# 第十二章数列与级数

何胜威

14/2/2023

## 12.1 数列

### 12.1.1 有限数列与无限数列

**数列 (sequence)** ： 按照某种法则排列的数。

**例子：** 2, 4, 6, 8, 10

**有限数列 (finite sequence)** ： 指拥有有限项数的数列。

**例子：** 1, 2, 3, 4, 5

**无限数列 (infinite sequence)** ： 指拥有无限项数的数列。

**例子：** $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

### 12.1.2 项

**项数 (term)** ： 数列中项的总数，通常以 $n$ 表示 $(n \in \mathbb{Z}^+)$。

**首项 (first term)** ： 数列中的第一项。

**末项 (last term)** ： 数列中的最后一项，在无限数列中没末项。

**例子：** 1, 2, 3, 4, 5

**解：** 此数列的首项为 1，末项为 5，项数为 5。

### 12.1.3 通项

**通项 (general term)** ： 数列各项 $a_n$ 与项数 $n$ 之间的关系。

**通项公式 (general formula)** ： 以一个公式表示各项数列 $a_n$ 与项数 $n$ 之间的关系。

**例子：** 写出从 1 到 8 各整数的 10 倍加 1 的数列，并求此数列的首项，末项及其通项公式。

**解：**

**所求数列有 8 项：** 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81

$\therefore$ 此数列的首项为 11, 末项为 81, 通项公式为 $a_n = 10n + 1$。

### 练习 12.1.1-12.1.3

1. 写出从 1 到 10 各整数的倒数的数列，并求此数列的首项，末项及其通项公式。

   **解：**

   **所求数列有 10 项：** $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{10}$

   $\therefore$ 此数列的首项为 1，末项为 $\frac{1}{10}$，通项公式为 $a_n = \frac{1}{n}$

2. 根据下列各数列的通项公式，写出其首 5 项：

   (a) $a_n = 2n + 1$

   **解：**

   数列的首 5 项是：

   $$a_1 = 2(1) + 1 = 3$$
   $$a_2 = 2(2) + 1 = 5$$
   $$a_3 = 2(3) + 1 = 7$$
   $$a_4 = 2(4) + 1 = 9$$
   $$a_5 = 2(5) + 1 = 11$$

   $\therefore$ 此数列的首 5 项为 3, 5, 7, 9, 11。

   (b) $a_n = n(n + 1)$

   **解：**

数列的首 5 项是：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1(1+1) = 2 \\
a_2 &= 2(2+1) = 6 \\
a_3 &= 3(3+1) = 12 \\
a_4 &= 4(4+1) = 20 \\
a_5 &= 5(5+1) = 30
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 此数列的首 5 项为 2, 6, 12, 20, 30。

3. 写出下列各数列的一个通项公式：

(a) 3, 7, 11, 15, ...

**解：**

将各项的数拆解分析后可得：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 7 = 3 + 4(2-1) \\
a_3 &= 11 = 3 + 4(3-1) \\
a_4 &= 15 = 3 + 4(4-1) \\
&\vdots \\
a_n &= 3 + 4(n-1) = 4n - 1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 此数列的通项公式为 4n-1。

(b) 2, 5, 10, 17, ...

**解：**

将各项的数拆解分析后可得：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 = 1^2 + 1 \\
a_2 &= 5 = 2^2 + 1 \\
a_3 &= 10 = 3^2 + 1 \\
a_4 &= 17 = 4^2 + 1 \\
&\vdots \\
a_n &= n^2 + 1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 此数列的通项公式为 $n^2$+1。

4. 一个数列的通项公式是 $a_n = \frac{2^n}{n+1}$，写出它的首 5 项。

**解：**

数列的首 5 项为：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2^1}{1+1} = 1 \\
a_2 &= \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \\
a_3 &= \frac{2^3}{3+1} = 2 \\
a_4 &= \frac{2^4}{4+1} = \frac{16}{5} \\
a_5 &= \frac{2^5}{5+1} = \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 此数列的首 5 项为 1, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{16}{5}$, $\frac{16}{3}$。

5. 写出数列 1, 8, 27, 64, ... 的一个通项公式。

**解：**

**将各项的数拆解分析后可得：**

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 = 1^3 \\
a_2 &= 8 = 2^3 \\
a_3 &= 27 = 3^3 \\
a_4 &= 64 = 4^3 \\
&\vdots \\
a_n &= n^3
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 此数列的通项公式为 $a_n = n^3$

### 12.1.4 有限级数与无限级数

**级数 (series)** ： 将数列中的项依次用加号连接的函数。

**例子：** 1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 8

**有限级数 (finite series)** ： 指数列中由有限的项组成，再用加号连接。

**例子：** 1 + 2 + 3 + 4 + 5

**无限级数 (infinite series)** ： 指数列中由无限多的项组成，再用加号连接。

**例子：** 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...

**求和符号 (summation)** ： 求和一般使用 $\sum$ 符号表示，读作 sigma。

**例子：** 求 $\sum_{n=5}^{10} \frac{n^2}{2}$ 的首项、末项和项数。

**解:**

$$
\begin{aligned}
a_5 &= \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2} \\
a_{10} &= \frac{10^2}{2} = \frac{100}{2} = 50 \\
n &= 6
\end{aligned}
$$

$\therefore \sum_{n=5}^{10} \frac{n^2}{2}$ 的首项为 $\frac{25}{2}$，末项为 50，项数为 6。

**例子:** 以 $\sum$ 符号表示下列各级数:

(a) $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

**解:**

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_6 = 2$$

$\therefore 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \sum_{n=1}^{6} 2$。

(b) $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{20}$

**解:**

$$a_1 = 3^1, a_2 = 3^2, a_3 = 3^3, \ldots, a_{20} = 3^{20}$$

$\therefore 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{20} = \sum_{n=1}^{20} 3^n$。

(c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

**解:**

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{(-2)^{1-1}}, a_2 = \frac{1}{(-2)^{2-1}}, a_3 = \frac{1}{(-2)^{3-1}}, \\
a_4 &= \frac{1}{(-2)^{4-1}}, a_5 = \frac{1}{(-2)^{5-1}}
\end{aligned}
$$

$\therefore 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{(-2)^n}$。

(d) $2 \times 4 + 4 \times 7 + 6 \times 10 + 8 \times 13 + 10 \times 16$

**解:**

$$
\begin{aligned}
a_1 &= [2(1)][3(1)], a_2 = [2(2)][3(2)], a_3 = [2(3)][3(3)], \\
a_4 &= [2(4)][3(4)], a_5 = [2(5)][3(5)]
\end{aligned}
$$

$\therefore 2 \times 4 + 4 \times 7 + 6 \times 10 + 8 \times 13 + 10 \times 16 = \sum_{n=1}^{5} 2n(3n+1)$。

## 12.2 等差数列与等差级数

### 12.2.1 等差数列

若数列中每一项（首项除外）减去前一项所得的差均相等，则该数列为**等差数列 (arithmetic sequence)**。**例子:** 1, 3, 5, 7, 9。

### 12.2.2 公差

**公差 (common difference)** 为等差数列中相等的差，通常以 $d$ 表示。

**以 $d$ 表示等差数列的公差**

$$d = a_n - a_{n-1}$$

**注:** 公差可为负数。

**例子:** 求等差数列 1, 3, 5, 7, 9 的公差。

**解:** $d$ = 3 - 1 = 2

$\therefore$ 此等差数列的公差为 2。

### 12.2.3 等差通项公式

**等差数列通项公式推导**

$$
\begin{aligned}
\because d &= a_n - a_{n-1} \\
a_n &= a_{n-1} + d \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_1 + 2d \ldots
\end{aligned}
$$

依照此规律可得,

$$a_n = a + (n-1)d$$

**等差数列项数推导**

$$
\begin{aligned}
\because a_n &= a + (n-1)d \\
a_n &= a + dn - d \\
dn &= a_n - a + d \\
n &= \frac{a_n - a + d}{d}
\end{aligned}
$$

由此可得,

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1$$

**注：**此公式为额外推导而得，为方便计算求等差数列项数题型，解题时必须先行使用等差数列通项公式进行推导。

## 练习 12.2.1-12.2.3

1. 等差数列 9，6，3，...的第几项是 -21?
2. 求从 1 到 100 所有 5 的倍数之和。
3. 若等差数列 13, 21, 29, ...的首 $n$ 项之和是 910，求 $n$ 的值。
4. 若一等差数列的首 $n$ 项之和 $S_n = n^2 + 3n$，求
   (a) 首项；
   (b) 公差；
   (c) 第 10 项；
   (d) 从第 5 项到第 10 项之和。
5. -56, -50, -44, ...是一个等差数列。问从第 1 项加到第几项，其和才开始是正值?

# 12.3 等比数列与等比级数

## 12.3.1 等比数列

若数列中每一项（首项除外）除以前一项所得的商均相等，则此数列为一**等比数列 (arithmetic mean)：**。**例子：**1, 2, 4, 8, 16。

## 12.3.2 公比

**公比 (common ratio)：**等差数列中相等的差商，通常以 $r$ 表示。

**以 $r$ 表示等比数列的公比**

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

**注：**公比可为负数。

**例子：**求等比数列 1, 2, 4, 8, 16 的公比。

**解：**

r = $\frac{2}{1} = 2$

$\therefore$ 此等差数列的公比为 2。

## 12.3.3 等比通项公式

**等比数列通项公式推导**

$$\begin{aligned}
\because r &= \frac{a_2}{a_1} \\
a_n &= a_{n-1} \times r^{n-1} \\
&= a_1 \times r^{2-1} \\
a_3 &= a_1 \times r^{3-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

依照此规律可得，

$$a_n = ar^{n-1}$$

**等比数列项数推导**

$$\begin{aligned}
&\because a_n = ar^{n-1} \\
&\Rightarrow n - 1 = log_{ar} a_n
\end{aligned}$$

由此可得，

$$n = log_{ar} a_n + 1$$

**注：**此公式为额外推导而得，为方便计算求等比数列项数题型，解题时必须先行使用等比数列通项公式进行推导。

## 练习 12.3.1-12.3.3

1. 等比数列 2, 6, 18, ...的第几项是 486?
2. 已知一等比数列的第 3 项是 972，第 8 项是 128，求此数列的首项，公比及第 5 项。
3. 求 3 与 3888 之间的三个数，使这五个数形成一个等比数列。

## 12.3.4 等比中项

**等比中项 (geometric mean)** 为两数之间的另一个数，且满足等比数列的定义并形成等比数列，通常以 $G$ 表示，但不建议使用简写。

**等比中项公式推导**

设一数列为 $x, y$，并求出等比中项。

$$\because r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$\frac{G}{x} = \frac{y}{G}$$
$$G^2 = xy$$

由此可得，

$$G = \pm\sqrt{xy}$$

## 练习 12.3.4

1. 求 3 与 27 的等比中项。
2. 若三个数 16，$x$，9 成一等比数列，求 $x$ 的值。
3. 若 7，$x$，$\frac{36}{7}$，$y$，$\frac{1296}{363}$ 成一等比数列，求 $x$ 及 $y$ 的值。
4. 若一等比数列的首三项是 $x+12$，$x+4$，$x-2$ 成一等比数列，求
   (a) 公比；
   (b) $x$ 的值；
   (c) 第 6 项。

### 12.3.5 等比求和公式

将等比数列中的每项相加所得的式子称为**等比级数 (geometric progression / geometric series)**

**等比求和公式推导**

设 $S_n$ 表示某等比数列之和可得，

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \ldots \qquad (1)$$
$$(1) \times r \text{ 得 } rS_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \ldots \qquad (2)$$

$(1) - (2)$ 得 $S_n - rS_n = a - ar^n$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

由此可得，

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (r \neq 1)$$

当 r = 1 时，$S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$

$S_n = a + a + \ldots + a + a$ (共有 n 个 a)

由此可得，

$$S_n = na \qquad (r = 1)$$

## 练习 12.3.5

1. 求等比级数 $4 + 8 + 16 + \ldots$ 的首 6 项之和。
2. 若等比数列 108，72，48，$\ldots$ 的首 $n$ 项之和是 $281\frac{1}{3}$，求 $n$ 的值。
3. 若一等比数列的首项是 7，公比是 3，级数之和是 847，求
   (a) 项数；
   (b) 末项。

### 12.3.6 无穷等比级数的和

**无穷等比级数 (infinite geometric series)** 指等比数列中由无限多的项组成，再用加号连接。**例子：**2, 4, 8, 16, $\ldots$

**无穷等比级数之和公式推导**

此公式推导将会展示三种推导方法。

**方法 1：**

以概念理解：

已知，

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (r \neq 1)$$

由于 $r \neq 1$ 且 n 趋近于无穷，因此 $r^n$ 最终的值将会等于 0。

由此可得，

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \qquad (|r| < 1)$$

**方法 2：**

以图示理解：

$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$

**方法 3：**

正规公式推导：

已知，

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, (r \neq 1)$$

当 n 趋近于无穷（正无穷）时，

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (|r| < 1)$$
$$S_\infty = \frac{a(1-0)}{1-r}$$
$$S_\infty = \frac{a}{1-r}(1-0)$$

由此可得，

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}, (|r| < 1)$$

### 练习 12.3.6

1. 求无穷等比级数 $36 + 12 + 4 + \dots$ 之和。
2. 使用无穷等比级数的求和公式将下列循环小数化为分数：
   (a) $0.\dot{2}\dot{3}$
   (b) $0.2\dot{1}\dot{3}$

## 12.4 简易特殊级数之和