线性代数

汤树元
sytang@zju.edu.cn

推荐参考书：（任意选一本）

《线性代数复习指导》——机械工业出版社 马杰

《线性代数辅导》——清华大学出版社 胡金德

《高等代数习题集》——山东科学出版社（上下册）杨子胥

总评成绩=作业+MOOC+二次阶段考试+期中+期末考试

100 = 10 + 10 + 20 +20 + 40

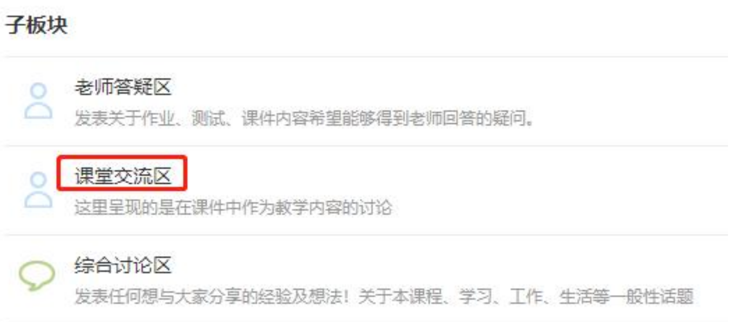
特别提醒：

1，作业每次按要求交，不能期末考试前一次性补交；

2，*MOOC*：线性代数---浙江大学，黄正达

MOOC (7次单元测试+8次讨论+1次期末)考试有截至时间；

3，二次阶段性考试，在习题课上进行；



只有在课堂讨论区讨论才有讨论分数

至少参加八次讨论，才有讨论满分8分。

建议MOOC注册名：ZJU+学号+姓名（即ZJU31xxxxxxx张三）

（请仔细研究MOOC成绩构成及完成时间)

答疑：

周6（节日除外），丹青学院（8：30—10：30; 13:30---15:30）

- 线性代数的特点：
- 1“多”：定义，定理多；符号，运算法则多;概念，性质多；
- 2“密”:内容纵横交错，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透;
- 3“抽象”: 内容抽象，需要较强的抽象思维和严谨的推理能力。

学好线性代数的24个字：

理解基本概念

掌握解题方法

突破典型例题

注重归纳总结

教学安排：

共16周，$16\times3=48$学时

第1章 线性方程组	4学时
第2章 行列式	9学时
第3章 矩阵	9学时
第7，8章 线性空间	13学时
第5章 相似对角化	5学时
第6章 二次型	5学时
	45学时

预备知识：数域

- 定义：　设P是一个非空的集合，如果P满足两个条件：
- 　　　　1. P中至少含有两个不同的复数；
- 　　　　2. P中数对四则运算是封闭的。
- 　　则称P是一个数域

关于封闭，以加法为例：

如果，$\forall a, b \in P$，必有$a + b \in P$，则称P对加法封闭；

反之，如果$\exists a_0, b_0 \in P$，使得$a_0 + b_0 \notin P$，则称P对加法不封闭。

- 可以证明，非空集合C,R,Q,Z中C,R,Q是数域，而Z不是数域

例如，对于集合： $Q(\sqrt{2})=\left\{a+b\sqrt{2} : a,b\in Q\right\}$

可以证明 $Q(\sqrt{2})$ 是一个数域

只考虑$Q(\sqrt{2})$对加法封闭，

对$\forall\alpha,\beta\in Q(\sqrt{2})$，不妨设$\alpha=a+b\sqrt{2}$，$\beta=c+d\sqrt{2}$

其中$a,b,c,d\in Q$

则$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$,

$\because Q$是数域，$\therefore a+c,b+d\in Q$ $\therefore\alpha+\beta\in Q(\sqrt{2})$

同理 $Q(\sqrt{3})$,$Q(\sqrt{5}),\cdots,$都是数域，所以，数域有无穷多。

定理 设P是一个数域，则$Q \subseteq P$.　(即Q是最小的数域)

证明：　要证明$Q \subseteq P$，只要证明$\forall \alpha \in Q \Rightarrow \alpha \in P$

设$\alpha = \dfrac{m}{n}$，$(m, n \in Z)$,

如果$m, n \in P$,则由数域的定义有$\alpha \in \mathrm{P}$

$\because P$是一个数域,$\because$有$a, b \in P$,且$a \neq b$,

不妨设$a \neq 0$，$\therefore \quad 1 = \dfrac{a}{a} \in P$,

同理：$a - a = 0 \in P, 0 - 1 = -1 \in P$

$\therefore Z \subset P \qquad \therefore \alpha = \dfrac{m}{n} \in P$

第一章 线性方程组的求解

线性方程组的求解是线性代数中非常重要的一个部分，许多问题的讨论，都要借助于线性方程组解得结果。

本章从熟悉的消元法开始，对线性方程组在某个数域上给出一个求解的判断和解的一般表达式，并由此引入矩阵的概念。

1.1 线性方程组的形式及相关概念

我们称系数a_{ij}和常数项b_j，取自数域P,

含有m个方程，n个自变量$x_1, \cdots, x_n$的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1.1)$$

为线性方程组

如果：$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零，则称(1.1.1) 为非齐次线性方程组，

$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零，则称(1.1.1) 为齐次线性方程组。

若存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{P}$, 使得以 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 代入线性方程组 (1.1.1) 后, (1.1.1) 中的每个方程都成立, 则称线性方程组 (1.1.1) 可解,

且称 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 为线性方程组 (1.1.1) 的一个 (或一组) 解.

习惯上, 称由线性方程组 (1.1.1) 的所有解组成的集合为线性方程组 (1.1.1) 的 解集.

当一个线性方程组可解时, 称它是相容的； 否则, 称之为不相容的.

问题：关于线性方程组的解

1. 一定有解？

2. 有解时是否有三种可能：唯一一组解，只有有限组解，有无穷多组解？

3. 猜想一下什么类型的线性方程组一定有解？

若数域P上两个具有相同未知数量的线性方程组有相同的解集，则称这两个线性方程组是同解的。

问题:

两个同解的线性方程组，方程个数是否一定相等？

1.2 同解变形与阶梯型线性方程组

例，用消元法求解下面线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+6x_3=16 & (1) \\ x_1 \quad +x_2 \quad +x_3=3 & (2) \\ 3x_1+4x_2+6x_3=16 & (3) \end{cases} \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(2)]{\frac{1}{2}\times(1)} \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 & (1) \\ x_1+2x_2+3x_3=8 & (2) \\ 3x_1+4x_2+6x_3=16 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 & (1) \\ \qquad x_2+2x_3=5 & (2) \\ \qquad x_2+3x_3=7 & (3) \end{cases} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 & (1) \\ \qquad x_2+2x_3=5 & (2) \\ \qquad\qquad x_3=2 & (3) \end{cases}$$

阶梯型方程组

$$\xrightarrow[(2)-2(3)]{(1)-(3)} \begin{cases} x_1+x_2 \qquad =1 & (1) \\ \qquad x_2 \qquad =1 & (2) \\ \qquad\qquad x_3=2 & (3) \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 \qquad\qquad =0 & (1) \\ \qquad x_2 \qquad =1 & (2) \\ \qquad\qquad x_3=2 & (3) \end{cases}$$

约化（行最简）阶梯型方程组

- 从上例可以看出，消元法对线性方程组进行了3种变换:
- （1）互换　互换两个方程; $\xrightarrow{R_{ij}}$
- （2）倍乘 用一个不等于零的数乘以某个方程; $\xrightarrow{cR_i}$
- （3）倍加 把某方程的c倍加到另一个方程上. $\xrightarrow{R_i+cR_j}$
- 这三种变换称为线性方程组的初等变换

引理1:

线性方程组的初等变换（即消元法）是把一个方程组变为一个与它同解的另一个线性方程组。

问题：与一个线性方程组同解的线性方程组有多少？

- 高斯是德国数学家（1777-1855）高斯消元法的基本思想，分离系数，顺序消元。
- 事实上这一思想早就在公元一世纪的《九章算术》中便初露端倪。后在公元263年刘徽在注解《九章算术》时已全面完成。《九章算术》第八章“方程”中提出“方程术”，它的思想和高斯消元法非常相似。刘徽给出了古代解线性方程组的方法，在这以后中国一直延续使用这种方法，它是中国古代人民的智慧结晶，是中国数学的非凡成就之一，比欧洲至少领先一千多年。
- “方程术”例子：
- 今有：上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；
  上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；
  上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗；
  问：上、中、下禾实一秉各几何？
- 这里“禾”指谷子，“秉”指“捆”，“实”指“果实”。

例 试通过线性方程组的初等变换简化以下线性方程组的形式:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=1, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=2, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3. \end{cases}$

解 对线性方程组 1) 实施初等变换:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=1, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3 \end{cases} \xrightarrow[R_4-5R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-3R_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=- \\ -7x_3+2x_4=4, \\ -7x_3+2x_4=4, \\ -14x_3+4x_4=8 \end{cases} \xrightarrow[R_3-R_2]{R_4-2R_3} \begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ -7x_3+2x_4=4, \\ 0=0, \\ 0=0 \end{cases}$$

阶梯型方程组

$$\xrightarrow[R_1-5R_2]{(-\frac{1}{7})\times R_2} \begin{cases} x_1+2x_2+\frac{3}{7}x_4=\frac{13}{7}, \\ x_3-\frac{2}{7}x_4=-\frac{4}{7}, \\ 0=0, \\ 0=0. \end{cases}$$

行最简（约化）阶梯型方程组

思考：化简过程有什么特点？

显然，任意一个线性方程组进行初等变换后，
一定可以化为如下的阶梯型方程组：

$$\begin{cases} b_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+b_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+b_{1j_r}x_{j_r}+\cdots+b_{1n}x_n=c_1, \\ b_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+b_{2j_r}x_{j_r}+\cdots+b_{2n}x_n=c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{rj_r}x_{j_r}+\cdots+b_{rn}x_n=c_r, \\ 0=c_{r+1}. \end{cases}$$

阶梯型方程组

其中$c_{r+1}=0, or, c_{r+1}\neq 0$

线性方程组 2) 与 1) 的唯一区别在于第 3 个方程的常数项, 于是

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=3, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3. \end{cases} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{cases} x_1+2x_2+\frac{3}{7}x_4=\frac{13}{7}, \\ x_3-\frac{2}{7}x_4=\frac{4}{7}, \\ 0=1, \\ 0=0. \end{cases}$$

定理 1 对于任意一个形如 (1.1.1) 的线性方程组, 若对于每一个 $1 \leqslant j \leqslant n$, 恒有 $\sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}| \neq 0$[①], 则存在正整数 r, 使得线性方程组只需经有限次互换方程的位置、倍乘和倍加这三类线性方程组的初等变换, 就可化为如下形状的**阶梯形线性方程组**:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} b_{1j_1}x_{j_1} + \cdots & + b_{1j_2}x_{j_2} + \cdots & + b_{1j_r}x_{j_r} & + \cdots + & b_{1n}x_n & = & c_1, \\ & b_{2j_2}x_{j_2} + \cdots & + b_{2j_r}x_{j_r} & + \cdots + & b_{2n}x_n & = & c_2, \\ & \ddots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ & & b_{rj_r}x_{j_r} & + \cdots + & b_{rn}x_n & = & c_r, \\ & & & & 0 & = & c_{r+1}. \end{array}\right. \tag{1.2.1}$$

上式中, “$0 = c_{r+1}$” 以下留空部分表示这里有 $m-(r+1)$ 个 “$0=0$” 的方程,

显然, 相应于定理 1, 在例 1 中,

方程组 1): $r=2$, $j_1=1$, $j_r=3$, $b_{1j_1}=b_{rj_r}=1$, $c_{r+1}=0$,

方程组 2): $r=2$, $j_1=1$, $j_r=3$, $b_{1j_1}=b_{rj_r}=1$, $c_{r+1}=1$.

一般地, 称 (1.2.1) 中阶梯转弯处的项 $b_{ij_i}x_{j_i}$ 为**阶梯头**, $i=1,2,\cdots,r$.

1.3 *Gauss*消元法的一般结论

我们将约化阶梯型方程组中，出现在梯头中的未知量，用其它未知量表示出来，

首先考虑$c_{r+1}=0$,则有下面结论：

引理 2 对于任何一个形如 (1.2.1) 的阶梯形线性方程组, 记 $\mathcal{N}=\{1,2,\cdots,n\}$, 若 $c_{r+1}=0$, 则它可经有限次线性方程组的倍乘和倍加初等变换、以及移项化为

$$\begin{cases} x_{j_1}=d_1-c_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-c_{1j_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-c_{1j_n}x_{j_n}, \\ x_{j_2}=d_2-c_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-c_{2j_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-c_{2j_n}x_{j_n}, \\ \cdots\cdots \\ x_{j_r}=d_r-c_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}}-c_{rj_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-c_{rj_n}x_{j_n}. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

上式中, $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n$ 是阶梯形线性方程组 (1.2.1) 中出现在阶梯头中的未知量的下角标, $1<j_{r+1}<j_{r+2}<\cdots<j_n\leqslant n$ 且

$$\mathcal{N}=\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}\cup\{j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n\}, \tag{1.3.2}$$

$$\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}\cap\{j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n\}=\varnothing, \tag{1.3.3}$$

$$d_i\in\mathbb{P},\quad i=1,2,\cdots,r, \tag{1.3.4}$$

$$c_{ij}\in\mathbb{P},\quad j=j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n,\ i=1,2,\cdots,r. \tag{1.3.5}$$

定理2，线性方程组(1.1.1)经*Gauss*消元法化为阶梯型方程组（1. 2. 1）后，

(1),线性方程组有解 $\Leftrightarrow c_{r+1}=0;$

线性方程组无解 $\Leftrightarrow c_{r+1}\neq 0$

（2),当线性方程组有解时，再经*Gauss*消元法将阶梯型方程组化为约化阶梯型方程组(1.3.1)

把出现在梯头中的未知量，用其它未知量表示出来，

则有

$$\begin{cases} x_{j_1}=d_1-c_{1j_{r+1}}t_1-c_{1j_{r+2}}t_2-\cdots c_{1j_n}t_{n-r} \\ x_{j_2}=d_2-c_{2j_{r+1}}t_1-c_{2j_{r+2}}t_2-\cdots c_{2j_n}t_{n-r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{j_r}=d_r-c_{rj_{r+1}}t_1-c_{rj_{r+2}}t_2-\cdots c_{rj_n}t_{n-r} \\ x_{j_{r+1}}=t_1 \\ x_{j_{r+2}}=t_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{j_{r+n}}=t_{n-r} \end{cases}$$

（1. 3. 7）确定了线性方程组的所有解。

其中:$t_1,t_2,\cdots,t_n\in P$,任意

$x_{j_{r+1}},x_{j_{r+2}},\cdots,x_{j_{r+n}}$为不是梯头对应的未知量

我们称它们为自由未知量（或者自由变量）

(3)，当线性方程组有解时(即$c_{r+1}=0$时)

$$\begin{cases} r=n\Rightarrow \text{线性方程组有唯一解} \\ r<n\Rightarrow \text{线性方程组有无穷多个（组）解(此时有}n-r\text{个自由未知量)} \end{cases}$$

问题：如果$r=m$,线性方程组是否一定有解？

当线性方程组有解时, 按变量下角标的递增序改写 (1.3.7), 并以 $j_1 = 1$ 代入, 可得

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1j_{r+1}}t_1 - c_{1j_{r+2}}t_2 - \cdots - c_{1j_n}t_{n-r}, \\ x_2 = t_1, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_2-1} = t_{j_2-2}, \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2j_{r+1}}t_1 - c_{2j_{r+2}}t_2 - \cdots - c_{2j_n}t_{n-r}, \\ x_{j_2+1} = t_{j_2-1}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_r-1} = t_{j_r-r}, \\ x_{j_r} = d_r - c_{rj_{r+1}}t_1 - c_{rj_{r+2}}t_2 - \cdots - c_{rj_n}t_{n-r}, \\ x_{j_r+1} = t_{j_r-r+1}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = t_{n-r}, \end{cases}$$

$t_1, t_2, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{P}$ 为任意数. (1.3.8)

(1.3.8) 事实上是以一个单式刻画线性方程组的所有解.

称为线性方程组的通解，

(1.3.1)中未知量$x_{j_r+1}, x_{j_r+2}, \cdots x_{j_n}$称为线性方程组的自由未知量（自由变量）。

例 2 求解线性方程组

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=1, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=3, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3. \end{cases}$

方程个数: $m=4$

自变量个数: $n=4$

解 这是例 1 中的两个方程组. 由例 1,

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=1, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{例 1}} \begin{cases} x_1+2x_2+\frac{3}{7}x_4=\frac{13}{7}, \\ x_3-\frac{2}{7}x_4=-\frac{4}{7}, \\ 0=0, \\ 0=0. \end{cases}$$

约化（行最简）阶梯型方程组

因此, $r=2<4=n$, $c_{r+1}=0$. 依定理 2, 线性方程组 1) 有解.

且有无穷多个（组）解。 把x_2,x_4移到等式右边有:

$$\begin{cases} x_1=\frac{13}{7}-2x_2-\frac{3}{7}x_4, \\ x_3=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}x_4. \end{cases}$$

取x_2,x_4为自由自变量,

故线性方程组 1) 的通解为

$$\begin{cases} x_1=\frac{13}{7}-2t_1-\frac{3}{7}t_2, \\ x_2=t_1, \\ x_3=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}t_2, \\ x_4=t_2, \end{cases}$$

t_1, t_2为任意数.

而

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=3, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{例 1}} \begin{cases} x_1+2x_2+\frac{3}{7}x_4=\frac{13}{7}, \\ x_3-\frac{2}{7}x_4=-\frac{4}{7}, \\ 0=1, \\ 0=0. \end{cases}$$

故 $r=2$, 而 $c_{r+1}=1$ 非零. 依定理 2, 线性方程组 2) 无解. □

1.4 矩阵及其初等变换

矩阵是由英国数学家*Caylry*和*J.J.Sylvester*在19世纪提出，是线性代数中一个非常重要的核心概念和理论载体。

定义1，由$m\times n$个数域P中的数,组成的矩形数表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \overset{def}{=} (a_{ij})_{m\times n} = A$$

称为数域P上的一个$m\times n$矩阵，一般用$A, B, C, \cdots$表示。

元素全为零的$m\times n$ 矩阵，称为零矩阵，记作$O_{m\times n}$

当$m=n$ 时，称A 为n 阶方阵，或者n 阶矩阵，记作$A=(a_{ij})_n$

将数域P上的所有$m\times n$矩阵所形成的集合记作$P^{m\times n}$

为了理论上的表述方便，或者为了简化计算等的需要，有时，我们需要对矩阵进行分块，形成分块矩阵. 以下我们通过例子来说明分块矩阵的形成. 设

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:ccc}
1 & 3 & 0 & 5 & 1 \\
4 & 2 & 3 & 8 & 0 \\
\hdashline
0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

利用虚线将上述 4×5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成四块，并记

$$
\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 1\\ 3 & 8 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},
$$

则 $\boldsymbol{A}$ 可看成为由矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{21}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 所组成，并可写为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 5 & 1\\ 3 & 8 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}
$$

我们称上述形式的矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2×2 分块矩阵，称 $\boldsymbol{A}_{ij}(i,j=1,2)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的子块.

定义2，矩阵的初等变换：

$$\begin{cases}\text{初等行变换}\\ \text{初等列变换}\end{cases}$$

1.互换 互换矩阵的两行（列）； $\xrightarrow{R_{ij}}(\xrightarrow{C_{ij}})$

2.倍乘 某行（列）乘非零的c倍； $\xrightarrow{cR_i}(\xrightarrow{cC_i})$

3.倍加 把某行（列）的c倍加到另一行（列）上。$\xrightarrow{R_i+cR_j}(\xrightarrow{C_i+cC_j})$

矩阵的初等变换是矩阵理论的最常用的重要工具。

下面我们将发现线性方程组的初等变换和矩阵的初等变换的联系。

1.5 *Gauss* 消元过程的矩阵形式

比较线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

记:

$$A_{m\times n}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

称为线性方程组的系数矩阵

记 $\overline{A}_{m\times(n+1)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$

再记 $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$,

称为线性方程组的增广矩阵

显然，增广矩阵与线性方程组1-1对应

则 : $\overline{A}=[A\,\vdots\,b]$

于是，线性方程组 (1.1.1) 经 Gauss 消元法化为阶梯形线性方程组 (1.2.1)

就可以简化为对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ 进行初等行变换，

化为阶梯型矩阵的过程

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
b_{1j_1} & \cdots & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_3} & \cdots & b_{1j_r} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\
 & & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_3} & \cdots & b_{2j_r} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\
 & & & & b_{3j_3} & \cdots & b_{3j_r} & \cdots & b_{3n} & c_3 \\
 & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} & c_r \\
 & & & & & & & & & c_{r+1} \\
 & & & & & & & & &
\end{array}\right) \quad (1.5.1)$$

称(1, 5. 1)为阶梯型矩阵

这里箭头右端矩阵空白处的元素均为零

约化阶梯型（行最简）矩阵

两个特点：梯头元素为1，梯头所在列其余元素为零

可以证明，仅对矩阵进行初等行变换就可以化为阶梯型矩阵。

线性方程组的求解方法：

1，$\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 阶梯形B

2，再写出以B作为增广矩阵新的线性方程组，
则新，老线性方程组同解

例 3　解线性方程组 $\begin{cases} x_1+\ 2x_2+\ 5x_3-x_4=-1, \\ x_1+\ 2x_2-\ 2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+\ 6x_2+\ 8x_3-x_4=1, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3. \end{cases}$

解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-5R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -14 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{R_4-2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯型矩阵

$$\xrightarrow[R_1-5R_2]{(-\frac{1}{7})\times R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

约化阶梯型（行最简）矩阵

（梯头元素为1，
梯头所在列其余元素为零）

得同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad +\dfrac{3}{7}x_4=\dfrac{13}{7}, \\ \qquad\qquad x_3-\dfrac{2}{7}x_4=-\dfrac{4}{7}. \end{cases}$$

约化阶梯型（行最简）线性方程组

由于 $r=2$，$n=4$，$c_{r+1}=0$，故依定理 2, 原线性方程组有解, 其通解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{13}{7}-2t_1-\dfrac{3}{7}t_2, \\ x_2=t_1, \\ x_3=-\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}t_2, \\ x_4=t_2, \end{cases} \qquad t_1,t_2\text{为任意数}.$$

例 4 问 a, b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷多个解？当线性方程组有解时，求出其解.

解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+R_2]{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $a \neq 1$ 时，$r=4=n$，依定理 2，原线性方程组有唯一解，其解为

$$x_1=\frac{-a+b+2}{a-1},\ x_2=\frac{a-2b-3}{a-1},\ x_3=\frac{b+1}{a-1},\ x_4=0.$$

当 $a=1$ 时，上述最后一个矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 由于 $r=2$，$c_{r+1}=b+1$，故

1) 当 $a=1$ 且 $b \neq -1$ 时，$c_{r+1} \neq 0$，依定理 2，原线性方程组无解.

2) 当 $a=1$ 且 $b=-1$ 时，$c_{r+1}=0, r<n$，依定理 2，原线性方程组有无穷多个解. 此时，原线性方程组同解于

$$\begin{cases} x_1-x_3-x_4=-1, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ 0=0, \\ 0=0. \end{cases}$$

故原线性方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=-1+t_1+t_2, \\ x_2=1-2t_1-2t_2, \\ x_3=t_1, \\ x_4=t_2, \end{cases}$$

其中t_1, t_2为任意数.

对于齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

记：

$$A_{m\times n} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

称为齐次线性方程组的系数矩阵

齐次线性方程组一定有解！

$\because x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$ 是齐次线性方程组的一个（组）解，称为零解。

或者，齐次线性方程组经过初等变换化为阶梯型线性方程组后，$c_{r+1} \equiv 0$

如果有一组不全为零的数，满足齐次线性方程组，

则称齐次线性方程组有非零解。

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\\nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}$$（*） 当$a=?$,方程有非零解，并求解。

解，方法1：$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\xrightarrow[i=2,\cdots n]{r_i-ir_1}\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\-2a & a & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\-na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=B$

当$a=0$时，与（*）同解的方程为：$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，此时通解；$\begin{cases}x_1=-t_1-t_2-\cdots-t_{n-1}\\x_2=t_1\\x_3=\quad t_2\\\cdots\cdots\cdots\\x_n=\qquad\qquad t_{n-1}\end{cases}$ t_i任意

当$a\neq 0$ 时$B\xrightarrow[i=2,\cdots n]{\frac{1}{a}r_i}\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\-2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\-n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-\sum_{i=2}^{n}r_i}\begin{bmatrix}a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\-2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\-n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$

$\therefore$当a=-$\frac{n(n+1)}{2}$，与（*）同解的方程为：$\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\-3x_1+x_3=0\\\cdots\\-nx_1+x_{\mathrm{n}}=0\end{cases}$ 通解为$\begin{cases}x_1=t\\x_2=2t\\\cdots\\x_n=nt\end{cases}$

在本章中，我们利用线性方程组的初等变换，
统一了中学阶段使用的线性方程组的各种求解过程

利用矩阵的初等变换，又简化了线性方程组求解的*Gauss*法，

回顾*Gauss*消元法，把线性方程组化为阶梯型线性方程组；
或者对增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换化为阶梯型矩阵

(1.5.1) 中右侧矩阵非零行数相关的数 r

自然要问：r 是否与消元过程 (或矩阵初等变换过程) 相关？

或者，r 是否为消元过程 (或矩阵初等变换过程) 的不变量?

这关系到矩阵的一个重要概念：秩！