Вывод формул

1) Новый импульс ракеты после выброса продуктов горения:

$$M\vec{v} + m(\vec{v} + \vec{u}) = (M_0 - m)\vec{v} + m(\vec{v} + \vec{u}) = M_0\vec{v} + m\vec{u}, \qquad (1)$$

где M — текущая масса ракеты, M_0 — начальная масса ракеты, u — скорость продуктов горения относительно ракеты $=>$ относительно земли $(v + u)$

2)Также, исходя из того, что производная полученного импульса по времени равна сумме действующих на ракету сил (силы тяжести и силы сопротивления воздуха), продифференцировав полученный импульс, можно написать следующее:

$$M_0\dot{\vec{v}} + \dot{m}\vec{u} = (M_0 - m)\vec{g} - \frac{1}{2}C_x S\rho\, v\, \vec{v}, \qquad (2)$$

где S - площадь Миделя ракеты (наибольшая площадь сечения), C_x - коэффициент сопротивления: для носа ракеты $C_x = 0.5$, для ракеты с парашютом $C_x = 1$, ρ - плотность воздуха на данной высоте (рассчитывается по формуле $\rho_0 * e^{-0.0001 \cdot y}$)

3) Вектор скорости $\vec{u}$ продуктов горения направлен против вектора $\vec{v}$ и равен по модулю u_0, значит его можно представить вот в таком виде:

$$\vec{u} = -u_0\frac{\vec{v}}{v}, \qquad (3)$$

где $\frac{\vec{v}}{v}$ - это единичный вектор с направлением вектора $\vec{v}$

4) Также можно добавить некоторые зависимости
Зависимость производной массы топлива по времени:

$$\dot{m} = \begin{cases} \dot{m}_0 \text{ при } t \leqslant \frac{m_f}{\dot{m}_0} \\ 0 \text{ при } t > \frac{m_f}{\dot{m}_0} \end{cases} \qquad (4)$$

где t - текущее время полета, m_f - изначальная масса топлива, $\dot{m}_0$ - скорость расхода топлива (производная массы топлива по времени).

Зависимость массы ракеты по времени:

$$M(t) = \begin{cases} M_0 = \dot{m}_0 t \text{ при } t \leqslant \frac{m_f}{\dot{m}_0} \\ M_0 - m_f \end{cases} \qquad (5)$$

где t - текущее время полета, m_f - изначальная масса топлива, $\dot{m}_0$ - скорость расхода топлива (производная массы топлива по времени).

5) Из формулы 2 можно выразить $\vec{v}$ и расписать по Ох и Оу:

$$\dot{v_x} = \frac{\dot{m}}{M_0} \cdot u_0 \cdot \frac{v_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{C_x \cdot S\rho(x;y)}{M_0} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x$$

$$\dot{v_y} = -\frac{M(t)}{M_0} \cdot g + \frac{\dot{m}}{M_0} \cdot u_0 \cdot \frac{v_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{C_x \cdot S\rho(x;y)}{M_0} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y$$

Написание программы

1) Наша ракета имеет 3 основных режима полета:

1. Активный (топливо есть, ракета набирает скорость)
2. Пассивный (топлива нет, ракета сначала движется вверх по инерции, а потом переходит в свободное падение)
3. Полет с парашютом (топлива нет, ракета равномерно спускается с парашютом; $C_x = 1, S = 5, V = const$, т.к. мы учитываем сопротивление воздуха X, которое пропорционально квадрату скорости)

2) В программе для расчета параметров полета, написанной на языке программирования C++ были реализованы две главные функции: f() и step().

Функция $f()$ выполняет расчет производных $\dot{x}, \dot{y}, \dot{v_x}, \dot{v_y}$ исходя из данных x, y, v_x, v_y, которые передаются в функцию $f()$ в качестве аргументов и формул, вывод которых был показан на прошлом слайде.

Изначальные данные величин: $x = 0, y = 0, v_x = 1, v_y = 2$ хранятся в массиве aCurrent. Тангенс угла атаки (угол траектории ракеты к горизонту) определяется отношением $\frac{v_y}{v_x}$.

Функция step() обновляет величины в соответствии с шагом по времени $h_t = 0.0025s$ и работает на основе метода Рунге-Кутта

4-го порядка для более точных расчетов. Функция пошагово интегрирует производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{v_x}, \dot{v_y}$ и переходит к $(n+1)$-му шагу по следующему принципу :

$$\vec{k_1} = \vec{f}(t_n, \vec{w_n})$$

$$\vec{k_2} = \vec{f}(t_n + \frac{1}{2}h_t, \vec{w_n} + \frac{1}{2}h_t \cdot \vec{k_1})$$

$$\vec{k_3} = \vec{f}(t_n + \frac{1}{2}h_t, \vec{w_n} + \frac{1}{2}h_t \cdot \vec{k_2})$$

$$\vec{k_4} = \vec{f}(t_n + h_r, \vec{w_n} + h_t \cdot \vec{k_3})$$

$$\vec{w_{n+1}} = \vec{w_n} + \frac{1}{6}h_t \cdot (\vec{k_1} + 2\vec{k_2} + 2\vec{k_3} + \vec{k_4})$$

$$t_{n+1} = t_n + h_t$$