## 5.2 圆的标准方程式

## (选择题)

1. 求以 $(6,7)$ 与 $(4,-3)$ 之连线为直径之圆的方程式。

**解:**

半径为 $\dfrac{\sqrt{(6-4)^2+(7-(-3))^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2+10^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{104}}{2}=\dfrac{2\sqrt{26}}{2}=\sqrt{26}$,

圆心为 $\left(\dfrac{6+4}{2},\dfrac{7+(-3)}{2}\right)=(5,2)$, 所以方程式为 $(x-5)^2+(y-2)^2=26$。 ■

2. 如果圆 $x^2+y^2=4^2$ 上的一点 $P$ 到直线 $4x+3y-60=0$ 的距离是最小, 求 $P$ 点的坐标。

**解:**

$$\begin{aligned}4x+3y-60&=0\\3y&=-4x+60\\y&=-\frac{4}{3}x+20\\m&=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

直线穿过圆心的法线方程为

$$\begin{aligned}y-0&=\frac{3}{4}(x-0)\\y&=\frac{3}{4}x\end{aligned}$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned}x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2&=4^2\\x^2+\frac{9}{16}x^2&=16\\\frac{25}{16}x^2&=16\\x^2&=\frac{256}{25}\\x&=\pm\frac{16}{5}\end{aligned}$$

当 $x=\dfrac{16}{5}$ 时, $y=\dfrac{12}{5}$, 当 $x=-\dfrac{16}{5}$ 时, $y=-\dfrac{12}{5}$。 ■

所以 $P$ 点的坐标为 $\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{12}{5}\right)$。

3. 求由圆 $(x-5)^2+(y-3)^2=9$ 上的一点到直线 $3x+4y=2$ 的最短距离。

**解:**

直线 $3x+4y=2$ 与圆心 $(5,3)$ 的距离为 $\dfrac{|3(5)+4(3)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|15+12-2|}{5}=5$。

圆的半径为 3, 所以最短距离为 $5-3=2$。 ■

4. 点 $(5,3)$ 是圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ 的一直径的端点。求此直径另一端点的坐标。

**解:**

设另一端点为 $(x,y)$, 已知圆心为 $(2,-1)$, 根据中点公式得

$$\begin{aligned}\frac{5+x}{2}&=2\\5+x&=4\\x&=-1\\\frac{3+y}{2}&=-1\\3+y&=-2\\y&=-5\end{aligned}$$

所以另一端点的坐标为 $(-1,-5)$。 ■

## (作答题)

1. 一正方形的四顶点 $A,B,C,D$ 顺序依反时针方向排列。若 $A$ 点的座标为 $(1,3)$, $BD$ 落于直线 $2x+y+5=0$ 上。试求出 $B,C,D$ 三点的坐标。(不准用图解法。)

**解:**

直线 $2x+y+5=0$ 的斜率为 $-2$, 该直线过点 $(1,3)$ 的法线斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以法线方程为

$$\begin{aligned}y-3&=\frac{1}{2}(x-1)\\y&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+3\\y&=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

代入直线方程得

$$\begin{aligned}2x+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}+5&=0\\4x+x+5+10&=0\\x&=-3\\y&=\frac{1}{2}(-3)+\frac{5}{2}=1\end{aligned}$$

所以正方形的中心为 $M(-3,1)$。

设 $B$ 点和 $C$ 点的坐标为 $(x,-2x-5)$。

$$\begin{aligned}\frac{AM}{MB}&=\tan 45^\circ=1\\\frac{\sqrt{(-3-1)^2+(1-3)^2}}{\sqrt{(x+3)^2+(-2x-6)^2}}&=1\\\sqrt{20}&=\sqrt{(x+3)^2+4(x+3)^2}\\20&=5(x+3)^2\\4&=(x+3)^2\\x+3&=\pm 2\\x&=-5,-1\end{aligned}$$

所以 $B$ 及 $D$ 的坐标分别为 $(-5,5)$ 和 $(-1,-3)$。 ■

设 $C$ 点的坐标为 $(x,y)$, 由正方形的性质得

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2}&=-3\\ x&=-7\\ \frac{y+3}{2}&=1\\ y&=-1\end{aligned}$$

所以 $C$ 点的坐标为 $(-7,-1)$。 ■

2. 试求以 $A(2,0)$ 及 $B(6,0)$ 之联线为直径的圆之方程式。

**解:**

圆心为 $\left(\frac{2+6}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(4,0)$, 半径为 $\frac{\sqrt{(6-2)^2+(0-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$。

所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-4)^2+(y-0)^2&=2^2\\ (x-4)^2+y^2&=4\\ x^2-8x+16+y^2&=4\\ x^2-8x+y^2+12&=0\end{aligned}$$

■

若此圆与直线 $y=mx$ 相交于 $P$ 及 $Q$ 两点, 试证 $-\frac{1}{\sqrt{3}}<m<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

**解:**

$$\begin{aligned}x^2-8x+(mx)^2+12&=0\\ x^2-8x+m^2x^2+12&=0\\ (1+m^2)x^2-8x+12&=0\\ d=8^2-4(1+m^2)12&>0\\ 64-48(1+m^2)&>0\\ 48(1+m^2)&<64\\ 1+m^2&<\frac{4}{3}\\ m^2&<\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}<m&<\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

■

又, 试求 $OP\times OQ$ 之值, 其中 $O$ 为原点。

**解:**

设 $m=0$, 则 $P(2,0)$, $Q(6,0)$, 所以 $OP\times OQ=2\times 6=12$。 ■

3. 已知两条直线 $l_1: 2x-3y+2=0$ 和 $l_2: 3x-2y+3=0$ 与圆心为 $M$ 的一圆相交, 且 $l_1$ 与 $l_2$ 被截在圆内的两条线段的长度分别为 26 及 24 , 求圆心 $M$ 的轨迹方程式。

**解:**

设圆心为 $(x,y)$, 半径为 $r$,

圆心到直线 $l_1$ 的距离为 $\dfrac{|2x-3y+2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}$,

圆心到直线 $l_2$ 的距离为 $\dfrac{|3x-2y+3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}$。

利用毕氏定理，得

$$r^2=\left(\frac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}\right)^2+13^2$$
$$r^2=\left(\frac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}\right)^2+12^2$$

两式相等,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}\right)^2+13^2&=\left(\frac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}\right)^2+12^2\\
\frac{(2x-3y+2)^2}{13}+169&=\frac{(3x-2y+3)^2}{13}+144\\
\frac{(2x-3y+2)^2}{13}-\frac{(3x-2y+3)^2}{13}&=-25\\
(2x-3y+2)^2-(3x-2y+3)^2&=-325\\
4x^2+9y^2+4-12xy-12y+8x-(9x^2+4y^2+9-12xy-12y+18x)&=-325\\
4x^2+9y^2+4-12y+8x-9x^2-4y^2-9+12y-18x&=-325\\
-5x^2+5y^2-10x-5&=-325\\
5x^2-5y^2+10x-320&=0\\
x^2-y^2+2x-64&=0
\end{aligned}$$

■

4. 已知 $A$ 点 $(x_1,y_1)$ , $B$ 点 $(x_2,y_2)$, 证明以 $AB$ 为直径的圆方程式为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.
一动圆经过一定点 $P(h,k)$ 与 $y$ 轴相切，求直径 $PR$ 的端点 $R$ 的轨迹方程式。

**解:**

圆心为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{2}$。

所以圆的方程式为

$$\begin{aligned}
\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2&=\left(\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{2}\right)^2\\
x^2-x(x_1+x_2)+\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+y^2-y(y_1+y_2)+\frac{y_1^2+2y_1y_2+y_2^2}{4}&=\frac{x_2^2-2x_1x_2+x_1^2+y_2^2-2y_1y_2+y_1^2}{4}\\
x^2-x(x_1+x_2)+\frac{2x_1x_2}{4}+y^2-y(y_1+y_2)+\frac{2y_1y_2}{4}&=\frac{-2x_1x_2-2y_1y_2}{4}\\
x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2+y^2-y(y_1+y_2)+y_1y_2&=0\\
(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)&=0
\end{aligned}$$

■

设 $R$ 点的坐标为 $(x, y)$, 半径为 $r$，则圆心为 $\left(\frac{h+x}{2}, \frac{k+y}{2}\right)$。

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{h+x}{2}\right| &= r \\
\left(x-\frac{h+x}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k+y}{2}\right)^2 &= r^2 \\
\left(\frac{x-h}{2}\right)^2+\left(\frac{y-k}{2}\right)^2 &= r^2 \\
\frac{(x-h)^2}{4}+\frac{(y-k)^2}{4} &= r^2 \\
(x-h)^2+(y-k)^2 &= 4r^2 \\
x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 &= 4\left(\frac{h+x}{2}\right)^2 \\
x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 &= 4\left(\frac{h^2+2hx+x^2}{4}\right) \\
x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 &= h^2+2hx+x^2 \\
y^2-2ky+k^2 &= 4hx \\
(y-k)^2 &= 4hx
\end{aligned}
$$

■

### 5.3 圆的一般方程式

**(选择题)**

1. 一圆的中心为 $(2, 3)$ 且过点 $(3, -2)$, 求该圆之方程式。

   **解:**

   圆心到点 $(3, -2)$ 的距离为 $\sqrt{(3-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$，即为半径。

   所以方程式为

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2+(y-3)^2 &= 26 \\
x^2-4x+4+y^2-6y+9 &= 26 \\
x^2+y^2-4x-6y-13 &= 0
\end{aligned}
$$

■

2. 求圆 $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ 之半径。

   **解:**

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(-2)^2+(-5)^2-4} \\
&= \sqrt{4+25-4}=5
\end{aligned}
$$

■

3. 求圆 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ 之面积。

   **解:**

$$
\begin{aligned}
&r=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2-9}=\sqrt{9+4-9}=2 \\
&S=\pi r^2=4\pi
\end{aligned}
$$

4. 若 $A$ 及 $B$ 分别为圆 $x^2+y^2-6y=0$ 及 $x^2+y^2-6x=0$ 的圆心, 则直线 $AB$ 之方程式为

**解:**

$$x^2+y^2-6y=0 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=9$$
$$x^2+y^2-6x=0 \Rightarrow (x-3)^2+y^2=9$$

两圆的圆心分别为 $A(0,3)$ 及 $B(3,0)$, 所以直线 $AB$ 的斜率为 $\dfrac{0-3}{3-0}=-1$，方程式为

$$y-3=-1(x-0) \Rightarrow x+y=3$$

■

5. 由点 $A(6,6)$ 至圆 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 之最短距离为

**解:**

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x-4y+4&=0\\ x^2-6x+y^2-4y&=-4\\ (x-3)^2+(y-2)^2&=-4+9+4=9\\ (x-3)^2+(y-2)^2&=3^2 \end{aligned}$$

圆心为 $(3,2)$, 半径为 3。

点 $(6,6)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=5$。

所以最短距离为 $5-3=2$。 ■

6. 求点 $(9,4)$ 到圆 $x^2+y^2-4x-6y-5=0$ 的最短距离。

**解:**

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-6y-5&=0\\ x^2-4x+y^2-6y&=5\\ (x-2)^2+(y-3)^2&=5+4+9=18\\ (x-2)^2+(y-3)^2&=(3\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

圆心为 $(2,3)$, 半径为 $3\sqrt{2}$。

点 $(9,4)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{(9-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$。

所以最短距离为 $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$。 ■

7. 两个圆 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 及 $x^2+y^2-6x=0$ 的关系是

**解:**

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-2y-20&=0\\ x^2-4x+y^2-2y&=20\\ (x-2)^2+(y-1)^2&=20+4+1=25\\ (x-2)^2+(y-1)^2&=5^2 \end{aligned}$$

圆心为 $(2,1)$, 半径为 5。

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-6x&=0\\
x^2-6x+y^2&=0\\
(x-3)^2+y^2&=9\\
(x-3)^2+y^2&=3^2
\end{aligned}
$$

圆心为 $(3,0)$, 半径为 3。

$\because$ 两圆的圆新距离为 $\sqrt{(3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}<5-3=2$。

$\therefore$ 一个圆在另一个圆内。 ■

8. 求圆心为 $(-3,0)$ 且将圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的圆周加以平分的圆的方程式。

**解:**

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+2x-4y+1&=0\\
(x+1)^2+(y-2)^2&=4
\end{aligned}
$$

圆心为 $(-1,2)$, 半径为 2。

所求圆的圆心和 $(-1,-2)$ 所成的线段的斜率为 $\dfrac{0-(-2)}{-3-(-1)}=\dfrac{2}{2}=1$。

其过点 $(-1,2)$ 的法线斜率为 $-1$，所以方程式为

$$
y-2=-1(x+1)\Rightarrow y=-x+1
$$

代入圆的方程得

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2+(-x+1-2)^2&=4\\
x^2+2x-1&=0\\
x&=-1\pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

当 $x=-1+\sqrt{2}$ 时, $y=2-\sqrt{2}$。

所以所求圆的半径为 $\sqrt{(-3-(-1+\sqrt{2}))^2+(0-(2-\sqrt{2}))^2}=2\sqrt{3}$，方程式为

$$
\begin{aligned}
(x+3)^2+y^2&=(2\sqrt{3})^2\\
x^2+6x+9+y^2&=12\\
x^2+6x+y^2-3&=0
\end{aligned}
$$

■

9. 如果圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 $x$ 轴相切于原点, 下列哪项是对的?

**解:**

与 $x$ 轴切于原点，则圆心在 $y$ 轴上，半径等于圆心到原点的距离。

$$
\begin{aligned}
x^2+(y-a)^2&=a^2\\
x^2+y^2-2ay+a^2&=a^2\\
x^2+y^2-2ay&=0
\end{aligned}
$$

所以 $D=0$，$E=-2a$，$F=0$。 ■

10. 已知 $P$ 及 $Q$ 分别是点 $(3,-2)$ 和 $(-1,4)$ 。若 $PQ$ 是一圆的直径, 求此圆的方程式。

**解:**

圆心为 $\left(\dfrac{3-1}{2}, \dfrac{-2+4}{2}\right) = (1,1)$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{(3+1)^2+(-2-4)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{16+36}}{2} = \dfrac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13}$。

所以方程式为

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2+(y-1)^2 &= (\sqrt{13})^2 \\
x^2-2x+1+y^2-2y+1 &= 13 \\
x^2-2x+y^2-2y-11 &= 0
\end{aligned}
$$

■

11. 一圆心在 $x$ 轴上的圆经过 $A(-1,1)$ 及 $B(1,3)$ 两点。求此圆的方程式。

**解:**

设圆心为 $(x,0)$, 则

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)^2+1} &= \sqrt{(x-1)^2+9} \\
(x+1)^2+1 &= (x-1)^2+9 \\
x^2+2x+1+1 &= x^2-2x+1+9 \\
4x &= 8 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

所以圆心为 $(2,0)$, 半径为 $\sqrt{(2+1)^2+1} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$。

所以方程式为

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2+y^2 &= 10 \\
x^2-4x+4+y^2 &= 10 \\
x^2+y^2-4x-6 &= 0
\end{aligned}
$$

■

## (作答题)

1. (a) 求圆 $x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 的圆心与半径。

**解:**

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-4x+8y-5 &= 0 \\
x^2-4x+y^2+8y &= 5 \\
(x-2)^2+(y+4)^2 &= 5+4+16 = 25 \\
(x-2)^2+(y+4)^2 &= 5^2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 圆心为 $(2,-4)$, 半径为 5。 ■

(b) 设 $O$ 为坐标之原点, 若直线 $OC$ 割此圆于 $P, Q$ 两点, 求 $OP$ 及 $OQ$ 之长度。(注: $C$ 为圆心)

**解:**

$$
\begin{aligned}
m_{OC} &= \frac{0-(-4)}{0-2} = \frac{4}{-2} = -2 \\
OC &\Rightarrow y = -2x
\end{aligned}
$$

将 $y=-2x$ 代入圆的方程得

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(-2x+4)^2&=25\\ x^2-4x+4+4x^2-16x+16&=25\\ 5x^2-20x+20&=25\\ 5x^2-20x-5&=0\\ x^2-4x-1&=0\\ x&=\frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2}\\ &=2\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

当 $x=2+\sqrt{5}$ 时, $y=-2(2+\sqrt{5})=-4-2\sqrt{5}$。
当 $x=2-\sqrt{5}$ 时, $y=-4+2\sqrt{5}$。

$$\begin{aligned}OP&=\sqrt{(2+\sqrt{5})^2+(-4-2\sqrt{5})^2}\\ &=\sqrt{4+4\sqrt{5}+5+16+16\sqrt{5}+20}\\ &=\sqrt{45+20\sqrt{5}}\\ &=\sqrt{45+2\sqrt{500}}\\ &=\sqrt{25+20+2\sqrt{25\times 20}}\\ &=5+2\sqrt{5}\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}OQ&=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2+(-4+2\sqrt{5})^2}\\ &=\sqrt{4-4\sqrt{5}+5+16-16\sqrt{5}+20}\\ &=\sqrt{45-20\sqrt{5}}\\ &=\sqrt{45-2\sqrt{500}}\\ &=\sqrt{25+20-2\sqrt{25\times 20}}\\ &=5-2\sqrt{5}\end{aligned}$$

■

(c) 求此圆与 $x$-轴交点之坐标。

**解:**

当 $y=0$ 时,

$$\begin{aligned}(x-2)^2+4^2&=25\\ (x-2)^2&=9\\ x&=2\pm 3\\ x&=5 \text{ 或} x=-1\end{aligned}$$

$\therefore$ 交点为 $(5,0)$ 及 $(-1,0)$。 ■

2. 一圆切 $x$ 轴于 $(4,0)$, 截 $y$ 轴于 $(0,6)$ 。试求此圆之方程式。

**解:** 设圆心为 $(h,k)$, 半径为 $r$。

$$\begin{aligned}(h-4)^2+k^2&=r^2\\ h^2+(k-6)^2&=r^2\end{aligned}$$

比较两式得

$$\begin{aligned}(h-4)^2+k^2&=h^2+(k-6)^2\\ h^2-8h+16+k^2&=h^2+k^2-12k+36\\ -8h+16&=-12k+36\\ 12k-8h&=20\\ 3k-2h&=5\end{aligned}$$

$\because$ 圆切 $x$ 轴于 $(4,0)$, 则 $h=4$。

代入得 $3k-8=5$, $k=\dfrac{13}{3}$。

$\therefore$ 圆心为 $\left(4,\dfrac{13}{3}\right)$, 半径为 $\sqrt{(4-4)^2+\left(0-\dfrac{13}{3}\right)^2}=\dfrac{13}{3}$。

方程式为

$$\begin{aligned}(x-4)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2&=\left(\frac{13}{3}\right)^2\\ x^2-8x+16+y^2-\frac{26}{3}y+\frac{169}{9}&=\frac{169}{9}\\ x^2+y^2-8x-\frac{26}{3}y+16&=0\\ 3x^2+3y^2-24x-26y+48&=0\end{aligned}$$

■

3. 求圆心在 $x$ 轴上, 且经过二已知圆 $x^2+y^2-2x-14y+25=0, x^2+y^2+2x-2y-3=0$ 的交点的圆之方程式。

**解:**

$$\begin{aligned}x^2+y^2-2x-14y+25&=0\\ x^2+y^2&=2x+14y-25\\ x^2+y^2+2x-2y-3&=0\\ x^2+y^2&=-2x+2y+3\end{aligned}$$

比较两式得

$$\begin{aligned}2x+14y-25&=-2x+2y+3\\ 4x+12y&=28\\ x+3y&=7\\ x&=7-3y\end{aligned}$$

代入已知圆的方程得

$$\begin{aligned}(7-3y)^2+y^2&=2(7-3y)+14y-25\\49-42y+9y^2+y^2&=14-6y+14y-25\\10y^2-50y+60&=0\\y^2-5y+6&=0\\(y-2)(y-3)&=0\\y&=2\text{ 或}y=3\end{aligned}$$

当 $y=2$ 时, $x=7-3\times2=1$; 当 $y=3$ 时, $x=7-3\times3=-2$。

$\therefore$ 两圆的交点为 $(1,2)$ 及 $(-2,3)$。

$\because$ 圆心在 $x$ 轴上，所以圆心为 $(h,0)$。

$$\begin{aligned}\sqrt{(h-1)^2+2^2}&=\sqrt{(h+2)^2+3^2}\\h^2-2h+1+4&=h^2+4h+4+9\\-6h+5&=13\\h&=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$\therefore$ 圆心为 $\left(-\frac{8}{3},0\right)$，半径为 $\sqrt{\left(-\frac{4}{3}-1\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{25}{9}+4}=\frac{\sqrt{85}}{3}$。

方程式为

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+y^2&=\left(\frac{\sqrt{85}}{3}\right)^2\\x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2&=\frac{85}{9}\\9x^2+24x+16+9y^2&=85\\9x^2+9y^2+24x-69&=0\\3x^2+3y^2+8x-23&=0\end{aligned}$$

■

4. 求通过二圆 $x^2+y^2-2y-7=0, x^2+y^2+4x-5=0$ 的交点且圆心落于直线 $x+2y+3=0$ 上的圆之方程式。

**解:**

两圆的方程式相减得

$$4x+2y+2=0\Rightarrow 2x+y+1=0\Rightarrow y=-2x-1$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned}x^2+(-2x-1)^2+4x-5&=0\\x^2+4x^2+4x+1+4x-5&=0\\5x^2+8x-4&=0\\(5x-2)(x+2)&=0\\x&=\frac{2}{5}\text{ 或}x=-2\end{aligned}$$

当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时, $y=-2\times\dfrac{2}{5}-1=-\dfrac{9}{5}$。
当 $x=-2$ 时, $y=-2\times(-2)-1=3$。
$\therefore$ 两圆的交点为 $\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{9}{5}\right)$ 及 $(-2,3)$。

$$x+2y+3=0\Rightarrow x=-2y-3$$

设圆心为 $(-2y-3,y)$，半径为 $r$。

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(-2y-3-\frac{2}{5}\right)^2+\left(y+\frac{9}{5}\right)^2}&=\sqrt{(-2y-3+2)^2+(y-3)^2}\\
\left(-2y-\frac{17}{5}\right)^2+\left(y+\frac{9}{5}\right)^2&=(-2y-1)^2+(y-3)^2\\
4y^2+\frac{68}{5}y+\frac{289}{25}+y^2+\frac{18}{5}y+\frac{81}{25}&=4y^2+4y+1+y^2+9-6y\\
\frac{86}{5}y+\frac{74}{5}&=-2y+10\\
86y+74&=-10y+50\\
96y&=-24\\
y&=-\frac{1}{4}\\
x&=-2\times-\frac{1}{4}-3=-\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$\therefore$ 圆心为 $\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$，半径为 $\sqrt{\left(-\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{173}}{4}$。
方程式为

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2&=\left(\frac{\sqrt{173}}{4}\right)^2\\
x^2+5x+\frac{25}{4}+y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{16}&=\frac{109}{16}\\
16x^2+90x+100+16y^2+8y+1&=173\\
16x^2+16y^2+80x+8y-72&=0\\
2x^2+2y^2+10x+y-9&=0
\end{aligned}$$

■

5. $C$ 为一圆, 其一弦之中点, 长度及方星式分别为 $(1,1),8$ 及 $3x-4y+1=0$ 。若 $C$ 通过点 $(8,2)$, 求 $C$ 之方程式。

**解:**

设弦与圆的交点为 $\left(x,\dfrac{3x+1}{4}\right)$，则

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+\left(\frac{3x+1}{4}-1\right)^2}&=4\\
(x-1)^2+\left(\frac{3x-3}{4}\right)^2&=16\\
x^2-2x+1+\frac{9x^2-18x+9}{16}&=16
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
16x^2-32x+16+9x^2-18x+9&=256\\
25x^2-50x+25&=256\\
25(x-1)^2&=256\\
x-1&=\pm\frac{16}{5}\\
x&=1\pm\frac{16}{5}\\
x&=\frac{21}{5}\text{ 或 }x=-\frac{11}{5}
\end{aligned}
$$

当 $x=\frac{21}{5}$ 时, $y=\dfrac{3\times\frac{21}{5}+1}{4}=\frac{17}{5}$。

当 $x=-\frac{11}{5}$ 时, $y=\dfrac{3\times\left(-\frac{11}{5}\right)+1}{4}=-\frac{7}{5}$。

所以已知 $C$ 过点 $(8,2)$、$\left(\frac{21}{5},\frac{17}{5}\right)$ 及 $\left(-\frac{11}{5},-\frac{7}{5}\right)$。

设圆的方程式为 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$，代入三点得

$$
\begin{aligned}
68+16g+4f+c&=0\\
16g+4f+c&=-68\ \cdots(1)\\
\frac{146}{5}+\frac{42g}{5}+\frac{34f}{5}+c&=0\\
42g+34f+5c&=-146\ \cdots(2)\\
\frac{34}{5}-\frac{22g}{5}-\frac{14f}{5}+c&=0\\
22g+14f-5c&=34\ \cdots(3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)+(2)&\Rightarrow 64g+48f=-112\\
&\Rightarrow 4g+3f=-7\ \cdots(4)\\
(1)\times 5&\Rightarrow 80g+20f+5c=-340\ \cdots(5)\\
(3)+(5)&\Rightarrow 102g+34f=-306\\
&\Rightarrow 3g+f=-9\ \cdots(6)\\
(6)\times 3&\Rightarrow 9g+3f=-27\ \cdots(7)\\
(4)-(7)&\Rightarrow -5g=20\\
&\Rightarrow g=-4\\
\text{代入}(6)&\Rightarrow 3\times -4+f=-9\\
&\Rightarrow f=3\\
\text{代入}(1)&\Rightarrow 16\times -4+4\times 3+c=-68\\
&\Rightarrow c=-16
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 圆的方程式为 $x^2+y^2-8x+6y-16=0$。 ■

6. 求通过点 $(1,-1)$ 和两圆 $x^2+y^2-4x-2y+2=0, x^2+y^2+3x-1=0$ 的交点的圆的方程式。

**解:**

题目有误 ■

7. 试求通过两圆 $x^2+y^2-2x+5y-6=0$, $2x^2+2y^2+3x-y+1=0$ 的交点且圆心在直线 $x+y=6$ 上的圆的方程式。

**解:**

题目有误 ■

8. 一圆的圆心为 $A(8,6)$, 并与另一圆 $5x^2+5y^2-32x-24y+75=0$ 内切, 求此圆的方程式。

**解:**

$$5x^2+5y^2-32x-24y+75=0$$
$$x^2+y^2-6.4x-4.8y+15=0$$

内切圆圆心为 $(3.2,2.4)$，半径为 $\sqrt{(-3.2)^2+(-2.4)^2-15}=\sqrt{10.24+5.76-15}=\sqrt{1}=1$。

内切圆圆心至圆心的距离为 $\sqrt{(8-3.2)^2+(6-2.4)^2}=\sqrt{4.8^2+3.6^2}=6$。

圆的半径为其圆心至内切圆的最长距离，即 $6+1=7$。

$\therefore$ 圆的方程式为 $(x-8)^2+(y-6)^2=49$。 ■

9. 两对直线对 $AB$ 与 $AD, CB$ 与 $CD$ 的方程式依序是

$$2x^2-5xy+2y^2-3x-3y-9=0$$
$$2x^2-5xy+2y^2+3x+3y-9=0$$

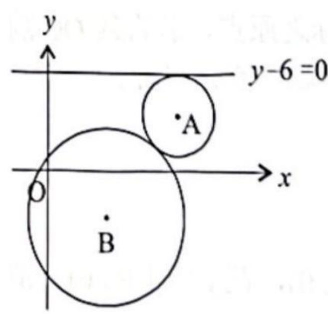
   (a) 求它们的交点 $A, B, C$ 与 $D$ 的坐标。

   **解:**

   (b) 试证四边形 ABCD 是一个菱形。

   (c) 求此菱形的面积。

10. 如图所示, 以 $A$ 为圆心之圆与直线 $y-6=0$ 及以 $B$ 为圆心之圆 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 外切。求点 $A$ 的轨迹方程式。




11. 已知 $A, B$ 两点的坐标分别是 $(-1,0)$ 及 $(0,2)$。若 $P$ 是圆 $x^2+y^2-2x=0$ 上的任意点, 求 $\triangle PAB$ 的面积的最大可能值。

## 5.4 圆的切线

## (选择题)

1. 求自 $x^2+y^2=50$, 在点 $(1,-7)$ 的切线方程式。

**解:**

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=50\\ 2x+2y\frac{dy}{dx}&=0\\ \frac{dy}{dx}&=-\frac{x}{y}\end{aligned}$$

当 $x=1,y=-7$ 时, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{-7}=\dfrac{1}{7}$。

所以切线的斜率为 $\dfrac{1}{7}$，方程式为

$$\begin{aligned} y+7&=\frac{1}{7}(x-1)\\ 7y+49&=x-1\\ x-7y&=50\end{aligned}$$

■

2. 求自点 $(3,3)$ 至圆 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 的切线的长。

**解:**

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+4y+1=0&\\ \text{切距}&=\sqrt{3^2+3^2+(-2)\times 3+4\times 3+1}\\ &=\sqrt{9+9-6+12+1}\\ &=\sqrt{25}=5\end{aligned}$$

■

3. 求自点 $(3,4)$ 至圆 $x^2+4x-4y+4=0$ 的切线长。

**解:**

$$\begin{aligned} x^2+4x-4y+4=0&\\ \text{切距}&=\sqrt{3^2+4^2+4\times 3-4\times 4+4}\\ &=\sqrt{9+16+12-16+4}\\ &=\sqrt{25}=5\end{aligned}$$

■

4. 若直线 $2x+3y+3\sqrt{13}=0$ 与圆 $x^2+y^2=k$ 相切, 则 $k$ 之值为

**解:**

$$\begin{aligned} 2x+3y+3\sqrt{13}=0&\\ 3y&=-2x-3\sqrt{13}\\ y&=-\frac{2}{3}x-\sqrt{13}\end{aligned}$$

$$m_{\text{切线}} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= k \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ -\frac{2}{3} &= -\frac{x}{y} \\ y &= \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

代入切线方程得

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x &= -\frac{2}{3}x - \sqrt{13} \\ \frac{13}{6}x &= -\sqrt{13} \\ x &= -\frac{6}{\sqrt{13}} \\ y &= -\frac{9}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

$\therefore k = \left(-\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(-\frac{9}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{36}{13} + \frac{81}{13} = \frac{117}{13} = 9$。 ■

5. 从点 $A(3, -4)$ 至圆 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ 所引切线, 其长等于

**解:**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \\ \text{切距} &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 6 \times 3 - 8 \times (-4)} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 18 + 32} \\ &= \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

■

6. 若直线 $3x - 4y = k$ 是圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的切线, 试求 $k$ 之值。

**解:**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= -1 + 4 + 1 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

圆心为 $(-1, 2)$, 半径为 2。

$$\begin{aligned} \left|\frac{3 \times (-1) - 4 \times 2 - k}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| &= 2 \\ (11 + k)^2 &= 100 \\ 11 + k &= \pm 10 \\ k &= -21 \text{ 或 } -1 \end{aligned}$$

7. 求从点 $(1,-2)$ 引圆 $(x-10)^2+(y-8)^2=15$ 的切线的长度。

**解:**

$$\begin{aligned}(x-10)^2+(y-8)^2&=15\\x^2-20x+100+y^2-16y+64&=15\\x^2+y^2-20x-16y+149&=0\\\text{切距}&=\sqrt{1^2+(-2)^2-20\times1-16\times(-2)+149}\\&=\sqrt{1+4-20+32+149}\\&=\sqrt{166}\end{aligned}$$

8. 求圆 $x^2+y^2=4$ 的切线的方程式, 它与圆的直径 $y=\frac{3}{4}x$ 平行。

**解:** $\because$ 切线与直径平行，所以切线的斜率为 $\dfrac{3}{4}$。

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=4\\2x+2y\frac{dy}{dx}&=0\\\frac{dy}{dx}&=-\frac{x}{y}\\-\frac{x}{y}&=\frac{3}{4}\\y&=-\frac{4}{3}x\end{aligned}$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned}x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2&=4\\x^2+\frac{16}{9}x^2&=4\\\frac{25}{9}x^2&=4\\x^2&=\frac{36}{25}\\x&=\pm\frac{6}{5}\end{aligned}$$

当 $x=\dfrac{6}{5}$ 时, $y=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{6}{5}=-\dfrac{8}{5}$。
切线方程为

$$\begin{aligned}y+\frac{8}{5}&=\frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}\right)\\y+\frac{8}{5}&=\frac{3}{4}x-\frac{9}{10}\\y&=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

当 $x=-\frac{6}{5}$ 时, $y=\frac{8}{5}$。
切线方程为

$$
\begin{aligned}
y-\frac{8}{5} &= \frac{3}{4}\left(x+\frac{6}{5}\right) \\
y-\frac{8}{5} &= \frac{3}{4}x+\frac{9}{10} \\
y &= \frac{3}{4}x+\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 切线方程为 $y=\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$。 ■

9. 若直线 $y=-2x+c$ 切圆 $x^2+y^2-6x+12y+40=0$, 则 $c$ 的值是

**解:**

$$
\begin{aligned}
y &= -2x+c \\
m_{\text{切线}} &= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-6x+12y+40 &= 0 \\
2x+2y\frac{dy}{dx}-6+12\frac{dy}{dx} &= 0 \\
x+y\frac{dy}{dx}-3+6\frac{dy}{dx} &= 0 \\
(y+6)\frac{dy}{dx} &= 3-x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{3-x}{y+6} \\
-2 &= \frac{3-x}{y+6} \\
x &= 2y+15
\end{aligned}
$$

代入圆的方程得

$$
\begin{aligned}
(2y+15)^2+y^2-6(2y+15)+12y+40 &= 0 \\
4y^2+60y+225+y^2-12y-90+12y+40 &= 0 \\
y^2+12y+35 &= 0 \\
(y+5)(y+7) &= 0 \\
y &= -5 \text{ 或 } -7
\end{aligned}
$$

当 $y=-5$ 时, $x=2\times(-5)+15=5$。

$$
\begin{aligned}
-5 &= -2\times 5+c \\
c &= 5
\end{aligned}
$$

当 $y=-7$ 时, $x=2\times(-7)+15=1$。

$$
\begin{aligned}
-7 &= -2\times 1+c \\
c &= -5
\end{aligned}
$$

$\therefore c=\pm 5$。 ■

10. 从点 $A(4,y)$ 向圆 $(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$ 引切线, 则切距的最小值是

**解:**

$$\begin{aligned}
(x+3)^2+(y-4)^2 &= 25 \\
x^2+6x+9+y^2-8y+16 &= 25 \\
x^2+y^2+6x-8y &= 0 \\
\text{切距} &= \sqrt{4^2+y^2+6\times 4-8y} \\
&= \sqrt{16+y^2+24-8y} \\
&= \sqrt{40+y^2-8y} \\
\frac{d}{dy}(\sqrt{40+y^2-8y}) &= 0 \\
\frac{y-4}{\sqrt{40+y^2-8y}} &= 0 \\
y &= 4 \\
\text{切距} &= \sqrt{40+4^2-8\times 4} \\
&= \sqrt{40+16-32} \\
&= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}
\end{aligned}$$

11. 如果直线 $y-2=k(x-1)$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 的一条切线, 则此切线的方程式是

**解:**

$$\begin{aligned}
y-2 &= k(x-1) \\
y &= kx+2-k \\
kx-y+(2-k) &= 0
\end{aligned}$$

圆心为 $(0,0)$, 半径为 1。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2-k}{\sqrt{1+k^2}}\right| &= 1 \\
(2-k)^2 &= 1+k^2 \\
4-4k+k^2 &= 1+k^2 \\
4k &= 3 \\
k &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}
y-2 &= \frac{3}{4}(x-1) \\
4y-8 &= 3x-3 \\
3x-4y+5 &= 0
\end{aligned}$$

12. 两圆 $x^2+y^2+2x-6y-26=0$ 与 $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 有几条公切线?

**解:** 两圆的方程式相减，得

$$
\begin{aligned}
6x-8y-30&=0\\
3x-4y-15&=0\\
y&=\frac{3}{4}(x-5)
\end{aligned}
$$

代入第一个圆的方程式得

$$
\begin{aligned}
x^2+\left(\frac{3}{4}(x-5)\right)^2+2x-6\times\frac{3}{4}(x-5)-26&=0\\
x^2+\frac{9}{16}(x^2-10x+25)+2x-\frac{9}{2}x+\frac{45}{2}-26&=0\\
x^2+\frac{9}{16}x^2-\frac{45}{8}x+\frac{225}{16}+2x-\frac{9}{2}x+\frac{45}{2}-26&=0\\
16x^2+9x^2-90x+225+32x-72x+360-416&=0\\
25x^2-130x+169&=0\\
(5x-13)^2&=0\\
x&=\frac{13}{5}
\end{aligned}
$$

$\because$ 两圆只有一个公共点，所以只有一条公切线。 ■

13. 直线 $7x-24y+8=0$ 是圆心为 $(2,3)$ 的圆的切线。求这个圆的半径。

**解:**

$$
\begin{aligned}
r&=\left|\frac{7\times2-24\times3+8}{\sqrt{7^2+24^2}}\right|\\
&=\left|\frac{14-72+8}{\sqrt{49+576}}\right|\\
&=\left|\frac{-50}{\sqrt{625}}\right|\\
&=\left|\frac{-50}{25}\right|\\
&=2
\end{aligned}
$$

14. 求圆 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 上两条平行切线之间的距离。

**解:**

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-6x-4y+4&=0\\
(x-3)^2+(y-2)^2&=-4+9+4\\
(x-3)^2+(y-2)^2&=9
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 圆心为 $(3,2)$, 半径为 3。

$\because$ 两条平行切线之间的距离为圆的直径

$\therefore$ 两条平行切线之间的距离为 $2\times3=6$。

15. 若从点 $(a,1)$ 到圆 $x^2+y^2+5x+7y+3=0$ 的切线长是 5 , 求 $a$ 的值。

**解:**

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+5x+7y+3&=0\\
\text{切距}&=5\\
\sqrt{a^2+1^2+5\times a+7\times 1+3}&=5\\
\sqrt{a^2+5a+11}&=5\\
a^2+5a+11&=25\\
a^2+5a-14&=0\\
(a+7)(a-2)&=0\\
a&=-7 \text{ 或 } a=2
\end{aligned}
$$