

Analiza błędów

Zadanie 1. Oblicz przybliżoną wartość pochodnej funkcji, używając wzoru

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} . \quad (1)$$

Sprawdź działanie programu dla funkcji $\tan(x)$ oraz $x = 1$. Wyznacz błąd, porównując otrzymaną wartość numerycznej pochodnej z prawdziwą wartością. Pomocna będzie tożsamość $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy wartości bezwzględnej błędu metody, błędu numerycznego oraz błędu obliczeniowego $E(h)$ w zależności od h dla $h = 10^{-k}$, $k = 0, \dots, 16$. Użyj skali logarytmicznej na obu osiach. Czy wykres wartości bezwzględnej błędu obliczeniowego posiada minimum?

Porównaj wyznaczoną wartość h_{\min} z wartością otrzymaną ze wzoru

$$h_{\min} \approx 2\sqrt{\epsilon_{\text{mach}}/M}, \text{ gdzie } M \approx |f''(x)| . \quad (2)$$

Powtórz ćwiczenie używając wzoru różnic centralnych

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} . \quad (3)$$

Porównaj wyznaczoną wartość h_{\min} z wartością otrzymaną ze wzoru

$$h_{\min} \approx \sqrt[3]{3\epsilon_{\text{mach}}/M}, \text{ gdzie } M \approx |f'''(x)| . \quad (4)$$

Porównaj wyznaczoną empirycznie wartość błędu obliczeniowego $E(h_{\min})$, z jakim wyznaczone zostało $f'(x)$, przy zastosowaniu wzorów (1) oraz (3). Która metoda jest dokładniejsza?

Zadanie 2. Napisz program obliczający sumę n liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji, losowo rozłożonych w przedziale $[0,1]$ wg rozkładu jednostajnego. Użyj wyłącznie zmiennych pojedynczej precyzji, chyba, że wskazano inaczej. Sumę oblicz według każdego z poniższych sposobów:

- (a) Zsumuj liczby według kolejności, w której zostały wygenerowane. Użyj akumulatora podwójnej precyzji do przechowywania akumulowanej sumy.

- (b) Zsumuj liczby według kolejności, w której zostały wygenerowane. Użyj akumulatora pojedynczej precyzji do przechowywania akumulowanej sumy.
- (c) Użyj algorytmu Kahana sumowania z kompensacją, sumując liczby w kolejności, w której zostały wygenerowane. Użyj akumulatora pojedynczej precyzji do przechowywania akumulowanej sumy.

```

sum = 0.0
err = 0.0
for i=1 to n
    y = x[i] - err
    temp = sum + y
    err = (temp-sum) - y
    sum = temp

```

- (d) Zsumuj liczby w porządku rosnącym, od liczb o najmniejszej wartości bezwzględnej do liczb o największej wartości bezwzględnej.
- (e) Zsumuj liczby w porządku malejącym, od liczb o największej wartości bezwzględnej do liczb o najmniejszej wartości bezwzględnej.

Narysuj wykres błędu względnego w zależności od $n = 10^k$, $k = 4, \dots, 8$. Jako prawdziwą wartość sumy przyjmij wartość `math.fsum(x)`.

Zadanie 3. Przepisz poniższe wyrażenia, tak aby uniknąć zjawiskaancelacji dla wskazanych argumentów.

- (a) $\sqrt{x+1} - 1$, $x \approx 0$
- (b) $x^2 - y^2$, $x \approx y$
- (c) $1 - \cos x$, $x \approx 0$
- (d) $\cos^2 x - \sin^2 x$, $x \approx \pi/4$
- (e) $\ln x - 1$, $x \approx e$
- (f) $e^x - e^{-x}$, $x \approx 0$ (*Wskazówka.* Użyj rozwinięcia w szereg Taylora).

Zadanie 4. Efektywność η kolektora słonecznego dana jest wzorem:

$$\eta = K \frac{QT_d}{I}, \quad (5)$$

gdzie K jest stałą znaną z dużą dokładnością, Q – objętość przepływu, T_d – różnica temperatur, I – natężenia promieniowania. Dokładność, z jaką można zmierzyć Q , T_d , I zależy od konstrukcji kolektora. Na podstawie (5) wyliczono, że sprawność kolektora S1 wynosi 0.76, a sprawność kolektora S2 wynosi 0.70. Wielkości Q , T_d , I zmierzono z następującym błędem:

| Kolektor | S1 | S2 |
|----------|------|------|
| Q | 1.5% | 0.5% |
| T_d | 1.0% | 1.0% |
| I | 3.6% | 2.0% |

Czy na podstawie powyższych danych możemy być pewni, że S1 ma większą sprawność niż S2? Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.