

5.3 圆的标准方程式

(选择题)

1. 求以 $(6, 7)$ 与 $(4, -3)$ 之连线为直径之圆的方程式。

解:

$$\text{半径为 } \frac{\sqrt{(6-4)^2 + (7-(-3))^2}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 10^2}}{2} = \frac{\sqrt{104}}{2} = \frac{2\sqrt{26}}{2} = \sqrt{26},$$

$$\text{圆心为 } \left(\frac{6+4}{2}, \frac{7+(-3)}{2} \right) = (5, 2), \text{ 所以方程式为 } (x-5)^2 + (y-2)^2 = 26. \quad \blacksquare$$

2. 如果圆 $x^2 + y^2 = 4^2$ 上的一点 P 到直线 $4x + 3y - 60 = 0$ 的距离是最小, 求 P 点的坐标。

解:

$$4x + 3y - 60 = 0$$

$$3y = -4x + 60$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 20$$

$$m = -\frac{4}{3}$$

直线穿过圆心的法线方程为

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 0)$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

代入圆的方程得

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x \right)^2 = 4^2$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 16$$

$$\frac{25}{16}x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{256}{25}$$

$$x = \pm \frac{16}{5}$$

$$\text{当 } x = \frac{16}{5} \text{ 时, } y = \frac{12}{5}, \text{ 当 } x = -\frac{16}{5} \text{ 时, } y = -\frac{12}{5}. \quad \blacksquare$$

$$\text{所以 P 点的坐标为 } \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5} \right).$$

3. 求由圆 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$ 上的一点到直线 $3x + 4y = 2$ 的最短距离。

解:

直线 $3x + 4y = 2$ 与圆心 $(5, 3)$ 的距离为 $\frac{|3(5) + 4(3) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15 + 12 - 2|}{5} = 5$ 。

圆的半径为 3, 所以最短距离为 $5 - 3 = 2$ 。 ■

4. 点 $(5, 3)$ 是圆 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ 的一直径的端点。求此直径另一端点的坐标。

解:

设另一端点为 (x, y) , 已知圆心为 $(2, -1)$, 根据中点公式得

$$\frac{5+x}{2} = 2$$

$$5+x = 4$$

$$x = -1$$

$$\frac{3+y}{2} = -1$$

$$3+y = -2$$

$$y = -5$$

所以另一端点的坐标为 $(-1, -5)$ 。 ■

(作答题)

1. 一正方形的四顶点 A, B, C, D 顺序依反时针方向排列。若 A 点的座标为 $(1, 3)$, BD 落于直线 $2x + y + 5 = 0$ 上。试求出 B, C, D 三点的坐标。(不准用图解法。)

解:

直线 $2x + y + 5 = 0$ 的斜率为 -2 , 该直线过点 $(1, 3)$ 的法线斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以法线方程为

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

代入直线方程得

$$2x + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + 5 = 0$$

$$4x + x + 5 + 10 = 0$$

$$5x = -15$$

$$x = -3$$

$$y = \frac{1}{2}(-3) + \frac{5}{2}$$

$$= 1$$

所以正方形的中心为 $M(-3, 1)$ 。

设 B 点和 C 点的坐标为 $(x, -2x - 5)$ 。

$$\begin{aligned}\frac{AM}{MB} &= \tan 45^\circ = 1 \\ \frac{\sqrt{(-3-1)^2 + (1-3)^2}}{\sqrt{(x+3)^2 + (-2x-6)^2}} &= 1 \\ \sqrt{20} &= \sqrt{(x+3)^2 + 4(x+3)^2} \\ 20 &= 5(x+3)^2 \\ 4 &= (x+3)^2 \\ x+3 &= \pm 2 \\ x &= -5, -1\end{aligned}$$

所以 B 及 D 的坐标分别为 $(-5, 5)$ 和 $(-1, -3)$ 。 ■

设 C 点的坐标为 (x, y) , 由正方形的性质得

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2} &= -3 \\ x &= -7 \\ \frac{y+3}{2} &= 1 \\ y &= -1\end{aligned}$$

所以 C 点的坐标为 $(-7, -1)$ 。 ■

2. 试求以 A(2, 0) 及 B(6, 0) 之联线为直径的圆之方程式。

解:

圆心为 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 0)$, 半径为 $\frac{\sqrt{(6-2)^2 + (0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$ 。

所以方程式为

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (y-0)^2 &= 2^2 \\ (x-4)^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 &= 4 \\ x^2 - 8x + y^2 + 12 &= 0\end{aligned}$$

若此圆与直线 $y = mx$ 相交于 P 及 Q 两点, 试证 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。 ■

解:

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + (mx)^2 + 12 &= 0 \\ x^2 - 8x + m^2x^2 + 12 &= 0 \\ (1+m^2)x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ d = 8^2 - 4(1+m^2)12 &> 0 \\ 64 - 48(1+m^2) &> 0 \\ 48(1+m^2) &< 64 \\ 1+m^2 &< \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$m^2 < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

又, 试求 $OP \times OQ$ 之值, 其中 O 为原点。

解:

设 $m = 0$, 则 $P(2, 0)$, $Q(6, 0)$, 所以 $OP \times OQ = 2 \times 6 = 12$ 。

3. 已知两条直线 $l_1: 2x - 3y + 2 = 0$ 和 $l_2: 3x - 2y + 3 = 0$ 与圆心为 M 的一圆相交, 且 l_1 与 l_2 被截在圆内的两条线段的长度分别为 26 及 24, 求圆心 M 的轨迹方程式。

解:

设圆心为 (x, y) , 半径为 r ,

圆心到直线 l_1 的距离为 $\frac{|2x - 3y + 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2x - 3y + 2|}{\sqrt{13}}$,

圆心到直线 l_2 的距离为 $\frac{|3x - 2y + 3|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3x - 2y + 3|}{\sqrt{13}}$ 。

利用毕氏定理, 得

$$r^2 = \left(\frac{|2x - 3y + 2|}{\sqrt{13}} \right)^2 + 13^2$$

$$r^2 = \left(\frac{|3x - 2y + 3|}{\sqrt{13}} \right)^2 + 12^2$$

两式相等,

$$\begin{aligned} \left(\frac{|2x - 3y + 2|}{\sqrt{13}} \right)^2 + 13^2 &= \left(\frac{|3x - 2y + 3|}{\sqrt{13}} \right)^2 + 12^2 \\ \frac{(2x - 3y + 2)^2}{13} + 169 &= \frac{(3x - 2y + 3)^2}{13} + 144 \\ \frac{(2x - 3y + 2)^2}{13} - \frac{(3x - 2y + 3)^2}{13} &= -25 \\ (2x - 3y + 2)^2 - (3x - 2y + 3)^2 &= -325 \\ 4x^2 + 9y^2 + 4 - 12xy - 12y + 8x - (9x^2 + 4y^2 + 9 - 12xy - 12y + 18x) &= -325 \\ 4x^2 + 9y^2 + 4 - 12y + 8x - 9x^2 - 4y^2 - 9 + 12y - 18x &= -325 \\ -5x^2 + 5y^2 - 10x - 5 &= -325 \\ 5x^2 - 5y^2 + 10x - 320 &= 0 \\ x^2 - y^2 + 2x - 64 &= 0 \end{aligned}$$

4. 已知 A 点为 (x_1, y_1) , B 点为 (x_2, y_2) , 证明以 AB 为弦的圆的方程式为 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ 。

一动圆经过一定点 $P(h, k)$ 与 y 轴相切, 求直径 PR 的端点 R 的轨迹方程式。

[1999 年第 8 (b) 题]

[5.3] 四的一☐方程式

(选择题)

1. 一财的四心为 $(2, 3)$ 且过点 $(3, -2)$, 求该☐之方程式。

A $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 13 = 0$

B $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 13 = 0$

C $x^2 + y^2 = 13$

D $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 13 = 0$

E $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 13 = 0$

[1982 年第 10 题]

2. 求圆 $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ 之半径。

A $\sqrt{29}$

B 5

C $\frac{7}{2}$

D 1

E 以上皆非

[1983 年第 10 题]

3. 求圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 之面积。

A 2π

B 4π

C 5π

D 6π

E 9π

[1984 年第 18 题]

4. 若 A 及 B 分别为圆 $x^2 + y^2 - 6y = 0$ 及 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 的圆心, 则直线 AB 之方程式

为 _____。

A $x + y + 3 = 0$ **B** $x - y + 3 = 0$ **C** $x - y = 3$ **D** $x + y = 3$ **E** $x = y$

[1986 年第 3 题]

5. 由点 A(6, 6) 至圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ 之最短距离为 _____。

A 8

B 5

C 4

D 3

E 2

[1990 年第 17 题]

6. 求点 $(9, 4)$ 到圆 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ 的最短距离。

A $2\sqrt{2}$

B 4

C $3\sqrt{2}$

D 6

E $5\sqrt{2}$

[1992 年第 11 题]

7. 两个圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ 及 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 的关系是 \sim°
- A 它们彼此相离
B 它们彼此相交
C 一圆内切另一圆
D 一圆外切另一圆
E 一圆落在另一圆之内
8. 求圆心为 $(-3, 0)$ 且圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的圆周加以平分圆的方程。
- A $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 26 = 0$
B $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$
C $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$
D $x^2 + y^2 + 6x - 26 = 0$
E $x^2 + y^2 + 6x - 3 = 0$

[1996 年第 14 题]

9. 如果圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 与 x 轴相切于原点, 下列哪项是对的?
- A $F = 0, D \neq 0, E \neq 0$
B $E = 0, F = 0, D \neq 0$
C $D = 0, F = 0, E \neq 0$
D $D = 0, E = 0, F \neq 0$
E $D = 0, E = 0, F = 0$

[2002 年第 13 题]

10. 已知 P 及 Q 分别是点 $(3, -2)$ 和 $(-1, 4)$ 。若 PQ 是一圆的直径, 求此圆的方程式。
- A $2x^2 + 2y^2 - x + y - 6 = 0$
B $x^2 + y^2 + 2x - y - 9 = 0$
C $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$
D $2(x^2 + y^2) - x + 2y - 2 = 0$
E $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$

[2007 年第 11 题]

11. 一圆心在 x 轴上的圆经过 $A(-1, 1)$ 及 $B(1, 3)$ 两点。求此圆的方程式。
- A $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$
B $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$
C $x^2 + y^2 + 4x + 6 = 0$
D $x^2 + y^2 + 4x - 6 = 0$
E $x^2 + y^2 - 4y + 6 = 0$

[2010 年第 11 题]

(作答题)

1. (i) 求圆 $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ 的圆心与半径。

(ii) 设 O 为坐标之原点, 若直线 OC 割此圆于 P, Q 两点, 求 OP 及 OQ 之长度。

(iii) 求此圆与 x -轴交点之坐标。

注: C 为圆心。

[1975 年第 24 题]

2. 一圆切 x 轴于 $(4, 0)$, 截 y 轴于 $(0, 6)$ 。试求此圆之方程式。

[1979 年第 8(a) 题]

3. 求圆心在 x 轴上, 且经过二已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0, x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ 的交点的圆之方程式。

4. 求通过二圆 $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0, x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ 的交点且圆心落于直线 $x + 2y + 3 = 0$ 上的圆之方程式。

[1984 年第 3(b) 题]

5. C 为一圆, 其一弦之中点, 长度及方程式分别为 $(1, 1), 8$ 及 $3x - 4y + 1 = 0$ 。若 C 通过点 $(8, 2)$, 求 C 之方程式。

(12%)

[1988 年第 3 题]

6. 求通过点 $(1, -1)$ 和两圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0, x^2 + y^2 + 3x - 1 = 0$ 的交点的圆的方程式。

(4%)

[1992 年第 8(b) 题]

7. 试求通过两圆

$$x^2 + y^2 - 2x + 5y - 6 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + 3x - y + 1 = 0$$

的交点且圆心在直线 $x + y = 6$ 上的圆的方程式。

[1995 年第 8 (a) 题]

8. 一圆的圆心为 $A(8, 6)$, 并与另一圆 $5x^2 + 5y^2 - 32x - 24y + 75 = 0$ 内切, 求此圆的方程式。

[2002 年第 9 (b) 题]

9. 两对直线对 AB 与 AD, CB 与 CD 的方程式依序是

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x - 3y - 9 = 0$$

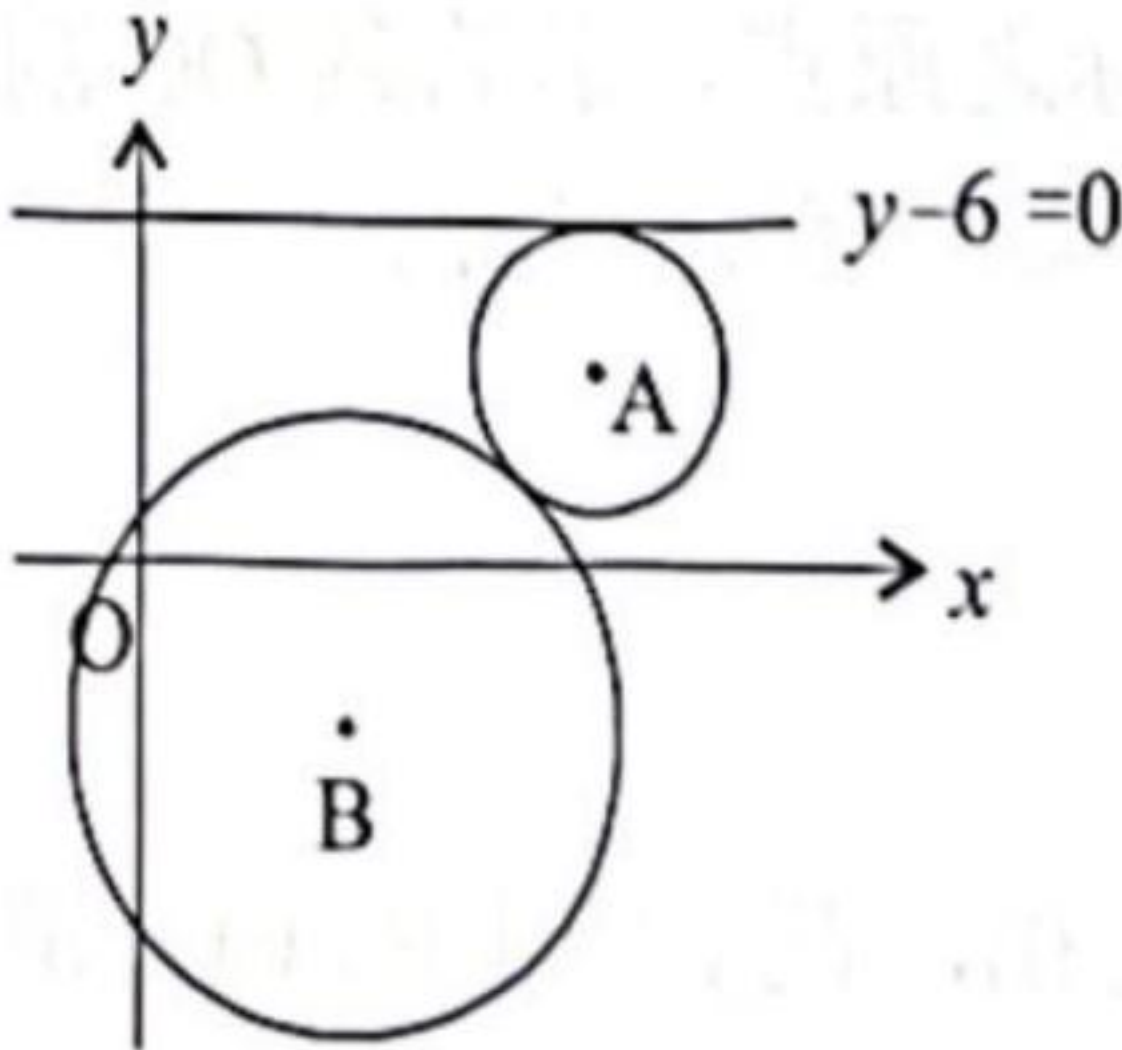
$$2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x + 3y - 9 = 0$$

(i) 求它们的交点 A, B, C 与 D 的坐标。

(ii) 试证四边形 $ABCD$ 是一个菱形。

(iii) 求此菱形的面积。

10. 如图所示, 以 A 为圆心之圆与直线 $y - 6 = 0$ 及以 B 为圆心之圆 $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 外切。求点 A 的轨迹方程式。



[2009 年第 7(b) 题]

11. 已知 A, B 两点的坐标分别是 $(-1, 0)$ 及 $(0, 2)$ 。若 P 是圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 上的任意点, 求 $\triangle PAB$ 的面积的最大可能值。

15.4] 四的切线

(选择题)

- 求圆 $x^2 + y^2 = 50$, 在点 $(1, -7)$ 的切线方程式.
 - A $2x + 2y = 25$
 - B $x - 7y = 50$
 - C $x + 7y = 50$
 - D $7x + y = 50$
 - E $x + y = 50$

[1977 年第 14 题]

- 求自点 $(3, 3)$ 至圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 的切线的长。
 - A 5

- B $\sqrt{17}$
- C 25
- D 10
- E $\sqrt{33}$

[1977 年第 15 题]

3. 求自点 $(3, 4)$ 至圆 $x^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 的切线长。

- A $\sqrt{29}$
- B 4
- C 5
- D 3
- E 2

[1978 年第 15 题]

4. 若直线 $2x + 3y + 3\sqrt{13} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = k$ 相切, 则 k 之值为 .

- A 0
- B 1
- C $3\sqrt{3}$
- D 9
- E 以上皆非

[1983 年第 14 题]

5. 从点 $A(3, -4)$ 至圆 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ 所引切线, 其长等于

- A $2\sqrt{2}$
- B $3\sqrt{2}$
- C $5\sqrt{3}$
- D $7\sqrt{5}$
- E $9\sqrt{7}$

[1990 年第 15 题]

6. 若直线 $3x - 4y = k$ 是圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的切线, 试求 k 之值。

- A -1 或 -21
- B -1 或 21
- C 1 或 21
- D -21
- E -1

[1991 年第 13 题]

7. 求从点 $(1, -2)$ 引圆 $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 15$ 的切线的长度。

- A 14
- B $\sqrt{142}$
- C $\sqrt{166}$
- D 2π
- E 以上皆非

[1993 年第 13 题]

8. 求圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线的方程式, 它与圆的直径 $y = \frac{3}{4}x$ 平行。

- A $y = \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$
- B $y = \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{4}$
- C $y = \frac{3}{4}x \pm 2$
- D $y = \frac{3}{4}x \pm 4$
- E 以上皆非

[1995 年第 14 题]

9. 声 \boxtimes 轮 $y = -2x + c$ 切约 $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 40 = 0$, 则 c 的佰是 -

- A $\pm\sqrt{2}$
- B $\pm\sqrt{3}$
- C ± 2
- D $\pm\sqrt{5}$
- E ± 5

[1998 年第 14 清]

10. 从古 A(4, y) 向购 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 引切线, 则切距的最小值是 .

- A 4
- B $2\sqrt{6}$
- C 6
- D 7
- E 24

[2002 年第 15 倩]

11. 如果直线 $y - 2 = k(x - 1)$ 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的一条切线, 则此切线的方程式思

- A $3x - 4y + 5 = 0$
- B $3x + 4y - 5 = 0$
- C $3x + 4y - 11 = 0$
- D $3x - 4y + 5 = 0$ 或 $x - 1 = 0$
- E $3x + 4y - 11 = 0$ 或 $x - 1 = 0$

[2003 年第 13 \boxplus]

12. 两圆 $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 26 = 0$ 与 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ 有几条公切线?

- A 4
- B 3
- C 2
- D 1
- E 0

[2006 年第 9 题]

13. 直线 $7x - 24y + 8 = 0$ 是圆心为 (2, 3) 的圆的切线。求这个圆的半径。

- A 1
- B 2
- C 3
- D 5
- E 25

[2008 年第 1 题]

14. 求圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ 上两条平行切线之间的距离。

- A 2
- B 3
- C 6
- D 9
- E 18

[2009 年第 1 题]

15. 若从点 $(a, 1)$ 到圆 $x^2 + y^2 + 5x + 7y + 3 = 0$ 的切线长是 5, 求 a 的值。

- A -7 或 -2
- B -7 或 2
- C -3 或 -2
- D -3 或 2
- E 3 或 2

[2011 年第 12 题]

(作答题)

1. 直线 AB, AC 分别切圆 O 于 B, C 两点。求证 $AB = AC$ 。
2. 求切于 x 轴及直线 $3x - 4y + 3 = 0$ 且圆心在直线 $x + y = 3$ 上的圆的方程。

[1978 年第 7 题]

3. 求自点 $P(4, 2)$ 作圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ 之切线的方程。

[1984 年第 3(a) 题]

4. 求由一定点 $(2, 2)$ 至圆 $2x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$ 的切距。

[1987 年第 5(b) 题]

5. 两圆都与 x, y 两轴相切且通过点 $A(8, 1)$ 。试求

- (i) 两圆的方程式;
- (ii) 两圆的另一交点之坐标;
- (iii) 在 A 点每一圆的切线之方程式。
- (iv) 在 A 点两切线所夹锐角。

[1989 年第 6(a) 题]

6. (a) 如果圆 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一点 (x_0, y_0) 所引切线与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 相切, 试证 $(gx_0 + fy_0 + c)^2 = r^2(g^2 + f^2 - c)$ 。

- (b) 如果圆 $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 80 = 0$ 内的弦其长度及斜率分别为 $8\sqrt{5}$ 及 $\frac{1}{2}$, 求这些弦的方程式。

[1990 年第 9 题]

7. 已知直线 $y = x + b$ 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的一条切线, 求 b 的可能值。

[2000 年第 7(b) 题]

8. 在圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上一动点 P 的切线分别交坐标轴 OX, OY 于 A 和 B, 且 OAQB 是一个长方形。试证明 Q 点的轨迹方程式是 $\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} = 1$ 。

[2002 年第 9 (c) 题]

9. (a) 求经过圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 与直线 $2x - y + 4 = 0$ 的交点且与 y 轴相切的两圆的方程式。

(b) 求过原点到此二圆所作的另两条切线的方程式。

10. 求 $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$ 的圆心及半径。因此, 或其他方法, 若 $y = 2x + c$ 是此圆的切线, 求 c 的值。

(3%)

[2007 年第 7(a) 题]

11. 求两条由点 $(-2, 3)$ 至圆 $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 32 = 0$ 的切线方程式。

[2010 年第 7(b) 题]

12. 求经过点 $M(3, -4)$ 且与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ 相切于点 $P(1, 2)$ 的圆的方程式。(6%) [2014 年第 7(b) 题]

[5.5] 两圆正切、正交

(选择题)

1. 两圆 $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 20 = 0$ 及 $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 5 = 0$ 的公共弦的方程式是
- A $x + y - 3 = 0$
 B $x - y - 3 = 0$
 C $x - y - 5 = 0$
 D $2x + y - 3 = 0$
 E $x - 2y + 3 = 0$

C

[1987 年第 6 题]

2. 已知两圆 $x^2 + y^2 + kx - 6y + 5 = 0$ 与 $x^2 + y^2 + 2x + y - 1 = 0$ 正交 (Cut orthogonally), k 之值为。
- A -9
 B -7
 C 5
 D 7
 E 9

[1988 年第 19 题]

3. 如果两圆 $x^2 + y^2 = 1$ 及 $x^2 + y^2 - 6x + ay + 9 = 0$ 相切, 求 a 的值。
- A ± 10
 B ± 8
 C ± 6
 D ± 4
 E 0

[1992 年第 13 题]

4. 如果两圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 及 $x^2 + y^2 + 2ax - 6y + a = 0$ 正交 (Cut orthogonally), 则常数 a 的值等于 -
- A 4
B 3
C 2
D 1
E 0

[1992 年第 15 题]

5. 已知两圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ 与 $(x - b)^2 + (y - a)^2 = c^2$ 交于一点, 求 a, b 及 c 的关系。
- A $(a - b)^2 = 2c^2$
B $(a + b)^2 = 2c^2$
C $(a - b)^2 = c^2$
D $(a + b)^2 = c^2$
E 以上都不是
6. 若两圆 $x^2 + y^2 + 6x + 10y + c = 0$ 与 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ 正交, 求 c 的 []。
- A 3
B 1
C -1
D -2
E -3

[2012 年第 15 题]

7. 若两圆 $x^2 + y^2 - kx - 2y - 52 = 0$ 与 $x^2 + y^2 + (2k + 1)x + 8y + 26 = 0$ 正交, 求 k 的值。
- A $-\frac{9}{2}$ 或 4
B $-\frac{9}{2}$ 或 2
C $\frac{9}{2}$ 或 -4
D $\frac{9}{2}$ 或 -2
E $\frac{9}{2}$ 或 2

[2013 年第 15 题]

(作答题)

1. 二圆外切于 A, 公切线 PQ 切二圆于 P, Q; RAS 是一直线且再遇二圆于 R, S, 连 RP, SQ 并延长之使交于 X。求证
- (a) $\triangle APQ \sim \triangle XRS$;
(b) P, A, Q, X 四点共圆。

[1976 年第 9 题]

2. 已知 $a^2 + b^2 = c^2$, 试证两圆 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 及 $x^2 + y^2 = c^2$ 相切, 并求其切点之座标。
3. (a) 若两圆 $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ 与 $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ 正交, 证明

$$2(g_1g_2 + f_1f_2) = c_1 + c_2$$

(b) 若一直径的两端点为 $(0, 4)$ 及 $(4, 2)$ 的圆与另一圆 $x^2 + y^2 + 2kx - 6y + k = 0$ 正交, 试应用 (a) 的结果或以其他方法求 k 的值。

(3%)

[1996 年第 8(b)(c) 题]

4. 一圆的圆心落在第一象限上且与 y 轴相切于点 $(0, 3)$, 并与圆 $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ 正交。求此圆的方程式。

[2004 年第 7(a) 题]

5. 如果一个动圆与圆 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 正交, 且与 x 轴相切。求这个动圆圆心的轨迹方程式。
6. 已知两圆的方程式为 $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$ 及 $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6 = 0$ 。证明其中一完全在另一圆内。

(40

[2011 年第 8(b) 题]

7. 已知一圆 C 的半径为 3. 其圆心在直线 $x + y = 1$ 上。若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内切于圆 C , 求圆 C 的所有可能方程式。

(4)

[2012 年第 9(a) 题]