5.2 轨迹方程式

(选择题)

1. 已知一曲线为一动点的轨迹, 此动点与两定点 $O(0,0)$, 及 $A(0,4)$ 的距离的比为 $1:3$ 。求此曲线的方程式。

   解:

   设动点为 (x,y),

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}} &= \frac{1}{3} \\
\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-8y+16}} &= \frac{1}{3} \\
3\sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{x^2+y^2-8y+16} \\
9(x^2+y^2) &= x^2+y^2-8y+16 \\
8x^2+8y^2+8y-16 &= 0 \\
x^2+y^2+y-2 &= 0
\end{aligned}$$

■

2. 一动点 $P(x,y)$ 分别到定点 $F(-2,0)$ 和定线 $x=2$ 的距离相同。求 P 的轨迹方程。**解:**

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x-2}{\sqrt{1^2+0^2}}\right| &= \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2} \\
(x-2)^2 &= x^2+4x+4+y^2 \\
x^2-4x+4 &= x^2+4x+4+y^2 \\
y^2 &= -8x
\end{aligned}$$

■

(作答题)

1. 一动点 P 分别到一定点 $(3,0)$ 及圆心为 $(-3,0)$ 半径为 5 单位的一圆的圆周等距。求此动点 P 的轨迹方程式。

   解:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-3)^2+y^2} &= \sqrt{(x+3)^2+y^2}-5 \\
(x-3)^2 &= (x+3)^2-10\sqrt{(x+3)^2+y^2+9}+25 \\
x^2-6x+9 &= x^2+6x+9-10\sqrt{x^2+6x+y^2+9}+25 \\
12x+25 &= 10\sqrt{x^2+6x+y^2+9} \\
144x^2+600x+625 &= 100x^2+600x+100y^2+900 \\
44x^2-100y^2-275 &= 0
\end{aligned}$$

■

2. P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的一点。如果 M 是 $Q(0,4)$ 与 P 的连线的中点, 求 M 的轨迹方程式。

解:

设 P 点的坐标为 (x_1,y_1), 则 $M(x,y)$ 点的坐标为 $\left(\dfrac{x_1}{2},\dfrac{y_1+4}{2}\right)$。

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{2} \\ x_1 &= 2x \\ y &= \frac{y_1+4}{2} \\ y_1 &= 2y-4 \end{aligned}$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2 &= 4 \\ (2x)^2+(2y-4)^2 &= 4 \\ 4x^2+4y^2-16y+16 &= 4 \\ x^2+y^2-4y+4 &= 1 \\ x^2+y^2-4y+3 &= 0 \\ x^2+(y-2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

■

3. 一条直线过定点 $P(4,6)$ 且交 x 轴及 y 轴于 A 及 B 两点。如果 M 是 AB 的中点, 求 M 的轨迹方程式。

解:

设直线交 x 轴于 $A(a,0)$, 交 y 轴于 $B(0,b)$, 则直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

将 $P(4,6)$ 代入直线方程得 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b}=1$。

由于 M 是 AB 的中点, 所以 $M\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$。

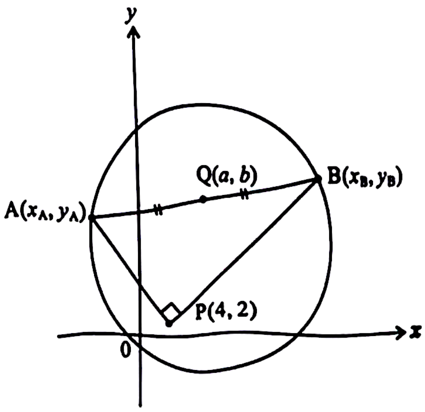
设 $M(x,y)$, 则 $x=\dfrac{a}{2} \implies a=2x$, $y=\dfrac{b}{2} \implies b=2y$。
代入直线方程得

$$\begin{aligned} \frac{4}{2x}+\frac{6}{2y} &= 1 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y} &= 1 \\ 2y+3x &= xy \\ xy-3x-2y &= 0 \end{aligned}$$

■

4. 如下图所示, $P(4,2)$ 是圆 $x^2+y^2-24x-28y-36=0$ 内的一点, $A(x_A,y_A)$ 及 $B(x_B,y_B)$ 是圆上的两个点使得 $\angle APB=90^\circ$ 。若 $Q(a,b)$ 是弦 AB 的中点, 证明 $x_A^2+y_A^2+x_B^2+y_B^2=48a+56b+72$ 及 $x_Ax_B+y_Ay_B=8a+4b-20$ 。

据此, 证明 Q 的轨迹的方程式为 $x^2+y^2-16x-16y-8=0$ 。



解:

$\because Q$ 是弦 AB 的中点, $\therefore Q(a,b)$ 的坐标为 $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$。

$\therefore a=\dfrac{x_A+x_B}{2}, b=\dfrac{y_A+y_B}{2}$。

$\because A,B$ 在圆上,

$$x_A^2+y_A^2-24x_A-28y_A-36=0 \ \cdots(1)$$
$$x_B^2+y_B^2-24x_B-28y_B-36=0 \ \cdots(2)$$

$$\begin{aligned}(1)+(2) &\Rightarrow x_A^2+x_B^2+y_A^2+y_B^2-24(x_A+x_B)-28(y_A+y_B)-72=0\\ &\Rightarrow x_A^2+x_B^2+y_A^2+y_B^2=48a+56b+72 \ \cdots(3)\end{aligned}$$

■

$\because \angle APB=90^\circ$,

$$\begin{aligned}\frac{y_B-2}{x_B-4}\cdot\frac{y_A-2}{x_A-4}&=-1\\ (y_B-2)(y_A-2)+(x_B-4)(x_A-4)&=0\\ y_Ay_B-2(y_A+y_B)+4+x_Ax_B-4(x_A+x_B)+16&=0\\ x_A^2+x_B^2+y_A^2+y_B^2&=4(x_A+x_B)+2(y_A+y_B)-20\\ x_A^2+x_B^2+y_A^2+y_B^2&=8a+4b-20 \ \cdots(4)\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}(3)+2\times(4) &\Rightarrow x_A^2+2x_Ax_B+x_B^2+y_A^2+2y_Ay_B+y_B^2=64a+64b+32\\ &\Rightarrow (x_A+x_B)^2+(y_A+y_B)^2=64a+64b+32\\ &\Rightarrow 4a^2+4b^2=64a+64b+32\\ &\Rightarrow a^2+b^2-16a-16b-8=0\end{aligned}$$

$\therefore Q$ 的轨迹的方程式为 $x^2+y^2-16x-16y-8=0$。 ■

5.3 圆的标准方程式

(选择题)

1. 求以 $(6,7)$ 与 $(4,-3)$ 之连线为直径之圆的方程式。

   解:

   半径为 $\dfrac{\sqrt{(6-4)^2+(7-(-3))^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2+10^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{104}}{2}=\dfrac{2\sqrt{26}}{2}=\sqrt{26}$,

   圆心为 $\left(\dfrac{6+4}{2},\dfrac{7+(-3)}{2}\right)=(5,2)$, 所以方程式为 $(x-5)^2+(y-2)^2=26$。 ■

2. 如果圆 $x^2+y^2=4^2$ 上的一点 P 到直线 $4x+3y-60=0$ 的距离是最小, 求 P 点的坐标。

   解:

$$
\begin{aligned}
4x+3y-60&=0\\
3y&=-4x+60\\
y&=-\frac{4}{3}x+20\\
m&=-\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

   直线穿过圆心的法线方程为

$$
\begin{aligned}
y-0&=\frac{3}{4}(x-0)\\
y&=\frac{3}{4}x
\end{aligned}
$$

   代入圆的方程得

$$
\begin{aligned}
x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2&=4^2\\
x^2+\frac{9}{16}x^2&=16\\
\frac{25}{16}x^2&=16\\
x^2&=\frac{256}{25}\\
x&=\pm\frac{16}{5}
\end{aligned}
$$

   当 $x=\dfrac{16}{5}$ 时, $y=\dfrac{12}{5}$, 当 $x=-\dfrac{16}{5}$ 时, $y=-\dfrac{12}{5}$。 ■

   所以 P 点的坐标为 $\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{12}{5}\right)$。

3. 求由圆 $(x-5)^2+(y-3)^2=9$ 上的一点到直线 $3x+4y=2$ 的最短距离。

   解:

   直线 $3x+4y=2$ 与圆心 $(5,3)$ 的距离为 $\dfrac{|3(5)+4(3)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|15+12-2|}{5}=5$。

   圆的半径为 3, 所以最短距离为 $5-3=2$。 ■

4. 点 $(5,3)$ 是圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ 的一直径的端点。求此直径另一端点的坐标。

解:

设另一端点为 (x,y), 已知圆心为 $(2,-1)$, 根据中点公式得

$$\begin{aligned}\frac{5+x}{2}&=2\\5+x&=4\\x&=-1\\\frac{3+y}{2}&=-1\\3+y&=-2\\y&=-5\end{aligned}$$

所以另一端点的坐标为 $(-1,-5)$。 ■

(作答题)

1. 一正方形的四顶点 A,B,C,D 顺序依反时针方向排列。若 A 点的座标为 $(1,3)$, BD 落于直线 $2x+y+5=0$ 上。试求出 B,C,D 三点的坐标。(不准用图解法。)

解:

直线 $2x+y+5=0$ 的斜率为 -2, 该直线过点 $(1,3)$ 的法线斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以法线方程为

$$\begin{aligned}y-3&=\frac{1}{2}(x-1)\\y&=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

代入直线方程得

$$\begin{aligned}2x+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}+5&=0\\4x+x+5+10&=0\\x&=-3\\y&=\frac{1}{2}(-3)+\frac{5}{2}=1\end{aligned}$$

所以正方形的中心为 $M(-3,1)$。

设 B 点和 C 点的坐标为 $(x,-2x-5)$。

$$\begin{aligned}\frac{AM}{MB}&=\tan 45^\circ=1\\\frac{\sqrt{(-3-1)^2+(1-3)^2}}{\sqrt{(x+3)^2+(-2x-6)^2}}&=1\\\sqrt{20}&=\sqrt{(x+3)^2+4(x+3)^2}\\20&=5(x+3)^2\\4&=(x+3)^2\\x+3&=\pm 2\\x&=-5,-1\end{aligned}$$

所以 B 及 D 的坐标分别为 $(-5,5)$ 和 $(-1,-3)$。 ■

设 C 点的坐标为 (x, y), 由正方形的性质得

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2} &= -3 \\ x &= -7 \\ \frac{y+3}{2} &= 1 \\ y &= -1\end{aligned}$$

所以 C 点的坐标为 $(-7, -1)$。 ■

2. 试求以 $A(2, 0)$ 及 $B(6, 0)$ 之联线为直径的圆之方程式。

   若此圆与直线 $y = mx$ 相交于 P 及 Q 两点, 试证 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

   又, 试求 $OP \times OQ$ 之值, 其中 O 为原点。

   解:

   圆心为 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 0)$, 半径为 $\frac{\sqrt{(6-2)^2+(0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$。

   所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (y-0)^2 &= 2^2 \\ (x-4)^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 &= 4 \\ x^2 - 8x + y^2 + 12 &= 0\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + (mx)^2 + 12 &= 0 \\ x^2 - 8x + m^2x^2 + 12 &= 0 \\ (1+m^2)x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ d = 8^2 - 4(1+m^2)12 &> 0 \\ 64 - 48(1+m^2) &> 0 \\ 48(1+m^2) &< 64 \\ 1 + m^2 &< \frac{4}{3} \\ m^2 &< \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < m &< \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

■

设 $m = 0$, 则 $P(2, 0)$, $Q(6, 0)$, 所以 $OP \times OQ = 2 \times 6 = 12$。 ■

3. 已知两条直线 $l_1: 2x-3y+2=0$ 和 $l_2: 3x-2y+3=0$ 与圆心为 M 的一圆相交, 且 l_1 与 l_2 被截在圆内的两条线段的长度分别为 26 及 24 , 求圆心 M 的轨迹方程式。

解:

设圆心为 (x,y), 半径为 r,

圆心到直线 l_1 的距离为 $\dfrac{|2x-3y+2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}$,

圆心到直线 l_2 的距离为 $\dfrac{|3x-2y+3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}$。

利用毕氏定理，得

$$r^2=\left(\frac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}\right)^2+13^2$$
$$r^2=\left(\frac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}\right)^2+12^2$$

两式相等,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}\right)^2+13^2&=\left(\frac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}\right)^2+12^2\\
\frac{(2x-3y+2)^2}{13}+169&=\frac{(3x-2y+3)^2}{13}+144\\
\frac{(2x-3y+2)^2}{13}-\frac{(3x-2y+3)^2}{13}&=-25\\
(2x-3y+2)^2-(3x-2y+3)^2&=-325\\
4x^2+9y^2+4-12xy-12y+8x-(9x^2+4y^2+9-12xy-12y+18x)&=-325\\
4x^2+9y^2+4-12y+8x-9x^2-4y^2-9+12y-18x&=-325\\
-5x^2+5y^2-10x-5&=-325\\
5x^2-5y^2+10x-320&=0\\
x^2-y^2+2x-64&=0
\end{aligned}$$

■

4. 已知 A 点 (x_1,y_1) , B 点 (x_2,y_2), 证明以 AB 为直径的圆方程式为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.
一动圆经过一定点 $P(h,k)$ 与 y 轴相切，求直径 PR 的端点 R 的轨迹方程式。

解:

圆心为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{2}$。

所以圆的方程式为

$$\begin{aligned}
\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2&=\left(\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{2}\right)^2\\
x^2-x(x_1+x_2)+\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+y^2-y(y_1+y_2)+\frac{y_1^2+2y_1y_2+y_2^2}{4}&=\frac{x_2^2-2x_1x_2+x_1^2+y_2^2-2y_1y_2+y_1^2}{4}\\
x^2-x(x_1+x_2)+\frac{2x_1x_2}{4}+y^2-y(y_1+y_2)+\frac{2y_1y_2}{4}&=\frac{-2x_1x_2-2y_1y_2}{4}\\
x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2+y^2-y(y_1+y_2)+y_1y_2&=0\\
(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)&=0
\end{aligned}$$

■

设 R 点的坐标为 (x, y), 半径为 r，则圆心为 $\left(\frac{h+x}{2}, \frac{k+y}{2}\right)$。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h+x}{2}\right| &= r \\
\left(x - \frac{h+x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{k+y}{2}\right)^2 &= r^2 \\
\left(\frac{x-h}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{2}\right)^2 &= r^2 \\
\frac{(x-h)^2}{4} + \frac{(y-k)^2}{4} &= r^2 \\
(x-h)^2 + (y-k)^2 &= 4r^2 \\
x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= 4\left(\frac{h+x}{2}\right)^2 \\
x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= 4\left(\frac{h^2+2hx+x^2}{4}\right) \\
x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= h^2 + 2hx + x^2 \\
y^2 - 2ky + k^2 &= 4hx \\
(y-k)^2 &= 4hx
\end{aligned}$$

■

5.4 圆的一般方程式

(选择题)

1. 一圆的中心为 $(2, 3)$ 且过点 $(3, -2)$, 求该圆之方程式。

   解:

   圆心到点 $(3, -2)$ 的距离为 $\sqrt{(3-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$，即为半径。

   所以方程式为

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 + (y-3)^2 &= 26 \\
x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 &= 26 \\
x^2 + y^2 - 4x - 6y - 13 &= 0
\end{aligned}$$

■

2. 求圆 $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ 之半径。

   解:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 - 4} = \sqrt{4 + 25 - 4} = 5$$

■

3. 求圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 之面积。

   解:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 - 9} = \sqrt{9 + 4 - 9} = 2 \implies S = \pi r^2 = 4\pi$$

■

4. 若 A 及 B 分别为圆 $x^2+y^2-6y=0$ 及 $x^2+y^2-6x=0$ 的圆心, 则直线 AB 之方程式为

解:

$$x^2+y^2-6y=0 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=9$$
$$x^2+y^2-6x=0 \Rightarrow (x-3)^2+y^2=9$$

两圆的圆心分别为 $A(0,3)$ 及 $B(3,0)$, 所以直线 AB 的斜率为 $\dfrac{0-3}{3-0}=-1$，方程式为

$$y-3=-1(x-0) \Rightarrow x+y=3$$

■

5. 由点 $A(6,6)$ 至圆 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 之最短距离为

解:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x-4y+4&=0 \\ x^2-6x+y^2-4y&=-4 \\ (x-3)^2+(y-2)^2&=-4+9+4=9 \\ (x-3)^2+(y-2)^2&=3^2 \end{aligned}$$

圆心为 $(3,2)$, 半径为 3。

点 $(6,6)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=5$。

所以最短距离为 $5-3=2$。 ■

6. 求点 $(9,4)$ 到圆 $x^2+y^2-4x-6y-5=0$ 的最短距离。

解:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-6y-5&=0 \\ x^2-4x+y^2-6y&=5 \\ (x-2)^2+(y-3)^2&=5+4+9=18 \\ (x-2)^2+(y-3)^2&=(3\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

圆心为 $(2,3)$, 半径为 $3\sqrt{2}$。

点 $(9,4)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{(9-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$。

所以最短距离为 $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$。 ■

7. 两个圆 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 及 $x^2+y^2-6x=0$ 的关系是

解:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-2y-20&=0 \\ x^2-4x+y^2-2y&=20 \\ (x-2)^2+(y-1)^2&=20+4+1=25 \\ (x-2)^2+(y-1)^2&=5^2 \end{aligned}$$

圆心为 $(2,1)$, 半径为 5。

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-6x&=0\\
x^2-6x+y^2&=0\\
(x-3)^2+y^2&=9\\
(x-3)^2+y^2&=3^2
\end{aligned}
$$

圆心为 $(3,0)$, 半径为 3。

$\because$ 两圆的圆心距离为 $\sqrt{(3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}<5-3=2$。

$\therefore$ 一个圆在另一个圆内。 ■

8. 求圆心为 $(-3,0)$ 且将圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的圆周加以平分的圆的方程式。

解:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+2x-4y+1&=0\\
(x+1)^2+(y-2)^2&=4
\end{aligned}
$$

圆心为 $(-1,2)$, 半径为 2。

所求圆的圆心和 $(-1,-2)$ 所成的线段的斜率为 $\dfrac{0-(-2)}{-3-(-1)}=\dfrac{2}{2}=1$。

其过点 $(-1,2)$ 的法线斜率为 -1，所以方程式为

$$y-2=-1(x+1)\Rightarrow y=-x+1$$

代入圆的方程得

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2+(-x+1-2)^2&=4\\
x^2+2x-1&=0\\
x&=-1\pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

当 $x=-1+\sqrt{2}$ 时, $y=2-\sqrt{2}$。

所以所求圆的半径为 $\sqrt{(-3-(-1+\sqrt{2}))^2+(0-(2-\sqrt{2}))^2}=2\sqrt{3}$，方程式为

$$
\begin{aligned}
(x+3)^2+y^2&=(2\sqrt{3})^2\\
x^2+6x+9+y^2&=12\\
x^2+6x+y^2-3&=0
\end{aligned}
$$

■

9. 如果圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切于原点, 下列哪项是对的?

解:

与 x 轴切于原点，则圆心在 y 轴上，半径等于圆心到原点的距离。

$$
\begin{aligned}
x^2+(y-a)^2&=a^2\\
x^2+y^2-2ay+a^2&=a^2\\
x^2+y^2-2ay&=0
\end{aligned}
$$

所以 $D=0$，$E=-2a$，$F=0$。 ■

10. 已知 P 及 Q 分别是点 $(3,-2)$ 和 $(-1,4)$ 。若 PQ 是一圆的直径, 求此圆的方程式。

解:

圆心为 $\left(\frac{3-1}{2},\frac{-2+4}{2}\right)=(1,1)$, 半径为 $\frac{\sqrt{(3+1)^2+(-2-4)^2}}{2}=\frac{\sqrt{16+36}}{2}=\frac{\sqrt{52}}{2}=\sqrt{13}$。

所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-1)^2&=(\sqrt{13})^2\\x^2-2x+1+y^2-2y+1&=13\\x^2-2x+y^2-2y-11&=0\end{aligned}$$

■

11. 一圆心在 x 轴上的圆经过 $A(-1,1)$ 及 $B(1,3)$ 两点。求此圆的方程式。

解:

设圆心为 $(x,0)$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+1)^2+1}&=\sqrt{(x-1)^2+9}\\(x+1)^2+1&=(x-1)^2+9\\x^2+2x+1+1&=x^2-2x+1+9\\4x&=8\\x&=2\end{aligned}$$

所以圆心为 $(2,0)$, 半径为 $\sqrt{(2+1)^2+1}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$。

所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-2)^2+y^2&=10\\x^2-4x+4+y^2&=10\\x^2+y^2-4x-6&=0\end{aligned}$$

■

(作答题)

1. (a) 求圆 $x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 的圆心与半径。

解:

$$\begin{aligned}x^2+y^2-4x+8y-5&=0\\x^2-4x+y^2+8y&=5\\(x-2)^2+(y+4)^2&=5+4+16=25\\(x-2)^2+(y+4)^2&=5^2\end{aligned}$$

$\therefore$ 圆心为 $(2,-4)$, 半径为 5。 ■

(b) 设 O 为坐标之原点, 若直线 OC 割此圆于 P,Q 两点, 求 OP 及 OQ 之长度。(注: C 为圆心)

解:

$$\begin{aligned}m_{OC}&=\frac{0-(-4)}{0-2}=\frac{4}{-2}=-2\\OC&\Rightarrow y=-2x\end{aligned}$$

将 $y=-2x$ 代入圆的方程得

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(-2x+4)^2&=25\\x^2-4x+4+4x^2-16x+16&=25\\5x^2-20x+20&=25\\5x^2-20x-5&=0\\x^2-4x-1&=0\\x&=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}\\&=2\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

当 $x=2+\sqrt{5}$ 时, $y=-2(2+\sqrt{5})=-4-2\sqrt{5}$。
当 $x=2-\sqrt{5}$ 时, $y=-4+2\sqrt{5}$。

$$\begin{aligned}OP&=\sqrt{(2+\sqrt{5})^2+(-4-2\sqrt{5})^2}\\&=\sqrt{4+4\sqrt{5}+5+16+16\sqrt{5}+20}\\&=\sqrt{45+20\sqrt{5}}\\&=\sqrt{45+2\sqrt{500}}\\&=\sqrt{25+20+2\sqrt{25\times20}}\\&=5+2\sqrt{5}\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}OQ&=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2+(-4+2\sqrt{5})^2}\\&=\sqrt{4-4\sqrt{5}+5+16-16\sqrt{5}+20}\\&=\sqrt{45-20\sqrt{5}}\\&=\sqrt{45-2\sqrt{500}}\\&=\sqrt{25+20-2\sqrt{25\times20}}\\&=5-2\sqrt{5}\end{aligned}$$

■

(c) 求此圆与 x-轴交点之坐标。

解:

当 $y=0$ 时,

$$\begin{aligned}(x-2)^2+4^2&=25\\(x-2)^2&=9\\x&=2\pm3\\x&=5\text{ 或}x=-1\end{aligned}$$

$\therefore$ 交点为 $(5,0)$ 及 $(-1,0)$。 ■

2. 一圆切 x 轴于 $(4,0)$, 截 y 轴于 $(0,6)$ 。试求此圆之方程式。

解: 设圆心为 (h,k), 半径为 r。

$$(h-4)^2+k^2=r^2$$
$$h^2+(k-6)^2=r^2$$

比较两式得

$$\begin{aligned}(h-4)^2+k^2&=h^2+(k-6)^2\\ h^2-8h+16+k^2&=h^2+k^2-12k+36\\ -8h+16&=-12k+36\\ 12k-8h&=20\\ 3k-2h&=5\end{aligned}$$

$\because$ 圆切 x 轴于 $(4,0)$, 则 $h=4$。

代入得 $3k-8=5$，$k=\dfrac{13}{3}$。

$\therefore$ 圆心为 $\left(4,\dfrac{13}{3}\right)$, 半径为 $\sqrt{(4-4)^2+\left(0-\dfrac{13}{3}\right)^2}=\dfrac{13}{3}$。

方程式为

$$\begin{aligned}(x-4)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2&=\left(\frac{13}{3}\right)^2\\ x^2-8x+16+y^2-\frac{26}{3}y+\frac{169}{9}&=\frac{169}{9}\\ x^2+y^2-8x-\frac{26}{3}y+16&=0\\ 3x^2+3y^2-24x-26y+48&=0\end{aligned}$$

■

3. 求圆心在 x 轴上, 且经过二已知圆 $x^2+y^2-2x-14y+25=0, x^2+y^2+2x-2y-3=0$ 的交点的圆之方程式。

解:

$$\begin{aligned}x^2+y^2-2x-14y+25&=0\\ x^2+y^2&=2x+14y-25\\ x^2+y^2+2x-2y-3&=0\\ x^2+y^2&=-2x+2y+3\end{aligned}$$

比较两式得

$$\begin{aligned}2x+14y-25&=-2x+2y+3\\ 4x+12y&=28\\ x+3y&=7\\ x&=7-3y\end{aligned}$$

代入已知圆的方程得

$$
\begin{aligned}
(7-3y)^2+y^2 &= 2(7-3y)+14y-25 \\
49-42y+9y^2+y^2 &= 14-6y+14y-25 \\
10y^2-50y+60 &= 0 \\
y^2-5y+6 &= 0 \\
(y-2)(y-3) &= 0 \\
y &= 2\ \text{或} y=3
\end{aligned}
$$

当 $y=2$ 时, $x=7-3\times 2=1$; 当 $y=3$ 时, $x=7-3\times 3=-2$。

$\therefore$ 两圆的交点为 $(1,2)$ 及 $(-2,3)$。

$\because$ 圆心在 x 轴上，所以圆心为 $(h,0)$。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(h-1)^2+2^2} &= \sqrt{(h+2)^2+3^2} \\
h^2-2h+1+4 &= h^2+4h+4+9 \\
-6h+5 &= 13 \\
h &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 圆心为 $\left(-\frac{8}{3},0\right)$，半径为 $\sqrt{\left(-\frac{4}{3}-1\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{25}{9}+4}=\frac{\sqrt{85}}{3}$。

方程式为

$$
\begin{aligned}
\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+y^2 &= \left(\frac{\sqrt{85}}{3}\right)^2 \\
x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2 &= \frac{85}{9} \\
9x^2+24x+16+9y^2 &= 85 \\
9x^2+9y^2+24x-69 &= 0 \\
3x^2+3y^2+8x-23 &= 0
\end{aligned}
$$

■

4. 求通过二圆 $x^2+y^2-2y-7=0, x^2+y^2+4x-5=0$ 的交点且圆心落于直线 $x+2y+3=0$ 上的圆之方程式。

解:

两圆的方程式相减得

$$4x+2y+2=0 \Rightarrow 2x+y+1=0 \Rightarrow y=-2x-1$$

代入圆的方程得

$$
\begin{aligned}
x^2+(-2x-1)^2+4x-5 &= 0 \\
x^2+4x^2+4x+1+4x-5 &= 0 \\
5x^2+8x-4 &= 0 \\
(5x-2)(x+2) &= 0 \\
x &= \frac{2}{5}\ \text{或} x=-2
\end{aligned}
$$

当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时, $y=-2\times\dfrac{2}{5}-1=-\dfrac{9}{5}$。
当 $x=-2$ 时, $y=-2\times(-2)-1=3$。
$\therefore$ 两圆的交点为 $\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{9}{5}\right)$ 及 $(-2,3)$。

$$x+2y+3=0\Rightarrow x=-2y-3$$

设圆心为 $(-2y-3,y)$，半径为 r。

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(-2y-3-\frac{2}{5}\right)^2+\left(y+\frac{9}{5}\right)^2}&=\sqrt{(-2y-3+2)^2+(y-3)^2}\\
\left(-2y-\frac{17}{5}\right)^2+\left(y+\frac{9}{5}\right)^2&=(-2y-1)^2+(y-3)^2\\
4y^2+\frac{68}{5}y+\frac{289}{25}+y^2+\frac{18}{5}y+\frac{81}{25}&=4y^2+4y+1+y^2+9-6y\\
\frac{86}{5}y+\frac{74}{5}&=-2y+10\\
86y+74&=-10y+50\\
96y&=-24\\
y&=-\frac{1}{4}\\
x&=-2\times-\frac{1}{4}-3=-\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$\therefore$ 圆心为 $\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$，半径为 $\sqrt{\left(-\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{173}}{4}$。
方程式为

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2&=\left(\frac{\sqrt{173}}{4}\right)^2\\
x^2+5x+\frac{25}{4}+y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{16}&=\frac{109}{16}\\
16x^2+90x+100+16y^2+8y+1&=173\\
16x^2+16y^2+80x+8y-72&=0\\
2x^2+2y^2+10x+y-9&=0
\end{aligned}$$

■

5. C 为一圆, 其一弦之中点, 长度及方星式分别为 $(1,1),8$ 及 $3x-4y+1=0$ 。若 C 通过点 $(8,2)$, 求 C 之方程式。

解:

设弦与圆的交点为 $\left(x,\dfrac{3x+1}{4}\right)$，则

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+\left(\frac{3x+1}{4}-1\right)^2}&=4\\
(x-1)^2+\left(\frac{3x-3}{4}\right)^2&=16\\
x^2-2x+1+\frac{9x^2-18x+9}{16}&=16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16x^2-32x+16+9x^2-18x+9&=256\\25x^2-50x+25&=256\\25(x-1)^2&=256\\x-1&=\pm\frac{16}{5}\\x&=1\pm\frac{16}{5}\\x&=\frac{21}{5}\text{ 或 }x=-\frac{11}{5}\end{aligned}$$

当 $x=\frac{21}{5}$ 时, $y=\dfrac{3\times\frac{21}{5}+1}{4}=\frac{17}{5}$。

当 $x=-\frac{11}{5}$ 时, $y=\dfrac{3\times\left(-\frac{11}{5}\right)+1}{4}=-\frac{7}{5}$。

所以已知 C 过点 $(8,2)$、$\left(\frac{21}{5},\frac{17}{5}\right)$ 及 $\left(-\frac{11}{5},-\frac{7}{5}\right)$。

设圆的方程式为 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$，代入三点得

$$\begin{aligned}68+16g+4f+c&=0\\16g+4f+c&=-68\ \cdots(1)\\\frac{146}{5}+\frac{42g}{5}+\frac{34f}{5}+c&=0\\42g+34f+5c&=-146\ \cdots(2)\\\frac{34}{5}-\frac{22g}{5}-\frac{14f}{5}+c&=0\\22g+14f-5c&=34\ \cdots(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)+(2)&\Rightarrow 64g+48f=-112\\&\Rightarrow 4g+3f=-7\ \cdots(4)\\(1)\times5&\Rightarrow 80g+20f+5c=-340\ \cdots(5)\\(3)+(5)&\Rightarrow 102g+34f=-306\\&\Rightarrow 3g+f=-9\ \cdots(6)\\(6)\times3&\Rightarrow 9g+3f=-27\ \cdots(7)\\(4)-(7)&\Rightarrow -5g=20\\&\Rightarrow g=-4\\\text{代入}(6)&\Rightarrow 3\times-4+f=-9\\&\Rightarrow f=3\\\text{代入}(1)&\Rightarrow 16\times-4+4\times3+c=-68\\&\Rightarrow c=-16\end{aligned}$$

$\therefore$ 圆的方程式为 $x^2+y^2-8x+6y-16=0$。 ■

6. 求通过点 $(1,-1)$ 和两圆 $x^2+y^2-4x-2y+2=0, x^2+y^2+3x-1=0$ 的交点的圆的方程式。

解:

题目有误 ■

7. 试求通过两圆 $x^2+y^2-2x+5y-6=0$, $2x^2+2y^2+3x-y+1=0$ 的交点且圆心在直线 $x+y=6$ 上的圆的方程式。

解:

题目有误 ■

8. 一圆的圆心为 $A(8,6)$, 并与另一圆 $5x^2+5y^2-32x-24y+75=0$ 内切, 求此圆的方程式。

解:

$$\begin{aligned}5x^2+5y^2-32x-24y+75&=0\\x^2+y^2-6.4x-4.8y+15&=0\end{aligned}$$

内切圆圆心为 $(3.2, 2.4)$，半径为 $\sqrt{(-3.2)^2+(-2.4)^2-15}=\sqrt{10.24+5.76-15}=\sqrt{1}=1$。

内切圆圆心至圆心的距离为 $\sqrt{(8-3.2)^2+(6-2.4)^2}=\sqrt{4.8^2+3.6^2}=6$。

圆的半径为其圆心至内切圆的最长距离，即 $6+1=7$。

$\therefore$ 圆的方程式为 $(x-8)^2+(y-6)^2=49$。 ■

9. 两对直线对 AB 与 AD, CB 与 CD 的方程式依序是

$$\begin{aligned}2x^2-5xy+2y^2-3x-3y-9&=0\\2x^2-5xy+2y^2+3x+3y-9&=0\end{aligned}$$

(a) 求它们的交点 A, B, C 与 D 的坐标。

解:

两个方程式相减，得:

$$6x+6y=0 \Rightarrow x=-y$$

代入方程式，得:

$$\begin{aligned}2x^2-5xy+2y^2-3x-3y-9&=0\\2x^2+5x^2+2x^2-3x+3x-9&=0\\9x^2-9&=0\\x^2&=1\\x&=\pm1\end{aligned}$$

当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=-1$ 时，$y=1$。

$$\begin{aligned}2x^2-5xy+2y^2+3x+3y-9&=0\\(2x-y)(x-2y)+3(x+y)-9&=0\\(2x-y)(x-2y)+3[(2x-y)-(x-2y)]-3(3)&=0\\(2x-y+3)(x-2y-3)&=0\\2x-y+3&=0 \cdots (1)\\x-2y-3&=0 \cdots (2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(2)\times 2 &\Rightarrow 2x-4y-6=0\ \cdots\ (3)\\
(1)-(3) &\Rightarrow 3y+9=0\\
&\Rightarrow y=-3\\
\text{代入}(1) &\Rightarrow 2x+6=0\\
&\Rightarrow x=-3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^2-5xy+2y^2-3x-3y-9&=0\\
(2x-y)(x-2y)-3(x+y)-9&=0\\
(2x-y)(x-2y)+3[(x-2y)-(2x-y)]-3(3)&=0\\
(2x-y-3)(x-2y+3)&=0\\
2x-y-3=0\ \cdots\ (4)\\
x-2y+3=0\ \cdots\ (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\times 2 &\Rightarrow 2x-4y+6=0\ \cdots\ (6)\\
(4)-(6) &\Rightarrow 3y-9=0\\
&\Rightarrow y=3\\
\text{代入}(4) &\Rightarrow 2x-6=0\\
&\Rightarrow x=3
\end{aligned}
$$

$\therefore A(1,-1), B(3,3), C(-1,1), D(-3,-3)$。 ■

(b) 试证四边形 $ABCD$ 是一个菱形。

解:

$$
\begin{aligned}
m_{AC} &= \frac{1-(-1)}{-1-1} = -1\\
m_{BD} &= \frac{-3-3}{-3-3} = 1
\end{aligned}
$$

$\because m_{AC}\cdot m_{BD}=-1$，$\therefore AC\perp BD$。

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是一个菱形。 ■

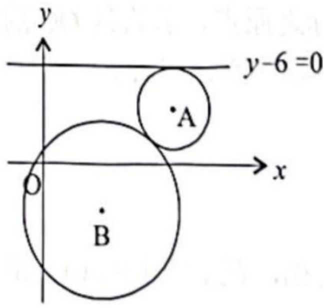
(c) 求此菱形的面积。

解:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 & 1\\ -1 & 3 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\left|3+3+3+3+3+3+3+3\right|\\
&= 12\ \text{平方单位}
\end{aligned}
$$

■

10. 如图所示, 以 A 为圆心之圆与直线 $y-6=0$ 及以 B 为圆心之圆 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 外切。求点 A 的轨迹方程式。



解:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-6x+8y&=0\\
x^2-6x+y^2+8y&=0\\
x^2-6x+9+y^2+8y+16&=25\\
(x-3)^2+(y+4)^2&=5^2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 圆心为 $(3,-4)$，半径为 5。

设圆 A 的半径为 r，圆心为 (x,y)，则圆 A 与直线 $y-6=0$ 的切点为 $(x,6)$。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(6-y)^2+(x-x)^2}&=r\\
r&=6-y\ \cdots\ (1)\\
\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}&=r+5\\
(x-3)^2+(y+4)^2&=(r+5)^2\\
(x-3)^2+(y+4)^2&=r^2+10r+25
\end{aligned}
$$

代入 (1) 得

$$
\begin{aligned}
(x-3)^2+(y+4)^2&=(6-y)^2+10(6-y)+25\\
x^2-6x+9+y^2+8y+16&=36-12y+y^2+60-10y+25\\
x^2-6x+30y-96&=0
\end{aligned}
$$

■

11. 已知 A,B 两点的坐标分别是 $(-1,0)$ 及 $(0,2)$。若 P 是圆 $x^2+y^2-2x=0$ 上的任意点, 求 $\triangle PAB$ 的面积的最大可能值。

解:

当 P 点距离 AB 最远时，$\triangle PAB$ 的面积最大。

$$
\begin{aligned}
m_{AB}&=\frac{2-0}{0-(-1)}=2\\
m_{AP}&=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-2x&=0\\
x^2-2x+y^2&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 1 \\
(x-1)^2 + y^2 &= 1
\end{aligned}
$$

圆心为 $(1, 0)$，半径为 1。

AP 的方程式为

$$
\begin{aligned}
y - 0 &= -\frac{1}{2}(x-1) \\
2y &= -x + 1 \\
x &= 1 - 2y
\end{aligned}
$$

代入圆的方程式得

$$
\begin{aligned}
(-2y)^2 + y^2 &= 1 \\
5y^2 &= 1 \\
y &= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

当 $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 时，$x = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$

当 $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ 时，$x = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\because$ 点 P 离 AB 最远，

$\therefore P\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$。

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1+\frac{2}{\sqrt{5}} & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left|-2 - 2 - \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|-4 - \frac{5}{\sqrt{5}}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|-4 - \sqrt{5}\right| \\
&= \frac{4 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

■

5.5 圆的切线

(选择题)

1. 求自 $x^2+y^2=50$, 在点 $(1,-7)$ 的切线方程式。

解:

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=50 \\ 2x+2y\frac{dy}{dx}&=0 \\ \frac{dy}{dx}&=-\frac{x}{y} \end{aligned}$$

当 $x=1, y=-7$ 时, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{-7}=\dfrac{1}{7}$。

所以切线的斜率为 $\dfrac{1}{7}$，方程式为

$$\begin{aligned} y+7&=\frac{1}{7}(x-1) \\ 7y+49&=x-1 \\ x-7y&=50 \end{aligned}$$

■

2. 求自点 $(3,3)$ 至圆 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 的切线的长。

解:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+4y+1=0& \\ \text{切距}&=\sqrt{3^2+3^2+(-2)\times 3+4\times 3+1} \\ &=\sqrt{9+9-6+12+1} \\ &=\sqrt{25}=5 \end{aligned}$$

■

3. 求自点 $(3,4)$ 至圆 $x^2+4x-4y+4=0$ 的切线长。

解:

$$\begin{aligned} x^2+4x-4y+4=0& \\ \text{切距}&=\sqrt{3^2+4^2+4\times 3-4\times 4+4} \\ &=\sqrt{9+16+12-16+4} \\ &=\sqrt{25}=5 \end{aligned}$$

■

4. 若直线 $2x+3y+3\sqrt{13}=0$ 与圆 $x^2+y^2=k$ 相切, 则 k 之值为

解:

$$\begin{aligned} 2x+3y+3\sqrt{13}=0& \\ 3y&=-2x-3\sqrt{13} \\ y&=-\frac{2}{3}x-\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$m_{\text{切线}} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= k \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ -\frac{2}{3} &= -\frac{x}{y} \\ y &= \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

代入切线方程得

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x &= -\frac{2}{3}x - \sqrt{13} \\ \frac{13}{6}x &= -\sqrt{13} \\ x &= -\frac{6}{\sqrt{13}} \\ y &= -\frac{9}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

$\therefore k = \left(-\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(-\frac{9}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{36}{13} + \frac{81}{13} = \frac{117}{13} = 9$。 ■

5. 从点 $A(3, -4)$ 至圆 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ 所引切线, 其长等于

解:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \\ \text{切距} &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 6 \times 3 - 8 \times (-4)} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 18 + 32} \\ &= \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

■

6. 若直线 $3x - 4y = k$ 是圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的切线, 试求 k 之值。

解:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= -1 + 4 + 1 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

圆心为 $(-1, 2)$, 半径为 2。

$$\begin{aligned} \left|\frac{3 \times (-1) - 4 \times 2 - k}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = 2 \\ (11 + k)^2 &= 100 \\ 11 + k &= \pm 10 \\ k &= -21 \text{ 或 } -1 \end{aligned}$$

7. 求从点 $(1,-2)$ 引圆 $(x-10)^2+(y-8)^2=15$ 的切线的长度。

解:

$$\begin{aligned}
(x-10)^2+(y-8)^2 &= 15 \\
x^2-20x+100+y^2-16y+64 &= 15 \\
x^2+y^2-20x-16y+149 &= 0 \\
\text{切距} &= \sqrt{1^2+(-2)^2-20\times 1-16\times(-2)+149} \\
&= \sqrt{1+4-20+32+149} = \sqrt{166}
\end{aligned}$$

■

8. 求圆 $x^2+y^2=4$ 的切线的方程式, 它与圆的直径 $y=\frac{3}{4}x$ 平行。

解:

$\because$ 切线与直径平行，所以切线的斜率为 $\dfrac{3}{4}$。

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 4 \\
2x+2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\
y &= -\frac{4}{3}x
\end{aligned}$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned}
x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2 &= 4 \\
x^2+\frac{16}{9}x^2 &= 4 \\
\frac{25}{9}x^2 &= 4 \\
x &= \pm\frac{6}{5}
\end{aligned}$$

当 $x=\dfrac{6}{5}$ 时, $y=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{6}{5}=-\dfrac{8}{5}$，切线方程为

$$\begin{aligned}
y+\frac{8}{5} &= \frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}\right) \\
y+\frac{8}{5} &= \frac{3}{4}x-\frac{9}{10} \\
y &= \frac{3}{4}x-\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

当 $x=-\dfrac{6}{5}$ 时, $y=\dfrac{8}{5}$，切线方程为

$$\begin{aligned}
y-\frac{8}{5} &= \frac{3}{4}\left(x+\frac{6}{5}\right) \\
y-\frac{8}{5} &= \frac{3}{4}x+\frac{9}{10} \\
y &= \frac{3}{4}x+\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$\therefore$ 切线方程为 $y=\dfrac{3}{4}x\pm\dfrac{5}{2}$。 ■

9. 若直线 $y=-2x+c$ 切圆 $x^2+y^2-6x+12y+40=0$, 则 c 的值是

解:

$$\begin{aligned} y &= -2x+c \\ m_{\text{切线}} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x+12y+40 &= 0 \\ 2x+2y\frac{dy}{dx}-6+12\frac{dy}{dx} &= 0 \\ x+y\frac{dy}{dx}-3+6\frac{dy}{dx} &= 0 \\ (y+6)\frac{dy}{dx} &= 3-x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3-x}{y+6} \\ -2 &= \frac{3-x}{y+6} \\ x &= 2y+15 \end{aligned}$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned} (2y+15)^2+y^2-6(2y+15)+12y+40 &= 0 \\ 4y^2+60y+225+y^2-12y-90+12y+40 &= 0 \\ y^2+12y+35 &= 0 \\ (y+5)(y+7) &= 0 \\ y &= -5 \text{ 或 } -7 \end{aligned}$$

当 $y=-5$ 时, $x=2\times(-5)+15=5$。

$$\begin{aligned} -5 &= -2\times 5+c \\ c &= 5 \end{aligned}$$

当 $y=-7$ 时, $x=2\times(-7)+15=1$。

$$\begin{aligned} -7 &= -2\times 1+c \\ c &= -5 \end{aligned}$$

$\therefore c=\pm 5$。 ■

10. 从点 $A(4,y)$ 向圆 $(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$ 引切线, 则切距的最小值是

解:

$$\begin{aligned} (x+3)^2+(y-4)^2 &= 25 \\ x^2+6x+9+y^2-8y+16 &= 25 \\ x^2+y^2+6x-8y &= 0 \\ \text{切距} &= \sqrt{4^2+y^2+6\times 4-8y} \\ &= \sqrt{16+y^2+24-8y} \\ &= \sqrt{40+y^2-8y} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}(\sqrt{40+y^2-8y}) &= 0 \\
\frac{y-4}{\sqrt{40+y^2-8y}} &= 0 \\
y &= 4 \\
\text{切距} &= \sqrt{40+4^2-8\times 4} \\
&= \sqrt{40+16-32} \\
&= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

11. 如果直线 $y-2=k(x-1)$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 的一条切线, 则此切线的方程式是

解:

$$
\begin{aligned}
y-2 &= k(x-1) \\
y &= kx+2-k \\
kx-y+(2-k) &= 0
\end{aligned}
$$

圆心为 $(0,0)$, 半径为 1。

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{2-k}{\sqrt{1+k^2}}\right| &= 1 \\
(2-k)^2 &= 1+k^2 \\
4-4k+k^2 &= 1+k^2 \\
4k &= 3 \\
k &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 切线方程为

$$
\begin{aligned}
y-2 &= \frac{3}{4}(x-1) \\
4y-8 &= 3x-3 \\
3x-4y+5 &= 0
\end{aligned}
$$

■

12. 两圆 $x^2+y^2+2x-6y-26=0$ 与 $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 有几条公切线?

解: 两圆的方程式相减，得

$$
\begin{aligned}
6x-8y-30 &= 0 \\
3x-4y-15 &= 0 \\
y &= \frac{3}{4}(x-5)
\end{aligned}
$$

代入第一个圆的方程式得

$$
\begin{aligned}
x^2+\left(\frac{3}{4}(x-5)\right)^2+2x-6\times\frac{3}{4}(x-5)-26 &= 0 \\
x^2+\frac{9}{16}(x^2-10x+25)+2x-\frac{9}{2}x+\frac{45}{2}-26 &= 0 \\
x^2+\frac{9}{16}x^2-\frac{45}{8}x+\frac{225}{16}+2x-\frac{9}{2}x+\frac{45}{2}-26 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
16x^2+9x^2-90x+225+32x-72x+360-416&=0\\
25x^2-130x+169&=0\\
(5x-13)^2&=0\\
x&=\frac{13}{5}
\end{aligned}
$$

$\because$ 两圆只有一个公共点，所以只有一条公切线。 ■

13. 直线 $7x-24y+8=0$ 是圆心为 $(2,3)$ 的圆的切线。求这个圆的半径。

解:

$$
\begin{aligned}
r&=\left|\frac{7\times 2-24\times 3+8}{\sqrt{7^2+24^2}}\right|\\
&=\left|\frac{14-72+8}{\sqrt{49+576}}\right|\\
&=\left|\frac{-50}{\sqrt{625}}\right|\\
&=\left|\frac{-50}{25}\right|\\
&=2
\end{aligned}
$$

■

14. 求圆 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 上两条平行切线之间的距离。

解:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-6x-4y+4&=0\\
(x-3)^2+(y-2)^2&=-4+9+4\\
(x-3)^2+(y-2)^2&=9
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 圆心为 $(3,2)$, 半径为 3。

$\because$ 两条平行切线之间的距离为圆的直径

$\therefore$ 两条平行切线之间的距离为 $2\times 3=6$。 ■

15. 若从点 $(a,1)$ 到圆 $x^2+y^2+5x+7y+3=0$ 的切线长是 5 , 求 a 的值。

解:

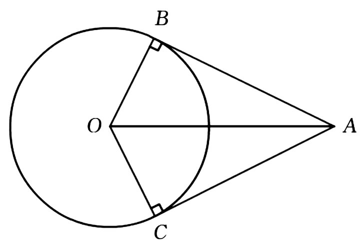
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+5x+7y+3&=0\\
\text{切距}&=5\\
\sqrt{a^2+1^2+5\times a+7\times 1+3}&=5\\
\sqrt{a^2+5a+11}&=5\\
a^2+5a+11&=25\\
a^2+5a-14&=0\\
(a+7)(a-2)&=0\\
a&=-7\text{ 或 }a=2
\end{aligned}
$$

■

(作答题)

1. 直线 AB, AC 分别切圆 O 于 B, C 两点。求证 $AB = AC$。

   解:



   $\because \angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$, $BO = CO = r$，OA 为公共边。

   $\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO$。(Hypotenuse-Leg Similarity)

   $\therefore AB = AC$。 ■

2. 求切于 x 轴及直线 $3x - 4y + 3 = 0$ 且圆心在直线 $x + y = 3$ 上的圆之方程式。

   解:

   设圆心为 $(x, 3-x)$，半径为 r。

   x 轴上的切点为 $(x, 0)$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x)^2 + (3-x-0)^2} \\ &= 3 - x \ \cdots \ (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \left| \frac{3x - 4(3-x) + 3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| \\ &= \left| \frac{3x - 12 + 4x + 3}{5} \right| \\ &= \left| \frac{7x - 9}{5} \right| \\ r^2 &= \left(\frac{7x-9}{5} \right)^2 \end{aligned}$$

   代入 (1) 得

$$\begin{aligned} (3-x)^2 &= \left(\frac{7x-9}{5} \right)^2 \\ 9 - 6x + x^2 &= \frac{49x^2 - 126x + 81}{25} \\ 225 - 150x + 25x^2 &= 49x^2 - 126x + 81 \\ 24x^2 + 24x - 144 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x+3)(x-2) &= 0 \\ x &= -3 \text{ 或 } 2 \end{aligned}$$

   当 $x = -3$ 时，$y = 6, r = 6$。

圆的方程式为

$$
\begin{aligned}
(x+3)^2+(y-6)^2 &= 6^2 \\
x^2+6x+9+y^2-12y+36 &= 36 \\
x^2+y^2+6x-12y+9 &= 0
\end{aligned}
$$

■

当 $x=2$ 时，$y=1, r=1$。

圆的方程式为

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2+(y-1)^2 &= 1^2 \\
x^2-4x+4+y^2-2y+1 &= 1 \\
x^2+y^2-4x-2y+4 &= 0
\end{aligned}
$$

■

3. 求自点 $P(4,2)$ 作圆 $x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 之切线的方程式。

解:

$$
x^2+y^2-4x+4y-2=0 \implies (x-2)^2+(y+2)^2 = 10
$$

圆心为 $(2,-2)$，半径为 $\sqrt{10}$。

设切线方程为 $y-2=k(x-4)$，即 $kx-y-4k+2=0$。

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{2k+2-4k+2}{\sqrt{k^2+1}}\right| &= \sqrt{10} \\
\frac{(4-2k)^2}{k^2+1} &= 10 \\
16-16k+4k^2 &= 10k^2+10 \\
3k^2+8k-3 &= 0 \\
(3k-1)(k+3) &= 0 \\
k = \frac{1}{3}\text{或 } k &= -3
\end{aligned}
$$

当 $k=\frac{1}{3}$ 时，切线方程为

$$
\begin{aligned}
y-2 &= \frac{1}{3}(x-4) \\
3y-6 &= x-4 \\
x-3y+2 &= 0
\end{aligned}
$$

■

当 $k=-3$ 时，切线方程为

$$
\begin{aligned}
y-2 &= -3(x-4) \\
y-2 &= -3x+12 \\
3x+y-14 &= 0
\end{aligned}
$$

■

4. 求由一定点 $(2,2)$ 至圆 $2x^2+2y^2+2x+4y-1=0$ 的切距。

解:

$$
\begin{aligned}
2x^2+2y^2+2x+4y-1=0 &\Rightarrow x^2+y^2+x+2y-\frac{1}{2}=0 \\
\text{切距} &= \sqrt{2^2+2^2+2+4-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}
$$

5. 两圆都与 x,y 两轴相切且通过点 $A(8,1)$ 。试求

(a) 两圆的方程式:

解: 设圆的中心点为 (a,b)，半径为 r。
设圆与 x 轴的切点为 $(a,0)$，则 $r=\sqrt{(a-a)^2+(b-0)^2}=b$
设圆与 y 轴的切点为 $(0,b)$，则 $r=\sqrt{(0-a)^2+(b-b)^2}=a$
所以 $a=b$。
设圆的方程式为 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$。
代入 $A(8,1)$ 得

$$
\begin{aligned}
(8-a)^2+(1-a)^2&=a^2 \\
64-16a+a^2+1-2a+a^2&=a^2 \\
a^2-18a+65&=0 \\
(a-13)(a-5)&=0 \\
a=5 \text{ 或 } a&=13
\end{aligned}
$$

当 $a=5$ 时，圆的方程式为

$$
\begin{aligned}
(x-5)^2+(y-5)^2&=5^2 \\
x^2+y^2-10x-10y+25+x^2+y^2-10x-10y+25&=25 \\
2x^2+2y^2-20x-20y+50&=25 \\
x^2+y^2-10x-10y+25&=0
\end{aligned}
$$

■

当 $a=13$ 时，圆的方程式为

$$
\begin{aligned}
(x-13)^2+(y-13)^2&=13^2 \\
x^2+y^2-26x-26y+169+x^2+y^2-26x-26y+169&=169 \\
2x^2+2y^2-52x-52y+338&=169 \\
x^2+y^2-26x-26y+169&=0
\end{aligned}
$$

■

(b) 两圆的另一交点之坐标;

解:

两圆的方程式相减得

$$
\begin{aligned}
16x+16y-144&=0 \\
x&=9-y
\end{aligned}
$$

代入其中一个圆的方程式得

$$
\begin{aligned}
(9-y-5)^2+(y-5)^2&=5^2\\
(4-y)^2+(y-5)^2&=25\\
16-8y+y^2+y^2-10y+25&=25\\
2y^2-18y+16&=0\\
y^2-9y+8&=0\\
(y-1)(y-8)&=0\\
y=1 \text{ 或 } y&=8
\end{aligned}
$$

当 $y=1$ 时，$x=9-1=8$。

当 $y=8$ 时，$x=9-8=1$。

$\therefore$ 另一交点的坐标为 $(1,8)$。 ■

(c) 在 A 点每一圆的切线之方程式。

解:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-10x-10y+25&=0\\
2x+2y\frac{dy}{dx}-10-10\frac{dy}{dx}&=0\\
x+y\frac{dy}{dx}-5-5\frac{dy}{dx}&=0\\
(y-5)\frac{dy}{dx}&=5-x\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{5-x}{y-5}
\end{aligned}
$$

代入 $A(8,1)$ 得

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=\frac{5-8}{1-5}\\
&=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

切线方程为

$$
\begin{aligned}
y-1&=\frac{3}{4}(x-8)\\
4y-4&=3x-24\\
3x+4y-20&=0
\end{aligned}
$$

■

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-26x-26y+169&=0\\
2x+2y\frac{dy}{dx}-26-26\frac{dy}{dx}&=0\\
x+y\frac{dy}{dx}-13-13\frac{dy}{dx}&=0\\
(y-13)\frac{dy}{dx}&=13-x\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{13-x}{y-13}
\end{aligned}
$$

代入 $A(8,1)$ 得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{13-8}{1-13}\\&=\frac{5}{-12}\\&=-\frac{5}{12}\end{aligned}$$

切线方程为

$$\begin{aligned}y-1&=-\frac{5}{12}(x-8)\\12y-12&=-5x+40\\5x+12y-52&=0\end{aligned}$$

■

(d) 在 A 点两切线所夹锐角。

解:

已知两切线的斜率分别为 $\dfrac{3}{4}$ 和 $-\dfrac{5}{12}$。

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\left|\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{12}\right)}{1+\frac{3}{4}\times\left(-\frac{5}{12}\right)}\right|\\&=\frac{56}{33}\\\theta&=\arctan\frac{56}{33}\\&=59.49^\circ\end{aligned}$$

$\therefore$ 两切线所夹锐角为 59.49°。 ■

6. (a) 如果圆 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上一点 (x_0,y_0) 所引切线与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，试证 $(gx_0+fy_0+c)^2=r^2\left(g^2+f^2-c\right)$。

解:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+2gx+2fy+c&=0\\(x+g)^2+(y+f)^2&=g^2+f^2-c\end{aligned}$$

$\because$ (x_0,y_0) 为圆 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上的一点

$$(x_0+g)^2+(y_0+f)^2=g^2+f^2-c\ \cdots\ (1)$$

过圆心及 (x_0,y_0) 的线段斜率为 $\dfrac{y_0+f}{x_0+g}$，则过 (x_0,y_0) 的切线斜率为 $-\dfrac{x_0+g}{y_0+f}$。

所以切线方程为

$$\begin{aligned}y-y_0&=-\frac{x_0+g}{y_0+f}(x-x_0)\\y&=-\frac{x_0+g}{y_0+f}x+\left(\frac{x_0+g}{y_0+f}x_0+y_0\right)\\y&=-\frac{x_0+g}{y_0+f}x+\left(\frac{x_0^2+gx_0+fy_0+y_0^2}{y_0+f}\right)\end{aligned}$$

$\because x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2gx+2fy+c&=0 \\ x^2+y^2+gx+gx+fy+fy+c&=0 \\ x^2+gx+fy+y^2&=-(gx+fy+c) \end{aligned}$$

代入切线方程得

$$\begin{aligned} y&=-\frac{x_0+g}{y_0+f}x-\left(\frac{gx_0+fy_0+c}{y_0+f}\right) \ \cdots\ (2) \\ x^2+y^2&=r^2\ \cdots\ (3) \end{aligned}$$

将 (2) 代入 (3) 得

$$\begin{aligned} x^2+\left[-\frac{x_0+g}{y_0+f}x-\left(\frac{gx_0+fy_0+c}{y_0+f}\right)\right]^2&=r^2 \\ x^2+\left[\frac{x_0+g}{y_0+f}x+\left(\frac{gx_0+fy_0+c}{y_0+f}\right)\right]^2&=r^2 \\ x^2+\left(\frac{x_0+g}{y_0+f}\right)^2x^2+2\left(\frac{x_0+g}{y_0+f}\right)\left(\frac{gx_0+fy_0+c}{y_0+f}\right)x+\left(\frac{gx_0+fy_0+c}{y_0+f}\right)^2&=r^2 \\ \left[1+\left(\frac{x_0+g}{y_0+f}\right)^2\right]x^2+2\left(\frac{x_0+g}{y_0+f}\right)\left(\frac{gx_0+fy_0+c}{y_0+f}\right)x+\left(\frac{gx_0+fy_0+c}{y_0+f}\right)^2-r^2&=0 \\ \left[(y_0+f)^2+(x_0+g)^2\right]x^2+2(x_0+g)(gx_0+fy_0+c)x+(gx_0+fy_0+c)^2-r^2(y_0+f)^2&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2-4ac&=0 \\ b&=4ac \\ [2(x_0+g)(gx_0+fy_0+c)]^2&=4\left[(y_0+f)^2+(x_0+g)^2\right]\left[(gx_0+fy_0+c)^2-r^2(y_0+f)^2\right] \\ (x_0+g)^2(gx_0+fy_0+c)^2&=\left[(y_0+f)^2+(x_0+g)^2\right]\left[(gx_0+fy_0+c)^2-r^2(y_0+f)^2\right] \\ (x_0+g)^2(gx_0+fy_0+c)^2&=(y_0+f)^2(gx_0+fy_0+c)^2-r^2(y_0+f)^4+(x_0+g)^2(gx_0+fy_0+c)^2 \\ &\quad -r^2(x_0+g)^2(y_0+f)^2 \\ 0&=(y_0+f)^2(gx_0+fy_0+c)^2-r^2(y_0+f)^4-r^2(x_0+g)^2(y_0+f)^2 \\ r^2(y_0+f)^2[(y_0+f)^2+(x_0+g)^2]&=(y_0+f)^2(gx_0+fy_0+c)^2 \\ (gx_0+fy_0+c)^2&=r^2[(y_0+f)^2+(x_0+g)^2] \end{aligned}$$

由 (1) 得 $(gx_0+fy_0+c)^2=r^2[(y_0+f)^2+(x_0+g)^2]$。 ■

(b) 如果圆 $x^2+y^2-4x-8y-80=0$ 内的弦其长度及斜率分别为 $8\sqrt{5}$ 及 $\frac{1}{2}$, 求这些弦的方程式。

解:

$$x^2+y^2-4x-8y-80=0 \implies (x-2)^2+(y-4)^2=100$$

圆心为 $(2,4)$，半径为 10。

设弦的方程式为 $y=\frac{1}{2}x+c$，即 $x-2y+2c=0$。

圆心到弦的距离 $d=\left|\frac{2-8+2c}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|=\left|\frac{2c-6}{\sqrt{5}}\right|$

弦的半长为 $\dfrac{L}{2} = 4\sqrt{5}$，由 $r^2 = d^2 + \left(\dfrac{L}{2}\right)^2$，

$$\begin{aligned}
100 &= \left(\frac{2c-6}{\sqrt{5}}\right)^2 + 80 \\
(2c-6)^2 &= 100 \\
4c^2 - 24c + 36 &= 100 \\
4c^2 - 24c - 64 &= 0 \\
c^2 - 6c - 16 &= 0 \\
(c-8)(c+2) &= 0 \\
c &= 8 \text{ 或 } c = -2
\end{aligned}$$

当 $c = 8$ 时，弦的方程式为 $x - 2y + 16 = 0$。

当 $c = -2$ 时，弦的方程式为 $x - 2y - 4 = 0$。 ■

7. 已知直线 $y = x + b$ 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的一条切线, 求 b 的可能值。

解:

$$\begin{aligned}
y &= x + b \\
m &= 1 \\
x^2 + x^2 &= 4 \\
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
x + y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\
-\frac{x}{y} &= 1 \\
x &= -y
\end{aligned}$$

代入圆的方程式得

$$\begin{aligned}
(-y)^2 + y^2 &= 4 \\
2y^2 &= 4 \\
y^2 &= 2 \\
y &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

当 $y = \sqrt{2}$ 时，$x = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$。

当 $y = -\sqrt{2}$ 时，$x = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$。

$\therefore b = \pm 2\sqrt{2}$。 ■

8. 在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上一动点 P 的切线分别交座标轴 OX, OY 于 A 和 B, 且 $OAQB$ 是一个长方形。试证明 Q 点的轨迹方程式是 $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{a^2}{y^2}=1$ 。

解:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= a^2 \\ 2x+2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ x+y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

设 P 的坐标为 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

切线方程为

$$\begin{aligned} y-a\sin\theta &= -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-a\cos\theta) \\ y\sin\theta-a\sin^2\theta &= -x\cos\theta+a\cos^2\theta \\ y\sin\theta+x\cos\theta &= a(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\ y\sin\theta+x\cos\theta &= a \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, $y=\dfrac{a}{\sin\theta} \implies B\left(0, \dfrac{a}{\sin\theta}\right)$。
当 $y=0$ 时, $x=\dfrac{a}{\cos\theta} \implies A\left(\dfrac{a}{\cos\theta}, 0\right)$。
$\therefore Q\left(\dfrac{a}{\cos\theta}, \dfrac{a}{\sin\theta}\right)$。

$$\begin{aligned} x=a\cos\theta &\implies \cos\theta=\frac{a}{x} \\ y=a\sin\theta &\implies \sin\theta=\frac{a}{y} \end{aligned}$$

$\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$,
$\therefore \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{a^2}{y^2}=1$。 ■

9. (a) 求经过圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 与直线 $2x-y+4=0$ 的交点且与 y 轴相切的两圆的方程式。

解:

$$\begin{aligned} 2x-y+4 &= 0 \\ y &= 2x+4 \end{aligned}$$

代入圆的方程式得

$$\begin{aligned} x^2+(2x+4)^2+2x-4(2x+4)+1 &= 0 \\ x^2+4x^2+16x+16+2x-8x-16+1 &= 0 \\ 5x^2+10x+1 &= 0 \\ x=\frac{-10\pm\sqrt{100-20}}{10} x=\frac{-10\pm4\sqrt{5}}{10} x &= -1\pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

当 $x=-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，$y=2\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+4=2+\frac{4\sqrt{5}}{5}$。

当 $x=-1-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，$y=2\left(-1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+4=2-\frac{4\sqrt{5}}{5}$。

设所求圆的方程式为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。

设圆与 y 轴的切点为 $(0,b)$，则

$$\sqrt{(0-a)^2+(b-b)^2}=r$$
$$r=a\ \cdots\ (1)$$

$$\sqrt{\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}-a\right)^2+\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}-b\right)^2}=\sqrt{\left(-1-\frac{2\sqrt{5}}{5}-a\right)^2+\left(2-\frac{4\sqrt{5}}{5}-b\right)^2}$$
$$\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}-a\right)^2+\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}-b\right)^2=\left(-1-\frac{2\sqrt{5}}{5}-a\right)^2+\left(2-\frac{4\sqrt{5}}{5}-b\right)^2$$
$$\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-2\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)a+\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2-2\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)b$$
$$=\left(-1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-2\left(-1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)a+\left(2-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2-2\left(2-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)b$$
$$\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(2-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2=\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)a+\left(\frac{16\sqrt{5}}{5}\right)b$$
$$\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)a+\left(\frac{16\sqrt{5}}{5}\right)b=\frac{24\sqrt{5}}{5}$$
$$8a+16b=24$$
$$a+2b=3$$
$$a=3-2b$$
$$b=\frac{3-a}{2}\ \cdots\ (2)$$

将 (1) 代入 (2) 圆方程式得

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{3-a}{2}\right)^2=a^2$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2-y(3-a)+\left(\frac{3-a}{2}\right)^2=a^2$$
$$x^2-2ax+y^2-3y+ay+\frac{9-6a+a^2}{4}=0$$
$$4x^2-8ax+4y^2-12y+4ay+9-6a+a^2=0$$
$$4x^2+4y^2-12y-8ax+4ay+(a-3)^2=0$$

代入 $\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ 得

$$\begin{aligned}4\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+4\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2-12\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)-8a\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)&\\+4a\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)+(a-3)^2&=0\\12-8a\left(-1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+4a\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)+(a-3)^2&=0\\12+8a+8a+a^2-6a+9&=0\\a^2+10a+21&=0\\(a+3)(a+7)&=0\\a=-3 \text{ 或 } a&=-7\end{aligned}$$

当 $a=-3$ 时，$b=\frac{3-(-3)}{2}=3$，圆的方程式为

$$\begin{aligned}(x+3)^2+(y-3)^2&=9\\x^2+6x+9+y^2-6y+9&=9\\x^2+y^2+6x-6y+9&=0\end{aligned}$$

■

当 $a=-7$ 时，$b=\frac{3-(-7)}{2}=5$，圆的方程式为

$$\begin{aligned}(x+7)^2+(y-5)^2&=49\\x^2+14x+49+y^2-10y+25&=49\\x^2+y^2+14x-10y+25&=0\end{aligned}$$

■

(b) 求过原点到此二圆所作的另两条切线的方程式。

解:

设切线方程式为 $y=kx$，即 $kx-y=0$。

从 (a) 可知，二圆的圆心及半径分别为 $(-3,3)$、3 和 $(-7,5)$、7。

对于圆 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$，由于圆心与 x 轴的距离为 3，等于半径，所以该圆也与 x 轴相切。

$\therefore$ 该圆的另一切线方程式为 $x=0$。 ■

对于圆 $x^2+y^2+14x-10y+25=0$，

$$\begin{aligned}\left|\frac{-7k-5}{\sqrt{k^2+1}}\right|&=7\\\frac{(7k+5)^2}{k^2+1}&=49\\49k^2+70k+25&=49k^2+49\\70k&=24\\k&=\frac{12}{35}\end{aligned}$$

切线方程式为 $y=\frac{12}{35}x$。 ■

10. 求 $x^2+y^2+4x-10y-7=0$ 的圆心及半经。据此, 或其他方法, 若 $y=2x+c$ 是此圆的切线, 求 c 的值。

解:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+4x-10y-7&=0\\
(x+2)^2+(y-5)^2&=7+4+25\\
(x+2)^2+(y-5)^2&=36\\
(x+2)^2+(y-5)^2&=6^2
\end{aligned}$$

圆心为 $(-2,5)$，半径为 6。 ■

$$\begin{aligned}
y&=2x+c\\
2x-y+c&=0\\
\left|\frac{-4-5+c}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|&=6\\
\left|\frac{c-9}{\sqrt{5}}\right|&=6\\
c-9&=\pm 6\sqrt{5}\\
c&=9\pm 6\sqrt{5}
\end{aligned}$$

■

11. 求两条由点 $(-2,3)$ 至目 $x^2+y^2+2x-12y+32=0$ 的切线方程式。

解:

设切线方程式为 $y-3=k(x+2)$，即 $kx-y+3+2k=0$。

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+2x-12y+32&=0\\
(x+1)^2+(y-6)^2&=1+36-32\\
(x+1)^2+(y-6)^2&=5
\end{aligned}$$

圆心为 $(-1,6)$，半径为 $\sqrt{5}$。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{-k-6+3+2k}{\sqrt{k^2+1}}\right|&=\sqrt{5}\\
\frac{(k-3)^2}{k^2+1}&=5\\
k^2-6k+9&=5k^2+5\\
2k^2+3k-2&=0\\
(2k-1)(k+2)&=0\\
k&=\frac{1}{2}\text{或 } k=-2
\end{aligned}$$

当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，切线方程式为

$$\begin{aligned}
y-3&=\frac{1}{2}(x+2)\\
x-2y+8&=0
\end{aligned}$$

■

当 $k=-2$ 时，切线方程式为

$$
\begin{aligned}
y-3&=-2(x+2)\\
y-3&=-2x-4\\
2x+y+1&=0
\end{aligned}
$$

■

12. 求经过点 $M(3,-4)$ 且与圆 $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切于点 $P(1,2)$ 的圆的方程式。

解:

设所求圆的方程式为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}=r &\implies r^2=(a-1)^2+(b-2)^2\\
\sqrt{(a-3)^2+(b+4)^2}=r &\implies r^2=(a-3)^2+(b+4)^2
\end{aligned}
$$

比较得

$$
\begin{aligned}
(a-1)^2+(b-2)^2&=(a-3)^2+(b+4)^2\\
a^2-2a+1+b^2-4b+4&=a^2-6a+9+b^2+8b+16\\
4a-12b-20&=0\\
a-3b-5&=0\ \cdots\ (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+2x-6y+5&=0\\
(x+1)^2+(y-3)^2&=1+9-5\\
(x+1)^2+(y-3)^2&=5
\end{aligned}
$$

圆心为 $(-1,3)$，半径为 $\sqrt{5}$。

$$
\begin{aligned}
m&=\frac{2-3}{1-(-1)}=-\frac{1}{2}\\
y-3&=-\frac{1}{2}(x+1)\\
2y-6&=-x-1\\
x+2y-5&=0
\end{aligned}
$$

代入 (a,b), 得 $a+2b-5=0\ \cdots\ (2)$。

$$
\begin{aligned}
(2)-(1)&\Rightarrow 5b=0\Rightarrow b=0\\
\text{代入}(1)&\Rightarrow a=5\\
r^2&=(5-3)^2+(0+4)^2=20
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 所求圆的方程式为

$$
\begin{aligned}
(x-5)^2+y^2&=20\\
x^2-10x+25+y^2&=20\\
x^2+y^2-10x+5&=0
\end{aligned}
$$

■

5.6 两圆正切、正交

(选择题)

1. 两圆 $x^2+y^2+3x-2y-20=0$ 及 $x^2+y^2-2x+3y-5=0$ 的公共弦的方程式是

解:

两圆的方程式相减得

$$\begin{aligned} 5x-5y-15&=0 \\ x-y-3&=0 \end{aligned}$$

■

2. 已知两圆 $x^2+y^2+kx-6y+5=0$ 与 $x^2+y^2+2x+y-1=0$ 正交 (Cut orthogonally), k 之值为

解:

两圆的圆心分别为 $\left(-\frac{k}{2},3\right)$ 和 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，半径分别为 $\sqrt{\frac{k^2}{4}+4}$ 和 $\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}=\frac{3}{2}$。

$$\begin{aligned} \frac{49}{4}+\left(-\frac{k}{2}+1\right)^2&=\frac{k^2}{4}+4+\frac{9}{4} \\ \frac{k^2}{4}-k+1&=\frac{k^2}{4}-6 \\ k&=7 \end{aligned}$$

■

3. 如果两圆 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2-6x+ay+9=0$ 相切, 求 a 的值。

解:

由圆的方程式可知，圆心分别为 $(0,0)$ 和 $\left(3,-\frac{a}{2}\right)$, $r_1=1$, $r_2=\sqrt{(-3)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2-9}=\sqrt{\frac{a^2}{4}}=\pm\frac{a}{2}$。

$$\begin{aligned} \sqrt{3^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2}&=1\pm\frac{a}{2} \\ 9+\frac{a^2}{4}&=1\pm a+\frac{a^2}{4} \\ \pm a&=8 \\ a&=\pm 8 \end{aligned}$$

4. 如果两圆 $x^2+y^2-4=0$ 及 $x^2+y^2+2ax-6y+a=0$ 正交 (Cut orthogonally), 则常数 a 的值等于

解:

两圆的圆心分别为 $(0,0)$ 和 $(-a,3)$，半径分别为 2 和 $\sqrt{a^2+9-a}$。

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{9+a^2}\right)^2&=2^2+\left(\sqrt{a^2+9-a}\right)^2 \\ 9+a^2&=4+a^2+9-a \\ a&=4 \end{aligned}$$

■

5. 已知两圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ 与 $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ 交于一点, 求 a,b 及 c 的关系。

解:

两圆的圆心分别为 (a,b) 和 (b,a)，半径均为 c。

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-b)^2+(b-a)^2}&=2c\\ \sqrt{2(a-b)^2}&=2c\\ 2(a-b)^2&=4c^2\\ (a-b)^2&=2c^2\end{aligned}$$

■

6. 若两圆 $x^2+y^2+6x+10y+c=0$ 与 $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ 正交, 求 c 的值。

解:

两圆的圆心分别为 $(-3,-5)$ 和 $(-2,1)$，半径分别为 $\sqrt{9+25-c}=\sqrt{34-c}$ 和 $\sqrt{4+1-3}=\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}34-c+2&=36+1\\ c&=-1\end{aligned}$$

■

7. 若两圆 $x^2+y^2-kx-2y-52=0$ 与 $x^2+y^2+(2k+1)x+8y+26=0$ 正交, 求 k 的值。

解:

两圆的圆心分别为 $\left(\frac{k}{2},1\right)$ 和 $\left(-\frac{2k+1}{2},-4\right)$,半径分别为 $\sqrt{\frac{k^2}{4}+1+52}=\sqrt{\frac{k^2}{4}+53}$ 和 $\sqrt{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2+16-26}=\sqrt{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2-10}$。

$$\begin{aligned}\left(\frac{k}{2}+\frac{2k+1}{2}\right)^2+(1+4)^2&=\frac{k^2}{4}+53+\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2-10\\ \left(\frac{3k+1}{2}\right)^2&=\frac{k^2}{4}+\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2+18\\ (3k+1)^2&=k^2+(2k+1)^2+72\\ 9k^2+6k+1&=k^2+4k^2+4k+1+72\\ 4k^2+2k-72&=0\\ 2k^2+k-36&=0\\ (2k+9)(k-4)&=0\\ k&=-\frac{9}{2}\text{或 } k=4\end{aligned}$$

■

(作答题)

1. 二圆外切于 A, 公切线 PQ 切二圆于 P,Q; RAS 是一直线且再遇二圆于 R,S, 连 RP, SQ 并延长之使交于 X 。求证

2. (a) $\triangle APQ \sim \triangle XRS$;

   解:

   题目过于晦涩，略 =) ■

   (b) P,A,Q,X 四点共圆。

   解:

   题目过于晦涩，略 =) ■

3. 已知 $a^2+b^2=c^2$, 试证两圆 $x^2+y^2+ax+by=0$ 及 $x^2+y^2=c^2$ 相切, 并求其切点之座标。

   解:

   两圆的圆心分别为 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ 和 $(0,0)$，半径分别为 $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}=\frac{c}{2}$ 和 $R=c$。

$$\begin{aligned}\text{圆心距 } d &= \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}=\frac{c}{2}\end{aligned}$$

   $\because d=R-r=c-\frac{c}{2}=\frac{c}{2}$, $\therefore$ 两圆相切于一点。 ■

   两圆方程式相减，得 $ax+by=-c^2 y=-\frac{a}{b}x-\frac{c^2}{b}$

   代入 $x^2+y^2=c^2$ 得

$$\begin{aligned}x^2+\left(-\frac{a}{b}x-\frac{c^2}{b}\right)^2 &= c^2 \\ x^2+\frac{a^2}{b^2}x^2+\frac{2ac^2}{b^2}x+\frac{c^4}{b^2} &= c^2 \\ b^2x^2+a^2x^2+2ac^2x+c^4-b^2c^2 &= 0 \\ (a^2+b^2)x^2+2ac^2x+c^4-b^2c^2 &= 0 \\ c^2x^2+2ac^2x+c^4-b^2c^2 &= 0 \\ x^2+2ax+c^2-b^2 &= 0 \\ x^2+2ax+c^2-(c^2-a^2) &= 0 \\ x^2+2ax+a^2 &= 0 \\ (x+a)^2 &= 0 \\ x &= -a \\ y &= -\frac{a}{b}(-a)-\frac{c^2}{b} \\ &= \frac{a^2}{b}-\frac{c^2}{b} \\ &= \frac{-(c^2-a^2)}{b} \\ &= \frac{-b^2}{b}=-b\end{aligned}$$

   $\therefore$ 切点为 $(-a,-b)$。 ■

4. (a) 若两圆 $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ 与 $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ 正交, 证明 $2(g_1g_2+f_1f_2)=c_1+c_2$

解:

两圆的圆心分别为 $(-g_1,-f_1)$ 和 $(-g_2,-f_2)$，半径分别为 $\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}$ 和 $\sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}$。

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(-f_1+f_2)^2+(-g_1+g_2)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}\right)^2+\left(\sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}\right)^2\\ (f_1-f_2)^2+(g_1-g_2)^2 &= g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2\\ f_1^2-2f_1f_2+f_2^2+g_1^2-2g_1g_2+g_2^2 &= g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2\\ -2f_1f_2-2g_1g_2 &= -c_1-c_2\\ 2(f_1f_2+g_1g_2) &= c_1+c_2\end{aligned}$$

■

(b) 若一直径的两端点为 $(0,4)$ 及 $(4,2)$ 的圆与另一圆 $x^2+y^2+2kx-6y+k=0$ 正交, 试应用 (a) 的结果或以其他方法求 k 的值。

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(4-0)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}\\ r &= \sqrt{5}\\ C &= \left(\frac{0+4}{2},\frac{4+2}{2}\right)=(2,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-3)^2 &= 5\\ x^2-4x+4+y^2-6y+9 &= 5\\ x^2+y^2-4x-6y+8 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(f_1f_2+g_1g_2) &= c_1+c_2\\ 2[(2)(-k)+(3)(3)] &= 8+k\\ -4k+18 &= 8+k\\ 5k &= 10\\ k &= 2\end{aligned}$$

■

5. 一圆的圆心落在第一象限上且与 y 轴相切于点 $(0,3)$, 并与圆 $x^2+y^2-8x+4y-5=0$ 正交。求此圆的方程式。

解:

设圆的方程式为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。

$\because$ 圆心在第一象限，$\therefore a>0,b>0$。

$\because$ 圆与 y 轴相切于 $(0,3)$，$\therefore b=3$，圆心为 $(a,3)$。

$$r=\sqrt{a^2+(3-3)^2}=a$$

$\therefore$ 圆的方程式为 $(x-a)^2+(y-3)^2=a^2$。

$$\begin{aligned}x^2+y^2-8x+4y-5 &= 0\\ (x-4)^2+(y+2)^2 &= 25\end{aligned}$$

两圆的圆心分别为 $(a, 3)$ 和 $(4, -2)$，半径分别为 a 和 5。

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(a-4)^2+(3+2)^2}\right)^2 &= a^2+25\\ (a-4)^2 &= a^2\\ a^2-8a+16 &= a^2\\ 8a &= 16\\ a &= 2\end{aligned}$$

$\therefore$ 圆的方程式为

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-3)^2 &= 2^2\\ x^2-4x+4+y^2-6y+9 &= 4\\ x^2+y^2-4x-6y+9 &= 0\end{aligned}$$

■

6. 如果一个动圆与圆 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 正交, 且与 x 轴相切。求这个动圆圆心的轨迹方程式。

解: 设动圆圆心为 (x, y)，半径为 r，

$\because$ 动圆与 x 轴相切，$\therefore r = y$。

圆 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 的圆心为 $(-g, -f)$，半径为 $\sqrt{g^2+f^2-c}$。

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(x+g)^2+(y+f)^2}\right)^2 &= y^2+g^2+f^2-c\\ (x+g)^2+(y+f)^2 &= y^2+g^2+f^2-c\\ x^2+2gx+2fy &= -c\\ x^2+2gx+2fy+c &= 0\end{aligned}$$

■

7. 已知两圆的方程式为 $x^2+y^2+2x-6y=0$ 及 $x^2+y^2+3x-5y+6=0$。证明其中一圆完全在另一圆内。

解:

两圆的圆心分别为 $(-1, 3)$ 和 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$，半径分别为 $r_1 = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ 和 $r_2\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}-6} = \frac{\sqrt{10}}{2}$。

$$\begin{aligned}\text{圆心距 } d &= \sqrt{\left(-1+\frac{3}{2}\right)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$\because r_1 - r_2 = \sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $r_1 - r_2 > d$,

$\therefore$ 圆 $x^2+y^2+3x-5y+6=0$ 完全在圆 $x^2+y^2+2x-6y=0$ 内。 ■

8. 已知一圆 C 的半径为 3. 其圆心在直线 $x+y=1$ 上。若圆 $x^2+y^2=4$ 内切于圆 C，求 C 的所有可能方程式。

解:

设圆 C 的圆心为 (a,b)，半径为 3。

$\because$ 圆心在直线 $x+y=1$ 上，$\therefore a+b=1 \implies b=1-a$。

$\therefore$ 圆 C 的圆心为 $(a,1-a)$。

圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为 $(0,0)$，半径为 2。

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a-0)^2+(1-a-0)^2} &= 3-2 \\
\sqrt{a^2+(1-a)^2} &= 1 \\
a^2+1-2a+a^2 &= 1 \\
2a^2-2a &= 0 \\
a(a-1) &= 0 \\
a &= 0 \text{ 或 } a=1
\end{aligned}$$

当 $a=0$ 时，$b=1-a=1$，圆 C 的方程式为 $x^2+(y-1)^2=9$。

当 $a=1$ 时，$b=1-a=0$，圆 C 的方程式为 $(x-1)^2+y^2=9$。 ■