

TRABAJO PRÁCTICO INTEGRADOR

SISTEMA DE EQUILIBRIO HIDRÁULICO Y DINÁMICO

Almada Melody, Fava Lara

Métodos Numéricos, Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Favaloro.

Resumen

El presente informe examina los conocimientos obtenidos durante la materia de Métodos Numéricos con el propósito de abordar y resolver un sistema de equilibrio hidráulico y dinámico.

I. Introducción

Los métodos numéricos son diferentes sucesiones de operaciones matemáticas que se utilizan para encontrar una solución numérica aproximada a un problema determinado. Permiten que a partir de una serie de cálculos se llegue a una solución numérica con una precisión razonablemente buena, de esta manera también son útiles para ahorrar tiempo en problemas extensos.

I.I Método de Runge-Kutta

Dada la ecuación diferencial ordinaria de 1^{er} orden $y'(t) = f(t, y(t))$; con condiciones iniciales $y_0 = y(t_0)$ en un intervalo de tiempo $t \in [t_0, t_f]$, se denomina al método de Runge-Kutta de Orden 4 a aquel algoritmo utilizado para resolver ecuaciones diferenciales dada la siguiente expresión como fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + \dots + a_n k_n \quad (1)$$

Tomando la anterior ecuación como un caso base y haciendo $n = 2$, llegamos a que $y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2$ siendo $k_1 = hf(t_i, y_i)$ y $k_2 = hf(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1)$, en donde h es el paso. El problema consiste en determinar los valores de los parámetros a_1, a_2, p_1 y q_{11} .

Mediante un desarrollo de Taylor en la ecuación 1 se obtiene que :

$$y_{i+1} = y_i + a_1 hf(t_i, y_i) + a_2 hf(t_i, y_i) + a_n h^2 \left[\frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial x} p_i + q_{ii} \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) \right] \quad (2)$$

De la ecuación 2 se obtienen tres ecuaciones independientes que tienen cuatro incógnitas. Se trata de un sistema indeterminado de grado uno. Entonces, asignando un valor arbitrario a una de las incógnitas y resolviendo el sistema para determinar las otras tres, es posible obtener tantos conjuntos diferentes de valores y otros tantos conjuntos diferentes de ecuaciones dados como la fórmula 1 como se desee.

Este algoritmo, a diferencia del Método de Euler y Heun, los cuales tienen errores $E_{TEuler} = k_1 h$ y $E_{THEun} = k_2 h^2$, tiene un error total proporcional a h^4 . De esta forma vemos que es más exacto y también más rápido que los otros dos.

I.II Integración Numérica

Llamamos integración numérica al cálculo aproximado que realiza una integral utilizando técnicas numéricas. Dada una determinada función $y = f(x)$ y un conjunto de $M+1$ abscisas $x_0, x_1, x_2, \dots, x_M$ donde se evalúa esta función y se quiere encontrar su área.

La regla trapezoidal es una fórmula de integración la cual se basa en dividir el intervalo de integración en intervalos más pequeños y de esta forma aproximar la función a integrar por segmentos lineales en cada subintervalo. Estos segmentos lineales son trapezoides y el número de subintervalos no es requerido que sea par. Dicha fórmula que utiliza al polinomio de 1^{er} orden es:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_M)] + h \sum_{k=1}^{M-1} f(x_k) \text{ siendo } x_0 = a, x_M = b, x_k = x_0 + hk \quad (3)$$

La precisión depende de la elección del número de subintervalos, un mayor número de subintervalos ayuda a aumentar la precisión, pero tiene un mayor costo computacional.

Otra forma de obtener una estimación más exacta de una integral consiste en usar polinomios de mayor grado para unir los puntos. Este método busca aproximar la función a integrar mediante polinomios de segundo grado, las cuales son parábolas, en subintervalos pequeños del dominio. Esto hace que proporcione una mejor aproximación que la regla trapezoidal, especialmente para funciones suaves.

La fórmula de integración es:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \sum_{k=1}^M (f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})) \text{ siendo } x_0 = a, x_{2M} = b, x_k = x_0 + hk \quad (4)$$

A diferencia de la regla trapezoidal, requiere que el número de subintervalos sea par. Tiene un orden de convergencia $O(h^4)$.

I.III Derivación Numérica

La derivación numérica es una técnica de análisis numérico que es utilizada para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto utilizando los valores y propiedades de la misma. Para obtener las aproximaciones de las derivadas se desarrolla en serie de Taylor a $f(x)$ usando el teorema de Taylor de orden 3, de esto se obtiene que:

$$f(x + h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(c_1)h^3}{3!}; c \in [x, x + h] \quad (5)$$

Siguiendo con el desarrollo se llega a la aproximación de la derivada de $f(x)$ de error de orden cuadrático de intervalo y con estructura central, a la cual denominaremos como Derivada Central:

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (6)$$

A partir de estos desarrollos se puede llegar a la aproximación de la derivada de $f(x)$ con error de orden cuarto:

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} + O(h^4) \quad (7)$$

Además se puede llegar a las aproximaciones de las derivadas hacia adelante y hacia atrás de error de orden cuadrático respectivamente:

$$f'(x) = \frac{-3f(x)+4f(x+h)+f(x+2h)}{12h} + O(h^2) \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{3f(x)+4f(x-h)+f(x-2h)}{12h} + O(h^2) \quad (9)$$

I.IV Resolución No Lineal de Ecuaciones

Cuando se habla de encontrar la solución de una ecuación no lineal $f(x)=0$, es decir se busca encontrar los ceros de dicha función, también denominados “raíces”. Una vez encontradas las raíces, se deberá analizar en base al problema físico planteada que soluciones son válidas y cuales se descartan ya que no coinciden

con la lógica, es decir, si tienen sentido estos resultados de acuerdo al contexto en el que ocurre el problema.

Algunos métodos utilizados para la resolución de este tipo de ecuaciones no lineales son métodos cerrados, como el método de Bisección y de Falsa Posición. Dichos métodos utilizan un intervalo $[a, b]$ que contiene al menos una raíz y garantizan la convergencia a una raíz dentro de ese intervalo, siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones.

Otros métodos, como el de Newton-Raphson, llamado también como solución aproximada de raíces reales, y el de la Secante son métodos abiertos. No requieren de un intervalo inicial que contenga una raíz sino que comienzan con una o dos estimaciones iniciales y se mueven hacia una solución, lo que puede hacerlos más rápidos que los métodos cerrados pero menos seguros, ya que no siempre garantizan convergencia.

I.V Ajuste Funcional

El ajuste funcional se realiza con el fin de encontrar una función matemática que mejor represente un conjunto de datos observados. Es decir que a partir de este conjunto de datos (x_k, y_k) se desea encontrar la mejor curva $y = f(x)$ que pase aproximadamente por este conjunto de puntos. Siendo $d_k = |f(x_k) - y_k|$ la distancia en valor absoluto entre la ordenada y_k del conjunto de datos y la función que estamos intentando obtener.

A partir de esta curva, se comete un error ya que no pasa exactamente por cada uno de los puntos. Como se desea minimizar el error, se tiene que derivar e igualar a cero la siguiente expresión correspondiente al Error Cuadrático Medio:

$$E_2(f) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^N (f(x_k) - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

El ajuste lineal por mínimos cuadrados es uno de los tipo de ajuste funcional que se basa en encontrar la mejor recta $y = f(x) = Ax + B$ que pasa por un conjunto de puntos y utiliza la expresión de la ecuación 10 para encontrar la pendiente A y la ordenada de origen B de la mejor recta que pase por (x_k, y_k) , derivando e igualando a cero.

I.VI Interpolación por Splines Cúbica

La interpolación polinomial es un método que se utiliza para construir un polinomio que pase exactamente por una nube de puntos (x_k, y_k) . Es distinta a la aproximación funcional ya que como su nombre indica esta busca “aproximar” con una función de aproximación, ya sea con una recta u otra función, un conjunto de N+1 puntos y la idea de “interpolación” es encontrar un polinomio interpolador de grado N a dicho conjunto de N+1 pares de conjuntos. El polinomio interpolador pasa exactamente por los puntos dados, lo que significa que no hay error en estos puntos ya que se encontrarán los N+1 coeficientes del polinomio. Aunque se piense que no hay error en la interpolación ya que es un método más exacto que la aproximación, si lo hay.

Una técnica de interpolación es por Spline Cúbicas, la cual utiliza funciones polinómicas de tercer orden para aproximar datos. Este método ajusta polinomios pero en forma de trozos, es decir que va dividiendo el intervalo de datos en segmentos más pequeños para ajustar un polinomio cúbico en cada uno de estos segmentos. Estos polinomios cúbicos están conectados de manera que no solo los valores de la función

coincida en los puntos de datos sino también que lo hagan las primeras y segundas derivadas, garantizando así una transición suave entre segmentos.

Las Splines Cúbicas garantizan una curva suave y sin oscilaciones, incluso aunque hubiera un gran conjunto de datos, y de esta manera proporciona interpolaciones más precisas.

II. Métodos

En este trabajo, se presenta un esquema que pertenece a un sistema de equilibrio hidráulico y dinámico. Partiendo del reposo, se analizaron diferentes cuestiones a lo largo de los ejercicios utilizando diversos métodos numéricos.

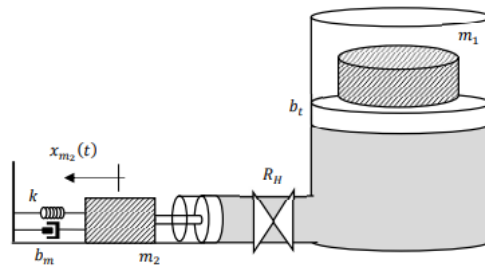


Figura 1: Sistema de equilibrio hidráulico y dinámico.

En el ejercicio 1, se calculó la posición de la masa m_2 medida desde su centro de masa cuando el sistema parte del equilibrio. Para ello se utilizó el método de Runge-Kutta para resolver una ecuación diferencial de segundo orden. Además se realizó la modelización para comprobar que la ecuación diferencial dada era la correcta correspondiente a representar dicho sistema.

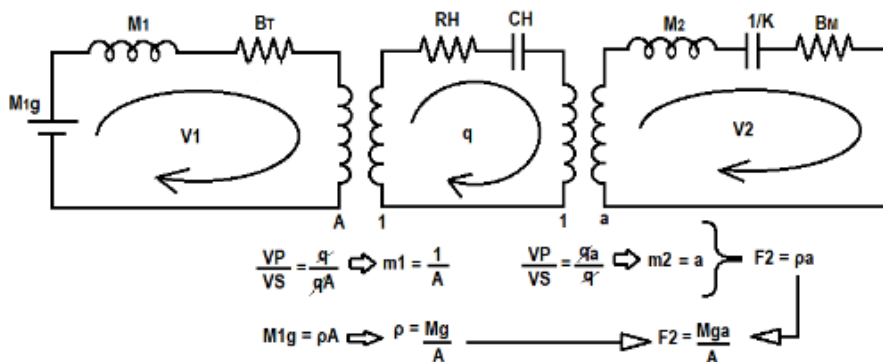


Figura 2: Modelización realizada a partir del sistema de la figura 1 con el análisis de transformadores.

Demostración:

$$F_2(t) = M_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + K \int v_2(t) dt + B_M v_2(t) + R_H m_2^2 v_2(t) + \frac{m_2^2}{C_H} \int v_2(t) dt + M_1 m_1^2 m_2^2 \frac{dv_2(t)}{dt} + B_T m_1^2 m_2^2 v_2(t)$$

siendo $C_H = \frac{A}{\rho g}$ y $v_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$, es decir $v_{m2}(t) = \frac{dx_{m2}(t)}{dt}$

Sabiendo $F_2(t)$, reemplazamos todo en la anterior ecuación:

$$\frac{M_1 g a}{A} = M_2 \frac{d^2 x_{m2}(t)}{dt^2} + K X_{m2}(t) + B_M \frac{dx_{m2}(t)}{dt} + R_H a^2 \frac{dx_{m2}(t)}{dt} + \frac{a^2 \rho g}{A} X_{m2}(t) + M_1 \frac{a^2}{A^2} \frac{d^2 x_{m2}(t)}{dt^2} + B_T \frac{a^2}{A^2} \frac{dx_{m2}(t)}{dt}, t > 0$$

con: $B_{TOTAL} = B_M + \frac{a^2 B_T}{A^2} + R_H a^2$, $K_{TOTAL} = K + \frac{a^2 \rho g}{A}$ y $M_{TOTAL} = M_1 \frac{a^2}{A^2} + M_2$

De esta manera se comprueba que es correcta la ecuación diferencial que representa el sistema:

$$\frac{M_1 g a}{A} u(t) = M_{TOTAL} \frac{d^2 x_{m_2}(t)}{dt^2} + B_{TOTAL} \frac{dx_{m_2}(t)}{dt} + K_{TOTAL} x_{m_2}(t)$$

En el ejercicio 2, se calculó la posición final de la masa m_2 de forma computacional y se comparó con la siguiente expresión analítica: $X_{Fm_2} = \frac{am_1 g}{a^2 \rho g + kA}$.

En el ejercicio 3, se analizó el comportamiento dinámico del sistema utilizando el Modelo de Estados. Este modelo está caracterizado por la ecuación matricial de Estado y la ecuación matricial de Salida. El objetivo principal fue calcular la posición de la masa m_2 medida desde su centro de masa cuando el sistema parte del equilibrio. También a partir de una modelización se buscó llegar a demostrar que el modelo de estados dado del sistema era el correcto.

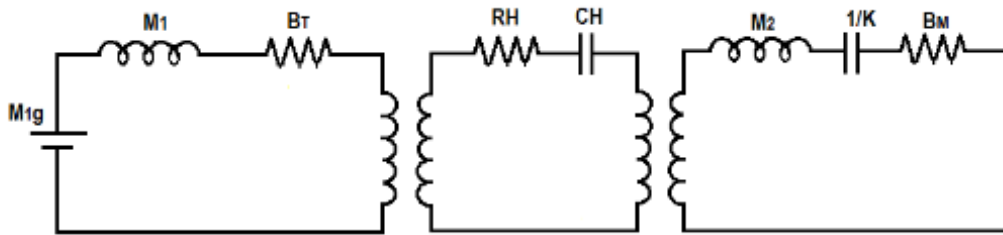


Figura 3: Modelización realizada a partir del sistema de la figura 1.

Analizamos las fuerzas que actúan en el sistema : $X = \begin{bmatrix} v_2 \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

vemos que $F_k = x_2 = K_{TOTAL} \int v_2 dt$, $\dot{x}_1 = \frac{dv_2(t)}{dt}$ y $\dot{x}_2 = \frac{dF_k}{dt} = K_{TOTAL} v_2$

v_2 es x_1 , entonces queda que: $\dot{x}_2 = K_{TOTAL} x_1$

Analizamos en base a la modelización:

$$\frac{M_1 g a}{A} = M_{TOTAL} \dot{v}_2 + B_{TOTAL} v_2 + K_{TOTAL} \int v_2 dt$$

$$\frac{M_1 g a}{A} = M_{TOTAL} \dot{x}_1 + B_{TOTAL} x_1 + x_2, \text{ despejamos en función de } \dot{x}_1:$$

$$\dot{x}_1 = \frac{M_1 g a}{M_{TOTAL} A} - \frac{B_{TOTAL}}{M_{TOTAL}} x_1 - \frac{x_2}{M_{TOTAL}}$$

$x = \int v_2 dt$, reemplazando en la ecuación de F_k y despejando en función de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{F_k}{K_{TOTAL}} \rightarrow x(t) = \frac{x_2}{K_{TOTAL}}$$

De esta manera queda comprobado el modelo de estados:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_T}{m_T} & -\frac{1}{m_T} \\ \frac{1}{k_T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a}{Am_T} \\ 0 \end{bmatrix} m_1 g \\ x(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0] m_1 g \end{cases}$$

En el ejercicio 4, se calculó la velocidad de la masa m_2 , que es la derivada de su posición x_{m_2} . Para ello se utilizó el método de la derivada central de orden cuarto para calcular la derivada numérica.

En el ejercicio 5, se calculó la potencia de la posición de la masa m_2 y de la velocidad de la masa m_2 utilizando los métodos de Regla Trapezoidal Compuesta y Regla de Simpson Compuesta.

En el ejercicio 6, se analizó el comportamiento dinámico del sistema calculando los tiempos de cruce por los puntos de equilibrio de la posición y velocidad de la masa $x_{m2}(t)$ y $v_{m2}(t)$ respectivamente, a partir de los resultados obtenidos en los Ejercicios #1 y #4. Estos tiempos se almacenaron en un vector y se calculó su valor medio y desvío estándar.

En el ejercicio 7, se realizó el submuestreo de la señal de la posición de la masa m_2 con un periodo de muestreo 100 veces menor que el original y se graficaron estos resultados junto a las posiciones originales. Para llevar a cabo el submuestreo, se seleccionaron puntos de la señal original a intervalos regulares, específicamente cada 100 puntos. Este proceso redujo la cantidad de datos.

En el ejercicio 8, se utilizó la señal de la posición submuestreada de la masa m_2 , $x_s[n]$, obtenida en el ejercicio 7. Se llevó a cabo una interpolación utilizando Spline Cúbica para generar una señal continua que pase por todos los puntos submuestreados, denominada $x_{s_{int}}(t)$. Además, se realizó un gráfico conjunto de las posiciones submuestreadas y su correspondiente interpolación polinomial. Esto permitió obtener una señal interpolada de posición de la masa m_2 que coincide en duración temporal con la señal original de la posición de la masa m_2 .

En el ejercicio 9, se llevó a cabo una comparación estadística del submuestreo e interpolación por el métodos de Splines Cúbicas del ejercicio 8 con la señal temporal de posición del ejercicio 1. Para ello, se realizó un ajuste lineal entre x_{m2} y $x_{s_{int}}$. Luego se generó un gráfico xy mostrando la nube de puntos de la relación lineal junto con las rectas del ajuste lineal. Adicionalmente, se calculó el error cuadrático

medio de los residuos $E = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_{m2}(t) - x_{s_{int}}(t))^2}$ para cuantificar la discrepancia entre las dos señales.

III. Resultados

Ejercicio 1

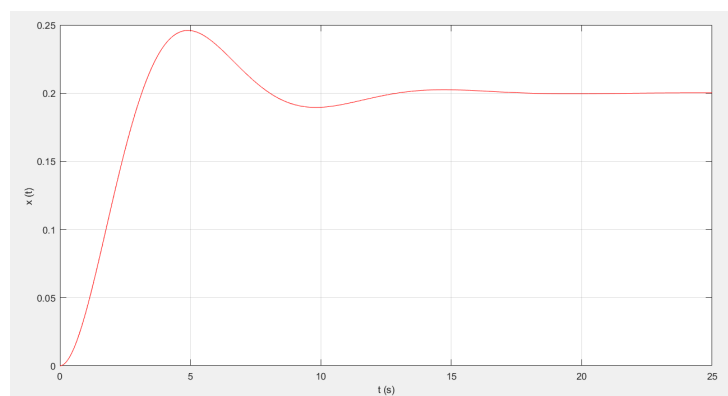


Figura 4: Posiciones de $x_{m2}(t)$ en función del tiempo $t(s)$.

Ejercicio 2

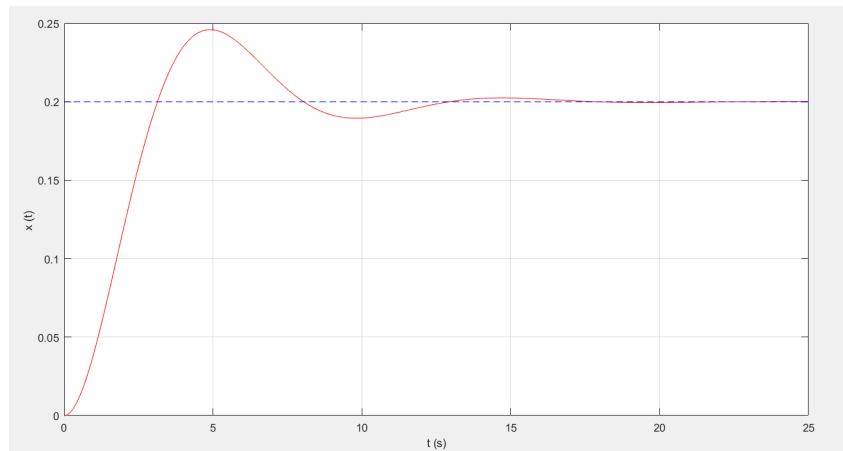


Figura 5: La posición final del vector de posiciones de la masa m_2 en función del tiempo $t(s)$

Valor obtenido con la función analítica: 0.2001.

Valor obtenido computacionalmente: 0.2002.

Ejercicio 3

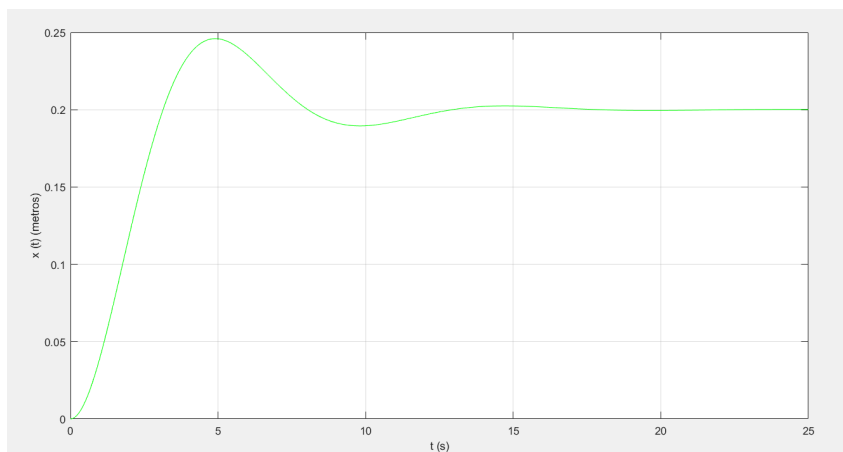


Figura 6: modelo de estados. Solución aproximada de la ecuación diferencial en función del tiempo

Ejercicio 4

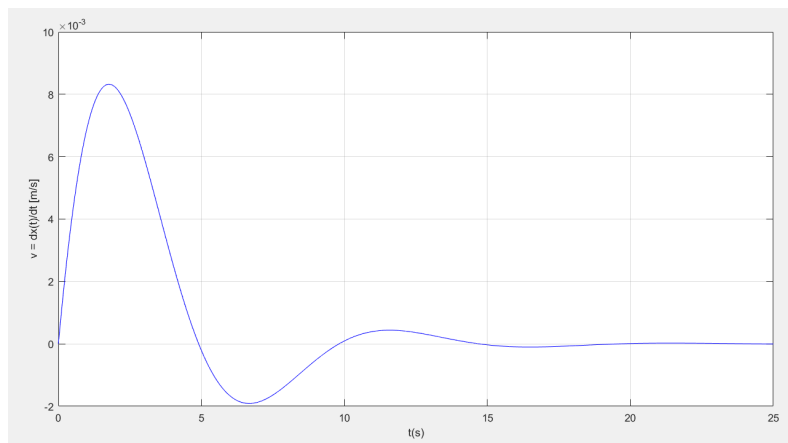


Figura 7: La velocidad de la masa m_2 en función del tiempo $t(s)$.

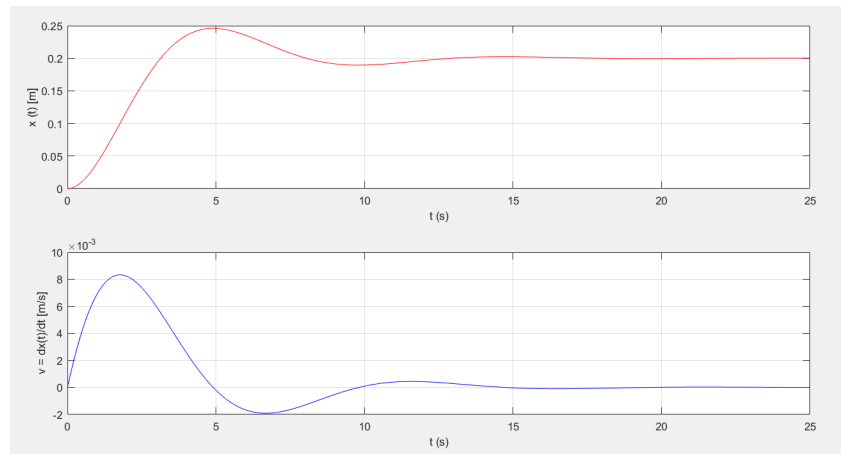


Figura 8: Comparación entre la posición de la masa m_2 en función de $t(s)$ y la velocidad de la masa m_2 en función de $t(s)$.

Ejercicio 5

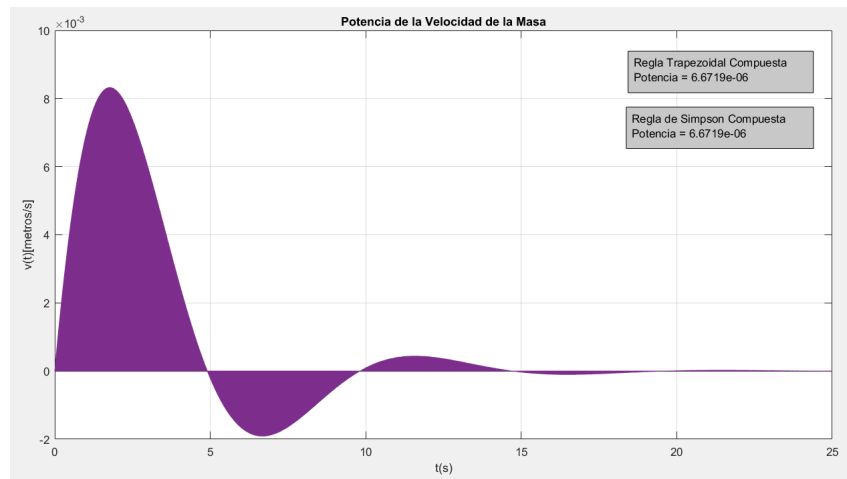


Figura 9: Potencia de la velocidad obtenida a partir de aplicar la Regla Trapezoidal Compuesta y Regla de Simpson Compuesta.

Valor de integral calculada con Regla Trapezoidal Compuesta para velocidades ($v(t)$): $1,6680 \times 10^{-4}$.

Valor de integral calculada con de Simpson Compuesta para velocidades ($v(t)$): $1,6680 \times 10^{-4}$.

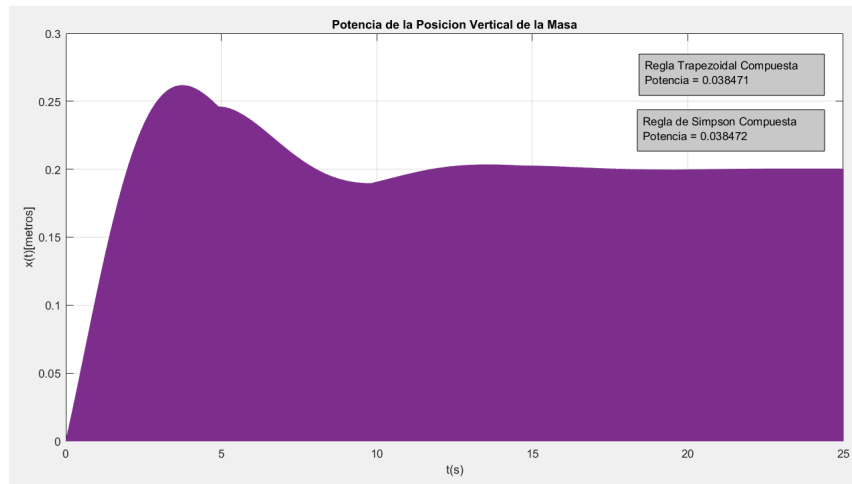


Figura 10: Potencia de las posiciones de la masa m_2 obtenida a partir de aplicar la Regla Trapezoidal Compuesta y Regla de Simpson Compuesta.

Valor de integral calculada con Regla Trapezoidal Compuesta para posiciones ($x(t)$): 0.9618.

Valor de integral calculada con de Simpson Compuesta para posiciones ($x(t)$): 0.9618.

Ejercicio 6

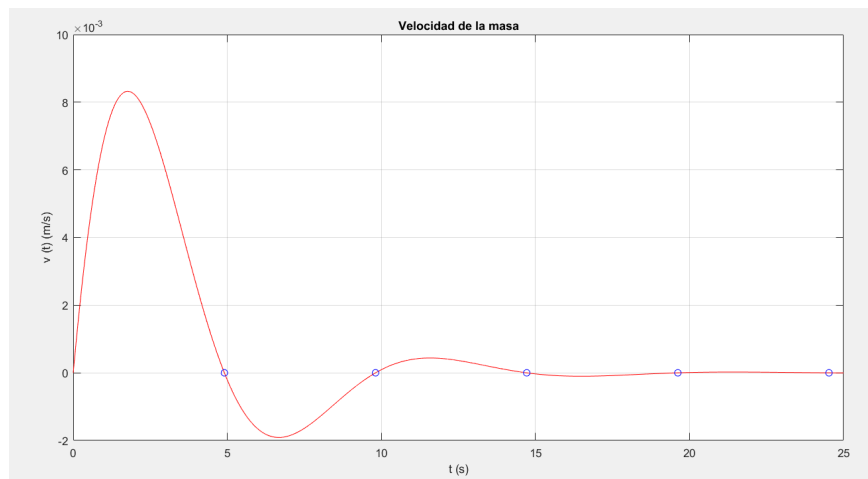


Figura 11: Gráfico de velocidad con sus raíces, obtenidas de tiempos de cruce de velocidad.

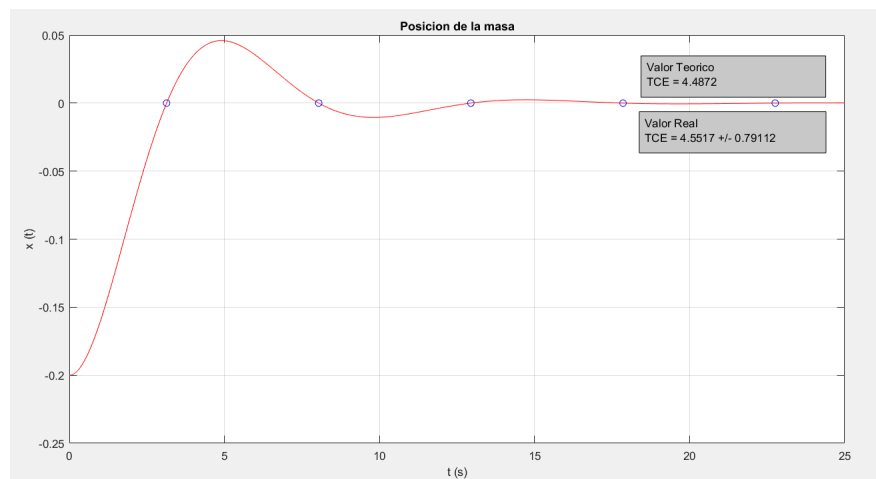


Figura 12: Gráfico de posición con sus raíces, obtenidas de tiempos de cruce de posición de la masa m_2 .

Ejercicio 7

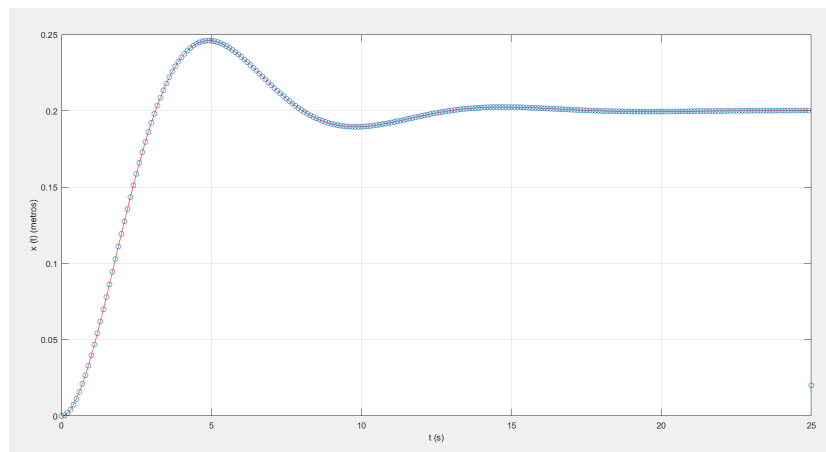


Figura 13: submuestreo de la posición de la masa x_{m2} junto con las posiciones originales.

Ejercicio 8

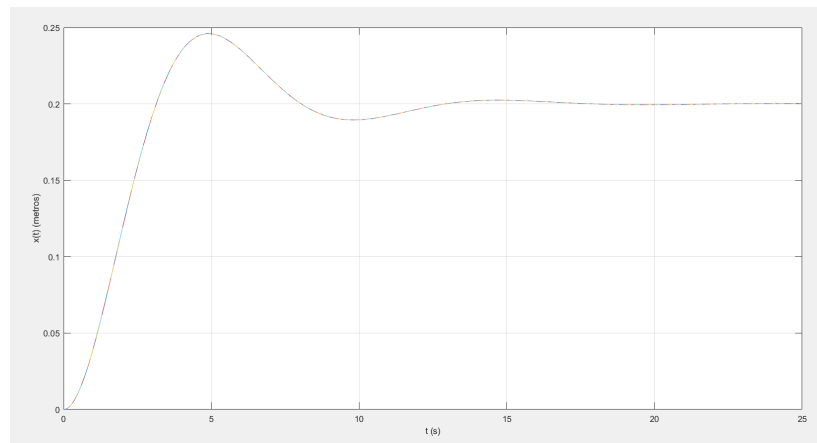


Figura 14: Interpolación por Splines Cúbicas.

Ejercicio 9

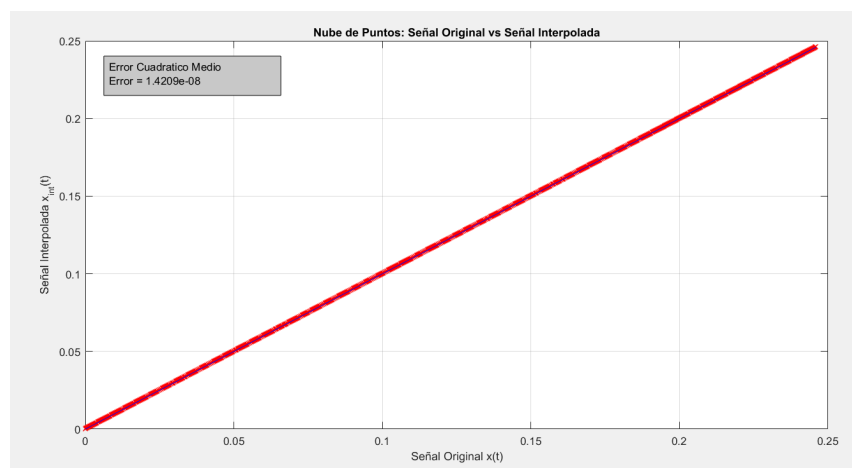


Figura 15: Comparación entre la señal original y la señal interpolada con un error cuadrático medio de 1.420×10^{-8} .

Se obtuvieron los siguientes valores del ajuste:

$$\text{Pendiente } A = 1$$

$$\text{Ordenada de origen } B = 1.6802 \times 10^{-6}$$

$$\text{Coeficiente de correlación } C = 1$$

IV. Conclusiones

En base a los resultados y los gráficos de cada ejercicio, se puede concluir que:

Ejercicio 1: El análisis del comportamiento mecánico del sistema dinámico, basado en la ecuación diferencial que lo describe, reveló que la posición inicial de la masa m_2 , $x_{m2}(t)$, se encontraba en equilibrio. Sin embargo, tras un breve instante, la masa comenzó a oscilar con una amortiguación gradual. La respuesta del sistema se caracterizó por un sobreimpulso inicial, seguido de oscilaciones que decrecieron en amplitud hasta estabilizarse con el tiempo.

Ejercicio 2: El análisis gráfico evidenció una aproximación notable entre la altura obtenida numéricamente y la altura de equilibrio x_f , tal como lo establece la expresión analítica. Entre ambos resultados se observó una mínima diferencia de 0.0001, lo cual es aceptable, ya que el método de Runge-Kutta tiene error de cuarto orden, afectando a la cuarta cifra significativa.

Ejercicio 3: Se calculó la posición de la masa m_2 a través del Modelo de Estados. Se puede observar que el gráfico resultante es similar al gráfico del Ejercicio 1.

Ejercicio 4: Se compararon los resultados de la velocidad obtenidos mediante la derivación numérica con los calculados usando el método de Runge-Kutta, y se encontró que ambos son muy similares.

Ejercicio 5: Se comparó los resultados obtenidos calculados con la Regla Trapezoidal Compuesta con la Regla de Simpson Compuesta para las posiciones y velocidades calculadas en el ejercicio 1 y ejercicio 4. Se obtuvo que el valor de las potencias de la velocidad de la masa en ambos métodos dan iguales, y en las potencias de la posición vertical de la masa tiene una diferencia de 0.000001. Por la teoría se sabe que la regla de Simpson Compuesta es más precisa y exacta que la Regla Trapezoidal Compuesta, pero observamos que dicha diferencia con respecto a la precisión del resultado de la integral no se dio. Consideramos que esto se debe al redondeo de algún valor calculado en los ejercicios 1 y 4.

Ejercicio 6: Se halló los tiempos de cruce por los puntos de equilibrio de la posición y velocidad de la masa m_2 . Los valores obtenidos del promedio y la desviación estándar sugirieron que las raíces estaban distribuidas uniformemente y equidistantemente dentro de un rango, con la excepción de la primera raíz que alcanzó el equilibrio más rápidamente que las siguientes. El valor medio teórico se encontró dentro del intervalo definido por el promedio obtenido numéricamente y su desviación estándar.

Ejercicio 7: Al comparar las posiciones originales con las submuestreadas, se observó esta reducción en la resolución temporal de las señales submuestreadas de la posición de la masa m_2 .

Ejercicio 8: Consistió en realizar una interpolación con Splines Cúbicas a la señal de posición submuestreada de la masa m_2 . Al graficar el conjunto de posiciones submuestreadas y su correspondiente interpolación, se observó que la señal interpolada de la posición de la masa m_2 tiene misma longitud temporal con la posición original de m_2 .

Ejercicio 9: Se realizó una comparación entre la señal de la posición submuestreada e interpolada mediante Splines Cúbicas y la señal original. El ajuste lineal entre la posición submuestreada e interpolada y la posición original se graficó, mostrando una relación lineal casi perfecta.

El gráfico de la nube de puntos y la línea de ajuste lineal revela una pendiente igual a 1. El coeficiente de correlación es una medida específica que cuantifica la intensidad de la relación lineal entre dos variables en un análisis de correlación, nos dio 1 lo cual indica que hay una correlación lineal muy buena entre las dos variables.

El cálculo del error cuadrático medio resultó ser extremadamente bajo ($1,4209 \cdot 10^{-8}$), lo que confirma la alta precisión de la interpolación.

V. Bibliografía

Steven C. Chapra & Raymond P. Canale. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros* (5^a ed.). McGraw-Hill.