Tomasz Głąbek, 14.05.2025

MOWNIT laboratorium 9

Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 1

Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. first-orde system of ODEs):

(a) – równanie Van der Pol'a:

$y'' = y'(1 - y^2) - y$

(b) – równanie Blasiusa:

$y''' = -yy''$

(c) – II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$y_1'' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$

$y_2'' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$

Rozwiązanie

(a)

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

$$t = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dy^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = t(1 - y^2) - y$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = t \\ \frac{dt}{dx} = t(1 - y^2) - y \end{cases}$$

(b)

$$y''' = -yy''$$

$$t = y'$$

$$z = t' = y''$$

$$z' = -yt' = -yz$$

$$\begin{cases} y' = t \\ t' = y'' = z \\ z' = -yt' = -yz \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} y_1' = z_1 \\ y_2' = z_2 \\ z_1' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ z_2' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Zadanie 2

Przekształć poniższy problem początkowy do autonomicznego problemu początkowego:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{t} + y_2 t \\ y_2' = \frac{t(y_2^2-1)}{y_1} \end{cases}$$

$$y_1(1) = 1$$

$$y_2(1) = 0$$

Rozwiązanie

Autonomiczny problem początkowy ma postać:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Trzeba wprowadzić dodatkową zmienną, aby pozbyć się zależności od t.

$$y_3 = t$$

$$y_3' = 1$$

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{y_3} + y_2 y_3 \\ y_2' = \frac{y_3(y_2^2-1)}{y_1} \\ y_3' = 1 \end{cases}$$

Zadanie 3

Dany jest problem początkowy:

$$y' = \sqrt{1-y}$$

$$y(0) = 0$$

Pokaż, że funkcja $y(t) = \frac{t(4-t)}{4}$ spełnia równanie i warunek początkowy oraz wyznacz dziedzinę, dla której $y(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego.

Rozwiązanie

$$y'(t) = \frac{4-2t}{4} = 1 - \frac{t}{2} = \sqrt{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - t + \frac{t^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{4t - t^2}{4}} = \sqrt{1 - y(t)}$$

$$y(0) = \frac{0(4-0)}{4} = 0$$

Dziedzina:

$$y(t) \leq 1$$

$$\frac{t(4-t)}{4} \leq 1$$

$$\frac{t(4-t)}{4} - \frac{4}{4} \leq 0$$

$$\frac{4t - t^2 - 4}{4} \leq 0$$

$$-\frac{(t-2)^2}{4} \leq 0$$

$$t \in (-\infty, \infty)$$

$$1 - \frac{t}{2} > 0$$

$$t < 2$$

$$t \in (-\infty, 2)$$

Łącznie: $t \in (-\infty, 2)$

Zadanie 4

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne:

$$y' = -5y$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0.5$$

(a) Analityczna stabilność

Rozwiązanie

Analityczne rozwiązanie równania to $y(t) = e^{-5t}$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-5t} = 0$$

Funkcja ta maleje do zera, nie ma nigdzie osobliwości, więc też to rozwiązanie jest analitycznie asymptotycznie stabilne.

(b) Udowodnij, że metoda Euler'a jest zbieżna

$$\lim_{h,n\to 0} y_n = y(t)$$

Rozwiązanie

$$\lim_{h,n\to 0} y_n = y(t)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(-5y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n(1 - 5h)$$

$$y_n = y_0(1 - 5h)^n \ , \ \ y_0 = 1$$

$$y_n = (1 - 5h)^n$$

$$\lim_{h,n\to 0} y_n = y(t)$$

$$\lim_{h,n\to 0} (1 - 5h)^n = \lim_{h,n\to 0} (1 - 5h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h,n\to 0} \left((1 - 5h)^{\frac{1}{h}}\right)^t = \left(e^{-5}\right)^t = e^{-5t}$$

(c) Numeryczna stabilność. Wyjaśnij, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

Rozwiązanie
Stabilność numeryczna metody jawnej:

$$|1 + h\lambda| = |1 + 0.5 * -5| > 1$$

Metoda jawna nie jest stabilna numerycznie.

Stabilność numeryczna metody niejawnej:

$$h = 0.5 > 0$$

Metoda niejawna jest stabilna numerycznie

(d) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Euler'a.

Rozwiązanie
$y_1 = -1.5$

$y(0.5) = 0.0820849986238988$ – wartość rzeczywista

(e) Wyjaśnij, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

Rozwiązanie
Metoda niejawna jest stabilna, ponieważ $h > 0$

(f) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla t = 0.5 niejawną metodą Euler'a.

Rozwiązanie
$y_1 = 0.0820849986238988$

$y(0.5) = 0.0820849986238988$ – wartość rzeczywista

(g) Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h w metodzie Eulera, jeśli żądamy, aby błąd rozwiązania w punkcie tn = 0.5 nie przekraczał 0.001, tzn. $|y_n - y(t_n)| < \text{tol} = 0.001$. Ile kroków należy w tym celu wykonać?

Rozwiązanie

$$|y_n - y(t_n)| < 0.001 \ , \ \ t_n = 0.5$$

$$|(1 - 5h)^n - e^{-2.5}| < 0.001$$

$$|(1 - 5h)^n - e^{-2.5}| < 0.001$$

$$nh = t_n \to n = \frac{0.5}{h}$$

$$|(1 - 5h)^{\frac{0.5}{h}} - e^{-2.5}| < 0.001$$

Rozwiązanie tego równania można przybliżyć prostą metodą numeryczną:

```
import numpy as np

def f(h):
    return abs((1 - 5*h)**(0.5/h) - np.exp(-2.5))

hs = np.arange(0.0001, 0.1, 0.0000001)
valid_hs = [h for h in hs if f(h) < 0.001]

h = np.max(valid_hs)
```

Wynik:

$$h \approx 0.0019484$$

$$n = 257$$

(h) Do wyznaczenia wartości y_{n+1} w niejawnej metodzie Euler'a użyto metody bezpośredniej iteracji:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = \varphi\left(y_{n+1}^{(k)}\right)$$

Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h, przy której metoda pozostanie zbieżna. Czy uzasadnione byłoby użycie metody Newtona do wyznaczenia y_{n+1}?

Rozwiązanie

Postać niejawnej metody Eulera:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + h * (-5)y_{n+1}$$

$$\varphi(y) = y_n - 5hy$$

$$\varphi'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y_n - 5hy) = -5h$$

Warunek zbieżności iteracji:

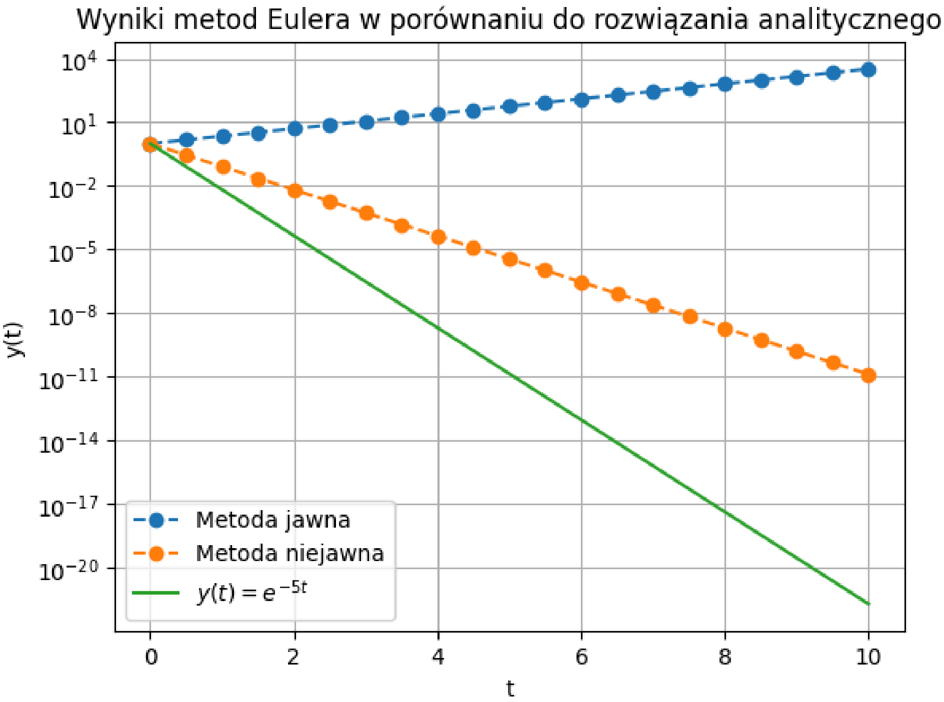
$$|\varphi'(y)| < 1$$

$$5h < 1$$

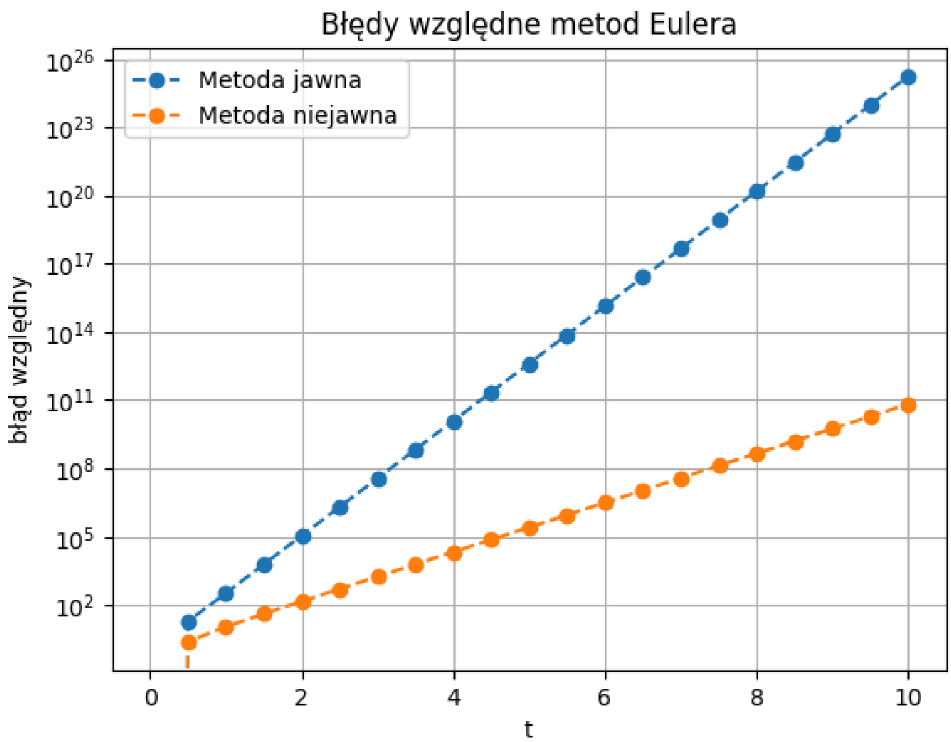
$$h < \frac{1}{5}$$

Użycie metody Newtona ma sens, bo $\varphi(y)$ funkcją liniową, więc metoda Newtona znajdzie jej pierwiastek w pierwszej iteracji.

Wykresy błędów obliczeń



Rysunek 2: Wyniki uzyskane z obliczeń w porównaniu z rzeczywistym rozwiązaniem



Rysunek 3: Błędy względne obu metod

Zadanie 5

Dany jest układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$y_1' = -2y_1 + y_2$$

$$y_2' = -y_1 - 2y_2$$

Dla jakich wartości kroku h metoda Eulera jest stabilna dla tego układu równań?

Rozwiązanie

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)^2 - (-1) * 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$$

Warunek stabilności:

$$|1 + \lambda h| < 1 \text{ dla każdego } \lambda$$

$$h = x + yi$$

$$\lambda = -2 + i$$

$$|1 + (-2 + i)(x + yi)| < 1$$

$$|1 + -2x - 2yi + xi - y| < 1$$

$$|-2x - y + 1 + (x - 2y)i| < 1$$

$$(-2x - y + 1)^2 + (x - 2y)^2 < 1$$

$$5x^2 + 5y^2 - 4x - 2y < 1$$

$$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 < \frac{1}{5}$$

$$\lambda = -2 - i$$

$$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{5}\right)^2 < \frac{1}{5}$$

Zadanie 6

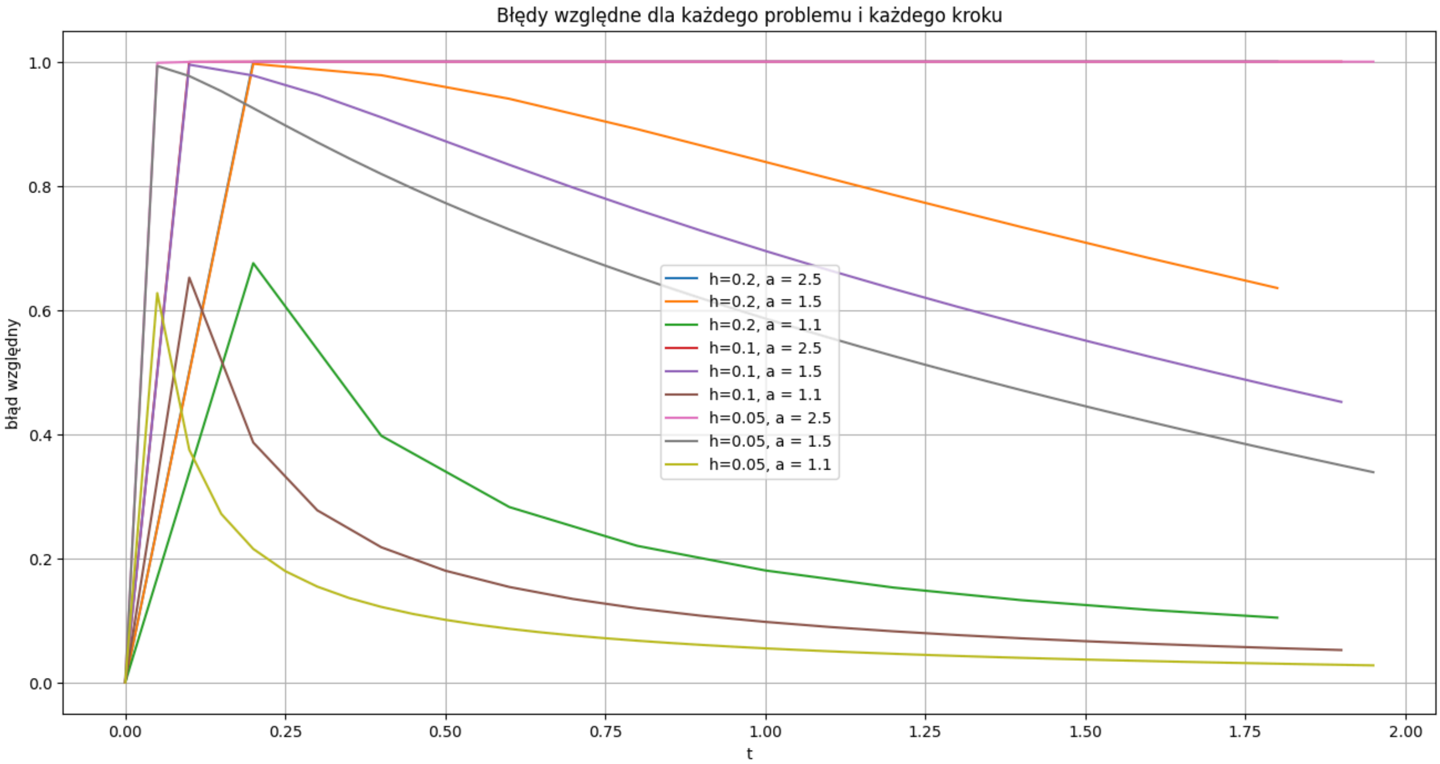
Dany jest problem początkowy:

$$y' = \alpha t^{\alpha - 1}$$

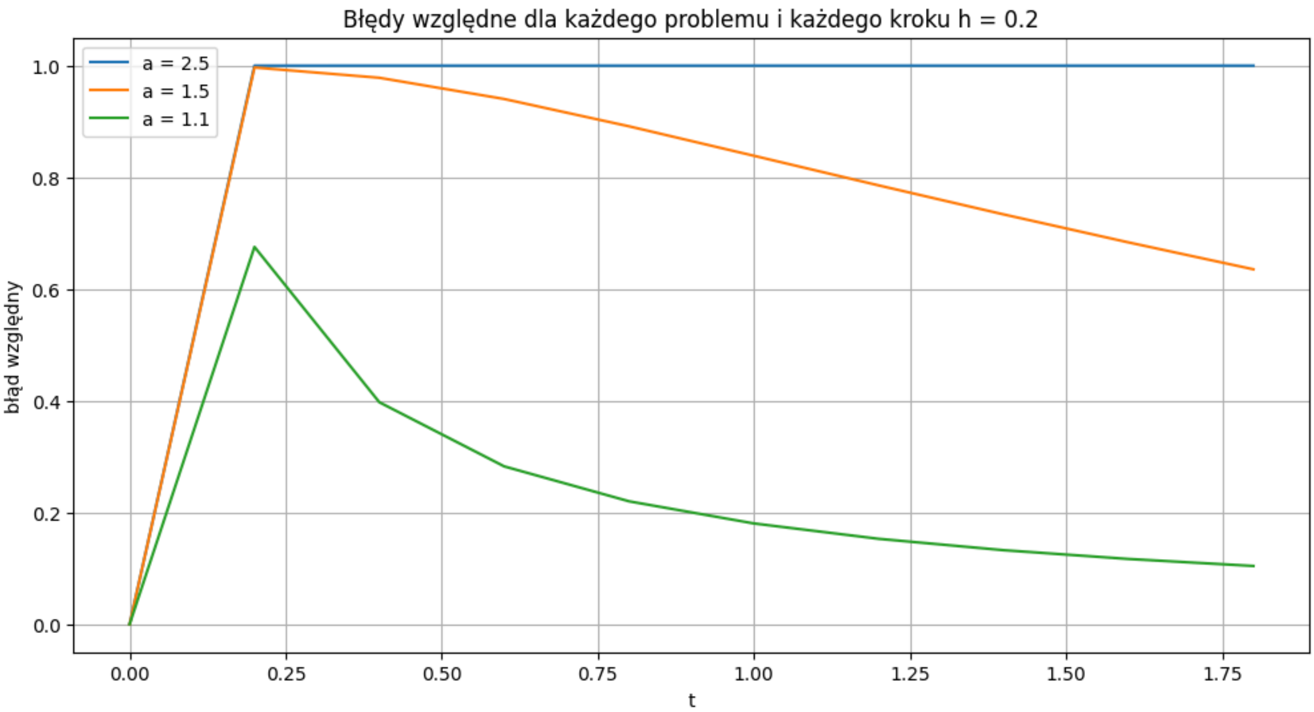
$$y(0) = 0$$

gdzie $\alpha > 0$. Rozwiązaniem powyższego problemu początkowego jest funkcja $y(t) = t^\alpha$. Rozwiąż powyższy problem metodą Eulera dla $\alpha = 2.5, 1.5, 1.1$. Dla każdego problemu zastosuj kroki $h = 0.2, 0.1, 0.05$, oblicz błąd numeryczny w węzłach rozwiązania, a następnie wyznacz empiryczny rząd zbieżności metody Eulera. Wyjaśnij otrzymane wyniki.

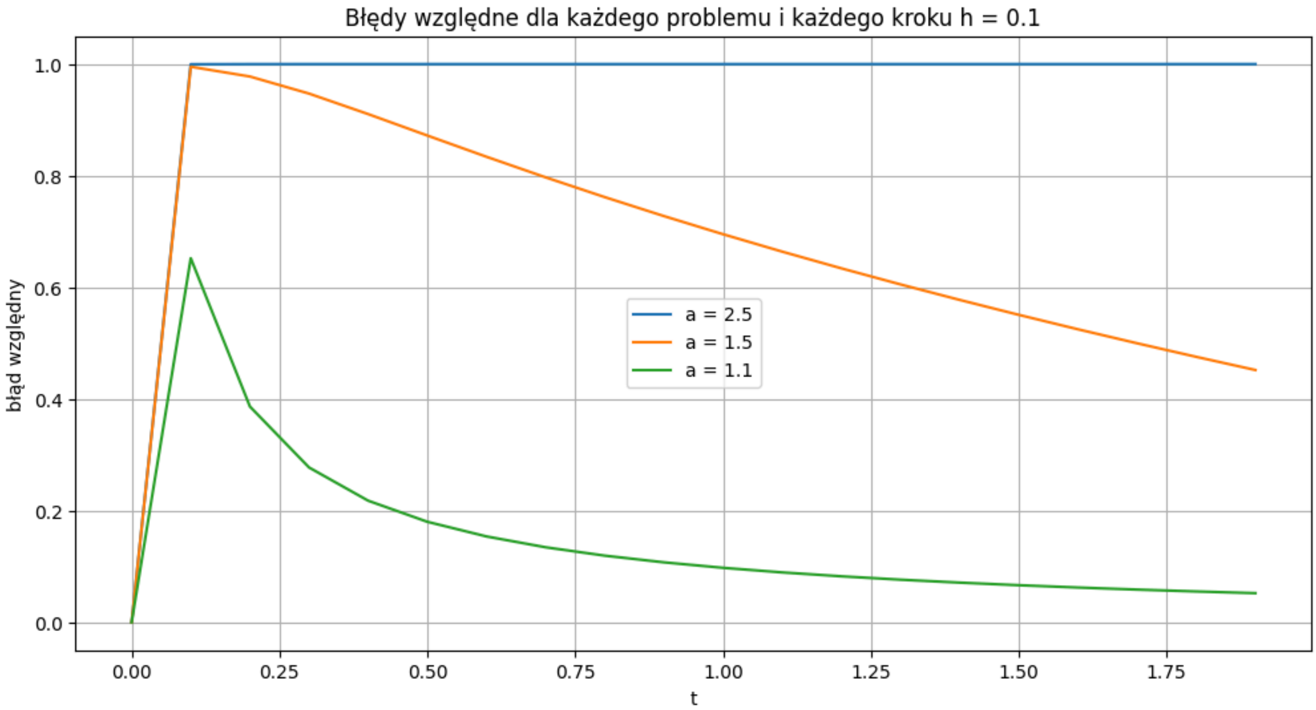
Rozwiązanie



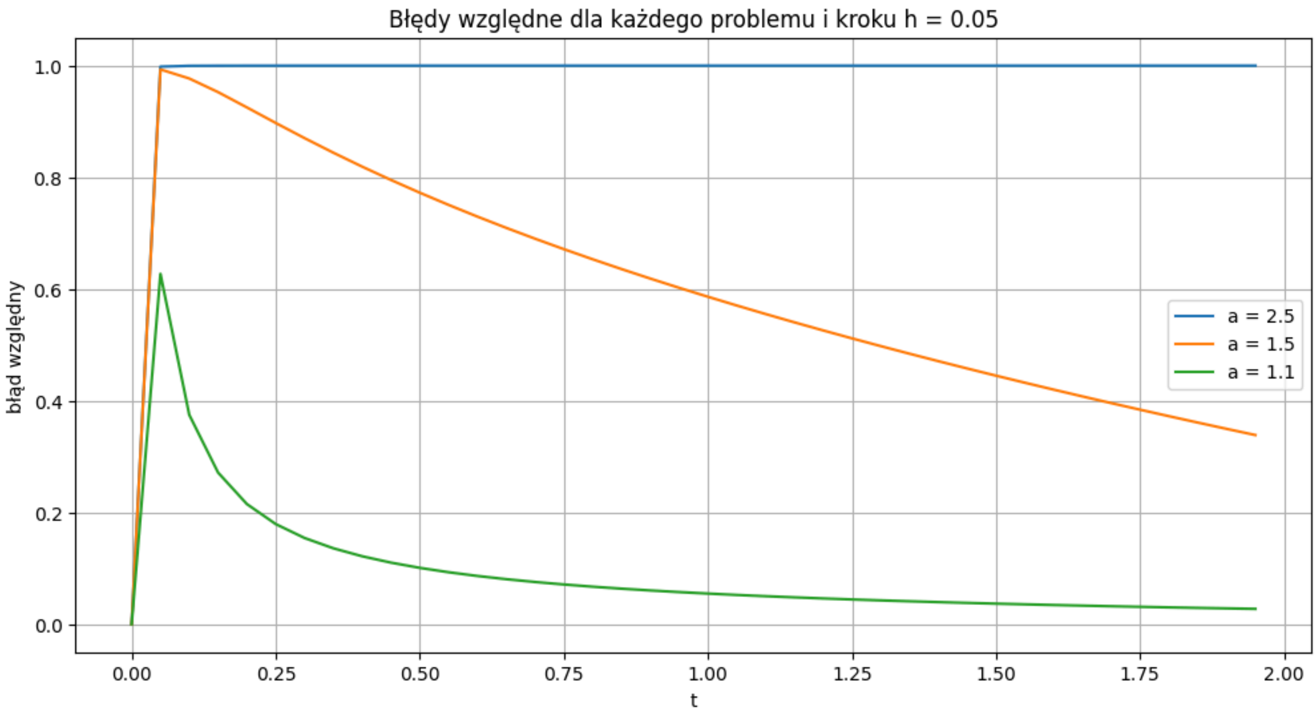
Rysunek 4: Porównanie błędów dla każdego przypadku



Rysunek 5: Porównanie błędów dla $h = 0.2$



Rysunek 6: Porównanie błędów dla $h = 0.1$



Rysunek 7: Porównanie błędów dla $h = 0.05$

Jak widać na wykresach powyżej, kształt wykresów jest bardzo podobny dla różnych wartości h, jedynie te o mniejszym h mają mniejsze błędy.

Dużo większą różnicę można obserwować dla różnych wartości α, dla $\alpha = 1.1$ błąd względny maleje zauważalnie szybciej niż dla $\alpha = 1.5$, a dla $\alpha = 2.5$ obliczenia w ogóle nie są możliwe, i metoda Eulera zwraca same zera (stąd błąd względny równy 1)

Empiryczne rzędy zbieżności:

$$r_{\alpha_1} \approx 0.905347$$

$$r_{\alpha_2} \approx 1.289960$$

$$r_{\alpha_3} \approx 1.865001$$

Wnioski

Dzisiejsze laboratorium nauczyło nas dużo o numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych. Początkowe zadania przypominają wiedzę z matematyki oraz przypominają że umiejętność analitycznego przekształcania równań jest ważna również przy metodach numerycznych. Dalsze zadania skupiały się na zastosowaniu metody Eulera. Pokazały jej ograniczenia (kiedy przestają być stabilne numerycznie) oraz dały obraz jak kształtuje się dokładność tej metody dla różnych problemów i wartości kroków.

Źródła

1. plik lab10-intro.pdf z teamsów