第七章 线性空间

线性空间理论是数学理论的一个重要基石，也是科学计算的重要基础，它在能源、环境保护、流体力学等工程领域有着极其重要的应用。

线性空间理论的研究也是体现了代数学中突出的共性研究的思想。

本章，我们将讨论数域上线性空间的初步理论。
借助线性空间和线性变换我们也将进一步加深对性方程组和矩阵的理解。

§7.1 运算的刻画

运算是代数理论的要素之一. 在本节中, 我们利用映射来刻画两类运算.

设 X, Y 是两个非空集合, 取 $x \in X,\ \ y \in Y$, 称 (x, y) 为一个**有序元素对**.

称集合 $\{(x,y)|\forall x \in X, \forall y \in Y\}$ 为 X 与 Y 的一个**直积**或 **Descartes (笛卡儿)** 积

通常记作
$$X \times Y = \{(x,y)|\forall x \in X, \forall y \in Y\}.$$

若 $X = Y$, 则记 $X^2 = X \times X$.

例 1 设 $X = Y = \mathbb{R}$, 则所有有序数对 (x, y) 的全体就形成平面上点的坐标全体. 依上述描述, 平面解析几何所涉及的平面可以记为 $\mathbb{R}^2$, 或

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \right\}.$$

定义 1 设 X, Y, Z 为三个非空集合,

若 $\varphi : X \times Y \to Z$

是一个定义在积集$X \times Y$ 上，取值于非空集合Z 中的映射。

称映射φ为从集合X, Y到集合Z中的一个二元运算。

如$X = Y = Z$,则称映射φ: $X \times X \to X$为（定义在）集合X(上）的二元运算。

对于任意一个从集合 X, Y 到集合 Z 中的二元运算 φ,

若$x \in X, y \in Y, z \in Z$ 满足：$z = \varphi(x, y)$

则简记为：$z = x\varphi y$ (符号φ有时用$+, \oplus, \otimes, \circ$等符号表示)

例2 设 $X = \{$ 在区间 $[a, b]$ 上定义的实值函数的全体 $\}$, 令

$$f(x) \circ g(x) = f(x)g(x), \qquad \forall f(x), g(x) \in X,$$

则 $\circ$ 是从 $X \times X$ 到 X 中的一个映射, 因而它是 X 的一个二元运算. 事实上, 它就是函数的乘法运算.

例3，设$X = P^{m\times n}$.令$A \oplus B = A + B, \forall A, B \in P^{m\times n}$,

则$\oplus$构成了$X \times X$到X上的一个二元映射，事实上，就是矩阵的加法。

例4，设$X = P^{m\times n}$，$Y = P^{n\times s}, Z = P^{m\times S}$, 令$A \otimes B = AB, \forall A, B \in P^{m\times n}$,

则$\otimes$构成了$X \times Y$到Z上的一个二元映射，事实上，就是矩阵的乘法。

例5 设 $X = \mathbb{R}$, 定义

$$x \oplus y = \mathrm{e}^{x+y}, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

则 $\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 也是 $\mathbb{R}$ 的一个二元运算.

定义 2 设 $\mathbb{P}$ 是数域, X 为一个非空集合, 称任何一个定义在 $\mathbb{P}\times X$ 上, 取值于 X 中的映射 φ 为 X 的一个关于 $\mathbb{P}$ 的**数乘运算**. 通常, 若 $x,y\in X, c\in\mathbb{P}$ 满足 $y=\varphi(c,x)$, 则记 $y=cx$.

例6，设$X=\{$定义在$[a,b]$上全体实值函数$\}$，$P=R.$

定义$:k\otimes f(x)=k\cdot f(x),\qquad \forall k\in R, f(x)\in X,$

则$\otimes$构成一个数乘运算。

上述例子表明，许多我们熟悉的运算均为在定义1，或者定义2意义下的二元运算，或者数乘运算。

所以，二元运算，或者数乘运算比我们以前所接触的具体运算更有一般性。

7.2 线性空间的定义

定义1：设P是一个数域，其中元素用$a,b,c\cdots$等表示，

V是一个非空集合，其中元素用α，β，$\gamma\cdots$等表示，

如果下列条件满足，称V为数域P上的一个线性空间，

此时线性空间V中元素通常称为向量。

1 在V中定义一个二元运算，（或者称为加法）：

定义满足：$\forall\alpha,\beta\in V,\exists$ 唯一的$\gamma\in V$，使得：$\gamma=\alpha+\beta$ (加法封闭)

2 在V中定义一个数乘运算：

定义满足：$\forall\alpha\in V$，$\forall k\in P,\exists$唯一的$\gamma\in V$，使得：$\gamma=k\alpha$ (数乘封闭)

且上面两种运算还要必须满足下面8条运算规律$(k,l\in P)$

1, 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2, 结合律：$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

3, 在V中存在一个向量θ，$\forall\alpha\in V$，满足$\alpha+\theta=\theta+\alpha=\alpha$，称$\theta$为$V$的零向量

4, $\forall\alpha\in V$，$\exists\beta\in V$，使得$\alpha+\beta=\theta$，β称为α的负向量

5, $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

6, $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

7, $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

8, $1\cdot\alpha=\alpha$

线性空间：一个非空集合V,在数域P上定义了两种适合8条运算规律的封闭运算后，就构成为数域P上的线性空间记为$\{V,+,\cdot,P\}$.

例 1，集合$P^{m\times n}=\{A:A=(a_{ij})_{m\times n},a_{ij}\in P\}$

定义：加法：$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

数乘：$k\cdot A=(k\cdot a_{ij})_{m\times n},k\in P$

已经证明，这两种运算封闭且满足8 条运算规律，

集合$P^{m\times n}$ 有了这两种运算后,就成为数域P 上的线性空间，仍记为 $P^{m\times n}$

例2，记$P^{n}=P^{n\times 1}$,则也是P上的线性空间。（第四章的向量空间）

例3，$P[x]_n=\{a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0:a_i\in P\}$

(称为定义在数域P上，x的最高次幂小于n的全体多项式)

定义 加法：$f(x)+g(x)=(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$

数乘：$k\cdot f(x)=k\cdot(a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0)$

可以证明：两种运算封闭且满足8种运算规律

$\therefore$集合$P[x]_n$有了两种运算后也构成数域P上线性空间，仍记为$P[x]_n$

例4，设$P=R$,V为由全体正实数组成的集合，V中的加法运算定义如下：

$$\alpha \oplus \beta = \alpha\beta,\ \forall \alpha,\beta \in V.$$

数乘运算定义如下： $c\alpha = \alpha^c,\ \forall \alpha \in V,\ \forall c \in \mathbb{P}.$

试判断 V 关于 $\oplus$ 及数乘运算是否构成 $\mathbb{P}$ 上的线性空间.

解，显然加法封闭，数乘封闭。

$\because\ \alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$ $\quad\therefore$交换律成立

$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma).$ $\quad\therefore$结合律成立

任取 $\alpha \in V$, $1 \oplus \alpha = 1\alpha = \alpha$, 故 1 为 V 的一个零元素.

任取 $\alpha \in V$, 则 $\dfrac{1}{\alpha} \in V$, 且 $\alpha \oplus \dfrac{1}{\alpha} = \alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} = 1$, 所以 $\dfrac{1}{\alpha}$ 为 α 的负元素

任取 $\alpha \in V$ 及任意的 $c,d \in \mathbb{P}$, $(cd)\alpha = \alpha^{cd} = (\alpha^d)^c = c(d\alpha)$.

任取 $\alpha \in V$ 及任意的 $c,d \in \mathbb{P}$,

$$(c+d)\alpha = \alpha^{c+d} = \alpha^c \cdot \alpha^d = \alpha^c \oplus \alpha^d = c\alpha \oplus d\alpha.$$

任取 $\alpha,\beta \in V$ 及任意的 $c \in \mathbb{P}$, $c(\alpha \oplus \beta) = (\alpha\beta)^c = \alpha^c\beta^c = \alpha^c \oplus \beta^c = c\alpha \oplus d\beta.$

任取 $\alpha \in V$, $1\alpha = \alpha^1 = \alpha$.

上述验证说明, V 关于所定义的运算构成 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间.

例5 复数域C关于数的加法和乘法，可以构成实数域R上的线性空间。

但是实数域R关于数的加法和乘法，不可以构成复数域C上的线性空间。

例6，设P是一个数域，$V=\{\alpha\}$为只有一个元素的集合，

定义$:\alpha\oplus\alpha=\alpha;k\otimes\alpha=\alpha,\forall k\in P$

可以证明V关于两种运算构成数域P上的线性空间。

这个空间只含有唯一的元素---零元素。我们称为零空间。

定理1，设V是数域P上的一个线性空间，则

（1）零向量θ唯一　　(2)每个向量的负向量唯一

证明：设θ_1，θ_2是V的两个零向量，有零向量的性质

$$\theta_1+\theta_2=\theta_1 \quad (\because\ \theta_2\text{是零向量})$$

$$=\theta_2 \quad (\because\ \theta_1\text{是零向量}) \quad \therefore\ \theta_1=\theta_2$$

定理2，设V是数域P上的一个线性空间，则

$1\ 0\cdot\alpha=\theta$，　　$3\ (-k)\cdot\alpha=k\cdot(-\alpha)=-(k\cdot\alpha)$,

$2\ \ k\cdot\theta=\theta$,　　4 若 $k\cdot\alpha=\theta$ 则 $k=0$ 或 $\alpha=\theta$.

7.3 向量的线性关系

1，两组定义:线性表示与线性相关性
2，线性相关性的性质
3，在P^n中，线性表示与线性相关的判断
4，两组定义之间的联系

7.3.1 两组定义

定义1 (线性组合，线性表示)

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$s$个$V$中向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$是数域$P$中任意$s$个数，

则称$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个线性组合

若对$\beta\in V$，存在数$k_1,k_2,\cdots,k_s\in P$,使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$,

则称β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示,否则称$\beta$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示。显然,零向量$\theta$可由任意向量组线性表示

定义2 (线性相关，线性无关)

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$,如果存在一组数域$P$中不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta \quad (*)$$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，

否则(*)成立$\Leftrightarrow k_1=k_2=\cdots=k_s=0$就称向量组线性无关。

例1，设

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\text{ 和 }\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\ \gamma=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\in P^3=P^{3\mathrm{x}1}$$

$\because\ \beta=1\cdot\alpha_1+2\cdot\alpha_2,\therefore\ \beta$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示

$$\text{又}\because\forall k_1,k_2\in P,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=\gamma$$

$\therefore\gamma$却不能由α_1,α_2线性表示。

又$\because 1\cdot\alpha_1+2\cdot\alpha_2+(-1)\cdot\beta=\theta\ \therefore$向量组$\alpha_1,\alpha_2$，$\beta$线性相关

$$\text{而}k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3r=\begin{bmatrix}k_1\\k_2+2k_3\\k_3\end{bmatrix}=\theta\Leftrightarrow k_1=k_2=k_3=0\ \therefore\alpha_1,\alpha_2,\gamma\text{线性无关}$$

7.3.2 线性相关性的性质

1，一个向量组中有部分向量线性相关 $\Rightarrow$ 该向量组线性相关。

2，一个向量组线性无关$\Rightarrow$它的任意一个部分组线性无关。

3，含有零向量的向量组必线性相关。

4，单个向量：$k\cdot\alpha=\theta \Rightarrow \begin{cases}\alpha\text{线性相关} \Leftrightarrow \alpha=\theta \\ \alpha\text{线性无关} \Leftrightarrow \alpha\neq\theta\end{cases}$

5，非零α,β线性相关，必存在$0\neq k\in P$,使得$\Rightarrow \alpha+k\beta=\theta$

α,β线性无关，$\forall t\in P$ $,\alpha+t\beta\neq\theta$

6，在R^2上，非零向量α，β线性相关$\Leftrightarrow\alpha$，β共线(或者平行）；

非零向量α，β线性无关$\Leftrightarrow\alpha$，β相交。

在R^3上，非零向量α，β线性相关$\Leftrightarrow\alpha$，β共线(或者平行）；

非零向量α，β，γ线性相关$\Leftrightarrow\alpha$，β，γ共面；

非零向量α，β，γ线性无关$\Leftrightarrow\alpha$，β，γ异面。

7.3.3 在线性空间P^n中，线性表示，线性相关性与线性方程组的联系.

1 P^n 中的线性表示：

(参考第四章4.1)

设有向量$\beta=(b_1 b_2 \cdots b_n)^T$，和向量组$\alpha_i=\left[a_{1i} a_{2i} \cdots a_{ni}\right]^T, i=1,\cdots,s$

设β能由向量组$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$线性表示，即能找到一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s \in P$

使得：$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$,

$$\Leftrightarrow \; k_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + k_s\begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = \beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{1s}k_s = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2s}k_s = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{ns}k_s = b_n \end{cases}$$

记 $A_{n\times s} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{bmatrix} = [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s]_{n\times s}$

$$\Leftrightarrow AX = \beta \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow R(A) = R(\overline{A})$$

$X = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = [A \,\vdots\, \beta]$

性质2，在P^n 中，考察β能否由$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$线性表示，

$$设A_{n\times s}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s] \quad \overline{A}=[A\vdots\beta]$$

(1)β 能由$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$ 线性表示

$$\Leftrightarrow AX=\beta 有解$$

$$\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})$$

特别，当$R(A)=R(\bar{A})$=s时，表示方法唯一；

当$R(A)=R(\bar{A})$<s时，表示方法无穷多种。

(2)β不能由$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$线性表示

$$\Leftrightarrow AX=\beta 无解$$

$$\Leftrightarrow R(A)\neq R(\bar{A})$$

2, P^n 中向量的线性关系(线性相关，线性无关)

设$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s \in \mathrm{P}^n$线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零数$k_1,k_2,\cdots,k_s \in P$，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$,

$$\Leftrightarrow k_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}+\cdots+k_s\begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix}=\theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1s}k_s=0 \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2s}k_s=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{ns}k_s=0 \end{cases}$$

记 $A_{n\times s}=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s]$

$$X=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $AX=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow R(A_{n\times s})<S$ (向量组中向量的个数)

性质3 在P^n中，考察向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性关系

记$A_{n\times s}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$，

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $A_{n\times s}X=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow R(A_{n\times s})<S$ (S 为向量组中向量的个数)

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无相关 $\Leftrightarrow$ $A_{n\times s}X=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow R(A_{n\times s})=S$ (S 为向量组中向量的个数)

推论1 P^n 中任意$n+1$个向量必线性相关

推论2 P^n 中n个向量组成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，

记 $A=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]_{n\times n}$，则

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关

$\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow R(A)<n \Leftrightarrow AX=0$有非零解

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关

$\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow R(A)=n \Leftrightarrow AX=0$只有零解

例2 在R^4中，$\alpha_1=[1\quad 0\quad 2\quad 1]^T$ $\alpha_2=[1\quad 1\quad 1\quad 1]^T$ $\alpha_3=[2\quad 1\quad 3\quad 2]^T$ $\alpha_4=[2\quad 5\quad -1\quad 4]^T$

(1)α_4 能否用α_1，α_2，α_3 表示，α_3 能否由α_1，α_2，α_4 线性表示

(2)判断下列向量组的线性关系 $(a)\alpha_1$，α_2，α_3，α_4 $(b)\alpha_1$，α_2，α_3 $(c)\alpha_1$，α_2，α_4

解，记 $\overline{A}=[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&1&1&5\\2&1&3&-1\\1&1&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&1&-3\\0&1&1&5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ (阶梯形)

(1) $\because R(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2\neq R(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vdots\alpha_4)=3$ $\therefore\alpha_4$不能由$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$线性表示

$\because R(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)=3=R(\alpha_1\alpha_2\alpha_4\vdots\alpha_3)$ $\therefore\alpha_3$能由$\alpha_1\alpha_2\alpha_4$线性表示

$\bar{B}=[\alpha_1\alpha_2\alpha_4\vdots\alpha_3]\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-3&\vdots&1\\0&1&5&\vdots&1\\0&0&1&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&1\\0&1&0&\vdots&1\\0&0&1&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$

$$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+0\cdot\alpha_4$$
$$=\alpha_1+\alpha_2$$

(约化阶梯形)

(2) $\because R[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4]=3<4\Rightarrow\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 线性相关

$R[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]=2<3\Rightarrow$ 向量组(b)线性相关

$R[\alpha_1\alpha_2\alpha_4]=3\Rightarrow$ 向量组(c)线性无关

例3, 设α_1， α_2， α_3 是线性空间V中的3 个线性无关的向量，

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$， $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$， $\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

证明，β_1， β_2， β_3 线性无关

证明 设有$k_1\cdot\beta_1+k_2\cdot\beta_2+k_3\cdot\beta_3=\theta \quad (*)$

$$\Rightarrow k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=\theta$$

$$\therefore\ (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=\theta \qquad (\#)$$

Q $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线 性 无 关

$$\therefore (\#)\text{成立}\Leftrightarrow \begin{cases} k_1+\quad k_3=0 \\ k_1+k_2\quad =0 \quad (\$) \\ \quad k_2+k_3=0 \end{cases}$$

$$\text{Q}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \therefore \text{方 程 组 } (\$) \text{ 只 有 零 解}$$

$\therefore (*)$成立，只有$\mathrm{k}_1=\mathrm{k}_2=\mathrm{k}_3=0 \quad \therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关

7.3.4 线性表示与线性相关性的联系.

定理1 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中至少有一个向量可由其余的向量线性表示。

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$线性无关$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意一个向量都不能由由其余的向量线性表示。

证明$\Rightarrow$ 设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s线性相关，

则有不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$

不妨设$k_1\neq 0$，则有 $\alpha_1=-\dfrac{1}{k_1}(k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)$

$\Leftarrow$ 不妨设 $\alpha_1=k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$

则有:$(-1)\cdot\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关

定理2，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，

则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且表示方式唯一.

证 明 $\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线 性 相 关

$\therefore$ 存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k_0$ 使得，

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+k_0\beta=\theta \qquad (*)$$

下证 $k_0\neq 0$，反设 $k_0=0$ 则对(*)，有不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$

使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=\theta \qquad (**)$

这与已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关矛盾 $\therefore k_0\neq 0$

$$\therefore \beta=-\frac{1}{k_0}(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)$$

下 证 唯 一 性 ， 设

$$\beta=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_s\alpha_s$$
$$=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha$$

则有 $(t_1-l_1)\cdot\alpha_1+(t_2-l_2)\cdot\alpha_2+\cdots+(t_s-l_s)\cdot\alpha_s=\theta$ （#）

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\therefore$（#）成立 $\Leftrightarrow t_i=l_i$ $(i=1,\cdots,s)$ 唯一性成立

例4, 已知向量组α_1，α_2，α_3 线性相关,α_2，α_3，α_4 线性无关，证明：

$(1)\alpha_1$ 能由α_2，α_3 表示 $(2)\alpha_4$ 不能由α_1，α_2，α_3 线性表示

证明（1）$\because \alpha_2$，α_3 线性无关，

又 α_2，α_3，α_1 线性相关

$\therefore \alpha_1$ 可由α_2，α_3 线性表示，且表示方式唯一

（2）反设 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

由（1）知 $\alpha_1 = t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3$ 代入得到

$$\alpha_4 = (k_1t_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1t_3 + k_3)\alpha_3$$

这与已知 α_2，α_3，α_4线性无关矛盾

例5，在线性空间$P[x]_4$中，判断下列向量组的线性相关性:

$f_1(x)=1+x, f_2(x)=x+x^2, f_3(x)=x^2+2x^3, f_4(x)=x-x^3.$

解：考察 $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+c_3 f_3(x)+c_4 f_4(x)=0,(c_i \in P)$ （1）

则有：$c_1+(c_1+c_2+c_3)x+(c_2+2c_3)x^2+(2c_3-c_4)x^3=0$

$$\therefore 有:\begin{cases} c_1 & =0 \\ c_1+c_2+c_3 & =0 \\ c_2+2c_3 & =0 \\ 2c_3-c_4 & =0 \end{cases} \quad （2）$$

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$\therefore$（2）有非零解，$\therefore$ $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$线性相关。

7.4 向量组的线性表示及等价

定义1，设有两个向量组 (I) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$；(II) $\beta_1,\cdots,\beta_s$

如果向量组(I)中的每个向量都可由向量组（II）线性表示，

则称向量组(I)可由向量组(II)线性表示。

由定义设 $\alpha_j = m_{1j}\beta_1 + m_{2j}\beta_2 + \cdots + m_{sj}\beta_s$

$$= [\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_s]\begin{bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{sj} \end{bmatrix} \quad (1) \qquad (j = 1,\cdots,r)$$

$$\therefore [\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_r] = [\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_s]\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1r} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{s1} & m_{s2} & \vdots & m_{sr} \end{bmatrix}$$

$$= [\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_s]M_{s\times r} \quad (2)$$

类似于矩阵乘法，我们称表达式(1), (2)为形式矩阵运算。

形式矩阵的表示是线性代数重要的基本关系式. 不难验证, 形式矩阵运算具有

结合律 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)(AB)=((\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)A)B.$

传递性 若

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)C,$$

$$(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_t)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)D,$$

则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)DC,$$

这里, A,B,C 及 D 为相应的矩阵 , $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 及 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 为线性空间中相应的向量组.

定理3，设有两个向量组 (Ⅰ) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$；(Ⅱ) $\beta_1,\cdots,\beta_s$

如果：(1) 向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示；

(2) $r>s$

则：向量(Ⅰ)必线性相关。

证明：由已知（1），存在$M_{s\times r}$，使得：

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r]=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_s]M_{s\times r}$$

考虑：$\theta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$

$$=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{bmatrix}=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_s]M_{s\times r}K$$

其中$K=[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_r]^T$

如果 $M_{sr}X=\theta$ 有非零解 $K\Rightarrow$ 向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r线性相关。

由已知（2），$R(M_{s\times r})\le\min(s,r)=s<r$ (未知量个数)

$\therefore\ M_{s\times r}X=\theta$ 有非零解 $K=[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_r]^T$ $\therefore$向量(Ⅰ)线性相关。

定理4，设有两个向量组:(Ⅰ) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$;(Ⅱ)$\beta_1,\cdots,\beta_s$

如果 (1),向量组(Ⅰ)可由向量组（Ⅱ）线性表示;

(2),向量组(Ⅰ)线性无关。

则： $r \le s$

定义2，数域P上线性空间V中，如果两个向量组能互相线性表示，则称这两个向量组等价。

性质 向量组的等价具有自反性，对称性，传递性。

定理5，两个等价的，线性无关的向量组所含向量个数相等。

7.5 向量组的极大线性无关组与向量组的秩

定义1 设有向量组：　(Ⅰ) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

它的一个部分组为：　(Ⅱ) $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$，$(\mathrm{r} \le \mathrm{m})$

如果向量组(Ⅱ) 满足下列两个条件：

(1) 线 性 无 关，

(2) $\forall \alpha_k \in$ (Ⅰ)，一定可以由向量组 (Ⅱ) 线性表示;

[(2) 等价于：原向量组（Ⅰ）的任意向量 α_k，添加进向量组(Ⅱ) 后，
所得的$r+1$个向量$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}, \alpha_k$ 必线性相关。]

则称向量组(Ⅱ) 是原向量组(Ⅰ) 的一个极大线性无关组。

例 已知$\alpha_1=[1,0,2,1]^T,\alpha_2=[1,2,0,1]^T,\alpha_3=[2,1,3,2]^T,\alpha_4=[2,5,-1,4]^T$

求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组。在选定一个极大线性无关组后，将其余向量用该极大线性无关组表示。

解 记：$A=[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4]\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&1&-3\\0&1&1&5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

考察 $(1)\ \alpha_1,\alpha_2$

$(2)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$(3)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

$(4)\ \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

$(5)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

可以发现

向量组(2),(5)线性相关所以不是极大线性无关组

虽然向量组(1)线性无关，但α_4不能由(1)线性表示

所以也不是原向量组的极大线性无关组

向量组(3)(4)是原向量组的极大线性无关组

所以一个向量组的极大线性无关组可能不唯一

如取向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为极大线性无关组，下面来表示α_3

$$因为A=[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4]\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&1&-3\\0&1&1&5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$记\bar{B}=[\alpha_1\alpha_2\alpha_4\vdots\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&-3&\vdots&1\\0&1&5&\vdots&1\\0&0&1&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&1\\0&1&0&\vdots&1\\0&0&1&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

(约化阶梯形)

$$\therefore\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$$

性质1.任意一个由有限个向量组成的向量组必存在极大线性无关组；
且向量组与它的极大线性无关组等价；

性质2.一个向量组的任意两个极大线性无关组必等价，
且所含向量的个数相等；

定义2.一个向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为向量组的秩。

性质3.秩为r的向量组中，

（1）任意$r+1$个向量必线性相关；

（2）任意r个线性无关的向量都可作为该向量的一个极大线性无关组。

性质4，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ $(s<+\infty)$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 中的 s 个向量，则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关

$\Longleftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$本身就是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组

$\Longleftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s.$

例 设$A_{3\times 2}=[\alpha_1 \quad \alpha_2]$ $\quad B_{3\times 2}=[\beta_1 \quad \beta_2]$

问 向量组$\alpha_1 \quad \alpha_2$ 与向量组$\beta_1 \quad \beta_2$ 等价$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$矩阵$A, B$ 等价

$$设A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=[\alpha_1 \quad \alpha_2], B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=[\beta_1 \quad \beta_2]$$

显然：$\because R(A)=R(B) \therefore A$与$B$ 等价

但是$\because \alpha_2$ 不能由$\beta_1 \quad \beta_2$ 线性表示

$\therefore$向量组$\alpha_1 \quad \alpha_2$与向量组$\beta_1 \quad \beta_2$ 不等价

结论 秩相等是矩阵等价的充要条件，

但仅是向量组等价的必要条件

7.6 基 维数 坐标

1, 基和维数
2, 坐标及作用

7.6.1 定义及例子

定 义1 设 V 是 数 域 P 上 的 一 个 线 性 空 间，则 V 中满足下列条件的一个向量组 $\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_n$，称为 V 的一组基：

1. $\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_n$ 线性无关；
2. $\forall \alpha \in V, \alpha$ 可由 $\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_n$ 线性表示。

基中所含向量个数称为线性空间 V 的维数，记为 $\dim V$.
(所以，基即为线性空间中的一组有序极大线性无关组)

设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 (非零空间), 当我们把 V 中的所有向量的全体看成一个向量组时, 若该向量组存在一个由有限个向量所构成的极大线性无关组, 则称 V 是有限维的, 否则称 V 是无限维的. 当 V 是有限维时, 称其任意一个极大线性无关组所含的向量个数为线性空间 V 的维数, 并记之为 $\dim V$.

当 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的零空间时, 我们认定它也是有限维的而且其维数为 0. 若 V 是无限维的, 则记 $\dim V = +\infty$.

在线性代数课程中, 我们主要研究有限维线性空间的性质.

例1 P^3 中，两个向量组：

$$(1)\quad e_1=[1\quad 0\quad 0]^T, e_2=[0\quad 1\quad 0]^T, e_3=[0\quad 0\quad 1]^T$$

$$(2)\quad \xi_1=[1\quad 0\quad 0]^T, \xi_2=[1\quad 1\quad 0]^T, \xi_3=[1\quad 1\quad 1]^T$$

显然 向量组(1)线性无关；

且 $\forall \alpha=[x_1\quad x_2\quad x_3]^T \in P^3, \alpha=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$

即 α 可由向量组（1）线性表示

$\therefore$ 向量组（1）是 P^3 已知基，且 $\dim P^3=3$

显然，向量组 e_2, e_3, e_1，也是 P^3 的一组基。

同理 向量组（2）也是 P^3 一组基。可以证明 P^3 中有无穷组基。

$\because$ 向量组（1）是 P^3 中形式最简单的一组基 $\therefore$ 称为 P^3 的常用基

例2 P^n 的常用基： $e_1 = [1 \quad 0 \quad \mathrm{L} \quad 0]^T$

$e_2 = [0 \quad 1 \quad \mathrm{L} \quad 0]^T$ $\qquad \therefore \dim P^n = n$

$\mathrm{L} \quad \mathrm{L} \quad \mathrm{L}$

$e_n = [0 \quad 0 \quad \mathrm{L} \quad 1]^T$

例3 $P^{m \times n}$ 的常用基 $E_{ij} \quad (i = 1 \cdots m, j = 1 \cdots n)$。

$$\therefore \dim P^{m \times n} = m \times n$$

[E_{ij}为第i行，第j列元素为1，其余元素为零的$m\times n$矩阵，称为矩阵单位]

例4 $P[x]_n$ 的常用基为 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$。

$$\therefore \dim P[x]_n = n$$

7.6.2 坐标及作用

定 义 2 设 V 是 数 域 P 上 的 n 维 线 性 空 间， 即 $\dim V = n$,

又 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为 V 一 组 基，

则 $\forall \alpha \in V, \alpha$ 可由基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 唯一的线性表示

设 $\alpha = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n](x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$= [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]X$

其中 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \in P^n$

称为 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标

定理1 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 V 一组基，

则对于V中任意一个向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$； 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$在基下坐标分别为$X_1,X_2,\cdots,X_s$，

即：
$$\begin{cases} \alpha_1=a_{11}\xi_1+a_{21}\xi_2+\cdots+a_{n1}\xi_n=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]X_1 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \alpha_s=a_{1s}\xi_1+a_{2s}\xi_2+\cdots+a_{ns}\xi_n=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{bmatrix}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]X_s \end{cases}$$

$$\therefore 有:[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_s]=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{bmatrix}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n][X_1\ \ \cdots\ \ X_s]$$
$$=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]A_{n\times s}$$

则:$\alpha_1\cdots\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow R(A_{n\times s})<s$($s$为向量组中向量的个数);

$\alpha_1\cdots\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow R(A_{n\times s})=s$

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(X_1,X_2,\cdots,X_s)=r(A_{n\times s})$$

推论1, n维线性空间V中，任意$n+1$个向量必线性相关。

推论2，设$\dim V = n$，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为V的一组基，

设α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_n为V中n个向量，

设$\alpha_i = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] X_i$，（i=1…n），记 $A_{n\times n} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$

则：α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_n 线性相关 $\Leftrightarrow |A_{n\times n}| = 0$

α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_n 线性无关 $\Leftrightarrow |A_{n\times n}| \neq 0$

推论3，在$\dim V = n$中，则任意n个线性无关的向量都是V的一组基。

问题（1）如果向量组$\alpha_1, \cdots$，$\alpha_s \in P^n$ 如何求秩（或极大线性无关组）

（2）如果向量组$\alpha_1, \cdots$，$\alpha_s \notin P^n$ 如何求秩（或极大线性无关组）

如何证明P^n的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\le n)$的线性关系？

方法1，从定义出发，

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta$

方法2，利用矩阵的秩等于矩阵列向量组的秩

令：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，求出$R(A)$与$m$比较

方法3，利用基下坐标构成的矩阵

找到P^n一组基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，求出α_i在基下坐标X_i

有：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)(X_1,X_2,\cdots,X_m)$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A_{n\times m}$$

例 在$P[x]_4$中下列向量组能否作为$P[x]_4$的一组基

（1）向量组 $f_1(x)=1+2x^2+2x^3, f_2(x)=1+x+2x^2$

$f_3(x)=1+2x^2 \qquad , f_4(x)=1+3x+2x^3$

(2) 向量组 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_5(x)=1+3x+3x^3$

解，$\because \dim P[x]_4=4, \therefore P[x]_4$任意四个线性无关的向量都是$P[x]_4$的一组基

（1）取$P[x]_4$常用基 $1,\ x, x^2, x^3$，求出$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$在常用基下的坐标

$$f_1(x)=1+2x^2+2x^3=\begin{bmatrix}1, & x, x^2, x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\\2\end{bmatrix},\quad f_2(x)=1+x+2x^2=\begin{bmatrix}1, & x, x^2, x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix},\cdots$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix}f_1 & f_2 & f_3 & f_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1, & x, x^2, x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 3\\2 & 2 & 2 & 0\\2 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1, & x, x^2, x^3\end{bmatrix}A_{4\times 4}$$

$\because |A|=2\neq 0 \ \therefore f_1, f_2, f_3, f_4$线性无关 $\therefore$ 可作为$\dim P[x]_3=4$ 的一组基

例 $a=?$，$P^{2\times2}$中向量组线性无关：

$$A_1=\begin{bmatrix}1&3\\-1&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&a\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&2\end{bmatrix},A_4=\begin{bmatrix}2&3\\-1&2-a\end{bmatrix}$$

解，取$P^{2\times2}$中常用基：$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$， 则$A_1=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})(1,3,-1,0)^T,\cdots$

$$\therefore (A_1,A_2,A_3,A_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\3&1&-1&3\\-1&-1&0&-1\\0&a&2&2-a\end{bmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})A$$

$$\because A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\&1&2&-3\\&&1&-2\\&&&6-2a\end{bmatrix}$$

$\therefore$当$a\neq3,R(A)=4$此时，

A_1,A_2,A_3,A_4线性无关。

（显然当$a=3$时，A_1,A_2,A_3,A_4线性相关，且A_1,A_2,A_3为一个极大线性无关组）

7.7 过渡矩阵，坐标变换公式

定义1 设dimV=n， V的两组基 (Ⅰ) $\xi_1, \quad \xi_2, \cdots, \quad \xi_n$

(Ⅱ) $\eta_1, \quad \eta_2, \cdots, \quad \eta_n$

设：$\eta_i = m_{1i}\xi_1 + m_{2i}\xi_2 + \cdots + m_{ni}\xi_n = [\xi_1, \quad \xi_2, \cdots, \quad \xi_n]\begin{bmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{bmatrix}$ (i=1⋯n)

即 $[\eta_1, \quad \eta_2, \cdots, \quad \eta_n]=[\xi_1, \quad \xi_2, \cdots, \quad \xi_n]\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}=[\xi_1, \quad \xi_2, \cdots, \quad \xi_n]M$

则称 矩阵M 为从基 (Ⅰ) 到基 (Ⅱ) 的过渡矩阵。 显然，M可逆？

定理 1(坐标变换公式) 设 $\alpha \in V$， 设 α 在基 (Ⅰ) 下坐标为 X，

α 在基 (Ⅱ) 下坐标为 Y

即 $\alpha = [\xi_1, \quad \xi_2, \cdots, \quad \xi_n]X = [\eta_1, \quad \eta_2, \cdots, \quad \eta_n]Y$

如果$[\eta_1, \quad \eta_2, \cdots, \quad \eta_n]=[\xi_1, \quad \xi_2, \cdots, \quad \xi_n]M$

则 $X = MY$ 或者 $Y = M^{-1}X$

例　在 P^3 中有两组基

(Ⅰ) $\xi_1=[1\quad 2\quad 1]^T,\ \xi_2=[2\quad 3\quad 3]^T,\ \xi_3=[3\quad 7\quad 1]^T$

(Ⅱ) $\xi_1^*=[9\quad 24\quad -1]^T,\ \xi_2^*=[8\quad 22\quad -2]^T,\ \xi_3^*=[12\quad 28\quad 4]^T$

求 (1) 求从基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵；

(2) 设 α 在基(Ⅰ)下的坐标为 $X=[0\quad 1\quad -1]^T$ 求 α 在基(Ⅱ)下的坐标 Y。

解　设 M 是从基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵　即 $[\xi_1^*,\xi_2^*,\xi_3^*]=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]M$

(1) $M=A^{-1}B$　　记 $A=[\xi_1,\xi_2,\xi_3],B=[\xi_1^*,\xi_2^*,\xi_3^*]$，则有 $B=AM$

$$\because [A\ \vdots\ B]=\begin{bmatrix}1&2&3&\vdots&9&8&12\\2&3&7&\vdots&24&22&28\\1&3&1&\vdots&-1&-2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&&&\vdots&1&0&0\\&1&&\vdots&-2&-2&0\\&&1&\vdots&4&4&4\end{bmatrix}\quad\therefore M=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\4&4&4\end{bmatrix}$$

(2) $\alpha=[\xi_1^*,\xi_2^*,\xi_3^*]Y=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]X\quad\therefore Y=M^{-1}X$

$$\because [M\ \vdots\ X]=\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&0\\-2&-2&0&\vdots&1\\4&4&4&\vdots&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&&&\vdots&0\\&1&&\vdots&-\frac{1}{2}\\&&1&\vdots&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\quad\therefore Y=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}^T$$

例， 在 $P^{2\times 2}$ 中有两组基

$$(\mathrm{I})\ E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{II})\ E_{11}^{\#}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},E_{12}^{\#}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},E_{21}^{\#}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},E_{22}^{\#}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

求 (1) 从基 (Ⅰ) 到基 (Ⅱ) 的过渡矩阵；

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, 求 A 在两组基下的坐标。

解 (1) 设有 $\begin{bmatrix}E_{11}^{\#} & E_{12}^{\#} & E_{21}^{\#} & E_{22}^{\#}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22}\end{bmatrix}M$

$$\because E_{11}^{*}=[E_{11}\quad E_{12}\quad E_{21}\quad E_{22}][1\quad 1\quad 1\quad 1]^T,$$

$$E_{12}^{*}=[E_{11}\quad E_{12}\quad E_{21}\quad E_{22}][1\quad 1\quad 1\quad 0]^T,$$

$$E_{21}^{*}=[E_{11}\quad E_{12}\quad E_{21}\quad E_{22}][1\quad 1\quad 0\quad 0]^T,$$

$$E_{22}^{*}=[E_{11}\quad E_{12}\quad E_{21}\quad E_{22}][1\quad 0\quad 0\quad 0]^T,$$

$$\therefore M=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22}\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}E_{11}^{\#} & E_{12}^{\#} & E_{21}^{\#} & E_{22}^{\#}\end{bmatrix}Y$

则 $X=[1\quad 2\quad 3\quad 4]^T$， $Y=M^{-1}X$

$$[M\ \vdots\ X]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[E\ \vdots\ Y]\Rightarrow Y=[4\quad -1\quad -1\quad -1]^T$$

例 16 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数域 $\mathbb{P}$ 中 n 个互不相同的数. 令

$$l_i(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n), \quad i=1,2,\cdots,n.$$

1) 证明多项式函数组 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 是 n 维线性空间 $\mathbb{P}[x]_n$ 的一个基.

2) 取 $\mathbb{P}=\mathbb{C}$, $a_i=\varepsilon_i(\,i=1,2,\cdots,n)$, 这里 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为全体 n 次单位根, 即

$$\varepsilon_i = \mathrm{e}^{\frac{2\pi(i-1)}{n}\mathrm{i}}, \qquad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 求由基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到基 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 的过渡矩阵.

证明，（1）$\because \dim \mathrm{P}[x]_n = n, \therefore$ 只要证明$l_1(x),\cdots,l_n(x)$线性无关即可.

考察：$c_1l_1(x)+c_2l_2(x)+\cdots+c_nl_n(x)=0, \quad (c_i\in P)$ (*)

先证明(*)成立 $\Leftrightarrow c_1=0$ 令$x=a_1 \Rightarrow c_1(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)=0,$

$\Rightarrow c_1=0$

同理可得，$c_i=0 \ (i=2,\cdots,n)$

即(*)成立 $\Leftrightarrow c_i=0 \ (i=1,2,\cdots,n)$

$\therefore l_1(x), l_2(x),\cdots,l_n(x)$线性无关

2) 由 $\varepsilon_i^n = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$

得到

$$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\cdots(x - \varepsilon_n) = (x - \varepsilon_i)l_i(x), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

或

$$l_i(x) = \frac{x^n - 1}{x - \varepsilon_i} = \varepsilon_i^{n-1} + \varepsilon_i^{n-2}x + \cdots + \varepsilon_i x^{n-2} + x^{n-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

$\therefore$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \\ \varepsilon_1^{n-2} & \varepsilon_2^{n-2} & \cdots & \varepsilon_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

就是从基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到基 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 的过渡矩阵.

4.6 矩阵的秩与向量组的秩之间的联系

三秩归一

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\right]=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

定 理 $r(A)$

$=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=A$的列向量组的秩;

$=r\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\right)=A$的行向量组的秩

推论 $A_{n\times n}$可逆

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists B$,使得 $AB = E$,(或者 $BA = E$)

$\Leftrightarrow A^*$可逆

$\Leftrightarrow A$可表示为一系列初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow AX = 0$只有零解

$\Leftrightarrow A$的等价标准形为E

$\Leftrightarrow A$的行向量组线性无关$\Leftrightarrow A$行满秩

$\Leftrightarrow A$的列向量组线性无关$\Leftrightarrow A$列满秩

再考察

$$\text{设}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Leftrightarrow A_{m\times n}X=\beta$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\beta \quad \Leftrightarrow \beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n$$

$\therefore AX=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})$

$\Leftrightarrow$ 向量 β 可由A的列向量组线性表示

$\Leftrightarrow$向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 等价

$\Leftrightarrow$ 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$=秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)$

$\Leftrightarrow L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)$

- 例2.设A是5X3的矩阵，秩(A)=3.下述结论不正确的是:
- (1)A的三个列向量组必线性无关
- (2) A的五个行向量组必线性相关
- (3) A的任意三个行向量组必线性无关
- (4) A的行向量组中有三个行向量线性无关

7.8 子空间

定义1 数域P上线性空间V的一个非空集合W， 如果关于V的加法和数乘，也构成数域P上线性空间，则称W为V的一个子空间。

显然,$\{\theta\}$和V，是V的两个子空间，称为V的平凡子空间。

显然，W要成为V的一个子空间必须要满足下列条件：

1，W是V的非空子 集；

2，$\forall \alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha + \beta \in W$;

3，$\forall \alpha \in W, \forall k \in P \Rightarrow k \cdot \alpha \in W$;

4,满足8条运算规律。

定理1: 线性空间V的一个非空子集W，如果满足2,3两个条件，则W是V的一个子空间。

例 1 在 R^3 下述非空子集合中，哪些 R^3 的子空间？

$$W_1=\left\{[x,y,z]^T \;\vdots\; x+y+z=0\in R\right\}$$

$$W_2=\left\{[\mathrm{x},\ y,0]^T \;\vdots\; x,y\in R\right\}$$ （xoy平面）

$$W_3=\left\{[x,y,xy]^T \;\vdots\; x,y\in R\right\}$$

解，W_1是R^3的子空间，

设$\alpha=[x_1,y_1,z_1]^T$，$\beta=[x_2,y_2,z_2]^T\in W_1$，则$x_1+y_1+z_1=0$，$x_2+y_2+z_2=0$

$\because \alpha+\beta=\left[x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\right]^T$，

显然$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=0\therefore \alpha+\beta\in W_1$

又$\because k\alpha=\left[kx_1,ky_1,kz_1\right]^T$,满足：$kx_1+ky_1+kz_1=0\therefore k\alpha\in W_1$.

W_3不是R^3的子空间，

取$\alpha=[1,0,0]^T\in W_3,\beta=[0,\ 1,0]^T\in W_3$

$\because \alpha+\beta=[1,\ 1,0]^T\notin W_3$

例2 在$P^{n\times n}$中， $W_1=\left\{A\in P^{n\times n} \;\vdots\; A=A^T\right\}$ (对称矩阵的集合)

$W_2=\left\{A\in P^{n\times n} \;\vdots\; A=-A^T\right\}$ (反对称矩阵的集合)

W_1,W_2 是不是$P^{n\times n}$ 的子空间？

例 3， $A\in P^{m\times n},\beta\in P^n,\overline{A}=\left[A\vdots\beta\right]$, 又 设 $R(A)=R(\overline{A})=r<n$

记 $W_0=\left\{X\in P^n \vdots AX=0\right\}\subset P^n$

$W=\left\{X\in P^n \vdots AX=\beta\right\}\subset P^n$

可以证明 W_0 是P^n 的一个子空间 (称为$AX=0$的解空间）

但是W 不是P^n 的一个子空间（？）

例4，设V 是数域P上线性空间，α_1，α_2，…，$\alpha_t \in V$

记 $L(\alpha_1，\alpha_2,\cdots，\alpha_t)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t \vdots t_i \in P\}$

可以证明：$L(\alpha_1，\alpha_2,\cdots，\alpha_t)$是$V$ 的一个子空间

称$L(\alpha_1，\alpha_2,\cdots，\alpha_t)$由向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_t$ 生成的子空间

特别地，设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是V的一组基，则$V=L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$

即，线性空间V可看成由一组基所生成的。

下面我们讨论如何求子空间$L(\alpha_1，\alpha_2,\cdots，\alpha_t)$的基和维数

性 质 设 线 性 空 间 V 中 两 个 向 量 组

(Ⅰ) $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$　　　(Ⅱ) $\beta_1,\cdots,\beta_s$

则有: (1) $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)=L(\beta_1,\cdots,\beta_s) \Leftrightarrow$ (Ⅰ)与(Ⅱ)等价

(2) $\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)=$向量组(Ⅰ)的秩

且(1)的任意一个极大线性无关组都是子空间$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)$的一组基。

这 个 性 质 给 了 如 何 求 子 空 间 基 和 维 数 的 方 法

例5 设 $W=\left\{A\in P^{3\times 3}:A=-A^{T}\right\}$ 即 $A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}$

求 W 的一组基和维数

解 $P^{3\times 3}$ 的常用基 $E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23},E_{31},E_{32},E_{33}$

方法1，令 $\eta_1=E_{12},\eta_2=E_{13},\eta_3=E_{21},\eta_4=E_{23},\eta_5=E_{31},\eta_6=E_{32}$

则(1) $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6$ 线性无关

(2) $\forall A\in W$, A 可由 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6$ 线性表示

$\therefore \eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6$ 为 W 的一组基，且dimW=6

方法2 令 $\xi_1=E_{12}-E_{21},\xi_2=E_{13}-E_{31},\xi_3=E_{23}-E_{32}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$

则 (1) $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in W$,且线性无关

(2) $\forall A\in W$, A 可由 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示

$\therefore \xi_1,\xi_2,\xi_3$ 为 W 的一组基，且 $\dim W=3$

例 $W=\left\{A\in P^{n\times n}\vdots tr(A)=0\right\}$,求$W$的一组基及$\dim W$

解，$A=\begin{bmatrix} x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

其中$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$

取$E_1=diag(-1,1,0,\cdots,0)$,

$E_2=diag(-1,0,1,\cdots,0),\cdots,E_{n-1}=diag(-1,0,0,\cdots,1)$

再取：$E_{ij}\ (\mathrm{i}\neq \mathrm{j})$

显然两组向量线性无关，

且$A=\sum_{i=1}^{n-1}x_iE_i+\sum_{i,j=1\,(\mathrm{i}\neq\mathrm{j})}^{n}a_{ij}E_{ij}$

$\therefore \dim W=(\mathrm{n}\text{-}1)+(\mathrm{n}^2-n)=n^2-1$

例，称$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ddots & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$为$n$ 阶循环矩阵

证明，数域P上的全体n阶循环矩阵的集合W是$P^{n\times n}$的子空间，且求W的一组基

解　在W中取向量

$$B_0=E,B_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 \end{bmatrix},\cdots,$$

$$B_{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

显然，$B_{n-1},\cdots,B_1,B_0$线性无关

$\because a_{n-1}B_{n-1}+\cdots+a_1B_1+a_0B_0=0 \Leftrightarrow a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$

又$\forall A\in W$, $A=a_{n-1}B_{n-1}+\cdots+a_1B_1+a_0B_0$

$\therefore B_{n-1},\cdots,B_1,B_0$为$W$的一组基，$\dim W=n$

$\therefore W=L(B_{n-1},\cdots,B_1,B_0)\Rightarrow W$ 是$P^{n\times n}$的一个子空间

例，证明5维线性空间V中的4维子空间有无穷多个，且这些子空间互不相等。

证明，设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$为$V$的一组基，

取$x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_{4+k}=4+k,k(k=0,1,2,\cdots)$

构造向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{3+k}$:

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{4+k})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4+k\\1^2&2^2&3^2&(4+k)^2\\1^3&2^3&3^3&(4+k)^3\\1^4&2^4&3^4&(4+k)^4\end{bmatrix}_{5\times4}$$

$$\because\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4+k\\1^2&2^2&3^2&(4+k)^2\\1^3&2^3&3^3&(4+k)^3\end{vmatrix}$$

$=D(1,2,3,4+k)\neq0$

$(k=0,1,2,\cdots)$

$\therefore\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{4+k}$线性无关，

且当$l\neq k$时，β_l不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{4+k}$线性表示，

即向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{4+k}$

与向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{4+l}$不等价

$\therefore L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{4+k})\neq L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{4+l})$

记 $V_k=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_{4+k})$,则$\dim V_k=4\quad(k=0,1,2,\cdots)$

例， $V=\left\{\begin{bmatrix} a & & \\ & a+b & \\ & & a+b+c \end{bmatrix} a,b,c\in P\right\}$ 是 $P^{3\times 3}$ 的子空间， 则向量组

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$ 是否都是 V 的一组基？

解，显然 $A_i\in V$，线性无关，$B_i\in V$，线性无关

又 $$\begin{bmatrix} a & & \\ & a+b & \\ & & a+b+c \end{bmatrix}=aA_1+bA_2+cA_3=aB_1+(a+b)B_2+(a+b+c)B_3$$

$\therefore$ 两组向量都是 V 的一组基 且dimV=3

4.8 线性方程组解的结构

这里，我们从线性空间的角度，
分析当线性方程组有无穷多解时，
这些解的结构有什么特点？

分两种情形讨论：

齐次线性方程组解的结构：基础解系

非齐次线性方程组的解的结构：对应齐次解空间的平移

4.8.1 齐次线性方程组解的结构：基础解系

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \theta$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_n\alpha_n = \theta$$

$$\Leftrightarrow A_{m\times n}X = 0$$

如果 $R(A_{m\times n}) = r < n$ (自变量的个数)

则齐次线性方程组有无穷多解

记 $W = \{X \mid AX = O,\ X \in P^n\}$

则 $W \subseteq P^n$, 是 $AX = O$ 的全体解向量的集合，

已经证明 W 为 P^n 的一个子空间。

记$W=\{X \mid AX=O,\ \ X\in P^n\}$

定义1，设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t\in W$,如果：

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$线性无关；

(2) $\forall \xi\in W,\xi$可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$线性表示。

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$为W的一个基础解系。

($\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$为W的一个极大线性无关组，也是子空间W的一组基)

如果能找到W的一个基础解系，则W中任何一个解向量都可由该基础解系线性表示。

因此，解的结构完全完全确定。

下面，我们就求W的基础解系。

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow R(A_{m\times n}) = r$$

取$n-r$个变量为自由变量，设取$x_{r+1},L\ ,x_n$为自由变量，得到方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1r+1}t_1 - c_{1r+2}t_2 - \cdots - c_{1n}t_{n-r} \\ x_2 = -c_{2r+1}t_1 - c_{2r+2}t_2 - \cdots - c_{2n}t_{n-r} \\ \cdots \\ x_r = -c_{rr+1}t_1 - c_{rr+2}t_2 - \cdots - c_{rn}t_{n-r} \\ x_{r+1} = t_1 \\ x_{r+2} = t_2 \\ \cdots \\ x_n = t_{n-r} \end{cases}$$

$t_i \in P$ 任意

(称为通解的方量形式)

把上面通解改写为向量的形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \cdots + t_{n-r}\xi_{n-r}$$ (称为通解的向量形式)

下证，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为$W$的一个基础解系。

$(1)\ \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r} \in W \quad ($即$A\xi_i = 0)$

$(2)\ \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关

$(3)\ \forall X \in W, X$可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表示

$$
记B=\left[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}\right]_{n\times(n-r)}=\begin{bmatrix} -c_{1,r+1} & -c_{1,r+2} & \dots & -c_{1r} \\ -c_{2,r+1} & -c_{2,r+2} & \dots & -c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_{r,r+1} & -c_{r,r+2} & \dots & -c_{rr} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{r\times r} \\ E_{n-r} \end{bmatrix}
$$

一方面：$R(B_{n\times(n-r)})\le n-r$

另一方面$:B$中有$\left|E_{n-r}\right|=1\neq 0$

$\therefore R(B_{n\times(n-r)})\ge n-r$

$\therefore R(B_{n\times(n-r)})=n-r$

$\therefore \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关

定理，设$R(A_{m\times n})=r<n, W=\left\{X \mid A_{m\times n}X=0, X\in P^n\right\}$，

则W的任意一个极大线性无关组的任意一种排列称为齐次线性方程组的基础解系，

基础解系含有$n-r$个解向量(等于自由变量的个数)

(或者W为P^n的一个子空间，且$\dim W=n-r=$自由变量的个数)

由极大线性无关组的性质可以推出：

1.$AX=0$的基础解系不唯一(有无穷多组)

2.$AX=0$ 不同的基础解系中所含的向量个数相等，

一定等于自由变量的个数$(n-r)$，即$\dim W=n-r$。

3. $AX=0$的任意$n-r$个线性无关的解向量都是$AX=0$的一个基础解系.

4，当$AX=0$的基础解系只含有一个解向量时，$AX=0$的任意一个非零解都是$AX=0$的一个基础解系.

例，求齐次线性方程组的通解，且将通解用基础解系表示

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

解 $A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(约化阶梯形)

取x_3, x_5为自由变量，得通解

$$\begin{cases} x_1 = -t_1 + 6t_2 \\ x_2 = t_1 - \frac{5}{2}t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = 3t_2 \\ x_5 = t_2 \end{cases}$$

其中t_1，t_2均为任意常数

改写为向量形式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令 $\xi_1 = [-1,1,1,0,0]^T, \xi_2 = \left[6, -\frac{5}{2}, 0, 3, 1\right]^T$

则ξ_1，ξ_2 齐次方程$AX=0$ 的一组基础解系

方程组的通解 $X = t_1\xi_1 + t_2\xi_2$

t_1，t_2为任意常数

4.8.2，非齐次线性方程组的解的结构

设 $AX=b$ (Ⅰ)　　　　$AX=0$ (Ⅱ)

称(Ⅱ)为与(Ⅰ)相对应的齐次线性方程组,

(Ⅰ)与(Ⅱ)解之间有如下关系：

性质 1，设ξ_1,ξ_2为(Ⅰ)的解 $\Rightarrow \xi_1-\xi_2$ 为(Ⅱ)的解

2，ξ_0 为(Ⅰ)的解,$\overline{\xi}$ 为(Ⅱ)的解 $\Rightarrow \xi_0+\overline{\xi}$ 仍为(Ⅰ)的解

定理 (解的结构定理)

设ξ_0为(Ⅰ)的一个特解(即一个已知解)，则$AX=b$ 的任意解

$$X=\xi_0+\overline{\xi}\quad(\text{其中}\overline{\xi}\text{为(Ⅱ)的某个解})$$

$$=\xi_0+(t_1\xi_1+t_2\xi_2+\cdots+t_{n-r}\xi_{n-r})$$

(设 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$为(Ⅱ)的一个基础解系)

记 $W_0=\{X\mid AX=O, X\in P^n\}$，$\eta_0$是$AX=b$的任意一个已知解，则

由解的结构定理可以得到：

$$\begin{aligned}\eta_0+W_0&=\{\eta_0+\eta|\eta\in W_0\}\\&=\{\eta_0+t_1\eta_1+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}|t_i\in\mathbb{P}, 1\leqslant i\leqslant n-r\}\end{aligned}$$

是 $AX=b$的解集

这个结果可以理解为：

非齐次线性方程组的解的全体，

是其对应齐次线性方程组的解空间

沿着特解作了一个平移动所得。

例 $A_{m\times n}X=b$ 设$R(A)=R(\overline{A})=r<n$

记$W=\left\{X \vdots AX=b, X\in P^n\right\}$问$W$中是否存在极大线性无关组？

解 设η_0为$AX=b$的一个解

$\xi_1,\cdots,\ \xi_{n-r}$为$AX=0$的一组基础解系

考察向量组$\eta_0,\eta_0+\xi_1,\cdots,\ \eta_0+\xi_{n-r}$ $(n-r+1$个向量$)$

可 以 证 明 ：

1，$\eta_0,\eta_0+\xi_1,\cdots,\ \eta_0+\xi_{n-r}\in W$

2，$\eta_0,\eta_0+\xi_1,\cdots,\ \eta_0+\xi_{n-r}$ 线 性 无 关

3，$\forall X\in W$，X可由$\eta_0,\eta_0+\xi_1,\cdots,\ \eta_0+\xi_{n-r}$线性表示

$\therefore\ \eta_0,\eta_0+\xi_1,\cdots,\ \eta_0+\xi_{n-r}$为$W$的一个极大线性无关组

例，解线性方程组，且将通解用对应齐次方程组的基础解系表示

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\text{解}, \bar{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \vdots & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

取x_3, x_5为自由变量得到通解

$$\begin{cases} x_1 = -4 - t_1 + 6t_2 \\ x_2 = \frac{5}{2} + t_1 - \frac{5}{2}t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = -2 + 3t_2 \\ x_5 = t_2 \end{cases} \quad t_1, t_2 \in P$$

写成向量形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令 $\eta_0 = \left[-4, \frac{5}{2}, 0, -2, 0\right]^{\mathrm{T}}$，则 η_0 为$AX = b$一个解

令 $\xi_1 = [-1, 1, 1, 0, 0]^T$， $\xi_2 = \left[6, -\frac{5}{2}, 0, 3, 1\right]$，

则 ξ_1，ξ_2 为 $AX = 0$ 的一个基础解系

$\therefore$ 通解 $X = \eta_0 + t_1\xi_1 + t_2\xi_2$

其中t_1，t_2为任意常数

例，设$R(A_{5\times3})=2$, η_1,η_2是$AX=b$的两个相异的解，

请用$AX=0$的基础解系来表示$AX=b$的全部解。

解，先求$AX=b$特解η,

可以取$\eta=\eta_1$,(或者η_2，或者$\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$)

再求$AX=0$的基础解系

$\because R(A_{5\times3})=2, \therefore AX=0$的基础解系中有3-2=1个向量

$\because \eta_1\neq\eta_2, \therefore \eta_1-\eta_2$是$AX=0$的一个非零解,$\therefore$ 是$AX=0$的基础解系

此时$AX=0$的任意一个非零解都是$AX=0$的基础解系

$\therefore AX=b$的通解：$X=\eta_1+k(\eta_1-\eta_2)$

(或者$X=\eta_2+k(\eta_1-\eta_2)$，或者$X=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)+k(\eta_1-\eta_2)$)

例 设 $A_{m\times n}\cdot B_{n\times t}=O$，求证：

(1) B 的列向量是齐次线性方程组 $AX=O$ 的解向量

(2) $R(A_{m\times n})+R(B_{n\times t})\le n$

(3) 若 $R(A_{m\times n})=n$，则 $B=O$

(4) 若 $B\neq O$，则 A 的列向量组线性相关

证明 1 令 $B=[\beta_1\quad,\cdots\quad,\beta_t]$ 则 $AB=A[\beta_1,\cdots,\beta_t]=[A\beta_1,\cdots,A\beta_t]=0$

$\therefore A\beta_i=0\quad(i=1,\cdots,t)$ 即 β_i是$AX=0$的解向量

2 设$R(\mathrm{A}_{m\times n})=r$，记$W=\left\{X\vdots AX=0,X\in P^n\right\}$,则$\dim W=n-r$ (等于自由变量个数)

$\because \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\in W\ \therefore R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\le n-r$

$\therefore R(B_{n\times t})=B$的列向量组的秩$\le n-r=n-R(A)\quad\therefore R(A)+R(B)\le n$

3 利用2即得

或 $\because R(A_{m\times n})=n\therefore AX=0$只有零解$\because A\beta_i=0\therefore\beta_i=0\therefore B=0$

4 $\because B\neq 0\therefore$ 有 B 的某一个列向量 $\beta_j\neq\theta$ 使得 $A\beta_j=0$

$\therefore A_{m\times n}X=0$ 有非零解 $\quad\therefore R(A_{m\times n})<n$

$\therefore A$ 的列向量组线性相关

已知两个方程组同解，求 a,b,c

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1-b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

$$解\ A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{行变换} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[a=2]{行变换} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 2 & -b^2 & c+1 \end{bmatrix} \because 同解 \therefore 2\le R(A_1)=R(A_2)\le 2 \ \therefore a=2$$

$$(1)\quad 的通解\begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \\ x_3=-t \end{cases} 代入(2)\Rightarrow\begin{cases} (-1-b+c)t=0 \\ (-2+b^2+c+1)t=0 \end{cases} 得到\begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases} 或\begin{cases} b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

$\because b=0,c=1$ 时 $R(A_2)=1$ 舍去 $\qquad \therefore a=2 \quad b=-1 \quad c=0$

例 设$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}, a_{33}=-1, a_{ij}=A_{ij}$

求(1) $|A|$ (2) 解方程 $AX=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$

解(1) 由已知 $A^*=A^T \quad \therefore AA^*=AA^T=|A|E$

$\therefore |A|^2=|A|^3 \Rightarrow |A|=1$ 或 $|A|=0$

又$\because a_{33}=-1, |A| \underline{\underline{\text{按第3行展开}}} a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$

$=a_{31}{}^2+a_{32}{}^2+a_{33}{}^2=a_{31}{}^2+a_{32}{}^2+(-1)^2\geq 1 \qquad \therefore |A|=1$

(2) $\because |A|=a_{31}{}^2+a_{32}{}^2+a_{33}{}^2=a_{31}{}^2+a_{32}{}^2+(-1)^2=1 \ \therefore a_{31}=a_{32}=0$

又 $A^{-1}=|A|^{-1}\cdot A^*=A^*=A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & 0\\ a_{12} & a_{22} & 0\\ a_{13} & a_{23} & -1\end{bmatrix}$

$\therefore X=A^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=A^T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

例， 设 $R(A_{m\times n}) = n - m$ ，$R(B_{n\times m}) = m$，又 $AB = 0$

若向量 $\eta \in P^n$ 满足 $A_{m\times n}\cdot\eta = 0$

则存在唯一向量 $\xi \in P^m$， 使得 $\eta = B\cdot\xi$

证明：$\because R(A_{m\times n}) = n-m$

$\therefore A_{m\times n}\cdot X = 0$ 的基础解系中含有 $n-(n-m) = m$ 个向量

$\because A_{m\times n}B_{n\times m} = 0$ 且$R(B_{n\times m}) = m$， 记B=$\begin{bmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}$

$\therefore B$ 的m 个线性无关列向量$\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_m$线性无关，

也正是$A_{m\times n}X = 0$ 的基础解系

$\therefore \eta$ 由基础解系$\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_m$唯一线性表示

记 $\eta = k_1\beta_1 + \cdots + k_m\beta_m = \begin{bmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 \\ \vdots \\ k_m\end{bmatrix} = B\xi$