Tomasz Głąbek, 02.06.2025

MOWNIT laboratorium 10

Równania różniczkowe zwyczajne - część 2

Zadanie 1

Dynamika układu drapieżca-ofiara opisana jest modelem Lotki–Volterry:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x)$$

gdzie:

$x(t)$ – gęstość ofiar (np. liczba zajęcy na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu

$y(t)$ – gęstość drapieżców (np. liczba rysi na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu

α_1 – współczynnik przyrostu ofiar (np. zajęcy) w izolowanym środowisku

α_2 – współczynnik ubywania drapieżców (np. rysi) w izolowanym środowisku

β_1 – współczynnik intensywności kontaktów między drapieżcami a ofiarami, kończących się upolowaniem ofiary

β_2 – współczynnik opisujący wpływ obecności ofiar na współczynnik przyrostu drapieżców

Wartości początkowe: $x(0) = 20$

$y(0) = 20$

Parametry: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.5, \beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.02$

Rozwiąż powyższy układ równań metodami:

- jawną Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k + f(t_k, y_k)$$

- niejawną Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

- półjawną Eulera

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(x_n, y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n g(x_n, y_{n+1})$$

- Rungego–Kutty czwartego rzędu (RK4)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4), \text{ gdzie}$$

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

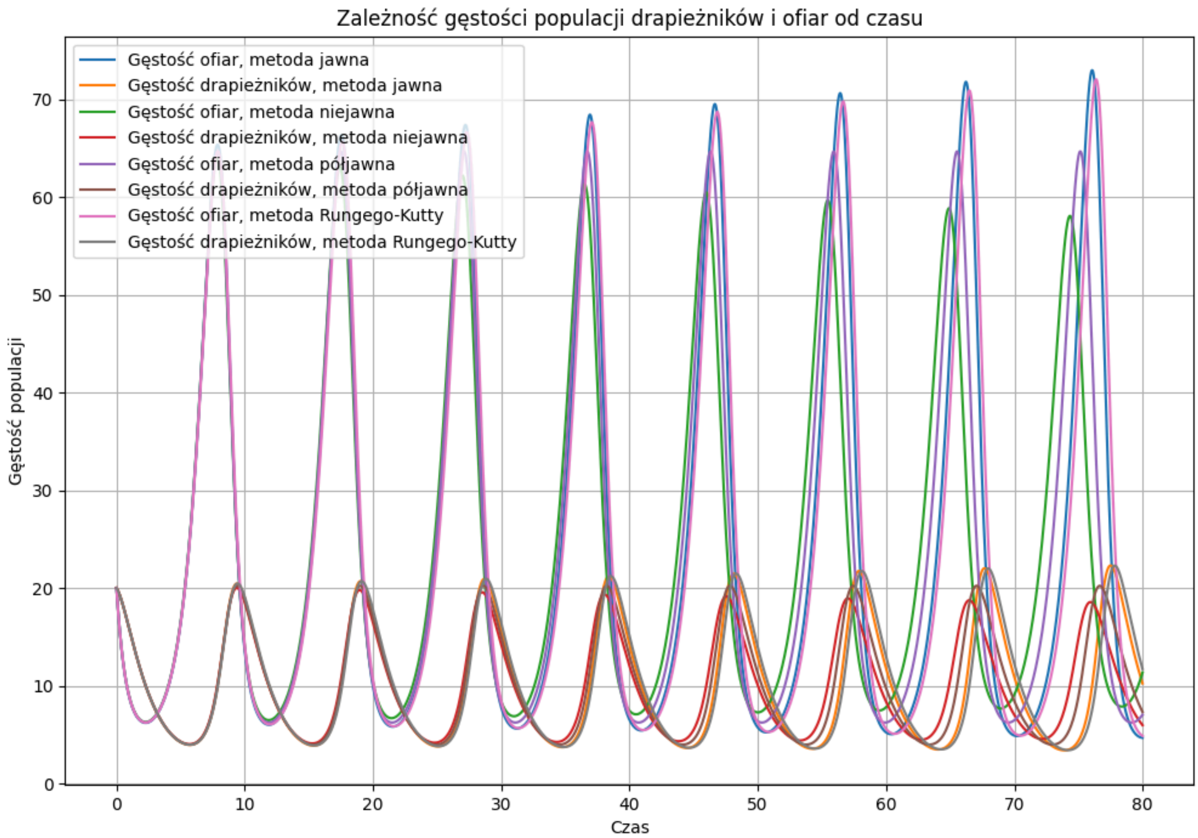
$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k k_2}{2}\right)$$

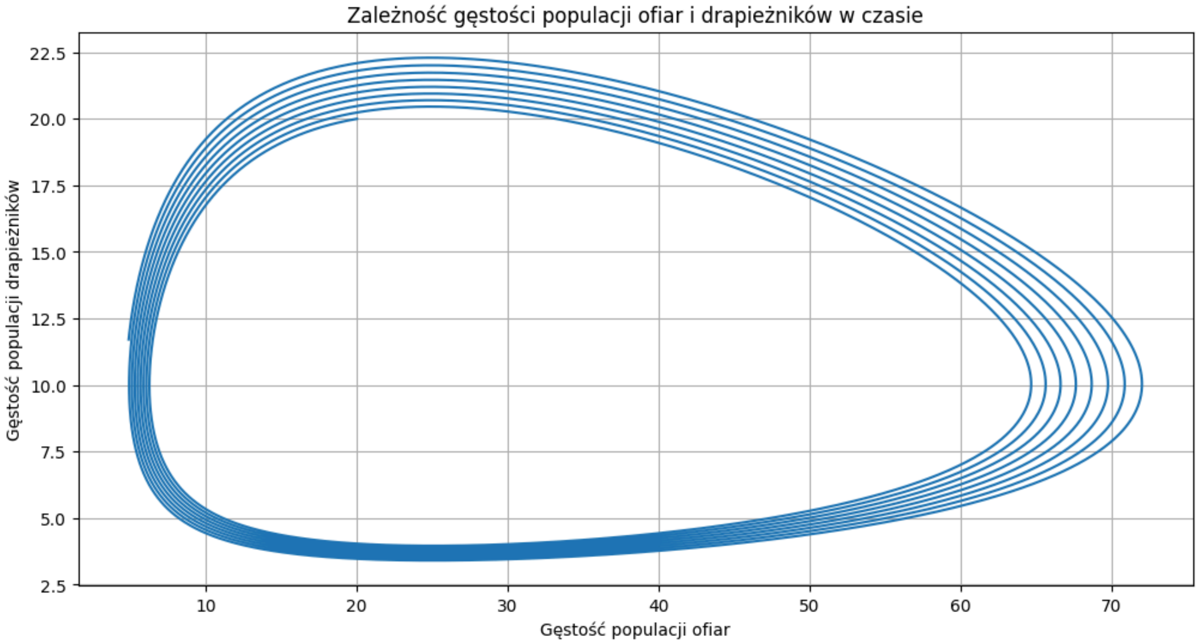
$$k_4 = f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3)$$

a)

Na wspólnym rysunku narysuj wykresy liczebności obu populacji w zależności od czasu. Na osobnym rysunku narysuj portret fazowy układu, tj. wykres trajektorii punktu $(x(t), y(t))$ w funkcji czasu. Podaj jego fizyczną interpretację.



Rysunek 1: Wykres zależności liczności obu populacji od czasu



Rysunek 2: Wykres trajektorii punktu $(x(t), y(t))$

Fizyczna interpretacja: ??

b)

Dla jakich warunków początkowych liczebności populacji nie ulegają zmianie? Znajdź punkty stacjonarne powyższego układu, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0 \\ y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ y = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \end{cases}$$

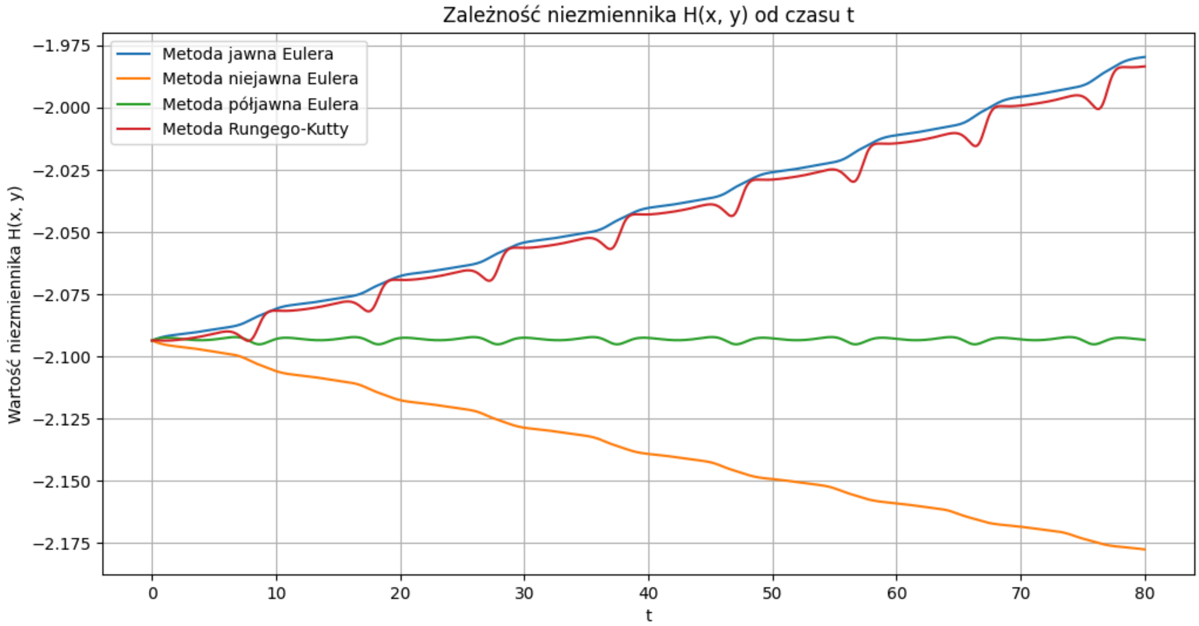
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 25 \\ y = 10 \end{cases}$$

c)

Czy zachowany jest niezmiennik:

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y)$$

Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy tego niezmiennika znalezione przez każdą metodę numeryczną.



Rysunek 3: Wykresy niezmiennika $H(x, y)$ w funkcji czasu dla każdej metody

d)

Wiemy, że na przestrzeni lat populacja rysi i zajęcy kształtowała się wg danych przedstawionych w pliku LynxHare.txt. Wybierz jedną z powyższych metod numerycznych i oszacuj prawdziwe wartości współczynników $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$. W tym celu wykonaj minimalizację funkcji kosztu. Jako funkcję kosztu wykorzystaj sumę kwadratów reszt (ang. residual sum of squares):

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^{T} \left(l_i - \hat{l}_i\right)^2 + \left(h_i - \hat{h}_i\right)^2$$

gdzie l_i oznacza prawdziwą liczbę rysi, $\hat{l}_i$ oznacza liczbę rysi wyznaczonych metodą numeryczną, a h_i oznacza prawdziwą liczbę zajęcy, $\hat{h}_i$ oznacza liczbę zajęcy wyznaczonych metodą numeryczną, Ponieważ nie znamy gradientu $\nabla_\theta L(\theta)$, do minimalizacji wykorzystaj metodę Neldera-Meada, która nie wymaga informacji o gradiencie.

Powtórz obliczenia, tym razem jako funkcję kosztu wykorzystując:

$$L(\theta) = -\sum_{i=0}^{T} l_i \ln\left(\hat{l}_i\right) - \sum_{i=0}^{T} h_i \ln\left(\hat{h}_i\right) + \sum_{i=0}^{T} \hat{l}_i + \sum_{i=0}^{T} \hat{h}_i$$

Wyniki

- Dla pierwszej funkcji kosztu:

$$\alpha_1 \approx -10.93, \alpha_2 \approx 28.81, \beta_1 \approx -0.25, \beta_2 \approx 1.40$$

- Dla drugiej funkcji kosztu:

$$\alpha_1 \approx -8.70, \alpha_2 \approx 26.64, \beta_1 \approx -0.17, \beta_2 \approx 1.33$$

Wnioski

Dzisiejsze laboratorium pokazało jak można praktycznie wykorzystać numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych, w tym przypadku do modelowania dynamiki zmian populacji zwierząt, wykorzystując model Lotki–Volterry. Pokazało też różnice w dokładności obu metod poprzez porównanie wartości niezmienników wyliczonych dla każdej z nich.

Źródła

- plik lab9-intro.pdf na teams (było to wprowadzenie do lab9 i 10)