第五章特征值与特征向量 矩阵的对角化

5.1 特征值与特征向量

定义1 设$A \in P^{n\times n}$, 如有数$\lambda_0 \in P$, 及非零列向量$\xi \in P^n$,

使得：$A\xi = \lambda_0 \xi$, 则称λ_0为A的一个特征值，

非零的列向量ξ称为A属于λ_0的一个特征向量

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

显然每行元素之和为10，如取$\xi = [1,1,1,1]^T$，有：

$$A\cdot\xi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10\cdot\xi$$

$\therefore \lambda = 10$是A的一个特征值，

而$\xi = [1,1,1,1]^T$是A的属于特征值10的特征向量

由定义可得

性质1:

(1)若ξ是A的一个特征向量，则ξ只能属于A的其中一个特征值。

(2)属于A 的任一个特征值λ_0的特征向量有无穷多个.

证明(1) 设$A\xi_0=\lambda_1\xi_0$ 又有$A\xi_0=\lambda_2\xi_0$

$$\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\cdot\xi_0=\theta$$

$\because \xi_0$为特征向量,$\therefore \xi_0\neq\theta \therefore \lambda_1=\lambda_2$

(2) 设$A\xi_0=\lambda_0\xi_0$

则$\forall k\neq 0$有 $A(k\xi_0)=\lambda_0(k\xi_0)$

如何求λ和ξ:

$$设\xi \neq \theta,\ A_{n\times n}\xi = \lambda_0\xi \Leftrightarrow \left(\lambda_0 E - A\right)\xi = \theta$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda_0 E - A\right)X = \theta \text{ 有非零解}\xi$$

$$\Leftrightarrow R\left(\lambda_0 E - A\right) < n \Leftrightarrow \left|\lambda_0 E - A\right| = 0$$

定义2 设$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为A的特征多项式

$$= \lambda^n - \left(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\right)\lambda^{n-1} + \cdots + \left(-1\right)^n |A|$$

$$= \lambda^n - tr(A)\cdot\lambda^{n-1} + \cdots + \left(-1\right)^n |A|$$

记 $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 为A 的迹

(迹的性质:$tr(AB) = tr(BA)$)

性质2,(1) λ_0 为 $A_{n\times n}$ 的一个特征值

$$\Leftrightarrow f(\lambda_0)=|\lambda_0 E-A|=0 \Leftrightarrow R(\lambda_0 E-A)<n$$

(2) $(\lambda_0 E-A)X=0$ 的全体非零解,

即为 A 的属于特征值 λ_0 的全体特征向量

(3) λ_0 不是 $A_{n\times n}$ 的一个特征值

$$\Leftrightarrow f(\lambda_0)=|\lambda_0 E-A|\neq 0 \Leftrightarrow R(\lambda_0 E-A)=n$$

例 设 $E+A$ 可逆，$E-A$ 不可逆,

……是 A 的特征值,……不是 A 的特征值

解 $\because |E+A|\neq 0$,即 $(-1)^n|-1\cdot E-A|\neq 0$

$\therefore \lambda=-1$ 不是 A 的特征值

$\because |E-A|=|1\cdot E-A|=0$

$\therefore \lambda=1$ 是 A 的特征值

特征值与特征向量的求法

第一步 设$A_{n\times n}$，先求特征值：

令 $f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|=\lambda^n-tr(A)\cdot\lambda^{n-1}+\cdots+\left(-1\right)^n\left|A\right|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}=0$

求出A的所有不同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ （n_i为每个特征值的重数，$n_1+\cdots+n_s=n$）

显然，n阶矩阵A，在复数域C上有n个特征值，

但是在一般数域P上不一定有n个特征值。

例如$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

第二步 求特征向量

对每个λ_i，求$\left(\lambda_i E-A\right)X=0$的一个基础解系$\xi_{i1},\cdots,\xi_{ir_i}$；

则λ_i对应的全体特征向量为：

（此时$R\left(\lambda_i E-A\right)=n-r_i$）

$k_{i1}\xi_{i1}+k_{i2}\xi_{i2}+\cdots+k_{ir_i}\xi_{ir_i}$ k_{ij}不同时为零

记：$V_{\lambda_i}=\left\{A\text{的属于}\lambda_i\text{的全体特征向量}\right\}\cup\left\{\theta\right\}$

$=\left\{X|(\lambda_i E-A)X=0,X\in P^n\right\}=L(\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i})$

称为特征值λ_i的特征子空间

例1 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 求A的特征值，特征向量

解 (1) 先求特征值

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

$\Rightarrow \lambda_1=2$（单根），

$\lambda_2=\lambda_3=-1$（2重根）

(2) 再求特征向量，

对$\lambda_1=2$ 求出A属于$\lambda_1=2$的全体特征向量，

即求出$(2E-A)X=0$ 的所有非零解 也即求出基础解系。

$$2E-A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\therefore\begin{cases}x_1 \quad -2x_3=0\\ x_2 \quad\quad\quad =0\end{cases}$$

$\therefore$ 通解

$$\begin{cases}x_1=2k_{11}\\ x_2=0\\ x_3=k_{11}\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=k_{11}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ A属于$\lambda_1=2$的全体特征向量 $k_{11}\xi_{11}$ $(k_{11}\neq 0)$ 得到基础解系$\xi_{11}=[2 \quad 0 \quad 1]^T$

再对 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 求解$(E-A)X=0$，得基础解系 $\xi_{21}=[1,2,-1]^T$

A属于$\lambda_2=\lambda_3=-1$的全体特征向量$k_{21}\xi_{21}$ $(k_{21}\neq 0)$

例2 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}$,求$A$ 的特征值，特征向量.

1，先求A的特征值

$$f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -2\\ 2 & \lambda-2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+(c_2+c_3)}(\lambda\text{-}2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & \lambda-2 & -2\\ 1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda\text{-}2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda\text{-}2)(\lambda\text{-}1)^2=\lambda^3-4\lambda^2-3\lambda-2$$

$$\text{或}f(\lambda)\ \xlongequal{r_2-r_1}\ \begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -2\\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0\\ 2 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda\text{-}1)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$\therefore \lambda_1=1$(2重根)　　$\lambda_2=2$（单根）

2，再求特征向量

(a), 对$\lambda_1=1$，求$(E-A)X=0$的全体非零解，即方程组的基础解系

$$\because\ E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\2&-1&-2\\2&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

即有：$x_1-\frac{1}{2}x_2-x_3=0$

$$\therefore\text{通解为：}\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}t_1+t_2\\x_2=\ \ t_1\\x_3=\ \ \ \ \ \ \ \ t_2\end{cases}$$

得到一组基础解系：$\xi_{11}=(1,2,0)^T\ \xi_{12}=(1,0,1)^T$

$\therefore\lambda_1=1$对应的全体特征向量$k_{11}\xi_{11}+k_{12}\xi_{12}(k_{11},k_{12}$不同时为零$)$

(b), 对$\lambda_2=2$，即求$(2E-A)X=0$的全体非零解，即基础解系

$$2E-A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
基础解系$\xi_{21}=(1,1,1)^T$

$\therefore\lambda_2=2$对应的全体特征向量$k_{21}\xi_{21}(k_{21}\neq0)$

5.2 特征值与特征向量的基本性质

·

性质1 设 $A_{n\times n}$ 在数域P上的全部特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,

$$f(\lambda)=\left|\lambda E - A_{n\times n}\right|$$

$$=\lambda^n-\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)\lambda^{n-1}+\cdots+\left(-1\right)^n\left|A\right|$$

$$=\left(\lambda-\lambda_1\right)\left(\lambda-\lambda_2\right)\cdots\left(\lambda-\lambda_n\right)$$

$$=\lambda^n-\left(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\right)\lambda^{n-1}+\cdots+\left(-1\right)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

则(1) $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=tr(A)$ 称为A的迹

(2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\left|A\right|$

(A 可逆 $\Leftrightarrow$ A的特征值都不为零)

性质2 方阵A的不同特征值对应的特征向量必线性无关。

证明 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$A$的$s$个不同特征值，

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$分别是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$对应的特征向量

即：$A\xi_i=\lambda_i\xi_i\left(i=1,2,\cdots,s\right)$

下面用归纳法证$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关

1. $s=1$时$\because \xi_1\neq\theta, \therefore \xi_1$线性无关

2. 设s-1时成立，即$\xi_1,\cdots,\xi_{s-1}$线性无关

3. 下证s时也成立

设$k_1\xi_1+\cdots+k_{s-1}\xi_{s-1}+k_s\xi_s=\theta$ (1)

(1)两边左乘A

$k_1\lambda_1\xi_1+\cdots+k_{s-1}\lambda_{s-1}\xi_{s-1}+k_s\lambda_s\xi_s=\theta$ (2)

$(1)\lambda_s-(2)$

$k_1\left(\lambda_s-\lambda_1\right)\xi_1+\cdots+k_{s-1}\left(\lambda_s-\lambda_{s-1}\right)\xi_{s-1}=\theta$ (3)

$\because \xi_1,\cdots,\xi_{s-1}$线性无关

$\therefore k_1\left(\lambda_s-\lambda_1\right)=0,\cdots,\ k_{s-1}\left(\lambda_s-\lambda_{s-1}\right)=0$

又$\lambda_s\neq\lambda_i$（i=1,⋯,s-1）$\therefore\ k_1=k_2=\cdots=k_{s-1}=0$

代入$(1)\Rightarrow k_s\xi_s=0\ \ \therefore k_s=0$

$\therefore \xi_1,\cdots,\xi_s$也线性无关

$\therefore$由归纳法即原命题成立

性质3，当A的特征值有重根时：$f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

即$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 是$A_{n\times n}$ 的s 个不同特征值（$s<n$）

$(\lambda_1 E-A)X=0$的基础解系为 $\xi_{11},\xi_{12},\ldots\xi_{1r_1}$;

$(R(\lambda_1 E-A)=n-r_1)$

$(\lambda_2 E-A)X=0$的基础解系为 $\xi_{21},\xi_{22},\ldots\xi_{2r_2}$;

....

$(\lambda_s E-A)X=0$的基础解系为 $\xi_{s1},\xi_{s2},\ldots\xi_{sr_s}$。

则向量组：$\xi_{11},\xi_{12},\ldots,\xi_{1r_1},\xi_{21},\xi_{22},\ldots,\xi_{2r_2},\cdots,\ \xi_{s1},\xi_{s2},\ldots,\xi_{sr_s}$

线性无关。

此时$A_{n\times n}$共有线性无关向量的个数$r_1+r_2+\cdots+r_s$个,

（该向量组也为全体特征向量的一个极大线性无关组）

性质 4 $\dim V_{\lambda_0} \leqslant \lambda_0$ 的重数, 这里 λ_0 的重数是指 λ_0 作为特征多项式零点的重数.

通常, 我们称 V_{λ_0} 的维数 $\dim V_{\lambda_0}$ 为特征值 λ_0 的**几何重数**,

而λ_0 的重数，称为特征值λ_0 的**代数重数**。

通过类似于待定系数法的方法, 不难得到

定理 1 (Hamilton–Cayley (哈密顿–凯莱) 定理)

设$A \in P^{n\times n}$, $f(\lambda)=|\lambda E - A|$,则$f(A)=O$

定理 2 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 这里 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{P}^n$ 且 $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\theta}$,

1) 若 $g(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个多项式函数, 则 $g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi} = g(\lambda)\boldsymbol{\xi}$.

2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\lambda \neq 0$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\xi}$.

定理 3 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $g(x)$ 是复系数多项式函数, 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 (含重数) 为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $g(\boldsymbol{A})$ 的所有特征值 (含重数) 为 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$.

例 设$\left|A_{3\times 3}\right| = 3, \lambda = -2$ 为A的一个特征值，则

A^*必有特征值：……….

$A^3 + 2A^2 + 4A + 8E$必有特征值：……….

$\left|A^3 + 2A^2 + 4A + 8E\right| = ………$

解 $\because AA^* = |A|E = 3E \therefore A^* = 3A^{-1}$

又$\because -\frac{1}{2}$是A^{-1}的一个特征值$\therefore 3\times(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$是$A^*$对一个特征值

设$f(\mathrm{x}) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ 则$f(A) = A^3 + 2A^2 + 4A + 8E$

$\because f(-2) = 0 \quad \therefore 0$是 $f(A) = A^3 + 2A^2 + 4A + 8E$ 的一个特征值

$$|f(A)| = \left|A^3 + 2A^2 + 4A + 8E\right| = f(-2)\times\cdots = 0$$

5.3 矩阵的相似及性质

5.3.1，矩阵的相似

定义1：设A，$B \in P^{n\times n}$，若存在可逆矩阵$P \in P^{n\times n}$，

使得$P^{-1}AP = B$，则称A与B相似，记作 $A \overset{S}{\sim} B$.

相抵（等价）：设$A, B \in P^{m\times n}$.如果A经过一系列初等变换到B，称A, B相抵(等价）。

性质：相抵(等价)具有自反性，对称性，传递性

如果$R(A) = r$，A的相抵（等价）标准型为$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

A, B相抵(等价) $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q，使得$PAQ = B$

$\Leftrightarrow R(A) = R(B) \Leftrightarrow$ 相同标准型

从相似的定义得到相似的性质：

性质1 相似具有：自反性；对称性；传递性 （相似也确定一个等价关系）

$\because E^{-1}AE = A$　　　设$P^{-1}AP = B \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$

设$P^{-1}AP = B, Q^{-1}BQ = C \Rightarrow (PQ)^{-1}A(PQ) = C$

性质2 设A, B相似，则　　　(相似的五个必要条件)

$(1)|A| = |B|$　　　行列式相等

$(2)R(A) = R(B)$　　　秩相同

$(3)A$与B等价　　　等价

$(4)trA = trB$　　　迹相同

$(5)|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$　　　特征值相同

推论 设A, B都能对角化，则A, B相似$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B|$

性质3，设$P^{-1}AP = B, \lambda$为A, B的特征值，V_λ^A, V_λ^B分别为A, B的属于特征值λ的子空间，　则$: V_\lambda^A = PV_\lambda^B$　这里 $PV_\lambda^B = \{P\zeta \mid \zeta \in V_\lambda^B\}$

特别注意,5个必要条件只要一个不成立，两个矩阵就一定不相似；

但是，即使5个必要条件都成立，也不能保证两个矩阵相似。

例，设 $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(相似的五个必要条件)

显然 $|E|=|A|=1$ 行列式相等

$R(E)=R(A)=2$ 秩相同

E 与A等价 等价

$|\lambda E-E|=|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2$ 特征值相同

$trE=trA=2$ 迹相同

但是 $\because P^{-1}EP=E\neq A \therefore E,A$不相似

例1　已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&3\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&b\end{bmatrix}$ 相似

求 (1),a,b　(2)P使得$P^{-1}AP=B$

解 (1)$\because A,B$ 相似，$\therefore\begin{cases}tr(A)=tr(B)\\|A|=|B|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5+a=3+b\\6a-8=2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=5\end{cases}$

(2)$\because A$ 与对角矩阵 B 相似，$\therefore A$的特征值为

$\lambda_1=1$　　求得 $(E-A)X=0$ 基础解系 $\xi_1=\begin{bmatrix}0&1&-1\end{bmatrix}^T$

$\lambda_2=2$　　$(2E-A)X=0$ 基础解系 $\xi_2=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}^T$

$\lambda_3=b=5$　　$(5E-A)X=0$ 基础解系 $\xi_3=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}^T$

令 $P=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$ 则$P^{-1}AP=B$

因此, 矩阵的相似也确定了一个等价关系. 称为矩阵的相似关系。

可以将方阵的集合 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 按照相似关系分划为不同的类——相似 (等价) 类,
使得 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的每一个方阵属于且只属于其中的一个相似 (等价) 类.

我们知道, 等秩是数域 $\mathbb{P}$ 上的两个同规模矩阵相抵的特征

自然地, 我们要问数域 $\mathbb{P}$ 上的两个同阶方阵相似的特征是什么呢?

在每一个矩阵的相抵等价类中, 我们都找到了类的一个代表相抵标准型

我们又要问在一个相似类中能否也能找到一个具有 “相对简单” 的代表?

在高等代数中, 可以发现当数域为复数域时,

相似类中的 “相对简单” 构造的矩阵就叫做 **Jordan** (若尔当矩阵).

5.4 矩阵的相似对角化

$\because P^{-1}(\lambda E)P=\lambda E,$ $\therefore$与λE相似的矩阵是唯一的，即只有它自己。

设 $\lambda E\neq A\in P^{n\times n}$,则与$A$相似的矩阵有无穷多

问题：

1.A能否与一个对角阵$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$相似

(如能，称A 能对角化)

2.如A能对角化，即有可逆矩阵P，和对角矩阵Λ

$$使P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda$$

P，Λ的结构有什么特点？ P，Λ 如何求？

利用特征值与特征向量，我们来考察前面两个问题。

设A 与 $\Lambda=diag(\lambda_1\cdots\lambda_n)$相似

$$\xleftrightarrow{\text{存在可逆矩阵}P} P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow AP=P\Lambda$$

$$\underset{\text{显然}\alpha_1\cdots\alpha_n\text{线性无关}}{\xleftrightarrow{\text{记P}=[\alpha_1\cdots\alpha_n]}} A[\alpha_1\cdots\alpha_n]=[\alpha_1\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n]=[\lambda_1\alpha_1,\cdots,\lambda_n\alpha_n]$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,(i=1,2,\cdots,n)$$ $\Leftrightarrow A$ 有n个线性无关的特征向量

由此可得：如果A能对角化，

则对角阵Λ的对角线上的元素正好为A 的特征值；

可逆矩阵P 中的每个列向量α_i，

正是A 对应λ_i 的特征向量.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\mathbb{P}$ 上的某个对角矩阵相似.

2) $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中有 n 个线性无关的特征向量.

3) $\mathbb{P}^n$ 中存在一个由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量所形成的基.

4) $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的所有两两互异的特征子空间的维数之和等于 n.

5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 上有 n 个特征值 (遇特征多项式有重零点时, 按重数计), 且对于每个特征值 λ, $\dim V_\lambda = \lambda$ 的重数.

推论1，n 阶矩阵A 有n 个两两不同特征值，

$\Rightarrow A$ 一定可以对角化

推论2，设$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1, A\xi_2 = \lambda_2\xi_2$, 且$\lambda_1 \neq \lambda_2$,

则$\xi_1 + \xi_2$一定不是A 对特征向量

显然，A的特征值一定为如下两种情形之一：

1，A的特征值全为单根，即有n 个不同特征值：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ $(n_i = 1)$

2，A的特征值有重根$($至少有一个$n_i \geq 2)$

推论2的证明：

设$A\xi_1=\lambda_1\xi_1, A\xi_2=\lambda_2\xi_2$,且$\lambda_1\neq\lambda_2$，则$\xi_1+\xi_2$ 不是A对特征向量

证明，反设 $A(\xi_1+\xi_2)=\lambda_0(\xi_1+\xi_2)$

则 $A\xi_1+\mathrm{A}\xi_2=\lambda_0(\xi_1+\xi_2)$

$\Rightarrow \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda_0(\xi_1+\xi_2)$

$\therefore (\lambda_1-\lambda_0)\xi_1+(\lambda_2-\lambda_0)\xi_2=\theta$

$\because \xi_1,\xi_2$ 是不同特征值所对应的特征向量,$\therefore$线性无关

$\therefore (\lambda_1-\lambda_0)=0,(\lambda_2-\lambda_0)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ 矛盾

$\therefore \xi_1+\xi_2$ 不是A的特征向量

选择题：设$A\xi_1=\lambda_1\xi_1, A\xi_2=\lambda_2\xi_2$,且$\lambda_1\neq\lambda_2$，如果$\xi_1$与$A(\xi_1+\xi_2)$线性无关，则

（1）$\lambda_1=0$ (2)$\lambda_2=0$ (3)$\lambda_1\neq 0$ (4)$\lambda_2\neq 0$

由定理4，有下面法则：

判法一，如果A 的特征值全为单根

$\Rightarrow A$ 必能对角化（A 能对角化的充分条件）

判法二，如果A 的特征值有重根

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s} \quad \begin{pmatrix} n_1+\cdots+n_s=n \\ s<n \end{pmatrix}$$

A的不同特征值	λ_1 λ_2	$\cdots$	λ_s	
λ_i的重数	n_1 n_2	$\cdots$	n_s	$(n_1+\cdots+n_s=n)$
$(\lambda_i E-A)X=0$ $\dim V_{\lambda_i}=r_i$ 基础解系中解向量个数	r_1 r_2	$\cdots$	r_s	$(r_1+\cdots+r_s\le n)$

$$A\text{能对角化} \Leftrightarrow r_1+r_2+\cdots+r_s=n$$

$$\Leftrightarrow n_i=r_i \quad (i=1,\cdots,s)$$

下面考虑当A能对角化时，如何求可逆矩阵P和对角矩阵Λ？

先考察情形一，设$A_{n\times n}$有n个不同特征值（全为单根），即有$A\xi_i=\lambda_i\xi_i,(i=1,\cdots,n)$

$\left((\lambda_i E-A)X=0\right.$的基础解系中只有一个解，即$R(\lambda_i E-A)=n-1\Big)$

如果记$P=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，则P可逆， 必有：$P^{-1}AP=\Lambda$

对应的$\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,(注意$\lambda_i$的顺序)

例1，设$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，问$A$能否对角化，若能，求$P$，使$P^{-1}AP=\Lambda$

解(1)$\because |\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\therefore A$有3个不同特征值，

$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$（即$A$能对角化）

(2)分别求特征向量$(-E-A)X=0\quad \xi_1=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$

$(2E-A)X=0\quad \xi_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ （基础解系）

$(3E-A)X=0\quad \xi_3=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\end{bmatrix}^T$

(3)记$P_1=[\xi_1\ \xi_2\ \xi_3]$

如记$P_2=[\xi_3\ \xi_1\ \xi_2]$

则$P_1^{-1}AP_1=diag[\lambda_1\quad\lambda_2\quad\lambda_3]=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$

则$P_2^{-1}AP_2=diag[\lambda_3\quad\lambda_1\quad\lambda_2]=\begin{bmatrix}3 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$

再考虑情形二：即A的特征值有重根，且能对角化 (此时$r_i = n_i$)

设A的不同特征值是$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s \ (s < n)$,

$$\left(\lambda_1 E - A\right) X = 0 \text{ 基础解系 } \xi_{11}, \cdots, \xi_{1r_1}$$

$$\left(\lambda_2 E - A\right) X = 0 \text{ 基础解系 } \xi_{21}, \cdots, \xi_{2r_2}$$

$$R\left(\lambda_i E - A\right) = n - r_i \quad (n_i = r_i)$$

……

$$\left(\lambda_s E - A\right) X = 0 \text{ 基础解系 } \xi_{s1}, \cdots, \xi_{sr_s}$$

则A的n 个线性无关特征向量为：

$$\xi_{11}, \cdots, \xi_{1r_1}, \xi_{21}, \cdots, \xi_{2r_2}, \cdots\cdots, \xi_{s1}, \cdots, \xi_{sr_s} \quad (r_1 + \cdots + r_s = n)$$

记$P = \left[\xi_{11}, \cdots, \xi_{1r_1} \cdots \xi_{s1}, \cdots, \xi_{sr_s}\right]$，则$P$可逆。

$$\text{且} P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_s & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{bmatrix} = diag\left(\overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{n_1 = r_1} \quad \cdots \quad \overbrace{\lambda_s \cdots \lambda_s}^{n_s = r_s} \right)$$

例2 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 问 (1) A 能否对角化 (2) 如能，求 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

(3) 求 $A^{2016}=P\Lambda^{2016}P^{-1}=(P\Lambda^{2016})P^{-1}=BP^{-1}$

解 (1) $f(\lambda)=|\lambda E\text{-A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{c_3-c_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-2&\lambda-1&-1-\lambda\\-2&-2&1+\lambda\end{vmatrix}$

$\overset{r_2+r_3}{===}\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-4&\lambda-3&0\\-2&-2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$ $\Rightarrow \lambda_1=5$(单根)

$\lambda_2=-1$(二重根)

$\because(-E-A)X=0$ 的基础解系为：$\xi_{21}=[1\quad 0\quad -1]^T$ $\xi_{22}=[0\quad 1\quad -1]^T$

$(5E-A)X=0$ 的基础解系为：$\xi_{11}=[1\quad 1\quad 1]^T$ ($\therefore A$ 能对角化)

(2) 设 $P=[\xi_{11}\quad \xi_{21}\quad \xi_{22}]$ 则 P 可逆，

且 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}=\Lambda$

$$\begin{bmatrix}P\\B\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{bmatrix}E\\BP^{-1}\end{bmatrix}$$

例3 设$A_{3\times3}$的三个特征值为1,1,2，记$\Lambda=\mathrm{diag}[1,1,2]$

则如A能对角化 $R(E-A)=\overset{1}{\cdots\cdots}$, $R(2E-A)=\overset{2}{\cdots\cdots}$,

$\left\{\begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix}\right.$

如A不能对角化 $R(E-A)=\cdots\cdots$, $R(2E-A)=\overset{2}{\cdots\cdots}$,

例4，设$\alpha=[1,2,3,4]^T$, $\beta=[3,-2,-1,a]^T$, $A=\alpha\beta^T$，问a=？时A能对角化？

解 $$A=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2 & -1 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1 & a\\6 & -4 & -2 & 2a\\9 & -6 & -3 & 3a\\12 & -8 & -4 & 4a\end{bmatrix}$$

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3[\lambda-(4a-4)] \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \quad \lambda_4=4(a-1)$$

讨论(1)如$a=1,\lambda_4=0,\therefore\lambda=0$是$A$的四重特征根 $\because R(A)=1$

$\therefore(0E-A)X=0$,即$AX=0$的基础解系只有3个解向量

$\therefore A$不能对角化

(2)如$a\neq1$,则$\lambda=0$是A的三重特征根

由(1)知$AX=0$有三个线性无关特征向量$\therefore A$能对角化

例5 $\left|A_{3\times3}\right|=0, A_{11}=1, A_{22}=2, A_{33}=-4$

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

求A^*的特征值$\lambda_1=\ldots\ldots$，$\lambda_2=\ldots\ldots$，$\lambda_3=\ldots\ldots$，

解:由已知
$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=A_{11}+A_{22}+A_{33}=-1 \\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\left|A^*\right|=0 \end{cases}$$

$$R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$$

$\therefore$ 不妨设$\lambda_1=0$，$\lambda_3\neq 0$

下面考察$\lambda_1=0$的重数

$\because \left(0E-A^*\right)X=0$,即$A^*X=0$　　$\because R(A)=2, \therefore R(A^*)=1$

$\therefore A^*X=0$ 的基础解系中有$3-1=2$个解向量

$\therefore \lambda_1=0$的重数≥ 2　但$\lambda_3\neq 0$

$\therefore \lambda_1=0$为A^*的二重特征值

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$

例6 设$A_{n\times n}\neq 0$,若存在$k\geq 2$使$A^k=0$,证A不能对角化

解：先证$A_{n\times n}$的特征值全为零，即λ=0是A的n重特征值

设 $A\xi=\lambda\xi$,则$A^2\xi=\lambda\left(A\xi\right)=\lambda^2\xi,\cdots,A^k\xi=\lambda^k\xi$

$\because A^k=0,\therefore \lambda^k\cdot\xi=0 \quad \Rightarrow \lambda^k=0$,即$\lambda$=0

再证明：A不能对角化

方法1 $\because R\left(A\right)\geq 1 \therefore (0E-A)X=0$ 的基础解系中

解向量小于n $\quad\quad \therefore A$不能对角化

方法2 反设A能对角化，

即有可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$=0$\Rightarrow A=0$ 矛盾

例7 设$A_{3\times3}$,向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$,$\xi_2=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\end{bmatrix}^T$， $\xi_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\end{bmatrix}^T$

满足 $A\xi_1=\xi_1$,$A\xi_2=-\xi_2$,$A\xi_3=2\xi_3$

(1) 证明：A能对角化；(2) 求A , A^{2016}

证明(1)，由已知 A 有3个不同特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_{,3}=2$

$\therefore A$ 与对角矩阵 $\Lambda=diag(1,-1,2)$ 相似

（2）令$P=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 则$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$

$\therefore A=P\Lambda P^{-1}=(P\Lambda)P^{-1}=BP^{-1}$ 求法 $\begin{bmatrix}P\\ \cdots\\ B\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{bmatrix}E\\ \cdots\\ BP^{-1}\end{bmatrix}$

$$A^{2016}=P\Lambda P^{-1}\cdot P\Lambda P^{-1}\cdot P\Lambda P^{-1}\cdots\cdots P\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda^{2016}P^{-1}=(P\Lambda^{2016})P^{-1}$$

例8（12-13秋冬）设$A_{3\times 3}$各行元素之和为3

$\alpha_1=[-1\quad 2\quad -1]^T, \alpha_2=[0\quad -1\quad 1]^T$ 是$AX=0$两个解

求 (1)A的特征值，(2)A，$\left|A-\frac{3}{2}E\right|^6$

解 (1)，$A[1\quad 1\quad 1]^T=3[1\quad 1\quad 1]^T \therefore \lambda_3=3$ 是A的特征值

$\alpha_3=[1\quad 1\quad 1]^T$ 是对应的特征值

$\because A\alpha_1=0=0\alpha_1, A\alpha_2=0=0\alpha_2$

又$\because \alpha_1,\alpha_2$线性无关$\therefore \lambda_1=0$ 是A的2重特征值，α_1,α_2是对应的特征值

$\therefore \lambda_3=3$ 是A的单特征值

(2) 记$P=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]$则$P^{-1}AP=diag(0,0,3)$

记$f(x)=(x-\frac{3}{2})^6$ 则$f(\mathrm{A})=(A-\frac{3}{2}E)^6$

$f(A)$的特征值：$f(0)=(-\frac{3}{2})^6$(二重)；$f(3)=(\frac{3}{2})^6$ $\Rightarrow |f(\mathrm{A})|=(\frac{3}{2})^{18}$

显然可得到：$f(A)=(\frac{3}{2})^6E$

例9 (12−13春夏）设$A_{3\times3}$满足$A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$, $A\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$

其中$\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, $\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

(1) A能否对角化 (2) 求A

解 (1) 有已知：

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$,记B=$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $C=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow AB=BC$ $\quad\because |B|=1$ $\therefore B^{-1}AB=C$ $\therefore A$与C相似

$\therefore A$有3个不同特征值 0,1.-1 $\therefore A$能对角化

(2) $$\text{A=BCB}^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$A\alpha_1=0\cdot\alpha_1$,

$A(2\alpha_1+\alpha_2)=1\cdot(2\alpha_1+\alpha_2)$,

$A(4\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2+\alpha_3)=-1\cdot(4\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2+\alpha_3)$

5.5 实对称矩阵的对角化

性质1 设 $A=A^T\in R^{n\times n}$，则A的特征值，特征向量都是实的。

（$A=-A^T\in R^{n\times n}$，则A的特征值为零，或者纯虚数）

性质2 设 $A=A^T\in R^{n\times n}$，则A的不同特征值所对的特征向量必正交。

证明　设$A=A^T\in R^{n\times n}$，$A\xi_1=\lambda_1\xi_1$，$A\xi_2=\lambda_2\xi_2$，且$\lambda_1\neq\lambda_2$

下面证明ξ_1,ξ_2正交，即证明（ξ_1,ξ_2)=$\xi_1^T\xi_2=0$

$$\text{考察}\ (A\xi_1,\xi_2)=(\lambda_1\xi_1,\xi_2)=\lambda_1(\xi_1,\xi_2) \qquad (1)$$

$$\text{另一方面}:(A\xi_1,\xi_2)=(A\xi_1)^T\xi_2$$

$$=\xi_1^T(A^T\xi_2)=\xi_1^T(A\xi_2)=\lambda_2\xi_1^T\xi_2=\lambda_2(\xi_1,\xi_2) \quad (2)$$

$$\text{比较}(1)\text{与}(2)\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\xi_1,\xi_2)=0$$

$$\because\lambda_1\neq\lambda_2 \quad \therefore(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^T\xi_2=\xi_2^T\xi_1=0$$

定理1 设$A=A^T\in R^{n\times n}$， 则A 一定可以对角化，

且存在正交矩阵U,使得 $U^TAU=U^{-1}AU=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为A的全体特征值

问题：如何求正交矩阵U？ 求U 步骤, 分三步：

(1) 先求A的特征值， 令$f(\lambda)=|\lambda E-A|=0$, 求出$A$的全体特征值

则A的特征值只有两种情形

(情形1) 特征值全是单根(此时A有n个两两正交的特征向量)；

(情形2) 特征值有重根，$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ ，$(s<n)$

(2) 再求特征向量 即求 $(\lambda_i E-A)X=0$ 基础解系

(情形1)$\because$ 每个单根λ_i 只对应一个线性无关特征向量ξ_i,

$\therefore \xi_1,\cdots,\ \xi_n$为$A$的$n$ 个线性无关的特征向量

如令 $P=(\xi_1,\cdots,\ \xi_n)$ 则P可逆，且$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

(情形2) 对n_i 重特征值λ_i， 求出基础解系$\xi_{i1},\cdots,\xi_{in_i}$ $i=1\cdots s$

如令 $P=(\xi_{11},\cdots,\xi_{1n_1},\cdots,\xi_{s1},\cdots,\xi_{sn_s})$ 则 $P^{-1}AP=diag(\overbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}^{n_1}\cdots\overbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}^{n_s})$

(3)正交单位化，

对(情形1)令 $\eta_i = \dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|} \quad (i = 1, \cdots, n)$

则， $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$为$R^n$的标准正交基 再令$U = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

则$U^T U = E$ ， 且$U^T A U = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

对(情形2)分别对每组特征向量进行施密特正交单位化

$$\xi_{11} \cdots \xi_{1r_1} \xrightarrow{schmid\ \text{正交单位化}} \eta_{11} \cdots \eta_{1r_1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\xi_{s1} \cdots \xi_{sr_s} \xrightarrow{schmid\ \text{正交单位化}} \eta_{s1} \cdots \eta_{sr_s}$$

令$U = (\eta_{11} \cdots \eta_{1r_1} \cdots \eta_{s1} \cdots \eta_{sr_s})$ 则$U^T U = E$

且$U^T A U = diag(\overbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}^{r_1} \cdots \overbrace{\lambda_s, \cdots, \lambda_s}^{r_s})$

实对称矩阵与一般矩阵的重要区别：

(1) 特征值，特征向量的取值范围不同：

普通实矩阵的特征值(向量)有可能为复数(复向量)，如$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

实对称矩阵的特征值(向量)必为实数(实向量)

(2) 特征向量之间的关系不同：

普通矩阵不同特征值对应的特征向量线性无关

实对称矩阵不同特征值对应的特征向量不仅线性无关，且正交。

(3),对角化的条件，方式不同：

普通矩阵可能不能对角化，且当对角化时只能找到可逆矩阵P

实对称矩阵一定可以对角化，不仅可以找到可逆矩阵P，还可以找到正交矩阵U

例1 求正交矩阵U，将实对称矩阵A化为对角形 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

解 (1), 先求特征值 令$|\lambda E-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$

$\lambda_1=5,\ \lambda_2=-1$ (2重根)

(2), 再求特征向量 $(5E-A)X=0$ 基础解系 $\xi_{11}=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^T$

$(-E-A)X=0$ 基础解系 $\xi_{21}=\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}^T,\ \xi_{22}=\begin{bmatrix}0&1&-1\end{bmatrix}^T$

（如令 $P=\begin{bmatrix}\xi_{11}&\xi_{21}&\xi_{22}\end{bmatrix}$，则$P$可逆，且$P^{-1}AP=diag(5,-1,-1)$）

(3) 将ξ_{21}，ξ_{22} 利用*schmidt* 正交化，化成标准正交向量组

先证交化：令 $\beta_{21}=\xi_{21}=\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}^T$，$\beta_{22}=\xi_{22}-\dfrac{(\beta_{21},\xi_{22})}{(\beta_{21},\beta_{21})}\beta_{21}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&2&-1\end{bmatrix}^T$

再单位化：令 $\eta_{21}=\dfrac{\beta_{21}}{\|\beta_{21}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}^T$，$\eta_{22}=\dfrac{\beta_{22}}{\|\beta_{22}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1&2&-1\end{bmatrix}$

对 ξ_{11} 单位化即令 $\eta_{11}=\dfrac{\xi_{11}}{\|\xi_{11}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^T$

令 $U=\begin{bmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}&\eta_{22}\end{bmatrix}$ 则 $U^TU=E$ 且 $U^TAU=diag(5,-1,-1)$

例2 设3阶实对称矩阵A的特征值为1,2,3，矩阵A属于特征值1,2的特征向量分别为$\xi_1=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T,\xi_2=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\end{bmatrix}^T$

(1)求A的属于特征值3的特征向量；(2)求矩阵A.

解:(1)设$\xi_3=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T$为$A$的属于特征值3的一个特征向量，

则，ξ_3与ξ_1正交，ξ_3与ξ_2正交，故

$$\begin{cases}(\xi_1\xi_3)=0\\(\xi_2\xi_3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$$

求得基础解系$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$,

所以A的属于特征值3的特征向量为$k\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\ (k\neq 0)$

解法1：取$\xi_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，

令$P=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$

$\because P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}-2 & -2 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 计算得到：$A=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{bmatrix}$

解法2：$\because \xi_1,\xi_2,\xi_3$是不同特征值对应的特征向量，$\therefore$两两正交

直接单位化：

$\eta_1=\dfrac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$，$\eta_2=\dfrac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\end{bmatrix}^T$，$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

记：$U=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则$U^TU=E$

$$A=U\Lambda U^{-1}=U\Lambda U^T$$

例3 ${A_{n\times n}}^2 = E \Leftrightarrow R(A+E)+R(A-E)=n$

证明$\Rightarrow$由$A^2=E$得:$(A+E)(A-E)=0$

$\therefore R(A+E)+R(A-E)\le n$ (p115公式7)

又$2E=(A+E)+(-A+E)$

$\therefore R(2E)=n\le R(A+E)+R(-A+E)$

$=R(A+E)+R(A-E)$ (p115公式5)

$\therefore R(A+E)+R(A-E)=n$

$\Leftarrow$ 设$R(A+E)=r_1$, $R(A-E)=r_2$, 则有 $r_1+r_2=n$

如果$r_1=n$则$r_2=0\Rightarrow A-E=0$, 即$A=E$

如果$r_2=n$则$r_1=0\Rightarrow A+E=0$, 即$A=-E$

两种情形都能得到 $A^2=E$

下设 $0<r_1$, $r_2<n$ 即$|A+E|=|A-E|=0$

$\therefore A$有特征值$\lambda_1=-1$和$\lambda_2=1$

下设：$0 < r_1$， $r_2 < n$ 即 $|A+E| = |A-E| = 0$

$\therefore A$ 有特征值 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 1$

先证，此时 A 的特征值只能为 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 1$

先求 $\lambda_1 = -1$ 的重数 n_1，

$\because (E+A)X = 0$ 的基础解系中有 $n - r_1 = r_2$ 个向量，由引理 $n_1 \geq n - r_1 = r_2$

再求 $\lambda_2 = 1$ 的重数 n_2，

$\because (E-A)X = 0$ 的基础解系中有 $n - r_2 = r_1$ 个向量，由引理 $n_2 \geq n - r_2 = r_1$

$\therefore n_1 + n_2 \geq r_1 + r_2 = n \therefore n_1 + n_2 = n$ （即 $n_1 = r_2$， $n_2 = r_1$）

$\therefore A$ 的特征值只有两个：$\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 1$.

$\because A$ 有 $r_1 + r_2 = n$ 个线性无关的特征向量，$\therefore A$ 能对角化

即有可逆矩阵 P

使得 $P^{-1}AP = diag(\overbrace{1,\cdots,1}^{r_2}, \overbrace{-1,\cdots,-1}^{r_1})$ $\quad \therefore A^2 = E$

例4 设 $0<R(A_{nn})=r<n$ 又 $A^2=A$ 求 $|A+5E|$

解 (1) 先证 R(A)+R(A-E)=n 并设R(A)=r R(A-E)=n-r

(2), $AX=0$ 的基础解系中有n-r 个向量

$(A\text{-E})X=0$ 的基础解系中有r 个向量

$\therefore A$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\therefore A$ 能对角化

A 的特征值只有两个 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=1$

有引理得到 $\lambda_1=0$ 的重数为n-r, $\lambda_2=1$ 的重数为r

$$\therefore \text{A能对角化}\quad P^{-1}AP=\Lambda=diag(\overbrace{0,\cdots,0}^{n-r},\overbrace{1,\cdots,1}^{r})$$

(3)设 $f(x)=x+5$, 则 $f(\text{A})=A+5E$, $f(\text{A})$ 的特征值 $f(0)=5, f(1)=6$

$$f(\text{A})\text{与}f(\Lambda)=diag\begin{bmatrix}\overbrace{5\cdots5}^{n-r} & \overbrace{6\cdots6}^{r}\end{bmatrix}\text{相似}$$

$$\therefore |f(\text{A})|=5^{n-r}6^r$$

例5，设$A_{n\times m},B_{m\times n,}$证明(1)：$\begin{vmatrix} E_m & B_{m\times n} \\ A_{n\times m} & E_n \end{vmatrix} = \left|E_n-(AB)_{n\times n}\right| = \left|E_m-(BA)_{m\times m}\right|$

(2)：当$\lambda\neq 0$时 $\left|\lambda E_n - AB\right| = \lambda^{n-m}\left|\lambda E_m - BA\right|$

证明：(1)$\because \begin{bmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-AR_1} \begin{bmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n-AB \end{bmatrix}$ $\quad \therefore \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n-AB \end{bmatrix}$,

$\therefore \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \left|E_n-AB\right|$ (2) 用$\dfrac{1}{\lambda}A$代替（1）中的A即可

例6：求特征值，$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

$\because A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}-E = J_n - E$

$\therefore \left|\lambda E - A\right| = \left|(\lambda+1)\mathrm{E}_n - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right|$

$= \left|(\lambda+1)\mathrm{E}_n - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right|$

$=(\lambda+1)^{n-1}\left|(\lambda+1)\mathrm{E}_1 - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right| = (\lambda+1)^{n-1}(\lambda-(\mathrm{n}-1))$

例7 已知$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$,求$A=\begin{bmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2+1 \end{bmatrix}$的特征值

解:$|\lambda E - A| = \left| \lambda E_n - \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right|$

$$= \lambda^{n-2} \left| \lambda E_2 - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \right| = \lambda^{n-2} \left| \lambda E_2 - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \lambda^{n-2} \left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) (\lambda - n)$$

$\therefore A$的特征值为,$\sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $n, 0$(n−2重)

例8， 求$A=E_n-2\alpha\alpha^T$（设$\alpha^T\alpha=1$）的特征值，$|A|$，$tr(A)$

解，$|\lambda E-A|=|(\lambda-1)E+2\alpha\alpha^T|=(\lambda-1)^{n-1}|(\lambda-1)+2\alpha^T\alpha|=(\lambda-1)^{n-1}(\lambda+1)$

$\therefore$ 特征值为1(n−1重)，-1；$|A|=-1$； $tr(\mathrm{A})=n-2$

例9 设$A=\alpha\alpha^T$，其中$\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$，$a_1\neq 0$，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵。

解：$|\lambda E-A|=|\lambda E-\alpha\alpha^T|=\lambda^{n-1}|\lambda-\alpha^T\alpha|=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\right)$ $\therefore \lambda_1=0$ (n−1重)；

$\lambda_2=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}$

求特征向量：

对$\lambda_1=0$，$AX=0$的基础解系 $[-a_2,a_1,0,\cdots,0]^T,[-a_3,0,a_1\cdots,0]^T,\cdots,[-a_n,0,0,\cdots,a_1]^T$

对$\lambda_2=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}$，$\because A^2=\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2})A$ $\therefore((\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2})E-A)A=0$，即：$(\lambda_2E-A)A=0$

$\therefore(\lambda_2E-A)X=0$有基础解系：$[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$

$$取P=\begin{bmatrix}-a_2 & -a_3 & \cdots & a_n & a_1\\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_2\\ 0 & a_1 & \cdots & 0 & a_3\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_n\end{bmatrix},\qquad 则P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\end{bmatrix}$$

例10 (14−15春夏), 设A, B为2阶矩阵，$A = AB - BA$, 证明，A的特征值为零。

证明，先证A的特征值全为零

方法1，设λ_1，λ_2是A的两个特征值，则$\lambda_1 + \lambda_2 = tr(\mathrm{A})$

$$= tr(AB - BA) = 0$$

如果$\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$，则$A$能对角化，且$|A| = -\lambda_1^2 \neq 0$

由$A = AB - BA \Rightarrow E = B - A^{-1}BA$即$A^{-1}BA = B - E$

$\Rightarrow B$与$B - E$相似，矛盾，$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

方法2，λ_1^2，λ_2^2是A^2的两个特征值

又 $A^2 = A(AB - BA) = A^2B - ABA$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = tr(A^2) = tr(A^2B) - tr(ABA)$$

$$= tr(A^2B) - tr(A^2B) = 0$$

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

例11，设$A=-A^{T}\in R^{n\times n}$，则$A$的特征值为零，或者纯虚数

证明：设$A(u+vi)=(a+bi)(u+vi)$

$$\Rightarrow Au+Avi=(au-bv)+(bu+av)i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Au=(au-bv) \\ Av=(bu+av) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{T}Au=au^{T}u-bu^{T}v \\ v^{T}Av=bv^{T}u+av^{T}v \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^{T}Au+v^{T}Av=a(\|u\|^{2}+\|v\|^{2})$$

$$\because A=-A^{T}\ \therefore u^{T}Au+v^{T}Av=0=a(\|u\|^{2}+\|v\|^{2})$$

$$\therefore a=0$$

例12 设 $A = A^T \in R^{n\times n}$，则$A$的特征值，特征向量都是实的

证明：设$A(u+vi) = (a+bi)(u+vi)$

$$\Rightarrow Au + Avi = (au - bv) + (bu + av)i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Au = (au - bv) \\ Av = (bu + av) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^T Au = av^T u - bv^T v \\ u^T Av = bu^T u + au^T v \end{cases}$$

$$\Rightarrow v^T Au - u^T Av = b(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

$$\because A = A^T \therefore v^T Au = u^T Av \therefore b(\|u\|^2 + \|v\|^2) = 0$$

$$\therefore b = 0$$

课堂作业：

1，设$A=\begin{bmatrix}-13 & 6\\ -36 & 17\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$,问$A, B$相似吗？如果相似，求P, 使得$P^{-1}AP=B.$

2，设$\alpha,\beta\in P^n,\alpha^T\beta\neq 0, C=\alpha\beta^T, Q=[q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\beta]$为正交矩阵，$P=[q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\alpha]$

(1), 证明n维列向量$q_1,q_2,\cdots,q_{n-1}$是矩阵C的特征向量，

(2), 证明矩阵P可逆

(3), 求$P^{-1}CP$

1, $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda+1)(\lambda-5)$, A, B相似同一个对角矩阵Λ=diag(5, -1)

由相似传递性$\Rightarrow$ A, B相似

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}AP_2=\Lambda\Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$ 记$P=P_1P_2^{-1}\Rightarrow P^{-1}AP=B$

$$P_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow P=P_1P_2^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 8\end{bmatrix}$$

2, (1) $\because Q$为正交矩阵$\Rightarrow\beta^T q_i=0\therefore Cq_i=(\alpha\beta^T)q_i=\alpha(\beta^T q_i)=\theta=0\cdot q_i,(i=1,2,\cdots n-1)$

(2), $C\alpha=(\alpha\beta^T)\alpha=(\beta^T\alpha)\alpha\Rightarrow\alpha$是$C$的属于特征值$\beta^T\alpha$的特征向量

$\therefore q_1,\cdots,q_{n-1},\alpha$线性无关，$\therefore P$可逆 或者 反设 α=k$_1q_1+\cdots+k_{n-1}q_{n-1}\Rightarrow\alpha^T\beta=0$ 矛盾

$$(3), P^{-1}CP=\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \beta^T\alpha\end{bmatrix}$$

课堂练习　解题要求：过程完整，推理严密.

答题纸上：姓名，学号，作业序号

1，设$R(A_{5\times 3})=2$, η_1,η_2是$AX=b$的两个不同解，求$AX=b$的通解。

2, 设$A_{2\times 2}$有两个不同特征值，α_1，α_2是A的线性无关的特征向量

满足$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$, 求$|A|$

3，设$A_{3\times 3}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$有3个不同特征值，其中：$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$,

1，证明：$R(A)=2$,

2, 若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求$AX=\beta$通解

4, 设A为n阶方阵$(n\geq 2)$, 试求所有满足$A^*=A$的矩阵A。

1, 设$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \because A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow (\lambda_1^{\ 2}-1)\alpha_1+(\lambda_2^{\ 2}-1)\alpha_2=\theta$

$$\therefore \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases} or \begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=1\end{cases} \Rightarrow |A|=\lambda_1\lambda_2=-1$$

2, 证明：(1)有已知A能对角化，且$R(A)\le 2$。

显然$R(A)\ne 0$，如果$R(A)=1\Rightarrow 0$是A的2重特征值，

矛盾$\therefore R(A)=2$

(2)，$AX=\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\therefore X_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$是$AX=\beta$的一个解

$\because R(A)=2 \therefore AX=0$的基础解系中只有一个解

$\because \alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0 \Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=0,$

$\therefore \xi=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$是$AX=0$的基础解系

$AX=\beta$ 通解：$X=X_0+k\xi \quad k\in P$

3,(1),如果$A=0$,则A满足条件;

(2),如果$0<R(A)<n-1, \because A^*=0$,此时$A\ne A^*$;

(3),如果$R(A)=n-1, \Rightarrow R(A^*)=1$

(a),当$n>2$时，$A\ne A^*$

(b),当$n=2$时，即$R(A)=1$, 设$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,

则$A^*=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$,如果$A=A^*\Rightarrow a=d, b=c=0$

$\therefore A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}$,此时$R(A)=0$，或者，$R(A)=2$，

矛盾。$\therefore A\ne A^*$

（4）如果$R(A)=n\Rightarrow R(A^*)=n$,

$\therefore A^*=|A|A^{-1}=A \Leftrightarrow A^2=|A|E$

综上，满足$A=A^*$的矩阵为零矩阵，

或者$A^2=|A|E$的可逆矩阵

课堂练习（周5）

解题要求：过程完整，推理严密. 答题纸上：姓名，学号，作业序号

1，设$R(A_{5\times 3})=2$, η_1,η_2是$AX=b$的两个不同解，求$AX=b$的通解。

2，下列矩阵中与$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$相似的一个矩阵为......(要求说明理由)

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\mathrm{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\mathrm{F}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\mathrm{H}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3, 设$\mathrm{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为3阶可逆矩阵，$A\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2, A\alpha_2=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_3$

(1)求$\mathrm{P}^{-1}AP$, (2)证明A可对角化

4: 设$\alpha,\beta\in P^n,\alpha^T\beta\neq 0, C=\alpha\beta^T, Q=[q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\beta]$为正交矩阵，

$P=[q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\alpha]$

(1), 证明n维列向量$q_1,q_2,\cdots,q_{n-1}$是矩阵C的特征向量.

(2), 证明矩阵P可逆.　　　(3), 求$P^{-1}CP$.

1， 设$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3$，$\because E-A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow R(E-A)=2$

虽然$|\lambda E-B|=|\lambda E-C|=|\lambda E-F|=|\lambda E-H|=(\lambda-1)^3$

只有$R(E-B)=2, R(E-C)=R(E-F)=R(E-H)=1$

如果B与A相似$\Rightarrow E-B$与$E-A$相似$\Rightarrow R(E-A)=R(E-B)$

or：记$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow P^{-1}AP=B$

2，$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow AP=PC\Rightarrow P^{-1}AP=C=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}$

$|\lambda E-C|=(\lambda-2)(\lambda-\frac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda-\frac{3-\sqrt{5}}{2})\Rightarrow A$有3个不同特征值

3, (1) $\because Q$为正交矩阵$\Rightarrow \beta^{\mathrm{T}}q_i=0 \therefore Cq_i=(\alpha\beta^T)q_i=\alpha(\beta^Tq_i)=\theta=0\cdot q_i,(i=1,2,\cdots n-1)$

(2), $C\alpha=(\alpha\beta^T)\alpha=(\beta^T\alpha)\alpha\Rightarrow\alpha$是$C$的属于特征值$\beta^T\alpha$的特征向量

$\therefore q_1,\cdots,q_{n-1},\alpha$线性无关，$\therefore P$可逆 或者 反设 $\alpha=k_1q_1+\cdots+k_{n-1}q_{n-1}\Rightarrow\alpha^T\beta=0$ 矛盾

(3), $P^{-1}CP=\begin{bmatrix}0&&&\\&\ddots&&\\&&0&\\&&&\beta^T\alpha\end{bmatrix}$

下设：$0 < r_1$， $r_2 < n$ 即 $|A+E| = |A-E| = 0$

$\therefore A$ 有特征值 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 1$

先证，此时 A 的特征值只能为 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 1$

先求 $\lambda_1 = -1$ 的重数 n_1，

$\because (E+A)X = 0$ 的基础解系中有 $n - r_1 = r_2$ 个向量，由引理 $n_1 \geq n - r_1 = r_2$

再求 $\lambda_2 = 1$ 的重数 n_2，

$\because (E-A)X = 0$ 的基础解系中有 $n - r_2 = r_1$ 个向量，由引理 $n_2 \geq n - r_2 = r_1$

$\therefore n_1 + n_2 \geq r_1 + r_2 = n \therefore n_1 + n_2 = n$ (即 $n_1 = r_2$， $n_2 = r_1$)

$\therefore A$ 的特征值只有两个：$\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 1$.

$\because A$ 有 $r_1 + r_2 = n$ 个线性无关的特征向量，$\therefore A$ 能对角化

即有可逆矩阵 P

使得 $P^{-1}AP = diag(\overbrace{1, \cdots, 1}^{r_2}, \overbrace{-1, \cdots, -1}^{r_1})$ $\quad \therefore A^2 = E$

性质2 设 $A\xi_0=\lambda_0\xi_0$ 则

$$(1)(kA)\xi_0=(k\lambda_0)\xi_0$$

$$(2)A^m\xi_0=\lambda_0^m\xi_0$$

$$(3)f(A)\xi_0=f(\lambda_0)\xi_0$$

$(4)A^{-1}\xi_0=\lambda_0^{-1}\xi_0$ （设A可逆）

虽然当A变成$kA, A^m, f(A), A^{-1}$时特征值也随着在相应变化

但是，A的特征向量ξ_0同时也是$kA, A^m, f(A), A^{-1}$ 的特征向量

证明(1) 设$A\xi_0=\lambda_0\xi_0$ 则$\forall 0\neq k$ 有 $(kA)\xi_0=(k\lambda_0)\xi_0$

(2) $\because A\xi_0=\lambda_0\xi_0 \therefore A(A\xi_0)=A(\lambda_0\xi_0)$ 即有$A^2\xi_0=\lambda_0{}^2\xi_0, \cdots,\ A^m\xi_0=\lambda_0{}^m\xi_0$

(3) 设$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$

则 $f(\mathrm{A})=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1\mathrm{A}+a_0E$

$$f(\lambda_0)=a_m\lambda_0{}^m+a_{m-1}\lambda_0{}^{m-1}+\cdots+a_1\lambda_0+a_0$$

可以证明 $f(\mathrm{A})\xi_0=(a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1\mathrm{A}+a_0\,\mathrm{E})\xi_0=f(\lambda_0)\xi_0$

(4) 当A可逆时 $A^{-1}(A\xi_0)=A^{-1}(\lambda_0\xi_0)\Rightarrow A^{-1}\xi_0=\lambda_0{}^{-1}\xi_0$

性质4 设A与B相似，即$P^{-1}AP=B$ 则：

(1) A^k 与B^k 相似 且 $P^{-1}A^k\ P=B^k$

(2) $f(A)$ 与$f(B)$相似 且 $P^{-1}f(A)\,P=f(B)$

证明(1) $\because B=P^{-1}AP\Rightarrow B^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^2P\cdots$

性质5 设A能对角化，即$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 则：

(1) A^k 能对角化 且 $P^{-1}A^kP=diag(\lambda_1{}^k,\lambda_2{}^k..\lambda_n{}^k)$

或$A^k=Pdiag(\lambda_1{}^k,\lambda_2{}^k..\lambda_n{}^k)P^{-1}$

(2) $f(A)$能对角化 且 $P^{-1}f(A)P=\mathrm{diag}(f(\lambda_1),\ldots f(\lambda_n))$

或$f(A)=P\mathrm{diag}(f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_n))P^{-1}$

证明(1) $\because P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_{2,}..\lambda_n)\ \therefore A=Pdiag(\lambda_1,\lambda_{2,}..\lambda_n)P^{-1}$

$\therefore A^2=(Pdiag(\lambda_1,\lambda_{2,}..\lambda_n)P^{-1})\cdot(Pdiag(\lambda_1,\lambda_{2,}..\lambda_n)P^{-1})$

$=Pdiag(\lambda_1{}^2,\lambda_2{}^2..\lambda_n{}^2)P^{-1}\quad\cdots\cdots$