

MOWNIT laboratorium 3

Interpolacja

Zadanie

Interpolacja oraz ekstrapolacja danych o liczności populacji Stanów Zjednoczonych, z wykorzystaniem różnych reprezentacji wielomianu interpolującego oraz porównanie metod.

Skonstruowanie macierzy Vandermonde'a dla każdego z 4 zbiorów funkcji bazowych $\varphi_j(t)$

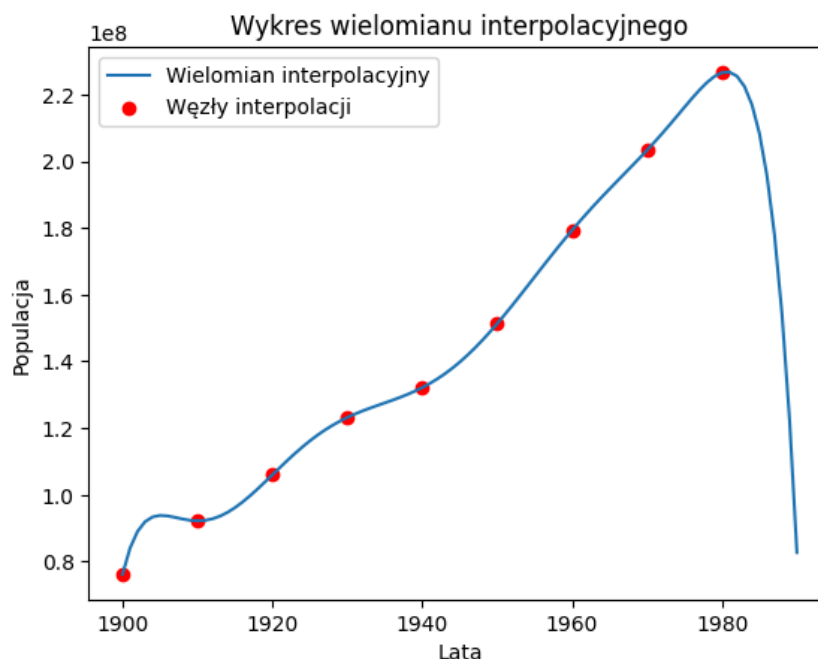
- $\varphi_j(t) = t^{j-1}$
- $\varphi_j(t) = (t - 1900)^{j-1}$
- $\varphi_j(t) = (t - 1940)^{j-1}$
- $\varphi_j(t) = \left(\frac{t-1940}{40}\right)^{j-1}$

Do ich konstrukcji użyłem funkcji np. `vander`.

Obliczenie współczynników uwarunkowania

Dla każdej macierzy policzyłem współczynnik uwarunkowania przy pomocy funkcji np. `linalg.cond`. Ostatnia z macierzy miała najniższy współczynnik uwarunkowania, więc to jej używam w dalszych obliczeniach.

Narysowanie wykresu wielomianu interpolacyjnego



Ekstrapolacja liczby populacji do roku 1990

Wynik oczekiwany: 248709873

Wynik ekstrapolacji: 82749141

Błąd względny ekstrapolacji wynosi w przybliżeniu 66.7%

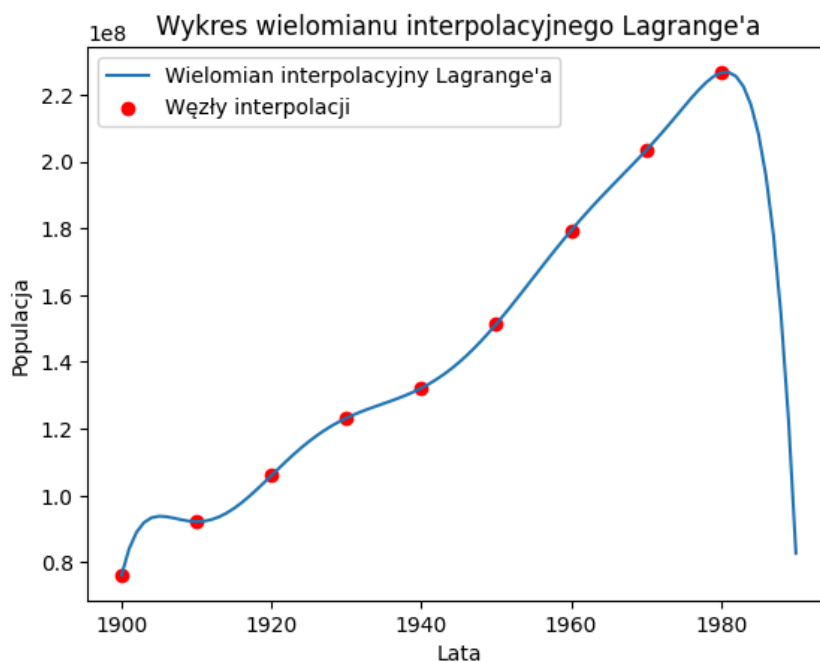
Interpolacja przy użyciu wielomianów Lagrange'a

Wielomiany Lagrange'a mają postać:

$$l_j(t) = \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^n (t - t_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (t_j - t_k)} \quad (1)$$

$$p_{n-1}(t) = y_1 l_1(t) + y_2 l_2(t) + \dots + y_n l_n(t) \quad (2)$$

Wykres wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a



Ekstrapolacja przy użyciu wielomianu Lagrange'a

Wynik oczekiwany: 248709873

Wynik ekstrapolacji: 82749141

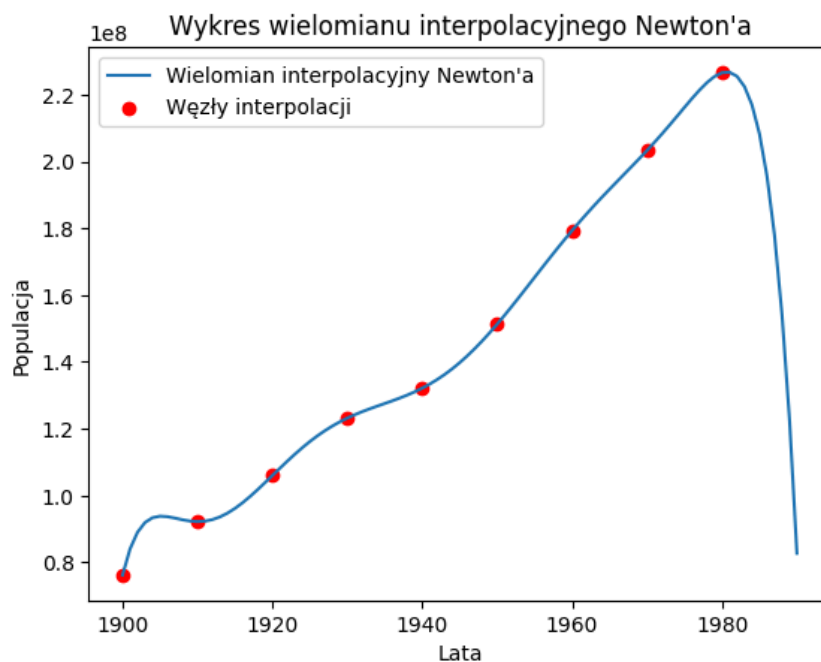
Ekstrapolacja daje identyczny wynik, jak w poprzedniej metodzie.

Interpolacja przy użyciu wielomianów Newtona

Wielomiany Newtona mają postać:

$$p_{n-1}(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + \dots + x_n(t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_{n-1}) \quad (3)$$

Wykres wielomianu interpolacyjnego Newtona



Ekstrapolacja przy użyciu wielomianu Newtona

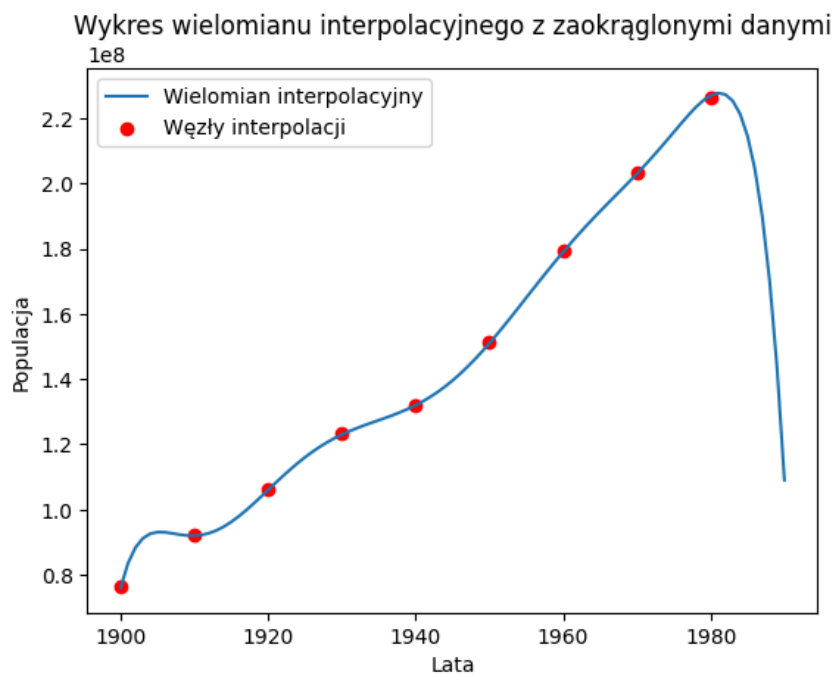
Wynik oczekiwany: 248709873

Wynik ekstrapolacji: 82749141

Ekstrapolacja daje identyczny wynik, jak w poprzednich dwóch metodach.

Ekstrapolacja przy zaokrąglonych danych

Tym razem ponownie wyznaczę wielomian interpolacyjny, tylko dla danych zaokrąglonych do miliona.



Na pierwszy rzut oka widać, że wielomian przyjmuje wyższe wartości przy krańcowych lewych wartościach x .

Ekstrapolacja dla zaokrąglonych danych

Wynik oczekiwany: 248709873

Wynik ekstrapolacji: 109000000

Jak widać w tym przypadku, uzyskany wynik jest bliższy oczekiwanemu niż w poprzednich metodach, a błąd względny wynosi około 56%

Wnioski

Pierwsze trzy metody dały nam takie same wyniki, z dokładnością do precyzji obliczeń. Było to spodziewane, ponieważ wielomian interpolacyjny jest wyznaczany jednoznacznie, więc rozbieżności mogły być spowodowane jedynie przez wyżej wspomnianą precyzję obliczeń. Interpolacja dla zaokrąglonych danych dała już inny wynik, do tego bliższy oczekiwanemu. Nie jestem pewien jak to interpretować, wydaje się że nadmiar mało znaczących danych, mógł niepotrzebnie komplikować obliczenia, przez co spadła ich dokładność.

Bibliografia

1. Wprowadzenie do laboratorium umieszczone na Teamsach
2. Strona na wikipedii na temat wielomianów Newtona: https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polynomial