# 第八章 欧氏空间

在三维几何空间$R^3$中，我们通过定义了向量的数量积（或称点积），

利用数量积我们定义向量的长度，两点之间的距离，向量之间的夹角等等。

总之，三维几何空间$R^3$中的长度，距离，夹角等重要概念

都可由数量积的概念导出。

所以，在这里我们希望将三维几何空间$R^3$中的数量积, 推广到$n$维

甚至无限维实的线性空间中，

从而引入线性空间里向量的长度，两个向量之间的夹角等重要概念。

设$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3),\vec{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$

数量积：$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$（点积） 矢量积：$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$，（叉积）

# 欧氏空间

1，内积和欧氏空间的定义

2，度量矩阵

3，向量的长度

4，向量的夹角

5，正交向量组，标准正交基

6，正交矩阵

7，*schmid*正交化

## 8.1内积·欧氏空间的定义

在这章中总是假定设$V$是$R$上的一个线性空间，

定义1 设$\varphi$是$V\times V$到$R$上的一个对应规则，记$(\alpha,\beta)=\varphi(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in V$

使得$\forall\alpha$，$\beta\in V$，存在唯一确定实数$\varphi(\alpha,\beta)$与它们相对应，

且$(\alpha,\beta)$还满足下面的性质：

$(1)(\alpha,\ \beta)=(\beta,\ \alpha)$ 对称性

$$\left.\begin{aligned}&(2)(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)\\&(3)(\alpha+\beta,r)=(\alpha,r)+(\beta,r)\\&\quad(\alpha,\beta+r)=(\alpha,\beta)+(\alpha,r)\end{aligned}\right\}\ \forall k\in R\ \text{双线性}$$

$(4)(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\theta$ 正定性

则称该规则$(\alpha,\beta)$，为向量$\alpha$与$\beta$的内积（*inner product*）

有了内积的实的线性空间称为欧几里得(*Euclid*)空间，

简称欧氏空间

例1，在$R^n$中，$\forall\alpha,\ \beta\in R^n$，$\alpha=[a_1\ ,\cdots\ ,\ a_n]^T$，$\beta=[b_1\ ,\cdots\ ,\ b_n]^T$定义如下规则：

(Ⅰ) $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$ 称为$R^n$得标准内积

(Ⅱ) $(\alpha,\beta)=a_1b_1+2a_2b_2\cdots+na_nb_n$

(Ⅲ) $(\alpha,\beta)=k(a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n)=k\alpha^T\beta\quad(k>0)$

可以证明(Ⅱ)(Ⅲ)都是符合内积要求，即都是内积。

这个例子说明同一个实线性空间，可以规定不同内积变成不同的欧氏空间

它们的差别在于向量的"度量"不同。

一般，当我们称$R^n$为欧氏空间时，所含内积为标准内积。

(1) $(\beta,\alpha)=b_1a_1+b_2a_2\cdots+b_na_n=(\beta,\alpha)$ $\therefore$满足对称性

(2) $\forall k\in R,(k\alpha,\beta)=(ka_1)b_1+(ka_2)b_2\cdots+(ka_n)b_n=k(\alpha,\beta)$

(3) 设$\gamma=(c_1,\cdots,c_n)^T$，$(\alpha+\beta,r)=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+\cdots+(a_n+b_n)c_n$

$\therefore$满足线性 $\qquad=(\alpha,r)+(\beta,r)$

(4) $(\alpha,\alpha)=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}\geq 0$，显然$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\theta$

$\therefore$满足正定性 $\quad\therefore$规则(Ⅰ)符合内积要求，即是内积。

特别，在$R^3$中（Ⅰ）就是数量积。

例2，在$R^{m\times n}$ 中， $\forall A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in R^{m\times n}$

定义：$(A,B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$ 该内积称为$R^{m\times n}$的标准内积。

同样当称$R^{m\times n}$为欧氏空间时，所含的内积为标准内积。

例3，在$R^{m\times n}$ 中，能否定义 $(A,B)=tr(A^T B)$，使$R^{m\times n}$构成欧氏空间?

(1) $(B,A)=tr(B^T A)=tr((B^T A)^T)=tr(A^T B)=(A,B)$

(2) $(kA,B)=tr((kA)^T B)=tr(kA^T B)=k\cdot tr(A^T B)=k(A,B)$

(3) $(A+B,C)=tr((A+B)^T C)=tr(A^T C+B^T C)$

$=tr(A^T C)+tr(B^T C)=(A,C)+(B,C)$

(4) $(A,A)=tr(A^T A)=\sum_{i=1}^{m}(a_{1i}{}^2+a_{2i}{}^2+\cdots+a_{ni}{}^2)\geq 0$

且:$(A,A)=0\Leftrightarrow A=0$

$trA_{n\times n}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为$A$的迹

显然有：$trA=trA^T; tr(kA)=k\cdot trA; tr(A+B)=trA+trB;$

$tr(A_{m\times n}B_{n\times m})=tr(B_{n\times m}A_{m\times n}); trA=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ (特征值)

例4，闭区间$[a,b]$上所有连续实函数关于函数的加法和数乘构成一个无限维线性空间$C[a,b]$

$\forall\ f(\mathrm{x}), g(\mathrm{x}) \in C[a,b]$，定义 $(f(\mathrm{x}), g(\mathrm{x})) = \int_a^b f(\mathrm{x})g(\mathrm{x})dx$

可以证明该定义符合内积要求，

$\therefore C[a,b]$关于所定义的内积构成一个无限维的欧氏空间

问题：对一般的实线性空间$V$，是否一定可以规定内积，使之成为欧氏空间？

定理 任何一个实数域上的有限维线性空间都可以定义适当的内积成为欧氏空间

证明 设 $\dim V = n$，$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ 为 $V$ 的一组基，

$\forall \alpha, \ \beta \in V$

$$\alpha = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$$

$$=(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)X, X \in R^n$$

$$\beta = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \cdots + y_n\xi_n$$

$$=(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)Y, Y \in R^n$$

定义：$(\alpha, \beta) = (X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = X^TY$

可以证明 $(\alpha, \beta)$ 符合内积定义，$\therefore V$ 可以构成欧氏空间

显然内积还有如下性质：

设$V$是欧氏空间，则$\forall \alpha,\alpha_i,\beta_j\in V,\forall k_i,t_j\in R$

(1) $(\alpha,\theta)=0$　　$(\alpha,\theta)=(\alpha,\theta+\theta)=(\alpha,\theta)+(\alpha,\theta)\Rightarrow(\alpha,\theta)=0$

(2) $(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}t_j\beta_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_it_j(\alpha_i,\beta_j)$

$$\xlongequal{\text{令}a_{ij}=(\alpha_i,\beta_j)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_it_j=[k_1\ \cdots\ k_m]\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{bmatrix}$$

$\because$欧氏空间首先是一个实的线性空间，$\therefore$前面关于线性空间的一些概念，比如向量的线性关系，基，维数，坐标，子空间及与这些相关的性质，定理，在欧氏空间中都适用。

# 8.2 度量矩阵

设向量 $\xi_1$， $\xi_2,\cdots,$ $\xi_n$为$n$维欧氏空间$V$ 的一组基，

$$\forall \alpha，\beta \in V \quad \begin{aligned} \alpha &= [\xi_1, \ \xi_2, \cdots, \ \xi_n] X, \ X = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in R^n \\ \beta &= [\xi_1, \ \xi_2, \cdots, \ \xi_n] Y, \ Y = [y_1 \ \cdots \ y_n]^T \in R^n \end{aligned}$$

则 $(\alpha，\beta) = (\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \xi_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\xi_i, \xi_j)$

$$\xlongequal{a_{ij}=(\xi_i,\xi_j)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = [x_1 \ \cdots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= X^T A Y \quad (*)$$

定义4 称$A=\left[(\xi_i, \xi_j)\right]_{n\times n} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 为基 $\xi_1$， $\xi_2,\cdots,$ $\xi_n$ 的度量矩阵

在知道$V$的一组基后，任意两个向量的内积，都可以通过$(*)$计算

所以度量矩阵确定内积

对度量矩阵 $A$: $\quad A_{n\times n} = A^T \in R^{n\times n}$ ，$a_{ii} = (\xi_i, \xi_i) = \|\xi_i\|^2 > 0$

设$n$维欧氏空间$V$有两组基 (1) $\xi_1, \cdots, \xi_n$ (2) $\eta_1, \cdots, \eta_n$

记，$A = \left[(\xi_i, \xi_j)\right]_{n \times n}$ $B = \left[(\eta_i, \eta_j)\right]_{n \times n}$

问：$A, B$ 有什么关系？

设$(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) M$

设$\alpha \in V, \alpha = (\xi_1, \cdots, \xi_n)X = (\eta_1, \cdots, \eta_n)Y$ $\quad X = MY$

$$(\alpha, \alpha) = X^T AX = (MY)^T A(MY) = Y^T(M^T AM)Y$$
$$= Y^T BY$$

$\because M^T AM, B$都是对称矩阵（理由在第六章）

$\Rightarrow B = M^T AM$ (即$A, B$合同(第六章))

# 8.3向量的长度

由内积的正定性：$(\alpha,\alpha)\geq 0,\therefore\sqrt{(\alpha,\alpha)}$是有意义的，

由此引入向量的长度的概念

定义2 设$\alpha$ 是欧氏空间$V$ 的一个向量

令：$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}$ 为向量$\alpha$的长度$(length)$或模$(norm)$,

显然,$\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=\theta$;　$\|\alpha\|>0\Leftrightarrow\alpha\neq\theta$

$$\|k\alpha\|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=|k|\cdot\|\alpha\|$$

如果$\|\alpha\|=1$，称$\alpha$为单位向量，或称标准向量

如果$\alpha\neq\theta$,称运算:$\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 把向量$\alpha$ 单位化(标准化)

定理 对于欧氏空间$V$ 中任意两个向量$\alpha$，$\beta$，一定有

$$|(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|，\ 且\ |(\alpha,\beta)|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\Leftrightarrow\alpha，\beta\ 线性相关$$

证明:(1)先证 $\alpha$，$\beta$ 线性相关 $\Rightarrow|(\alpha,\beta)|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

设$\alpha=k\beta$ 则 左$=|(\alpha,\beta)|=|(k\beta,\beta)|=|k|\cdot\|\beta\|^2$

右$=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|=\|k\beta\|\cdot\|\beta\|=|k|\cdot\|\beta\|^2$

$\therefore|(\alpha,\beta)|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

(2)再证明$\alpha$，$\beta$ 线性无关$\Rightarrow|(\alpha,\beta)|<\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

由已知$\because\alpha$，$\beta$ 线性无关,$\therefore\forall t\in R\ \ t\alpha+\beta\ne\theta$

$\therefore$由正定性：$(t\alpha+\beta,t\alpha+\beta)>0\quad\Rightarrow t^2\|\alpha\|^2+2t(\alpha,\beta)+\|\beta\|^2>0$

$\therefore 4(\alpha,\beta)^2-4\|\alpha\|^2\cdot\|\beta\|^2<0\ \Rightarrow|(\alpha,\beta)|<\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

(3) 最后证明 $|(\alpha,\beta)|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\Rightarrow\alpha$，$\beta$ 线性相关

反设$\alpha$，$\beta$ 线性无关 由(2)知 $|(\alpha,\beta)|<\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$ 矛盾

考察历史上两个著名两个不等式：

*Cauchy*不等式：

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+\cdots+b_n{}^2)$$

$$(a_i,b_j\in R)$$

*Schwarz*不等式：

$$\left|\int_a^b f(\mathrm{x})\cdot g(\mathrm{x})dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f(\mathrm{x})^2dx\int_a^b g(\mathrm{x})^2dx}$$

$$(f(x),g(x)\in C_{[A,B]})$$

它们外表虽然差异很大，

但是，它们被统一在欧氏空间的不等式：$|(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$ 中，

所以该不等式又称为*Cauchy*-*Schwarz*不等式

# 8.4 向量的夹角

$\because \left|(\alpha,\beta)\right| \le \|\alpha\|\cdot\|\beta\|$ $\therefore$当$\alpha,\beta$非零时，有：$-1 \le \dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|} \le 1$

定义3 对于欧氏空间V 中任意非零向量$\alpha$，$\beta$

称：$\langle\alpha，\beta\rangle = \arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$ 为向量$\alpha$ 与$\beta$的夹角， 显然：$0 \le \langle\alpha，\beta\rangle \le \pi$

若$(\alpha,\beta)=0$称$\alpha$与$\beta$正交(*orthogonal*)(或称互相垂直)

即$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \langle\alpha，\beta\rangle = \dfrac{\pi}{2}$ 显然 零向量$\theta$ 与任意向量正交。

考察$R^n$的常用基：$e_i = [0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^T \quad (i=1\cdots n)$

可以证明，为两两正交且长度为1的向量组，

即：$(e_i,e_j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \ne j) \end{cases} \quad (i,j=1,\cdots,n)$

同样可证，$R^{m\times n}$的常用基：$E_{ij}$，$(i=1\cdots m, j=1\cdots n)$

也为两两正交且长度为1的向量组

性质 对于欧氏空间V中任意非零向量$\alpha$，$\beta$ 则有:

(1) $\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$ (三角形不等式)

(2) 若$\alpha$与$\beta$垂直，则$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ (勾股定理)

证明1: $\because \|\alpha+\beta\|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$

$$= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

$$\le \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\| \cdot \|\beta\| + \|\beta\|^2$$

$$= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$$

(2) 若$\alpha$与$\beta$垂直，则$(\alpha,\beta)=0$

$$\therefore \|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$$

# 8.5正交向量组，(标准)正交基

定义5 欧氏空间中的一组非零的，两两正交的向量组称为一个正交向量组。

如果正交向量组中的每个向量是单位向量，称该正交向量组为

标准(单位)正交向量组

规定：单个非零向量也称为正交向量组。

性质 正交向量组必线性无关。

反过来，一个线性无关的向量组不一定为一个正交向量组。

推论 $n$ 维欧氏空间中，任意一个正交向量组中向量的个数不超过 $n$.

证明，设$\alpha_1$,…，$\alpha_m$为一个正交向量组，考察$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\cdots+k_m\alpha_m=\theta$ (*)

下面分别证明(*)成立 $\Leftrightarrow k_i=0\ (\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{m})$

$$\because (\alpha_1,\theta)=0=(\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)$$

$$0=(\alpha_1,k_1\alpha_1)+(\alpha_1,k_2\alpha_2)+\cdots+(\alpha_1,k_m\alpha_m)=k_1\cdot\|\alpha_1\|^2$$

$$\because \|\alpha_1\|^2\neq 0, \therefore k_1=0\ \ (同理可证k_i=0)$$

反过来，设 $\alpha_1=[1\quad 0]^T,\alpha_2=[1\quad 1]^T$ $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，但不正交

定义6 设$\dim V = n$，则$V$中由$n$个两两正交向量的组成的向量组称为$V$的一组正交基，

如果正交基中的每一个向量都是单位向量，称该正交基为标准（单位）正交基。

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$为$n$维欧氏空间$V$的标准正交基$\Leftrightarrow$

$$(\xi_i, \xi_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

性质 1　欧氏空间$V$的一组基为标准正交基

$\Leftrightarrow$它的度量矩阵必是单位矩阵

2　$R^n, R^{m\times n}$的常用基都是标准正交基

性质,标准正交基的作用

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为$n$维欧氏空间$V$的一组标准正交基,

$\forall\alpha$，$\beta\in V$, 设$\alpha=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)X,\ \beta=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)Y$

其中，$X=(x_1,x_2\cdots,x_n)^T, Y=(y_1,y_2\cdots,y_n)^T\in R^n$

则 (1) $(\alpha，\beta)=(X,Y)=X^TY=Y^TX$

(2) $\|\alpha\|=\|X\|=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}}$

(3) $\alpha=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)X=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n$

$\Rightarrow x_i=(\alpha,\xi_i)\quad i=1\cdots n$

证明 (1) $(\alpha,\beta)=X^TAY=X^TY=(X,Y)$

$A=\left[(\xi_i,\xi_j)\right]_{n\times n}=E$

(2) $\|\alpha\|^2=X^TX=(X,X)=\|X\|^2=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}$

(3) $\because(\alpha,\xi_1)=(x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n,\xi_1)=x_1(\xi_1,\xi_1)=x_1$

$\Rightarrow x_i=(\alpha,\xi_i)\quad i=1\cdots n$

例，欧氏空间$R^4$中，$\beta=(0,0,1,1)^T$

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,\alpha_2=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^T,\alpha_3=\frac{1}{2}(1.-1,1,-1)^T,\alpha_4=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$$

(1)，证明：$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$是$R^4$的标准正基。

(2)，如$\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3-5\alpha_4$，求$\|\alpha\|$，（$\alpha$，$\beta$）

证明，（1）方法1，$\because(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & 当i=j\\0 & 当i\neq j\end{cases},i.j=1,2,3,4,$由定义即得到

方法2，设 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$ $\because A^T\cdot A=E$，由定理即得到

(2)，$\because\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)(3,2,4,-5)^T,\therefore\|\alpha\|=\sqrt{3^2+2^2+4^2+(-5)^2}=3\sqrt{6}$

计算（$\alpha$，$\beta$），方法1.$\because\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3-5\alpha_4=(2,3,5,-4)^T$ $\quad\therefore\left(\alpha,\beta\right)=(2,3,5,-4)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=1$

方法2，设$\beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_3+y_4\alpha_4$

则：$y_1=(\beta,\alpha_1)=1,y_2=(\beta,\alpha_2)=-1,y_3=(\beta,\alpha_3)=0,y_4=(\beta,\alpha_4)=0$

$\therefore\beta=1\cdot\alpha_1+(-1)\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3+0\cdot\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)Y,$

$\because\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3-5\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)X$

$\therefore(\alpha,\beta)=X^T\cdot Y=1$

## 8.6 正交矩阵

定义7 设$U \in R^{n\times n}$,如$UU^T = E$ (或$U^TU = E$),则称$U$ 为正交矩阵.

定理$U = (u_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{bmatrix}$为正交矩阵

$$\Leftrightarrow U^T = U^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \eta_1 \ ,\eta_2 \ \cdots \ \eta_n \text{ 为} R^n \text{ 标准正交基}$$

$$\Leftrightarrow (\eta_i ,\eta_j) = \begin{cases}1 & i = j \\ 0 & i \neq j\end{cases} \quad i, j = 1,\cdots, n$$

性质 $U$ 为正交矩阵$\Rightarrow |U| = \pm 1, U$ 可逆 (必要条件)

$$U^TU_{3\times 3} = E \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\eta_1{}^T \\ \eta_2{}^T \\ \eta_3{}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\eta_1{}^T\eta_1 & \eta_1{}^T\eta_2 & \eta_1{}^T\eta_3 \\ \eta_2{}^T\eta_1 & \eta_2{}^T\eta_2 & \eta_2{}^T\eta_3 \\ \eta_3{}^T\eta_1 & \eta_3{}^T\eta_2 & \eta_3{}^T\eta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

例 设$A$为正交矩阵，$|A|=-1$，求$|A+E|$

解 $|A+E|=|A+AA^T|=|A(A^T+E)|=|A||(A+E)^T|$

$$=-|A+E| \qquad \therefore \ |A+E|=0$$

例 设(1) $A^2=E$ (对合矩阵)

(2)$A=A^T$ (对称矩阵)

(3)$A^TA=E$ (正交矩阵)

证明，三个条件中成立两个$\Rightarrow$ 第三个条件必成立

# 8.7 *Schmidt* 正交化法

问题：如何求 $n$ 维欧氏空间的一组(标准) 正交基？

方法1(扩充)

把 $V$ 的正交向量组扩充成 $V$ 的正交基

方法2(改造)

把 $V$ 的一组普通基改造成一组标准正交基

定理 设$\dim V=n$，则$V$的任意一个正交向量组$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_m\ (m<n)$

都可以扩充成$V$的标准正交基

证明 $\because m<n, \therefore \exists \beta\in V$ 但 $\beta\notin L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

取 $\alpha_{m+1}=\beta-(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)$ 则 $\alpha_{m+1}\neq\theta$（？）

下面准备求适当的$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$\alpha_{m+1}$与$\alpha_1,\cdots$，$\alpha_{\mathrm{m}}$都正交

先求$k_1$，使得$\alpha_{m+1}$与$\alpha_1$正交；$\because(\alpha_{m+1},\alpha_1)=(\beta-(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m),\alpha_1)$

$$=(\beta,\alpha_1)-k_1(\alpha_1,\alpha_1)-\cdots-k_m(\alpha_m,\alpha_1)=(\beta,\alpha_1)-k_1(\alpha_1,\alpha_1)$$

令 $(\alpha_{m+1},\alpha_1)=0 \Rightarrow k_1=\dfrac{(\beta,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}$ 同理由$(\alpha_{m+1},\alpha_{\mathrm{j}})=0\Rightarrow k_j=\dfrac{(\beta,\alpha_{\mathrm{j}})}{(\alpha_j,\alpha_{\mathrm{j}})}$

$(j=2\cdots m)$

$$\therefore \alpha_{m+1}=\beta-\frac{(\beta,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\cdots-\frac{(\beta,\alpha_{\mathrm{m}})}{(\alpha_m,\alpha_m)}\alpha_m$$

如果$m+1=n$ 则命题成立，反之，再用同样方法求$\alpha_{m+2}$

定理 (*Schmidt*正交化定理)

对于$n$维欧氏空间$V$的任何一个线性无关的向量组$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s$，
都可以改造成$V$的（标准）正交向量组$\eta_1$，$\eta_2,\cdots$，$\eta_s$，

且有 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_j)=L(\eta_1,\ \eta_2,\cdots,\ \eta_j)\quad(j=1,\cdots,s)$

特别，当$s=n$时，$\beta_1,\cdots,\beta_n$为$V$的一组正交基，$\eta_1$，$\eta_2,\cdots$，$\eta_n$为$V$的一组标准正交基

改造分两步;第一步：正交化

令 $\beta_1=\alpha_1$ 则有：$L(\alpha_1)=L(\beta_1)$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$ 则有：$L(\alpha_1,\alpha_2)=L(\beta_1,\beta_2)$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$ 则有：$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

………

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$ 则有：$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\cdots,\beta_s)$

则：$\beta_1,\cdots,\beta_s$为$V$的一组正交向量组。

第二步(标准化)：

令 $\eta_i=\dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$ (i=1⋯n)

则 $\eta_1$，$\eta_2,\cdots$，$\eta_s$ 为$V$的一组标准正交向量组。

且有 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_j)=L(\eta_1,\ \eta_2,\cdots,\ \eta_j)$ (j=1,⋯,$s$)

例 用施密特正交法将$R^3$的一组基

$\alpha_1=[0,1,1]^T,\alpha_2=[1,1,0]^T,\alpha_3=[1,0,1]^T$ 改造成$R^3$的标准正交基

解 第一步：正交化 令 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

则 $\beta_1$ $\beta_2$ $\beta_3$ 是一个$R^3$正交基

第二步 标准化 令

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,1]^T$$

$$\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}[2,1,-1]^T$$

$$\eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^T$$

则$\eta_1$， $\eta_2$， $\eta_3$ 是$R^3$ 的标准正交基

例 在欧氏空间$R^4$中，$\alpha_1=\begin{bmatrix}1&0&1&0\end{bmatrix}^T,\alpha_2=\begin{bmatrix}0&1&2&1\end{bmatrix}^T,\alpha_3=\begin{bmatrix}-2&1&0&1\end{bmatrix}^T$

求 (1) 子空间 $L(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$的一组标准正交 (2) 将此基扩充成$R^4$的标准正交基

解 (1) $\because\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\1&2&0\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore\alpha_1\ \alpha_2$ 为原向量组的一个极大线性无关组

$\therefore\dim L(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=2$

$\alpha_1\ \alpha_2$ 为$L(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 的一组基，

现将$\alpha_1\ \alpha_2$ 改造成标准正交基

第一步 正交化 令$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1&0&1&0\end{bmatrix}^T$ $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\end{bmatrix}^T$

第二步 标准化 令$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&1&0\end{bmatrix}^T,\eta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&1&1&1\end{bmatrix}^T$ 则$\eta_1$，$\eta_2$ 为$L$的标准正交基

(2) 设$\alpha=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\end{bmatrix}^T$ 令$\begin{cases}(\alpha,\eta_1)=0\\(\alpha,\eta_2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+\quad x_3=0\\-x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$

得基础解系 $\alpha_4=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\end{bmatrix}^T,\alpha_5=\begin{bmatrix}-1&-2&1&0\end{bmatrix}^T$

($\alpha_4,\alpha_5$不正交，但与$\eta_1\ \eta_2$都正交)

对$\alpha_4$，$\alpha_5$正交单位化 令$\beta_3=\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_5-\dfrac{(\alpha_5,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3$

再令 $\eta_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-1&0&1\end{bmatrix}^T,\eta_4=\dfrac{\beta_4}{\|\beta_4\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&-1&1&-1\end{bmatrix}^T$ 则$\eta_3,\eta_4$为标准正交向量组

$\therefore\ \eta_1$，$\eta_2$，$\eta_3$，$\eta_4$为$R^4$的标准正交向量组

例 在$R^{2\times2}$中， 设$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

(1) 求所有与$A,B$都正交的矩阵的全体$W$

(2) 证明：$W$是$R^{2\times2}$的子空间， 求$W$的一组基及$\dim W$

**解 (1) 设**$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$， **与$A,B$正交，则有**

$$\begin{cases}(A,X)=0\\ (B,X)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\ 2x_1+2x_2-2x_3 \qquad =0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -5 & -4\\ 0 & 1 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{通解}\begin{cases}x_1= 5t_1+4t_2\\ x_2=-4t_1-4t_2\\ x_3= t_1\\ x_4= t_2\end{cases}$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5t_1+4t_2 & -4t_1-4t_2\\ t_1 & t_2\end{bmatrix}$$

$$=t_1\begin{bmatrix}5 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}4 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix}=t_1C+t_2D$$

(2) $W=L(C,D)$ 则$W$ 为$R^{2\times2}$的一个子空间

$\because C,D$ 线性无关 $\therefore \dim V=2$

设$V=R\left[X\right]_3$是次数小于3的实系数多项式和零多项式组成的关于多项式的加法和数乘所组成的实线性空间

1，证明：$\left\{1+x^2,1+x,1\right\}$为$V$的一组基，记为基$(A)$

2，如对于多项式$\left\{1+x^2,1+x,1\right\}$为$V$的一组基

对于向量 $p_1(x)=a_1+a_2x+a_3x^2, p_2(x)=b_1+b_2x+b_3x^2,$

定义内积$(p_1(x), p_2(x))=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

试用*simit*正交化把基$(A)$改造为$V$的标准正交基

3，设$\left\{1+x+x^2,1-x^2,1-x\right\}$为$V$的另一组基,记为基$(B)$,

求基$(A)$到基$(B)$的过度矩阵

4，基$(A)$，基$(B)$的度量矩阵之间有何关系？

解:1, $\because \left[1+x^2, 1+x, 1\right] = \left[1,\ x, x^2\right]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[1,\ x, x^2\right]M_1, \because M_1$可逆, $\therefore \left\{1+x^2, 1+x, 1\right\}$为$V$的一组基

2，令$\beta_1 = p_1(x) = 1+x^2$，$\beta_2 = p_2(x) - \dfrac{(p_2(x), \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = p_2(x) - \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\beta_1 = (1+x) - \dfrac{1}{2}(1+x^2) = \dfrac{1}{2}(1+2x-x^2)$

$$\beta_3 = p_3(x) - \frac{(p_3(x), \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(p_3(x), \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = 1 - \frac{1}{2}(1+x^2) - \frac{1/2}{3/2}\cdot\frac{1}{2}(1+2x-x^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^2$$

单位化得到一组标准正交基:$\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2, \dfrac{\sqrt{6}}{6} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}x - \dfrac{\sqrt{6}}{6}x^2, \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2\right\}$

3, $\left[1+x+x^2, 1-x^2, 1-x\right] = \left[1,\ x, x^2\right]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \left[1,\ x, x^2\right]M_2 = \left[1+x^2, 1+x, 1\right]M_1^{-1}M_2$

$\therefore$ 基(A)到基(B)的过度矩阵:$M = M_1^{-1}M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4, 基(A)的度量矩阵:$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 基(B)的度量矩阵:B=$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A, B$等价，合同，不相似