第三章 矩阵

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \text{其中}\, a_{ij}\in P,\quad \text{或}\ A\in P^{m\times n}$$

前二章中我们对矩阵的了解如下：

1.矩阵， 阶梯形、约化阶梯形 定义， 方阵及对应行列式;

2.矩阵的初等变换；

3.矩阵的秩r(A)，简单性质及求法；

5.线性方程组与一个增广矩阵1-1对应，及可通过对 $\bar{A}$ 初等行变换求线性方程组的解；

6.矩阵的相等 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

$B=(b_{ij})_{s\times t}$

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} m=s \\ n=t \\ a_{ij}=b_{ij} \end{cases}$$

3.1 矩阵的分类及运算

一，矩阵的简单分类　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in P^{m\times n}$

1，$m=1$ 即 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，称为行矩阵或行向量(row vector)

2，$n=1$ 称为列矩阵或列向量(column vector)，　即 $A=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

3，当 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶方阵，对应的行列式为 $|A|$

(1) 如果 $A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}=diag(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$ 称为对角矩阵

如果对角矩阵中 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 此时称为数量矩阵

如果数量矩阵中 $\lambda=1$，又称为单位矩阵，用 E 表示 $E=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

(2) 当$a_{ij}=a_{ji}$时，称方阵A为对称矩阵($symmetric\ \ matrix$)

例如 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$　　例如$A=\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&0&3\\-2&-3&0\end{bmatrix}$

(3) 当$a_{ij}=-a_{ji}$时，称方阵A为反对称矩阵($skew\ symmetric\ matrix$)

反对称矩阵有如下特点：

$$D=|A|=\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}=0$$

主对角线上元素全为0

奇数阶反对称矩阵对应的行列式的值必为0

反对称矩阵的秩必为偶数

4 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$当$a_{ij}=0$时，称为零矩阵，记$A=O$

二，矩阵的运算

$$\begin{cases} 1\text{，数乘} \\ 2\text{，加法} \\ 3\text{，乘法} \\ 4\text{，转置} \\ 5\text{，对称，反对称矩阵} \end{cases}$$

1，数乘

定义1：$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}, \lambda \in P$

$$\boldsymbol{\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}}$$

2 加法

定义2：设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{m\times n}$

则$A + B = C = (c_{ij})_{m\times n}$　其中$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$，　则$A + B = \begin{bmatrix} 1+a & 2+b & 3+c \\ 4+d & 5+e & 6+f \end{bmatrix}$

由数乘和加法马上得到减法：$A - B = A + (-1)B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$

上例中：$A-3B=\begin{bmatrix} 1-3a & 2-3b & 3-3c \\ 4-3d & 5-3e & 6-3f \end{bmatrix}$

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+b_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22}+b_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32}+b_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

定理1：加法和数乘满足的运算法则

(1) 加法交换律：$A+B=B+A$

(2) 加法结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 零矩阵 $O+A=A+O=A$

(4) 负矩阵 $A+(-A)=(-A)+A=O$

（5） $k(A+B)=kA+kB$

(6) $(k+t)A=kA+tA$

(7) $(kt)A=k(tA)$

(8) $1\cdot A=A$

3 乘法　定义3：设$A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$

则定义 $A_{m\times s}\cdot B_{s\times n}=C_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$

其中：$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$

注意：只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才可以相乘。

例 $A_{2\times3}B_{3\times4}=C_{2\times4}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$

其中：$c_{23}=\sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{kj}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}$

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ 有意义.

只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$ 没有意义.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix} = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

例 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

计算得到：$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix}=AC$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

可以发现：

1，虽然 $AB=AC$ 但是 $B\neq C$

虽然 $BA=O$ 但是 $B\neq O, A\neq O.$

(即矩阵乘法不满足消去律)

这里称B为左零因子，A为右零因子.

2, 显然 $AB\neq BA$

(即矩阵乘法不满足交换律)

乘法的运算规律

(1).不满足交换律，

即一般 $AB \neq BA$

（如果AB=BA,称A与B可交换）

不满足消去律：$\begin{cases} 如AB = AC 未必B = C. \\ 如AB = O 未必A = O 或B = O. \end{cases}$

例3，求与$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$可交换的所有矩阵

解，设$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$与$A$可交换，即$AB = BA$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a - b \\ b = 0 \\ -a = c - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = d - c \end{cases}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} d-c & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad d, c \in P$$

(2).满足 结合律，(AB)C=A(BC)

分配律，A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA,

k(AB)=(kA)B=A(kB)

乘法的运算规律

(3).方阵的幂，矩阵的多项式 设A为n阶方阵

记 $AA = A^2$, $AAA = A^3, \cdots$

显然有 $(A^k)^l = A^{kl}$, $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$

设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

则 $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 \mathrm{E}$，

称为A的矩阵多项式 (规定 $A^1 = A, A^0 = E$)

设 $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

则 $f(\mathrm{A}) = 3A^2 - 2A + 5E$

$$= 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

问题：$f(A)$如何计算？

$|f(A)| = ?$

(4) 设 $A,B\in P^{n\times n}$,则$|AB|=|A|\cdot|B|=|BA|$，(但未必$AB=BA$)

证明：设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$A=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$，$AB=C=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$ 其中$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

$$\text{记 } D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}=|A||B|$$

$$\text{另一方面 } D\overset{C_{n+j}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}C_i}{\underset{j=1,2,\cdots,n}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C_n \\ -E_n & O \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{特殊行列式}}{=\!=\!=\!=\!=}(-1)^{n^2}|C||-E|=(-1)^{n^2+n}|C|=|AB|$$

$$\therefore |A||B|=|AB|$$

(5)，设 $A \in P^{n\times n}$ $k \in P$ 则 $|kA| = k^n \cdot |A|$

证明设 $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 则：

$$|kA| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{11} & ka_{11} & \cdots & ka_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ ka_{11} & ka_{11} & \cdots & ka_{11} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} = k^n |A|$$

例2 设$A, B \in P^{3\times 3}$, $AB + 2E = 0$, 如果 $|A| = 2$, 求 $|B|$

解：$\because AB = -2E, \therefore |AB| = |-2E|$ $\quad |A||B| = (-2)^3 |E|$

$$\therefore 2 \cdot |B| = (-2)^3 \quad \therefore |B| = -4$$

线性方程组的矩阵形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

记系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

则上述方程组可写为：$A_{m\times n}X_{n\times 1} = b_{m\times 1}$ 矩阵方程

也称满足 $AX_0 = b$ 的 n 元列向量 X_0 为方程组的解（或解向量）.

关于单位矩阵E:

E在矩阵乘法中的地位相当于普通数的乘法中的1

$$E = E^0 = E^2 = E^3 = \cdots$$

$$1 = |E| = \left|E^2\right| = \left|E^3\right| = \cdots$$

$$E_n \cdot A_{n\times n} = A_{n\times n} \cdot E_n = A$$

$$(\lambda E_n) \cdot A_{n\times n} = A_{n\times n} \cdot (\lambda E_n) = \lambda \cdot A$$

可以证明：与任何方阵可以交换的矩阵一定是数量矩阵

$$E_n \cdot A_{n\times m} = A_{n\times m} \quad A_{n\times m} \cdot E_m = A_{n\times m}$$

注意：$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B)$

$$= A^2 + AB + BA + B^2$$

$$\neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B \neq A^2 B^2$$

- 例4.设 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\2&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\3&\frac{3}{2}&1&\frac{3}{4}\\4&2&\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}$

A为对称矩阵

B为对角线上元素相等的上三角矩阵

显然$R(C)=1$，秩为1的矩阵一定可以表示为一个列矩阵与一个行矩阵的乘积

求 $A^{2015}, B^{2015}, C^{2015}$

解：$\because A^2=\begin{bmatrix}9&&\\&9&\\&&9\end{bmatrix}=9E$, $\therefore A^{2015}=A(A^2)^{1007}=9^{1007}A$

$\because B=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $=2E+F$, 计算得：$F^3=0$

$\therefore B^{2015}=(F+2E)^{2015}$ (类似二项展开定理)

$$=\sum_{k=0}^{2015}C_{2015}^k F^k(2E)^{2015-k}$$

$$=2^{2015}E+\sum_{k=1}^{2}C_{2015}^k F^k(2E)^{2015-k}$$

$\because C=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$, $C^3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=4^2C$

$$\therefore C^{2015}=4^{2014}C$$

4.矩阵的转置

定义4：把$A_{m\times n}$ 第一行，第二行，…，第m 行，

分别变为第一列，第二列，…，第m 列后所得到的矩阵，

记为A^T，称为A 转置的矩阵，显然A^T 为 $n\times m$矩阵。

比较行列式的转置：$D=D^T$

转置的性质

(1).$(A^T)^T = A$

(2).$(A+B)^T = A^T + B^T$

(3).$(kA)^T = kA^T$

(4).当A为方矩阵时，$\left|A^T\right| = \left|A\right|$

(5).$(AB)^T = B^T A^T$

(6)，$r(A)=r(A^T)$

如 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

则$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

类似还有 $(AB)^* = B^* A^*$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A_{2\times 3}B_{3\times 5})^T = (C_{2\times 5})^T = F_{5\times 2}$ ，

${B^T}_{5\times 3}\cdot {A^T}_{3\times 2} = G_{5\times 2}$ 但是 ${A^T}_{3\times 2}\cdot {B^T}_{5\times 3}$ 没有意义

例：已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},\ 求\ (AB)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},\qquad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解 法 2

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

5.对称与反对称矩阵　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

如果 $a_{ij}=a_{ji}\Leftrightarrow A=A^T$　称A为对称矩阵

如果 $a_{ij}=-a_{ji}\Leftrightarrow A=-A^T$　称A为反对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix},\quad A^T=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}\therefore A=A^T$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix},\quad B^T=\begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix},\quad -B^T=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}=B$$

对称阵, 反对称阵的运算规律:

（1）对称矩阵的和、数乘、方幂仍为对称矩阵

（2）反对称矩阵的和、数乘仍为反对称矩阵

（3）反对称矩阵的幂，当幂为偶数时(*奇数*)为对称阵(*反对称阵*)

证明(1)　设$A=A^T$　$B=B^T$　记$C=A+B$

$\because C^T=(A+B)^T=A^T+B^T=A+B=C$　　即C为对称矩阵

（3）　如设$A=-A^T$　记$C=A^k$

当$k=2m$时　$C^T=(A^{2m})^T=(A^T)^{2m}=(-A)^{2m}=(-1)^{2m}A^{2m}=C$

当$k=2m+1$时　$C^T=(A^{2m+1})^T=(A^T)^{2m+1}=(-A)^{2m+1}$

$$=(-1)^{2m+1}A^{2m+1}=-C$$

例： 设列矩阵 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $X^{\mathrm{T}}X = 1$，E 为 n 阶单位阵，$H = E - 2XX^{\mathrm{T}}$，试证明 H 是对称阵，且 $HH^{\mathrm{T}} = E$.

证明:

$$H^T = (E - 2XX^T)^T = E^T + (-2XX^T)^T = E - 2(XX^T)^T$$

$$= E - 2(X^T)^T X^T = E - 2XX^T = H$$

从而 H 是对称阵.

$$HH^T = H^2 = (E - 2XX^T)^2 = E^2 - 4XX^T + (-2XX^T)^2$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^T XX^T = E - 4XX^T + 4X(X^T X)X^T$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^T = E$$

例，设A,B为n阶方阵，A，B的每列元素之和为1，

$$\alpha_{n\times 1}=\left(1,1,\ldots,1\right)^{T}$$

1,求$\alpha^{T}A,\alpha^{T}B$　　2,设$C=AB$,证明C的每列元素之和也为1

解，设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$,$B=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$,则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}=1$

$$1,\ \alpha^{T}A=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}=\alpha^{T}$$

同理，$\alpha^{T}B=\alpha^{T}$

2,设$C=AB=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$

考察　$\alpha^{T}C=\alpha^{T}(AB)=(\alpha^{T}A)B=\alpha^{T}B=\alpha^{T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$

$\therefore C$的每列元素之行为1

例，证明：任意一个方阵可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。且这种表示方法是唯一的

证 明（1） $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)=B+C$

$$B^T=(\frac{1}{2}(A+A^T))^T=\frac{1}{2}(A+A^T)^T=\frac{1}{2}(A+A^T)=B$$

$$C^T=(\frac{1}{2}(A-A^T))^T=\frac{1}{2}(A-A^T)^T=-\frac{1}{2}(A-A^T)=-C$$

（2） 设$A=B+C=B_1+C_1$ 其中B=B^T, $B_1=B_1^T$

$$C=-C^T, C_1=-C_1^T$$

如果 $B=B_1, C=C_1$,则唯一性得证

由已知 $B-B_1=C_1-C=F$

$\therefore F$既对称又反对称 $\therefore\ F=0$

例，设A,B都是对称矩阵，则AB也是对称矩阵的充要条件A,B可交换

（设$A=A^T,B=B^T$ 证明 $AB=(AB)^T \Leftrightarrow AB=BA$）

证明 $\Rightarrow$ $BA=B^TA^T$

$$=(AB)^T=AB$$

$\Leftarrow$ $AB=BA$

$$=B^TA^T=(AB)^T$$

3.2可逆矩阵

定义的引入:当数$a\neq 0$时,一定存在数$b\neq 0$,使得$ab=ba=1$,b称为a的倒数。

非零数的这个概念,能否利用到特殊的矩阵上?

定义1.对n阶方阵A,若存在n阶方阵B,使得AB=BA=E,

则称 A 为可逆矩阵,并称B为A的逆矩阵。否则称A不可逆.

当A可逆时,称A为非退化的,或者非奇异的。

否则,称A为退化的,或者奇异的。

定理1.如果A 可逆,则A 的逆矩阵必唯一,用A^{-1}表示A 的逆矩阵.

证明:设AB=BA=E,又设AC=CA=E,

$$则B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C$$

问题的提出:

(1)如何判断A是否可逆 (2)当A可逆时如何求 A^{-1}

定义2 n阶矩阵A的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 位于第 j 行第 i 列

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

$$设A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}，则A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，求$A^*$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

引 理 $A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot E$

证 明（以 三 阶 方 阵 为 例）

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & & \\ & |A| & \\ & & |A| \end{bmatrix} = |A| E$$

$\because c_{22} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|$ (利用行列式的展开定理1)

$c_{13} = a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$ (利用行列式的展开定理2)

$$\therefore c_{ij} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

同 理 可 证 明 $A^* \cdot A = |A| E$

这 是 关 于 A^* 最 重 要 的 性 质 ！

定理2：A可逆 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ A满秩。

且当A可逆时，$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$　　(求逆矩阵方法二：利用伴随矩阵)

推论：n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow$存在n阶方阵B,满足$AB = E$,或者$BA = E$,且$A^{-1} = B$.

(求逆矩阵方法一：从定义出发)

证明：必要性　设A可逆，由定义，$\exists B$ 使得 $AB = BA = E$

两边取行列式得到：

$$|A||B| = |B||A| = |E| = 1 \qquad \therefore |A| \neq 0$$

充分性：设$|A| \neq 0$，由引理：$AA^* = A^*A = |A|E$ 得到

$$A \cdot \left(\frac{A^*}{|A|}\right) = \left(\frac{A^*}{|A|}\right) \cdot A = E$$

比较定义可知：A可逆，且 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

例设$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，问：$A$是否可逆？ 当$A$可逆时，求$A^{-1}$

解 $\because |A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$，$\therefore A$ 可逆

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$$ （ 利 用 伴 随 矩 阵 求 逆 矩 阵 ）

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

例，设A为n阶方阵，满足 $A^2-2A-3E=0$

(1)证明A可逆， 并求A^{-1} （即从已知中找矩阵B，使得AB=E）

(2)证明A+2E可逆，并求$(A+2E)^{-1}$ （即从已知中找矩阵C，使得(A+2E)C=E）

解:

(1)由已知 $A^2-2A=3E \quad \therefore A(A-2E)=3E$,即有$A(\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}E)=E$

$\therefore A$可逆且$A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}E$ （注：利用推论）

(2)由已知 $A^2-2A-8E+5E=0 \qquad \therefore (A-4E)(A+2E)=-5E$

$\therefore A+2E$可逆且$(A+2E)^{-1}=\frac{-1}{5}(A-4E)$

例， 设 A,B 为 n 阶 方 阵， 已 知 $AB=A+B$

证 明， $A-E$ 可 逆， 并 求 $(A-E)^{-1}$

$$AB=A+B \Rightarrow (A-E)B=A-E+E$$

$$\Rightarrow (A-E)(B-E)=E \qquad \therefore (A-E)^{-1}=B-E$$

例 设$A=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \vdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \vdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \vdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \vdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$ 求$(A-2E)^{-1}$ (07…08秋冬)

解，$A=E-\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E-\frac{1}{n}J_n$ 可以发现有 $J_n^2=nJ_n$

考察：$A^2=(E-\frac{1}{n}J_n)^2 \Rightarrow A^2=A$

$$\therefore A^2-A-2E+2E=0$$

有:$(A-2E)(\mathrm{A}+E)=-2E$ $\therefore (A-2E)^{-1}=-\frac{1}{2}(\mathrm{A}+E)$

- 性质2. 1.设A为可逆矩阵，则有如下性质：

(1) A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$ $\quad\because AB=E\Rightarrow A^{-1}=B, B^{-1}=A$

(2) $k\neq 0$时，kA可逆，且$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ $\quad\because (kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=E$

(3) A^T可逆，且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ $\quad\because A^T\cdot(A^{-1})^T=(A^{-1}\cdot A)^T=E^T=E$

(4) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ $\quad Q\ AA^{-1}=E, \therefore |AA^{-1}|=|E|, |A||A^{-1}|=1$

(5) 若$AB=O$，则$B=O$ $\quad A^{-1}\cdot(AB)=A^{-1}\cdot 0\Rightarrow B=0$

(6) 若$AB=AC$，则$B=C$ $\quad A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)\Rightarrow B=C$

$$\because (AB)\cdot(B^{-1}A^{-1})=A(B\cdot B^{-1})A^{-1}=E$$

- 2.若A,B都是n阶可逆矩阵，则AB可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- 3.若$A_1, A_2, \cdots, A_k$都是n阶可逆矩阵，则$A_1A_2\cdots A_k$可逆，且

$$(A_1A_2\cdots A_k)=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

- 4.对角矩阵 $\Lambda=diag\left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right]$可逆$\Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\cdot\lambda_n\neq 0$

$$\Leftrightarrow \lambda_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$$

此时$\Lambda^{-1}=diag\left[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}\right]$

性质3.设A,B都为可逆矩阵

则矩阵方程 $AX=C$ 有唯一解，$X=A^{-1}C$

$XB=C$ 有唯一解, $X=CB^{-1}$

$AXB=C$ 有唯一解, $X=A^{-1}CB^{-1}$

例 设有 $AX+4E=A^2-2X$ 其中$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$，求$X$

解：由已知移项得到 $AX+2X=A^2-4E$

$(A+2E)X=(A+2E)(A-2E)$ （注意：不能写成$X(A+2E)$）

$$\because |A+2E|=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}=60\neq 0，\text{即} A+2E \text{可逆}$$

所以上式两边左乘 $(A+2E)^{-1}$

$$\text{得到 } X=A-2E=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

令 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

则有：$AX=\beta$

如果 $m=n$ ，则A为n阶方矩阵 ，当A 可逆，即当$D=|A|\neq 0$时

得到唯一解：
$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=A^{-1}\beta=\frac{A^*}{|A|}\beta=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}==\frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

($cramer$ 法则)

如果 $\beta=0$ ，则当A 可逆，即$|A|\neq 0$ 时

$AX=0$ 只有零解

关于A^* (设A为n阶方阵)

1.A^*如何构造

2 $AA^* = A^*A = |A|E$

3 $|A^*| = |A|^{n-1}$

3 $\because A^*A = |A|E, \Rightarrow |A^*||A| = |A|^n$

当$|A| \neq 0$时，$|A^*| = |A|^{n-1}$

当$|A|=0$时 $\Leftrightarrow |A^*|=0$ (另证)

4 当A可逆时； $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}, (A^*)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

5 A^*可逆$\Leftrightarrow A$可逆

6 $(AB)^* = B^*A^*$

7, 当A可逆时，$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

7 $\because A^*(A^*)^* = |A^*|E \therefore$ 当A可逆时，

$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\dfrac{A}{|A|} = |A|^{n-2}A$

8 $R(A^*) = \begin{cases} n & R(A) = n \\ 1 & R(A) = n-1 \\ 0 & R(A) < n-1 \end{cases}$

9 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, (A^T)^* = (A^*)^T, (kA)^* = k^{n-1}A^*$

例，$A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$ 求 $(A^*)^*$

解：$\because A^*(A^*)^*=\left|A^*\right|E$

又 $\because |A|=5,\therefore A^*$可逆，且$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}=5^3$

$$\therefore (A^*)^*=|A|^{n-1}\cdot(A^*)^{-1}=5^{n-1}(A^*)^{-1}=5^3(A^*)^{-1}$$

$$\because AA^*=|A|E=5E,\therefore (A^*)^{-1}=\frac{A}{5},$$

$$\therefore (A^*)^*=5^3\cdot\frac{A}{5}=5^2A$$

3.3 矩阵的分块

对于规模较大, 零较多或局部比较特殊的矩阵, 为了简化运算，经常采用**分块法**，把大矩阵分割成小矩阵. 在运算时， 把这些小矩阵当作元素一样来处理.

具体做法是：将矩阵用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & \vdots & a_{43} \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & a_{12} & \vdots & a_{13} \\ a_{21} & \vdots & a_{22} & \vdots & a_{23} \\ a_{31} & \vdots & a_{32} & \vdots & a_{33} \\ a_{41} & \vdots & a_{42} & \vdots & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix}$$

分块矩阵的运算：

$\begin{cases} 1\text{，加法} \\ 2\text{，数乘} \\ 3\text{，乘法} \\ 4\text{，转置} \\ 5\text{，求逆} \\ 6\text{，准对角阵} \end{cases}$

1.加法：设$A=(a_{ij})_{m\times n}=(A_{ij})_{s\times t}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}=(B_{ij})_{s\times t}$

如果有相同分块法

则 $A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{s\times t}$

$$A=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 4 & 5 & 6 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \qquad B=\left[\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ \hdashline d & e & f \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

则：$A+B=\begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{bmatrix}$

2.数乘：$k\cdot A=(kA_{ij})_{s\times t}$

3.乘法：$A=(a_{ij})_{m\times s}$　　$B=(b_{ij})_{s\times n}$

如果对A列上的分块分法，和对B行上分块方法相同，

则A，B作为分块后仍可乘，相乘规则：把块当普通元素处理即可。

设

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right),\ \text{求 } AB.$$

解

把A,B分块成

$$A=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

4.转置：设$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}_{s\times t}$

则：$A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}_{t\times s}$

例 13 已知 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&3&4\\2&3&4&1\\ \hdashline 3&4&1&2\end{array}\right)$, 求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

解 由于矩阵

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}3&4&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$$

转置分别为

$$\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$$

故

$$A^T==\begin{bmatrix}A_{11}^T&A_{21}^T\\A_{12}^T&A_{22}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&\vdots&3\\2&3&\vdots&4\\3&4&\vdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\4&1&\vdots&2\end{bmatrix}$$

5.求逆：如果矩阵分快后，为如下情形:(其中$A_{r\times r}, B_{s\times s}$)

$$G_1=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}_{r+s}, G_2=\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad G_3=\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}, \quad G_4=\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

则，可以考虑利用分块矩阵求逆。

$$\because |G_1|=|G_2|=|A||B| \quad ,|G_3|=|G_4|=(-1)^{r\times s}|A||B|$$

$$\therefore G_1,G_2,G_3,G_4 \text{可逆} \Leftrightarrow A,B \text{可逆}$$

可以证明：　求逆矩阵方法三：利用分块矩阵求逆

$$G_1^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}, \quad G_2^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$G_3^{-1}=\begin{bmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad G_4^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$$

例，设$G=\begin{bmatrix} A_{r\times r} & 0_{r\times s} \\ C_{s\times r} & B_{s\times s} \end{bmatrix}, A_{r\times r}, B_{s\times s}$可逆，证明G可逆,并求$G^{-1}$

证明：G可逆已经证明，

设$G^{-1}=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$，其中$X_{11}$，$X_{12}$，$X_{21}$，$X_{22}$分别为$r\times r, r\times s, s\times r, s\times s$矩阵

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & \\ & E_S \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11}+BX_{21} & CX_{12}+BX_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & \\ & E_S \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AX_{11}=E_r \\ CX_{11}+BX_{21}=0 \\ AX_{12}=0 \\ CX_{12}+BX_{22}=E_S \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} X_{11}=\mathrm{A}^{-1} \\ X_{12}=0 \\ X_{21}=-B^{-1}CA^{-1} \\ X_{22}=B^{-1} \end{cases}$$

$$\therefore G^{-1}=\begin{bmatrix} \mathrm{A}^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

例: 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$$B=\begin{bmatrix}0&0&5\\3&1&0\\2&1&0\end{bmatrix},\ 求B^{-1}=\begin{pmatrix}0&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&0\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&-2&3\\1/5&0&0\end{bmatrix}$$

解:

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$$

Q $|A|=|A_1||A_2|=5\neq 0$

$\therefore A$可逆。

其中；$A_1=(5),A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

计算得到：$A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right),A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&&\\&1&-1\\&-2&3\end{pmatrix}$$

6 准对角阵

当$A_{n\times n}$分块后变成如下形式：

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t \end{bmatrix}$$

特点:

$$\begin{cases} 1.A\text{为方阵} \\ 2.\text{分块后每小块仍是方阵} \\ 3.\text{小块方阵排在主对角线上} \end{cases}$$

其 中 A_i均 为 方 阵

$$\left|A\right|=\left|A_1\right|\cdots\left|A_t\right|$$

当A_i可逆时，$A^{-1}=diag(A_1^{-1},\cdots,A_t^{-1})$

例3 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $A^2, |A|, |A^5|, A^{-1}, A^T$.

解 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}$，

$$|A|=|A_1||A_2||A_3|, A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} A_1^2 & & \\ & A_2^2 & \\ & & A_3^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

例，$\left|A_{m\times m}\right| = a \neq 0, \left|B_{n\times n}\right| = b \neq 0, C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$，求$C^*$

解， $C^*C = |C|E = (-1)^{mn}|A||B|E$

$$\therefore C^* = (-1)^{mn}|A||B|C^{-1},$$

$$\because C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^* = (-1)^{mn}ab\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{mn}aB^* \\ (-1)^{mn}bA^* & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换：(1)初等行变换 (2)初等列变换

定义1.对单位矩阵E实施一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

进行一次初等行变换

$$\begin{cases} (1) E_3 \xrightarrow{R_{13}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{记}{=} E_{13} \\ (2) E_3 \xrightarrow{kR_2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{记}{=} E_2(k), \quad (k \neq 0) \\ (3) E_3 \xrightarrow{R_3 + kR_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{记}{=} E_{31}(k) \end{cases}$$

1) 当实施 R_{st} (或 C_{st}) ($s<t$) 时,

$$\boldsymbol{E} \xrightarrow[\text{或}C_{st}]{R_{st}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ s \\ \\ t \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & s & & t & & \end{array} \end{array} = E_{st}$$

2) 当实施 cR_s (或 cC_s) (这里 c 是 $\mathbb{P}$ 中的非零常数) 时,

$$\boldsymbol{E} \xrightarrow[\text{或}cC_s]{cR_s} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ s \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & s & & \end{array} \end{array} = E_s(c)$$

3) 当实施 R_s+cR_t (或 C_t+cC_s) ($s<t$) 时

$$\boldsymbol{E} \xrightarrow[\text{或}C_t+cC_s]{R_s+cR_t} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & c & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ s \\ \\ t \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & s & & t & & \end{array} \end{array} = E_{st}(c) \qquad \boldsymbol{E} \xrightarrow[\text{或}C_t+cC_s]{R_s+cR_t} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & c & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ t \\ \\ s \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & t & & s & & \end{array} \end{array} = E_{st}(c)$$

$\therefore$ 初等矩阵只有三种类型。

性质：初等矩阵为可逆矩阵，且它们的逆矩阵仍为初等矩阵.

$$\because |E_{st}| = -1, |E_s(c)| = c, |E_{st}(c)| = 1$$

或者，对E进行初等变换秩不变。

可以证明：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{st}\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{E}_{st}^2 = \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{E}_s(c)\boldsymbol{E}_s\left(\dfrac{1}{c}\right) = \boldsymbol{E} \ (c \in \mathbb{P},\ c \neq 0), \\ \boldsymbol{E}_{st}(c)\boldsymbol{E}_{st}(-c) = \boldsymbol{E}. \end{cases} \quad 1 \leqslant s, t \leqslant n.$$

即有

$$\boldsymbol{E}_{st}^{-1} = \boldsymbol{E}_{st},\ \boldsymbol{E}_s^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_s\left(\frac{1}{c}\right)\ (c \neq 0),\ \boldsymbol{E}_{st}^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_{st}(-c).$$

定理1：对$A_{m\times n}$施行一次初等行(列)变换得到的矩阵，等于在A 的左(右)边乘一个相应的m (n) 阶初等矩阵。

(定理的重要意义：揭示了矩阵的初等变换与矩阵乘法运算之间的关系)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+2a_{11} \\ a_{21} & a_{22}+2a_{21} \\ a_{31} & a_{32}+2a_{31} \end{bmatrix}$$

$$A\xrightarrow{R_{13}}B=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \qquad E_{13}A=B, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

$$A\xrightarrow{4C_2}C=\begin{bmatrix} a_{11} & 4a_{12} \\ a_{21} & 4a_{22} \\ a_{31} & 4a_{32} \end{bmatrix} \qquad AE_2(4)=C, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & 4a_{12} \\ a_{21} & 4a_{22} \\ a_{31} & 4a_{32} \end{bmatrix}$$

推论1. $r(A_{m\times n})=r \Leftrightarrow$ 一定存在一系列m 阶初等矩阵$P_1, \cdots, P_s$，和一系列n 阶初等矩阵$Q_1, \cdots$，Q_t，使得：$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

如令 $P = P_s \cdots P_2 P_1$， $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$

则：P 为m 阶可逆矩阵， Q为n 阶可逆矩阵，于是有：

推论2. $R(A_{m\times n}) = r \Leftrightarrow$ 存在m 阶可逆阵P，

和n 阶可逆阵 Q，

使得：$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

由推论得到：设$A, B \in P^{m\times n}$，则A与B相抵（等价）

$\Leftrightarrow$ 一定存在m阶可逆阵P和n阶可逆阵Q，使得：$PAQ=B$。

$\Leftrightarrow R(A)=R(B)$

$\Leftrightarrow A, B$有相同的标准形

推论3.设$R(A_{n\times n})=n$， $(\Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow A^*$ 可逆)

$\Leftrightarrow A$ 一定可以表示为一系列初等矩阵的乘积。

例证　设$A_{3\times 3}$可逆，由推论1设：$A_{3\times 3}\xrightarrow[\text{三次列变换}]{\text{（不妨设）二次行变换}}E=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$

即有 推论1：$P_2P_1AQ_1Q_2Q_3=E$

等式两边先右乘Q_3^{-1}，再右乘Q_2^{-1}，最后右乘Q_1^{-1} 得到:$P_2P_1A=Q_3^{-1}Q_2^{-1}Q_1^{-1}$

再等式两边先后左乘 P_2^{-1}，$P_1^{-1}\Rightarrow A=P_1^{-1}P_2^{-1}Q_3^{-1}Q_2^{-1}Q_1^{-1}$ (*)

$\therefore A$ 等于一系列初等矩阵的逆矩阵的乘积

$\because$ 初等矩阵的逆矩阵仍是初等矩阵,$\therefore$ 命题成立

推论4.设P,Q 均可为可逆矩阵 $\Rightarrow R(A)=R(PA)$

$=R(AQ)$

$=R(PAQ)$

推论5 设A可逆，则仅对A进行初等行(列)变换, 就可把A化为E

利用推论3的结果 $A = P_1^{-1}P_2^{-1}Q_3^{-1}Q_2^{-1}Q_1^{-1}$ (*)

两边先后左乘P_1，P_2，Q_3，Q_2，Q_1

得到 $Q_1Q_2Q_3P_2P_1A = E$ (1) $(A\,Q_1Q_2Q_3P_2P_1 = E)$

由(1)可得 $Q_1Q_2Q_3P_2P_1E = A^{-1}$ (2) $(EQ_1Q_2Q_3P_2P_1 = A^{-1})$

由(1), (2)可知，同样的初等行变换，当把A变成E时, 也一定把E变为A^{-1}

由此得到了求A^{-1}的第四种方法，即可以利用初等行（列）变换求A^{-1}

设A可逆，下面利用行变换求A^{-1} （求逆矩阵方法四：利用初等行(列)变换求）

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & E \end{bmatrix}_{n\times 2n} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} E & \vdots & A^{-1} \end{bmatrix}$$

利用列变换求A^{-1} $\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}$)

推论6. 设A, B为可逆阵，则矩阵方程

1, $AX = C \Rightarrow$ 唯一解 $X = A^{-1}C$

$$\text{求法:}\ \left[A \ \vdots \ C\right] \xrightarrow{\text{行}} \left[E \ \vdots \ A^{-1}C\right]$$

2, $XB = C \Rightarrow$ 唯一解 $X = CB^{-1}$

$$\text{求法:}\ \begin{bmatrix} B \\ \cdots \\ C \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ CB^{-1} \end{bmatrix}$$

3 $AXB = C \Rightarrow$ 唯一解 $X = A^{-1}CB^{-1}$

求法分两步：先行变换求$A^{-1}C$，

再列变换求$(A^{-1}C)B^{-1}$

- 例， 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 求 A^{-1}

- 解（1）前面伴随矩阵求得 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$

- （2）利用行变化求

$$[A \ \vdots \ E]=\begin{bmatrix}1 & 2 & \vdots & 1 & 0\\ 3 & 4 & \vdots & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & \vdots & 1 & 0\\ 0 & -2 & \vdots & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & \vdots & 1 & 0\\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & \vdots & -2 & 1\\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

- （3）再利用列变换求

$$\begin{bmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ \cdots & \cdots\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2-2c_1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\\ \cdots & \cdots\\ 1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}c_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\\ \cdots & \cdots\\ 1 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1-3c_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \cdots & \cdots\\ -2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

思考题1.

求矩阵方程AX=B其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$\because\ |A|=1\neq 0,\therefore X=A^{-1}B$$

$$\left(A\vdots B\right)\xrightarrow[r_3-r_4]{\substack{r_1-r_2\\r_2-r_3}}\left(E\vdots A^{-1}B\right)$$

思考题2.

设A是n阶可逆方阵，将A的第i行和第j行互换后，得到的矩阵记为B

（1）证明B可逆 $\because B=E_{ij}A\quad \therefore B^{-1}=(E_{ij}A)^{-1}=A^{-1}E_{ij}$

（2）求 AB^{-1} $\therefore AB^{-1}=E_{ij}$

例， $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ 求 $\sum_{\mathrm{i}=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}A_{ij}$

解，$|A|=2 \quad A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$

$$[A \ \vdots \ E] \xrightarrow{\text{行变换}} [E \ \vdots \ A^{-1}] \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}A_{ij}=6$$

3.5 矩阵的运算对矩阵秩的影响

已有秩的公式：

1，$r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$

2, 当P,Q可逆时，

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$　但是，$R(APB)\ne R(AB)$

性质3 : $r(AB)\le \min(r(A),r(B))$

性质4，设$G=\begin{bmatrix} A_{m\times n} & 0 \\ 0 & B_{p\times q} \end{bmatrix}$, 则$R(G)=r(A)+r(B)$.

性质5，设$A,B\in P^{m\times n}$,则 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$

性质6,(*Sylvester*不等式)，设$A,B\in P^{n\times n}$

则：$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$

性质7,(*Frobenius*不等式)，设$A,B,C\in P^{n\times n}$,

则：$r(ABC)\ge r(AB)+r(BC)-r(B)$

性质3的证明：$r(AB) \le \min(r(A), r(B))$

先证 $r(A_{m\times s}B_{s\times n}) \le r(A)$

设$r(A_{m\times s})=r$， 则有可逆矩阵P, Q，使得 $A = P_{m\times m}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{s\times s}$

$$\therefore r(AB) = r\left[P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QB\right] = r\left[\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QB\right]，设 Q_{s\times s}B_{s\times n} = \begin{bmatrix} C_{r\times n} \\ H_{(s-r)\times n} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QB = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{r\times n} \\ H_{(s-r)\times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{r\times n} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore r(A_{m\times s}B_{s\times n}) = r(C_{r\times n}) \le r = r(A)$$

再证 $r(AB) \le r(B)$

$$\because r(A_{m\times s}B_{s\times n}) = r(C_{r\times n}) \le r\begin{bmatrix} C_{r\times n} \\ H_{(s-r)\times n} \end{bmatrix} = r(Q_{s\times s}B_{s\times n}) = r(B)$$

或$r(A_{m\times s}B_{s\times n})=r(A_{m\times s}B_{s\times n})^T = r(B^T A^T) \le r(B^T) = r(\mathrm{B})$

性质4的证明，$G=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$，设$R(A)=r, R(B)=s, \Rightarrow R(G)=r+s.$

解：（1）先考虑特殊情形，即，A, B 为标准形：

$$A=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时 $G=\begin{bmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\therefore R(G)=r+s$

（2）再考虑一般情形，

由已知，存在可逆矩阵P_i，Q_j：

使得：$P_1AQ_1=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2BQ_2=\begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

令：$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$

（专门用到）

则有：$PGQ=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} P_1AQ_1 & 0 \\ 0 & P_2BQ_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore R(G)=r+s$

性质5的证明，设$A,B\in P^{m\times n}$,则$R(A+B)\le R(A)+R(B)$

证明$\because r(A+B)=r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

$$\because \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2} \begin{bmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ E_m & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore r\begin{bmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = R(A)+R(B)$$

$$\therefore R(A+B)\le R(A)+R(B)$$

性质6的证明：$sylvester$不等式 $R(A_{s\times n}B_{n\times m}) \geq R(A)+R(B)-n$

证 明 （ 方 法 1 ） 设 $R(A)=r$,则 有 可 逆 矩 阵 P,Q 使 得 $PAQ=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Q $R(PAB)=R(AB)$

考察：$PAB=(PAQ)(Q^{-1}B)=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(Q^{-1}B)$, 设$Q^{-1}B=\begin{bmatrix} C_{rm} \\ F_{(n-r)m} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{rm} \\ F_{(n-r)m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{rm} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore R(PAB)=R(AB)=R(C_{rm})$

又, $R(B)=R(Q^{-1}B)=R\begin{bmatrix} C_{rm} \\ F_{(n-r)m} \end{bmatrix} \leq R\begin{bmatrix} C & 0 \\ F & F \end{bmatrix}$

$$=R(C_{rm})+R(F_{(n-r)m}) \leq R(AB)+n-r$$

$$=R(AB)+n-R(A)$$

$\therefore R(A_{sn}B_{nm}) \geq R(A)+R(B)-n$

性质6的证明：$sylvester$不等式 $R(A_{mn}B_{nm}) \geq R(A)+R(B)-n$

证明（方法2），$\because \begin{bmatrix} A_{m\times n} & AB_{n\times s} \\ E_n & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1B} \begin{bmatrix} A & 0 \\ E_n & -B \end{bmatrix} \xrightarrow{-c_2} \begin{bmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{bmatrix}$

又$\because \begin{bmatrix} A_{m\times n} & AB_{n\times s} \\ E_n & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-Ar_2} \begin{bmatrix} 0 & AB_{n\times s} \\ E_n & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore r(A)+r(B) \leq r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{bmatrix})$$

$$= r(\begin{bmatrix} 0 & AB \\ E_n & 0 \end{bmatrix}) = r(AB)+r(E_n) = r(AB)+n$$

性质6的证明sylvester不等式 $R(A_{sn}B_{nm})\geq R(A)+R(B)-n$

证明（方法3），$\because \begin{bmatrix} A_{m\times n} & AB_{n\times s} \\ E_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & B \\ 0 & -E_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{bmatrix}$

$$\therefore r(A)+r(B)\leq r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{bmatrix})$$

$$=r(\begin{bmatrix} A_{m\times n} & AB_{n\times s} \\ E_n & 0 \end{bmatrix})$$

$$=r(\begin{bmatrix} 0 & AB \\ E_n & 0 \end{bmatrix})$$

$$=r(AB)+r(E_n)=r(AB)+n$$

例，设$R(A_{m\times n})=m$,(称A行满秩)，则必存在$B_{n\times m}$,使得$A_{m\times n}\cdot B_{n\times m}=E_m$

证明，先证明特殊情形：

即设 $A_{m\times n}=\begin{bmatrix}E_m & O\end{bmatrix}$,

取$B_{n\times m}=\begin{bmatrix}E_m\\ O\end{bmatrix}$,则有：$A_{m\times n}B_{n\times m}=\begin{bmatrix}E_m & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_m\\ O\end{bmatrix}=E_m{}^2=E_m$

再证一般情形：

即设$A=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_m & O\end{bmatrix}Q_{n\times n}$，其中$P,Q$为可逆矩阵

$$取\ B_{n\times m}=Q^{-1}{}_{n\times n}\begin{bmatrix}E_m\\ O\end{bmatrix}_{n\times m}P^{-1}{}_{m\times m}$$

$$则有\quad AB=P\begin{bmatrix}E_m & O\end{bmatrix}Q\cdot Q^{-1}\begin{bmatrix}E_m\\ O\end{bmatrix}P^{-1}=E_m$$

(本题的证明再一次演绎了从特殊到一般)

例，设$A^2 = A$(称A为幂等矩阵),且R($A_{n\times n}$)=r, 证明：$trA = r$。

证明：　　设:$A=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

$$Q \ A^2 = A \Rightarrow P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(QP)\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分 $QP = \begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ G & H \end{bmatrix}$,

代入得到$\Rightarrow C_{r\times r} = E_r$

$$\therefore trA = tr(P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q) = tr(\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP)$$

$$= tr(\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ G & H \end{bmatrix}) = tr\begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = trC_{r\times r} = trE_r = r$$

例，设$A_{n\times m}, B_{m\times n,}$证明(1)：$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \left|E_n - AB\right| = \left|E_m - BA\right|$

(2)：当$\lambda \neq 0$时 $\left|\lambda E_n - AB\right| = \lambda^{n-m}\left|\lambda E_m - BA\right|$

证明：(1)$\because \begin{bmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - AR_1} \begin{bmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n - AB \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n - AB \end{bmatrix},$$

$$\therefore \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \left|E_n - AB\right|$$

(2) 用$\dfrac{1}{\lambda}A$代替（1）中的A即可

判断下列结论的对错:

1, $|A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

2, $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$

3, $\left|\dfrac{A}{|A|}\right| = 1$　　4, $|A + B| = |A| + |B|$

5, $|AB| = |BA| = |A||B|$

6, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D| - |B||C|$

7, $\begin{vmatrix} 0 & A_{s\times s} \\ B_{t\times t} & 0 \end{vmatrix} = -|A||B|$

8, $AB = BA$　　9, $R(AB) = R(B)$

10, $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

11, $R(ACB) = R(AB), (|C| \neq 0)$

12, $tr(AB) = tr(BA)$

13, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$

14, $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}CA^{-1} \end{bmatrix}$

15, 两个可逆矩阵的和一定是可逆矩阵,
两个对称矩阵的和一定是对称矩阵,
两个可逆矩阵的乘积一定是可逆矩阵,

16，$A^2 = E \Rightarrow A = E$ 或 $A = -E$

17, $A_{m\times n}X = 0$ 当$m < n$时，必有非零解

18，设$A_{m\times n}, b_{n\times 1}, B = \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$,
若$R(A) = R(B), AX = b$ 必有解

19，$E + AB$ 可逆 $\Rightarrow E + BA$ 可逆

20, $A \neq 0 \in R^{n\times n}, A^* = A^T \Rightarrow A$可逆

$$6,\ \begin{vmatrix} A_n & B \\ C & D_m \end{vmatrix} = \begin{cases} |A||D-CA^{-1}B| & 当A开逆 \\ |D||A-BD^{-1}C| & 当D开逆 \end{cases}$$

$$\because \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1(A^{-1}B)} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \right\}$$

特别，当A开逆，且$AC=CA$时，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B| = |AD-ACA^{-1}B| = |AD-CB|$$

$$11, R(ACB)=R(AB),(|C|\neq 0)$$

$$反例:\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

19，$E+AB$ 可逆 $\Rightarrow E+BA$ 可逆

证明：反设 $E+BA$不可逆$\Rightarrow (E+BA)X=0$ 有非零解X_1

$$A(E+BA)X_1=0\Rightarrow (A+ABA)X_1=(E+AB)AX_1=0$$

$\because E+AB$ 可逆 $\therefore (E+AB)X=0$ 只有零解,$\therefore AX_1=0$

$0=(E+BA)X_1=X_1+B(AX_1)=X_1$ 矛盾

20, $A\neq 0\in R^{n\times n}, A^*=A^T\Rightarrow A$可逆

证明：有已知 $a_{ij}=A_{ij}$

$\because A\neq 0,$不妨设 $a_{11}\neq 0$

$$\left|A\right|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}{}^2+a_{12}{}^2+\cdots+a_{1n}{}^2\neq 0$$

2016－2017春夏1

1，设$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 且$A^{-1}+E$可逆，又设：$A^{-1}XA+XA+2E=0$. 求X

2，已知A=$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$的逆矩阵为$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求$C = \begin{bmatrix} 2a & -b & 3c \\ 2d & -e & 3f \\ 2g & -h & 3i \end{bmatrix}$的逆矩阵

$A^{-1}XA+XA+2E=0. \Rightarrow (A^{-1}+E)XA=-2E,$

$|A|^2 = |A^*| = 1, AA^* = |A|E = \pm E, \therefore A^{-1} = \pm A^*$, Q $A^{-1}+E$ 可逆, $\therefore |A|=1$

$(A^{-1}+E)X = -2A^{-1}, X = -2(A+E)^{-1}$

Q $A = (A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & & \\ 2 & 4 & \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

方法1：$C = A \cdot diag(2,-1,3), C^{-1} = diag(2,-1,3)^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

方法2：$C = A \cdot E(1(2)) \cdot E(2(-1)) \cdot E(3(3))$,

$C^{-1} = E(3(3))^{-1} \cdot E(2(-1))^{-1} \cdot E(1(2))^{-1} \cdot A^{-1} = E(3(\frac{1}{3})) \cdot E(2(-1)) \cdot E(1(\frac{1}{2})) \cdot A^{-1}$

17－18秋　课堂练习(周5)

解题要求：过程完整，推理严密

答题纸上：姓名，学号，序号

1, 设$A=\left(a_{ij}\right)_{4\times 4}, a_{11}\neq 0, A_{ij}=-a_{ij}$, 求$|A|$

2, 设$A^2=B^2=E$, 且$|A|+|B|=0$, 证明：$A+B$是不可逆矩阵

1，显然A^*=-A^T, $\therefore A\cdot A^*=-A\cdot A^T=|A|E\Rightarrow(-1)^4|A|^2=|A|^4\Rightarrow|A|=0, or, \pm 1$

又 Q $|A|=\sum_{j=1}^{4}a_{1j}\cdot A_{1j}=-\sum_{j=1}^{4}{a_{1j}}^2<0, \therefore |A|=-1$

2, 有已知，不妨设: $|A|=1, |B|=-1$, 考察$|A(A+B)B|=\left|A^2B+AB^2\right|=|A+B|$

$\Rightarrow|A|\cdot|A+B|\cdot|B|=-|A+B|\Rightarrow|A+B|=0$

17-18秋冬课堂练习（周3）

解题要求：过程完整，推理严密

答题纸上：姓名，学号，序号

1, 设n阶方阵A满足$AA^T=E$, 且$|A|<0$，求$|A+E|$

2，证明，任意一个方阵都可以表示成一个可逆矩阵与一个幂等矩阵的乘积

（如果$A^2=A$, 则称A为幂等矩阵）

1. $\because |A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||A+E|=-|A+E| \therefore |A+E|=0$

2, 设R(A)=r, 则有可逆矩阵P, Q, 使得：

$$A=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}(PQ)$$

记$B=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}, C=PQ,$

则$B^2=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}=B,$

C显然可逆，

课堂练习：（关键步骤不完整，不得分）

1.计算：$\begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ 2 & 1 & -1 & \\ & 2 & 1 & -1 \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2，已知$p=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, q=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 求$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

3，已知$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & c & 7 & d \\ a & 4 & b & 2 \end{vmatrix}=k$, 求$3A_{21}+5A_{22}+7A_{23}+9A_{24}$

4,求线性方程组的解：$\begin{cases} x_1\text{-}2x_2-x_4=1 \\ x_1\text{-}x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \end{cases}$

5,设a, b, c, d互不相同，证明方程组$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=a^3 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=b^3 \\ x_1+cx_2+c^2x_3=c^3 \\ x_1+dx_2+d^2x_3=d^3 \end{cases}$ 无解

1.计算：$\begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ 2 & 1 & -1 & \\ & 2 & 1 & -1 \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_2+c_1}{==} \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ 2 & 3 & -1 & \\ & 2 & 1 & -1 \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_3+\frac{1}{3}c_2}{==} \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ 2 & 3 & 0 & \\ & 2 & \frac{5}{3} & -1 \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_4+\frac{3}{5}c_3}{==} \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ 2 & 3 & 0 & \\ & 2 & \frac{5}{3} & 0 \\ & & 2 & \frac{11}{5} \end{vmatrix} = 11$

2，已知$p=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, q=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，求$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 0+1 & 0+1 & 1+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = p+q$

3，已知$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & c & 7 & d \\ a & 4 & b & 2 \end{vmatrix} = k$，求$3A_{21}+5A_{22}+7A_{23}+9A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+2 & 1+4 & 1+6 & 1+8 \\ 9 & c & 7 & d \\ a & 4 & b & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & c & 7 & d \\ a & 4 & b & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & c & 7 & d \\ a & 4 & b & 2 \end{vmatrix} = 2k$

4，求线性方程组的解：$\begin{cases} x_1-2x_2-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \end{cases}$ $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2^*]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ 选x_3, x_4为自由变量，得到通解$\begin{cases} x_1 = -1-2t_1-t_2 \\ x_1 = -1-t_1-t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$

5，设a, b, c, d互不相同，证明方程组$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=a^3 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=b^3 \\ x_1+cx_2+c^2x_3=c^3 \\ x_1+dx_2+d^2x_3=d^3 \end{cases}$无解 $\because \bar{A}_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & b^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix} \therefore |\bar{A}| = D(a,b,c,d) \neq 0, \therefore R(\bar{A}_{4\times4}) = 4$

又$\because A_{3\times4} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$ $\therefore R(A_{3\times4}) \leq 3, \therefore R(\bar{A}_{4\times4}) \neq R(A_{3\times4})$ $\therefore$方程组无解

课堂作业：（16-17秋冬）

写出n阶方阵A可逆的3个充要条件，并证明

A可逆$\Leftrightarrow$

(1) $|A| \neq 0$

(2) A^* 可逆

(3) $AX = 0$ 只有零解

(4) A 可以表示为一系列初等矩阵的乘积

(5) A 与E 等价

2016－2017秋冬期中考试（2016.11.14）

1,(10) 计算D= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & x^2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & x^3 \end{vmatrix} = 2x(x-1)(x-2)$

2,(15) 解非齐次线性方程

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

$P59$例2.3.2

3,(15) (1),叙述秩的定义 P51定义2.2.2

(2)求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & \lambda+4 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩 P61例2.3.4

4,(15) 求矩阵方程 $AXB = C$ 的解，其中：

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$P106$例3.4.4

5,(15) 已知: $A^*BA = 2BA - 12E$, 其中：$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求$B$ $P88$例3.2.2

6,(15) 设$A_{r\times r}, B_{s\times s}$ 可逆，证明: $G = \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}$可逆, 并求$G^{-1}$ $P96$例3.3.5

7,(15) (1),证明对A进行一次初等行变换等价于用相应的初等矩阵左乘 A $P101$定理3.4.1

(2),证明A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ $P86$定理3.2.1

2016---2017春夏期中考试

1，(10) D=$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2y^2$

2,(15) D=$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$, 求$A_{11}+2A_{12}+\cdots+nA_{1n}=(2-n)n!$

3,$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\lambda x_3=1 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=\lambda \end{cases}$ λ取什么值时，无解, 有解，有解时求解

$\bar{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & \vdots & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & (2+\lambda)(1-\lambda) \end{bmatrix}$

(1), $\lambda \neq -2$, 且$\lambda \neq 1$, $\Rightarrow$ 无解

(2), $\lambda=1$, $\Rightarrow$ 有解，$x_1=1-s-t, x_2=s, x_3=t$

(3), $\lambda=-2$, $\Rightarrow$ 有解 $x_1=-1$，$x_2=-1-k, x_3=k$

4,(15),叙述秩的定义；

设 $A_{n\times n}=\begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求$R(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当}x_1,x_2,\cdots,x_n\text{全不为零} \\ 1, & \text{当}x_1,x_2,\cdots,x_n\text{只有一个为零} \\ 0, & \text{当}x_1,x_2,\cdots,x_n\text{至少有两个为零} \end{cases}$

5，(15)求矩阵方程：

$X\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

6,(10)（利用第三种初等变换）把矩阵$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$表示成$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$型的乘积（$a \neq 0$）

7，(10)，设$R(A_{n\times n})=r$, $A^2=A$, 证明：$trA=r$

8,(10), 设$A, B \in P^{n\times n}$, $A+2B=AB$, 证明: $A-2E$可逆

6,(10)（利用第三种初等变换）把矩阵$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$表示成$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$型的乘积（a ≠ 0）

$$\because \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+ar_2} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1-ac_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{a}-1 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a}-1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1-(\frac{1}{a}-1)c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1+\frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

7, (10), 设R($A_{n\times n}$)=r, $A^2=A$, 证明：$trA=r$

7, 证明　　设: $A=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

$$\because A^2=A \Rightarrow P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(QP)\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分 $QP=\begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ G & H \end{bmatrix} \Rightarrow C_{r\times r}=E_r$

$$trA=tr(P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q)=tr(\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP)=tr(\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ G & H \end{bmatrix})$$

$$=tr\begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=trC_{r\times r}=trE_r=r$$

2017-2018春夏期中考试（2018-5-2）

1(10) 计算D= $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 12x - 8$

2(15) 设 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$，求 $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = n\prod_{i=1}^{n} x_i$

其中：A_i为x_i的代数余主式

3(15) 设 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

λ取什么值时无解？

唯一解？无穷多解？

有解时求其解。

λ=-2时，无解；

$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq$-2时，唯一解：$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, x_1 = \frac{1}{\lambda+2}, x_1 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$,

$\lambda = 1$,无穷多解：$x_1 = 1 - s - t, x_2 = s, x_3 = t$

4(15) A为n阶矩阵 $(n \geq 2)$，A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 求 $r((A^*)^*)$

$n = 2$时 $\begin{cases} x \neq 0, r((A^*)^*) = 2 \\ x = 0, r((A^*)^*) = 1 \end{cases}$

$n > 2$时 $\begin{cases} x \neq 0, r((A^*)^*) = n \\ x = 0, r((A^*)^*) = 0 \quad \because r(A^*)^* = 1 \end{cases}$

5(15) 设A是对角线上元素全为零的4阶实对称可逆矩阵

B= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2018 \end{bmatrix}$

设A= $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{13} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{bmatrix}$, $E + AB = \begin{bmatrix} 1 & & a_{13} & 2018a_{14} \\ & 1 & a_{23} & 2018a_{24} \\ & & 1 & 2018a_{34} \\ & & a_{34} & 1 \end{bmatrix}$, $|E + AB| = 1 - 2018(a_{34})^2 \neq 0$

(1) A中元素满足什么条件时，$E + AB$可逆。

(2) 当$E + AB$可逆时，证明（$E + AB$）^{-1}A是对称矩阵。

$((E+AB)^{-1}A)^T = A^T((E+AB)^{-1})^T = A((E+AB)^T)^{-1} = A(E+BA)^{-1}$

$= \left[(E+BA)A^{-1}\right]^{-1} = \left[A^{-1} + B\right]^{-1} = \left[A^{-1}(E+AB)\right]^{-1} = (E+AB)^{-1}A$

6(10)设$A_{2\times 2}^{2018}=0$.证明：$A^2=0$

证明：$\because |A|=0 \therefore \begin{cases} R(\mathrm{A})=0 \Rightarrow A=0 \\ R(\mathrm{A})=1 \Rightarrow A^2=\lambda A \Rightarrow A^{2018}=\lambda^{2017}A=0 \Rightarrow \lambda=0 \end{cases}$

7(10), 设A, B, C, D为n阶方阵，A可逆，M=$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

证明，$R(\mathrm{M})=\mathrm{n} \Leftrightarrow \mathrm{D}=\mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B}$

证明：$\because \begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-\mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B} \end{bmatrix}$

$\therefore R(\mathrm{M})=R\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-\mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B} \end{bmatrix}=R(\mathrm{A})+\mathrm{R}(D-\mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B})=\mathrm{n}+\mathrm{R}(D-\mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B})$

8(10)设n阶方阵A满足$A^3=2E, B=A^2-2A+E$,证明B可逆，并求B^{-1}

证明：$\because A^3=2E \Rightarrow A^3-E=(\mathrm{A}-\mathrm{E})(A^2+A+E)=\mathrm{E} \Rightarrow (\mathrm{A}-\mathrm{E})^{-1}=A^2+A+E$

$B=A^2-2A+E=(\mathrm{A}-\mathrm{E})^2 \Rightarrow B$开逆，

$B^{-1}=\left[(\mathrm{A}-\mathrm{E})^2\right]^{-1}=\left[(\mathrm{A}-\mathrm{E})^{-1}\right]^2=\left[A^2+A+E\right]^2$

$=3A^2+4A+5E$

2017--2018秋冬期中考试2017.11.18

1.(15)，计算n阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}, x, y, z\text{为任意实常数}$$

2，（20）设k为实常数，当k为何值时，

下面线性方程组无解？唯一解？

无穷多解？有解时，求解。

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k-3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$$

3,(20)求矩阵方程

$$x\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

4，(15)，设$R(A_{n\times n})=r$，证明存在$B_{n\times n}$，

且$R(B)=n-r$，使得$AB=0$

5,(15).$R(A_{n\times n})=1$，$A_{n\times n}\in P^{n\times n}$，证明：

1，存在两组不全为零的实数

$a_1,\cdots a_n; b_1,\cdots,b_n$，使得：

$$A=(a_1,\cdots a_n)^T(b_1,\cdots,b_n)$$

2，存在实数k，使得$A^2=kA$

6，(8)设$A_{m\times n}X_{n\times 1}=d_{m\times 1}$有解，

$B_{m\times s}X_{s\times 1}=c_{m\times 1}$无解，

令$G=(ABdc)_{m\times(n+s+2)}$

证明，$R(G)\le R(A)+R(B)+1$

7,(10)设$A,B,C,D\in R^{n\times n}$，证明：当$AC=CA$时

有：$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |AB-CD|$

$$1,(15)\quad \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

当$z=y$时，$D_n=\left[x+\left(n-1\right)y\right](x-y)^{n-1}$

当$z\neq y$时,

$$D_n \overset{\text{拆第一列}}{=\!=} \begin{vmatrix} z & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-z & y & y & \cdots & y \\ 0 & x & y & \cdots & y \\ 0 & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= z(x-y)^{n-1}+(x-z)D_{n-1} \qquad (1)$$

$$D_n \overset{\text{拆第一行}}{=\!=} \begin{vmatrix} y & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= y(x-z)^{n-1}+(x-y)D_{n-1} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$$

$$2,(20)\quad \begin{cases} kx_1+x_2+x_3=k-3 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+kx_3=-2 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k-1)^2(k-2)$$

$\therefore$当$D\neq 0$时，即当$k\neq 1$且$k\neq 2$时

有唯一解：$x_1=\dfrac{k-1}{k+2}, x_2=x_3=\dfrac{-3}{k+2}$

当$k=2$时，$R(A)=2\neq R(\bar{A})=3\Rightarrow$方程组无解

当$k=1$时，$R(A)=R(\bar{A})=\!=\!\Rightarrow$方程组无穷多组解

$$\begin{cases} x_1=-2-t_1-t_2 \\ x_2= \quad t_1 \quad ,t_1,t_2\in P \\ x_3= \quad\quad t_2 \end{cases}$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \vdots & k-3 \\ 1 & k & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & k & \vdots & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & -2 \\ 1 & k & 1 & \vdots & -2 \\ k & 1 & 1 & \vdots & k-3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & \vdots & 3(k-1) \end{bmatrix}$$

3,(20)求矩阵方程

$$X\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-6\end{bmatrix}$$，即XA=B

$\because |A|=3\neq 0,\therefore A$可逆，$\Rightarrow$ $X=BA^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&-2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}A\\ \cdots\\ B\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{bmatrix}E\\ \cdots\\ BA^{-1}\end{bmatrix}$$

4,(15),设$R(A_{n\times n})=r$,证明存在$B_{n\times n}$,

且$R(B)=n-r$,使得$AB=0$

$A=P\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$，取$B=Q^{-1}\begin{bmatrix}0&0\\0&E_{n-r}\end{bmatrix}$

则，$R(B)=n-r$，且 $AB=0$

5,(15).$R(A_{n\times n})=1$, $A_{n\times n}\in P^{n\times n}$,证明：

1，存在两组不全为零的实数 $a_1,\cdots a_n;b_1,\cdots,b_n$,使得：$A=(a_1,\cdots a_n)^T(b_1,\cdots,b_n)$

2,存在实数k,使得$A^2=kA$

$$A=P\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\\vdots\\p_{n1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{11}&q_{12}&\cdots&q_{1n}\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\\vdots\\p_{n1}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}q_{11}&q_{12}&\cdots&q_{1n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\\vdots\\p_{n1}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}q_{11}&q_{12}&\cdots&q_{1n}\end{bmatrix}$$

$$=(q_{11}p_{11}+\cdots+q_{1n}p_{n1})A$$

6, (8) 设$A_{m\times n}X_{n\times 1}=d_{m\times 1}$有解，$B_{m\times s}X_{s\times 1}=c_{m\times 1}$无解，

令G=(ABdc)$_{m\times(n+s+2)}$, 证明：$R(G)\le R(A)+R(B)+1$

令 $\bar{A}=[A\vdots d],\bar{B}=[B\vdots c]$ 则有：$R(\bar{A})=R(A),R(\bar{B})=R(B)+1$

$$R(G)=R(AdBc)=R(\bar{A}\bar{B})\le R(\bar{A})+R(\bar{B})=R(A)+R(B)+1$$

(其中：$R(A)+R(B)=R\begin{bmatrix}A & \\ & B\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}A & AB\\ & B\end{bmatrix}\ge R(AB)$)

7, 设A, B, C, D $\in R^{n\times n}$, 证明：当$AC=CA$时

有：$\begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}=|AB-CD|$ $\quad\because\begin{bmatrix}A & D\\ C & B\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2-c_1(A^{-1}D)}\begin{bmatrix}A & 0\\ C & B-CA^{-1}D\end{bmatrix}$

证明，当A可逆时，$\because\begin{bmatrix}A & D\\ C & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & -A^{-1}D\\ 0 & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ C & B-CA^{-1}D\end{bmatrix}$

$$\therefore\begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}=|A||B-CA^{-1}D|=|A(B-CA^{-1}D)|=|AB-ACA^{-1}D|=|AB-CD|$$

当A不可逆时，即$|A|=0$, 令：$f(x)=|xE+A|=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

则总存在一个实数Z, 当$x\ge Z$时，$f(x)\ne 0$，此时$xE+A$可逆

$\because AC=CA\therefore(xE+A)C=C(xE+A)$ $\quad\therefore\begin{vmatrix}xE+A & D\\ C & B\end{vmatrix}=|(xE+A)B-CD|$

等式俩边为关于x的多项式，常数项相等(即当x=0)，

$$\therefore\begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}=|AB-CD|$$

2018--2019秋冬(2018, 11, 13)

$$1(15)D=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}=\begin{cases} a_1+x & n=1 \\ x^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n+x) & n>1 \end{cases}$$

2(15)设σ=($\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2\cdots\mathrm{i}_n$)是一个n阶排列，A=$\left[a_{rj}\right]$是一个$n$解方阵，并且A中元素满足对于每个固定r，当$j=i_r$时，$a_{rj}$=1，否则$a_{rj}$=0，求$|A|=(-1)^{\tau(\sigma)}$

$$3(15)\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=1 \end{cases}$$

问，当λ取什么值时，方程组无解？唯一解？无穷多解？有解时求解。

当$\lambda\neq 1,-2$时, 唯一解$:x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{\lambda+2}$,

当λ=1,时，无穷多解$x_1=1-s-t,x_2=t,x_3=s$: 当 λ=2时，无解。

4(15), 设A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,求矩阵方程: $AX=A+2X$ $\quad X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5(15)设A为4阶反对称矩阵，B=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 证明，$E+AB$可逆

设A=$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$,$|E+AB|=1+2f^2\neq 0$

6(10), 设A为n阶实对称矩阵(n>1), $|A|=0$, 证明，$A_{ii}A_{jj}=(A_{ij})^2,(i,j=1,2,\cdots,n)$

A^*为对称矩阵，R(A)=n-1, or, R(A)<n-1,

$\therefore$ R(A^*)=1, or, R(A^*) = 0, A^*的任意二阶子式等于0

7(7), $A,B\in P^{n\times n}, M=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, 证明：R(M) ≥ R(A+B) +R(A-B)

$$\because \begin{bmatrix} E & E \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ A & A-B \end{bmatrix}$$

$$\therefore R(M)=R(\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ A & A-B \end{bmatrix})\geq \text{R(A+B)} + \text{R(A-B)}$$

8(8)设$A,B\in P^{n\times n}$,满足$B=E+AB$,证明:$AB=BA$

$$\because B=E+AB\Rightarrow (E-A)B=E\Leftrightarrow B(E-A)=E\Rightarrow AB=BA$$

课堂练习

解题要求：过程完整，推理严密

答题纸上：姓名，学号，序号

1，已知$p=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, q=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,求$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

2，已知A=$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$的逆矩阵为$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,求$C=\begin{bmatrix} 2a & -b & 3c \\ 2d & -e & 3f \\ 2g & -h & 3i \end{bmatrix}$的逆矩阵

3，设$A^{*}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,且$A^{-1}+E$可逆，又设：$A^{-1}XA+XA+2E=0$.求X

4, 设n阶方阵A满足$AA^{T}=E$,且$|A|<0$，求$|A+E|$

5，证明，任意一个方阵都可以表示成一个可逆矩阵与一个幂等矩阵的乘积

（如果$A^{2}=A$,则称A为幂等矩阵）

课堂练习（周3下）

解题要求：过程完整，推理严密

答题纸上：姓名，学号，序号

1，已知$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & c & 7 & d \\ a & 4 & b & 2 \end{vmatrix} = k$，求$3A_{21}+5A_{22}+7A_{23}+9A_{24}$

2，解方程$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=k-3 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+kx_3=-2 \end{cases}$

3，设$A^*=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，且$A^{-1}+E$可逆，又设：$A^{-1}XA+XA+2E=0$.求X

4，设A=$\left(a_{ij}\right)_{4\times 4}$，$a_{11}\neq 0$，$A_{ij}=-a_{ij}$，求$|A|$

5，设$A^2=B^2=E$，且$|A|+|B|=0$，证明：$A+B$是不可逆矩阵

2016－2017春夏1

1，设$A^{*}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，且$A^{-1}+E$可逆，又设：$A^{-1}XA+XA+2E=0$. 求X

2，已知A=$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$的逆矩阵为$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&0&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$，求$C=\begin{bmatrix}2a&-b&3c\\2d&-e&3f\\2g&-h&3i\end{bmatrix}$的逆矩阵

$(A^{-1}+E)X=-2A^{-1}, X=-2(A+E)^{-1}$

$|A|^{2}=|A^{*}|=1, AA^{*}=|A|E=\pm E, \therefore A^{-1}=\pm A^{*}, \because A^{-1}+E$ 可逆$, \therefore |A|=1$

$$\because A=(A^{*})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow X=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&&\\2&4&\\1&2&4\end{bmatrix}$$

$$C=A\cdot diag(2,-1,3), C^{-1}=diag(2,-1,3)^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-3&0&1\\\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$C=A\cdot E(1(2))\cdot E(2(-1))\cdot E(3(3))$，

$$C^{-1}=E(3(3))^{-1}\cdot E(2(-1))^{-1}\cdot E(1(2))^{-1}\cdot A^{-1}=E(3(\frac{1}{3}))\cdot E(2(-1))\cdot E(1(\frac{1}{2}))\cdot A^{-1}$$

$17-18$秋　课堂练习（周5）

解题要求：过程完整，推理严密

答题纸上：姓名，学号，序号

1, 设A=$\left(a_{ij}\right)_{4\times4}, a_{11}\neq 0, A_{ij}=-a_{ij}$, 求$|A|$

2, 设$A^2=B^2=E$, 且$|A|+|B|=0$, 证明：$A+B$是不可逆矩阵

1，显然A^*=-A^T, $\therefore A\cdot A^*=-A\cdot A^T=|A|E\Rightarrow(-1)^4|A|^2=|A|^4\Rightarrow|A|=0, or, \pm1$

又 $\because |A|=\sum_{j=1}^{4}a_{1j}\cdot A_{1j}=-\sum_{j=1}^{4}a_{1j}{}^2<0, \therefore |A|=-1$

2,有已知，不妨设:$|A|=1, |B|=-1$, 考察$|A(A+B)B|=\left|A^2B+AB^2\right|=|A+B|$

$\Rightarrow |A|\cdot|A+B|\cdot|B|=|A+B|\Rightarrow|A+B|=0$

课堂练习：（关键步骤不完整，不得分）

1.计算：$\begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ 2 & 1 & -1 & \\ & 2 & 1 & -1 \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2，已知$p=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, q=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 求$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

3，已知$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & c & 7 & d \\ a & 4 & b & 2 \end{vmatrix}=k$, 求$3A_{21}+5A_{22}+7A_{23}+9A_{24}$

4,求线性方程组的解：$\begin{cases} x_1-2x_2-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3+x_4=-1 \end{cases}$

5,设a, b, c, d互不相同，证明方程组$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=a^3 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=b^3 \\ x_1+cx_2+c^2x_3=c^3 \\ x_1+dx_2+d^2x_3=d^3 \end{cases}$ 无解

17-18秋冬课堂练习（周3）

解题要求：过程完整，推理严密

答题纸上：姓名，学号，序号

1, 设n阶方阵A满足$AA^T=E$, 且$|A|<0$，求$|A+E|$

2，证明，任意一个方阵都可以表示成一个可逆矩阵与一个幂等矩阵的乘积

（如果$A^2=A$, 则称A为幂等矩阵）

1. $\because |A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||A+E|=-|A+E| \therefore |A+E|=0$

2, 设R(A)=r, 则有可逆矩阵P, Q, 使得：

$$A=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}(PQ)$$

记$B=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}, C=PQ,$

则$B^2=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}=B,$

C显然可逆，

例 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 对任意的整数n有 $A^n=x_nA+y_nB$

求 x_n，y_n （11, 12春夏）

解 $A=E+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=E+B$ 对 B 有，$B^{\mathrm{m}}=3^{m-1}B$

$$A^n=(B+E)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^{n-m}B^mE^{n-m}=E+B\sum_{m=1}^{n}3^{m-1}C_n^{n-m}$$

$$=E+\frac{1}{3}(3^{n-1}+n3^{n-2}+\frac{n(n-1)}{2}3^{n-3}+\cdots C_n^{n-1}+1-1)B$$

$$=\frac{1}{3}((3+1)^n-1)B+E=\frac{1}{3}((3+1)^n-1)(A-E)+E$$

$$=\frac{4^n-1}{3}A+\frac{4-4^n}{3}E$$

例，设 C 可逆 $R(ACB)$ 是否等于 $R(AB)$?

不一定 例如 $A=\begin{bmatrix}1 & \\ & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & \\ & 1\end{bmatrix}$ $AB=0$

$C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}$ $ACB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq 0$

例 A,B 为 n 阶方阵，且 $R(A)+R(B)\leq n$

证明存在可逆矩阵 M，使得 $AMB=O$

证明 设 $A=P_1\begin{bmatrix}E_r & \\ & 0\end{bmatrix}Q_1$, $B=P_2\begin{bmatrix}0 & \\ & E_s\end{bmatrix}Q_2$ 取 $M=Q_1^{-1}P_2^{-1}$

则当 $r+s\leq n$ 时 $\begin{bmatrix}E_r & \\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \\ & E_s\end{bmatrix}=O$

$\therefore AMB=O$

证明 $(AB)^* = B^* A^*$

$\because (AB)(AB)^* = |AB|E \Rightarrow (AB)^{-1} = \dfrac{(AB)^*}{|A||B|}$

又 $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \dfrac{B^*}{|B|} \cdot \dfrac{A^*}{|A|} = \dfrac{B^* \cdot A^*}{|B||A|} \therefore (AB)^* = B^* A^*$

证明,$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1} A$

考虑 $\because (a^{-1} + b^{-1})^{-1} = \dfrac{ab}{a+b} = a(a+b)^{-1} b \quad \therefore \left\{a(a+b)^{-1} b\right\} \cdot (a^{-1} + b^{-1}) = 1$

考察 :$\left\{A(A+B)^{-1} B\right\} \cdot (A^{-1} + B^{-1}) = A(A+B)^{-1} (BA^{-1} + E)$

$$= A(A+B)^{-1}(B+A)A^{-1} = E$$

证明 A 可逆 $\Leftrightarrow A^*$ 可逆

$(\Rightarrow)$ $\because$ 当A 可逆时 $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0 \Rightarrow A^*$ 可逆

$(\Leftarrow)$ 反设A 不可逆，即$|A| = 0$

$\because AA^* = |A|E = 0$ 得到 $A = 0 \therefore A^* = 0$ 矛盾

证明 设 $R(A_{mn})=r$ 证明 存在 $B_{mn}, C_{ns}, R(B)=R(C)=r$ 使得 $A=BC$。

证明 由已知存在可逆矩阵 P_{mm}, Q_{nn} 使得

$$A = P\begin{bmatrix} E_r & \\ & 0 \end{bmatrix}_{mn} Q = (P\begin{bmatrix} E_r & \\ & 0 \end{bmatrix}_{mn}) \cdot (\begin{bmatrix} E_r & \\ & 0 \end{bmatrix}_{nn} Q) = B_{mn} C_{ns}$$

且 $R(\mathrm{B}) = R(P\begin{bmatrix} E_r & \\ & 0 \end{bmatrix}_{mn}) = r \quad R(C) = R(\begin{bmatrix} E_r & \\ & 0 \end{bmatrix}_{nn} Q) = r$

证明 设$R(A_{mn}) = n$ (列满秩) $\Rightarrow R(A_{mn}B_{ns}) = R(B)$

方法1 $R(A_{mn}B_{ns})=R(P_{mm}\begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix}Q_{nn}B_{ns}) = R(P_{mm}\begin{bmatrix} E_nQ_{nn}B_{ns} \\ 0 \end{bmatrix}) = R(E_nQ_{nn}B_{ns}) = R(\mathrm{B})$

方法2 $\because R(A_{mn}) = n$ (列满秩) $\therefore \exists C_{nm}$ 使得$C_{nm}A_{mn}=E_n$

一方面 $R(AB) \le R(B)$

另一方面 $B_{ns} = E_nB_{ns} = C_{nm}A_{mn}B_{ns} \therefore R(B) \le R(AB) \quad \therefore R(AB) = R(B)$

证明设$A, B, C \in P^{nn}, R(B) = R(AB) \Rightarrow R(BC) = R(ABC)$

证明 一方面$R(ABC) \le R(BC)$ $\qquad P115(2)$

另一方面$R(ABC) \ge R(AB) + R(BC) - R(B) = R(BC)$

$\therefore R(BC) = R(ABC)$