 3 + c = -68$$

$$\Rightarrow c = -16$$

\therefore 圆的方程式为 $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 16 = 0$ 。 ■

6. 求通过点 $(1, -1)$ 和两圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0, x^2 + y^2 + 3x - 1 = 0$ 的交点的圆的方程式。

解:

题目有误

7. 试求通过两圆 $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 6 = 0, 2x^2 + 2y^2 + 3x - y + 1 = 0$ 的交点且圆心在直线 $x + y = 6$ 上的圆的方程式。

解:

题目有误

8. 一圆的圆心为 $A(8, 6)$, 并与另一圆 $5x^2 + 5y^2 - 32x - 24y + 75 = 0$ 内切, 求此圆的方程式。

解:

$$5x^2 + 5y^2 - 32x - 24y + 75 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6.4x - 4.8y + 15 = 0$$

内切圆圆心为 $(3.2, 2.4)$, 半径为 $\sqrt{(-3.2)^2 + (-2.4)^2 - 15} = \sqrt{10.24 + 5.76 - 15} = \sqrt{1} = 1$ 。

内切圆圆心至圆心的距离为 $\sqrt{(8 - 3.2)^2 + (6 - 2.4)^2} = \sqrt{4.8^2 + 3.6^2} = 6$ 。

圆的半径为其圆心至内切圆的最长距离, 即 $6 + 1 = 7$ 。

\therefore 圆的方程式为 $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 49$ 。

9. 两对直线对 AB 与 AD, CB 与 CD 的方程式依序是

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x - 3y - 9 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x + 3y - 9 = 0$$

- (a) 求它们的交点 A, B, C 与 D 的坐标。

解:

两个方程式相减, 得:

$$6x + 6y = 0 \Rightarrow x = -y$$

代入方程式, 得:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x - 3y - 9 = 0$$

$$2x^2 + 5x^2 + 2x^2 - 3x + 3x - 9 = 0$$

$$9x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

当 $x = 1$ 时, $y = -1$; 当 $x = -1$ 时, $y = 1$ 。

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x + 3y - 9 = 0$$

$$(2x - y)(x - 2y) + 3(x + y) - 9 = 0$$

$$(2x - y)(x - 2y) + 3[(2x - y) - (x - 2y)] - 3(3) = 0$$

$$(2x - y + 3)(x - 2y - 3) = 0$$

$$2x - y + 3 = 0 \cdots (1)$$

$$x - 2y - 3 = 0 \cdots (2)$$

$$\begin{aligned}
(2) \times 2 &\Rightarrow 2x - 4y - 6 = 0 \cdots (3) \\
(1) - (3) &\Rightarrow 3y + 9 = 0 \\
&\Rightarrow y = -3 \\
\text{代入}(1) &\Rightarrow 2x + 6 = 0 \\
&\Rightarrow x = -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x - 3y - 9 &= 0 \\
(2x - y)(x - 2y) - 3(x + y) - 9 &= 0 \\
(2x - y)(x - 2y) + 3[(x - 2y) - (2x - y)] - 3(3) &= 0 \\
(2x - y - 3)(x - 2y + 3) &= 0 \\
2x - y - 3 &= 0 \cdots (4) \\
x - 2y + 3 &= 0 \cdots (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \times 2 &\Rightarrow 2x - 4y + 6 = 0 \cdots (6) \\
(4) - (6) &\Rightarrow 3y - 9 = 0 \\
&\Rightarrow y = 3 \\
\text{代入}(4) &\Rightarrow 2x - 6 = 0 \\
&\Rightarrow x = 3
\end{aligned}$$

$\therefore A(1, -1), B(3, 3), C(-1, 1), D(-3, -3)$ 。 ■

(b) 试证四边形 ABCD 是一个菱形。

解:

$$\begin{aligned}
m_{AC} &= \frac{1 - (-1)}{-1 - 1} = -1 \\
m_{BD} &= \frac{-3 - 3}{-3 - 3} = 1
\end{aligned}$$

$\because m_{AC} \cdot m_{BD} = -1, \therefore AC \perp BD$ 。

\therefore 四边形 ABCD 是一个菱形。 ■

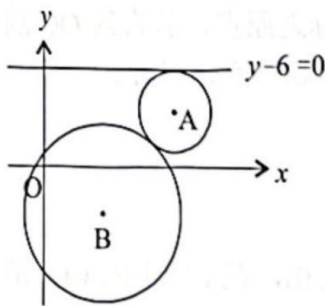
(c) 求此菱形的面积。

解:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} |3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3| \\
&= 12 \text{ 平方单位}
\end{aligned}$$

■

10. 如图所示, 以 A 为圆心之圆与直线 $y - 6 = 0$ 及以 B 为圆心之圆 $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 外切。求点 A 的轨迹方程式。



解:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 6x + 8y &= 0 \\x^2 - 6x + y^2 + 8y &= 0 \\x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 &= 25 \\(x - 3)^2 + (y + 4)^2 &= 5^2\end{aligned}$$

\therefore 圆心为 $(3, -4)$, 半径为 5。

设圆 A 的半径为 r , 圆心为 (x, y) , 则圆 A 与直线 $y - 6 = 0$ 的切点为 $(x, 6)$ 。

$$\begin{aligned}\sqrt{(6 - y)^2 + (x - x)^2} &= r \\r &= 6 - y \cdots (1) \\\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} &= r + 5 \\(x - 3)^2 + (y + 4)^2 &= (r + 5)^2 \\(x - 3)^2 + (y + 4)^2 &= r^2 + 10r + 25\end{aligned}$$

代入 (1) 得

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y + 4)^2 &= (6 - y)^2 + 10(6 - y) + 25 \\x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 &= 36 - 12y + y^2 + 60 - 10y + 25 \\x^2 - 6x + 30y - 96 &= 0\end{aligned}$$

■

11. 已知 A, B 两点的坐标分别是 $(-1, 0)$ 及 $(0, 2)$ 。若 P 是圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 上的任意点, 求 $\triangle PAB$ 的面积的最大可能值。

解:

当 P 点距离 AB 最远时, $\triangle PAB$ 的面积最大。

$$\begin{aligned}m_{AB} &= \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2 \\m_{AP} &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x &= 0 \\x^2 - 2x + y^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 1 \\(x - 1)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

圆心为 $(1, 0)$ ，半径为 1。

AP 的方程式为

$$\begin{aligned}y - 0 &= -\frac{1}{2}(x - 1) \\2y &= -x + 1 \\x &= 1 - 2y\end{aligned}$$

代入圆的方程式得

$$\begin{aligned}(-2y)^2 + y^2 &= 1 \\5y^2 &= 1 \\y &= \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

当 $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 时, $x = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$

当 $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ 时, $x = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$

\therefore 点 P 离 AB 最远,

$\therefore P\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 。

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} \\&= \frac{1}{2} \left| -2 - 2 - \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right| \\&= \frac{1}{2} \left| -4 - \frac{5}{\sqrt{5}} \right| \\&= \frac{1}{2} \left| -4 - \sqrt{5} \right| \\&= \frac{4 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

■

5.4 圆的切线

(选择题)

1. 求自 $x^2 + y^2 = 50$, 在点 $(1, -7)$ 的切线方程式。

解:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 50 \\2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}\end{aligned}$$

当 $x = 1, y = -7$ 时, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{-7} = \frac{1}{7}$ 。

所以切线的斜率为 $\frac{1}{7}$, 方程式为

$$\begin{aligned}y + 7 &= \frac{1}{7}(x - 1) \\7y + 49 &= x - 1 \\x - 7y &= 50\end{aligned}$$

■

2. 求自点 $(3, 3)$ 至圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 的切线的长。

解:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 &= 0 \\ \text{切距} &= \sqrt{3^2 + 3^2 + (-2) \times 3 + 4 \times 3 + 1} \\ &= \sqrt{9 + 9 - 6 + 12 + 1} \\ &= \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

■

3. 求自点 $(3, 4)$ 至圆 $x^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 的切线长。

解:

$$\begin{aligned}x^2 + 4x - 4y + 4 &= 0 \\ \text{切距} &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 4 \times 3 - 4 \times 4 + 4} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 12 - 16 + 4} \\ &= \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

■

4. 若直线 $2x + 3y + 3\sqrt{13} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = k$ 相切, 则 k 之值为

解:

$$\begin{aligned}2x + 3y + 3\sqrt{13} &= 0 \\3y &= -2x - 3\sqrt{13} \\ y &= -\frac{2}{3}x - \sqrt{13}\end{aligned}$$

$$m_{\text{切线}} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= k \\2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ -\frac{2}{3} &= -\frac{x}{y} \\ y &= \frac{3}{2}x\end{aligned}$$

代入切线方程得

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x &= -\frac{2}{3}x - \sqrt{13} \\\frac{13}{6}x &= -\sqrt{13} \\ x &= -\frac{6}{\sqrt{13}} \\ y &= -\frac{9}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

$$\therefore k = \left(-\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(-\frac{9}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{36}{13} + \frac{81}{13} = \frac{117}{13} = 9。$$

5. 从点 $A(3, -4)$ 至圆 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ 所引切线, 其长等于

解:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 6x - 8y &= 0 \\ \text{切距} &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 6 \times 3 - 8 \times (-4)} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 18 + 32} \\ &= \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

6. 若直线 $3x - 4y = k$ 是圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的切线, 试求 k 之值。

解:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= -1 + 4 + 1 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 4\end{aligned}$$

圆心为 $(-1, 2)$, 半径为 2。

$$\begin{aligned}\left| \frac{3 \times (-1) - 4 \times 2 - k}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| &= 2 \\ (11 + k)^2 &= 100 \\ 11 + k &= \pm 10 \\ k &= -21 \text{ 或 } -1\end{aligned}$$

7. 求从点 $(1, -2)$ 引圆 $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 15$ 的切线的长度。

解:

$$\begin{aligned}(x - 10)^2 + (y - 8)^2 &= 15 \\ x^2 - 20x + 100 + y^2 - 16y + 64 &= 15 \\ x^2 + y^2 - 20x - 16y + 149 &= 0 \\ \text{切距} &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 - 20 \times 1 - 16 \times (-2) + 149} \\ &= \sqrt{1 + 4 - 20 + 32 + 149} \\ &= \sqrt{166}\end{aligned}$$

8. 求圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线的方程式, 它与圆的直径 $y = \frac{3}{4}x$ 平行。

解: \because 切线与直径平行, 所以切线的斜率为 $\frac{3}{4}$ 。

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4 \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ -\frac{x}{y} &= \frac{3}{4} \\ y &= -\frac{4}{3}x\end{aligned}$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned}x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 &= 4 \\ x^2 + \frac{16}{9}x^2 &= 4 \\ \frac{25}{9}x^2 &= 4 \\ x^2 &= \frac{36}{25} \\ x &= \pm \frac{6}{5}\end{aligned}$$

当 $x = \frac{6}{5}$ 时, $y = -\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = -\frac{8}{5}$ 。

切线方程为

$$\begin{aligned}y + \frac{8}{5} &= \frac{3}{4} \left(x - \frac{6}{5}\right) \\ y + \frac{8}{5} &= \frac{3}{4}x - \frac{9}{10} \\ y &= \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

当 $x = -\frac{6}{5}$ 时, $y = \frac{8}{5}$ 。

切线方程为

$$\begin{aligned}y - \frac{8}{5} &= \frac{3}{4} \left(x + \frac{6}{5} \right) \\y - \frac{8}{5} &= \frac{3}{4}x + \frac{9}{10} \\y &= \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\end{aligned}$$

∴ 切线方程为 $y = \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ 。 ■

9. 若直线 $y = -2x + c$ 切圆 $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 40 = 0$, 则 c 的值是

解:

$$y = -2x + c$$

$$m_{\text{切线}} = -2$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 12y + 40 = 0$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 6 + 12 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y \frac{dy}{dx} - 3 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(y + 6) \frac{dy}{dx} = 3 - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - x}{y + 6}$$

$$-2 = \frac{3 - x}{y + 6}$$

$$x = 2y + 15$$

代入圆的方程得

$$(2y + 15)^2 + y^2 - 6(2y + 15) + 12y + 40 = 0$$

$$4y^2 + 60y + 225 + y^2 - 12y - 90 + 12y + 40 = 0$$

$$y^2 + 12y + 35 = 0$$

$$(y + 5)(y + 7) = 0$$

$$y = -5 \text{ 或 } -7$$

当 $y = -5$ 时, $x = 2 \times (-5) + 15 = 5$ 。

$$-5 = -2 \times 5 + c$$

$$c = 5$$

当 $y = -7$ 时, $x = 2 \times (-7) + 15 = 1$ 。

$$-7 = -2 \times 1 + c$$

$$c = -5$$

∴ $c = \pm 5$ 。 ■

10. 从点 $A(4, y)$ 向圆 $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ 引切线, 则切距的最小值是

解:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 + (y-4)^2 &= 25 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y &= 0 \\ \text{切距} &= \sqrt{4^2 + y^2 + 6 \times 4 - 8y} \\ &= \sqrt{16 + y^2 + 24 - 8y} \\ &= \sqrt{40 + y^2 - 8y} \\ \frac{d}{dy}(\sqrt{40 + y^2 - 8y}) &= 0 \\ \frac{y-4}{\sqrt{40 + y^2 - 8y}} &= 0 \\ y &= 4 \\ \text{切距} &= \sqrt{40 + 4^2 - 8 \times 4} \\ &= \sqrt{40 + 16 - 32} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

11. 如果直线 $y-2 = k(x-1)$ 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的一条切线, 则此切线的方程式是

解:

$$\begin{aligned}y-2 &= k(x-1) \\ y &= kx + 2 - k \\ kx - y + (2-k) &= 0\end{aligned}$$

圆心为 $(0, 0)$, 半径为 1。

$$\begin{aligned}\left| \frac{2-k}{\sqrt{1+k^2}} \right| &= 1 \\ (2-k)^2 &= 1+k^2 \\ 4-4k+k^2 &= 1+k^2 \\ 4k &= 3 \\ k &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

\therefore 切线方程为

$$\begin{aligned}y-2 &= \frac{3}{4}(x-1) \\ 4y-8 &= 3x-3 \\ 3x-4y+5 &= 0\end{aligned}$$

■

12. 两圆 $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 26 = 0$ 与 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ 有几条公切线?

解: 两圆的方程式相减, 得

$$6x - 8y - 30 = 0$$

$$3x - 4y - 15 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}(x - 5)$$

代入第一个圆的方程式得

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}(x - 5)\right)^2 + 2x - 6 \times \frac{3}{4}(x - 5) - 26 = 0$$

$$x^2 + \frac{9}{16}(x^2 - 10x + 25) + 2x - \frac{9}{2}x + \frac{45}{2} - 26 = 0$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{45}{8}x + \frac{225}{16} + 2x - \frac{9}{2}x + \frac{45}{2} - 26 = 0$$

$$16x^2 + 9x^2 - 90x + 225 + 32x - 72x + 360 - 416 = 0$$

$$25x^2 - 130x + 169 = 0$$

$$(5x - 13)^2 = 0$$

$$x = \frac{13}{5}$$

\therefore 两圆只有一个公共点, 所以只有一条公切线。 ■

13. 直线 $7x - 24y + 8 = 0$ 是圆心为 $(2, 3)$ 的圆的切线。求这个圆的半径。

解:

$$\begin{aligned} r &= \left| \frac{7 \times 2 - 24 \times 3 + 8}{\sqrt{7^2 + 24^2}} \right| \\ &= \left| \frac{14 - 72 + 8}{\sqrt{49 + 576}} \right| \\ &= \left| \frac{-50}{\sqrt{625}} \right| \\ &= \left| \frac{-50}{25} \right| \\ &= 2 \end{aligned}$$

14. 求圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ 上两条平行切线之间的距离。

解:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = -4 + 9 + 4$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

\therefore 圆心为 $(3, 2)$, 半径为 3。

\therefore 两条平行切线之间的距离为圆的直径

\therefore 两条平行切线之间的距离为 $2 \times 3 = 6$ 。

15. 若从点 $(a, 1)$ 到圆 $x^2 + y^2 + 5x + 7y + 3 = 0$ 的切线长是 5 , 求 a 的值。

解:

$$x^2 + y^2 + 5x + 7y + 3 = 0$$

$$\text{切距} = 5$$

$$\sqrt{a^2 + 1^2 + 5 \times a + 7 \times 1 + 3} = 5$$

$$\sqrt{a^2 + 5a + 11} = 5$$

$$a^2 + 5a + 11 = 25$$

$$a^2 + 5a - 14 = 0$$

$$(a + 7)(a - 2) = 0$$

$$a = -7 \text{ 或 } a = 2$$