

1.1 行列式

(选择题)

1. 若 $\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ x & x \end{vmatrix} = 6$, 则

解:

$$\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ x & x \end{vmatrix} = 2x^2 - (-x) \cdot x = 6$$

$$2x^2 + x^2 = 6$$

$$3x^2 = 6$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

■

2. 若 $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 求 a 之值。

解:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$a(3-4) - 2 \cdot 1 + 4 = 0$$

$$-a - 2 + 4 = 0$$

$$a = 2$$

■

3. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 之值。

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 7$$

$$= 5 - 2 - 21$$

$$= -18$$

■

4. 求 $\begin{vmatrix} 8 & -2 & -4 \\ 7 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 之值。

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 8 & -2 & -4 \\ 7 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} &= 8 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 8 \cdot 8 + 2 \cdot 12 - 4 \cdot 22 \\ &= 64 + 24 - 88 \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. 求行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ 之值。

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} &= -6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -6 \cdot 2 + 9 \cdot 2 \\ &= -12 + 18 \\ &= 6 \end{aligned}$$

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值。

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \\ &= 21 - 10 + 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(作答题)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 之值。

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 24 - 2 \cdot 5 + 2 \cdot -11 \\ &= 24 - 10 - 22 \\ &= -8 \end{aligned}$$

■

1.2 行列式的性质

(选择题)

1. 若 α, β 及 γ 为一个三角形的内角, 试求 $\begin{vmatrix} \tan \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \tan \beta & 1 \\ 1 & 1 & \tan \gamma \end{vmatrix}$ 之值。

2. 求 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 的值。

3. 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 。

4. 若 $\begin{vmatrix} a-1 & -3 & -4 \\ a & 1 & -17 \\ a-2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 则 $a = ?$

5. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = ?$

6. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2+4 & x^2+9 & x^2+16 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的值。

(作答题)

1. 解方程式
$$\begin{vmatrix} x & 2a & a \\ a & x+a & a \\ 2a & 2a & x-a \end{vmatrix} = 0 \text{ 。}$$

解:

2. 求行列式
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
 之值。

3. 试证
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3) \text{ 。}$$

4. 解
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & x & 2 & -2 \\ -3 & -2 & x & 3 \\ -5 & 2 & -4 & 2x \end{vmatrix} = 0 \text{ 。}$$

5. 解方程式
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \text{ 。}$$

6. 证明
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ bc & ca & ab \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \text{ 。}$$