Tomasz Głąbek, 07.04.2025

MOWNIT laboratorium 5

Aproksymacja

Zadanie 1

Aproksymacja średniokwadratowa punktowa populacji USA w przedziale $[1900, 1980]$ (dane z laboratorium 5) wielomianami stopnia $0 \leq m \leq 6$.

Wyniki ekstrapolacji populacji do 1990 roku

Prawdziwa wartość: 248709873

Stopień wielomianu	Wartość ekstrapolowana	Błąd względny
0	143369177	0.424
1	235808109	0.052
2	254712945	0.024
3	261439111	0.051
4	251719359	0.012
5	259115342	0.042
6	249510782	0.003

Tabela 1: Wyniki ekstrapolacji dla wielomianów różnego stopnia

Najdokładniejszy okazał się wielomian stopnia 6.

Kryterium informacyjne Akaikego

$$\mathrm{AIC} = 2k + n \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \hat{y}(x_i)\right]^2\right)$$

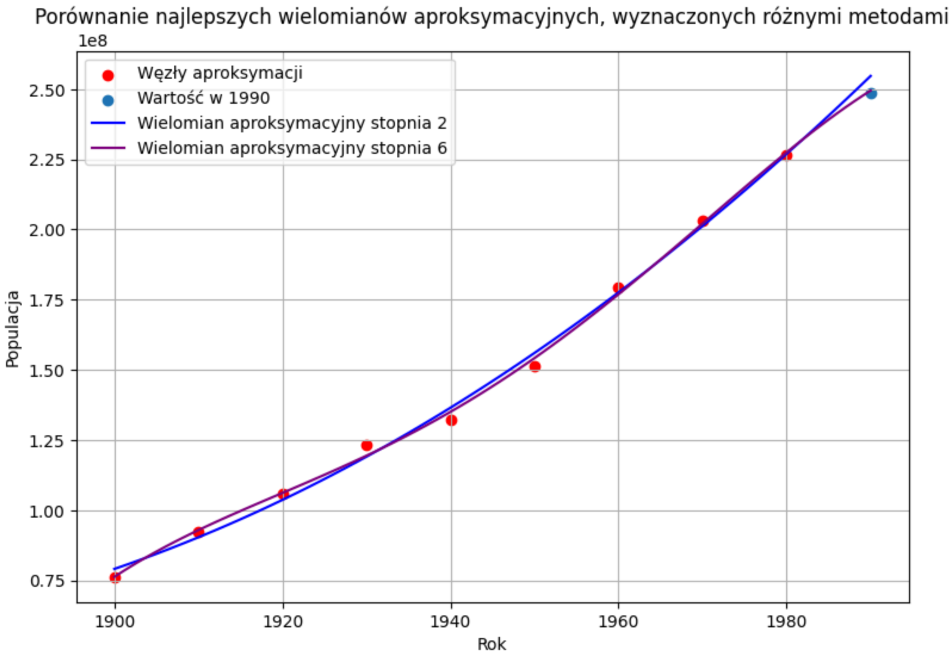
Z czynnikiem korygującym (używanym gdy $\frac{n}{k} < 40$):

$$\mathrm{AIC}_c = \mathrm{AIC} + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

Stopień wielomianu	AIC_c
0	320.884
1	288.556
2	278.082
3	281.547
4	284.672
5	298.828
6	313.265

Tabela 2: Wartości kryterium Akaikego dla wielomianów różnego stopnia

Kryterium wskazuje na to, że najdokładniejszy model uzyskamy z wielomianem stopnia drugiego. Nie zgadza się to z poprzednimi obserwacjami, bo wielomian stopnia 2 dał 3 najlepszy wynik, a jego błąd względny jest 8 razy większy niż w przypadku użycia wielomianu stopnia 2. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że pierwszy test był wykonany dla tylko jednego punktu, a drugi jest oparty na wzorze, który bierze pod uwagę szerszy kontekst.



Rysunek 1: Porównanie wielomianów aproksymacyjnych stopnia 6 i 2

Wnioski

Na rysunku 1 przestawiony jest wielomian, który ma najniższe kryterium Akaikego (stopnia 2) oraz wielomian, który daje najmniejszy błąd względny przy ekstrapolacji do 1990. Widać że na podanym przedziale są one bardzo bliskie. Dla ekstrapolacji w punkcie 1990 wielomian stopnia 6 daje lepszy wynik, jednak w ogólności należy założyć, że dokładniejszy będzie ten wyznaczony z kryterium Akaikego.

Zadanie 2

Aproksymacja średniokwadratowa ciągła funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ na przedziale $[0, 2]$ przy użyciu wielomianów Czebyszewa drugiego stopnia.

Funkcja wagowa

Do wzorów za t podstawiam $x - 1$, aby uwzględnić przesunięcie dziedziny

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}$$

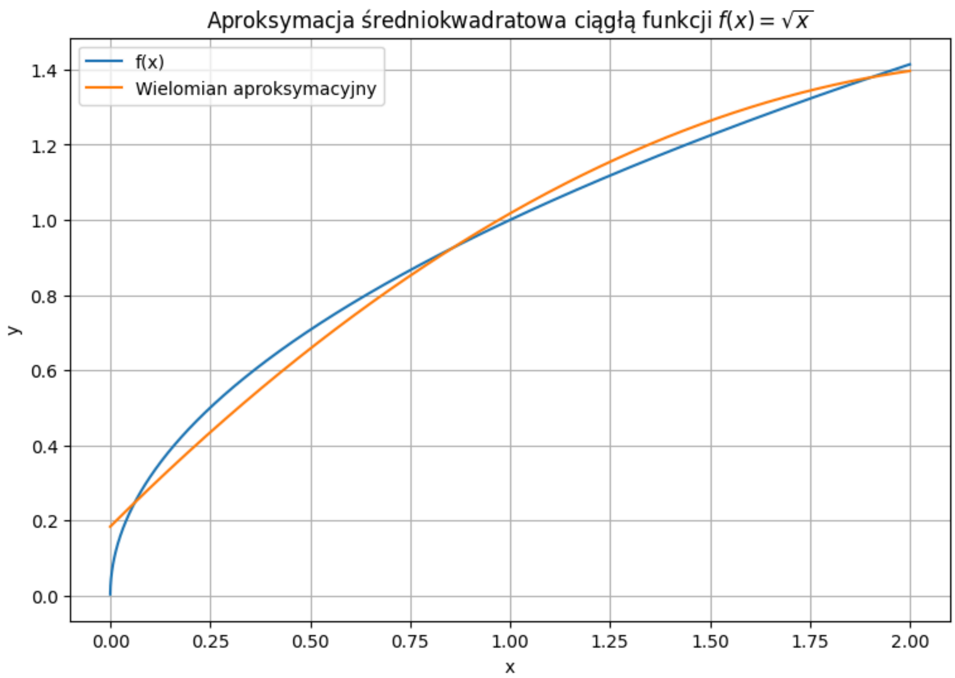
Wielomiany Czebyszewa

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

$$T_2 = 2x^2 - 1$$

$$\langle T_j, T_j \rangle = \begin{cases} \pi, & j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & j > 0 \end{cases}$$



Rysunek 2: Porównanie wielomianu aproksymacyjnego i oryginalnej funkcji

Wnioski

Wielomian aproksymacyjny na większości dziedziny jest bardzo bliski funkcji $f(x)$, jedyna większa różnica jest widoczna na lewym krańcu przedziału. Nie wynika to z błędu metody, po prostu nigdy nie da się przybliżyć funkcji dokładnie, a w tym przypadku jesteśmy dodatkowo ograniczeni tylko do wielomianów Czebyszewa 2 stopnia.

Źródła

1. Plik lab5-intro.pdf zamieszczony na platformie Teams