

MOWNIT laboratorium 6

Kwadratury

Zadanie 1

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

Obliczanie powyższej całki metodami:

- kwadraturą otwartych prostokątów
- kwadraturą trapezów
- kwadraturą Simpsona

Wykonanie obliczeń dla $2^i + 1$ punktów ewaluacji funkcji, gdzie $i = 1, 2, \dots, 25$. Porównanie dokładności obliczeń, znalezienie h_{\min} dla każdej z metod oraz porównanie rzędu zbieżności wyznaczonego empirycznie, z tym przewidywanym przez teorię.

Metoda prostokątów otwartych

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) * f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

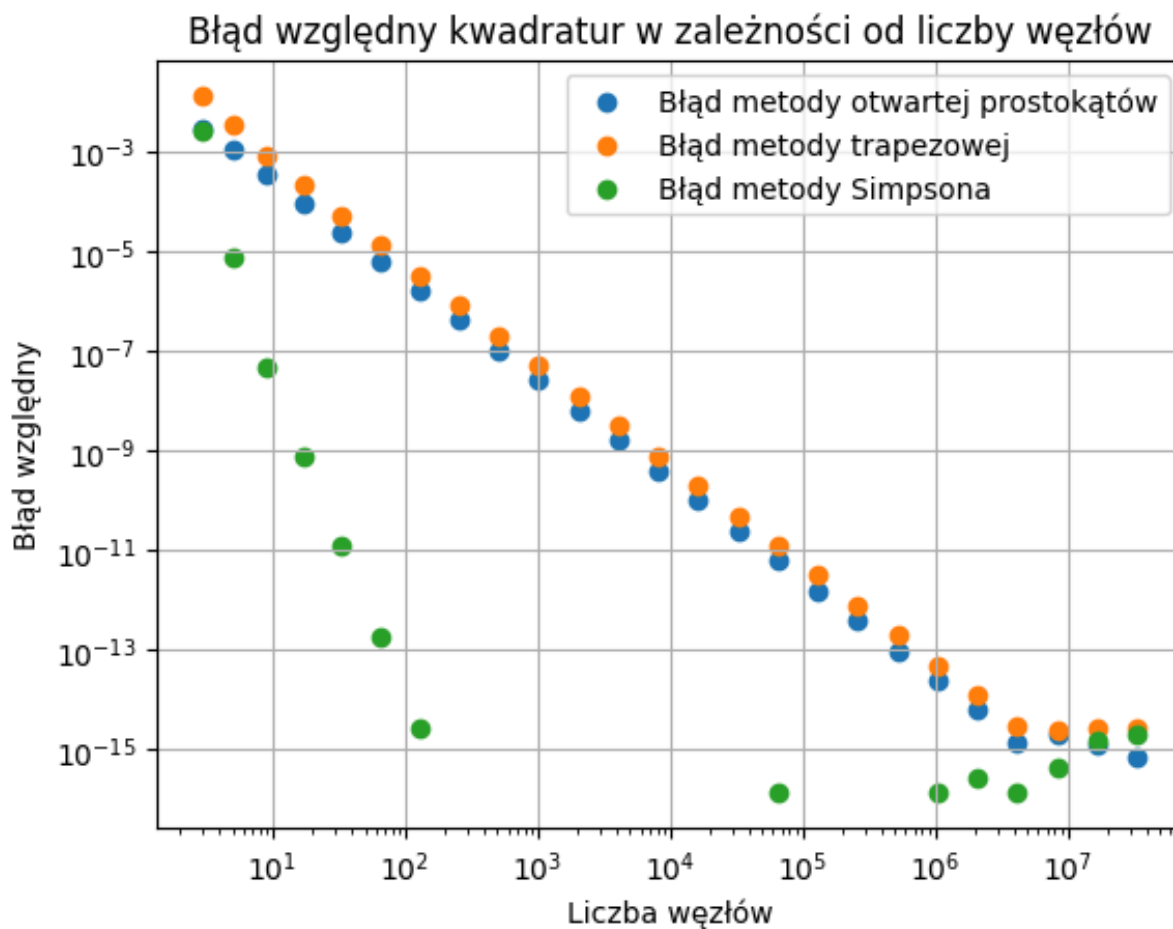
Metoda trapezów

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) * (b-a)$$

Metoda Simpsona

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6}(b-a) * \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Wyniki obliczeń



Rysunek 1: Wykres błędów względnych kwadratur w zależności od liczby węzłów

Na powyższym wykresie możemy zaobserwować, że metoda otwarta prostokątów oraz metoda trapezów dają bardzo podobne rezultaty, a kwadratura Simpsona jest zauważalnie lepsza. W jej przypadku spora liczba punktów nie jest widoczna na wykresie, ponieważ błąd względny był zbyt niski do obliczenia (wyszło 0) i nie widzimy ich przez zastosowanie skali logarytmicznej na wykresie.

Wartości h_{\min}

- metoda otwartych prostokątów: $h_{\min} \approx 5.96 \cdot 10^{-8}$
- metoda trapezów: $h_{\min} \approx 2.38 \cdot 10^{-7}$
- metoda Simpsona: $h_{\min} \approx 0.008$

Rzędy zbieżności

Kwadratura	Przewidywany rząd zbieżności	Wyznaczony rząd zbieżności
Otwarta prostokątów	2	2.000
Trapezów	2	2.234
Simpsona	4	7.515

Tabela 1: Porównanie przewidywanego rzędu zbieżności, z wyznaczonym empirycznie średnim rzędem zbieżności

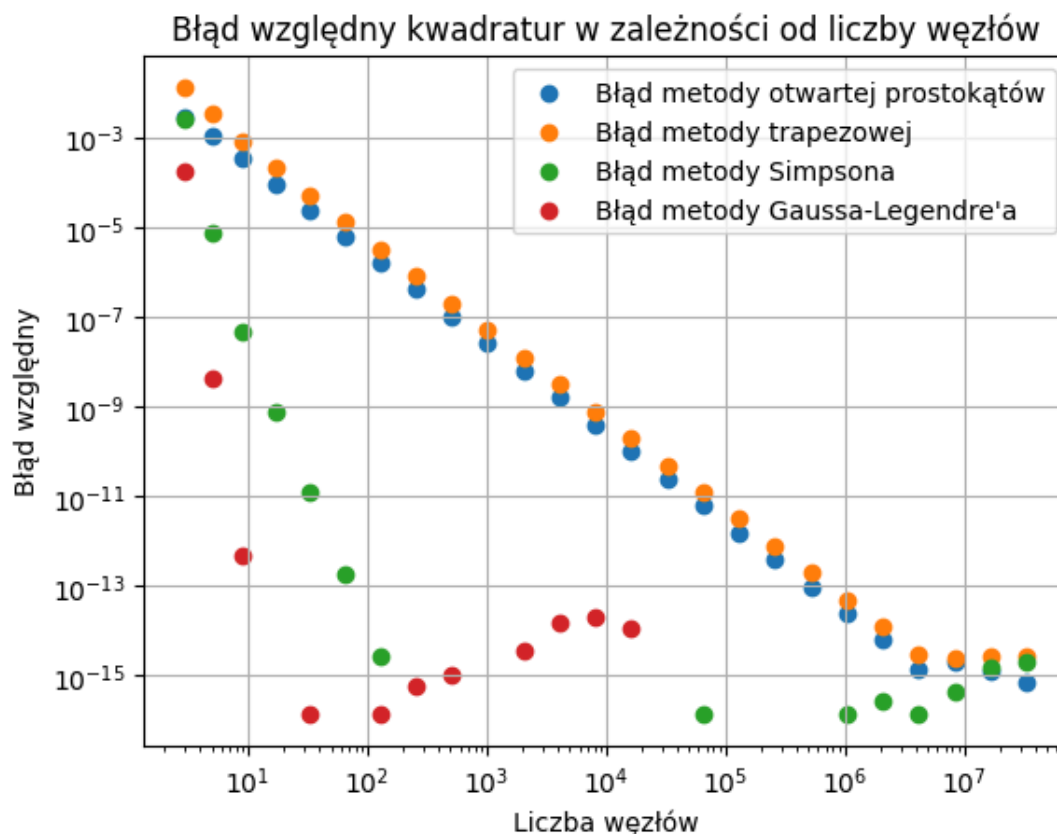
Aby obliczenia miały sens, dla każdej metody obliczyłem średni rząd zbieżności biorąc pod uwagę 6 największych wartości h (im większe, tym większy jest błąd metody, a mniejszy błąd numeryczny).

Jak widać w przedstawionych wynikach, w przypadku metody trapezów oraz otwartej prostokątów, empirycznie wyznaczony rząd zbieżności jest bardzo bliski temu, przewidywanemu przez teorię, oczywiście przez ograniczoną dokładność nie wyniesie nigdy dokładnej wartości teoretycznej. W przypadku metody Simpsona mamy już dużą rozbieżność, ponieważ wartość wyznaczona jest bliższa 7 lub 8 niż przewidywanemu 4. Jest to spowodowane tym, że błąd metody Simpsona jest dużo bliższy zera niż pozostałych 2, więc obliczenia będą bardziej wrażliwe na wahania dokładnych danych. Warto też zwrócić uwagę na to, że nie możliwe było wyliczenie rzędu zbieżności dla $h > 6$, ponieważ wtedy błąd Simpsona był na tyle niski, że w obliczeniach wychodziło 0.

Zadanie 2

Obliczyć całkę z zadania 1 używając metody Gaussa – Legendre’a i porównać wyniki z metodami użytymi w poprzednim zadaniu.

Wynik obliczeń



Rysunek 2: Wykres 1 uzupełniony o wyniki kwadratury Gaussa – Legendre’a

Te obliczenia są bardziej czasochłonne niż w poprzednich przykładach, dlatego wyliczyłem je do dla mniejszej liczby węzłów - $2^i + 1$, gdzie $i = 1, 2, \dots, 14$. Tyle węzłów wystarczy aby zaobserwować minimum - nie jest widoczne na wykresie, ponieważ jego wartość wyniosła 0.

Wartość h_{\min} kwadratury Gaussa – Legendre’a

$$h_{\min} \approx 0.111$$

Wnioski

W tym laboratorium miałem okazję porównać dokładność różnych kwadratur. Spośród metod użytych w zadaniu 1, czyli kwadratury otwartej prostokątów, trapezów oraz Simpsona, najdokładniejsza okazała się ta ostatnia, której minimalny błąd względny wyniósł wartość równą zero (oczywiście należy wziąć poprawkę na precyzję obliczeń). W drugim zadaniu do naszego porównania dodaliśmy kwadraturę Gaussa – Legendre’a, która również dała bardzo niski, miejscami zerowy, błąd względny, szczególnie przy niższej ilości węzłów. Przewyższała tam kwadraturę Simpsona, chociaż wraz ze zwiększeniem liczby węzłów, jej dokładność się pogorszyła względem tej ostatniej. W porównaniu do 3 metod z zadania 1, kwadratura Gaussa – Legendre’a posiada bardzo dużą wadę – jest zauważalnie droższa obliczeniowo, co skutkowało brakiem możliwości (lub bardziej czasu) porównania jej z resztą dla większej liczby węzłów.

Źródła

- Wprowadzenie do laboratorium zamieszczone na platformie teams