# 第 二 章　行 列 式 与 矩 阵 的 秩

主要内容：

1，行列式的定义；

2，行列式的计算：

$$\text{计算方法：}\begin{cases}\text{利用行列式的性质(6+3)}\\ \text{利用行列式的展开(2种方式)}\end{cases}$$

3，矩 阵 的 秩 的 定 义；

4，矩阵的相抵（等价）。

## 2.1 预备知识：$n$-排列($n$阶排列)

定义1 由$1, 2, \ldots\ldots, n$共（$n>1$）个数码，组成的一个

有序数组$i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个$n$-排列($n$阶排列)。

例，考察由数码1,2,3 组成的全体3-(3阶)排列：

显然共有$3!=6$ 种 123, 132, 312, 321, 231, 213

可以发现：所有$3!=6$种不同的排法中，只有一种排法:123

其中的数字是按从左到右完全由小到大的自然顺序排列的，

我们规定：排列123 为标准排列。

而其余排列中，都有大的数排在小的数之前。

因此其余的排列都不完全是“顺序”，而是有“逆序”，

即其余的都不是标准排列.

关于排列：

1. 1，2，……，n这n个数码，共有n！种排列；

2. 定义排列：1 2 3……n，为是标准排列；

3. 在一个n−排列$i_1\cdots i_k\cdots i_j\cdots i_n$中，如果$i_j<i_k$，则称$i_j$与$i_k$构成一个逆序。

记$\tau(i_k)$为数码$i_k$右边比它小的数个数，称为数码$i_k$的逆序。

一个排列中每个数的逆序之和称为该排列的逆序数，

记为$\tau(i_1\cdots i_k\cdots i_j\cdots i_n)=\tau(i_1)+\tau(i_2)+\cdots+\tau(i_n)$

如果逆序数是偶数,称该排列为偶排列，反之为称为奇排列。

$\because \tau(123\cdots n)=0$,称标准排列为偶排列。

4. 对换：排列中有一对数交换位置称为对换。

定理1：对换改变排列的奇偶性。

5. n!(n>1)种排列中，奇偶排列各占一半。

例，求$\tau(35412)$

解 $\tau(35412)=\tau(3)+\tau(5)+\tau(4)+\tau(1)+\tau(2)$

$$=2 \quad +3 \quad +2 \quad +0 \quad +0$$

$$=7$$

所以，排列35412为奇排列

其中$\tau(3)=$数码3后面比3小的数码个数的和

$=2$

$\tau(5)=$数码5后面比5小的数码的个数和

$=3$

而排列31452因为是排列35412中5和1对换而来，

所以排列31452为偶排列

证明：对换改变排列的奇偶性　　(证明过程从特殊到一般)

证明1，先证特殊情形：相邻对换

$$i_1 \dots i_k i_{k+1} \cdots i_n \xrightarrow{i_k, i_{k+1}\text{对换}} i_1 \dots i_{k+1} i_k \cdots i_n$$

显然，其他$n-2$个数的逆序没有变化

当$i_k > i_{k+1}$时，对换后排列的逆序数减少1，

当$i_k < i_{k+1}$时，对换后排列的逆序数增加1，

$\therefore$ 相邻对换改变排列的奇偶性

2，再证明一般情形

$$i_1 \dots i_k i_{k+1} \cdots i_{k+l-1} i_{k+l} \cdots i_n \xrightarrow{i_k, i_{k+l}\text{对换}} i_1 \dots i_{k+l} i_{k+1} \cdots i_{k+l-1} i_k \cdots i_n$$

分两步，第一步：

$$i_1 \dots i_k i_{k+1} \cdots i_{k+l-1} i_{k+l} \cdots i_n \xrightarrow[\text{共}l\text{次相邻对换}]{i_k\text{分别向右与}i_{k+1},\cdots,\ i_{k+l}\text{相邻对换}} i_1 \dots i_{k+1} \cdots i_{k+l-1} i_{k+l} i_k \cdots i_n$$

第二步：$\xrightarrow[\text{共}l-1\text{次相邻对换}]{i_{k+l}\text{分别向左与}i_{k+l-1},\cdots,\ i_{k+1}\text{相邻对换}} i_1 \dots i_{k+l} i_{k+1} \cdots i_{k+l-1} i_k \cdots i_n$

$$\therefore\ i_1 \dots i_k i_{k+1} \cdots i_{k+l} \cdots i_n \xrightarrow{2l-1\text{次相邻对换对换}} i_1 \dots i_{k+l} i_{k+1} \cdots i_k \cdots i_n$$

$\therefore$ 利用上面结果一般对换也改变排列的奇偶性

证明: $n!$ 种排列中，奇偶排列各占一半。

证明：设 $n!$ 种排列中奇偶排列分别为 $p, g$ 种，

则 $p + g = n!$

不妨设 $p$ 个奇排列为：

$$\begin{cases} a_1a_2a_3\cdots a_n \\ b_1b_2b_3\cdots b_n \\ c_1c_2c_3\cdots c_n \\ \cdots\cdots \end{cases} \xrightarrow{\text{不妨选1,3位置对换}} \begin{cases} a_3a_2a_1\cdots a_n \\ b_3b_2b_1\cdots b_n \\ c_3c_2c_1\cdots c_n \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

得到 $p$ 个不同的偶排列

显然 $p \le g$， 同理 $p \ge g$ $\therefore p = g$

# 思 考 题

1, 下列叙述正确的是（ ）

$A$, 一个$n$ 阶排列中的任意两个元素对换，则改变$n$ 阶排列的奇偶性；

$B$, $n$（>1）阶排列中，奇偶排列一定各占一半；

$C$, 奇排列对换成标准排列的对换次数一定为奇数；

$D$, 偶排列对换成标准排列的对换次数一定为偶数；

# 2.2 方阵的行列式

行列式的定义早在矩阵引入的
160多年前由日本数学家关孝和，
德国数学家莱布尼茨在研究
线性方程组的求解过程中引入的。

在这里，我们所指的行列式，
即指数域P上的行列式。

我们这里的行列式的定义由瑞典
数学家克莱默Gramer(1704－1752)引入。

定义1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是数域$P$上的$n$ 阶方阵，$A$ 的行列式定义为:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots$，$n$的全排列

$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式也记作$|A|=|a_{ij}|_n$,或者$D_n$,或者$D$.

定义的解读：（三个要点）

（1）共有$n!$ 项代数和;

（2）每项有$n$个分别来自不同行，不同列元素的乘积;

（3）每项带有符号，当行标为标准排列时，该项的符号由列标的逆序数决定。

（当列标为标准排列时，该项的符号由行标的逆序数决定）

例1，一阶行列式$\left|a_{11}\right| = a_{11}$

例2　二阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1 j_1} a_{2 j_2}$

其中：$j_1 j_2$ 为1, 2 的全排列

$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

即$j_1 j_2 = 12,21$

例3. 三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中：$j_1 j_2 j_3$为1, 2, 3 的全排列

即$j_1 j_2 j_3 = 123$，132, 231, 213, 312, 321

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

关于符号的确定问题

设$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是$n$阶行列式展开的某一项，那它的符号有三种确定方式：

1，符号由行标和列标的逆序数之和结定 即$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$

2.重新排列使得行标为标准排列，则该项符号由列标的逆系数决定

3.重新排列使得列标为标准排列，则该项符号由行标的逆系数决定

考虑下面二项$a_{23}a_{12}a_{31}$，$a_{22}a_{12}a_{31}$，是否是3阶行列式中的项？如果是，确定其符号。

$\because a_{22}a_{12}a_{31}$中$a_{22}$和$a_{12}$处在同一列上，$\therefore a_{22}a_{12}a_{31}$不是3阶行列式展开的项

$\because a_{23}a_{12}a_{31}$中3个元素处在不同行，不同列上，$\therefore$是3阶行列式展开的项

$\therefore$符号为$(-1)^{\tau(213)+\tau(321)}$交换$a_{31}$，$a_{23}$得到$a_{31}a_{12}a_{23}$，符号为$(-1)^{\tau(312)+\tau(123)}$

显然$(-1)^{\tau(213)+\tau(321)}=(-1)^{\tau(312)+\tau(123)}=(-1)^{\tau(312)}$

例 1，计算如下四阶行列式 (称为关于主对角线上三角行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$=\sum_{j_1 j_2 j_3 j_4}(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

其中$j_1j_2j_3j_4$为1,2,3,4的全排列

$$\xlongequal[\text{只有当}j_4=4\text{时，}\ a_{44}\neq 0]{\text{从}j_4\text{开始讨论}} \sum_{j_1 j_2 j_3 4}(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{44}$$

$$\xlongequal[\text{只有当}j_3=3,4\text{时，}\ a_{3j_3}\neq 0]{\text{再考虑}j_3} \sum_{j_1 j_2 34}(-1)^{\tau(j_1 j_2 34)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{33}a_{44}$$

$$=\sum_{1234}(-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

例 2，计算关于次对角下三角行列式：

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{14} \\ & & a_{23} & a_{24} \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 j_3 j_4}(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3} a_{4 j_4}$$

其中$j_1 j_2 j_3 j_4$为1,2,3,4的全排列

$$\xlongequal[\text{只有当}j_1=4\text{时，}a_{14}\neq 0,\cdots]{\text{从}j_1\text{开始讨论}}\sum_{4321}(-1)^{\tau(4321)} a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$$

$$=(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$$

- 利用行列式定义可以求一些特殊类型的行列式

1.关于主对角线的上（下）三角行列式（2种）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2.关于次对角线的上（下）三角行列式（2种）

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{nn}$$

## 思考题

已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 $x^3$ 的系数.

**解** 含 $x^3$ 的项有两项，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$=x^3-2x^3=-x^3$$

故 $x^3$ 的系数为 $-1$.

# 如何求行列式的值

- 1.利用定义求一些的特殊类型行列式
- （介绍常用10种）
- 2.利用行列式的性质（6性质+3推论）
- 3.利用行列式的展开（2种展开方式+3定理）
- 对于一般的行列式，利用行列式的性质和展开，先化成特殊类型行列式，再利用行列式的定义或者已有的结论进行求解。

# 2.3 行列式的性质(6+3)

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,将$A$ 的第一，二,⋯，$n$ 行，分别变为相应的第一，二,⋯，$n$ 列，则构成新的矩阵，称为$A$ 的转置矩阵，记为$A^T$ 或者$A'$。

$|A^T|=|A'|=D^T$,称为$|A|=D$ 的转置行列式。

性 质1 $D=D^T$　　性质的意义：在行列式中，行和列的地位一样！

(以3阶为例)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{令}a_{ij}=b_{ji}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$$=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}b_{j_11}b_{j_22}b_{j_33}$$

$$\therefore D=D^T$$

$$=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

性质2：互换两行（列），行列式变号。

推论1 $D$ 中有两行（列）元素对应相等 $\Rightarrow D=0$

证明：(以4阶为例)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

（其中$j_1j_2j_3j_4$是1,2,3,4的全排列）

交换$D$中的第2,4行得到$D_1$　则$D=-D_1$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \overset{\text{令}\begin{cases} a_{2j}=b_{4j} \\ a_{4j}=b_{2j} \end{cases}}{\underset{\text{令当}i\neq 2,4\text{时}a_{ij}=b_{bj}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}b_{1j_1}b_{2j_2}b_{3j_3}b_{4j_4} \overset{\text{交换}b_{2j_2},\ b_{4j_4}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}b_{1j_1}b_{4j_4}b_{3j_3}b_{2j_2}$$

$$=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_4}a_{3j_3}a_{4j_2} \overset{\text{交换}\tau(j_1j_2j_3j_4)\text{中}j_2,\ j_4}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} -\sum_{j_1j_4j_3j_2}(-1)^{\tau(j_1j_4j_3j_2)}a_{1j_1}a_{2j_4}a_{3j_3}a_{4j_2}=-D$$

性质3：（倍乘）用数c乘D的某一行（列）等于用c乘D。或者，D中某一行（列）有公因子c,则c可以提到D的外面。

推论2：如果D中某一行（列）元素全为0，则D=0。

性质4: 如果D中有两行（列）对应元素成比例，则D=0。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} (ka_{3j_3})$$

$$= k \cdot \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质5 分行(列)的可加性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论3 如果$D$的某行（列）每个元素都是$k$ 个元素的和，

则$D$ 可以表示为为$k$个行列式的和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}^* & a_{22}+a_{22}^* & a_{23}+a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}(a_{2j_2}+a_{2j_2}^*)a_{3j_3}$$

$$= \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} + \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}^*a_{3j_3}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

反过来，如果发现有$k$个只有某一行（列）不同的行列式，可以合成一个行列式。

性质6，把$D$某行(列)的$c$倍加到另一行(列)上,$D$的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ca_{11} & a_{22}+ca_{12} & a_{23}+ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ca_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ca_{21}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ca_{31}+a_{33} \end{vmatrix}$$

总结:(1) 在行列式性质的9句话中，有3句提到行列式的值等于零。

推论1，推论2，性质4

(2) 性质1反映的是行列式行与列地位相同；性质5和它的推论3反映行列式的分开与合并。

(3) 所以，还剩下3句话。即性质2，性质3，性质6

利用行列式的性质主要对行列式进行如下三种变换：

1.互换（性质2） $\xrightarrow{R_{ij}}$, $(\xrightarrow{C_{ij}})$

2.倍乘（性质3） $\xrightarrow{k\cdot R_i}$, $(\xrightarrow{k\cdot C_i})$

3.倍加（性质6） $\xrightarrow{R_j+k\cdot R_i}$, $(\xrightarrow{C_j+k\cdot C_i})$

从而，把一个普通的行列式变成一个特殊类型的行列式(比如，10种特殊类型)，再利用行列式的定义求特殊类型的行列式（所以要记住10种特殊类型的行列式的结果）

知识点回顾：

## 1，行列式定义：

$$D=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots$，$n$的全排列

解读定义（三个要点）：

（1）共有$n!$ 项代数和;

（2）每项有$n$个分别来自不同行，不同列元素的乘积；

（3）每项带有符号，当行标为标准排列时，
该项的符号由列标的逆序数决定。

（当列标为标准排列时，该项的符号由行标的逆系数决定）

## 2，利用行列式定义得到特殊类型的行列式

(1).关于主对角线的上（下）三角行列式（2种）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2).关于次对角线的上（下）三角行列式（2种）

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\ldots a_{n1}$$

## 3,行列式的性质

性质1, $D = D^T$ 意义?

性质2,交换 $\rightarrow$ 推论1, $D = 0$ (二行相等)

性质3,数乘 $\rightarrow$ 推论2, $D = 0$ (一行全为零)

性质4, $D = 0$ (二行成比例)

性质5,分行(列)可加性 $\rightarrow$ 推论3

性质6,倍加

## 思考题：

1, 选择题

下列叙述正确的是（）

$A$,如果行列式中有两行元素相等，则行列式的值一定等于零；

$B$,如果行列式中任意两行元素不相等，则行列式的值一定不等于零；

$C$,如果行列式中有两行元素成比例，则行列式的值一定等于零；

$D$,如果行列式中任意两行元素不成比例，则行列式的值一定不等于零;

$E$,如果$n$阶行列式中等于零的元素大于$n^2-n$个，则行列式的值一定等于零。

2, 若$D_n=\left|a_{ij}\right|=a$,则$D=\left|-a_{ij}\right|=$ $(-1)^n a$

B的反例：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$，$D$的反例：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0$

- 例1.计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & -9 & 13 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{===} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$D \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1}}{===} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 \\ 0 & -13 & 25 \\ 0 & 26 & -34 \end{vmatrix} \overset{r_3+2r_2}{===} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 \\ 0 & -13 & 25 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-13)\times 16=208$$

（化成为关于主对角线的上三角行列式）

例2 $D=\begin{vmatrix}1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 & 4+a_1\\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 & 4+a_2\\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 & 4+a_3\\ 1+a_4 & 2+a_4 & 3+a_4 & 4+a_4\end{vmatrix} \xlongequal[]{\substack{c_2-c_1\\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 2 & 4+a_1\\ 1+a_2 & 1 & 2 & 4+a_2\\ 1+a_3 & 1 & 2 & 4+a_3\\ 1+a_4 & 1 & 2 & 4+a_4\end{vmatrix} = 0$

$or: D \xlongequal[]{\substack{c_4-c_3\\ c_3-c_2}} \begin{vmatrix}1+a_1 & 2+a_1 & 1 & 1\\ 1+a_2 & 2+a_2 & 1 & 1\\ 1+a_3 & 2+a_3 & 1 & 1\\ 1+a_4 & 2+a_4 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$ $\quad \mathrm{D} \xlongequal[]{\substack{c_3-c_2\\ c_4-c_3}} \begin{vmatrix}1+a_1 & 2+a_1 & 1 & 1\\ 1+a_2 & 2+a_2 & 1 & 1\\ 1+a_3 & 2+a_3 & 1 & 1\\ 1+a_4 & 2+a_4 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$ ???

$$D \xlongequal{??} \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_1 & a_1 & a_1 & a_1\\ a_2 & a_2 & a_2 & a_2\\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3\\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2+a_1 & 3+a_1 & 4+a_1\\ 1 & 2+a_2 & 3+a_2 & 4+a_2\\ 1 & 2+a_3 & 3+a_3 & 4+a_3\\ 1 & 2+a_4 & 3+a_4 & 4+a_4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 & 4+a_1\\ a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 & 4+a_2\\ a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 & 4+a_3\\ a_4 & 2+a_4 & 3+a_4 & 4+a_4\end{vmatrix} \xlongequal[]{\substack{C_2-C_1\\ C_3-C_1}} \begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1 & 4+a_1\\ 1 & a_2 & a_2 & 4+a_2\\ 1 & a_3 & a_3 & 4+a_3\\ 1 & a_4 & a_4 & 4+a_4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_1 & 2 & 3 & 4+a_1\\ a_2 & 2 & 3 & 4+a_2\\ a_3 & 2 & 3 & 4+a_3\\ a_4 & 2 & 3 & 4+a_4\end{vmatrix} = 0$$

- 例3.计算5阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix}$$

解法1， D$\xlongequal{c_1+\sum_{j=2}^{5} c_j}$

$$\begin{vmatrix} a+4b & b & b & b & b \\ a+4b & a & b & b & b \\ a+4b & b & a & b & b \\ a+4b & b & b & a & b \\ a+4b & b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+4b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b & b \\ 1 & a & b & b & b \\ 1 & b & a & b & b \\ 1 & b & b & a & b \\ 1 & b & b & b & a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i-r_1} (a+4b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+4b)(a-b)^4$$

解法2，$D \xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b-a & a-b & & & \\ b-a & & a-b & & \\ b-a & & & a-b & \\ b-a & & & & a-b \end{vmatrix}$ （箭形）

$$\xlongequal{c_1+\sum_{j=2}^{5} c_j} \begin{vmatrix} a+4b & b & b & b & b \\ 0 & a-b & & & \\ 0 & & a-b & & \\ 0 & & & a-b & \\ 0 & & & & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+4b)(a-b)^4$$

例5.已知18053，83283，61042，48576，57776能被23整除

$$\text{证明行列式 } D=\begin{vmatrix}1&8&0&5&3\\8&3&2&8&3\\6&1&0&4&2\\4&8&5&7&6\\5&7&7&7&6\end{vmatrix}\text{ 也能被23整除}$$

问题：如果行列式中的每个元素都是整数，行列式的值是否一定为整数?

$$D\xlongequal{C_5+(10^4C_1+10^3C_2+10^2C_3+10C_4)}\begin{vmatrix}1&8&0&5&18053\\8&3&2&8&83283\\6&1&0&4&61042\\4&8&5&7&48576\\5&7&7&7&57776\end{vmatrix}$$

例4，已知$abcd=1$计算 $D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}=0$$

例5，计算$D=\begin{bmatrix} a_1 & -a_1 & & & \\ & a_2 & -a_2 & & \\ & & a_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

# 2.4 行列式的展开

展开方式: $\begin{cases} 1.\text{按某一行(列)展开（两个定理）} \\ 2.\text{按某}k\text{行(列)展开}(k \geq 2)\text{（一个定理）} \end{cases}$ 展开目的：降阶！

## 一 按某一行（列）展开

定义1（$k$ 阶子式） 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,

在$A$ 中任取$k$ 行，任取$k$ 列$(k \leq \min(m,n))$

位于交叉处$k^2$ 个元素， 按照原来位置构成的$k$ 阶行列式，

称为矩阵$A$ 的$k$ 阶子式。

$$例如对于A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix},$$

如取$A$ 的1,3行，取2,4列，

则得到$A$ 的一个二阶子式: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$

一个$n$ 阶行列式的任意一个$k$ 阶子式，也称为该行列式的$k$ 阶子式。

定义2（余子式，代数余子式）

在$n$阶行列式$D=\left|a_{ij}\right|_n$中,（或者，在矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$中）

划掉元素$a_{ij}$所在的第$i$行和第$j$列，

余下的元素按原来的位置构成$n-1$阶方阵, 记为$B_{ij}$,

$B_{ij}$的行列式: $\left|B_{ij}\right|=M_{ij}$，称为元素$a_{ij}$的余子式，

又记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称为元素$a_{ij}$的代数余子式.

例如 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

$a_{ij}$的余子式 $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$

$a_{23}$的代数余子式: $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$

问题，$a_{ij}$的余子式$M_{ij}$，跟$a_{ij}$等于多少有没有关系？

定理1：（按某一行（列）展开定理）

$n$阶行列式$D=\left|a_{ij}\right|_n$的值，

一定等于它的任意一行(列)的每个元素$a_{ij}$，

与其自己的代数余子式$A_{ij}$乘积的和.

即：$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$，（$i=1,2,\cdots,\ n$）

称为按第$i$行展开

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\ (j=1,2,\ldots,\ n)$$

称为按第$j$列展开

或者：$n$ 阶行列式$D=\left|a_{ij}\right|_n$的任一行(列)的每个元素$a_{ij}$与其自己的代数余子式$A_{ij}$乘积之和一定等于该行列式的值$D$.

# 证明过程是从特殊到一般的过程（以四阶为例）：

1，先证明特殊情形下展开定理的成立

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{\text{按第一行展开}}{=\!=\!=\!=\!=} a_{11}A_{11}$$

2.再证如下特殊情形展开定理也成立

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{23}A_{23}$$

3.证一般情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$$

证明,(以4阶行列式为例)

（按第二行展开）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$$

1， 先 证 明 特 殊 情 形 下 展 开 定 理 的 成 立

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{\text{按第一行展开}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} a_{11}A_{11}$$

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

其中$j_1j_2j_3j_4$，为1, 2, 3, 4的全排列

$$=\sum_{1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(1j_2j_3j_4)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

$$=a_{11}\sum_{j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_2j_3j_4)}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

其中$j_2j_3j_4$，为2, 3, 4的全排列

$$=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

2.再证如下特殊情形
展开定理也成立

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{23}A_{23}$$

$$D=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}=(-1)^{(1+1)+(2+1)}a_{23}M_{23}=a_{23}A_{23}$$

(利 用 结 果 1)

3.最后证一般情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+0+0+0 & 0+a_{22}+0+0 & 0+0+a_{23}+0 & 0+0+0+a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

(利 用 结 果 2)

$$=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$$

定理2.n阶行列式D中某一行(列)的每个元素

与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和一定等于零.

即：$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0, i\neq k$

或者：$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=0, j\neq k$

例如$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{r_4+r_1}{=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}+a_{11} & a_{42}+a_{12} & a_{43}+a_{13} & a_{44}+a_{14} \end{vmatrix}$

$=(a_{41}+a_{11})A_{41}+(a_{42}+a_{12})A_{42}+(a_{43}+a_{13})A_{43}+(a_{44}+a_{14})A_{44}$

$=(a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44})+(a_{11}A_{41}+a_{12}A_{42}+a_{13}A_{43}+a_{14}A_{44})$

$=D+(a_{11}A_{41}+a_{12}A_{42}+a_{13}A_{43}+a_{14}A_{44})$

一定有：$a_{11}A_{41}+a_{12}A_{42}+a_{13}A_{43}+a_{14}A_{44}=0 =\!= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}=D_1$

结合定理1和定理2，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j \quad \text{定理1}\\ 0, & i\neq j \quad \text{定理2}\end{cases}$$

同理可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j \quad \text{定理1}\\ 0, & i\neq j \quad \text{定理2}\end{cases}$$

例 6，计算行列式 $D=\begin{vmatrix}-1&1&-1&2\\1&0&1&-1\\2&4&3&1\\-1&1&2&-2\end{vmatrix}$

其中 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}$

$$=-\begin{vmatrix}-1&1&2\\2&4&1\\-1&1&-2\end{vmatrix}$$

解，如果直接按第二行展开有：$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$

$$=1\cdot A_{21}+0A_{22}+1A_{23}+(-1)A_{24}=A_{21}+A_{23}-A_{24}$$ (计算量大)

$$D\overset{\substack{c_1+c_4\\c_3+c_4}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1&2\\0&0&0&-1\\3&4&4&1\\-3&1&0&-2\end{vmatrix}=a_{24}A_{24}=(-1)(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&4\\-3&1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-4r_1}{=\!=}-\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\-3&1&0\end{vmatrix}=-(-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=1$$

（一般，如果当行列式某行(列)只有一个元素不等于零时，再利用行列式的展开时，可以简化计算。所以一般在展开前，先利用性质化简行列式）

- 例7，vandermonde行列式
- （1735-1796，法兰西院士，1772年提）

$$D(a_1,a_2,\cdots a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

- （证明 归纳法和行列式的展开）

结果分析：1，共有$\dfrac{n(n-1)}{2}$项连乘

2，$D(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0 \Leftrightarrow a_i\neq a_j,(i,j=1,2,\cdots,n)$

小知识：联想到一个现代组合理论的基本公式：

*chu-Vandermonde formula*（朱-范德蒙公式）

这里的朱，即朱世杰（1249-1314），元代四大数学家之一。1303 年出版的《四元玉鉴》中创造了四元术和高阶等差级数的求和方法。而法国数学家范德蒙提出相关理论是在 1772 年，前后相差近五百年。

1923 年，我国著名教育家，数学史家钱宝琮先生（1892-1974）首次把朱世杰的公式用组合形式发表在《学艺》上，使得世人对朱世杰理论有了重新认识。

说起钱宝琮老先生和我们浙大有很深渊源。1928 年经姜立夫先生引荐，钱宝琮先生进入浙大数学系，并担任一年系的系主任。1937 年钱先生随浙大西迁，一路上排除困难坚持学习。抗战胜利后，1946 年回到浙大，一直工作到 1956 年。钱先生在 1964 年著书《中国数学史》，让国内外史学家见证了中国数学有着悠久历史和光辉成就，中国数学在世界数学史上有着十分重要的地位。2008 年浙大出版社《一代学人钱宝琮》专门来纪念钱老先生。

例8，计算 $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&-1&1&-1\\2&3&9&27\\2&-2&4&-8\end{vmatrix}$

解 $D=2\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&3&9&27\\1&-2&4&-8\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&1^2&1^3\\1&-1&(-1)^2&(-1)^3\\1&3&3^2&3^3\\1&-2&(-2)^2&(-2)^3\end{vmatrix}$

$$=2\cdot D(1,-1,3,-2)=2(-1-1)(3-1)(-2-1)$$

$$\cdot(3+1))(-2+1)$$

$$\cdot(-2-3)$$

$$=480$$

例9， 已知 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 求 $1.A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$

$2.M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}$

$3.\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}$

1，解法1 $.A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=1\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{44}$

$$=a_{12}\cdot A_{14}+a_{22}\cdot A_{24}+a_{32}\cdot A_{34}+a_{42}\cdot A_{44}=0$$

解法2 $1\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{44}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=D_1=0$

(比较 $D$ 与 $D_1$ 同与不同)

2 $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}$

$=1\cdot A_{11}+(-1)A_{12}+1\cdot A_{13}+(-1)A_{14}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=D_2=-84$$

3.方法1, $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}=(A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41})+(A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42})$

$+(A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43})+(A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44})$

$=0+D+0+0=D$

方法2. $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}=(A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41})+(A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42})$

$+(A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43})+(A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44})$

$$=\begin{vmatrix}1&1&4&2\\1&1&2&5\\1&1&3&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&4&2\\1&1&2&5\\-1&1&3&3\\5&1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&1&2\\1&1&1&5\\-1&1&1&3\\5&1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&4&1\\1&1&2&1\\-1&1&3&1\\5&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+2&1&4&2\\1+1&1&2&5\\1-1&1&3&3\\1+5&1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&1&2+(-4)\\1&1&1&5+(-2)\\-1&1&1&3+(-3)\\5&1&1&1+(-1)\end{vmatrix}$$

方法3, 敬请期待！（第三章逆矩阵）

例11，Gramer法则 (Gramer(1704−1752),瑞士数学家,1750提出)

在线性方程组（*）中，如果:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{n2}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

1，$m=n$ (即方程数等于自变量个数)

2，系数矩阵的行列式：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ D= & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}$$

则线性方程组有唯一的解，且解可用行列式表示：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中：$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},(j=1,2,\cdots,n)$

显然，如果$a_{ij},b_k\in P$(某个数域)，则$x_i\in P,(i,j,k=1,2,\cdots,n)$

方法1，先证明解的唯一性：即$x_i=\dfrac{D_i}{D},(i=1,2,\cdots,n)$是(*)的唯一解

$$(*)\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{n2}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

设 $x_i=k_i$，（i=1, 2,⋯, n）是(∗)的一组解，代入(∗)

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1n}k_n=b_1\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{n2}k_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nn}k_n=b_n\end{cases}$$

先证，$k_1=\dfrac{D_1}{D}$

考察$k_1\cdot D=\begin{vmatrix}k_1a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\k_1a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\k_1a_{n1}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+\sum_{j=2}^{n}k_jc_j}\begin{vmatrix}k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\k_1a_{21}+k_2a_{22}+\cdots+k_na_{2n}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\k_1a_{n1}+k_2a_{n2}+\cdots+k_na_{nn}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\b_n&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=D_1$$

即：$k_1D=D_1$　　$\therefore$当$D\neq0$时，$k_1=\dfrac{D_1}{D}$

同理可得：$k_i=\dfrac{D_i}{D},(i=2,\cdots,n)$　$\therefore$唯一性得证

为证明$x_i=\dfrac{D_i}{D},(i=1,2,\cdots,n)$的确是(*)的解，还需把$x_i=\dfrac{D_i}{D}$代入$(*)$去验证即可。

只验证第一个方程：即：$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$

$$\because a_{11}\frac{D_1}{D}+a_{12}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{1n}\frac{D_n}{D}=\frac{1}{D}(a_{11}D_1+a_{12}D_2+\cdots+a_{1n}D_n)$$

$$=\frac{1}{D}(a_{11}\sum_{j=1}^{n}b_jA_{j1}+a_{12}\sum_{j=1}^{n}b_jA_{j2}+\cdots+a_{1n}\sum_{j=1}^{n}b_jA_{jn})$$

$$=\frac{1}{D}(b_1\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}+b_2\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{2i}+\cdots+b_n\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{ni})=b_1\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}}{D}=b_1$$

$$a_{11}D_1=a_{11}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\sum_{j=1}^{n}b_j\,A_{j1},$$

$$a_{12}D_2=a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{12}\sum_{j=1}^{n}b_jA_{j2},\cdots$$

方法2，证明

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1)\ \times A_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_2 & (2)\times A_{21} \\ \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n & (n)\times A_{n1} \end{cases}$$

系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

先用$D$的第一列元素的代数余子式$A_{j1}$乘第$j$个方程，再把$n$个方程相加

有：$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\cdots+a_{n2}A_{n1})x_2$

$$+\cdots+(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\cdots+a_{nn}A_{n1})x_n = b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}$$

$\Rightarrow Dx_1 = D_1$， 同理；$Dx_2 = D_2, \cdots$， $Dx_n = D_n$

$\therefore$ 有：$(**)\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ \cdots \\ Dx_n = D_n \end{cases}$

显然,(*)的解，一定是(**)的解

$\because$ 当$D \neq 0$时,(**)有唯一解，$x_i = \dfrac{D_i}{D},(i=1,2,\cdots,n)$，

$\therefore$ 如果(*)有解，只能是$x_i = \dfrac{D_i}{D},(i=1,2,\cdots,n)$

为证明$x_i = \dfrac{D_i}{D},(i=1,2,\cdots,n)$的确是(*)的解，还需把$x_i = \dfrac{D_i}{D}$代入(*)去验证即可。

例1，求解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-3 \end{cases}$$

解：显然，方程数=自变量数，

且系数行列式：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-153\neq 0$

$\therefore$由$cramer$法则，方程组有唯一解

又 $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=153$

$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=153$,

$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0$,

$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-153$,

$$\therefore\ x_1=\frac{D_1}{D}=-1, x_2=\frac{D_2}{D}=-1, x_3=\frac{D_3}{D}=0, x_4=\frac{D_4}{D}=1$$

关于$cramer$法则：

1；$cramer$法则的重要理论价值：

研究了方程组的系数与方程组解的存在性与唯一性关系

2，应用$cramer$法则求$n$个方程，$n$个自变量的解时：

(1).如果系数行列式$D \neq 0$, 方程组有解，且解唯一；

(2),如果方程组无解，或者有两个不同的解，则$D$一定等于零；

(3) $cramer$法则在任何数域上都成立。

3，$cramer$法则的局限性：

(1),如果方程个数不等于自变量个数，

或者虽然方程个数等于自变量个数，但是系数行列式等于零时，

$cramer$法则失效；

(2)利用$cramer$法则求解，运算量太大。

推论，对齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

显然齐次方程组必有解，

$\because x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

是方程的一组解，

我们称为零解

$\therefore$ 当$D \neq 0$, $\Rightarrow$ 齐次线性方程组只有零解

当$D = 0$,$\Rightarrow$ 齐次线性方程组有非零解

例　问$\lambda$取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解

解：该方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

$\therefore$ 当$D \neq 0$时，即$\lambda \neq 1$，且$\lambda \neq -2$时，该方程组只有零解

## 二 按某$k$行（列）展开

定义3 在$n$阶行列式$D$ 中选取$k$ $(1 \le k \le n)$行$(i_1, i_2, \cdots i_k)$, $k$ 列$(j_1, j_2, \cdots j_k)$ 由这些行和列相交处的元素按原来相关位置构成的$k$阶行列式，称为$n$阶行列式$D$的$k$阶子式，记为$N = D\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$ （$N$相当于$a_{ij}$）

在行列式$D$中去掉$k$阶子式$N$所在的行和列后, 余下的元素按照原来位置组成$n-k$阶行列式，称为$N$的余子式，

$$\text{记为} M = M\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$$

（$M$相当于$M_{ij}$）

$N$ 的代数余子式，记为$A = A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$

$$= (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$$

（$A$相当于$A_{ij}$）

定理3（拉普拉斯$Laplace$定理）

设$D$为$n$阶行列式$|A|$，任取定其中$k$行（列）$(1 \le k \le n)$

则由这$k$行（列）构成的一切$k$阶子式$N_1, N_2, \cdots, N_t$

与它们所对应代数余子式$A_1, A_2, \cdots, A_t$相乘的和一定等于$D$，

即：$D = N_1 A_1 + N_2 A_2 + \cdots + N_t A_t$　其中$t = C_n^k$

证明从略

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n} D\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$$

按第$i_1, i_2, \cdots, i_k$行展开

$$|A| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} D\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$$

按第$j_1, j_2, \cdots, j_k$列展开

例 计 算 4 阶 行 列 式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 按第一行和第四行展开

取定$D$的第一行，第四行

由这两行构成的所有2阶子式应有$C_4^2=6$个,

但其中5个2阶式为零，余下的一个为:

$$N_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41}$$

它 对 应 的 代 数 余 子 式 为

$$A_1=(-1)^{(1+4)+(1+4)}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$$

由拉普拉斯定理得知$D=N_1A_1=(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$

- 特殊类型行列式（9，10）

$$D_{s+t}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{s1} & & a_{ss} \\ b_{11} & \cdots & b_{1t} & c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} & c_{t1} & \cdots & c_{ts} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A_{s\times s} \\ B_{t\times t} & C \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & & c_{st} & a_{s1} & & a_{ss} \\ b_{11} & \cdots & b_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C & A_{s\times s} \\ B_{t\times t} & O \end{vmatrix}$$

$$\overset{(\text{按第}1,2,\cdots,\ s\text{行展开})}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix}(-1)^{(1+2+\cdots+s)+[(t+1)+(t+2)+\cdots+(t+s)]}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{s\times t}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}=(-1)^{s\times t}\left|A_{s\times s}\right|\left|B_{t\times t}\right|$$

# 特殊类型行列式（7，8)

$$D_{s+t}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1s} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{ts} & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{s\times s} & O_{s\times t} \\ C_{t\times s} & B_{t\times t} \end{vmatrix}=|A||B|$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & c_{s1} & \cdots & c_{t} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{s\times s} & C_{s\times t} \\ O & B_{t\times t} \end{vmatrix}=|A||B|$$

# 行列式总结：

1，行列式的定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中$j_1j_2\cdots j_n$为$1,2,\cdots,n$的全排列

2，行列式的计算：

(1),行列式最终用定义计算；

$$\left.\begin{array}{l}(2),\text{行列式的性质}(6+3)\\(3),\text{行列式的展开}(2\text{种方式})\end{array}\right\}\text{化行列式为特殊类型}$$

# 行列式的10种常用的特殊类型

1,2 关于主对角线上(下)三角行列式 = 主对角线上元素的乘积

3,4 关于次对角线上(下)三角行列式, $D_n$ = 次对角线上元素的乘积且带有符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

5，箭形, 三对角等

6范德蒙行列式: $D(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)$

7,8 关于主对角块上（下）三角行列式: $D$ = 主对角上两个行列式的乘积

(特点：分成4块后，次对角块上至少有一块元素全为零，主对角2 块都为方块)

9,10 关于次对角块上（下）三角行列式 = 次对角上两个行列式的乘积且有符号 $(-1)^{s\cdot t}$

(特点：分成4块后，主对角块上至少有一块元素全为零，次对角上 2块都为方块 )

$$D_{s+t}=\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{matrix} & O \\ * & \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix},\quad D_{s+t}=\begin{vmatrix} O & \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{matrix} & * \end{vmatrix} = (-1)^{s\cdot t} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}$$

**例 9** 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$.

**解** 按最后一列, 把 $D_n$ 分拆成两个行列式的和:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & 0 \\ a & a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + x_n D_{n-1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_n D_{n-1}.$$

同理

$$D_{n-1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a + x_{n-1} D_{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_2 = x_1 a + x_2 D_1,$$

$$\begin{aligned} D_n &= x_1 x_2 \cdots x_n + a(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + x_1 x_3 \cdots x_n + \cdots + x_2 x_3 \cdots x_n) \\ &= \prod_{j=1}^{n} x_j + a \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j. \end{aligned}$$

□

6，关于行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$，下列计算正确的是（）

A, $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=16$,其中 $A_{\mathrm{ij}}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式；

B, $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0$

C, , $M_{13}-M_{23}+M_{33}-M_{43}=0$,其中 M_{ij} 为元素 a_{ij}的余子式；

D, $4M_{11}+M_{21}+2M_{31}+3M_{41}=0$,其中 M_{ij} 为元素 a_{ij}的余子式

已知 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}$，若 $D_n=a_nD_{n-1}+kD_{n-2}$，则 $k=$（　　　　）

【答案】1

【考点】含参数行列式的计算

【解析】

$$D_n=a_n\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{n-1+n}\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=a_nD_{n-1}+(-1)^{2n-1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$=a_nD_{n-1}+(-1)^{2n-2}D_{n-2}=a_nD_{n-1}+D_{n-2}$，从而 $k=1$.

【评注】含参数行列式计算，需通过行列式的性质恒等变形后展开计算.

例，计算行列式：$D_4=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}$

解：$D_4\xlongequal{\text{拆第4列}}\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & 0\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & 0\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & 0\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & x_4^2\end{vmatrix}$

$=D_3+x_4^2\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3\\ x_1 & x_2 & x_3 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[(i=1,2,3)]{c_i-x_ic_4}D_3+x_4^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x_1\\ & 1 & 0 & x_2\\ & & 1 & x_3\\ & & & 1\end{vmatrix}=D_3+x_4^2$

$$=D_2+x_3^2+x_4^2=D_1+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

解：$D_4=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}\xlongequal[(i=2.3.4.5)]{r_i-x_{i-1}r_1}\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+\sum_{j=2}^{5}x_{j-1}c_j}\begin{vmatrix}1+\sum_{j=1}^{4}x_j^2 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

# 2.5 矩阵的秩

秩是线性代数中非常重要的一个定义，在1861 年，由*Sylvester* 引入。这里，我们利用行列式的定义来引入。

定义1 (秩)：矩阵$A$的不等于零的子式的最大阶数，称为矩阵的秩，记为$r(A)$.

如果矩阵A的所有子式都为零，则称该矩阵的秩为零，记作$r(A)=0$.

显然$r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$

例如 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

如取 $A$ 的 1,3 行 ,2,5 列，则得到 $A$ 的一个2 阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=-6$$

$A$的1 阶子式有$4\times 6=24$ 个，

$A$的2 阶子式有$C_4^2\cdot C_6^2=90$个

$A$的3 阶子式有$C_4^3\cdot C_6^3=80$个,

$A$的4 阶子式有$C_4^4\cdot C_6^4=15$个

由秩的定义可知：

性质1 $r(A_{m\times n})\leq \min(m,n)$.

性质2 如果$A_{m\times n}$中存在一个$k$阶子式不等于零

$$\Rightarrow r(A_{m\times n})\geq k$$

如果$A_{m\times n}$中所有$k+1$阶子式都等于零

$$\Rightarrow r(A_{m\times n})\leq k$$

性质3 当$A$为$n$阶方阵时，$A$有对应的行列式$|A|$,

则：$|A|\neq 0 \Leftrightarrow r(A_{n\times n})=n$ (称$A$为满秩矩阵)

$|A|=0 \Leftrightarrow r(A_{n\times n})<n$ (称$A$为降秩矩阵)

定理1，$r(A_{m\times n})=k \Leftrightarrow A_{m\times n}$中至少存在一个$k$阶子式不等于零，

且$A_{m\times n}$中所有$k+1$阶子式都等于零。

定 理 2， 矩 阵 的 初 等 变 换 不 改 变 矩 阵 的 秩

(矩阵的秩是矩阵初等变换的不变量)

证明 设$r(A)=r$ 先证明对$A$ 进行初等行变换不改变$A$ 的秩

1 交换 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$

$\because B$ 的任意一个$k$ 阶子式，或就是$A$ 的一个$k$ 阶子式，或就是$A$ 的一个$k$ 阶子式交换两行得到的，不改变是否等于零的性质，$\therefore r(A)=r(B)$

2, 数乘 $A \xrightarrow{l \cdot r_i \quad (l \neq 0)} C$

$\because C$ 的任意一个$k$ 阶子式，或就是$A$ 的某个$k$ 阶子式，或就是$A$ 的某个$k$ 阶子式的$l$ 倍，$\because l \neq 0$ $\therefore$ 不改变是否等于零的性质，$\therefore r(A)=r(C)$

3, 倍加 $A \xrightarrow{r_i + l \cdot r_j} G$ 设$r(A)=r, M$是$G$ 的任意一个$r+1$阶子式

$M$ 一定为下面3 种情形之一

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ 不含第} i \text{行} \\ M \text{ 含第} i \text{行，不含第} j \text{行} \\ M \text{ 含第} i \text{行，含第} j \text{行} \end{array}\right\} \Rightarrow M=0, \therefore r(G) \leq r = r(A)$$

显然 $G \xrightarrow{r_i - l \cdot r_j} A$ 利用上面结果 $r(A) \leq r(G)$

$\therefore r(A)=r(G)$

定理3，设$A_{m\times n}$,(即$A\in P^{m\times n}$),则

1，仅对$A$ 进行初等行变换，就可以将$A$ 化成阶梯型矩阵和约化阶梯型矩阵.

且行变换得到的约化阶梯型矩阵是唯一的.

2，矩阵增加一行（列），矩阵的秩不变或者增加1.

求秩方法：

因为阶梯型矩阵的秩等于它的阶梯数，

所以为了求矩阵的的秩，可以对矩阵进行初等行（列）变换化成为阶梯型，

由定理2,矩阵的秩等于阶梯型矩阵的阶梯数。

例1：设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 求 $r(A)$

解：用初等行变换将A化为阶梯型矩阵

$$A \xrightarrow{\substack{R_2-R_1\\ R_3+R_1\\ R_4-R_1}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-4R_4\\ R_2\leftrightarrow R_4}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以 $r(A)=3$

例 2 设 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ 求 $r(A)$

方法1，$A \xrightarrow{r_i - r_1\ (i=2,3,4)} \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & & \\ 1-k & & k-1 & \\ 1-k & & & k-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1+\sum_{i=2}^{4} c_i} \begin{bmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ & k-1 & & \\ & & k-1 & \\ & & & k-1 \end{bmatrix}$

讨论 (1) $k \neq 1$且$k \neq -3$ $r(A)=4$；

(2) $k=1$ $R(A)=1$

(3) $k=-3$ $A \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} r(A)=3$

方法2 $|A| = (k+3)(k-1)^3$ 讨论：

(1)当 $|A| \neq 0$,即当$k \neq -3$且$k \neq 1$时 $A$ 满秩即 $r(A)=4$

(2)当$k=1$，或者$k=-3$时，$|A|=0$，此时分别对$A$进行初等变换化成阶梯形，求出$r(A)$

当$k=1$，$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_i - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$r(A)=1$

当$k=-3$，$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore r(A)=3$

# 2.6 *Gauss*消元法过程中的不变量

因为矩阵的秩是矩阵初等变换的不变量，

所以相应于线性方程组的*Gauss*消元后，不管用什么样的消元过程，

所有阶梯型线性方程组中，非零系数方程的个数都是一样的.

比较$P6$定理2，下面用秩的语言描述线性方程组解的定理。

定理1：对非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记：系数矩阵为 $A_{m\times n}$，

增广矩阵为 $\overline{A}_{m\times(n+1)}$.

有：$r(A) = r(\overline{A})$,

或者$r(\overline{A}) = r(A) + 1$

则：(1) 当$r(A) \neq r(\overline{A})$ 方程组无解;

(2) 当$r(A) = r(\overline{A}) = r$ 方程组有解，

且：$\begin{cases} (1)\ \ r = n\ (\text{自变量个数}) \Rightarrow \text{有唯一一组解} \\ (2)\ \ r < n\ (\text{自变量个数}) \Rightarrow \text{有无穷多组解} \end{cases}$

且有$n-r$ 个自由变量

问题：如果$r = m$,则线性方程组是否一定有解？

定理2，对于齐次线性方程组：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

设$r\left(A_{m\times n}\right)=r$，则

(1) 当$r=n$ ($n$为自变量个数) $\Rightarrow$ 齐次线性方程组只有零解

(2) 当$r<n$ ($n$为自变量个数) $\Rightarrow$ 齐次线性方程组有非零解

（或有无穷多解） 此时有$n-r$个自由变量

推论1.当$m<n$,即方程的个数小于自由变量的个数的齐次线性方程组必有非零解

推论2.当$m=n$时，$A$为$n$阶方阵有对应行列式$|A|$,

(1),$|A|\neq 0 \Leftrightarrow r(A)=n \Leftrightarrow$以$A$为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解;

(2),$|A|=0 \Leftrightarrow r(A)<n \Leftrightarrow$以$A$为系数矩阵的齐次线性方程组有非零解.

求解过程

$\bar{A} \xrightarrow{\text{行变换}}$ 阶梯形（判断是否有解） 如果有解

$\xrightarrow{\text{行变换}}$ 约化阶梯型（选自由变量等）

由定理 当 $r(A)=r(\overline{A})=r<n$ 时,有 $n-r$ 个自由变量

关于自由变量的选取：

1，选取方式不唯一

2，原则上梯头对应的变量不选为自由变量，

或选不是梯头对应的自变量为自由变量

例3.解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

解：

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \overline{B}$$

(阶梯形)

$\therefore R(A) = R(\overline{A}) = R(\overline{B}) = 3 < 5$ (自变量个数)

$\therefore$ 线性方程组有无穷多解，且有自由变量$5-3=2$个

问题：自由变量如何选？

$$\overline{B} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \vdots & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

(约化阶梯形)

$\because$ 系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

该约化阶梯形所对应的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 6x_5 = -4 \\ x_2 - x_3 + \frac{5}{2}x_5 = \frac{5}{2} \\ x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$$

如选 $x_3, x_5$ 作为自由变量，即把 $x_3, x_5$ 移到方程组的右边

$$\begin{cases} x_1 = -4 - x_3 + 6x_5 \\ x_2 = \frac{5}{2} + x_3 - \frac{5}{2}x_5 \\ x_4 = -2 + 3x_5 \end{cases}$$

$\therefore$ 可选 $x_3 x_5$ 为自由变量

令 $\begin{cases} x_3 = t_1 \\ x_5 = t_2 \end{cases}$

得到通解

$$\begin{cases} x_1 = -4 - t_1 + 6t_2 \\ x_2 = \frac{5}{2} + t_1 - \frac{5}{2}t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = -2 + 3t_2 \\ x_5 = t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in P$$

关于自由变量的选取

当得到新的线性方程组后：$\begin{cases} x_1 + x_3 - 6x_5 = -4 \\ x_2 - x_3 + \dfrac{5}{2}x_5 = \dfrac{5}{2} \\ x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$

如选 $x_3, x_4$ 为自由变量 $\begin{cases} x_1 - 6x_5 = -4 - x_3 \\ x_2 + \dfrac{5}{2}x_5 = \dfrac{5}{2} + x_3 \\ -3x_5 = -2 + x_4 \end{cases}$ $\because$ 关于 $x_1x_2x_5$ 的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 \\ & 1 & \dfrac{5}{2} \\ & & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\therefore$ 可选 $x_3, x_4$ 作为自由变量，但是为了得到通解，还要进行消元法。

如选 $x_4, x_5$ 为自由变量 $\begin{cases} x_1 + x_3 = -4 + 6x_5 \\ x_2 - x_3 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}x_5 \\ 0 = -2 - x_4 + 3x_5 \end{cases}$ $\because$ 关于 $x_1x_2x_3$ 的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\therefore$ 不能选 $x_4$，$x_5$ 为自由变量

总之，自由变量的选取是不唯一的，一般选不是梯头对应的变量为自由变量，此时，求得通解最方便。

# 2.7 矩阵的相抵(等价)

$$\left\{\begin{array}{l}相\ 抵\\相\ 似\\合\ 同\end{array}\right.$$

定义1 设$A,B\in P^{m\times n}$,如果$A$经过一系列初等变换化为$B$,

则称$A$ 与$B$相抵或等价。　记为：$A\overset{R}{\sim}B$

性质1:设$R(A_{m\times n})=r$,则$A$ 与$\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$相抵（等价）.

其中$E_r=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}_r$,称为$r$阶单位矩阵

称$\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$为$A$的相抵(等价)标准形

显然，任意一个矩阵的相抵(等价)标准形唯一的。

特别如果$A$为$n$阶方阵，　则:$|A|\neq 0\Leftrightarrow A$与$E_n$相抵（等价）。

## 性质2 相抵(等价)具有：

自反性：任意矩阵与自己相抵(等价)。即：$A \overset{R}{\sim} A$

对称性：如果$A$与$B$相抵(等价)$\Leftrightarrow$ $B$与$A$相抵(等价)即：$A \overset{R}{\sim} B \Leftrightarrow B \overset{R}{\sim} A$

传递性：如果$A$与$B$相抵(等价)，$B$与$C$相抵(等价) $\Rightarrow$ $A$与$C$相抵(等价)

即：$A \overset{R}{\sim} B$，$B \overset{R}{\sim} C \Rightarrow A \overset{R}{\sim} C$

数学上，我们称满足自反性、对称性和传递性的关系为一个等价关系

矩阵的相抵形成一个等价关系，我们称该关系为相抵等价关系。

如果将 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中秩相同的矩阵归为一类，

$P^{m\times n}$中的任一个矩阵属于且仅属于其中一个类，

称这样所得的类为矩阵的**相抵等价类**.

$\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的矩阵共可分为 $\min\{m,n\}+1$ 个相抵等价类.

定理1：设$A,B\in P^{m\times n}$，则$A$与$B$相抵（等价）

$\Leftrightarrow R(A)=R(B)$

$\Leftrightarrow A,B$有相同的相抵标准形

$\Leftrightarrow$ 一定存在$m$阶可逆阵$P$和$n$阶可逆阵$Q$，使得：$PAQ=B$.

(第三章)

**例** 证明平面上三条不同的直线

$$ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$$

相交于一点的充分必要条件是：$a+b+c=0$.

**证** 必要性：设所给三条直线交于一点 $M(x_0, y_0)$

则 $x=x_0, y=y_0, z=1$ 可视为齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ bx+cy+az=0 \quad (1) \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$

的非零解.

从而有系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2})(a+b+c)\cdot[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

因为三条直线互不相同，所以 $a, b, c$ 也不全相同，故 $a+b+c=0$.

充分性： 如果$a+b+c=0$,将方程组改为：

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \\ cx+ay=-b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, (2) \\ \quad 0=0. \end{cases}$$

下证此方程组(2)有唯一解， 即证$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$ (*cramre*法则)

反证，如果$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac-b^2=0$， 则$ac=b^2 \geq 0$，(#)

$$\because b=-(a+c) \Rightarrow b^2=ac=[-(a+c)]^2=a^2+2ac+c^2,$$

$$\therefore ac=-(a^2+c^2) \leq 0, \qquad \text{比较}(\#) \Rightarrow ac=0$$

不妨设$a=0$,由$b^2=ac$得$b=0$；再由$a+b+c=0$，得$c=0$，与题设矛盾.

故 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$.. 由克莱姆法则知，方程组(2)有唯一解.

从而知方程组(1)有唯一解，即三条不同直线交于一点

# 第一章　　测试题

## 一、填空题(每小题4分，共40分)

1. 若$D_n = \left|a_{ij}\right| = a$,则$D = \left|-a_{ij}\right| =$ ________

2. 设$x_1, x_2, x_3$是方程$x^3 + px + q = 0$的三个根,则行列式$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} =$ ________

3. 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1997 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1998 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}$$

4.四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}$

5. 设四阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$,

则 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} =$ ________

6. 在五阶行列式中 $a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$ 的符号为 ______

7. 在函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 $x^3$ 的系数是______

8. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} =$ ________

9. 若$a,b$为实数,则当$a=$____且$b=$____时,

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

10. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 可经____次对换后变为排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$.

二、计算下列行列式（每小题9分，共18分）.

1. $$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$

三、解答题（9分）. 问$\lambda,\mu$取何值,齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

## 四、证明(每小题8分，共24分).

1. $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$=0;$$

$$2.\ D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta};$$

3. 用数学归纳法证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j), (n \ge 2)$$

五、（9分）设 $n$ 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

# 测试题答案

一、1. $(-1)^n a$;　　2. 0;　　3. $-1998!$;

4. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$;　5. 0;

6. $-$;　　7. $-2$;　　8. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$;

9. 0,0;　　10. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

二、1. $-170$;　　2. $\dfrac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$.

三、$\lambda=0$或$\mu=0$.　　五、$n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right)$.

摘要: 朱世傑–范德蒙公式 (the Chu-Vandermonde formula) 是現代組合計數理論的一個基本公式。本文闡明了該公式的組合意義, 分別論述了朱世傑 (1303) 和 A. T. Vandermonde (1772) 的歷史貢獻, 追蹤錢寶琮 1923 年首次解讀朱世傑的成果和傳播海外的歷程, 並對朱–范公式的現代發展作出概要介紹。

現在國內外組合分析家所發表的一些論文和著作中, 當涉及對兩組合的乘積求和或 "卷積型" 恒等式時, 時常提到 "the Chu-Vandermonde formula" (下文簡稱 "朱—范公式")。這裡的 "Chu" 即朱世傑 (字漢卿, 號松庭), 我國宋元數學四大家之一, 他在 1303 年出版了《四元玉鑒》, 對中世紀世界數學卓有貢獻。Vandermonde 就是學高等代數的人熟知的法國數學家范德蒙 (A. T. Vandermonde, 1735~1796, 或譯爲旺德蒙德)。二百多年來, 朱–范公式已有 Rothe (1793), Gauss, Hagen (1891), Gould (1956), Handa 和 Mohanty (1969) 等人的多種擴充, 應用甚廣。因此, 有必要對朱世傑、Vandermonde 的工作和後來的進展作一概述。

錢寶琮[9] 1923 年在《學藝》上發表 "朱世傑垛積術廣義", 首次將上文所稱的朱世傑卷積公式推廣, 得到 (6) 式 (但不包括 (6) 式第二個等號右邊):

$$\sum \frac{r^{|p|}}{1^{|p|}} \cdot \frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}} = \sum \frac{r^{|p+q|}}{1^{|p+q|}}$$

需要明確, 正是錢寶琮先生 1923 年首次將朱世傑的式 (6) 表述成現代組合形式發表在《學藝》上, 經喬治·薩頓、李約瑟的介紹, 西方學者才對它有所瞭解[15]。至今在現代數學界流傳開來, 錢先生發軔於先, 功不可沒。

1892.5-1974.1数学史家，数学教育家,1928年8月任浙江大学数学系主任一年，为浙江大学数学史的发展作出重要贡献。1964年《中国数学史》

的这些论文和其他一些论文已经成为中国古代天文历法研究者必读的作品。

5．中外数学比较和中外数学交流中国古代数学有独具特色的体系并取得了极其辉煌的成就，是世界数学史非常重要的组成部分，对世界数学发展作出了重要贡献。但是一些科学史家特别是西方科学史家却很少了解或不肯承认中国数学的作用和影响，甚至贬低中国数学在世界数学史上的历史地位。这种状况反映出一种由来已久的偏见，当然是不符合事实的。钱宝琮很早就指出，“中国算学与印度、阿拉伯、日本及西洋各国算学均有授受关系”。由于这类问题涉及面广，还有史料和语言等方面的障碍，因而研究难度很大，进行研究的人也很少。钱宝琮对此做了不少开创性的工作，他所撰写的论文，如《九章算术盈不足术流传欧洲考》、《印度算学与中国算学之关系》等，内容非常丰富，证据相当有力，现在还常为人们所引用。在《中国数学史》中，他列举出1[illegible]证据来说明中国数学对印度数学的影响，也是



1892.5-1974.1数学史家，数学教育家,1928年8月任浙江大学数学系主任一年，为浙江大学数学史的发展作出重要贡献。1964年《中国数学史》