高一第十七章
指数函数与对数函数

17.2 对数

(选择题)

1. $\log 500$ 等于

解:

$$\begin{aligned}\log 500 &= \log 5 + \log 100\\ &= \log 5 + 2\log 10\\ &= \log 5 + 2\\ &= \log\frac{10}{2} + 2\\ &= \log 10 - \log 2 + 2\\ &= 1 - \log 2 + 2\\ &= 3 - \log 2\end{aligned}$$

2. 若 $p = \log_7\frac{14}{15}, q = \log_7\frac{21}{20}, r = \log_7\frac{49}{50}, p+q-r$ 之值是多少?

解:

$$\begin{aligned}p+q-r &= \log_7\frac{14}{15} + \log_7\frac{21}{20} - \log_7\frac{49}{50}\\ &= \log_7\left(\frac{14}{15}\cdot\frac{21}{20}\cdot\frac{50}{49}\right)\\ &= \log_7 1\\ &= 0\end{aligned}$$

3. 如果 $0<\theta<\frac{\pi}{2}, \log\operatorname{cosec}\theta = ?$

解:

$$\begin{aligned}\log\operatorname{cosec}\theta &= \log\frac{1}{\sin\theta}\\ &= -\log\sin\theta\end{aligned}$$

4. 已知 $\log_2 3 = p$ 与 $\log_2 5 = q$, 求 $\log_2 60$ 之值。

解:

$$\begin{aligned}\log_2 60 &= \log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5\\ &= p + q + 2\end{aligned}$$

5. 求无穷级数 $\log_9\sqrt{3} + \log_9\sqrt{\sqrt{3}} + \log_9\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} + \cdots$ 之和。

解:

$$\begin{aligned}&\log_9\sqrt{3} + \log_9\sqrt{\sqrt{3}} + \log_9\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} + \cdots\\ &= \log_9 3^{\frac{1}{2}} + \log_9 3^{\frac{1}{4}} + \log_9 3^{\frac{1}{8}} + \cdots\\ &= \log_9 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}\\ &= \log_9 3^{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n}\\ &= \log_9 3^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}\\ &= \log_9 3\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. 若 $f(10^x) = x$, 则 $f(3) = ?$

解:

设 $y = 10^x$, 则 $x = \log_{10} y$,

$$\begin{aligned}f(y) &= \log_{10} y\\ f(3) &= \log 3\end{aligned}$$

17.3 对数的换底公式

(选择题)

1. 已知 $\log_9 x = u$, 求 $\log_x 81$ 。

   解:

$$\begin{aligned}\log_x 81 &= \frac{\log_9 81}{\log_9 x} \\ &= \frac{2}{u}\end{aligned}$$

2. $\dfrac{1}{\log_x(xy)} + \dfrac{1}{\log_y(xy)} = ?$

   解:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_x(xy)} + \frac{1}{\log_y(xy)} &= \log_{xy} x + \log_{xy} y \\ &= \log_{xy} xy \\ &= 1\end{aligned}$$

3. $\dfrac{\log_4 2 - \log_2 4}{\log_{0.1} 10 + \log_{0.2} 25} =?$

   解:

$$\begin{aligned}\frac{\log_4 2 - \log_2 4}{\log_{0.1} 10 + \log_{0.2} 25} &= \frac{\frac{1}{2} - 2}{\frac{\log 10}{\log \frac{1}{10}} + \frac{\log_5 25}{\log_5 \frac{1}{5}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - 2}{-1 - 2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. 计算 $[\log_2(4\log_2 4)](\log_8 2 + 1)$ 。

   解:

$$\begin{aligned}[\log_2(4\log_2 4)](\log_8 2 + 1) &= \log_2 8 \cdot \left(\frac{1}{\log_2 8} + 1\right) \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3} \\ &= 4\end{aligned}$$

5. 已知 $\log_2 3 = p$ 及 $\log_2 5 = q$, 求 $\log_5 9$ 值。

   解:

$$\begin{aligned}\log_5 9 &= \frac{\log_2 9}{\log_2 5} \\ &= \frac{\log_2 3^2}{q} \\ &= \frac{2\log_2 3}{q} \\ &= \frac{2p}{q}\end{aligned}$$

7. 设 $\log\alpha$ 及 $\log\beta$ 为 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 的两根, 则 $\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha = ?$

   解:

$$\begin{aligned}2x^2 + 3x + 1 &= 0 \\ (2x+1)(x+1) &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2}, -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \log\alpha &= -\frac{1}{2}, \\ \log\beta &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha &= \frac{\log\beta}{\log\alpha} + \frac{\log\alpha}{\log\beta} \\ &= \frac{-1}{-\frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{2}}{-1} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

8. 如果 $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ 及 $\log_8 b + \log_4 a^2 = 7$, 求 $\log_2 ab$ 的值。

   解:

$$\begin{aligned}\log_8 a + \log_4 b^2 &= 5 \\ \log_8 a + 2\log_4 b &= 5 \\ \frac{\log_2 a}{3} + 2\left(\frac{\log_2 b}{2}\right) &= 5 \\ \frac{\log_2 a}{3} + \log_2 b &= 5 \\ \log_2 a + 3\log_2 b &= 15 \\ \log_2 a &= 15 - 3\log_2 b \\ \log_8 b + \log_4 a^2 &= 7 \\ \log_8 b + 2\log_4 a &= 7\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\log_2 b}{3} + 2\left(\frac{\log_2 a}{2}\right) &= 7 \\
\frac{\log_2 b}{3} + \log_2 a &= 7 \\
\log_2 b + 3\log_2 a &= 21 \\
\log_2 b + 3\left(15 - 3\log_2 b\right) &= 21 \\
8\log_2 b &= 24 \\
\log_2 b &= 3 \\
\log_2 ab &= \log_2 a + \log_2 b \\
&= 15 - 3(3) + 3 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

9. 若 $\log_4 m = a$ 与 $\log_{12} m = b$, 试以 a 与 b 表示 $\log_{48} 3$ 。

   解:

$$
\begin{aligned}
\log_4 m &= a \\
\frac{1}{\log_m 4} &= a \\
\log_m 4 &= \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_{12} m &= b \\
\log_m 12 &= \frac{1}{b} \\
\log_m 4 + \log_m 3 &= \frac{1}{b} \\
\frac{1}{a} + \log_m 3 &= \frac{1}{b} \\
\log_m 3 &= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \\
&= \frac{a-b}{ab}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_{48} 3 &= \frac{\log_m 3}{\log_m 48} \\
&= \frac{\frac{a-b}{ab}}{\log_m 12 + \log_m 4} \\
&= \frac{\frac{a-b}{ab}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} \\
&= \frac{a-b}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} \\
&= \frac{a-b}{a+b}
\end{aligned}
$$

(作答题)

1. 若 $\log_8 3 = p$ 与 $\log_3 5 = q$, 以 p 与 q 表示 $\log_{10} 5$ 与 $\log_{10} 6$ 。

   解:

$$
\begin{aligned}
\log_8 3 &= p \\
\frac{\log_2 3}{\log_2 8} &= p \\
\frac{\log_2 3}{3} &= p \\
\log_2 3 &= 3p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 5 &= \frac{\log_3 5}{\log_3 10} \\
&= \frac{q}{\log_3 5 + \log_3 2} \\
&= \frac{q}{q + \log_3 2} \\
&= \frac{q}{q + \frac{1}{\log_2 3}} \\
&= \frac{q}{q + \frac{1}{3p}} \\
&= \frac{q}{\frac{3pq+1}{3p}} \\
&= \frac{3pq}{3pq+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 6 &= \frac{\log_3 6}{\log_3 10} \\
&= \frac{\log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 5 + \log_3 2} \\
&= \frac{1 + \log_3 2}{q + \log_3 2} \\
&= \frac{1 + \frac{1}{\log_2 3}}{q + \frac{1}{\log_2 3}} \\
&= \frac{1 + \frac{1}{3p}}{q + \frac{1}{3p}} \\
&= \frac{3p+1}{3pq+1}
\end{aligned}
$$

17.4 指数方程式

(选择题)

1. 若 $32^x = 16, x$ 的值为何?

   解:

$$\begin{aligned} 32^x &= 16 \\ 2^{5x} &= 2^4 \\ 5x &= 4 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

2. 若 $e^{2x} + e^x = 6$, 则 x 之值为

   解:

   设 $y = e^x$, 则

$$\begin{aligned} y^2 + y &= 6 \\ y^2 + y - 6 &= 0 \\ (y+3)(y-2) &= 0 \\ y &= -3, 2 \end{aligned}$$

   当 $y = -3$ 时, x 无解; 当 $y = 2$ 时, $x = \ln 2$.

3. 若 $2^x \cdot 4^y = 16$ 及 $3^x - 9^y = 0$, 求 x 与 y 之值。

   解:

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 4^y &= 16 \\ 2^x \cdot 2^{2y} &= 16 \\ 2^{x+2y} &= 16 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x - 9^y &= 0 \\ 3^x &= 9^y \\ 3^x &= 3^{2y} \\ x &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y + 2y &= 4 \\ y &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

4. 若 $e^{2x} = e^x + 12$, 则 x 之值为

   解:

   设 $y = e^x$, 则

$$\begin{aligned} y^2 &= y + 12 \\ y^2 - y - 12 &= 0 \\ (y-4)(y+3) &= 0 \\ y &= 4, -3 \end{aligned}$$

   当 $y = -3$ 时, x 无解; 当 $y = 4$ 时, $x = \ln 4 = 2\ln 2$.

5. 若 $e^{2x} + e^x = 12$, 求 x 的值。

   解: 设 $y = e^x$, 则

$$\begin{aligned} y^2 + y &= 12 \\ y^2 + y &= 0 \\ (y+4)(y-3) &= 0 \\ y &= -4, 3 \end{aligned}$$

   当 $y = -4$ 时, x 无解; 当 $y = 3$ 时, $x = \ln 3$.

6. 若 $2^p = 3^q = 12^r$, 试以 p 及 q 表示 r 的值。

   解:

$$\begin{aligned} 2^p &= 3^q \\ \log_2 2^p &= \log_2 3^q \\ p &= q \log_2 3 \\ \log_2 3 &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^p &= 12^r \\ \log_2 2^p &= \log_2 12^r \\ p &= r \log_2 12 \\ &= r \log_2(2^2 \cdot 3) \\ &= r(2 + \log_2 3) \\ r &= \frac{p}{2 + \log_2 3} \\ &= \frac{p}{2 + \frac{p}{q}} \\ &= \frac{pq}{2q + p} \end{aligned}$$

7. 已知 $3^x=5^y=15^z$, 则 $\dfrac{2(x+y)}{xy}=?$

解:

$$\begin{aligned} 5^y &= 15^z \\ \log_5 5^y &= \log_5 15^z \\ y &= z\log_5 15 \\ &= z\log_5(3\cdot 5) \\ &= z(1+\log_5 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x &= 15^z \\ \log_3 3^x &= \log_3 15^z \\ x &= z\log_3 15 \\ &= z\log_3(3\cdot 5) \\ &= z(1+\log_3 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2(x+y)}{xy} &= \frac{2\left[z(1+\log_3 5)+z(1+\log_5 3)\right]}{z(1+\log_3 5)z(1+\log_5 3)} \\ &= \frac{2\left[\log_3 5+2+\log_5 3\right]}{z(1+\log_3 5\log_5 3+\log_3 5+\log_5 3)} \\ &= \frac{2\left[\log_3 5+2+\log_5 3\right]}{z(1+\frac{\log_3 5}{\log_3 5}+\log_3 5+\log_5 3)} \\ &= \frac{2\left[\log_3 5+2+\log_5 3\right]}{z(1+1+\log_3 5+\log_5 3)} \\ &= \frac{2\left[\log_3 5+2+\log_5 3\right]}{z(2+\log_3 5+\log_5 3)} \\ &= \frac{2}{z} \end{aligned}$$

(作答题)

1. 解联立方程组 $\begin{cases} 9^x-27^y=0 \\ 4^x\cdot 8^y=\dfrac{1}{16} \end{cases}$ 。

解:

$$\begin{aligned} 9^x-27^y &= 0 \\ 3^{2x}-3^{3y} &= 0 \\ 2x &= 3y \\ x &= \frac{3}{2}y \ \cdots\ (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^x\cdot 8^y &= \frac{1}{16} \\ 2^{2x}\cdot 2^{3y} &= 2^{-4} \\ 2x+3y &= -4\ \cdots\ (2) \end{aligned}$$

将 (1) 代入 (2), 得

$$\begin{aligned} 2\cdot\frac{3}{2}y+3y &= -4 \\ 6y &= -4 \\ y &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

将 $y=-\dfrac{2}{3}$ 代入 (1), 得

$$x=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$$

$\therefore\ x=-1, y=-\dfrac{2}{3}.$

2. 若 $3^{x+2}\cdot 2^{x+1}=5^{x+1}$, 求 x 之值准确至二个有效数字。

解:

$$\begin{aligned} 3^{x+2}\cdot 2^{x+1} &= 5^{x+1} \\ 3^x\cdot 9\cdot 2^x\cdot 2 &= 5\cdot 5^x \\ 6^x\cdot 18 &= 5\cdot 5^x \\ \left(\frac{6}{5}\right)^x &= \frac{5}{18} \\ x &= \log_{\frac{6}{5}}\frac{5}{18} \\ &= \frac{\log\frac{5}{18}}{\log\frac{6}{5}} \\ &\approx -7.0 \end{aligned}$$

3. 试用对数表或计算机, 解方程式 $9^x\cdot 2^{2x}=18$, 准确至二位小数。

解:

$$\begin{aligned} 9^x\cdot 2^{2x} &= 18 \\ 3^{2x}\cdot 2^{2x} &= 18 \\ 6^{2x} &= 18 \\ 2x &= \log_6 18 \\ x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\log 18}{\log 6}\right) \\ &\approx 0.81 \end{aligned}$$

4. 解不等式 $3^{2x+1} > 27^{\frac{3}{4}}$ 。

解:

$$\begin{aligned} 3^{2x+1} &> 27^{\frac{3}{4}} \\ 3^{2x+1} &> 3^{\frac{9}{4}} \\ 2x+1 &> \frac{9}{4} \\ 2x &> \frac{5}{4} \\ x &> \frac{5}{8} \end{aligned}$$

5. 解方程式 $4^{x+1} + 2^{x+3} - 5 = 0$ 。

解:

设 $y = 2^x$, 则

$$\begin{aligned} 4^{x+1} + 2^{x+3} - 5 &= 0 \\ 2^{2x+2} + 2^{x+3} - 5 &= 0 \\ 2^2 \cdot 2^{2x} + 2^3 \cdot 2^x - 5 &= 0 \\ 4y^2 + 8y - 5 &= 0 \\ (2y-1)(2y+5) &= 0 \\ y &= \frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

当 $y = -\frac{5}{2}$ 时, x 无解; 当 $y = \frac{1}{2}$ 时, $x = -1$.

6. 解联立方程组 $\begin{cases} 3^x - 5^{y+1} = 8 \\ 3^{x-1} + 5^{y+2} = 8 \end{cases}$ 。

解:

$$\begin{aligned} 3^x - 5^{y+1} &= 8 \\ 3^x - 5 \cdot 5^y &= 8 \\ 3^x &= 8 + 5 \cdot 5^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{x-1} + 5^{y+2} &= 8 \\ \frac{3^x}{3} + 25 \cdot 5^y &= 8 \\ \frac{8 + 5 \cdot 5^y}{3} + 25 \cdot 5^y &= 8 \end{aligned}$$

设 $t = 5^y$, 则

$$\begin{aligned} \frac{8+5t}{3} + 25t &= 8 \\ 8 + 5t + 75t &= 24 \\ 80t &= 16 \\ t &= \frac{1}{5} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x &= 8 + 5 \cdot 5^{-1} \\ &= 8 + 1 \\ &= 9 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$\therefore\ x = 2, y = -1.$

7. 求联立方程式组 $\begin{cases} 2^x + 2^y = 9 \\ 2^{x+y} = 8 \end{cases}$ 的解集。

解:

$$\begin{aligned} 2^{x+y} &= 8 \\ x + y &= 3 \\ y &= 3 - x \end{aligned}$$

设 $t = 2^x$, 则

$$\begin{aligned} t + 2^{3-x} &= 9 \\ t + \frac{8}{t} &= 9 \\ t^2 - 9t + 8 &= 0 \\ (t-1)(t-8) &= 0 \\ t &= 1, 8 \end{aligned}$$

当 $t = 1$ 时, $x = 0$, $y = 3$; 当 $t = 8$ 时, $x = 3$, $y = 0$.

$\therefore \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$.

8. 解方程式 $3^x - 3^{-x} = 2$ 。

解:

设 $y = 3^x$, 则

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{y} &= 2 \\ y^2 - 1 &= 2y \\ y^2 - 2y - 1 &= 0 \\ y &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

当 $y=1-\sqrt{2}$ 时, x 无解; 当 $y=1+\sqrt{2}$ 时, $x=\log_3(1+\sqrt{2})\approx 0.8023$.

9. 解 $5\cdot 2^{x-1}=3\cdot 7^x$ 。

解:

$$\begin{aligned}
5\cdot 2^{x-1}&=3\cdot 7^x\\
\frac{5}{2}\cdot 2^x&=3\cdot 7^x\\
\left(\frac{2}{7}\right)^x&=\frac{6}{5}\\
x&=\log_{\frac{2}{7}}\frac{6}{5}\\
&=\frac{\log\frac{6}{5}}{\log\frac{2}{7}}\\
&\approx -0.1455
\end{aligned}$$

10. 解方程式 $2^{x+1}+2^{-x}=3$ 。

解:

设 $y=2^x$, 则

$$\begin{aligned}
2y+\frac{1}{y}&=3\\
2y^2+1&=3y\\
2y^2-3y+1&=0\\
(2y-1)(y-1)&=0\\
y&=\frac{1}{2},1
\end{aligned}$$

当 $y=\frac{1}{2}$ 时, $x=-1$; 当 $y=1$ 时, $x=0$.

11. 解方程式 $2e^x+e^{-x}=3$ 。

解:

设 $y=e^x$, 则

$$\begin{aligned}
2y+\frac{1}{y}&=3\\
2y^2+1&=3y\\
2y^2-3y+1&=0\\
(2y-1)(y-1)&=0\\
y&=\frac{1}{2},1
\end{aligned}$$

当 $y=\frac{1}{2}$ 时, $x=-\ln 2$; 当 $y=1$ 时, $x=0$.

12. 解方程式 $4^{2x+1}+3\cdot 20^x-10\cdot 25^x=0$ 。

解:

无解

13. 解方程式 $3\left(4^{x+1}\right)-35\left(6^x\right)+2\left(9^{x+1}\right)=0$ 。

解:

$$\begin{aligned}
3(4^{x+1})-35(6^x)+2(9^{x+1})&=0\\
12(2^x)^2-35\cdot 3^x\cdot 2^x+18(3^x)^2&=0\\
[4(2^x)-9(3^x)][3(2^x)-2(3^x)]&=0\\
4(2^x)-9(3^x)=0 \text{ or } 3(2^x)-2(3^x)&=0\\
\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{9}{4} \text{ or } \left(\frac{2}{3}\right)^x&=\frac{2}{3}\\
x=-2 \text{ or } x&=1
\end{aligned}$$

14. 解不等式 $84\cdot 3^x-243\geq 3^{2x}$ 。

解:

$$\begin{aligned}
(3^x)^2-84\cdot 3^x+243&\leq 0\\
(3^x-81)(3^x-3)&\leq 0\\
3\leq 3^x&\leq 81\\
1\leq x&\leq 4
\end{aligned}$$

17.5 对数方程式

(选择题)

2. 若 x 是正数, 且 $\log x\geq\log 2+\frac{1}{2}\log x$, 则

解:

$$\begin{aligned}
\log x&\geq\log 2+\frac{1}{2}\log x\\
\log x&\geq\log 2+\log\sqrt{x}\\
\log x&\geq\log 2\sqrt{x}\\
x&\geq 2\sqrt{x}\\
x^2&\geq 4x\\
x^2-4x&\geq 0\\
x(x-4)&\geq 0\\
x\geq 4 &\text{ 或 } x\leq 0
\end{aligned}$$

3. 已知 $\log_x 3 + 2\log_3 x = 3$, 则 $x = ?$

解:

$$\begin{aligned}\log_x 3 + 2\log_3 x &= 3\\ \log_x 3 + \frac{2}{\log_x 3} &= 3\end{aligned}$$

设 $y = \log_x 3$, 则

$$\begin{aligned}y + \frac{2}{y} &= 3\\ y^2 - 3y + 2 &= 0\\ (y-1)(y-2) &= 0\\ y &= 1, 2\end{aligned}$$

当 $y = 1$ 时, $x = 3$; 当 $y = 2$ 时, $x = \sqrt{3}$.

4. 若 $\log_4 x + (\log_4 x)^2 + (\log_4 x)^3 + (\log_4 x)^4 + \cdots = 1$, 求 x 的值。

解:

$$\begin{aligned}\log_4 x + (\log_4 x)^2 + (\log_4 x)^3 + (\log_4 x)^4 + \cdots &= 1\\ \sum_{n=1}^{\infty} (\log_4 x)^n &= 1\\ \frac{\log_4 x}{1 - \log_4 x} &= 1\\ \log_4 x &= 1 - \log_4 x\\ 2\log_4 x &= 1\\ \log_4 x &= \frac{1}{2}\\ x &= 4^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

5. 若 $1 + \log_a(5x + 2a) = 2\log_a x + \log_a 3$, 式中 a 为正数, 则 x 的解集是

解:

$$\begin{aligned}1 + \log_a(5x + 2a) &= 2\log_a x + \log_a 3\\ \log_a[a(5x + 2a)] &= \log_a(3x^2)\\ a(5x + 2a) &= 3x^2\\ 3x^2 - 5ax - 2a^2 &= 0\\ (3x + a)(x - 2a) &= 0\\ x &= -\frac{a}{3}, 2a\end{aligned}$$

$\therefore x$ 的解集为 $\{2a\}$.

6. 求方程式 $x^{\log x - 1} = 100$ 的解集。

解:

$$\begin{aligned}x^{\log x - 1} &= 100\\ \log x^{\log x - 1} &= \log 100\\ (\log x)(\log x - 1) &= 2\\ (\log x)^2 - \log x - 2 &= 0\\ (\log x - 2)(\log x + 1) &= 0\\ \log x &= 2, -1\\ x &= 100, \frac{1}{10}\end{aligned}$$

$\therefore x$ 的解集为 $\{100, 0.1\}$.

7. 若 $\ln[\log_3(\log_2 x)] = 0$, 求 $x^{-\frac{1}{2}}$ 。

解:

$$\begin{aligned}\ln[\log_3(\log_2 x)] &= 0\\ \log_3(\log_2 x) &= 1\\ \log_2 x &= 3\\ x &= 2^3\\ &= 8\end{aligned}$$

$\therefore x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

8. 解方程式 $\log_2 x + \log_8 x = 2\log_2 x \cdot \log_8 x$ 。

解:

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_8 x &= 2\log_2 x \cdot \log_8 x \\ \log_2 x + \frac{\log_2 x}{3} &= 2\log_2 x \cdot \frac{\log_2 x}{3}\end{aligned}$$

设 $y = \log_2 x$, 则

$$\begin{aligned}y + \frac{y}{3} &= 2y \cdot \frac{y}{3} \\ y + \frac{y}{3} &= \frac{2y^2}{3} \\ 3y + y &= 2y^2 \\ y^2 - 2y &= 0 \\ y(y-2) &= 0 \\ y &= 0, 2\end{aligned}$$

当 $y = 0$ 时, $x = 1$; 当 $y = 2$ 时, $x = 4$.

9. 求对数方程式 $2\log_x 8 - 3\log_8 x = 1$ 的解集。

解:

$$\begin{aligned}2\log_x 8 - 3\log_8 x &= 1 \\ \frac{2\log_2 8}{\log_2 x} - \frac{3\log_2 x}{\log_2 8} &= 1 \\ \frac{6}{\log_2 x} - \frac{3\log_2 x}{3} &= 1 \\ \frac{6}{\log_2 x} - \log_2 x &= 1 \\ \frac{6 - \log_2^2 x}{\log_2 x} &= 1 \\ \log_2^2 x + \log_2 x - 6 &= 0 \\ (\log_2 x - 2)(\log_2 x + 3) &= 0 \\ \log_2 x &= 2, -3 \\ x &= 4, \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$\therefore$ 解集为 $\left\{4, \frac{1}{8}\right\}$.

10. 如果 $4^{\log_2\left(x^2-2x-20\right)} = 2^{\log_4 256}$, 求 x 。

解:

$$\begin{aligned}4^{\log_2(x^2-2x-20)} &= 2^{\log_4 256} \\ 2^{2\log_2(x^2-2x-20)} &= 2^4 \\ \log_2(x^2-2x-20) &= 2 \\ x^2 - 2x - 20 &= 4 \\ x^2 - 2x - 24 &= 0 \\ (x-6)(x+4) &= 0 \\ x &= 6, -4\end{aligned}$$

11. 解不等式 $\log(4-x^2) - \log(2+x) > 0$ 。

解:

$$\begin{aligned}\log(4-x^2) - \log(2+x) &> 0 \\ \log\frac{4-x^2}{2+x} &> 0 \\ \frac{4-x^2}{2+x} &> 1 \\ 4 - x^2 &> 2 + x \\ x^2 + x - 2 &< 0 \\ (x+2)(x-1) &< 0 \\ -2 < x &< 1\end{aligned}$$

（作答题）

1. 若 $4\log_9 x = 4 + 3\log_x 9$, 试求 x 之值。

解:

$$\begin{aligned}4\log_9 x &= 4 + 3\log_x 9 \\ \frac{4}{\log_x 9} &= 4 + 3\log_x 9\end{aligned}$$

设 $y = \log_x 9$, 则

$$\begin{aligned}\frac{4}{y} &= 4 + 3y \\ 4 &= 4y + 3y^2 \\ 3y^2 + 4y - 4 &= 0 \\ (3y-2)(y+2) &= 0 \\ y &= \frac{2}{3}, -2\end{aligned}$$

当 $y = \frac{2}{3}$ 时,

$$\begin{aligned}\log_x 9 &= \frac{2}{3} \\ x^{\frac{2}{3}} &= 9 \\ x &= 9^{\frac{3}{2}} \\ &= 27\end{aligned}$$

当 $y=-2$ 时,

$$\begin{aligned}\log_x 9 &= -2\\ x^{-2} &= 9\\ x &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\therefore x=27$ 或 $x=\frac{1}{3}$.

2. 解方程式 $\log_2 x=\log_x 4$, 答案准确至二位有效数字。

解:

$$\begin{aligned}\log_2 x &= \log_x 4\\ \log_2 x &= \frac{2}{\log_2 x}\\ (\log_2 x)^2 &= 2\\ \log_2 x &= \sqrt{2}\ (x>0)\\ x &= 2^{\sqrt{2}}\\ &\approx 2.7\end{aligned}$$

3. 解不等式 $\log\frac{10x-x^2}{21}>0$ 。

解:

$$\begin{aligned}\log\frac{10x-x^2}{21} &> 0\\ \frac{10x-x^2}{21} &> 1\\ x^2-10x+21 &< 0\\ (x-3)(x-7) &< 0\\ 3<x &< 7\end{aligned}$$

4. 解方程式 $4\log_2 x=\log_x 4+\log_8 2$ 。

解:

$$\begin{aligned}4\log_2 x &= \log_x 4+\log_8 2\\ 4\log_2 x &= \frac{2}{\log_2 x}+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

设 $y=\log_2 x$, 则

$$\begin{aligned}4y &= \frac{2}{y}+\frac{1}{3}\\ 12y^2-y-6 &= 0\\ (4y-3)(3y+2) &= 0\\ y &= -\frac{2}{3},\frac{3}{4}\end{aligned}$$

当 $y=-\frac{2}{3}$ 时,

$$\begin{aligned}\log_2 x &= -\frac{2}{3}\\ x &= 2^{-\frac{2}{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

当 $y=\frac{3}{4}$ 时,

$$\begin{aligned}\log_2 x &= \frac{3}{4}\\ x &= 2^{\frac{3}{4}}\\ &= \sqrt[4]{8}\end{aligned}$$

$\therefore x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 或 $x=\sqrt[4]{8}$.

5. 解方程式 $\log_4 x+\log_2 x=6$ 。

解:

$$\begin{aligned}\log_4 x+\log_2 x &= 6\\ \frac{\log_2 x}{2}+\log_2 x &= 6\\ \frac{3}{2}\log_2 x &= 6\\ \log_2 x &= 4\\ x &= 2^4\\ &= 16\end{aligned}$$

6. 解方程式 $\frac{3}{2}\log_{10} x^3-\log_{10}\sqrt{x}-2\log_{10} x=4$ 。

解:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\log_{10} x^3-\log_{10}\sqrt{x}-2\log_{10} x &= 4\\ \frac{9}{2}\log_{10} x-\frac{1}{2}\log_{10} x-2\log_{10} x &= 4\end{aligned}$$

设 $y=\log_{10} x$, 则

$$\begin{aligned}\frac{9}{2}y-\frac{1}{2}y-2y &= 4\\ 9y-y-4y &= 8\\ 4y &= 8\\ y &= 2\\ \log_{10} x &= 2\\ x &= 10^2\\ &= 100\end{aligned}$$

7. 解方程式 $\log_2 x^2 + \log_x 8 = 5$ 。

解:

$$\begin{aligned} \log_2 x^2 + \log_x 8 &= 5 \\ 2\log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} &= 5 \end{aligned}$$

设 $y = \log_2 x$, 则

$$\begin{aligned} 2y + \frac{3}{y} &= 5 \\ 2y^2 + 3 &= 5y \\ 2y^2 - 5y + 3 &= 0 \\ (2y-3)(y-1) &= 0 \\ y &= \frac{3}{2}, 1 \end{aligned}$$

当 $y = \frac{3}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \frac{3}{2} \\ x &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

当 $y = 1$ 时,

$$\begin{aligned} \log_2 x &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$\therefore x = 2\sqrt{2}$ 或 $x = 2$.

8. 解方程式 $\log_3 x - 2\log_x 3 = 1$ 。

解:

$$\begin{aligned} \log_3 x - 2\log_x 3 &= 1 \\ \log_3 x - \frac{2}{\log_3 x} &= 1 \end{aligned}$$

设 $y = \log_3 x$, 则

$$\begin{aligned} y - \frac{2}{y} &= 1 \\ y^2 - y - 2 &= 0 \\ (y-2)(y+1) &= 0 \\ y &= 2, -1 \end{aligned}$$

当 $y = 2$ 时,

$$\begin{aligned} \log_3 x &= 2 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

当 $y = -1$ 时,

$$\begin{aligned} \log_3 x &= -1 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

9. 解方程式 $\log\sqrt{x-21} + \frac{1}{2}\log x = 1$ 。

解:

$$\begin{aligned} \log\sqrt{x-21} + \frac{1}{2}\log x &= 1 \\ \log\sqrt{x-21} + \log\sqrt{x} &= 1 \\ \log\sqrt{x-21}\sqrt{x} &= 1 \\ \log\sqrt{x^2-21x} &= 1 \\ \sqrt{x^2-21x} &= 10 \\ x^2 - 21x &= 100 \\ x^2 - 21x - 100 &= 0 \\ (x-25)(x+4) &= 0 \\ x &= 25\ (x > 21) \end{aligned}$$

10. 若 $\log_a(2x^2-8) > \log_a(x^2-3x+2)$, 其中 $0 < a < 1$, 求 x 的限制范围。

解:

$$\begin{aligned} \log_a(2x^2-8) &> \log_a(x^2-3x+2) \\ 2x^2 - 8 &< x^2 - 3x + 2 \\ x^2 + 3x - 10 &< 0 \\ (x+5)(x-2) &< 0 \\ -5 < x &< 2 \end{aligned}$$

11. 解方程式 $\log_2 x^2 + \log_x 8 = 7$ 。

解:

$$\begin{aligned} \log_2 x^2 + \log_x 8 &= 7 \\ 2\log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} &= 7 \end{aligned}$$

设 $y = \log_2 x$, 则

$$\begin{aligned} 2y + \frac{3}{y} &= 7 \\ 2y^2 + 3 &= 7y \\ 2y^2 - 7y + 3 &= 0 \\ (2y-1)(y-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2}, 3$$

当 $y = \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \frac{1}{2} \\ x &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

当 $y = 3$ 时,

$$\begin{aligned} \log_2 x &= 3 \\ x &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$\therefore x = \sqrt{2}$ 或 $x = 8$.

12. 解方程式 $\log_3(3^x + 8) = \frac{x}{2} + 1 + \log_3 2$ 。

解:

$$\begin{aligned} \log_3(3^x + 8) &= \frac{x}{2} + 1 + \log_3 2 \\ \log_3(3^x + 8) - \log_3 2 &= \frac{x}{2} + 1 \\ \log_3\left(\frac{3^x + 8}{2}\right) &= \frac{x}{2} + 1 \\ \frac{3^x + 8}{2} &= 3^{\frac{x}{2}+1} \\ 3^x + 8 &= 2 \cdot 3^{\frac{x}{2}+1} \\ 3^x + 8 &= 6 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

设 $y = 3^{\frac{x}{2}}$, 则

$$\begin{aligned} y^2 + 8 &= 6y \\ y^2 - 6y + 8 &= 0 \\ (y-2)(y-4) &= 0 \\ y &= 2, 4 \end{aligned}$$

当 $y = 2$ 时,

$$\begin{aligned} 3^{\frac{x}{2}} &= 2 \\ \frac{x}{2} &= \log_3 2 \\ x &= 2\log_3 2 \end{aligned}$$

当 $y = 4$ 时,

$$\begin{aligned} 3^{\frac{x}{2}} &= 4 \\ \frac{x}{2} &= \log_3 4 \\ x &= 4\log_3 2 \end{aligned}$$

$\therefore x = 2\log_3 2$ 或 $x = 4\log_3 2$.

13. 解方程式 $3^{2\log x} - 4\left(3^{\log x}\right) + 3 = 0$ 。

解:

设 $y = 3^{\log x}$, 则

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 3 &= 0 \\ (y-3)(y-1) &= 0 \\ y &= 3, 1 \end{aligned}$$

当 $y = 3$ 时,

$$\begin{aligned} 3^{\log x} &= 3 \\ \log x &= 1 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

当 $y = 1$ 时,

$$\begin{aligned} 3^{\log x} &= 1 \\ \log x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore x = 10$ 或 $x = 1$.

14. 解方程式 $\log_4(3-x) + \log_{0.25}(3+x) = \log_4(1-x) + \log_{0.25}(2x+1)$ 。

解:

$$\begin{aligned} \log_4(3-x) + \log_{0.25}(3+x) &= \log_4(1-x) \\ &\quad + \log_{0.25}(2x+1) \\ \log_4 \frac{3-x}{1-x} &= \log_{0.25} \frac{2x+1}{3+x} \\ &= \log_4 \frac{3+x}{2x+1} \\ \frac{3-x}{1-x} &= \frac{3+x}{2x+1} \\ (3-x)(2x+1) &= (3+x)(1-x) \\ -2x^2 + 5x + 3 &= -x^2 - 2x + 3 \\ x^2 - 7x &= 0 \\ x(x-7) &= 0 \\ x &= 0, 7 \end{aligned}$$

17.6 对数函数及其图象

(选择题)

1. 函数 $y=(0.2)^{-x}+1$ 的反函数是

   解: 设 $f(x)=(0.2)^{-x}+1$,

   设 $y=f^{-1}(x)$, 则 $f(y)=x$,

$$
\begin{aligned}
(0.2)^{-y}+1&=x\\
(0.2)^{-y}&=x-1\\
(0.2)^{y}&=\frac{1}{x-1}\\
y&=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{x-1}\\
&=\log_5(x-1)\\
\therefore f^{-1}(x)&=\log_5(x-1)
\end{aligned}
$$

2. 求函数 $f(x)=\sqrt{\log_2\left(x^2+8x+8\right)}$ 的定义域。

   解:

$$
\begin{aligned}
\log_2(x^2+8x+8)&\geq 0\\
x^2+8x+8&\geq 1\\
x^2+8x+7&\geq 0\\
(x+1)(x+7)&\geq 0\\
x\leq -7 \text{ 或 } x&\geq -1
\end{aligned}
$$

   $\therefore$ 定义域为 $(-\infty,-7]\cup[-1,+\infty)$.

(作答题)

1. 设函数 f 的定义为 $f:x\to\log\left(9-x^2\right)$ 。试求函数的定义域及值域。

   解:

$$
\begin{aligned}
9-x^2&>0\\
(x+3)(x-3)&<0\\
-3<x&<3
\end{aligned}
$$

   $\therefore$ 定义域为 $(-3,3)$.

   由于 $x^2\geq 0$, $\therefore 9-x^2\leq 9$, $\therefore \log(9-x^2)\leq\log 9$,
   $\therefore$ 值域为 $(-\infty,\log 9]$.