5.2 圆的标准方程式

(选择题)

1. 求以 $(6,7)$ 与 $(4,-3)$ 之连线为直径之圆的方程式。

   解:

   半径为 $\dfrac{\sqrt{(6-4)^2+(7-(-3))^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2+10^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{104}}{2}=\dfrac{2\sqrt{26}}{2}=\sqrt{26}$,

   圆心为 $\left(\dfrac{6+4}{2},\dfrac{7+(-3)}{2}\right)=(5,2)$, 所以方程式为 $(x-5)^2+(y-2)^2=26$。 ■

2. 如果圆 $x^2+y^2=4^2$ 上的一点 P 到直线 $4x+3y-60=0$ 的距离是最小, 求 P 点的坐标。

   解:

$$\begin{aligned}4x+3y-60&=0\\3y&=-4x+60\\y&=-\frac{4}{3}x+20\\m&=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

   直线穿过圆心的法线方程为

$$\begin{aligned}y-0&=\frac{3}{4}(x-0)\\y&=\frac{3}{4}x\end{aligned}$$

   代入圆的方程得

$$\begin{aligned}x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2&=4^2\\x^2+\frac{9}{16}x^2&=16\\\frac{25}{16}x^2&=16\\x^2&=\frac{256}{25}\\x&=\pm\frac{16}{5}\end{aligned}$$

   当 $x=\dfrac{16}{5}$ 时, $y=\dfrac{12}{5}$, 当 $x=-\dfrac{16}{5}$ 时, $y=-\dfrac{12}{5}$。 ■

   所以 P 点的坐标为 $\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{12}{5}\right)$。

3. 求由圆 $(x-5)^2+(y-3)^2=9$ 上的一点到直线 $3x+4y=2$ 的最短距离。

   解:

   直线 $3x+4y=2$ 与圆心 $(5,3)$ 的距离为 $\dfrac{|3(5)+4(3)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|15+12-2|}{5}=5$。

   圆的半径为 3, 所以最短距离为 $5-3=2$。 ■

4. 点 $(5,3)$ 是圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ 的一直径的端点。求此直径另一端点的坐标。

解:

设另一端点为 (x,y), 已知圆心为 $(2,-1)$, 根据中点公式得

$$\begin{aligned}\frac{5+x}{2}&=2\\5+x&=4\\x&=-1\\\frac{3+y}{2}&=-1\\3+y&=-2\\y&=-5\end{aligned}$$

所以另一端点的坐标为 $(-1,-5)$。 ■

(作答题)

1. 一正方形的四顶点 A, B, C, D 顺序依反时针方向排列。若 A 点的座标为 $(1,3)$, BD 落于直线 $2x+y+5=0$ 上。试求出 B, C, D 三点的坐标。(不准用图解法。)

解:

直线 $2x+y+5=0$ 的斜率为 -2, 该直线过点 $(1,3)$ 的法线斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以法线方程为

$$\begin{aligned}y-3&=\frac{1}{2}(x-1)\\y&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+3\\y&=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

代入直线方程得

$$\begin{aligned}2x+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}+5&=0\\4x+x+5+10&=0\\5x&=-15\\x&=-3\\y&=\frac{1}{2}(-3)+\frac{5}{2}\\&=1\end{aligned}$$

所以正方形的中心为 $M(-3,1)$。

设 B 点和 C 点的坐标为 $(x,-2x-5)$。

$$\begin{aligned}\frac{AM}{MB}&=\tan 45^\circ=1\\\frac{\sqrt{(-3-1)^2+(1-3)^2}}{\sqrt{(x+3)^2+(-2x-6)^2}}&=1\\\sqrt{20}&=\sqrt{(x+3)^2+4(x+3)^2}\\20&=5(x+3)^2\\4&=(x+3)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x+3 &= \pm 2 \\
x &= -5, -1
\end{aligned}
$$

所以 B 及 D 的坐标分别为 $(-5, 5)$ 和 $(-1, -3)$。 ■

设 C 点的坐标为 (x, y), 由正方形的性质得

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{2} &= -3 \\
x &= -7 \\
\frac{y+3}{2} &= 1 \\
y &= -1
\end{aligned}
$$

所以 C 点的坐标为 $(-7, -1)$。 ■

2. 试求以 A$(2, 0)$ 及 B$(6, 0)$ 之联线为直径的圆之方程式。

解:

圆心为 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 0)$, 半径为 $\frac{\sqrt{(6-2)^2+(0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$。

所以方程式为

$$
\begin{aligned}
(x-4)^2 + (y-0)^2 &= 2^2 \\
(x-4)^2 + y^2 &= 4 \\
x^2 - 8x + 16 + y^2 &= 4 \\
x^2 - 8x + y^2 + 12 &= 0
\end{aligned}
$$

■

若此圆与直线 $y = mx$ 相交于 P 及 Q 两点, 试证 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

解:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 8x + (mx)^2 + 12 &= 0 \\
x^2 - 8x + m^2x^2 + 12 &= 0 \\
(1+m^2)x^2 - 8x + 12 &= 0 \\
d = 8^2 - 4(1+m^2)12 &> 0 \\
64 - 48(1+m^2) &> 0 \\
48(1+m^2) &< 64 \\
1 + m^2 &< \frac{4}{3} \\
m^2 &< \frac{1}{3} \\
-\frac{1}{\sqrt{3}} < m &< \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

■

又, 试求 OP $\times$ OQ 之值, 其中 O 为原点。

解:

设 $m=0$, 则 $P(2,0)$, $Q(6,0)$, 所以 OP $\times$ OQ $=2\times 6=12$。 ■

3. 已知两条直线 $l_1: 2x-3y+2=0$ 和 $l_2: 3x-2y+3=0$ 与圆心为 M 的一圆相交, 且 l_1 与 l_2 被截在圆内的两条线段的长度分别为 26 及 24 , 求圆心 M 的轨迹方程式。

解:

设圆心为 (x,y), 半径为 r,

圆心到直线 l_1 的距离为 $\dfrac{|2x-3y+2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}$,

圆心到直线 l_2 的距离为 $\dfrac{|3x-2y+3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}$。

利用毕氏定理，得

$$\begin{aligned}
r^2&=\left(\frac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}\right)^2+13^2\\
r^2&=\left(\frac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}\right)^2+12^2
\end{aligned}$$

两式相等,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}\right)^2+13^2&=\left(\frac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}\right)^2+12^2\\
\frac{(2x-3y+2)^2}{13}+169&=\frac{(3x-2y+3)^2}{13}+144\\
\frac{(2x-3y+2)^2}{13}-\frac{(3x-2y+3)^2}{13}&=-25\\
(2x-3y+2)^2-(3x-2y+3)^2&=-325\\
4x^2+9y^2+4-12xy-12y+8x-(9x^2+4y^2+9-12xy-12y+18x)&=-325\\
4x^2+9y^2+4-12y+8x-9x^2-4y^2-9+12y-18x&=-325\\
-5x^2+5y^2-10x-5&=-325\\
5x^2-5y^2+10x-320&=0\\
x^2-y^2+2x-64&=0
\end{aligned}$$

■

4. 已知 A 点为 (x_1,y_1) , B 点为 (x_2,y_2), 证明以 AB 为直径的圆的方程式为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

解:

圆心为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{2}$。

所以圆的方程式为

$$\begin{aligned}
\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2&=\left(\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{2}\right)^2\\
x^2-x(x_1+x_2)+\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+y^2-y(y_1+y_2)+\frac{y_1^2+2y_1y_2+y_2^2}{4}&=\frac{x_2^2-2x_1x_2+x_1^2+y_2^2-2y_1y_2+y_1^2}{4}\\
x^2-x(x_1+x_2)+\frac{2x_1x_2}{4}+y^2-y(y_1+y_2)+\frac{2y_1y_2}{4}&=\frac{-2x_1x_2-2y_1y_2}{4}\\
x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2+y^2-y(y_1+y_2)+y_1y_2&=0
\end{aligned}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

■

一动圆经过一定点 P(h,k) 与 y 轴相切，求直径 PR 的端点 R 的轨迹方程式。

解:

设 R 点的坐标为 (x,y), 半径为 r，则圆心为 $\left(\frac{h+x}{2},\frac{k+y}{2}\right)$。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h+x}{2}\right| &= r \\
\left(x-\frac{h+x}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k+y}{2}\right)^2 &= r^2 \\
\left(\frac{x-h}{2}\right)^2+\left(\frac{y-k}{2}\right)^2 &= r^2 \\
\frac{(x-h)^2}{4}+\frac{(y-k)^2}{4} &= r^2 \\
(x-h)^2+(y-k)^2 &= 4r^2 \\
x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 &= 4\left(\frac{h+x}{2}\right)^2 \\
x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 &= 4\left(\frac{h^2+2hx+x^2}{4}\right) \\
x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 &= h^2+2hx+x^2 \\
y^2-2ky+k^2 &= 4hx \\
(y-k)^2 &= 4hx
\end{aligned}$$

■

5.3 圆的一般方程式

(选择题)

1. 一圆的中心为 $(2,3)$ 且过点 $(3,-2)$, 求该圆之方程式。

   解:

   圆心到点 $(3,-2)$ 的距离为 $\sqrt{(3-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$，即为半径。

   所以方程式为

$$\begin{aligned}
(x-2)^2+(y-3)^2 &= 26 \\
x^2-4x+4+y^2-6y+9 &= 26 \\
x^2+y^2-4x-6y-13 &= 0
\end{aligned}$$

■

2. 求圆 $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ 之半径。

   解:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{(-2)^2+(-5)^2-4} \\
&= \sqrt{4+25-4}=5
\end{aligned}$$

■

3. 求圆 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ 之面积。

解:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(-3)^2+(-2)^2-9} \\
&= \sqrt{9+4-9} = 2 \\
S &= \pi r^2 = 4\pi
\end{aligned}
$$

4. 若 A 及 B 分别为圆 $x^2+y^2-6y=0$ 及 $x^2+y^2-6x=0$ 的圆心, 则直线 AB 之方程式为

解:

$$
\begin{gathered}
x^2+y^2-6y=0 \\
x^2+(y-3)^2=9 \\
x^2+y^2-6x=0 \\
(x-3)^2+y^2=9
\end{gathered}
$$

两圆的圆心分别为 $A(0,3)$ 及 $B(3,0)$, 所以直线 AB 的斜率为 $\dfrac{0-3}{3-0}=-1$, 方程式为

$$
\begin{aligned}
y-3 &= -1(x-0) \\
y &= -x+3 \\
x+y &= 3
\end{aligned}
$$

■

5. 由点 A(6,6) 至圆 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 之最短距离为

解:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-6x-4y+4 &= 0 \\
x^2-6x+y^2-4y &= -4 \\
(x-3)^2+(y-2)^2 &= -4+9+4=9 \\
(x-3)^2+(y-2)^2 &= 3^2
\end{aligned}
$$

圆心为 $(3,2)$, 半径为 3。

点 $(6,6)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=5$。

所以最短距离为 $5-3=2$。 ■

6. 求点 $(9,4)$ 到圆 $x^2+y^2-4x-6y-5=0$ 的最短距离。

解:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-4x-6y-5 &= 0 \\
x^2-4x+y^2-6y &= 5 \\
(x-2)^2+(y-3)^2 &= 5+4+9=18 \\
(x-2)^2+(y-3)^2 &= (3\sqrt{2})^2
\end{aligned}
$$

圆心为 $(2,3)$, 半径为 $3\sqrt{2}$。

点 $(9,4)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{(9-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$。

所以最短距离为 $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$。 ■

7. 两个圆 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 及 $x^2+y^2-6x=0$ 的关系是

解:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-2y-20&=0\\ x^2-4x+y^2-2y&=20\\ (x-2)^2+(y-1)^2&=20+4+1=25\\ (x-2)^2+(y-1)^2&=5^2 \end{aligned}$$

圆心为 $(2,1)$, 半径为 5。

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x&=0\\ x^2-6x+y^2&=0\\ (x-3)^2+y^2&=9\\ (x-3)^2+y^2&=3^2 \end{aligned}$$

圆心为 $(3,0)$, 半径为 3。

$\because$ 两圆的圆新距离为 $\sqrt{(3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}<5-3=2$。

$\therefore$ 一个圆在另一个圆内。 ■

8. 求圆心为 $(-3,0)$ 且将圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的圆周加以平分的圆的方程式。

解:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2x-4y+1&=0\\ (x+1)^2+(y-2)^2&=4 \end{aligned}$$

圆心为 $(-1,2)$, 半径为 2。

所求圆的圆心和 $(-1,-2)$ 所成的线段的斜率为 $\dfrac{0-(-2)}{-3-(-1)}=\dfrac{2}{2}=1$。

其过点 $(-1,2)$ 的法线斜率为 -1，所以方程式为

$$\begin{aligned} y-2&=-1(x+1)\\ y&=-x+1 \end{aligned}$$

代入圆的方程得

$$\begin{aligned} (x+1)^2+(-x+1-2)^2&=4\\ x^2+2x-1&=0\\ x&=-1\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

当 $x=-1+\sqrt{2}$ 时, $y=2-\sqrt{2}$。

所以所求圆的半径为 $\sqrt{(-3-(-1+\sqrt{2}))^2+(0-(2-\sqrt{2}))^2}=2\sqrt{3}$，方程式为

$$\begin{aligned} (x+3)^2+y^2&=(2\sqrt{3})^2\\ x^2+6x+9+y^2&=12\\ x^2+6x+y^2-3&=0 \end{aligned}$$

■

9. 如果圆 $x^2+y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0$ 与 x 轴相切于原点, 下列哪项是对的?

解:

与 x 轴切于原点，则圆心在 y 轴上，半径等于圆心到原点的距离。

$$\begin{aligned}x^2+(y-a)^2&=a^2\\x^2+y^2-2ay+a^2&=a^2\\x^2+y^2-2ay&=0\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{D}=0$，$\mathrm{E}=-2a$，$\mathrm{F}=0$。 ■

10. 已知 P 及 Q 分别是点 $(3,-2)$ 和 $(-1,4)$ 。若 PQ 是一圆的直径, 求此圆的方程式。

解:

圆心为 $\left(\dfrac{3-1}{2},\dfrac{-2+4}{2}\right)=(1,1)$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{(3+1)^2+(-2-4)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{16+36}}{2}=\dfrac{\sqrt{52}}{2}=\sqrt{13}$。

所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-1)^2&=(\sqrt{13})^2\\x^2-2x+1+y^2-2y+1&=13\\x^2-2x+y^2-2y-11&=0\end{aligned}$$

■

11. 一圆心在 x 轴上的圆经过 $\mathrm{A}(-1,1)$ 及 $\mathrm{B}(1,3)$ 两点。求此圆的方程式。

解:

设圆心为 $(x,0)$，则

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+1)^2+1}&=\sqrt{(x-1)^2+9}\\(x+1)^2+1&=(x-1)^2+9\\x^2+2x+1+1&=x^2-2x+1+9\\4x&=8\\x&=2\end{aligned}$$

所以圆心为 $(2,0)$, 半径为 $\sqrt{(2+1)^2+1}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$。

所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-2)^2+y^2&=10\\x^2-4x+4+y^2&=10\\x^2+y^2-4x-6&=0\end{aligned}$$

■