Tomasz Głąbek, 14.05.2025

MOWNIT laboratorium 9

Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 1

Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. first-orde system of ODEs):

(a) – równanie Van der Pol'a:

$y'' = y'(1 - y^2) - y$

(b) – równanie Blasiusa:

$y''' = -yy''$

(c) – II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$y_1'' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$

$y_2'' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$

Rozwiązanie

(a)

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

$$t = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dy^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = t(1 - y^2) - y$$

$$\begin{cases} t = \frac{dy}{dx} \\ \frac{dt}{dx} = t(1 - y^2) - y \end{cases}$$

(b)

$$y''' = -yy''$$

$$t = y'$$

$$z = t' = y''$$

$$z' = -yt' = -yz$$

$$\begin{cases} t = y' \\ z = t' = y'' \\ z' = -yt' = -yz \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} z_1 = y_1' \\ z_2 = y_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ z_2' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Zadanie 2

Przekształć poniższy problem początkowy do autonomicznego problemu początkowego:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{t} + y_2 t \\ y_2' = \frac{t(y_2^2-1)}{y_1} \end{cases}$$

$$y_1(1) = 1$$

$$y_2(1) = 0$$

Rozwiązanie

Autonomiczny problem początkowy ma postać:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Trzeba wprowadzić dodatkową zmienną, aby pozbyć się zależności od t.

$$y_3 = t$$

$$y_3' = 1$$

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{y_3} + y_2 y_3 \\ y_2' = \frac{y_3(y_2^2-1)}{y_1} \\ y_3' = 1 \end{cases}$$

Zadanie 3

Dany jest problem początkowy:

$$y' = \sqrt{1-y}$$

$$y(0) = 0$$

Pokaż, że funkcja $y(t) = \frac{t(4-t)}{4}$ spełnia równanie i warunek początkowy oraz wyznacz dziedzinę, dla której $y(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego.

Rozwiązanie

$$y'(t) = \frac{4-2t}{4} = 1 - \frac{t}{2} = \sqrt{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - t + \frac{t^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{4t-t^2}{4}} = \sqrt{1-y(t)}$$

$$y(0) = \frac{0(4-0)}{4} = 0$$

Dziedzina:

$$y(t) \leq 1$$

$$\frac{t(4-t)}{4} \leq 1$$

$$\frac{4t - t^2 - 4}{4} \leq 0$$

$$-\frac{(t-2)^2}{4} \leq 0$$

$$t \in (-\infty, \infty)$$

Zadanie 4

$$y' = -5y$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0.5$$

Rozwiązanie

(a) analityczna stabilność

Analityczne rozwiązanie równania to $y(t) = e^{-5t}$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-5t} = 0$$

Funkcja ta maleje do zera, nie ma nigdzie osobliwości, więc też to rozwiązanie jest analitycznie stabilne.

(b)

$$\lim_{x} = \lim_{x}$$

$$\lim_{h,n\to 0} y_n = y(t)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(-5y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n(1-5h)$$

$$y_n = y_0(1-5h)^n \ , \ \ y_0 = 1$$

$$y_n = (1-5h)^n$$

$$\lim_{h,n \to 0} y_n = y(t)$$

$$\lim_{h,n \to 0} (1 - 5h)^n = \lim_{h,n \to 0} (1 - 5h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h,n \to 0} \left((1 - 5h)^{\frac{1}{h}}\right)^t = \left(e^{-5}\right)^t = e^{-5t}$$

(c)

Stabilność numeryczna metody jawnej:

$$|1 + h\lambda| = |1 + 0.5 * -5| > 1$$

Stabilność numeryczna metody niejawnej:

$$h = 0.5 > 0$$

Warunek stabilności numerycznej nie jest spełniony dla metody jawnej.

(d)

$y_1 = -1.5$

$y(0.5) = 0.0820849986238988$ – wartość rzeczywista

(e)

Metoda jawna jest w tym przypadku niestabilna

(f)

$y_1 = 0.0820849986238988$

$y(0.5) = 0.0820849986238988$ – wartość rzeczywista

Tym razem przedstawiam wartość obliczoną metodą niejawną.

(g)

$$|y_n - y(t_n)| < 0.001 \ , \ \ t_n = 0.5$$

$$|(1 - 5h)^n - e^{-2.5}| < 0.001$$

$$|(1 - 5h)^n - e^{-2.5}| < 0.001$$

$$nh = t_n \to n = \frac{0.5}{h}$$

$$|(1 - 5h)^{\frac{0.5}{h}} - e^{-2.5}| < 0.001$$

Rozwiązanie tego równania można przybliżyć prostą metodą numeryczną:

```
import numpy as np

def f(h):
    return abs((1 - 5*h)**(0.5/h) - np.exp(-2.5))

hs = np.arange(0.0001, 0.1, 0.0000001)
valid_hs = [h for h in hs if f(h) < 0.001]

h = np.max(valid_hs)
```

Wynik:

$$h \approx 0.0019484$$

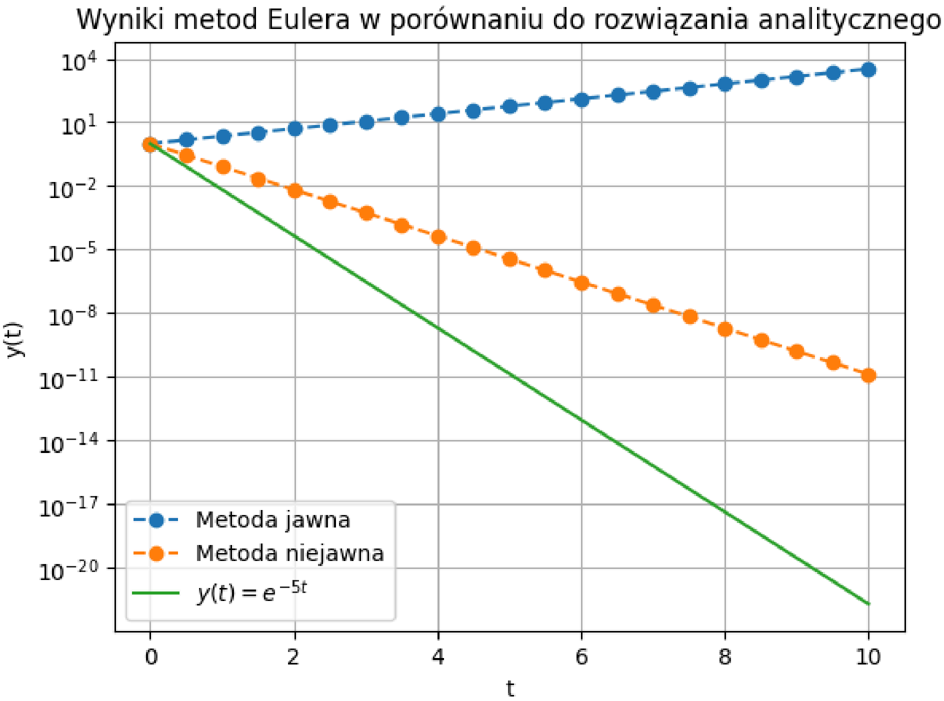
$$n = 257$$

(h)

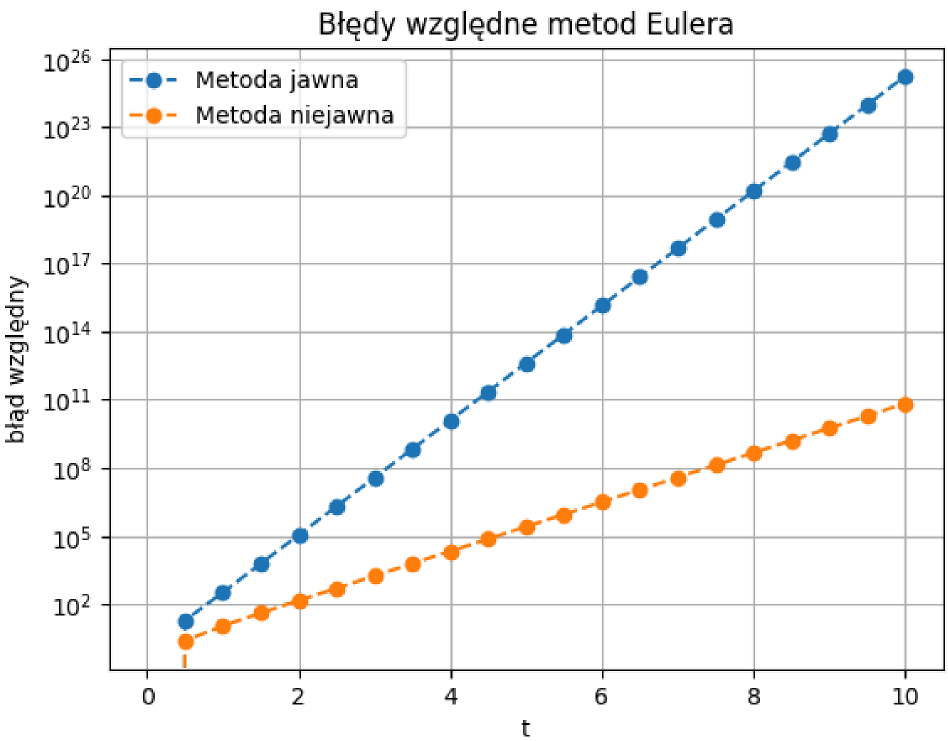
$$|1 + h\lambda| = |1 + -5h| < 1$$

$$h_{\text{max}} = \frac{2}{5}$$

Wykresy błędów obliczeń



Rysunek 1: Wyniki uzyskane z obliczeń w porównaniu z rzeczywistym rozwiązaniem



Rysunek 2: Błędy względne obu metod

Zadanie 5

Dany jest układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$y_1' = -2y_1 + y_2$$

$$y_2' = -y_1 - 2y_2$$

Dla jakich wartości kroku h metoda Eulera jest stabilna dla tego układu równań?

Rozwiązanie

$$y' = Ay$$

$$y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} y$$

$$|1 + \lambda h| < 1, \text{dla} \quad \lambda \in \{-2, -1, 1\}$$

$$0 < h < \frac{2}{\max(|\lambda|)}$$

$$0 < h < 1$$

Zadanie 6

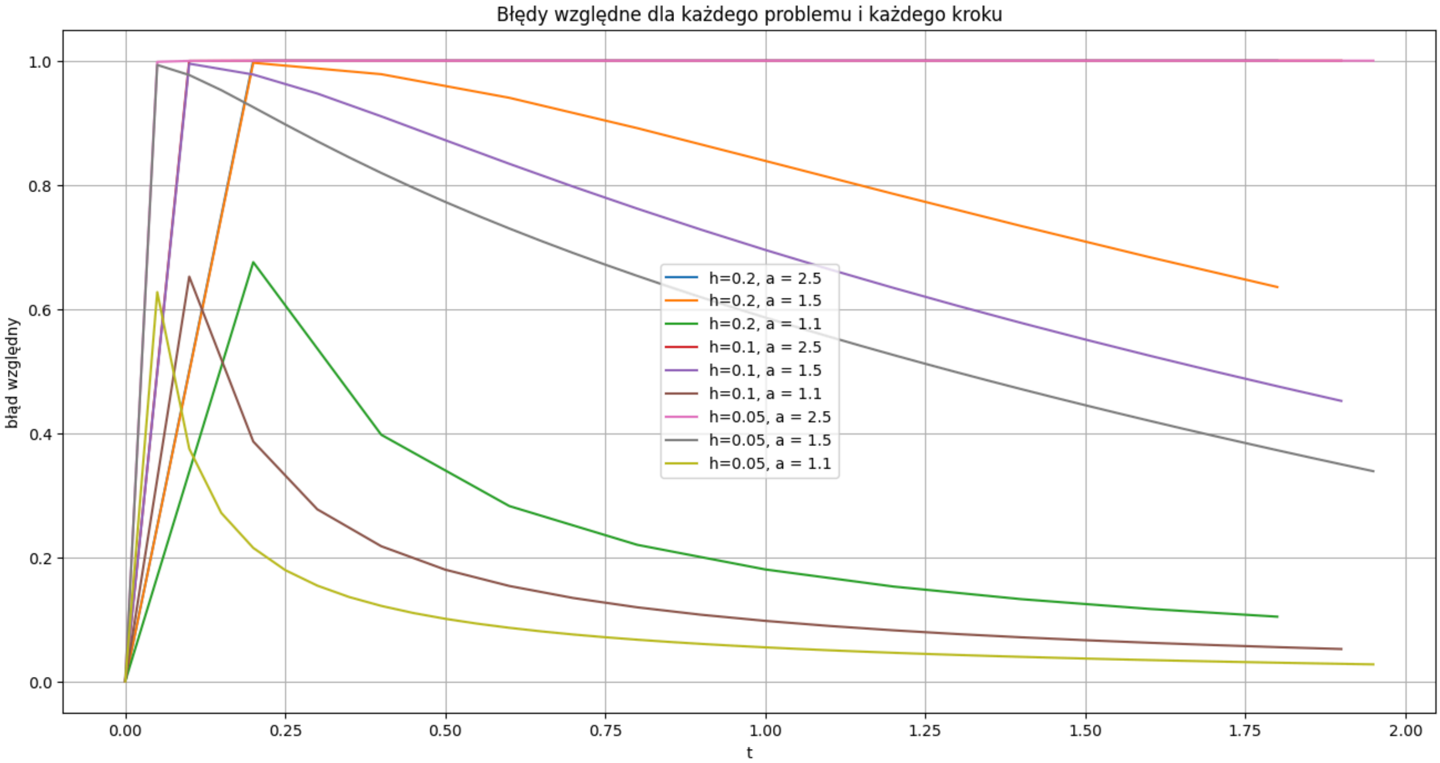
Dany jest problem początkowy:

$$y' = \alpha t^{\alpha-1}$$

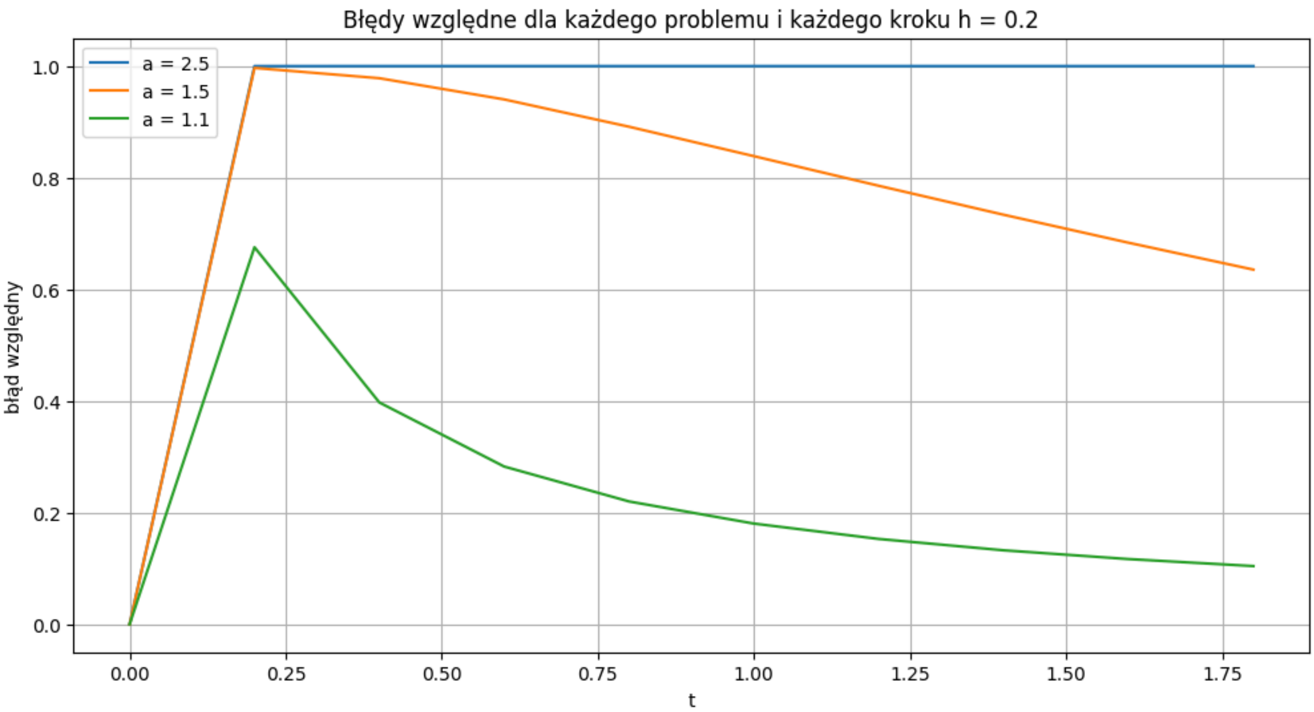
$$y(0) = 0$$

gdzie $\alpha > 0$. Rozwiązaniem powyższego problemu początkowego jest funkcja $y(t) = t^{\alpha}$. Rozwiąż powyższy problem metodą Eulera dla $\alpha = 2.5, 1.5, 1.1$. Dla każdego problemu zastosuj kroki $h = 0.2, 0.1, 0.05$, oblicz błąd numeryczny w węzłach rozwiązania, a następnie wyznacz empiryczny rząd zbieżności metody Eulera. Wyjaśnij otrzymane wyniki.

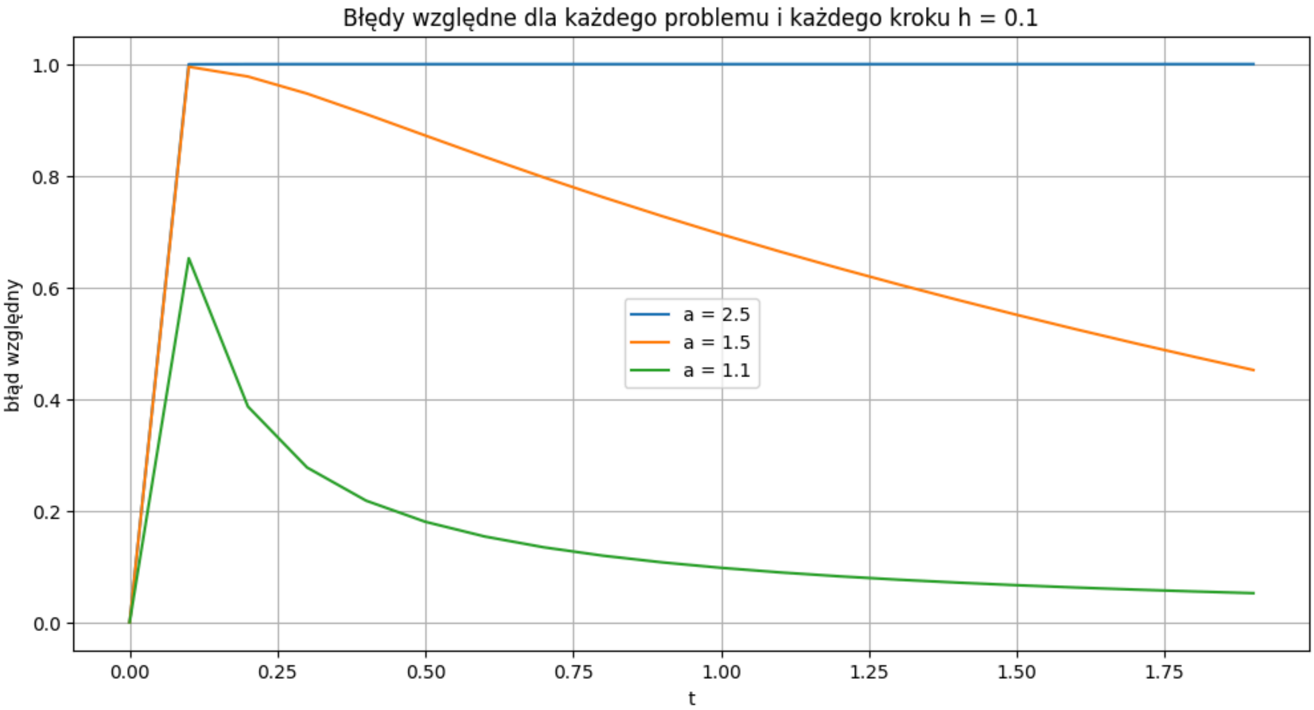
Rozwiązanie



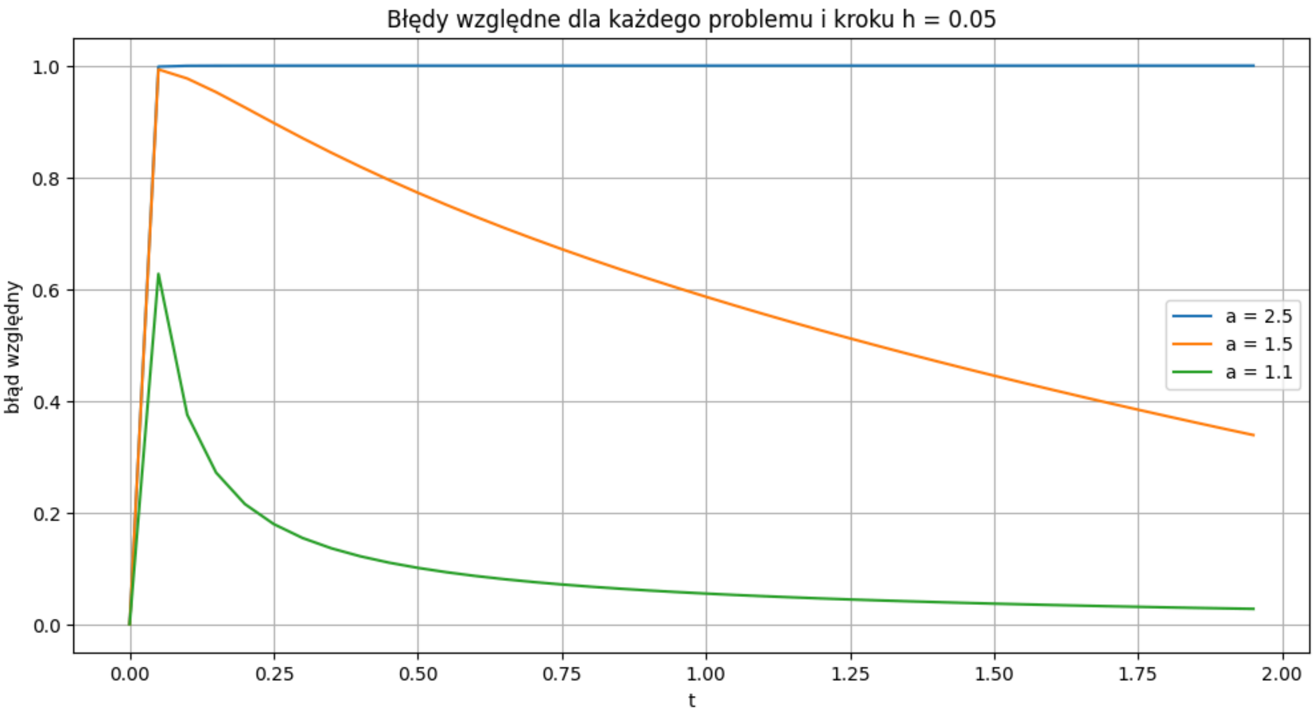
Rysunek 3: Porównanie błędów dla każdego przypadku



Rysunek 4: Porównanie błędów dla $h = 0.2$



Rysunek 5: Porównanie błędów dla $h = 0.1$



Rysunek 6: Porównanie błędów dla $h = 0.05$

Jak widać na wykresach powyżej, kształt wykresów jest bardzo podobny dla różnych wartości h, jedynie te o mniejszym h mają mniejsze błędy.

Dużo większą różnicę można obserwować dla różnych wartości α, dla $\alpha = 1.1$ błąd względny maleje zauważalnie szybciej niż dla $\alpha = 1.5$, a dla $\alpha = 2.5$ obliczenia w ogóle nie są możliwe, i metoda Eulera zwraca same zera (stąd błąd względny równy 1)

Wnioski

Dzisiejsze laboratorium nauczyło nas dużo o numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych. Początkowe zadania przypominają wiedzę z matematyki oraz przypominają że umiejętność analitycznego przekształcania równań jest ważna również przy metodach numerycznych. Dalsze zadania skupiały się na zastosowaniu metody Eulera. Pokazały jej ograniczenia (kiedy przestają być stabilne numerycznie) oraz dały obraz jak kształtuje się dokładność tej metody dla różnych problemów i wartości kroków.

Źródłą

1. plik lab10-intro.pdf z teamsów