

## MOWNIT laboratorium 1

### Analiza Błędów

#### Zadanie 1

Sprawdzenie dokładności przybliżania pochodnej za pomocą wzoru

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oraz

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

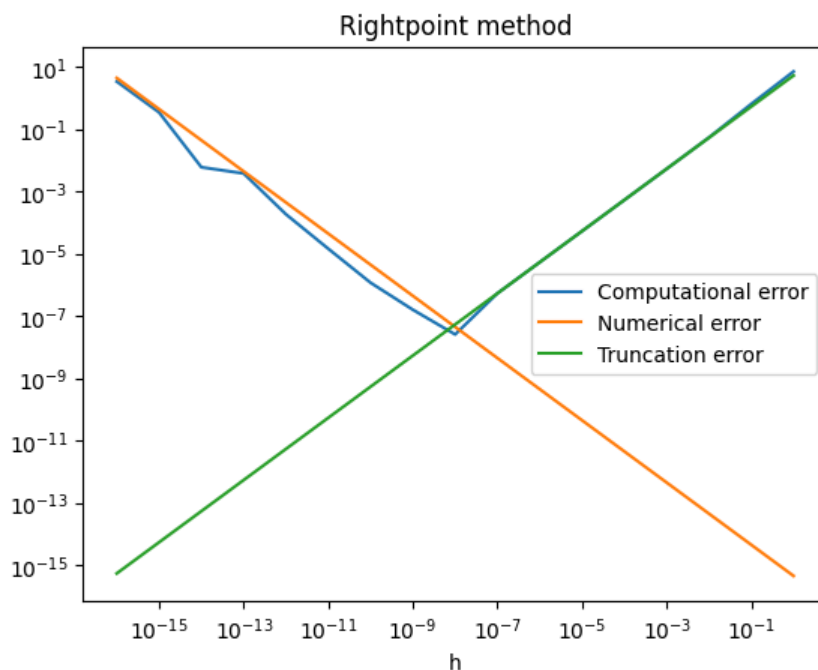
dla funkcji  $f(x) = \tan(x)$  i  $x = 1$ . Porównanie dokładności obu metod, obliczenie błędu porównując je do pochodnej obliczonej analitycznie. Sprawdzenie działania metod dla  $h = 10^{-k}$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots, 16$ . Obliczenie oraz wyznaczenie empiryczne wartości  $h_{\min}$ .

**Różnica prawostronna (wzór pierwszy):**

Błąd dla różnicy prawostronnej:

$$E(h) \leq \frac{Mh}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}$$

$$h_{\min} = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{mach}}}{M}}, \text{ gdzie } M \approx |f''(x)|$$



Rysunek 1: Wartości bezwzględne błędów metody, numerycznego i obliczeniowego

Minimum funkcji błędu obliczeniowego  $E(h)$  wyznaczone empirycznie to  $h_{\min} = 10^{-8}$

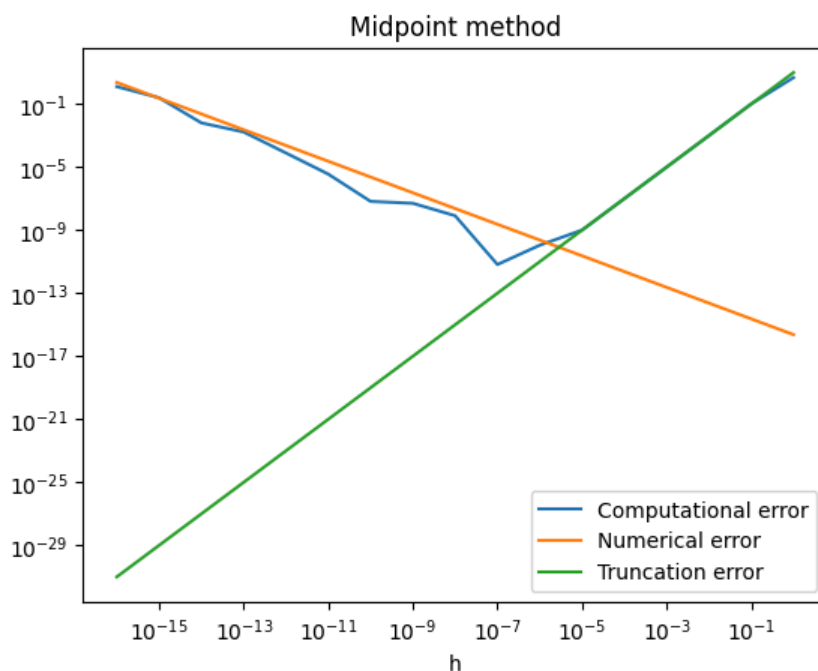
Wyznaczone analitycznie to  $h_{\min} \approx 9.124 \cdot 10^{-9}$

### Różnica centralna (wzór drugi):

Błąd dla różnicy prawostronnej:

$$E(h) \leq \frac{Mh^2}{6} + \frac{\varepsilon}{h}$$

$$h_{\min} = \sqrt[3]{3 \frac{\varepsilon_{\text{mach}}}{M}}, \text{ gdzie } M \approx |f'''(x)|$$



Rysunek 2: Wartości bezwzględne błędów metody, numerycznego i obliczeniowego

Minimum funkcji błędu obliczeniowego  $E(h)$  wyznaczone empirycznie to  $h_{\min} = 10^{-7}$

Wyznaczone analitycznie to  $h_{\min} \approx 2.273 \cdot 10^{-6}$

### Porównanie metod

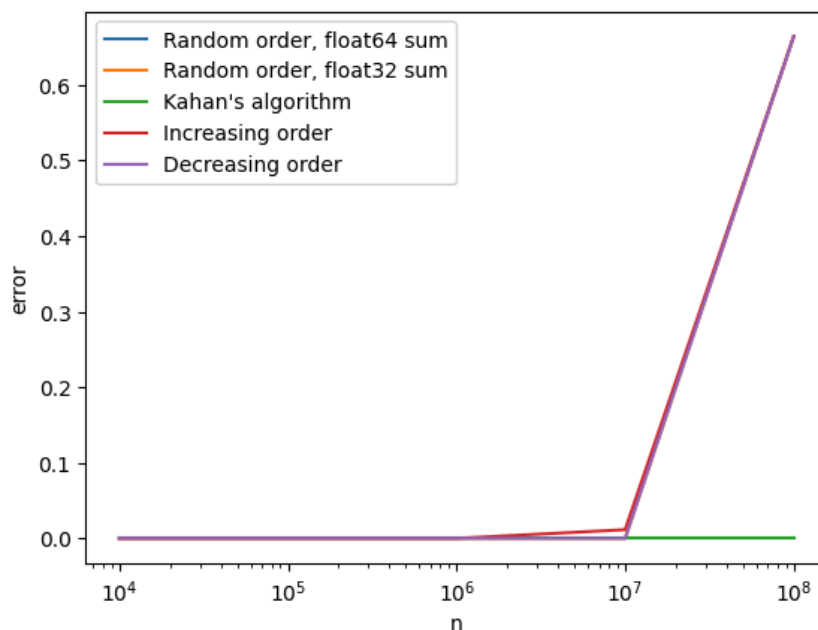
- Minimalny błąd różnicy prawostronnej:  $E(h_{\min}) \approx 9.776 \cdot 10^{-8}$
- Minimalny błąd różnicy centralnej:  $E(h_{\min}) \approx 2.221 \cdot 10^{-9}$

Metoda różnicy centralnej ma mniejszy minimalny błąd, więc jest dokładniejsza.

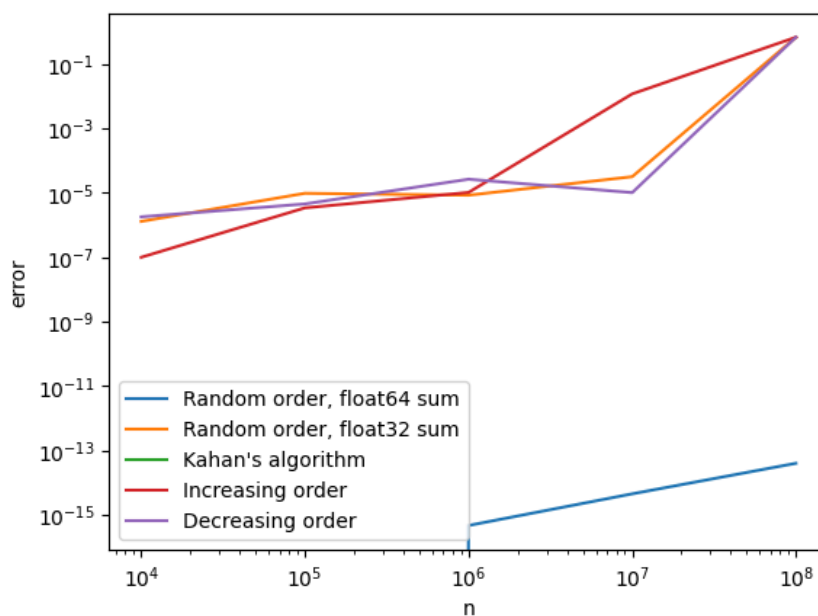
### Zadanie 2

Zliczanie sumy n liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji z zakresu  $[0, 1]$  na różne sposoby, porównanie błędów wszystkich metod. Sposoby sumowania:

- a – sumowanie w kolejności losowania, akumulator podwójnej precyzji
- b – sumowanie w kolejności losowania, akumulator pojedynczej precyzji
- c – sumowanie algorytmem Kahana z kompensacją, w kolejności losowania, akumulator pojedynczej precyzji
- d – sumowanie w porządku rosnącym, akumulator pojedynczej precyzji
- e – sumowanie w porządku malejącym, akumulator pojedynczej precyzji



Rysunek 3: Wykres błędów poszczególnych metod w zależności od n, za wynik dokładny przyjmując wynik funkcji `math.fsum()`



Rysunek 4: Ten sam wykres, w skali logarytmicznej

Nie ma znaczących różnic między metodami b, d i e, prawdopodobnie wynika to z użycia niskiej precyzji przy obliczeniach. Metoda a jest zauważalnie lepsza dzięki użyciu akumulatora podwójnej precyzji. Zdecydowanie najlepszy jest jednak algorytm Kahana, który za każdym razem dał dokładny wynik.

### Zadanie 3

Przepisanie poniższych wyrażeń tak, aby uniknąć błędu kancelacji.

- a)  $\sqrt{x+1} - 1, x \approx 0$

$$\sqrt{x+1} - 1 = (\sqrt{x+1} - 1) \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1}$$

- b)  $x^2 - y^2, x \approx y$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = x(x + y) - y(x + y)$$

- c)  $1 - \cos x, x \approx 0$

$$1 - \cos x = 1 - \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

- d)  $\cos^2 x - \sin^2 x, x \approx \frac{\pi}{4}$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

- e)  $\ln x - 1, x \approx e$

$$\ln x - 1 = \ln x - \ln e = \ln \frac{x}{e}$$

- f)  $e^x - e^{-x}, x \approx 0$

$$e^x - e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = 2 \sinh x$$

#### Zadanie 4

Sprawdzenie, czy możemy z pewnością wyznaczyć kolektor o lepszej sprawności, biorąc pod uwagę błędy w obliczanych składnikach wzoru.

$$\eta = K \frac{QT_d}{I}$$

- S1:

$$\eta = 0.76$$

$$\varepsilon_Q = 1.5\% \quad \varepsilon_{T_d} = 1\% \quad \varepsilon_I = 3.6\%$$

- S2:

$$\eta = 0.70$$

$$\varepsilon_Q = 0.5\% \quad \varepsilon_{T_d} = 1\% \quad \varepsilon_I = 2\%$$

Przy pomocy wzorów z wykładu obliczamy niepewności względne  $\eta$  dla S1 i S2. Dla mnożenia i dzielenia błędy względne zwyczajnie się dodają.

$$\varepsilon_{\eta_{S1}} = 1.5\% + 1\% + 3.6\% = 6.1\%$$

$$\varepsilon_{\eta_{S2}} = 0.5\% + 1\% + 2\% = 3.5\%$$

$$\eta_{S1} = 0.76 \pm 6.1\% * 0.76 = 0.76 \pm 0.04636$$

$$\eta_{S2} = 0.70 \pm 3.5\% * 0.70 = 0.70 \pm 0.0245$$

Zakresy niepewności pomiarów  $\eta_{S1}$  i  $\eta_{S2}$  nachodzą na siebie, zatem nie możemy być pewni że S1 ma większą sprawność niż S2.

## **Wnioski**

To laboratorium pokazuje znaczenie uwzględniania błędów przy jakichkolwiek obliczeniach.

Zadanie pierwsze pokazuje powstawanie błędów metodologicznych nieuchronnie powstających w obliczeniach numerycznych. Ćwiczenie drugie ukazuje że nawet w pełni poprawna metoda, może produkować błędy w arytmetyce komputerowej, dlatego zawsze trzeba zwracać uwagę na przyjętą metodę. W obu tych ćwiczeniach można było zauważyć, że wraz ze spadkiem błędu metodologicznego, rośnie błąd obliczeniowy. Z ostatniego ćwiczenia można wynieść to, że nawet wyniki które na pierwszy rzut oka wydają się jednoznaczne, mogą okazać się bezużyteczne po uwzględnieniu błędów obliczeniowych.

## **Bibliografia**

- [https://en.wikipedia.org/wiki/Machine\\_epsilon](https://en.wikipedia.org/wiki/Machine_epsilon) – artykuł na wikipedii na temat epsilon maszynowego wraz z tabelką z jego wartościami
- Wprowadzenie do laboratorium na platformie Teams w katalogu lab01