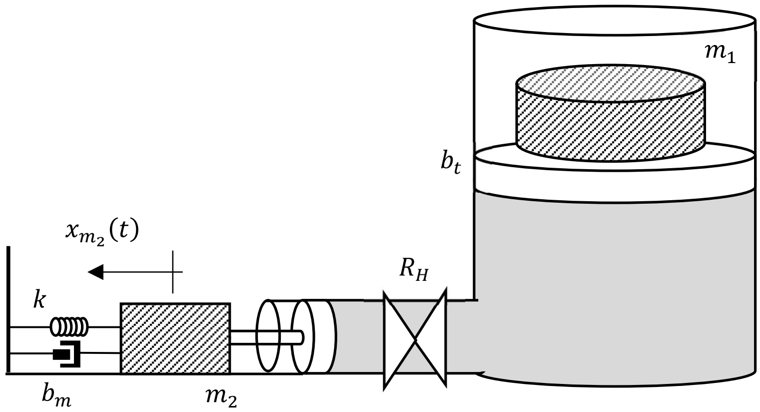
MÉTODOS NUMÉRICOS
Trabajo Práctico de Integración. PL 2024

El siguiente esquema, corresponde a un sistema de equilibrio *hidráulico & dinámico*. La masa m_1 produce el movimiento de una plataforma de masa despreciable, dentro de un tanque con paredes viscosas b_t. Este movimiento, provoca el desplazamiento del líquido (de densidad ρ), almacenado en el tanque (de área A) y regulado por una resistencia hidráulica R_H. Finalmente, un pistón de masa despreciable (con área a), provoca el movimiento de la masa m_2, la cual está contenida por un resorte de constante elástica k y un amortiguador b_m. El sistema parte del reposo. Se pide:



Datos del Sistema: $m_1 = 510$ Kg; $m_2 = 50$ Kg; $R_H = 3.10^3\ \mathrm{Ns/m^5}$; $b_t = 10\ \mathrm{Ns/m}$; $b_m = 30\ \mathrm{Ns/m}$; $k = 25\ \mathrm{N/m}$; $A = 1\ \mathrm{m^2}$; $a = 10^{-3}\mathrm{m^2}$; $\rho = 920\ \mathrm{Kg/m^3}$ y $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

Ejercicio#1

Una forma de analizar el *comportamiento mecánico del sistema dinámico* es a partir de la ecuación diferencial que relaciona la fuerza gravitatoria de la masa m_2, es decir, $m_1 g$, con la posición traslacional de la masa m_2, es decir, $x_{m_2}(t)$:

$$m_T \frac{d^2 x_{m_2}(t)}{dt^2} + b_T \frac{dx_{m_2}(t)}{dt} + k_T x_{m_2}(t) = \frac{a}{A} m_1 g \cdot u(t)$$

Siendo:

$$\begin{cases} b_T = b_m + \left(\frac{a}{A}\right)^2 b_t + a^2 R_H & [\mathrm{Ns/m}] \\ k_T = \frac{a^2 \rho g}{A} + k & [\mathrm{Ns/m}] \\ m_T = m_2 + \left(\frac{a}{A}\right)^2 m_1 & [\mathrm{Kg}] \end{cases}$$

Calcule la *posición de la masa* m_2, es decir, $x_{m_2}(t)$ medida desde su centro de masa, cuando el sistema parte del equilibrio. Tenga presente para su análisis, un tiempo inicial $t_0 = 0$ s, $t_F = 25$ s y una resolución en el cálculo de la ecuación diferencial $\Delta t = 1$ ms.

Nota: Mediante conceptos vistos en Física I, Física II y Física III o bien Señales, Sistemas y Circuitos, demuestre la expresión de la *ecuación diferencial* que modeliza este sistema de equilibrio.

Ejercicio#2

¿Cuál es la *posición final de la masa* m_2? Compare el resultado computacional obtenido con la siguiente expresión analítica:

$$X_{F_{m_2}} = \frac{a m_1 g}{a^2 \rho g + kA}$$

Ejercicio#3

Otra forma alternativa de analizar el *comportamiento dinámico de este sistema físico* es teniendo en cuenta su *Modelo de Estados*, caracterizado por la *ecuación matricial de Estado* y la *ecuación matricial de Salida*. A las matrices A, B, C y D se las llama *Matriz de Estado*, *Entrada*, *Salida* y *Transmisión Directa* respectivamente:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU_{ent}(t) \\ v_0(t) = CX(t) + DU_{ent}(t) \end{cases}$$

Donde:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{b_T}{m_T} & -\dfrac{1}{m_T} \\ k_T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{a}{Am_T} \\ 0 \end{bmatrix} m_1 g \\ x(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{k_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0] m_1 g \end{cases}$$

Siendo:

$$\begin{cases} b_T = b_m + \left(\dfrac{a}{A}\right)^2 b_t + a^2 R_H & [\mathrm{Ns/m}] \\ k_T = \dfrac{a^2 \rho g}{A} + k & [\mathrm{Ns/m}] \\ m_T = m_2 + \left(\dfrac{a}{A}\right)^2 m_1 & [\mathrm{Kg}] \end{cases}$$

Calcule la *posición de la masa* m_2, es decir, $x_{m_2}(t)$ medida desde su centro de masa, cuando el sistema parte del equilibrio. Tenga presente para su análisis, un tiempo inicial $t_0 = 0$ s, $t_F = 25$ s y una resolución en el cálculo de la ecuación diferencial $\Delta t = 1$ ms.

Nota: Mediante conceptos vistos en Señales, Sistemas y Circuitos, demuestre este modelo de estados que caracteriza este sistema de equilibrio.

Ejercicio#4

Calcule la *velocidad de la masa* m_2, es decir, $v_{m_2}(t) = \frac{dx_{m_2}(t)}{dt}$ del ***Ejercicio#1***, mediante el uso de la *rutina de cálculo de derivada numérica* que considere más conveniente según la naturaleza de la señal a derivar.

Ejercicio#5

Calcule la *Potencia de la Posición de la masa* m_2 ***(Ejercicio#1)*** y de la *velocidad de la masa* m_2 ***(Ejercicio#4)***, es decir su energía en el tiempo de análisis. Recuerde que:

$$P_{x_{m_2}} = \frac{1}{t_F - t_0} \int_{t_0}^{t_F} \left| x_{m_2}(t') \right|^2 dt' \text{ y } P_{v_{m_2}} = \frac{1}{t_F - t_0} \int_{t_0}^{t_F} \left| v_{m_2}(t') \right|^2 dt'$$

Utilice para sus cálculos *Regla Trapezoidal Compuesta* y *Regla de Simpson Compuesta*.

Ejercicio#6

Calcule los *tiempos de cruce por los puntos de equilibrio* de la posición y velocidad de la masa $x_{m_2}(t)$ *y* $v_{m_2}(t)$ respectivamente, de los ***Ejercicio#1*** y ***#4***. Almacene dichos valores en un vector y calcule sus diferencias consecutivas, para conocer valor medio y desvío estándar de los mismos, es decir:

$$\bar{T}_{CE} = \frac{1}{M} \sum_{v=1}^{M} T_{CE} \text{ y } \sigma_{T_{CE}} = \sqrt{\frac{\sum_{v=1}^{M} [T_{CE} - \bar{T}_{CE}]^2}{M - 1}}$$

¿Qué puede concluir acerca del valor medio obtenido y del desvío de estos tiempos? ¿A qué se debe ello? Compare los valores medios obtenidos con el teórico $T_{CE} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$, siendo $\omega_n = \sqrt{\frac{k_T}{m_T}}$ y $\xi = \frac{b_T}{2\sqrt{k_T m_T}}$ con $b_T = b_m + \left(\frac{a}{A}\right)^2 b_t + a^2 R_H$, $k_T = \frac{a^2\rho g}{A} + k$ y $m_T = m_2 + \left(\frac{a}{A}\right)^2 m_1$.

Ejercicio#7

La técnica de *Submuestreo* consiste en tomar las muestras *m-ésimas* de una señal digital, es decir, reduciendo su frecuencia de muestreo original M veces. En consecuencia:

$$x[n] \equiv x[nT_{S1}] \to x_S[n] = x[nM] \equiv x[nT_{S2}], con\ T_{S2} = MT_{S1}\ y\ T_{S1} = 1/f_{S1}$$

Siendo:

f_{s1}: Frecuencia de muestreo original de los datos. (el intervalo de tiempo usado en el cálculo de las posiciones mediante Runge–Kutta). Recuerde que $f_{s1} = 1/T_{s1}$.

T_{s1}: Intervalo de tiempo usado en el cálculo de las posiciones mediante Runge–Kutta.

Con esta técnica, se reduce en un factor de M veces, el almacenamiento en memoria de una señal digital. Sin embargo, esto trae aparejado una posible pérdida de resolución de la señal temporal y la posibilidad de solapamiento en los espectros frecuenciales si no se cumple el *Teorema del Muestro de Nyquist*.

Realice un *submuestreo* de la posición de la masa $x_{m_2}(t)$ del ***Ejercicio#1***, con un período de muestreo 100 veces menor que el original, es decir, $M = 100$ o bien, $T_{S2} = MT_{S1} = 0.1$ seg. Grafique estos resultados junto a las posiciones originales, observando esta reducción en la resolución temporal de las señales submuestreadas $x_S[n]$.

Ejercicio#8

Teniendo en cuenta la señal de *posición submuestreada de la masa* m_2, $x_S[n]$ del ejercicio anterior, se pide:

Encontrar una *interpolación* mediante *polinomios interpoladores de tercer grado*, es decir, mediante *Spline Cúbicas*. Esta señal interpolada se denominará $x_{S_{Int\_SC}}(t)$. Realice un gráfico conjunto de las posiciones submuestreadas y su correspondiente interpolación polinomial, con un $\Delta t = 1$ ms. De esta forma, se obtendrá una señal interpolada de posición de la masa m_2 de la misma longitud temporal de la señal original de la posición de la masa m_2, es decir, $x_{m_2}(t)$.

Ejercicio#9

Se desea realizar la *comparación estadística* del *submuestreo* e *interpolación* por el *método interpolador de Spline Cúbicas* del ***Ejercicio#8***. La comparación se realizará con la señal temporal de posición vertical del ***Ejercicio#1***. Para ello, se pide:

- ✓ Realice un *ajuste lineal* entre $x_{m_2}(t)$ y $x_{S_{Int\_SC}}(t)$, calculando pendiente, ordenada al origen y coeficiente de correlación A, B , ρ y respectivamente.
- ✓ Grafique la *nube de puntos* de la relación lineal en un gráfico xy junto a las rectas de ajuste lineal. Realice un cálculo de residuos en su error cuadrático medio, es decir:

$$E = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{v=1}^{N}\left[x_{m_2}(t) - x_{S_{Int\_SC}}(t)\right]^2}$$

Muestre estos errores cuadráticos medios junto al gráfico de correlación lineal.