第 6 章圆锥曲线的切线

[6.1] 过圆锥曲线上一点的切线

(选择题)

1. 在曲线 $xy=3$ 上一点 $(1,3)$ 的切线方程式是
2. 求抛物线 $y^2=8x$ 上一点 $(2,4)$ 的切线方程式
3. 求在曲线 $xy=x+6$ 上一点 $(3,3)$ 的切线方程式。
4. 若直线 $y=-x+c$ 切 $xy=4$, 则 c 的值是　　　。
5. 如果 $y=mx+c$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的切线, 则 $c=$?
6. 求曲线 $xy=2$ 上点 $(-1,-2)$ 的切线。
7. 求抛物线 $y^2=4x+4$ 在点 $(15,8)$ 上的切线的方程式。
8. 若 $mx+y=2$ 是抛物线 $y^2=6x$ 的切线, 求此切线的斜率。

(作答题)

1. 试证在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 的切线与法线, 其方程式分别为
   (a) $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$;
   (b) $\dfrac{ax}{\cos\theta}-\dfrac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$.
2. 试求在圆锥曲线 $x^2-6xy+8y^2+4x-3y-5=0$ 上一点 $(0,1)$ 之切线及法线方程式。
3. 若抛物线 $y^2=4x$ 在点 $P\left(t^2,2t\right)$ 的法线与抛物线交于另一点 Q,
   证明 $PQ^2=\dfrac{16\left(t^2+1\right)^3}{t^4}$ 。

4. $y=mx+3$ 是抛物线 $y^2=3x$ 的切线。在不许求 m 的值的情况下, 求其切点的坐标。

5. 证明抛物线 $y^2=4x$ 上一点 $A(25,-10)$ 的法线通过 $P(21,-30)$ 。

6. (a) 已知 $P(144,24)$ 及 $Q(4,4)$ 是抛物线 $y^2=4x$ 上的两点。证明 P 及 Q 上的切线相交于抛物线 $y^2=8x+4$ 上。
   (b) 如果抛物线 $y^2=4x$ 上另有一点 R 使得弦 PR 与准线平行, 求 R 的坐标。
   (c) 如果 R 及 Q 上的切线相交于另一条抛物线 $y^2=m-4x$ 上, 求 m 的值。

7. 如果椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $y=x-7$ 相切, 求 b^2 的值。

8. 直角双曲线 $xy=c^2$ 上一点 $P\left(cp,\dfrac{c}{p}\right)$ 的切线交 x 轴于点 A 。一平行于 y 轴的直线过点 A 并交该直角双曲线于点 Q 。另一平行于 x 轴的直线过点 P 并交 y 轴于点 B 。
   (a) 求点 A 及点 Q 的坐标;
   (b) 试证 BQ 为双曲线上点 Q 的切线。

9. 已知点 $P\left(4p,\dfrac{4}{p}\right)$ 为直角双曲线 $xy=16$ 上的一点, 过点 P 的法线分别交 x 轴及 y 轴于 K 及 L 两点。若 M 是线段 KL 的中点, 求
   (a) M 的坐标;
   (b) M 的轨迹方程式。

10. 求过点 $(-4,3)$ 且切抛物线 $y^2=4x$ 于第一象限的切线方程。

11. 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与二直线 $x+y=2$ 及 $3x+y=4$ 相切。求
    (a) b 及 c 的值;
    (b) 两个切点的坐标。

12. 已知 L_1 及 L_2 两条直线与直线 $5x+6y+1=0$ 平行, 且与双曲线 $x^2-4y^2=4$ 相切。求直线 L_1 及 L_2 的方程式。
    据此, 求双曲线 $x^2-4y^2=4$ 与直线 $5x+6y+1=0$ 的最短距离。

13. 直线 $y=m(x+1)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 $P\left(x_1,y_1\right)$ 及 $Q\left(x_2,y_2\right)$ 两点。
    (a) 以 m 表示 $\left(x_1-x_2\right)^2$ 。
    (b) 证明 $PQ^2=\dfrac{16\left(1+m^2\right)\left(1-m^2\right)}{m^4}$ 。
    (c) 若 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 且点 R 的坐标为 $(1,0)$, 利用 (b) 的结果, 求 $\triangle PQR$ 的面积。
    (d) 若直线 $y=m(x+1)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 相切, 求 m 的值。

[6.2] 已知料率的切线方程式

(选择题)

1. 在曲线 $xy=2$ 上与直线 $y+2x=0$ 平行的切线之方程式为　　。
2. 通过点 $(0,4)$ 且于第一象限切椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的切线的斜率为　　$\sim^\circ$
3. 已知椭圆 $3x^2+y^2=9$ 的切线的斜率是 3 , 求此切线的方程式。
4. 求曲线 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2-1} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t-1}} \end{cases}$ $,t>1$, 在 $t=2$ 处的切线斜率。
5. 求曲线 $y=\tan^{-1}x^2$ 在 $x=2$ 处的切线斜率。

(作答题)

1. 如果圆 $x^2+y^2=r^2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的公切线的斜率是 m, 试证 $m^2=\frac{r^2-b^2}{a^2-r^2}$ 。(3%) 由此求出圆 $x^2+y^2=25$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{169}=1$ 的公切线。
2. 一直线通过点 $P\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$, 被圆 $x^2+y^2=25$ 截得弦长为 8 单位。求此弦所在的直线的方程式。
3. 已知 $y=4x+c$ 与抛物线 $y^2=-8x$ 相切, 求 c 的值。据此, 求抛物线 $y^2=-8x$ 与直线 $y=4x-\frac{5}{2}$ 的最短距离。

[6.3] 过圆锥曲线外一点的切线方程式 (选择题)

1. 从点 $(1,2)$ 到椭圆 $x^2+2y^2=6$ 的切线是　　。
2. 由点 $P(-3,-8)$ 作两条切线至曲线 $y^2=12x$ 。求这两条切线的斜率。

(作答题)

1. 若直线 $y=mx+c$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切, 试证 $c^2=a^2m^2+b^2$ 。利用以上的结果或其他方法,
   (i) 求出从点 $(1,2)$ 至椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 之两切线之斜率。
   (ii) 若由点 $P(\alpha,\beta)$ 至椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 所引之两切线互相垂直, 试证 $\alpha^2+\beta^2=13$ 。

2. 证明椭圆 $2x^2+y^2-4x-2y-19=0$ 上一点 $(-2,3)$ 的切线通过点 $(1,12)$ 。并求由点 $(1,12)$ 至该椭圆的另一切线方程式。

第 7 章参数方程式

[7.2] 参数方程和普通方程的互化

(选择题)

1. 一曲线之参数方程式是 $x=t^2-2, y=t^3-2t$, 求其卡氏方程式。
2. $\left\{\begin{array}{l} x=2\cos\theta+2 \\ y=5\sin\theta-3 \end{array}\right.$ 的正坐标方程式是
3. 一曲线之参数方程式为 $\left\{\begin{array}{l} x=t^2 \\ y=1-t^4 \end{array}\right.$ 。此曲线对称于 。
4. 一曲线的参数方程式是 $\left\{\begin{array}{l} x=3\cos 2\theta \\ y=6\sin\theta-1 \end{array}\right.$ 。这曲线的图象是
5. 参数方程 $\left\{\begin{array}{l} x=e^t+e^{-t} \\ y=e^t-e^{-t} \end{array}\right.$ 的图象是 。
6. 已知参数方程式 $2x=\sin 2\theta, 4y=\sin 4\theta$, 求其卡氏方程式。
7. 一曲线的参数方程式为 $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$, 其中 a, b 为常数, t 为参数。试求此曲线的卡氏方程式 (普通方程式)。
8. 化参数方程式 $\left\{\begin{array}{l} x=\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2} \\ y=\sin\alpha \end{array}\right.$ （式中 α 是参数）为卡氏方程式。
9. 已知一曲线的参数方程式是 $x=\tan\theta, y=2\sec\theta$ 。这曲线的图像是 。
10. 参数方程式 $\left\{\begin{array}{l} x=t^4+t^{-4} \\ y=t^4-t^{-4} \end{array}\right.$ 所表示的曲线是 -

(作答题)

1. P 点为 $\left(1-t^2, t-t^3\right)$, 其中 t 为参数, 求 P 点轨迹的卡氏方程式。
2. 已知半圆的参数方程是 $x=\sqrt{2}\sin\theta, y^2=\cos 2\theta$, 求这个半圆的半径。
3. 求原点到曲线 $\left\{\begin{array}{l} x=-4+3\sin\theta \\ y=3+3\cos\theta \end{array}\right.$ (θ 是参数) 的最短距离。

4. 已知一曲线的参数方程式为 $\begin{cases} x=2+\sqrt{10}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{10}\sin\theta \end{cases}$ 。此曲线与 x 轴相交于 A B 两点。求

   (i) 此曲线的直角坐标方程式;

   (ii) 线段 AB 的长。

[7.3] 参数方程式与轨迹

(选择题)

1. P 点的坐标为 $\left(3t, t^2\right)$, 求 P 点的轨迹方程式。
2. 若 P 为联接 $A\left(t^2, 0\right)$ 及 $B(0, 2t)$ 两点的直线之中点, 其中 t 为参数, 则 P 的轨迹为 　　。
3. 在某变换下, $P(x, y) \rightarrow P'(x+y, x-y)$ 。若 P 点在直线 $y=2x$ 上移动, 试求 P' 点之轨迹。
4. 线段 PQ 的长为 4 单位, 其一端点 P 在 x 轴上移动, 另一端点 Q 在 y 轴上移动。若点 R 在 PQ 上, 且 $PR : RQ = 1 : 3$, 试求点 R 的轨迹方程式。
5. 已知 t 为任意实数, 则抛物线 $y=2x^2+tx+3$ 的顶点的轨迹方程式是
6. 已知 $A(a\sec\theta, b\tan\theta)$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的一个动点, O 是原点, P 是 OA 的中点。求 P 的轨迹方程式。
7. 已知一动点 P 到点 $(0,0)$ 的距离与其到直线 $x+y-2=0$ 的距离的比是 $1:2$, 求 P 点的轨迹方程式。

(作答题)

1. Q 为点 $(0,2)$, P 为曲线 $x=t^2, y=t^3$ 上的动点。试以 t 表达 PQ 中点的座标。然后求这中点的轨迹方程式。
2. 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任一点 $T(2\cos\theta, \sin\theta)$ 的法线与 x 轴相交于 S, 试证 TS 的中点的轨迹为 $16x^2+196y^2=49$ 。
3. 若直线 $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t \\ y=-3\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$, 式中 t 为参数, 与圆 $x^2+y^2=16$ 交于 A 及 B 两点, 求 AB 中点的坐标。
4. (a) 已知直线 l 垂直于直线 $x-y+1=0$, 且与曲线 $\begin{cases} x=1-\dfrac{1}{1+t} \\ y=1+\dfrac{1}{t} \end{cases}$ （t 为参数) 只有一个交点。求直线 l 的方程式。

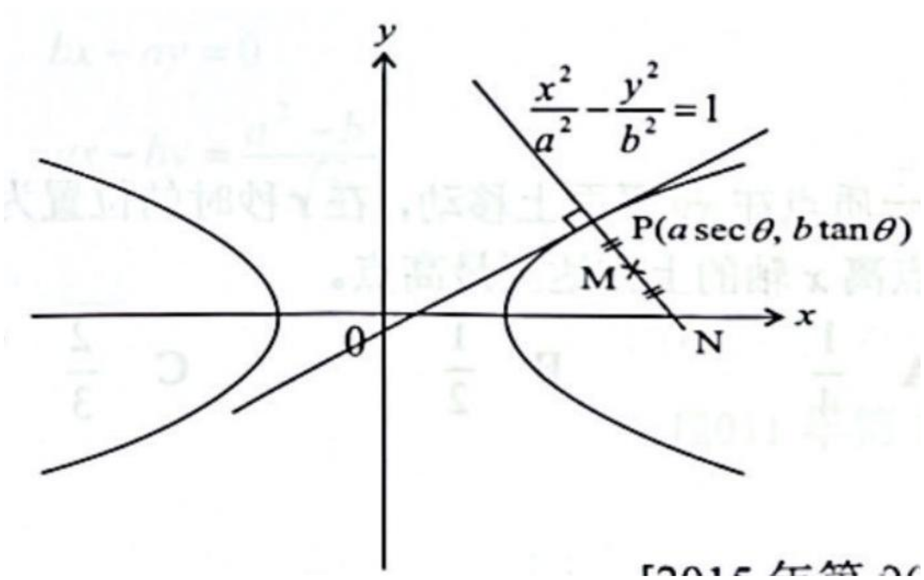
5. 求原点到曲线 $\begin{cases} x = 3 + 2\sin\theta \\ y = -4 + 2\cos\theta \end{cases}$ （θ 为参数) 上的最短距离。

6. 右如图所示, $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上的一点; PN 为过点 P 的法线, PN 与 x 轴相交于点 N, M 为 PN 的中点。

   (a) 证明 PN 的方程式为

   $$y = -\frac{a\sin\theta}{b}x + \frac{a^2+b^2}{b}\tan\theta$$

   (b) 求点 M 的轨迹的直角坐标方程式, 并说明它是哪一类的圆锥曲线。



[7.4] 参数函数的微分法

(选择题)

1. PQ 是抛物线 $y^2 = 4ax$ 的一焦弦, 则在 P 和 Q 的切线交于直线

2. 已知 $y = 4 - 3t^2$ 及 $x = t^2 - t + 1$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 当 $t = -1$ 。

3. 若 $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

4. 求函数 $\begin{cases} y = \ln t \\ x = 1 + t^2 \end{cases}$ 之 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

5. 一曲线之参数方程式为 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 。求 $\dfrac{dy}{dx}$, 以 t 表示之。

6. 一质点在 xy 平面上移动, 在 t 秒时的位置为 $x = t + t^2, y = t - t^2$ 。当 $x =$ ______ 时, 质点离 x 轴的上方达至最高点。

7. 若 $y = \cos 2t$ 及 $x = \sin t$, 求此曲线在点 $t = \dfrac{\pi}{6}$ 的法线方程式。

8. 一曲线的参数方程式为 $\begin{cases} x = \sin\theta \\ y = 2\cos\theta \end{cases}$ 。当 $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 的值。

9. 一质点在 xy 平面上移动。在 t 秒时它的位置是 $x = \left(t^2+1\right)m, y = (t-1)m$ 。试求它在 $t = 10$ 秒时的速率。

10. 一曲线的参数方程式是 $\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}$ 。求曲线在 $t = 2$ 时的点的法线方程式。

11. 求在曲线 $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 上 $t = 2$ 处的切线方程式。

12. 一曲线的参数方程式为 $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ 。求在点 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 的法线方程式。

13. 已知 $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 \end{cases}$, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

14. 已知 $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

(作答题)

1. 已知一参数方程式 $\begin{cases} x = 2t^2 - t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$, 求当 $x = 1, y = 2$ 时 $\dfrac{dy}{dx}$ 之值。

2. 一曲线的参数方程式为 $\begin{cases} x = 2\cos 2\theta + 1 \\ y = \sin\theta + 2 \end{cases}$ 。求
   (a) 此曲线的直角坐标方程式;
   (b) 此曲线在点 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 上的法线方程式。

3. 一曲线的参数方程式为 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 。试描绘此曲线的图象。
   (a) 求此曲线的直角坐标方程式。
   (b) 求曲线上 $A(4, 8)$ 点的法线方程式。

(c) 已知 O 为原点, N 为法线 AN 与 x 轴的交点, 求由曲线 OA, 法线 AN 及 x 轴所围成的区域的面积。

(d) 求此面积绕 x 轴旋转一周所形成的体积。

4. 已知一曲线的参数是 $x = at^3, y = bt^2$ 式中 a, b 为正的常数。过点 $T\left(at^3, bt^2\right)$ 的切线交 y 轴于 Y, M 是从点 T 到 y 轴的垂足。证明 $OM = 3OY, O$ 为原点。

5. 已知 $x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta$, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

6. 若一曲线的参数方程式为 $\left\{\begin{array}{l} x = 3\cos\theta - 2\cos^3\theta \\ y = 2\sin^3\theta \end{array}\right.$, 试证曲线过一参数为 θ 的点的法线方程式为 $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = \cos\theta$ 。

7. 已知参数方程式 $\left\{\begin{array}{l} x = \theta - \cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta \end{array}\right.$, 其中 $0 < \theta < 2\pi$, 试证 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^2}$ 。

8. 抛物线 $y^2 = 4ax$ 上一点 $P\left(at^2, 2at\right)$ 的切线与 x 轴相交于点 A, 过点 P 的法线则与 x 轴相交于点 B 。过点 P 的切线与直线 OP 的夹角是 θ, 其中 O 为原点, θ 为锐角。

   (a) 求点 A 及点 B 的坐标;

   (b) 证明三角形 ABP 的面积为 $\left|2a^2t\left(1+t^2\right)\right|$;

   (c) 证明 $\tan\theta = \dfrac{t}{t^2+2}$ 。

9. 已知参数方程式 $\left\{\begin{array}{l} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{array}\right.$, 求当 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 时 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的值。

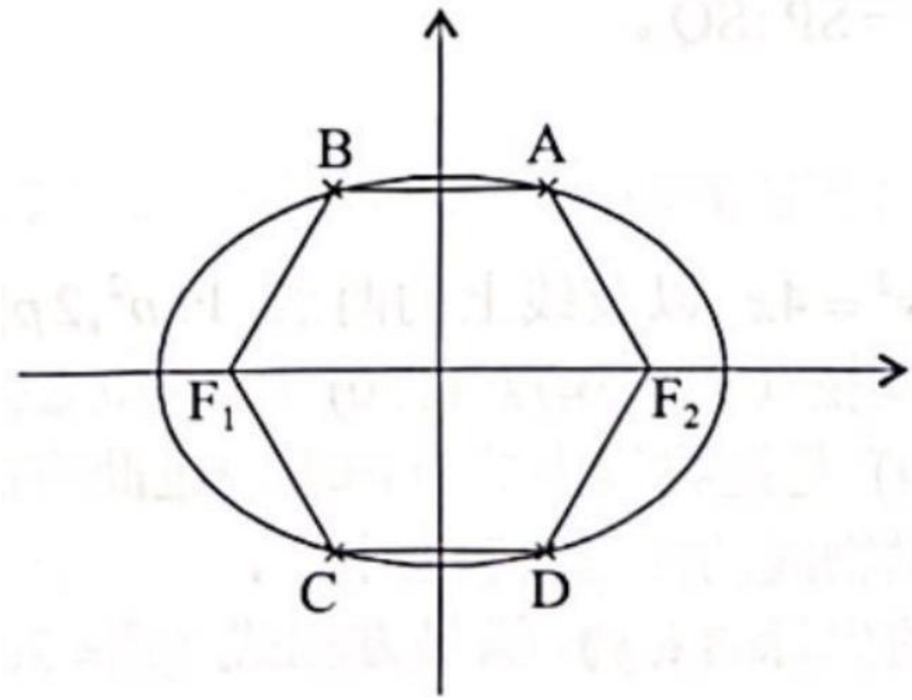
[7.5] 圆锥曲线的参数方程式

(选择题)

1. 假设 Q 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的动点, 点 R 的坐标是 $(4, 0)$, 则 RQ 的中点的轨迹方程式是 　　　。

2. 求抛物线 $x^2 = \dfrac{1}{4}y$ 上一点的坐标, 此点到直线 $y = 4x - 5$ 的距离最短。

3. 如右图所示, 一焦点为 F_1 及 F_2 的椭圆经过 A, B, C, D 四点。若 ABF_1CDFF_2 为一正六边形, 求此椭圆的离心率。



(作答题)

抛物线

1. (a) 抛物线 $x=at^2, y=2at$ 上的两点的参数为 $t=t_1$ 及 $t=t_2$ 。试证明通过这两点的弦的方程式是 $y=\frac{2}{t_1+t_2}x+\frac{2at_1t_2}{t_1+t_2}$ 。由此, 或用其他方法, 求这拔物线在点的参数为 t 的切线及法线方程式。

   (b) 抛物线 $x=at^2, y=2at$ 在点的参数为 $t=t_0$ 的法线交这抛物线于另一点 P, 试证 P 点的参数是 $-\frac{2}{t_0}-t_0$ 。

2. 抛物线 $y^2=4ax$ 在点 $P\left(ap^2, 2ap\right)$ 及点 $Q\left(aq^2, 2aq\right)$ 之切线相交于 R, 试求 R 之坐标, 并证 $\triangle PQR$ 之面积为 $\left|\frac{1}{2}a^2(p-q)^3\right|$ 。

3. 求抛物线 $y^2=4ax$ 在点 $P\left(at^2, 2at\right)$ 的切线方程式. 已知过原点 O 而平行于此切线之直线交此抛物线于 Q 。试证过 P 点而平行于抛物线轴之直线通过 OQ 之中点。

4. 过抛物线 $y^2=4ax$ 上一点 $P\left(ap^2, 2ap\right)$ 所作的法线与抛物线重交于 $Q\left(aq^2, 2aq\right)$ 点, 求 p 与 q 之间的代数关系式, 并证明 $q^2 \geq 8$ 。证明弦 PQ

之长度为 $\dfrac{4a\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$ 。

5. $P\left(ap^2, 2ap\right)$ 为抛物线 $y^2 = 4ax$ 上一点, 且 $S(a,0)$ 为抛物线的焦点。求 $\triangle PSQ$ 的最大值, 其中 Q 点为直线 $y=-2at$ 和抛物线的交点。

   试证 $SP = a\left(p^2+1\right)$ 。

   若此抛物线上的两点 P 与 Q 其切线相交于 T 。试证:

   (a) $ST^2 = SP \cdot SQ$ 。

   (b) $TP^2 : TQ^2 = SP : SQ$ 。

6. 给出抛物线 $y^2 = 4x$ 以及线上的两点 $P\left(p^2, 2p\right)$ 与 $Q\left(q^2, 2q\right)$ 。

   (a) 若 PQ 为焦弦 (通过焦点 $(1,0)$ 的弦), 试证 $pq=-1$ 。

   (b) 已知 $(4,4)$ 是抛物线上的点, 求通过此点的焦弦之长度。

   (c) 若 M 是抛物线的焦弦 PQ 之中点, 试证 M 的坐标 (x,y) 满足方程式 $y^2 = 2(x-1)$ 。

7. 试证明过抛物线 $y^2 = 4ax$ 上一点 $P\left(at^2, 2at\right)$ 所作切线其方程式为 $ty - x - at^2 = 0$ 。

   若过 P 点的切线及法线分别交 x 轴于 T 点及 N 点, 试证明:

   (a) $\dfrac{PT}{PN} = |t|$,

   (b) $PT \cdot PN = \left|4a^2t\left(1+t^2\right)\right|$ 。

8. $P\left(ap^2, 2ap\right), Q\left(aq^2, 2aq\right)$ 及 $R\left(ar^2, 2ar\right)$ 是抛物线 $y^2 = 4ax$ 上之三个不同点。试证:

   (a) 在 P 点上抛物线之法线其方程式为 $y = -px + 2ap + ap^3$;

   (b) 在 P 及 Q 两点上抛物线之法线其交点为 $\left(2a + ap^2 + aq^2 + apq, -apq(p+q)\right)$;

   (c) 若在 P, Q 及 R 三点上抛物线之法线共点, 则 $p+q+r=0$ 。

9. $P\left(ap^2, 2ap\right)$ 及 $Q\left(aq^2, 2aq\right)$ 是抛物线 $y^2 = 4ax$ 上相异的两点。若直线 PQ 通过点 $(2a,0)$,

   试证

   (a) $pq = -2$;

   (b) 抛物线在 P 及 Q 两点上的切线相交于直线 $x=-2a$ 上。

10. 一曲线的参数方程式为 $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 4t \end{cases}$ 。试求

   (a) 曲线在 $x=0$ 的点上两切线之方程式及其交点的坐标;

   (b) 此曲线的直角坐标方程式;

(c) 其焦点的坐标。

11. (a) 试证自点 $(42,-60)$ 可引三条不同的法线至抛物线 $y^2=8x$ 。求此三条法线之方程式。

(b) 自点 (x_0,y_0) 引法线至抛物线 $y^2=4ax$, 交抛物线于点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 及 (x_3,y_3), 试证

i. $y_1+y_2+y_3=0$;

ii. $x_1+x_2+x_3=2\left(x_0-2a\right)$ 。

12. (a) $P\left(at^2,2at\right)$ 是抛物线 $y^2=4ax$ 上的一点。试证在 P 点的切线的方程式是 $ty=x+at^2$ 。

(b) $A\left(at_1^2,2at_1\right)$ 及 $B\left(at_2^2,2at_2\right)$ 是抛物线 $y^2=4ax$ 上两点。O 是原点, 且 $\angle AOB=90^\circ$ 。

i. 试证在 A 及 B 上的切线相交于 $T\left(at_1t_2,a\left(t_1+t_2\right)\right)$ 点, 此点落在直线 $x+4a=0$ 上。

ii. 如果 M 是 AB 的中点, 试证 M 落在曲线 $y^2=2a(x-4a)$ 上。

13. $P\left(ap^2,2ap\right)$ 是抛物线 $y^2=4ax$ 上的一点。证过 P 点的法线其方程式为 $y+px=2ap+ap^3$ 。如果这条法线再交抛物线于点 $Q\left(aq^2,2ap\right)$, 证 $q=-p-\dfrac{2}{p}$ 。

如果 Q 点的法线又交抛物线于点 $R\left(ar^2,2ar\right)$, 证 $r=p+\dfrac{2}{p}+\dfrac{2p}{p^2+2}$ 。

14. 试证在抛物线 $y^2=4ax$ 上一点 $P\left(at^2,2at\right)$ 的法线方程式为 $y+tx=2at+at^3$ 。此法线交 x 轴于 G 且 PG 的中点为 M 。

(a) 若 P 点沿抛物线移动, 求 M 点的轨迹方程式。

(b) 若此抛物线的焦点为 S, 试证 $\angle PMS=90^\circ$ 。

(c) 若 SPG 为一等边三角形, 求 P 点的坐标。

15. 试证在抛物线 $y^2=4ax$ 上两点 $P\left(ap^2,2ap\right)$ 及 $Q\left(aq^2,2aq\right)$ 的切线的交点为 $T(apq,a(p+q))$ 。

设在 P 与 Q 两点上的切线分别与 y 轴相交于 R 与 S 。

(a) 试求 R 及 S 的坐标。

(b) 试证 ΔRST 的面积为 $\dfrac{1}{2}a^2|pq(q-p)|$ 。

(c) 若线段 RS 之长为 k, 试证 $T(apq,a(p+q))$ 落在曲线 $y^2-4ax=k^2$ 上。

16. 证明抛物线 $y^2=4ax$ 在点 $P\left(ap^2,2ap\right)$ 的法线方程式为 $y+px=2ap+ap^3$ 。

(a) 若此法线再交抛物线于点 $Q\left(aq^2,2aq\right)$, 证明 $p^2+pq+2=0$, 并推断 q^2 不能少于 8 。

(b) 若 $\angle POQ = 90^\circ, O$ 为原点, 求点 P 与 Q 的坐标。

17. 若抛物线 $y^2 = 4x$ 在点 $P\left(t^2, 2t\right)$ 的法线与抛物线交于另一点 Q, 证明 $PQ^2 = \dfrac{16\left(t^2+1\right)^3}{t^4}$ 。

18. (a) 已知 $P\left(p^2, 2p\right)$ 及 $Q\left(q^2, 2q\right)$ 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上两点, 证明
    i. P 及 Q 的切线交于 $R(pq, p+q)$;
    ii. 直线 PQ 的方程式是 $(p+q)y = 2x + 2pq$ 。

    (b) 过 R 点及原点 O 的直线 RO 交 PQ 于 N 。
    i. 若 P 点及 Q 点沿着抛物线移动且 pq 的值恒是 -2 时, 证明 N 为

$$\left(\frac{8}{4+(p+q)^2}, \frac{-4(p+q)}{4+(p+q)^2}\right)$$

    ii. 由此, 证明 N 的轨迹是一个圆。

19. $P\left(ap^2, 2ap\right)$ 及 $Q\left(aq^2, 2aq\right)$ 在抛物线 $y^2 = 4ax$ 上, M 是 PQ 的中点。

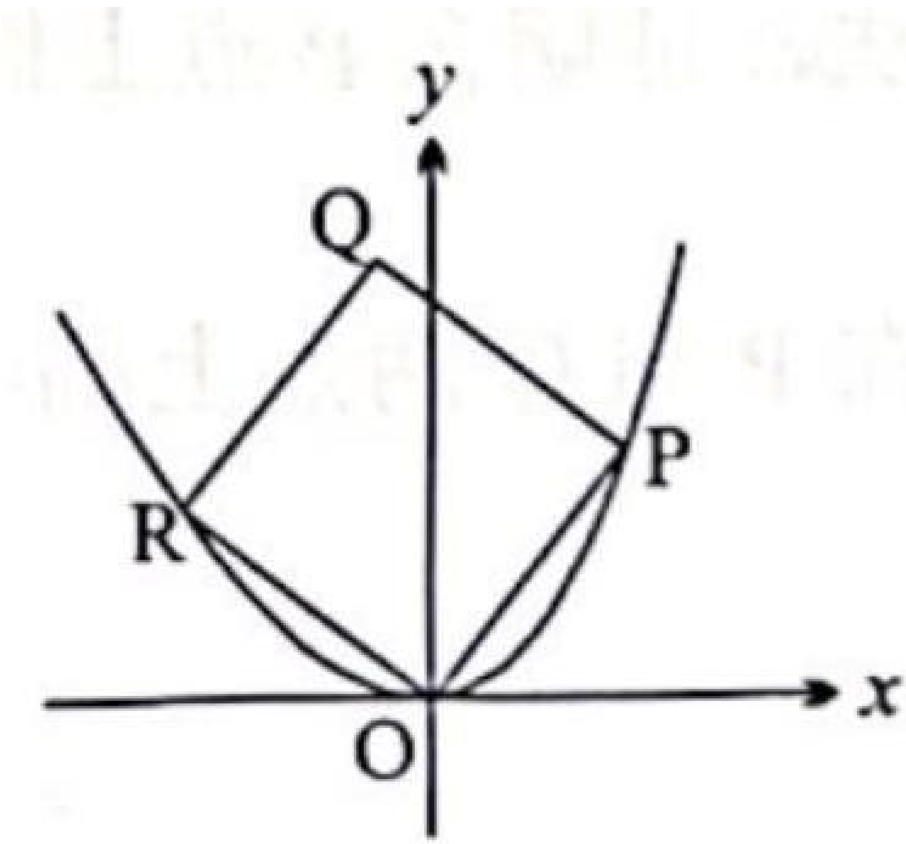
    (a) 试证在抛物线上 P 及 Q 的切线的交点是 $T(apq, a(p+q))$;
    (b) 若弦 PQ 对顶点的张角为一直角, 证明 $pq = -4$;
    (c) 据此, 或用其他方法, 证明 M 的轨迹方程式是 $y^2 = 2a(x-4a)$ 。

20. 求通过点 $(15, -3)$ 至抛物线 $y^2 = 16x$ 的法线。

21. 抛物线 $y = x^2$ 与圆相切于点 $P\left(t, t^2\right)$, 且圆的半径是 $\sqrt{1+4t^2}$ 。求抛物线上过点 P 的法线方程式。

    据此, 或用其他方法, 证明圆心的轨迹方程式是 $y = x^2 + 1$ 或 $y = \dfrac{x^2}{9} - 1$ 。

22. 如右图所示, P 是抛物线 $y = x^2$ 上的动点。若以 OP 为一边, 作正方形 $OPQR$, 且 R 亦是此抛物线上的动点, 求 Q 点的轨迹。



椭圆

1. P 与 Q 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的二点, 其坐标分别为 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 及 $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ 。O 为原点, 试证

   (a) $OP^2+OQ^2=a^2+b^2$;

   (b) 三角形 OPQ 之面积为 $\dfrac{1}{2}ab$;

   (c) PQ 之中点落于椭圆 $\dfrac{2x^2}{a^2}+\dfrac{2y^2}{b^2}=1$ 上。

2. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 及其上两点 P 与 Q,

   (a) 试证 $\triangle OPQ$ 之面积 $\le \dfrac{1}{2}ab$, 其中 O 为原点;

   (b) 若 P 点上之法线交长轴于 G, 试证 PG 平分 $\angle SPS'$, 其中 S, S' 为椭圆之两焦点。

3. (a) 若直线 $y=mx+c$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 相切, 试求 c 与 m 之关系式。

   (b) 若由 P 点至椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 所引两切线互相垂直, 应用 (a), 试写出此二切线以 m 表示之方程式, m 为其中一切线之斜率。
   然后, 或用其他方法, 证明当 m 变化时, P 点之轨迹为一半径为 $\sqrt{13}$ 之圆。

4. $P(3\cos\theta, 2\sin\theta)$ 及 $Q(3\cos\phi, 2\sin\phi)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上之两点。
   试证 PQ 之斜率为 $-\dfrac{2}{3}\cot\dfrac{\theta+\phi}{2}$ 。
   以此或其他方法, 证明在 P 点上椭圆之切线其方程式为 $3y\sin\theta+2x\cos\theta=6$ 。
   此外, 再证明在 P 与 Q 两点上椭圆的切线之交点为 $\left(\dfrac{3\cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)}{\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)}, \dfrac{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)}{\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)}\right)$ 。

5. $P(2\cos t, \sin t)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的一点。求过 P 点的法线之方程式。这条法线交 y 轴于点 G。M 是 PG 的中点。当 t 变化时, 求 M 的轨迹。

6. 试证椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 的法线方程式为 $\dfrac{ax}{\cos\theta}-\dfrac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$ 。
   若过点 P 的法线交 x 轴於 G, 证明 $OG=e^2ON$, 式中 O 为原点, e 为椭圆离心率, N 为在 x 轴上的 P 的垂足。

7. (a) 已知点 $P(2,2)$ 是椭圆 $x^2+4y^2-2x-12y+6=0$ 的一条弦的中点。求这条弦的方程式。

   (b) 试证在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 的法线方程式为 $ax\sin\theta-by\cos\theta=\left(a^2-b^2\right)\sin\theta\cos\theta$ 。
   若此法线交 x 轴于 A, 交 y 轴于 B, 试证三角形 OAB 的面积不能大过 $\dfrac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4ab}$, O 为原点。

8. (a) 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的两点 P 及 Q 的坐标分别是 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 及 $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ 。
      i. 若 O 是原点，试证明
         A. $OP^2+OQ^2=a^2+b^2$;
         B. 三角形 OPQ 的面积是 $\dfrac{1}{2}ab$ 。
      ii. 当 P 及 Q 变动时, 求 PQ 中点的轨迹方程式。

(b) 点 S 及 T 的坐标分别是 $(0,\beta)$ 及 $(\alpha,0)$ 。ST 的长度是 $9\ m$ 。点 $R(x,y)$ 将 ST 内分成 $1:2$ 。当 S 及 T 分别在两坐标轴上移动, 求 R 点的轨迹方程式。

9. (a) 试证连接椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的两点 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 和 $Q(a\cos\phi,b\sin\phi)$ 的弦的方程式是 $\dfrac{x}{a}\cos\dfrac{\theta+\phi}{2}+\dfrac{y}{b}\sin\dfrac{\theta+\phi}{2}=\cos\dfrac{\theta-\phi}{2}$ 。

   (b) 若弦 PQ 与圆 $x^2+y^2=b^2$ 相切, 试证 $a^2\cos^2\dfrac{\theta-\phi}{2}=b^2\cos^2\dfrac{\theta+\phi}{2}+a^2\sin^2\dfrac{\theta+\phi}{2}$ 。

   (c) 据此，或其他方法，若 $\sin(\theta-\phi)\geq 0$，证明 $PQ=a\sin(\theta-\phi)$ 。

10. 已知点 $A(1,3)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 上, 过 A 点, 作两条直线与椭圆相交于 B,C 两点。若直线 AB,AC 与 x 轴所围成的三角形为等腰三角形, 其中 $\angle BAC$ 为顶角。求

    (a) 直线 BC 的斜率;

    (b) $\triangle ABC$ 的面积, 若 B 点落在正 x 轴上。

11. 试证椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 的切线方程式为 $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$ 。据此, 或用其他方法, 若 $P(x,y)$ 为椭圆 $4x^2+9y^2-36=0$ 上的一点, 求 $2x+3y$ 的最大值与最小值。

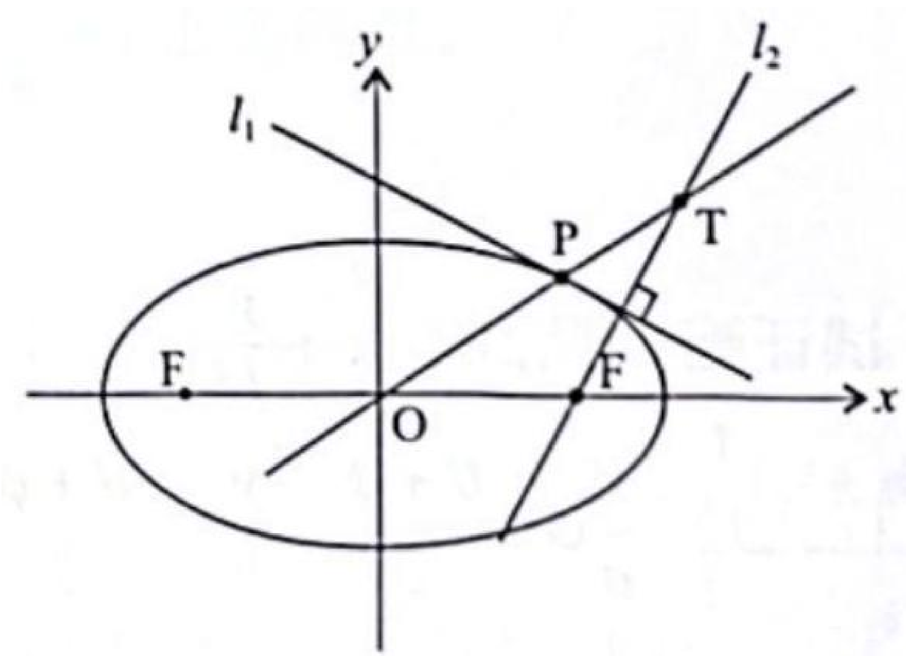
12. 已知一椭圆的方程式为 $x^2+4y^2-6x-16y+21=0$ 。

    (a) 求椭圆的中心 O' 的坐标及椭圆的参数方程式。

    (b) 若 A,B 为椭圆上的点且线段 AB 平行于 y 轴, 证明 $\Delta O'AB$ 的最大可能面积为 1 。

13. 求椭圆 $9x^2+4y^2-36x+8y+4=0$ 的参数方程式。据此, 或用其他方法, 若 (α,β) 为椭圆 $9x^2+4y^2-36x+8y+4=0$ 上的点, 求 $\alpha+3\beta$ 的最大值。

14. 如右图所示, $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点, O 及 F 分别是椭圆的中心及焦点。直线 l_1 切椭圆于点 P, 直线 l_2 经过焦点且与 l_1 互相垂直。点 T 是 OP 与 l_2 的交点。设 e 为椭圆的离心率。



(a) 用微分法证明切线 l_1 的方程式是 $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$ 。

(b) 求直线 l_2 与直线 OP 的方程式;

(c) 证明点 T 的轨迹方程式是 $x=\dfrac{a}{e}$ 。

双曲线和直角双曲线

1. P 和 Q 为双曲线 $xy=c^2$ 上任意两点。PQ 之中点为 M 。在点 P 及点 Q 上之两切线相交于 T 。试证

   (a) 直线 MT 经过原点;

   (b) 直线 MT 和 PQ 与 x 轴之交角相等;

   (c) 若 P 与 Q 的位置变动时, T 皆落于一固定直线 $y=k(k\neq 0)$ 上, 则 M 必在另一个固定直线 $x=\dfrac{c^2}{k}$ 上。

2. (a) 直线 $y=2x+3$ 交双曲线 $xy=c^2$ 于 P 及 Q 两点。试求 PQ 中点的坐标。

   (b) 试求双曲线 $xy=16$ 的一切线, 它通过点 $(0,4)$, 并求其切点的坐标。

3. 试证过双曲线 $xy=c^2$ 上一点 (x_1,y_1) 之切线的方程式可写成 $\dfrac{x}{2x_1}+\dfrac{y}{2y_1}=1$ 。如果此切线交坐标轴于 A 及 B 两点, 且 O 为原点, 试证 $\triangle OAB$ 的面积是一个常数。

4. 若点 $M(x,y)$ 是正双曲线 $xy=a^2$ 上 PQ 弦的中点, 且 P,Q 两点分别为 $\left(ap,\frac{a}{p}\right)$ 及 $\left(aq,\frac{a}{q}\right)$, 证 $p+q=\frac{2x}{a}$ 及 $pq=\frac{x}{y}$ 。

   (a) 设 $H(h,0)$ 为 x 轴上的一固定点。如果 PH 垂直 QH, 证 $M(x,y)$ 的坐标满足方程式 $a^2\left(x^2+y^2\right)=hxy(2x-h)$ 。

   (b) 如果 PQ 弦有着固定长度 L, 证 $L^2=a^2(p-q)^2\left(1+\frac{1}{p^2q^2}\right)$

5. (a) 试证在双曲线 $xy=c^2$ 上点 $P\left(cp,\frac{c}{p}\right)$ 的切线的方程式为 $x+p^2y=2cp$ 。

   (b) 若在点 $P\left(cp,\frac{c}{p}\right)$ 及点 $Q\left(cq,\frac{c}{q}\right)$ 上的切线相交于点 $R\left(x_0,y_0\right)$, 试证 $pq=\frac{x_0}{y_0}$ 及 $p+q=\frac{2c}{y_0}$

   (c) 若 PQ 之长度为 d, 试证 $d^2=c^2(p-q)^2\left(1+\frac{1}{p^2q^2}\right)$ 。

   (d) 若 d 之值保持不变, 试推论出 R 的轨迹方程式 $4c^2\left(x^2+y^2\right)\left(c^2-xy\right)=x^2y^2d^2$ 。(3%)

6. 设 $P\left(cp,\frac{c}{p}\right)$ 与 $Q\left(cq,\frac{c}{q}\right)$ 是等轴双曲线 $xy=c^2$ 的任意两点, 且 $R(u,v)$ 是 PQ 的中点。试证 $p+q=\frac{2u}{c}$ 及 $pq=\frac{u}{v}$ 。

   当 PQ 变动时,

   (a) 若 PQ 恒与直线 $y=mx$ 平行, 试求 R 的轨迹方程式;

   (b) 若 PQ 的长度是一常数 l, 试证明 R 的轨迹方程式为 $4\left(xy-c^2\right)\left(x^2+y^2\right)=l^2xy$ 。

7. 试证双曲线 $xy=c^2$ 于点 $P\left(cp,\frac{c}{p}\right)$ 上的切线为 $x+p^2y=2cp$ 。

   一过原点且垂直于此切线的直线交切于 N 点, 交双曲线于 Q 及 R 两点。

   求 N,Q 及 R 的坐标, 以 c 及 p 表示之。

   证明

   (a) $\angle QPR$ is a right angle;

   (b) When P varies, the equation of the locus of point N is $\left(x^2+y^2\right)^2=4c^2xy$.

8. 证明双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在任意点 $P(a\sec\theta,b\tan\theta)$ 的切线方程式为 $\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$ 。又若过点 P 的切线交双曲线的渐近线于 Q,R 两点, 试证 P 是 QR 的中点。

9. 一动点 P 到一定点 $(3,0)$ 的距离与该动点到以 $(-3,0)$ 为圆心, 半径为 5 单位的圆的圆周的距离相等。求此动点 P 的轨迹方程式。

10. (a) 一直线的参数方程式为 $\begin{cases} x=2+t \\ y=\sqrt{3}t \end{cases}$, 式中 t 为参数。求此直线在双曲线 $x^2-y^2=1$ 上截得的弦长。
    (b) 已知等轴双曲线 $xy=c^2$ 上两弦 PQ 与 RS 互相垂直, 其中 P,Q,R 及 S 四点分别为 $\left(cp,\dfrac{c}{p}\right)$, $\left(cq,\dfrac{c}{q}\right)$, $\left(cr,\dfrac{c}{r}\right)$ 及 $\left(cs,\dfrac{c}{s}\right)$ 。
        i. 试明
            A. $pqrs=-1$;
            $PR\perp QS$ 。
        ii. 若过点 P 的切线垂直于 RS, 证明 $PS\perp RP$ 。

11. (a) 试求过双曲线 $xy=c^2$ 上一点 $P\left(cp,\dfrac{c}{p}\right)$ 的切线及法线的方程式。
    (b) 若过点 P 的法线交 x 轴于 A, 过点 P 的切线交 y 轴于 B, 当 P 在双曲线上移动时, 证明 AB 中点的轨迹方程式是 $y^4+2xyc^2=c^4$ 。
    (c) 若 $Q\left(cq,\dfrac{c}{q}\right)$ 是双曲线上的另一点, 证明弦 PQ 的方程式是 $x+pqy=c(p+q)$ 。若此弦也是过点 P 的法线, 证明 $p^3q+1=0$ 。

12. (a) 点 $P\left(cp,\dfrac{c}{p}\right)$, $Q\left(cq,\dfrac{c}{q}\right)$ 及 $R\left(cr,\dfrac{c}{r}\right)$ 在一正双曲线 $xy=c^2$ 上。弦 PQ 在点 R 张着直角。试证在点 R 的法线与 PQ 平行。
    (b) 由原点 O 向正双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上任意点 $P(x,y)$ 的切线作垂线, 并交于点 M。延长 OM 交双曲线于点 N, 证明 $OM\cdot ON=a^2$ 。

13. 已知等轴双曲线 $xy=c^2$ 上两弦 PQ 与 RS 互相垂直, 且 p,q,r 及 s 分别是在点 P,Q,R 及 S 的参数。
    (a) 证明 $pqrs=-1$ 。
    (b) 若 $PQ\perp RS$, 证明 $PR\perp QS$ 。
    (c) 若过点 P 的切线垂直于 RS, 证明 $PS\perp RP$ 。

14. (a) 直角双曲线 $xy=c^2$ 上一点 $P\left(ct,\dfrac{c}{t}\right)$ 的切线与 x 轴相交于 A 点, 与 y 轴相交于 B 点。过点 P 的法线与直线 $y=x$ 相交于 C 点, 与直线 $y=-x$ 相交于 D 点。求点 A,B,C 及 D 的坐标。
    (b) 过点 P 的法线交此直角双曲线于另一点 Q 且 PQ 的中点为 M 。证明点 M 的轨迹方程式是 $c^2\left(x^2-y^2\right)^2+4x^3y^3=0$ 。

15. P 是双曲线上的任意一点。通过点 P 的切线交准线于点 T 。试证线段 PT 在焦点的张角为一直角。

16. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率是 e, 此双曲线上一点 $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ 的法线分别交横轴和纵轴于 L 和 M 。

    (a) 写下 P 点上切线的方程式。

    (b) 试以微分法求证 P 点上法线的方程式为 $\dfrac{\tan\theta}{b}x+\dfrac{\sec\theta}{a}y=\dfrac{a^2+b^2}{ab}\sec\theta\tan\theta$ 。

    (c) 试证线段 LM 的中点的轨迹仍为双曲线, $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{a^2+b^2}{2a}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{a^2+b^2}{2b}\right)^2}=1$ 。

        据此, 以 e 表示, 求其离心率。

17. 一直线 l 交双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$ 于点 P_1 及 P_2 。

    (a) 若 M 为 P_1 与 P_2 的中点, 求 M 的坐标。

    (b) 若 (h,k) 为 M 的坐标, 求 l 的方程式。

18. 直线 $y=mx+c$ 交直角双曲线 $xy=16$ 于点 P 与 Q 。若 R 是线段 PQ 的中点, 求 R 的座标, 并以 m 及 c 表示。

    据此, 以 m 表示, 求 R 的轨迹方程。

第 5 亘睢典线

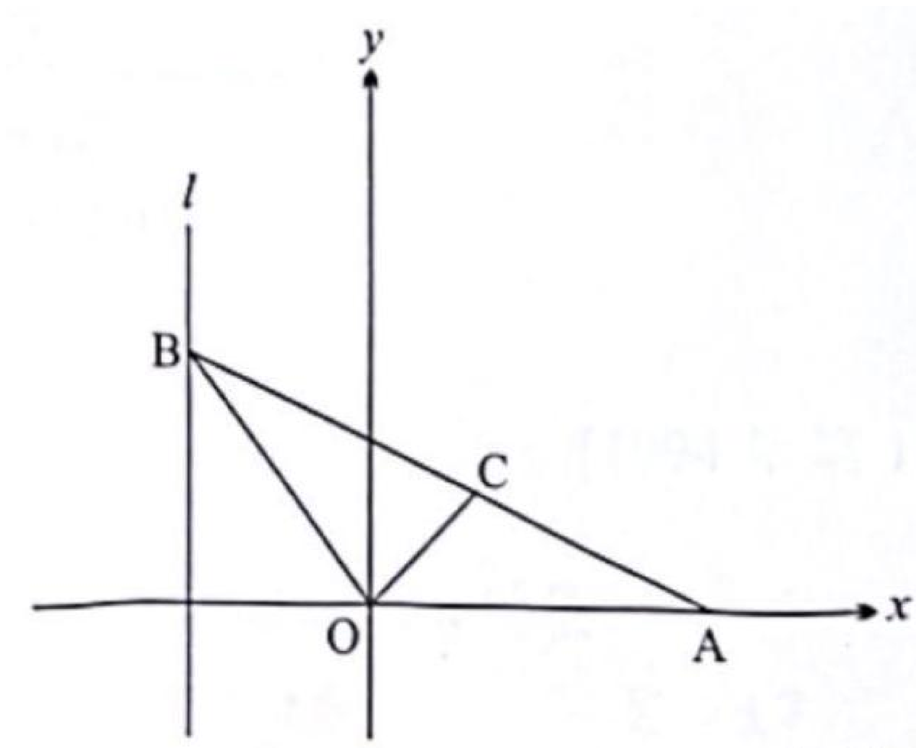
[5.1] 圆锥曲线

(选择题)

1. 方程式 $x^2+4xy+4y^2+x-2=0$ 的图象是
2. 曲线 $4x^2+4xy+y^2+6x-12y=0$ 是
3. 方程式 $x^2+2xy+3y^2+2x-y=0$ 之图象为
4. 一动点 P 与两定点 $A(1,2)$ 和 $B(1,-2)$ 的距离的和恒为 2 。求 P 点的轨迹方程式。
5. 求圆锥曲线 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 的准线的方程式。

(作答题)

1. 右图所示定点 $A(a,0)$, 其中 $a>0$ 和一直线 l 为 $x=-1$ 。B 是直线 l 上的动点并只在第二象限移动, $\angle BOA$ 的角平分线交 AB 于 C 点。



   (a) 试求 C 点的轨迹方程式, 并指出其 x 与 y 的限制范围。
   (b) 试讨论 (a) 中所求得的方程式所表示的曲线类型与 a 值的关系。

[5.2] 抛物线

(选择题)

1. 抛物线 $y^2-4y=4x$ 的焦点其座标是
2. 试求一抛物线之方程式, 其焦点为 $(2,2)$, 准线为 $x+y=0$ 。
3. 下列哪一曲线与直线 $x+y=0$ 恰有两个交点?
4. 求抛物线 $y=2x^2-4x+3$ 的焦点之坐标。

5. 倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线通过抛物线 $y^2 = 6x$ 的焦点 F, 并交抛物线於 A 及 B 两点。求 $|AB|$ 。
6. $(y-1)(y-3) = x-2$ 是一条抛物线。问它的顶点的坐标是多少?
7. 求抛物线 $y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$ 的焦点。

(作答题)

1. (a) 试求抛物线 $y = x^2 + 4x$ 的焦点及准线。
   (b) 试绘此抛物线之图像。
2. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 上两点 A 及 B, 如果 OAB 是一个等边三角形, 其中 O 是原点, 求 $\triangle OAB$ 的面积。
3. 一抛物线的对称轴垂直于 y 轴。若该抛物线通过三个点 $(7,2),(1,0)$ 及 $(7,-6)$, 求抛物线的方程式及其焦点的坐标。

[5.3] 椭圆

(选择题)

1. 求椭圆 $5x^2 + 9y^2 - 20x - 54y + 56 = 0$ 之中心。
2. 若椭圆之方程式为 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, 则其离心率 $e = ?$
3. 一椭圆之两焦点为 $(2,1)$ 及 $(6,1)$ 。若其离心率为 $\dfrac{2}{3}$, 试求此椭圆之方程式。
4. 求以 $(2,-1)$ 为焦点, $x - y + 1 = 0$ 为准线及离心率为 $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ 的椭圆方程式。
5. 椭圆 $\dfrac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$ 与拖物线 $y = 1 - (x+1)^2$ 的交点的个数是
6. $ABCD$ 是椭圆 $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 6 = 0$ 的内接长方形。已知 $A(4,-3)$, 求 C 的坐标。
7. 直线 $y = x + k$ 经过椭圆 $x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0$ 的中心。k 的值是 .
8. 求$\boxed{\text{F}}$圆 $\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$ 的两个焦点的距离。
9. 在平面上, 方程式 $\begin{vmatrix} 5x & x & -5y \\ 0 & 1 & 6 \\ y & 0 & x \end{vmatrix} = 8$ 的图象是什么?

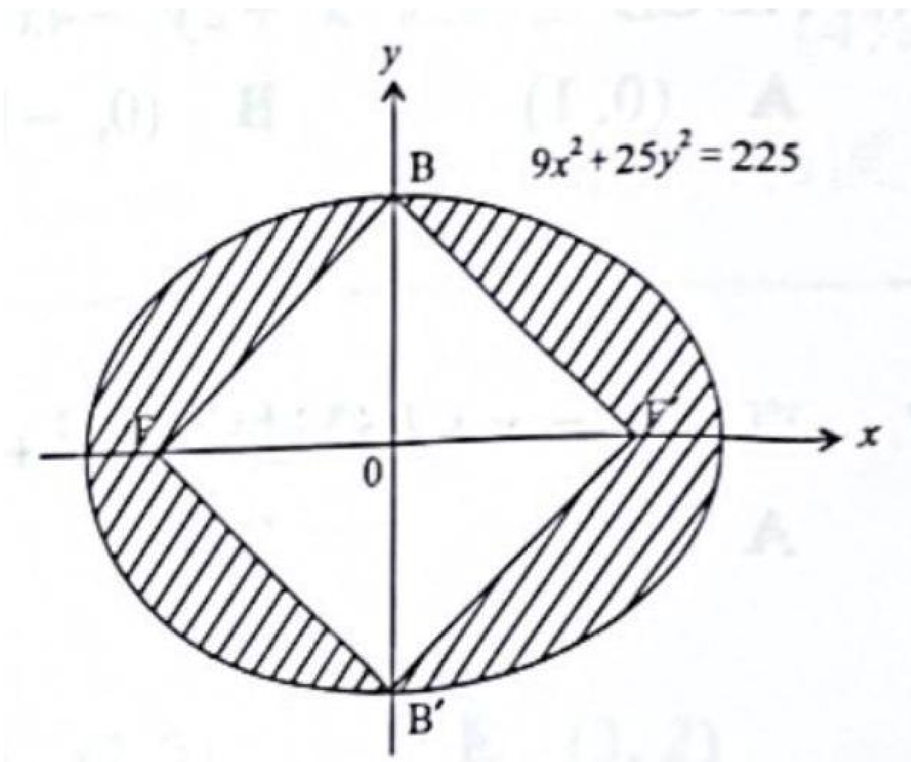
10. 若 F_1 及 F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的两焦点, 求 $F_1\ F_2$ 的长。

11. 若椭圆 $4x^2+y^2=k$ 两点间的最长距离是 8 , 求 k 的值。

12. 若 F 与 F' 是□圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 的焦点。P 是椭圆上的任意一个点, 则 $PF+PF'=?$

13. 如果椭圆的一个焦点将其长轴分成 $5:3$, 求此椭圆的离心率。

14. 右图所示, F 及 F' 为椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 的两个焦点, B 及 B' 为椭圆在短轴上的端点。求阴影部分的面积。



(作答题)

1. P 是焦点为 S 及 S' 的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点。试证 $SP+SP=2a$ 。

2. 过椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的焦点引一条斜率为 1 的直线与椭圆交于 A 及 B 两点。O 是椭圆的中心, 求 $\triangle OAB$ 的面积。

3. P 为椭圆上任意一点, F_1 与 F_2 为其焦点, 试证 PF_1 与 PF_2 的和等于长轴的长。

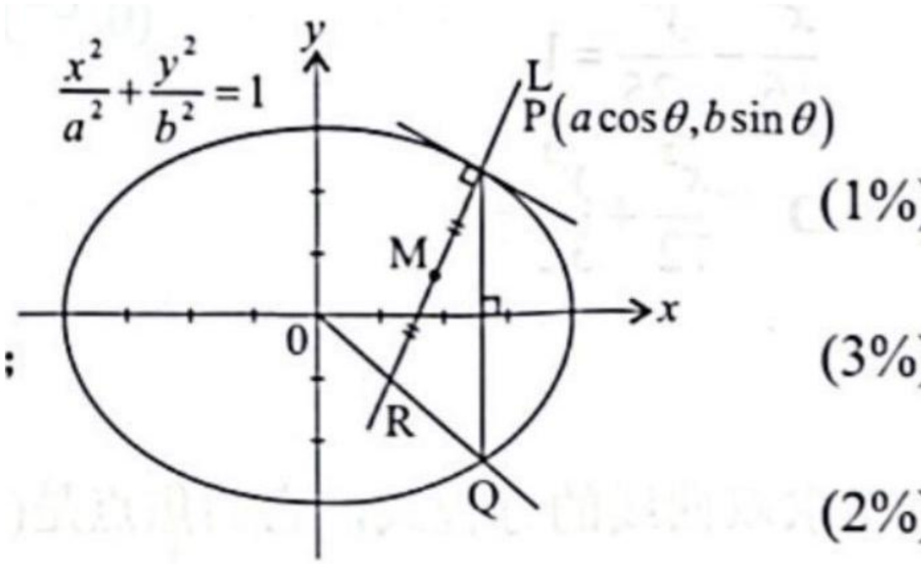
4. (a) 假设一颗行星绕太阳运行的轨迹是一个半长轴为 a 、离心率为 e 的椭圆。验证
      i. 行星离太阳最近的距离是 $r = a(1-e)$;
      ii. 行星离太阳最远的距离是 $r = a(1+e)$ 。
   (b) 已知哈雷彗星的轨迹为一椭圆, 它的长轴的长为 $36.18Au$, 短轴的长为 $9.12Au$ 。求
      i. 哈雷彗星的离心率;
      ii. 哈雷彗星离太阳最近的距离;
      iii. 哈雷彗星离太阳最远的距离。

5. 以原点为中心的一椭圆, 其离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 且长轴附在 x 轴上。倘若 $P\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ 为一外点, 而 Q 为椭圆上的一点, 使得 PQ 最长的距离为 $\sqrt{7}$, 求
   (a) 此椭圆的方程;
   (b) Q 的坐标。

6. 已知椭圆对称于 x 及 y 二轴, 且通过点 $(2,4)$ 。如果椭圆的长轴是短轴的 3 倍, 其中长轴平行于 x 轴, 求这个椭圆的方程式。

7. 设 $A(-\alpha, 0)$ 及 $B(\alpha, 0)$ 为 x 轴上的两点。一以 A 为中心, r_A 为半径的定圆完全在一以 B 为中心, r_B 为半径的定圆内。若一动圆同时与此二定圆相切,
   (a) 求此动圆的圆心的轨迹方程式;
   (b) 试证此动圆圆心的轨迹是一以 A、B 为焦点的椭圆。

8. 如右图所示, $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上的一点。Q 是椭圆上的另一点使得 PQ 垂直于椭圆的长轴。椭圆在 P 点的法线 L 与直线 OQ 相交于 R 点, M 为 PR 的中点。



(a) 求 OQ 的方程式;

(b) 证明 L 的方程式为 $y=\dfrac{a\sin\theta}{b\cos\theta}x+\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin\theta$;

(c) 求 R 点的坐标;

(d) 证明 M 的轨迹方程式为 $\dfrac{x^2}{a^6}+\dfrac{y^2}{b^6}=\dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}$ 。

[5.4] 双曲线

(选择题)

1. 求焦点为 $(-1,1)$, 准线为 $x-y+1=0$, 离心率为 2 之双曲线的方程式。
2. 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的渐近线其方程式是 .
3. 中心为 $(1,0)$ 的一个等轴双曲线通过点 $P(4,0)$ 。它的其中一条渐近线是 $x-y-1=0$ 。试求这个等轴双曲线的方程式。
4. 一双曲线通过点 $M(-9,2)$, 且它的两条渐近线是 $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ 。求此双曲线的方程式。
5. 求双曲线的方程式, 它的焦点是 $(1,2)$, 准线是 $3x-4y+1=0$ 及离心率是 $\dfrac{5}{2}$ 。
6. 若一双曲线的顶点为 $(2,0)$ 及 $(-2,0)$, 焦点为 $(5,0)$ 及 $(-5,0)$, 求其渐近线的方程式。

7. 已知一椭圆的顶点和焦点分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点和顶点, 求此椭圆的方程式。

8. 已知 $\dfrac{x^2}{a^2-3}+\dfrac{y^2}{2a}=1$ 为一直角双曲线且其准线平行于 x 轴, 求 a 的值。

9. 已知一双曲线的两条渐近线为 $4x+3y=0$ 及 $4x-3y=0$ 。若 $y=\dfrac{32}{5}$ 是其中一条准线, 求此双曲线的顶点坐标。

10. 求双曲线 $-\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$ 的准线方程式。

11. 求两条曲线 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 与 $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的交点个数。

(作答题)

1. 试证双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点至二渐近线距离之积为一定值。

2. 一直线的参数方程式为 $\left\{\begin{array}{l} x=2+t \\ y=\sqrt{3}t \end{array}\right.$, 式中 t 为参数。求此直线在双曲线 $x^2-y^2=1$ 上截得的弦长。

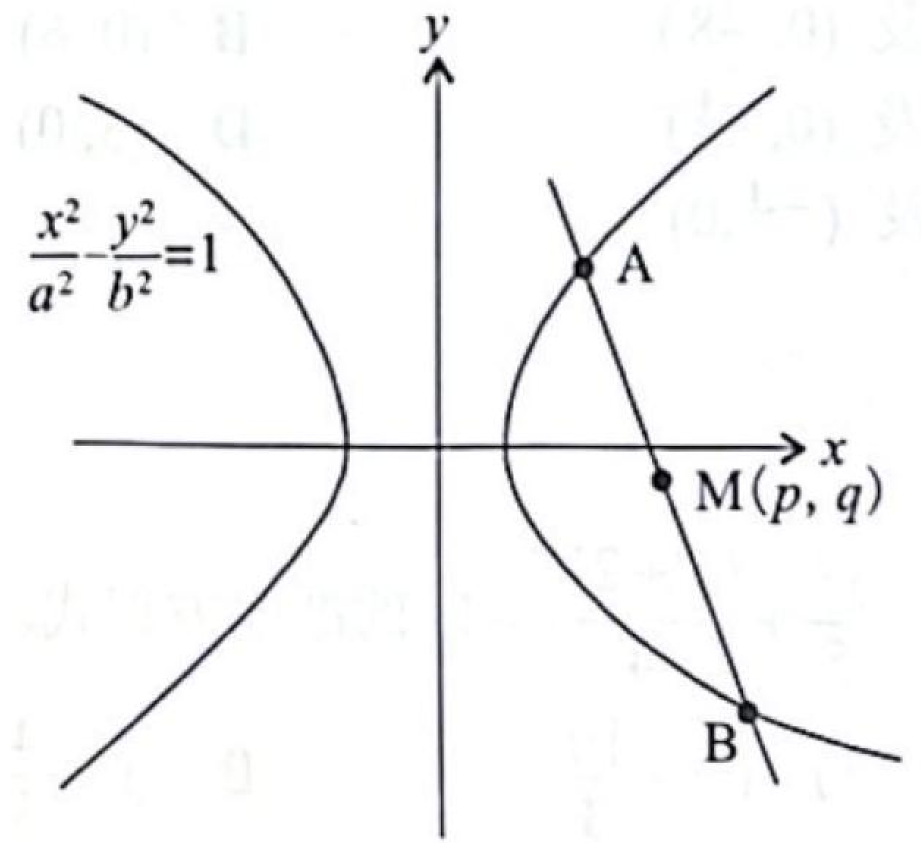
3. 已知以原点为中心的双曲线的一个焦点是 $(\sqrt{2},0)$, 它的相应的准线是 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 求此双曲线的标准方程式。

4. 已知 $A(27,1)$ 及 $B(9,3)$ 是直角双曲线 $xy=27$ 上的两点, 延长弦 AB 分别交 x 及 y 二轴于 P 及 Q 两点。证明

   (a) PQ 的长度是 AB 的长度的两倍;

   (b) 直线 AB 与另一个直角双曲线 $xy=36$ 相切; 并求其切点。

5. 如右图所示, A、B 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任意两点, $M(p,q)$ 是 AB 的中点。试证直线 AB 的方程式为 $y-q=\dfrac{b^2p}{a^2q}(x-p)$ 。



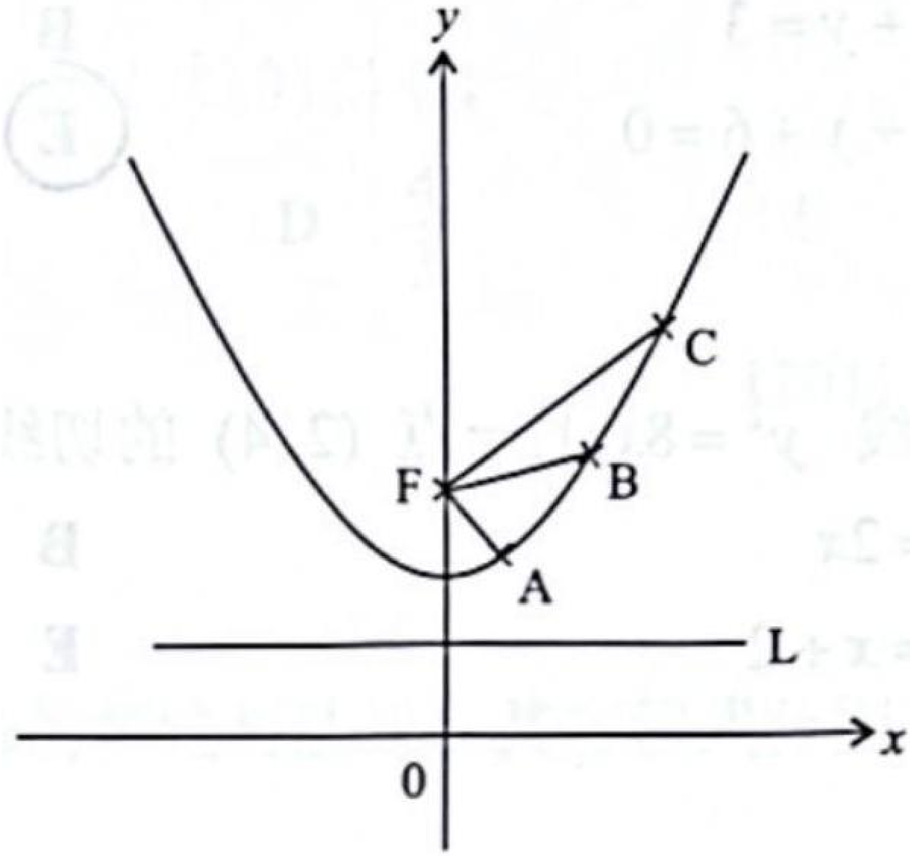
6. 一平行于 x 轴的直线通过双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 的一个焦点并交该双曲线于 A 及 B 两点。求 AB 的长。

7. 已知一双曲线的浙近线方程式是 $x+2y-1=0$ 及 $x-2y-1=0$ 。若双曲线的虚轴长为 2 单位且与 y 轴平行, 求此双曲线的方程式。

8. 右图所示的曲线为双曲线 $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$ 在 $y>0$ 的部份。F 是焦点, L 是准线。$A\left(x_a, y_a\right), B\left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{51}{8}\right), C\left(x_c, y_c\right)$ 是曲线上的三点。

   (a) 求 F 的坐标和 L 的方程式;

   (b) 若线段 AF, BF, CF 的长成等差数列, 证明 $y_a+y_c=\dfrac{51}{4}$ 。


y
C
F
B
A
L
x
0