第六章二次型

二次型的研究，在几何上的解释可以认为是齐次(有心)二次曲面(线)的类型评判及标准型的寻找。

考察平面上二元二次方程，：$x^2+6xy+y^2=4$，表示什么曲线？

如果坐标轴顺时针旋转45^0，得到：$-2x_1^2+4y_1^2=4$，所以方程为双曲线。

定义1：一个系数取自数域P，含有n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)
&= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
&+\cdots \\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
\overset{令a_{ij}=a_{ji}}{=\!=\!=\!=} a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n +a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n +\cdots +a_{nn}x_n^2
$$

$$
=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad（一般项 a_{ij}x_ix_j）
$$

称为数域P上的一个二次型

P=R,称为实二次型

P=C,称为复二次型

$$
=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=X^TAX
$$

显然，当规定$a_{ij}=a_{ji}$时$\Leftrightarrow A=A^T$

定义2: 只含平方项的二次型 称为标准形.

例 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2-9x_2^2+6x_3^2$ 为一个标准形

定义3 (线性替换) 设有两组变量: (I) $x_1,\cdots,x_n$

(II) $y_1,\cdots,y_n$

则系数$c_{ij}\in P$ 中的一组关系: $\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+\cdots+c_{1n}y_n \\ \cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$ 即: $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

称为从变量 (I) 到 (II) 的线性替换。

记 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$,$Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$,$C=(c_{ij})_{n\times n}$,

则上述关系可以用矩阵表示为: $X=CY$

如果$P=R$，称为实线性替换;

如果$P=C$ ，称为复线性替换。

若 $|C|\neq 0$ 称为非退化线性替换

特别若$C^TC=E$ 称为正交线性替换

性质1 正交线性替换保持向量长度不变.

证明，设$X=CY$,其中$C^TC=E$,

$$\text{则},\|X\|^2=X^TX=(CY)^T(CY)$$
$$=Y^T(C^TC)Y=Y^TY=\|Y\|^2$$

所以，在正交线性替换的坐标变换下，
空间的几何体保持原来的形状完全不变。
这是我们后面经常强调用正交线性替换的原因。

二次型的两个中心命题：

(1):利用非退化线性替换化二次型为标准形

(2):确定二次型的正定性

6.1 化二次型为标准形

$\begin{cases} 1，配方法 \\ 2，对称矩阵的原理 \end{cases}$

6.1.1 方法1：配方法

任一个二次型总是如下两种情况之一:(1) 含有 x_i^2；(2) 不含有 x_i^2

例1 $f(x_1\ x_2\ x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$

$$=(x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3)+x_2^2-2x_2x_3-x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-4x_2x_3-2x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_2+x_3)^2+2x_2^2=y_1^2-2y_2^2+2y_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=\quad x_2+x_3 \\ y_3=\quad x_2 \end{cases}$ 即有：$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $Y=CX$ $(\because |C|\neq 0 \therefore$ 非退化$)$

例2 $f(x_1\ x_2\ x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ (不含 x_i^2)

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ $X=CY$ 非退化

$$f(x_1\ x_2\ x_3)\overset{X=CY}{=\!=\!=\!=}2y_1^2-y_2^2-4y_1y_2+8y_2y_3$$ (化为第一种情形)

定理1 任意一个二次型都可以经过非退化线性替换化成一个标准形。

6.1.2 利用对称矩阵的性质化二次型为标准形

定义4 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = X^T AX$,(其中$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$)

只有当 $A = A^T$时，上式称为二次型的矩阵表示，其中的对称矩阵A 称为二次型矩阵。

例1 $f(x_1\ x_2\ x_3) = x_1^{\ 2} + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^{\ 2} - 2x_2x_3 - x_3^{\ 2}$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T AX$$

例2 $f(x_1\ x_2\ x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T AX$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -12 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T BX$$

(等号虽成立，但B不是二次型矩阵)

例 求二次型矩阵 (1) $f(x,y,z,t)=(x-2y+3z-5t)(3x+5y-4z+3t)$ (06－07秋冬)

(2) $f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{3}\left[ix+(i+1)y+(i+2)z\right]^2$ (07－08秋冬)

解(1) $f(\mathrm{x,y,z,t})=(x-2y+3z-5t)(3x+5y-4z+3t)$

$$=\begin{bmatrix}x & y & z & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5 & -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x & y & z & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5 & -4 & 3\\-6 & -10 & 8 & -6\\9 & 15 & -12 & 9\\-15 & 25 & 20 & -15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x & y & z & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -6\\-\frac{1}{2} & -10 & \frac{23}{2} & \frac{19}{2}\\\frac{5}{2} & \frac{23}{2} & -12 & \frac{29}{2}\\-6 & \frac{19}{2} & \frac{29}{2} & -15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}$$

性质1 若 $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX$ 其中 $A=A^T$，$B=B^T$

$=X^TBX$，则：$A=B$ (即：二次型与一个对称矩阵一一对应)

设 $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX \xlongequal[\text{一定可以找到 } |C|\neq 0\text{，令} X=CY]{\text{定理1}} (CY)^TA(CY)$

$$=Y^T(C^TAC)Y=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

$$=\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=Y^T\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}Y$$

$\because (C^TAC)^T=C^TAC,$ 由性质1，得到：$C^TAC=\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$

定理2（用矩阵语言描述定理1）

$\forall A=A^T\in P^{n\times n}$，一定存在可逆矩阵 $C\in P^{n\times n}$

使得 $C^TAC=\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}=diag(d_1,\cdots,d_n)$ 为对角阵

例 设$A_{n\times n}$ 证明

1, $A=-A^T \Leftrightarrow \forall X\in R^n, X^TAX=0$

2, 设$A=A^T$， 且$\forall X\in R^n, X^TAX=0\Rightarrow A=0$

3, 若$A=A^T$， $B=B^T$, 且$X^TAX=X^TBX\Rightarrow A=B$

证明1, $\Rightarrow \because (X^TAX)^T=X^TA^TX=-X^TAX \therefore X^TAX=0$

$\Leftarrow$ 取 $X_i=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T$,

$\because X_i^TAX_i=a_{ii}=0, \Rightarrow a_{ii}=0$

取 $Y_{ij}=X_i+X_j$ $\because Y_{ij}^TAY_{ij}=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=a_{ij}+a_{ji}=0$

$\therefore A=-A^T$

证明2, 方法1, 利用1, $A=A^T=-A^T, \Rightarrow A=0$

6.1.3合同

定义5 设$A,B\in P^{n\times n}$，若有可逆矩阵$C\in P^{n\times n}$，

使得$C^TAC=B$，则称A,B在数域P上合同 并记做 $A\overset{T}{\sim}B$

性质1 合同具有：

自反性 $E^TAE=A$

对称性 $P^TAP=B\Leftrightarrow A=(P^{-1})^TBP^{-1}$

传递性 $P^TAP=B,Q^TBQ=C\Rightarrow(QP)^TA(QP)=C$

定义比较：

相抵 $PAQ=B$ $A\overset{R}{\sim}B.$

相似 $P^{-1}AP=B$ $A\overset{S}{\sim}B.$

合同 $P^TAP=B$ $A\overset{T}{\sim}B.$

性质2 两个矩阵合同有三个保持：

(1) 保持秩不变； $R(B)=R(P^TAP)=R(A)$

(2) 保持对称性不变 ；$B^T=(P^TAP)^T=P^TA^TP$

(3) 保持正定性不变.

所以，矩阵的合同也是一种等价关系，称为矩阵的合同关系，
可以根据仿照相抵关系，可以将$P^{n\times n}$按照合同关系分成若干合同（等价）类，
使得$P^{n\times n}$在的每一个矩阵在而且只在其中一个类中。

定理3 (定理1，定理2用合同语言描述)

$P^{n\times n}$中任意一个对称矩阵都与某一个对角矩阵合同，

这个对角矩阵称为A的合同标准形． (对角矩阵是否唯一?)

特别当A为实对称矩阵时， 必存在正交矩阵U（第5章5节）

$$\text{使得 } U^TAU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

(其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为A的全体特征值)

利用这个结果就有：

定理4 (二次型语言) 任意一个实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$

必可经正交变换 $X=UY$化为标准形.

$$\text{即}f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX \xlongequal[U^TU=E]{X=UY} \lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

(其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A$的全体特征值)

知识点回顾：

定义1 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots，x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^TAX$，其中 $A=A^T$。

（一般项$a_{ij}x_ix_j$，矩阵形式的要求）

定义2 二次型的标准形：只含平方项的二次型。

定义3 非退化线性替换：$X=CY,|C|\neq 0.$

$$\text{方法：}\begin{cases}\text{利用配方法}\\ \text{利用对称矩阵性质}\end{cases}$$

二次型的任务之一：利用非退化线性替换，化二次型为标准形。

定义4 合同：$C^TAC=B,$其中$|C|\neq 0$

合同的性质1，具有自反性，对称性，传递性。

性质2, 保持秩，保持对称性。

$$\text{比较：}\begin{cases}\text{相抵}\\ \text{相似，从定义，性质，判别等方面。}\\ \text{合同}\end{cases}$$

例 化实二次型 $f(x,y)=x^2+6xy+y^2$ 为标准形

解 方法1 配方法 $f(x,y)=(x+3y)^2-8y^2=x_1^2-8y_1^2=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$

令 $\begin{cases}x_1=x+3y\\ y_1=\quad\ \ y\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ 为非退化线性变换

如果对 $f(x,y)=(x+3y)^2-8y^2=x_2^2-y_2^2=\begin{bmatrix}x_2 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$

令 $\begin{cases}x_2=x+3y\\ y_2=\quad\ \sqrt{8}y\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & \sqrt{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ 为非退化线性变换

方法2 (利用对称矩阵性质) $f(\mathrm{x,y})=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=Z^TAZ$

先求 A 的特征值 $|\lambda E-A|=(\lambda+2)(\lambda-4)\ \therefore \lambda_1=-2\quad \lambda_2=4$

再求 特征向量 $(\lambda_1E-A)X=0$ 基础解系为 $\xi_1=[1\quad -1]^T$ 单位化 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[1\quad -1]^T$

$(\lambda_2E-A)X=0$ 基础解系为 $\xi_2=[1\quad 1]^T$ 单位化 $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[1\quad 1]^T$

令 $U=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 则 $U^TU=E$ 且 $U^TAU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & \\ & 4\end{bmatrix}$

$\therefore f(\mathrm{x,y})=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=Z^TAZ\overset{Z=UZ_1}{=\!=\!=}-2x_3^2+4y_3^2=\begin{bmatrix}x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & \\ & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ y_3\end{bmatrix}$

例子带给我们的思考：

1，不同的非退化线性替换得到不同的标准形，
即标准形不唯一；

2，只有利用正交变换得到的标准形，平方项前面的
系数正好是二次型矩阵的特征值；

3，虽然标准形不唯一，但是我们又发现在不同的标准形中，
有共性的两个地方。

即：不等于零平方项的项数一样(二次型的秩），
平方项中正的项数一样(正惯性指数).

进一步思考：

我们能否利用这些共性，讨论标准形的唯一性（规范形）？

6.3 二次型的规范形

比较 $\begin{cases}\text{矩阵的秩}\\ \text{向量组的秩}\\ \text{二次型的秩}\end{cases}$

6.3.1 二次型的秩

定义5 二次型经过非退化线性变换化成标准形后，系数不为零的平方项的项数称为二次型的秩.

定理5：二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^TAX$ 的秩等于二次型矩阵A 的秩。

定理说明，任何的非退化线性变换化二次型成标准形后，不等于零的平方项一定相等。或者二次型的秩是非退化线性变换的不变量。

证明：设二次型的秩为r,

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX \overset{\text{令}X=CY\ |C|\neq 0}{=\!=\!=\!=\!=\!=} Y^T(C^TAC)Y$

$$=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2+0\cdot y_{r+1}^2+\cdots+0\cdot y_n^2 \quad (d_1d_2\cdots d_r\neq 0)$$

$$=\left[y_1,\cdots,y_r,y_{y+1},\cdots,y_n\right]\begin{bmatrix}d_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&d_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_r\\ y_{r+1}\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

即 $C^TAC=\begin{bmatrix}d_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&d_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix}$

$$\therefore\ r=R(C^TAC)\overset{\because C\text{可逆}}{=\!=\!=\!=}R(A)$$

- 6.3.2 复数域上二次型的规范形

设复数域上二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 的秩为r,(其中$A=A^T\in C^{n\times n}$)

即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX \xleftrightarrow{X=CY\ |C|\neq 0}$

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2+0\cdot y_{r+1}^2+\cdots+0\cdot y_n^2 \quad (其中0\neq d_i\in C)$$

$$=(\sqrt{d_1}y_1)^2+(\sqrt{d_2}y_2)^2+\cdots+(\sqrt{d_r}y_r)^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$$

再作非退化线性变换

$$\begin{cases} z_1=\sqrt{d_1}y_1 \\ z_2=\sqrt{d_2}y_2 \\ \cdots\cdots \quad \ddots \\ z_r=\sqrt{d_r}y_r \\ z_{r+1}=y_{r+1} \\ \cdots\cdots \quad \ddots \\ z_n=y_n \end{cases}$$

即 $$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & & & & \\ & \sqrt{d_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{d_r} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

上式称为二次型在复数域上的规范形，由r 项系数都为1的平方项项构成。

显然，此规范形由二次型的秩r 唯一决定.

定理6 (二次型语言)

任意一个复二次型一定可以经过非退化线性变换化为规范形，规范形是唯一的，由二次型的秩唯一决定。

(矩阵语言)

设$A = A^T \in C^{n\times n}$，且$R(A) = r$，

则，A必与$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{bmatrix}_{n\times n}$合同，

即一定存在可逆矩阵C，使得$C^T AC = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$。

推论：对称矩阵A, B在复数域上合同 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(B)$

- ## 6.3.3 实数域上二次型对规范形

设实数域上二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 的秩为r，$(A=A^T\in R^{n\times n})$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX \xrightleftharpoons{X=CY\ |C|\neq 0}$$

$$d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2+0\cdot y_{r+1}^2+\cdots+0\cdot y_n^2 \quad (0<d_i\in R)$$

$$=(\sqrt{d_1}y_1)^2+\cdots+(\sqrt{d_p}y_p)^2-(\sqrt{d_{p+1}}y_{p+1})^2-\cdots-(\sqrt{d_r}y_r)^2=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

再作非退化线性变换

$$\begin{cases} z_1=\sqrt{d_1}y_1 \\ z_2=\sqrt{d_2}y_2 \\ \cdots\cdots \quad \ddots \\ z_r=\sqrt{d_r}y_r \\ z_{r+1}=y_{r+1} \\ \cdots\cdots \quad \ddots \\ z_n=y_n \end{cases}$$

即：
$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & & & & \\ & \sqrt{d_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{d_r} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

上式称为二次型在实数域上的规范形，由r 项平方项系数为+1或−1的项构成。

定义6 在实二次型的规范形中

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

正平方项的项数 p 称为正惯性指数,负平方项的项数$r - p$ 称为负惯性指数

$p-(r-p)=2p-r$ 称为符号差。

该二次型的正(负)惯性指数, 也称为实对称矩阵A的正(负)惯性指数。

定理7：惯性定律：

(二次型语言) 任意一个实二次型一定可以经过非退化线性变换化为规范形，规范形是唯一的，由二次型的秩和正(负)惯性指数决定

(矩阵语言) n阶实对称矩阵A与对角矩阵$diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$合同时，

d_i中$(i=1\cdots n)$中不等于零的个数(即$R(A)$),

大于零的d_i个数(A的正惯性指数),

小于零的d_i个数 (A的负惯性指数),

都是唯一的。

设实对称矩阵$A_{n\times n}$的秩为r,正惯性指数为p,则一定存在可逆矩阵$C\in R^{n\times n}$,

$$使得: C^T AC = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O_{n-r} \end{bmatrix}$$

特别，对实对称矩阵$A_{n\times n}$，一定存在正交矩阵U，使得：

$$U^{-1}AU=U^TAU=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的全体特征值。

$\therefore$ 实对称矩阵A的秩：即为A的不等于零的特征值个数；

实对称矩阵A的正惯性指数：即为A的大于零的特征值个数；

实对称矩阵A的负惯性指数：即为A的小于零的特征值个数

问题：普通矩阵的秩

是否等于不为零的特征值个数？

考察，$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，

计算得到$A^3=O$

$\therefore \lambda=0$，(3重特征值)

但是，$R(A)=2$

推论 对称矩阵A,B在实数域上合同$\Leftrightarrow$

$R(A)=R(B)$，且有相同的正(负)惯性指数。

例，设 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & -1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & -1 & \\ -1 & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$

求(1) 在复数域上与A合同的矩阵;(2) 在实数域上与A合同的矩阵

解 (1) $\because R(A)=3, R(B)=R(C)=3, R(D)=2$ $\therefore$ 在复数域上与 A 合同的有 B 和 C

(2) 在实数域上，$\because R(A)=3$，正惯性指数为2，

$\because R(\mathrm{B})=\mathrm{R}(\mathrm{C})=3 \therefore$ 要求B, C的正惯性指数。

先考虑B：方法1，求出B的特征值，则正的特征值个数即为B的正惯性指数

$|\lambda E-B|=(\lambda-2)(\lambda-\frac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda-\frac{3-\sqrt{5}}{2})$，显然 B 的3个特征值都是正的，

$\therefore B$ 的正惯性指数为3，$\therefore B$ 与A 在实数域上不合同

方法2，求出以B 作为二次型 矩阵的二次型f，再利用配方法，

化f为标准形，就可以求出二次型的正 惯性指数。

$$f(x_1, x_2, x_3)=X^T BX = x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+2x_3^2 = (x_1-x_2)^2+x_2^2+2x_3^2$$

$\therefore B$的正惯性指数为3，B 与A 在实数域上不合同

例 任意一个n阶对称且可逆的实矩阵必在实数域上与n阶单位矩阵$\underline{\text{等价}}$

(1) 合同 ;(2) 相似 ; (3)等价 ;(4)以上都错

例 设A,B都是n阶实对称矩阵， 则A, B 在实数域上合同的充要条件是$\underline{\quad(3)\quad}$

(1) A,B都是可逆矩阵； (2）A,B有相同的特征值

(3) A,B有相同的正(负）惯性指数 ; (4) A,B有相同的秩

例, 设实对称矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

(1) B,C,D中与A等价的有$\underline{\quad C,D\quad}$,

(2) B,C,D中与A相似的有$\underline{\quad D\quad}$,

(3) B,C,D中与A合同的有$\underline{\quad C,D\quad}$,

6.4 正定二次型

定义7 设实数域上二次型：$f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX$

若$\forall\theta\neq X=(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)^T\in R^n$ 一定有：

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX>0$，则称$f$ 为正定二次型，相应的矩阵A称为正定矩阵

(2) $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX\geq 0$，则称$f$ 为半正定二次型，相应的A 称为半正定矩阵

(3) $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX<0$，则称$f$ 为负定二次型，相应的A 称为负定矩阵

(4) $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX\leq 0$，则称$f$ 为半负定二次型，相应的A 称为半负定矩阵

定义8 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 则：

$$\Delta_1=a_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{nn}\end{vmatrix},\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\cdots,\Delta_n=|A|$$

分别称为A的1阶，2阶，3阶，$\cdots$，n阶顺序子式

性质1 设$f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$为(半)正定二次型

$\Leftrightarrow -f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$为(半)负定二次型

定理8 设实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX$，则下列命题等价

1 $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX$ 为正定二次型；

2 $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX$ 的正惯性指数等于$p=R(A)=n$

3 $f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$

4 A 为正定矩阵

5 A的特征值全部大于零

6 存在可逆对实矩阵B, 使得$A=B^TB$

7 A 与 E 合同

8 A的顺序子式Δ_i全部大于零$(i=1\cdots n)$

推论1, 实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)=X^TAX$ 为负定

$$\Leftrightarrow (-1)^k\Delta_k>0 \quad (k=1\cdots n)$$

推论2 A 为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ 存在正定矩阵B, 使得$A=B^2$

推论3 A 为正定 $\Rightarrow A=A^T$； A 可逆；$|A|>0$；$a_{ii}>0$ (A 为正定的必要条件)

证明:(1) $f(x_1, x_2,\cdots, x_n)=X^TAX$ 为正定二次型

$\Rightarrow$ (2) $f(x_1, x_2,\cdots, x_n)=X^TAX$ 的正惯性指数等于 n

设 $f(x_1,x_2,\cdots, x_n)=X^TAX \xrightleftharpoons{X=CY,|C|\neq 0} d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$

反设 $d_1\le 0$，取 $Y_1=(1,0,\cdots,0)^T$，则有：$X_1=CY_1\neq\theta$，但是 $f(X_1)=d_1\le 0$ 矛盾

证明 (2) $f(x_1,x_2,\cdots, x_n)=X^TAX$ 的正惯性指数等于 n

$\Rightarrow$ (5) A 的特征值全部大于零

设 $f(x_1, x_2,\cdots, x_n)=X^TAX \xrightleftharpoons{X=UY,U^TU=E} \lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

有已知 $\lambda_i>0\ \ (i=1,2,\cdots,n)$

证明 (5) A 的特征值全部大于零 $\Rightarrow$ (6) 存在可逆对实矩阵 B, 使得 $A=B^TB$

$$\because U^TAU \overset{U^TU=E}{===} \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \qquad \therefore A=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^T=U\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}U^T$$

$$=\left(\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}U^T\right)^T\cdot\left(\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}U^T\right)=B^TB$$

如果: $A=(U\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}U^T)(U\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}U^T)=C^2$（则 C 为正定矩阵)

证明 : (6) 存在可逆对实矩阵B, 使得$A=B^T B$

$\Rightarrow$ (7) A 与 E合同

$$\because (B^{-1})^T AB^{-1} = (B^{-1})^T B^T BB^{-1} = E \quad \therefore A 与 E合同$$

证明: (6) 存在可逆对实矩阵B, 使得$A = B^T B$

$\Rightarrow$ (1) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$ 为正定二次型;

$$\because f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX = X^T B^T BX = (BX)^T (BX)$$

$$又 \because B 可逆 \therefore \forall \theta \neq X \in R^n, \ BX = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \neq \theta$$

$$\therefore \forall \theta \neq X \in R^n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (BX)^T (BX)$$

$$= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 > 0$$

$$\therefore f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX 为正定二次型$$

定理8 设实二次型$f(x_1,x_2,\cdots, x_n)=X^TAX$，且$R(A)=r<n$,则下列命题等价

1 $f(x_1,x_2,\cdots, x_n)=X^TAX$ 为半正定二次型；

2 $f(x_1,x_2,\cdots, x_n)=X^TAX$ 的正惯性指数 $p=R(A)<n$

3 $f(x_1,x_2,\cdots, x_n)=X^TAX$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$

4 A 为半正定矩阵

5 A的特征值全部大于等于零

6 存在n阶实矩阵C, 使得$A=C^TC$

7 A 与 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 合同

8 A的主子式(不是顺序子式)均非负。

例 判断二次型是否正定 $f(x,y,z,t)=x^2+2xy+y^2+z^2+t^2$

解 方法1，配方 $f(x,y,z,t)=x^2+2xy+y^2+z^2+t^2=(x+y)^2+z^2+t^2$

$$=x_1^2+z_1^2+t_1^2$$

$\therefore f$ 的正惯性指数 $=$ 秩 $=3$ $\therefore$ 为半正定

作非退化线性变换 $\begin{cases} x_1 = x+y \\ y_1 = y \\ z_1 = z \\ t_1 = t \end{cases}$

方法2 $\because f(1,-1,0,0)=0$ $\therefore$ 不是正定

方法3 $f(x,y,z,t)=x^2+2xy+y^2+z^2+t^2$

$$=\begin{bmatrix} x & y & z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

$\because \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\therefore$ 不是正定的

性质2 A为正定矩阵 $\Rightarrow$ (1) kA 为正定矩阵 (k>0)

(2) A^{-1} 为正定矩阵

(3) A^* 为正定矩阵

(4) A^k 为正定矩阵

(合同保持正定 性) (5) C^TAC为正定矩阵 ($|C| \neq 0$)

证明（2）$\because (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1} \therefore A^{-1}$为对称矩阵

又 $\because A^{-1}$的特征值全大于零 $\therefore A^{-1}$为正定矩阵

(5) 一方面 $(C^TAC)^T = C^TAC$

又 $\because A = B^TB$ (B可逆)

$\therefore C^TAC = C^TB^TBC = (BC)^T(BC)$ 且 $|BC| \neq 0$

$\therefore C^TAC$ 为正定矩阵

性质3 设A,B为n阶正定矩阵，则

(1) $A+B$为正定矩阵

(2) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$为正定矩阵

证明(1) 一方面 $(A+B)^T=A+B$

另一方面 设 $f=X^T(A+B)X \quad =X^TAX+X^TBX>0 \quad \forall X\neq\theta$

$\therefore A+B$ 为正定矩阵

证明(2) 方法1 记$C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$则 $C^T=C$,

$|\lambda E_{2n}-C|=|\lambda E_n-A||\lambda E_n-B|$

$\therefore C$的全体特征值大于零

$\therefore$ C=$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$为正定矩阵

方法2 设A的顺序子式Δ_{11}，$\Delta_{12},\cdots$，Δ_{1n}；设B的顺序子式Δ_{21}，$\Delta_{22},\cdots$，Δ_{2n}

设C的顺序子式Δ_1，$\Delta_2,\cdots$，Δ_n，$\Delta_{n+1},\cdots$，Δ_{2n}

则 $\Delta_1=\Delta_{11},\cdots$，$\Delta_n=\Delta_{1n}$；$\Delta_{n+1}=|A|\Delta_{21},\cdots,\Delta_{2n}=|A|\Delta_{2n}$ 全部大于零

$\therefore \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}$为正定矩阵

$P254(7)$ $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定矩阵 $\Rightarrow a_{ii}>0$

证明 $A=B^TB, a_{ii}=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}{}^2>0 \ (\because |B|\neq 0)$

例，设$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$，求$f$ 在条件

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$，下的最大值，最小值

分析 $f=X^TAX \overset{X=UY}{\underset{U^TU=E}{===}} \lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$

$\because X^TX=x_1^2+x_2^2+x_3^2=Y^TY=y_1^2+y_2^2+y_3^2$

$\therefore$问题变成 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$ 在 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$下的最值

解 $f=X^TAX$ 其中：$A=\begin{bmatrix}3&0&2\\0&3&-2\\2&-2&5\end{bmatrix}$

令$|\lambda E-A|=0\Rightarrow\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=7$

$\therefore f=y_1^2+3y_2^2+7y_3^2=7(\frac{1}{7}y_1^2+\frac{3}{7}y_2^2+y_3^2)\le 7(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=7$

取$(y_1,y_2,y_3)^T=(0,0,1)^T$，即在条件$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$下

$f_{\max}=7=\max(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$

同理 $f=y_1^2+3y_2^2+7y_3^2\ge y_1^2+y_2^2+y_3^2\ge 1.$

取$(y_1,y_2,y_3)^T=(1,0,0)^T$，即在条件$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$下

$f_{\min}=1=\min(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$

设n维欧氏空间V有两组基 (1) $\xi_1,\cdots,\xi_n$ (2)$\eta_1,\cdots,\eta_n$

记，$A=\left[(\xi_i,\xi_j)\right]_{nn}$ $B=\left[(\eta_i,\eta_j)\right]_{nn}$

问：A,B 有什么关系？

设$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)M$

设$\alpha\in V,\alpha=(\xi_1,\cdots,\xi_n)X=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X_1$ $\quad X=MX_1$

$$(\alpha,\alpha)=X^TAX=(MX_1)^TA(MX_1)=X_1^T(M^TAM)X_1$$

$$=X_1^TBX_1\Rightarrow B=M^TAM$$

$\because M^TAM,B$都是对称矩阵

$\Rightarrow B=M^TAM$ (即A,B合同)

例(07 – 08秋冬) 设A, C 为n 阶正定矩阵，

$AX + XA = C$ 有唯一解，B 为方程的解

证明 (1) $B = B^T$; (2) B 为正定矩阵

证明 (1)$\because AB + BA = C \Rightarrow (AB + BA)^T = C^T$

$$\Rightarrow AB^T + B^T A = C$$

$\therefore B^T$ 也是方程的解, 由唯一性，B=B^T

(2) 设λ 为B 任意一个的特征值，$BX = \lambda X$

有 $X^T(AB)X + X^T(BA)X = X^TCX$

$$\Rightarrow \lambda(X^TAX) + (X^TB^T)AX = X^TCX$$

$$\Rightarrow \lambda(X^TAX) + \lambda(X^TAX) = X^TCX$$

$$\Rightarrow 2\lambda(X^TAX) = X^TCX \quad \therefore \lambda > 0$$

$\therefore B$为正定矩阵

例，A正定又正交的充要条件$A=E.$

证明 $\Leftarrow$ 设$A=E$，则有 $A^TA=E\ \therefore A$ 正交

又有：$A=E^TE\ \therefore A$ 正定

$\Rightarrow$ 先证A的特征值全为 +1

设 $A\xi=\lambda\xi \Rightarrow (A^TA)\xi=\lambda A^T\xi$

$\Rightarrow \xi=\lambda A^T\xi=\lambda^2\xi \Rightarrow (1-\lambda^2)\xi=\theta$

$\therefore \lambda=\pm 1$ ，

$\because A$ 为正定矩阵 $\therefore$ 特征值全大于零 $\therefore \lambda=1$

又 $\because A$ 为对称矩阵 $\therefore A$ 必可以对角化

$\therefore A$ 与 E 相似 $\therefore A=E$

例(08－09秋冬）设$R(B_{n\times m})=m$，$A_{n\times n}=E-B(B^TB)^{-1}B^T$

证明：存在正交矩阵Q,使得$Q^TAQ=\begin{bmatrix} E_{n-m} & \\ & 0 \end{bmatrix}$

证明 显然 $A^T=(E-B(B^TB)^{-1}B^T)^T=A$,

又 $A^2=(E-B(B^TB)^{-1}B^T)^2=A$ $\therefore A$ 的特征值为1或0

$$tr(A_{n\times n})=tr(E-B(B^TB)^{-1}B^T)=$$

$$=n-tr(B(B^TB)^{-1}B^T)$$

$$=n-tr((B^TB)^{-1}(B^TB))=\mathrm{n}-tr(E_m)=n-m$$

$\therefore \lambda_1=1$ 为A的n-m重特征值

$\lambda_2=0$ 为A的m重特征值

$\therefore$对实对称矩阵A必存在正交矩阵Q,使得$Q^TAQ=\begin{bmatrix} E_{n-m} & \\ & 0 \end{bmatrix}$

例 (09－10）设$D=\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$为正定矩阵，$A_{m\times m}=A^T, B_{n\times n}=B^T$

(1) 求$P^T DP$　其中 $P=\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$,(2) $B-C^T A^{-1}C$ 是否为正定矩阵？

解 (1) $P^T DP=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^T A^{-1}C \end{bmatrix}=M$

(2) M也是正定矩阵 ($\because$ 合同保持正定性)

$\therefore M$的顺序子式全大于零

$\therefore B-C^T A^{-1}C$ 的顺序子式也大于零，

又$\because (B-C^T A^{-1}C)^T=B-C^T A^{-1}C$

$\therefore B-C^T A^{-1}C$ 为正定矩阵

例(07-08春夏) 设$A=A^T\in R^{n\times n}$, B为正定矩阵

证明：AB的特征值全是实数

证明：设$B=C^TC\quad(|C|\neq 0)$ 则$AB=AC^TC=C^{-1}(CAC^T)C$

$\therefore AB$ 与CAC^T 相似 $\Rightarrow C$ 与CAC^T 有相同的特征值

又$\because (CAC^T)^T=CAC^T\in R^{n\times n}$ $\therefore CAC^T$ 的特征值全是实数

$\therefore AB$的特征值全是实数

例(09-10秋冬) 设A为n阶实矩阵，如$\forall\theta\neq \mathrm{X}\in \mathrm{R}^n$

都有 $X^TAX>0$ 证明:$|A|>0$

证明 $\because |A|=\lambda_1\cdots\lambda_n$

（1）当λ_0为实数，设$AX=\lambda_0 X$ $\because X^TAX=\lambda_0 X^TX>0\Rightarrow\lambda_0>0$

(2) 当$\lambda_0=a+bi$, $(b\neq 0)$ 则必有$\overline{\lambda_0}=a-bi$也是$A$的特征值

而$\lambda_0\cdot\overline{\lambda_0}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2>0$

$p254\ \ 8(1)$ 显然 $(A^TA)^T = A^TA$ 设 $f = X^T(A^TA)X = (AX)^T(AX)$

设 $A_{m\times n}X = \left[b_1,\cdots,b_m\right]^T \Rightarrow f = b_1^{\ 2}+\cdots+b_m^{\ 2} \geq 0$ 命题得证

$(2)\ R(A_{m\times n}) = n \Leftrightarrow \forall X \neq \theta, A_{m\times n}X = \left[b_1,\cdots,b_m\right]^T \neq \theta$

$\Leftrightarrow \forall X \neq \theta\ \ f = X^T(A^TA)X = (AX)^T(AX) = b_1^{\ 2}+\cdots+b_m^{\ 2} > 0$

$\Leftrightarrow A^TA$ 为正定矩阵

$$p254\ 10\ \ B = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \Lambda^TA\Lambda = \Lambda^TC^TC\Lambda$$

$= (C\Lambda)^T(C\Lambda)$ $\qquad$ (设$A = C^TC$, $\left|C\Lambda\right| \neq 0$)

$P254\ \ 11\ \because (AB)^T = B^TA^T = BA = AB$

另一方面 设λ是$C = AB$ 任意一个特征值，X为对应特征向量

则$CX = \lambda X \Rightarrow (AB)X = \lambda X \Rightarrow BX = \lambda A^{-1}X \Rightarrow X^TBX = \lambda(X^TA^{-1}X)$

$\because A^{-1}, B$都是正定矩阵$\therefore X^TBX > 0$，$X^TA^{-1}X > 0 \Rightarrow \lambda > 0$