Tomasz Głąbek, 02.06.2025

MOWNIT laboratorium 10

Równania różniczkowe zwyczajne - część 2

Zadanie 1

Dynamika układu drapieżca-ofiara opisana jest modelem Lotki–Volterry:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x)$$

gdzie:

$x(t)$ – gęstość ofiar (np. liczba zajęcy na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu

$y(t)$ – gęstość drapieżców (np. liczba rysi na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu

α_1 – współczynnik przyrostu ofiar (np. zajęcy) w izolowanym środowisku

α_2 – współczynnik ubywania drapieżców (np. rysi) w izolowanym środowisku

β_1 – współczynnik intensywności kontaktów między drapieżcami a ofiarami, kończących się upolowaniem ofiary

β_2 – współczynnik opisujący wpływ obecności ofiar na współczynnik przyrostu drapieżców

Wartości początkowe: $x(0) = 20$

$y(0) = 20$

Parametry: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.5, \beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.02$

Rozwiąż powyższy układ równań metodami:

- jawną Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k + f(t_k, y_k)$$

- niejawną Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

- półjawną Eulera

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(x_n, y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n g(x_n, y_{n+1})$$

- Rungego–Kutty czwartego rzędu (RK4)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4), \text{ gdzie}$$

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

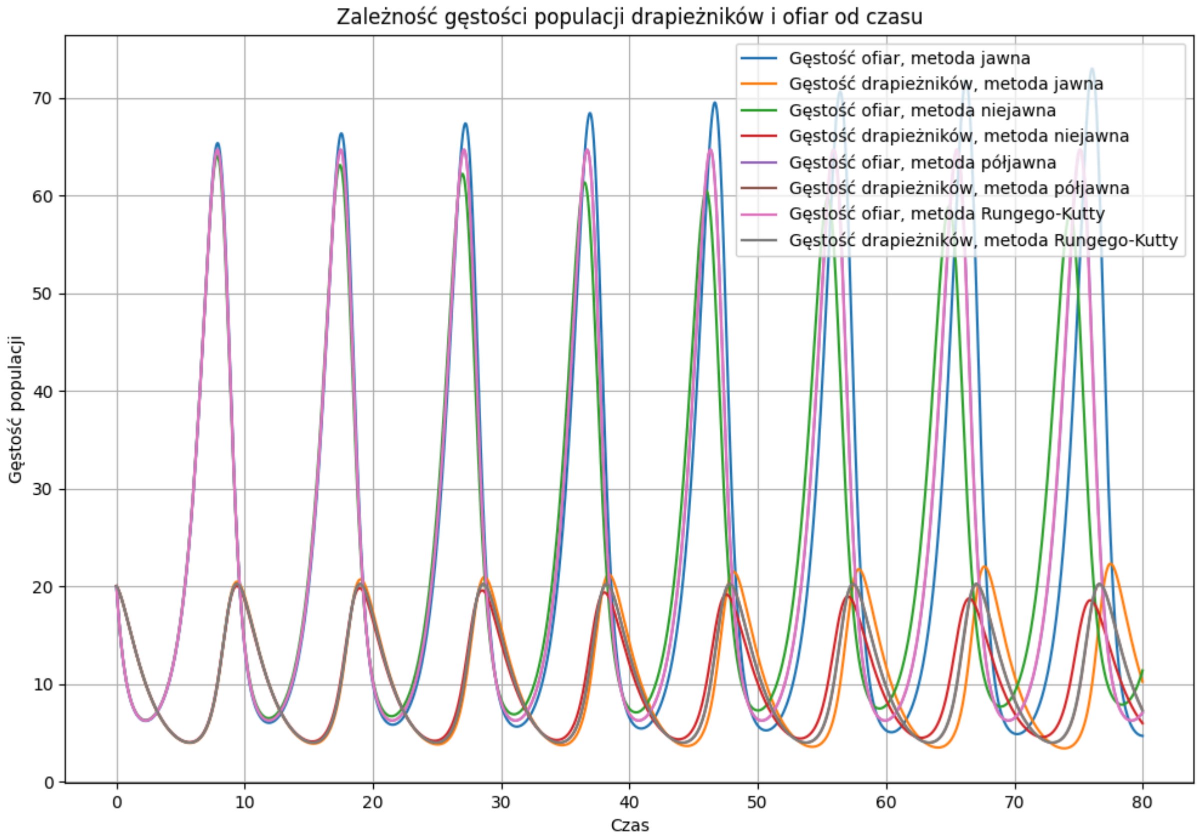
$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k k_2}{2}\right)$$

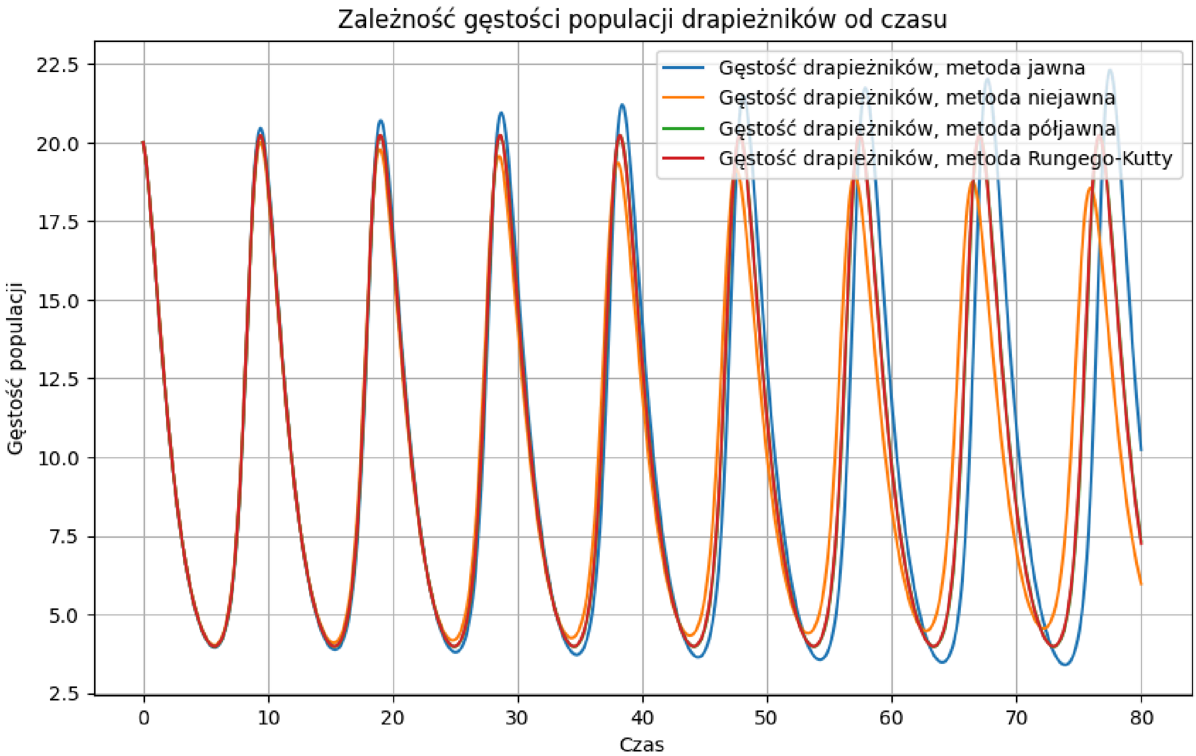
$$k_4 = f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3)$$

a)

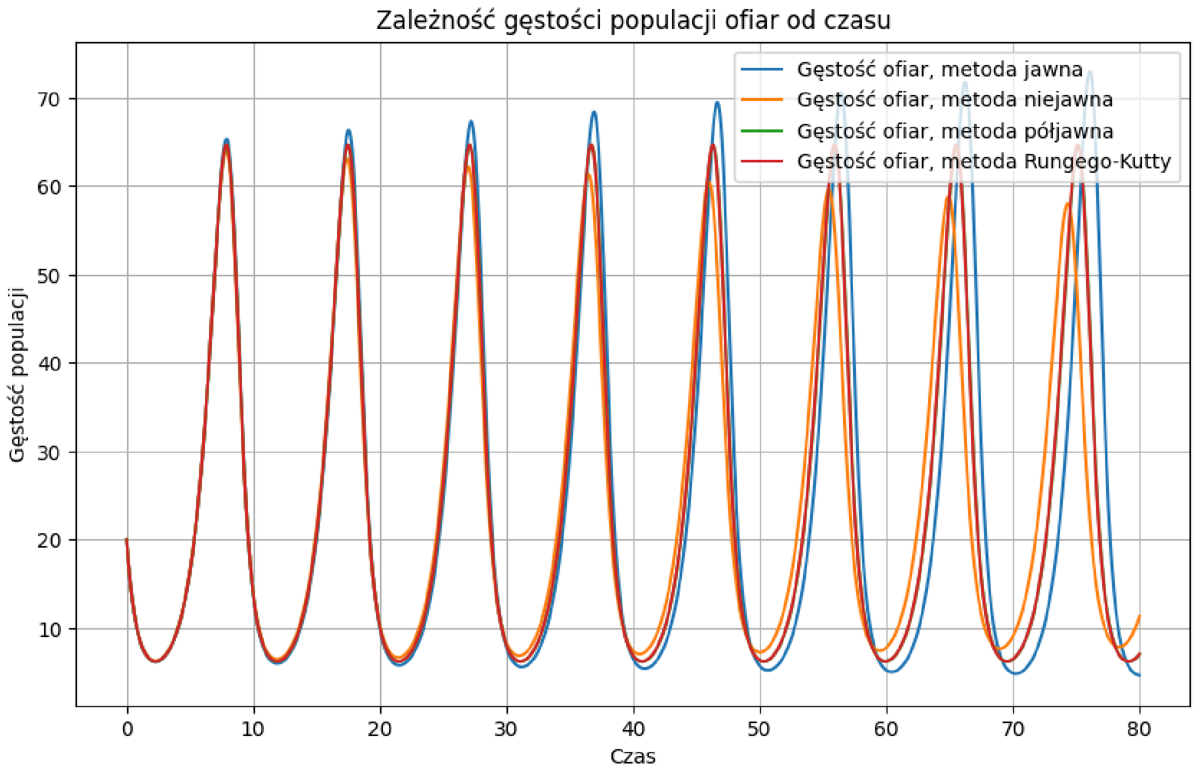
Na wspólnym rysunku narysuj wykresy liczebności obu populacji w zależności od czasu. Na osobnym rysunku narysuj portret fazowy układu, tj. wykres trajektorii punktu $(x(t), y(t))$ w funkcji czasu. Podaj jego fizyczną interpretację.



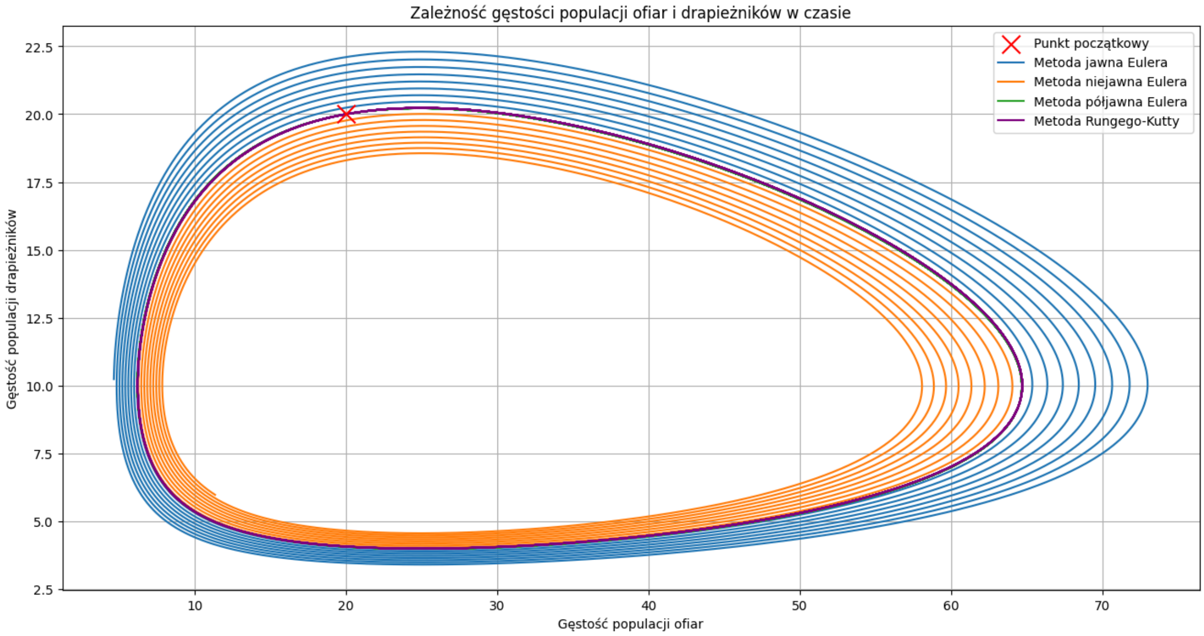
Rysunek 1: Wykres zależności gęstości obu populacji od czasu



Rysunek 2: Wykres gęstości populacji drapieżników od czasu



Rysunek 3: Wykres gęstości populacji ofiar od czasu



Rysunek 4: Wykres trajektorii punktu $(x(t), y(t))$

Fizyczna interpretacja: w przypadku metody półjawnej oraz metody Rungego – Kutty, gęstości populacji są stałym cyklu, czyli poziom populacji jest stabilny (z dokładnością do tego cyklu). W przypadku pozostałych metod nie obserwujemy stałego cyklu, co oznacza że populacja będzie się jeszcze zmieniała.

b)

Dla jakich warunków początkowych liczebności populacji nie ulegają zmianie? Znajdź punkty stacjonarne powyższego układu, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0 \\ y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ y = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \end{cases}$$

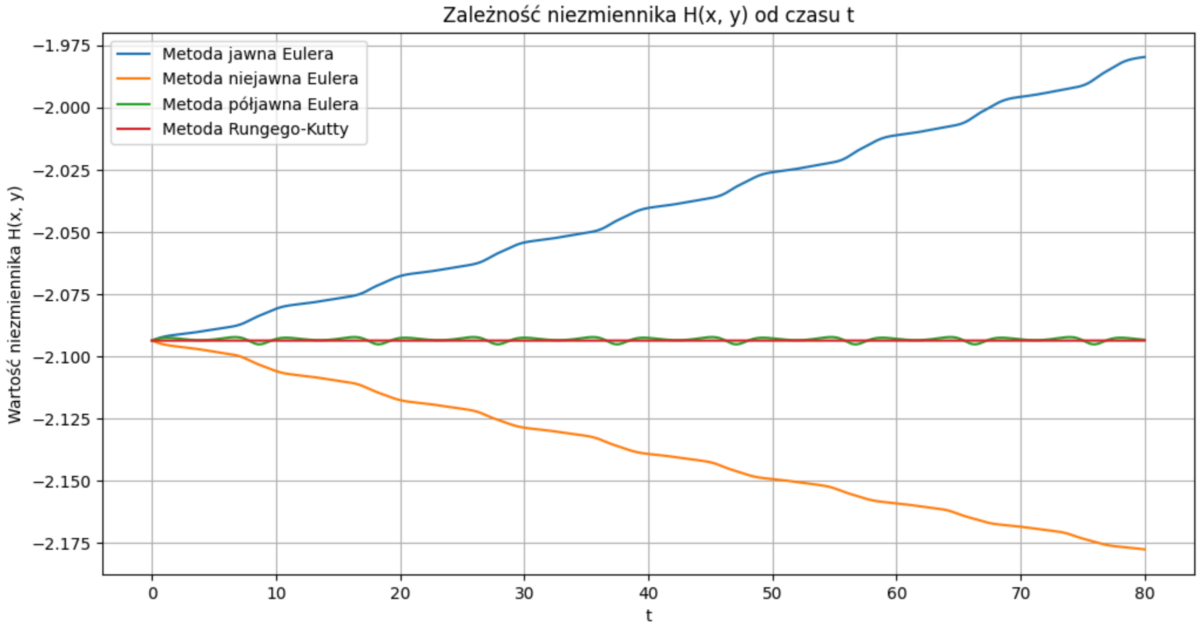
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 25 \\ y = 10 \end{cases}$$

c)

Czy zachowany jest niezmiennik:

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y)$$

Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy tego niezmiennika znalezione przez każdą metodę numeryczną.



Rysunek 5: Wykresy niezmiennika $H(x, y)$ w funkcji czasu dla każdej metody

d)

Wiemy, że na przestrzeni lat populacja rysi i zajęcy kształtowała się wg danych przedstawionych w pliku LynxHare.txt. Wybierz jedną z powyższych metod numerycznych i oszacuj prawdziwe wartości współczynników $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$. W tym celu wykonaj minimalizację funkcji kosztu. Jako funkcję kosztu wykorzystaj sumę kwadratów reszt (ang. residual sum of squares):

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^{T} \left(l_i - \hat{l}_i\right)^2 + \left(h_i - \hat{h}_i\right)^2$$

gdzie l_i oznacza prawdziwą liczbę rysi, $\hat{l}_i$ oznacza liczbę rysi wyznaczonych metodą numeryczną, a h_i oznacza prawdziwą liczbę zajęcy, $\hat{h}_i$ oznacza liczbę zajęcy wyznaczonych metodą numeryczną, Ponieważ nie znamy gradientu $\nabla_\theta L(\theta)$, do minimalizacji wykorzystaj metodę Neldera-Meada, która nie wymaga informacji o gradiencie.

Powtórz obliczenia, tym razem jako funkcję kosztu wykorzystując:

$$L(\theta) = -\sum_{i=0}^{T} l_i \ln\left(\hat{l}_i\right) - \sum_{i=0}^{T} h_i \ln\left(\hat{h}_i\right) + \sum_{i=0}^{T} \hat{l}_i + \sum_{i=0}^{T} \hat{h}_i$$

Wyniki

- Dla pierwszej funkcji kosztu:

$$\alpha_1 \approx 0.2093, \alpha_2 \approx 2.2933, \beta_1 \approx 0.0054, \beta_2 \approx 0.0844$$

- Dla drugiej funkcji kosztu:

$$\alpha_1 \approx 0.1303, \alpha_2 \approx 3.715, \beta_1 \approx 0.0033, \beta_2 \approx 0.1300$$

Wnioski

Dzisiejsze laboratorium pokazało jak można praktycznie wykorzystać numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych, w tym przypadku do modelowania dynamiki zmian populacji zwierząt, wykorzystując model Lotki–Volterry. Pokazało też różnice w dokładności obu metod poprzez porównanie wartości niezmienników wyliczonych dla każdej z nich.

Źródła

- plik lab9-intro.pdf na teams (było to wprowadzenie do lab9 i 10)