

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Instytut Robotyki i Inteligencji Maszynowej



Modelowanie i Sterowanie Robotów

Projekt zaliczeniowy

Maja Zelmanowska, Dawid Sobczak

144582, 144627

Poznań 23.04.2021

Spis treści

1	Opis projektu	2
1.1	Szkic manipulatora	2
1.2	Notacja Denavita-Hartenberga	3
2	Konfiguracja przestrzenna - Autodesk Inventor	3
3	Przestrzeń robocza manipulatora	5
4	Zadanie kinematyki prostej	6
4.1	Skrypt - kinematyka prosta	6
4.2	Uzyskane macierze	6
5	Zadanie kinematyki odwrotnej	7
6	Jakobian manipulatora	8
6.1	Skrypt - Jakobian manipulatora	8
7	Równanie dynamiki	8
7.1	Otrzymany jacobian dla wszystkich węzłów manipulatora	8
7.2	Otrzymane jacobiany dla węzłów manipulatora	8
7.3	Parametr D	9
7.4	Parametr C	10
7.5	Parametr G	10
7.6	Równanie	10

Spis rysunków

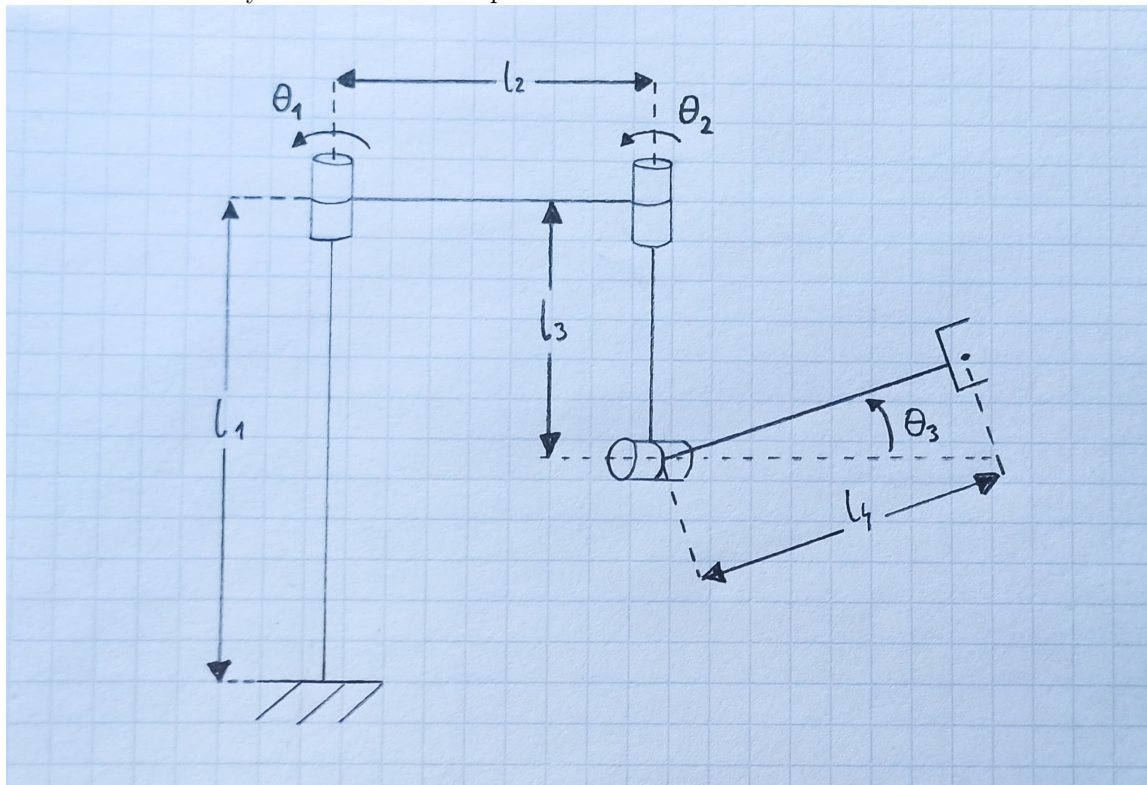
1	Szkic manipulatora wraz z oznaczeniami wielkości	2
2	Szkic manipulatora - przypisanie osi	2
3	7
4	10

1 Opis projektu

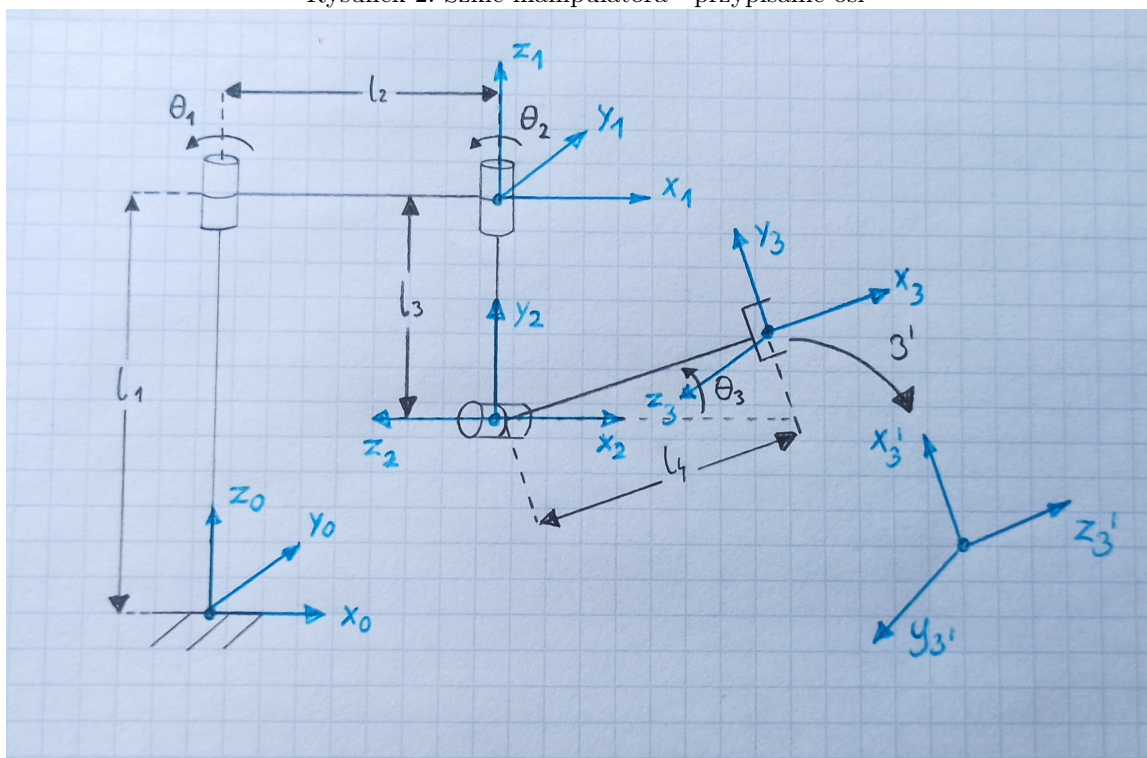
W ramach projektu na przedmiot Modelowanie i Sterowanie Robotów mamy do wykonania zadania dla wybranego manipulatora dostarczonego przez prowadzącego zajęcia. Konfiguracja, którą wybraliśmy to manipulator RRR w konfiguracji '||'.¹

1.1 Szkic manipulatora

Rysunek 1: Szkic manipulatora wraz z oznaczeniami wielkości



Rysunek 2: Szkic manipulatora - przypisanie osi



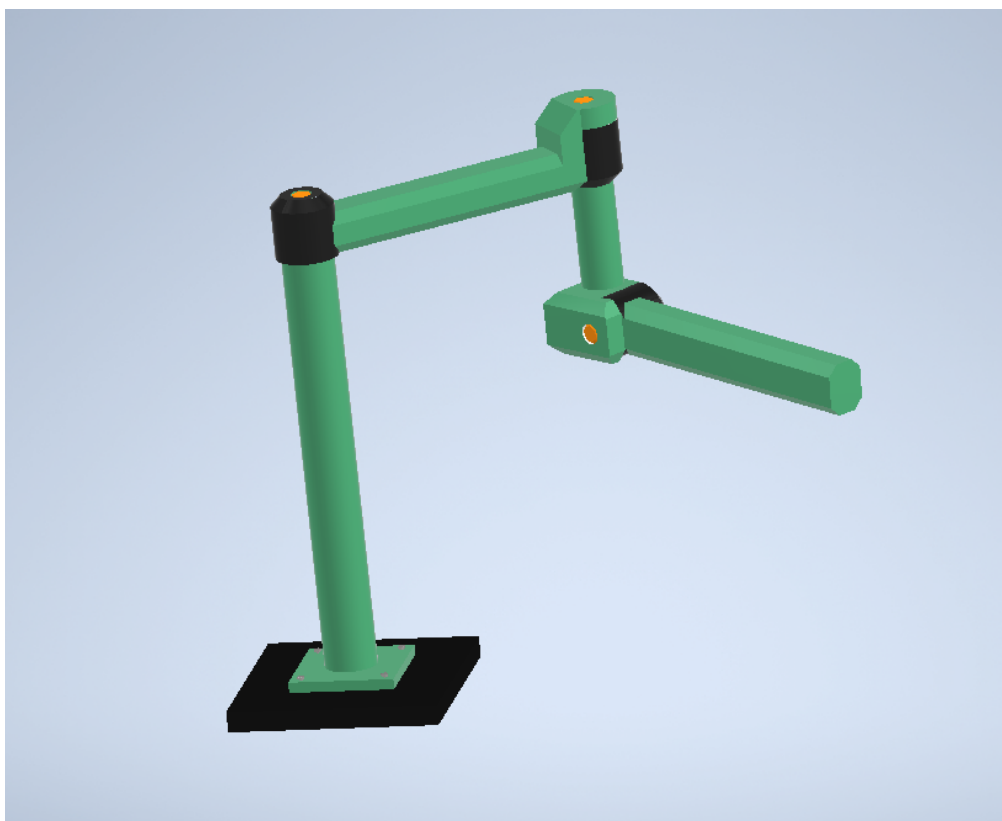
1.2 Notacja Denavita-Hartenberga

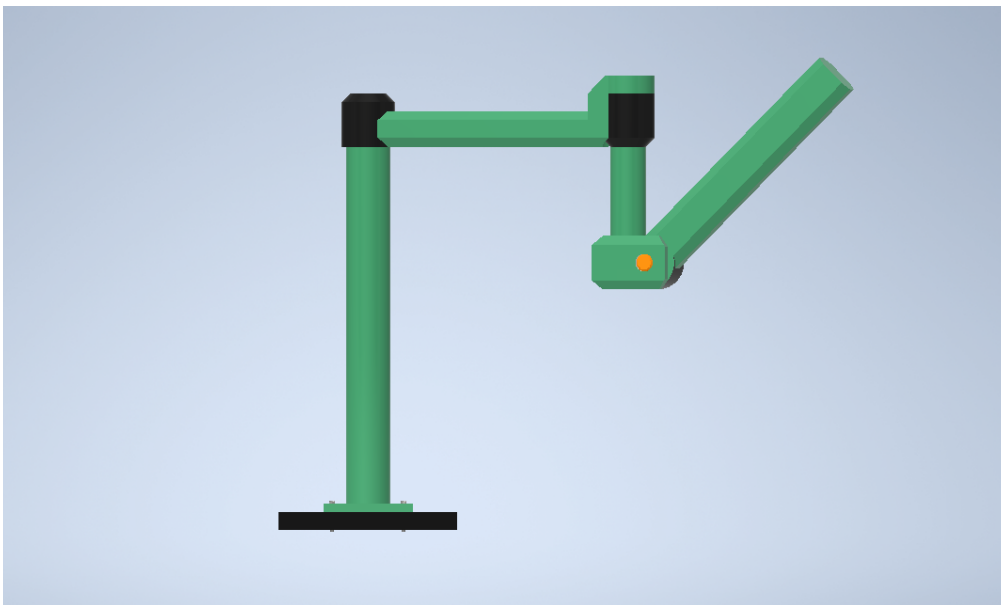
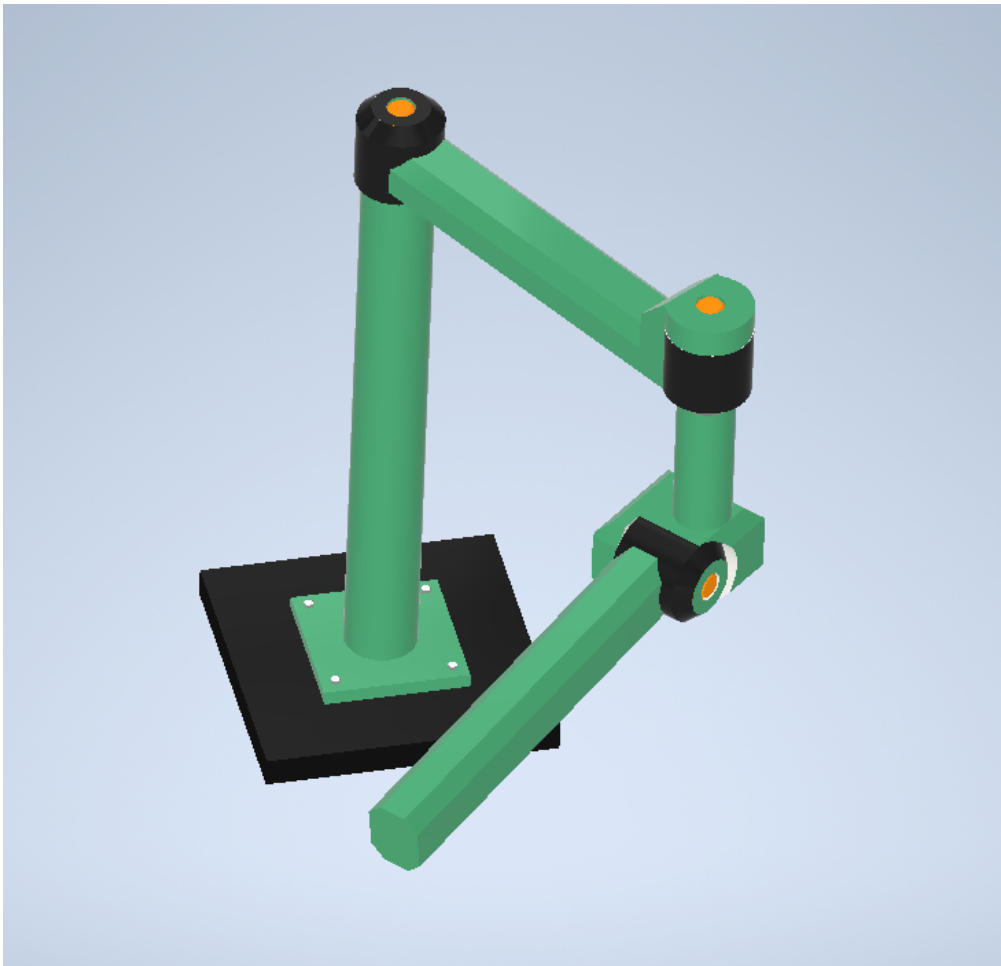
Korzystając ze szkicu 2 tworzymy tabelę opisującą poszczególne i -te ogniwo.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	l_1	l_2	0
2	θ_2	$-l_3$	0	90°
3	θ_3	0	l_4	0
3'	90°	0	0	90°

2 Konfiguracja przestrzenna - Autodesk Inventor

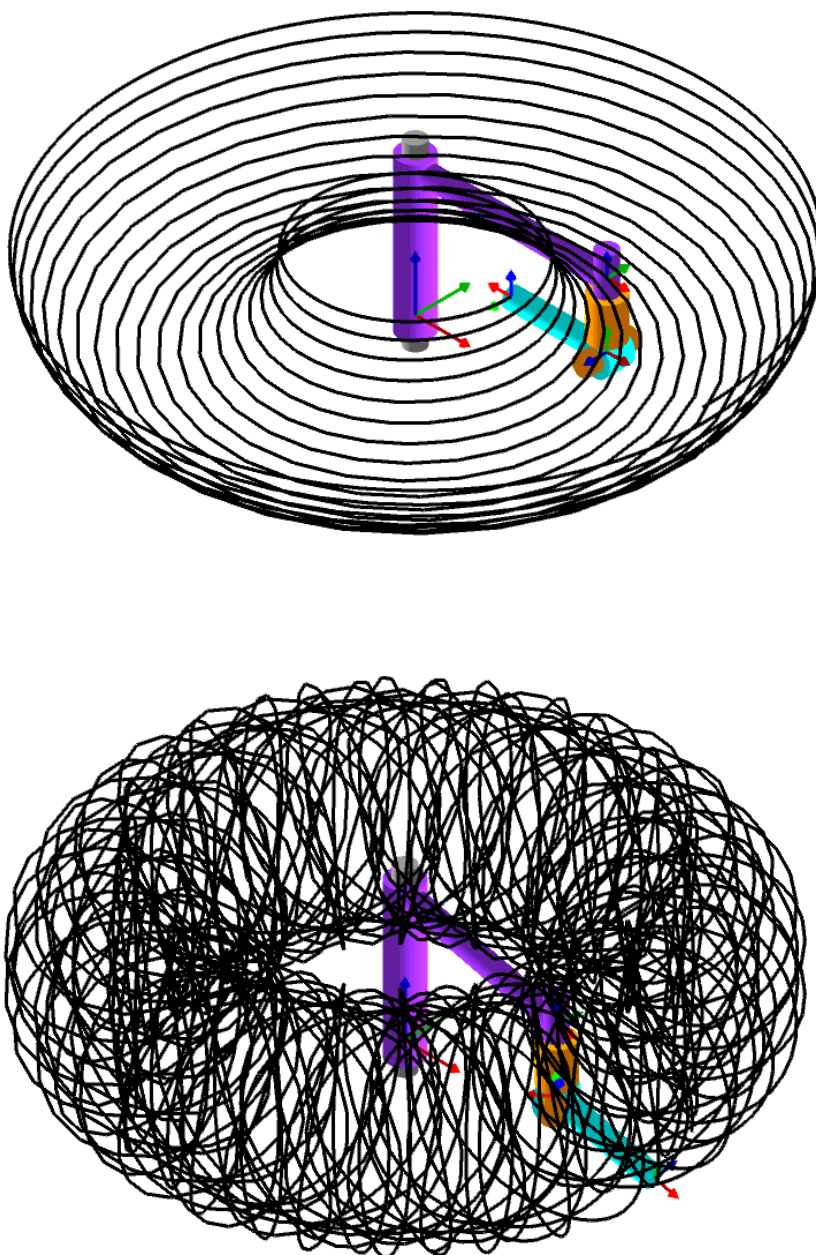
W celu zobrazowania przykładowego wyglądu manipulatora stworzyliśmy jego złożenie w programie Autodesk Inventor.





3 Przestrzeń robocza manipulatora

Przestrzeń robocza wykonana jest w programie RoboAnalyzer i obejmuje każdy punkt położony w środku pomiędzy okręgami, jednak wiele zależy od ustawienia przegubów 2 i 3 względem siebie. Zmienia to zakres ostatniego ramienia manipulatora z chwytakiem. Na 1 zdjęciu widac zakres 180 ° na drugim 360 °.



4 Zadanie kinematyki prostej

W celu wyliczenia kinematyki prostej naszego manipulatora posłużyliśmy się tabelą opisującą poszczególne ogniwa manipulatora oraz skrypt programu *MATLAB* wykorzystującym zmienne symboliczne.

4.1 Skrypt - kinematyka prosta

```
1 %% KINEMATYKA PROSTA
2 syms ct1 st1 l1 l2 ct2 st2 l3 ct3 st3 l4
3
4 A_01 = [ct1 -st1 0 0; st1 ct1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 1; 0 0 0 1] * [1 0 0 12; 0 1 ...
    0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]
5
6 A_12 = [ct2 -st2 0 0; st2 ct2 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 13; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 1 ...
    0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 0 -1 0; 0 1 0 0; 0 0 0 1]
7
8 A_23 = [ct3 -st3 0 0; st3 ct3 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] * [1 0 0 14; 0 ...
    1 0 0; 0 0 0 1; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]
9
10 A_33prim = [0 -1 0 0; 1 0 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 1 0 ...
    0; 0 0 0 1; 0 0 0 1] * [1 0 0 0; 0 0 -1 0; 0 1 0 0; 0 0 0 1]
11
12 A_02 = A_01 * A_12
13
14 A_03 = A_01 * A_12 * A_23
15
16 A_03prim = A_01 * A_12 * A_23 * A_33prim
```

4.2 Uzyskane macierze

Skrócony zapis:

1. $\cos = c$,
2. $\sin = s$.

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_2 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_2 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 & 0 & c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1 & l_2 c\theta_1 \\ c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1 & 0 & s\theta_1 s\theta_2 - c\theta_1 c\theta_2 & l_2 s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$A_0^3 = \begin{bmatrix} c\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2) & -s\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2) & 0 & l_2 c\theta_1 + c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1 + l_4 c\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2) \\ c\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1) & -s\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1) & 0 & l_2 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_2 + s\theta_1 s\theta_2 + l_4 c\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1) \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_1 + l_3 + l_4 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A_0^{3'} = \begin{bmatrix} -s\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2) & 0 & c\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2) & l_2 c\theta_1 + c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1 + l_4 c\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2) \\ -s\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1) & 0 & c\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1) & l_2 s\theta_1 - c\theta_1 c\theta_2 + s\theta_1 s\theta_2 + l_4 c\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1) \\ c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & l_1 + l_3 + l_4 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

5 Zadanie kinematyki odwrotnej

Rysunek 3:

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{cases} p_x = l_4 c_3 (c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 \\ p_y = l_4 c_3 (s_1 c_2 + c_1 s_2) + l_2 s_1 \\ p_z = l_4 c_3 - l_3 + l_1 \end{cases}$$

$$c_3 = \frac{p_z + l_3 - l_1}{l_4}$$

$$\begin{cases} p_x = l_4 \frac{p_z + l_3 - l_1}{l_4} (c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 \\ p_y = l_4 \frac{p_z + l_3 - l_1}{l_4} (s_1 c_2 + c_1 s_2) + l_2 s_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p_x}{p_z + l_3 - l_1} = c_1 c_2 - s_1 s_2 + \frac{l_2}{p_z + l_3 - l_1} c_1 \\ \frac{p_y}{p_z + l_3 - l_1} = s_1 c_2 + c_1 s_2 + \frac{l_2}{p_z + l_3 - l_1} s_1 \end{cases}$$

$$x = p_z + l_3 - l_1$$

$$\begin{cases} \frac{p_x}{x} = \left(c_2 + \frac{l_2}{x}\right) c_1 - s_1 s_2 \\ \frac{p_y}{x} = \left(c_2 + \frac{l_2}{x}\right) s_1 + c_1 s_2 \end{cases}$$

6 Jakobian manipulatora

6.1 Skrypt - Jakobian manipulatora

```
1 %% JAKOBIAN
2 z0 = [0 0 1]';
3 z1 = A_01(1:3,3);
4 z2 = A_02(1:3,3);
5 o0 = [0 0 0]';
6 o1 = A_01(1:3,4);
7 o2 = A_02(1:3,4);
8 on = A_03prim(1:3,4);
9
10 j1 = z0 .* (on - o0)
11
12 J1 = [j1;z0]
13
14 j2 = z1 .* (on - o1)
15
16 J2 = [j2;z1]
17
18 j3 = z2 .* (on - o2)
19
20 J3 = [j3;z2]
21
22 J = [J1 J2 J3]
```

*skrypt jest kontynuacją skryptu w, którym zostały wyliczone macierze transformacji

7 Równanie dynamiki

7.1 Otrzymany jacobian dla wszystkich węzłów manipulatora

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1)(c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1 + l_4 c\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2)) \\ 0 & 0 & -(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2)(s\theta_1 s\theta_2 - c\theta_1 c\theta_2 + l_4 c\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1)) \\ l_1 + l_3 + l_4 s\theta_3 & l_3 + l_4 s\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1 \\ 0 & 0 & s\theta_1 s\theta_2 - c\theta_1 c\theta_2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

7.2 Otrzymane jacobiany dla węzłów manipulatora

$$J_{oc1} = \begin{bmatrix} z_0 \times (o_{c1} - o_0) & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{z}_0 & \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$J_{oc1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}s\theta_1 l_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}c\theta_1 l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$J_{oc2} = \begin{bmatrix} z_0 \times (o_{c2} - o_0) & z_1 \times (o_{c2} - o_1) & \vec{0} \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \vec{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$J_{oc2} = \begin{bmatrix} s\theta_1 l_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}c\theta_1 l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$J_{oc3} = \begin{bmatrix} z_0 \times (o_{c3} - o_0) & z_1 \times (o_{c3} - o_1) & z_2 \times (o_{c3} - o_2) \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$J_{oc3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_4c\theta_3(s\theta_1c\theta_1 + c\theta_1s\theta_2) + l_2s\theta_1 & -\frac{1}{2}l_4c\theta_3(s\theta_1c\theta_1 + c\theta_1s\theta_2) & 0 \\ \frac{1}{2}l_4c\theta_3(c\theta_1c\theta_2 - s\theta_1s\theta_2) + l_2c\theta_1 & \frac{1}{2}l_4c\theta_3(c\theta_1c\theta_2 - s\theta_1s\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s\theta_2c\theta_1 + c\theta_2s\theta_1 \\ 0 & 0 & s\theta_1s\theta_2 - c\theta_1c\theta_2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

7.3 Parametr D

$$D = D_1 + D_2 + D_3 \quad (12)$$

D1 =

```
[ Izz + m1*((ct1*l2*conj(ct1)*conj(l2))/4 + (l2*st1*conj(l2)*conj(st1))/4), 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

>> D2

D2 =

```
[ Iyy + m2*((ct1*l2*conj(ct1)*conj(l2))/4 + l2*st1*conj(l2)*conj(st1)), Iyy, 0]
[ Iyy, Iyy, 0]
[ 0, 0, 0]
```

D3 =

```
[ m3*((ct1*l2 + (ct3*l4*(ct1*ct2 - st1*st2))/2)*(conj(ct1)*conj(l2) - (conj(ct3)*conj(l4)*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2)
+ (l2*st1 - (ct3*l4*(ct1*st1 + ct1*st2))/2)*(conj(l2)*conj(st1) - (conj(ct3)*conj(l4)*(conj(ct1)*conj(st1) + conj(ct1)*conj(st2))))/2))
+ Iyy*ct3*conj(ct3) + Ixx*st3*conj(st3), m3*((ct3*l4*(conj(ct1)*conj(l2) - (conj(ct3)*conj(l4)*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2)
- st1*st2))/2 - (ct3*l4*(conj(l2)*conj(st1) - (conj(ct3)*conj(l4)*(conj(ct1)*conj(st1) + conj(ct1)*conj(st2))))/2)*(ct1*st1 +
ct1*st2))/2 + Iyy*ct3*conj(ct3) + Ixx*st3*conj(st3), - (ct1*ct2 - st1*st2)*(Ixx*st3*conj(ct3)*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1))
- Iyy*ct3*conj(st3)*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1))) - (ct1*st2 + ct2*st1)*(Ixx*st3*conj(ct3)*(conj(st1)*conj(st2)
- conj(ct1)*conj(ct2)) - Iyy*ct3*conj(st3)*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2)))) [ Iyy*ct3*conj(ct3) - m3*((conj(ct3)*conj(l4)*
- conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*l2 + (ct3*l4*(ct1*ct2 - st1*st2))/2))/2 + (conj(ct3)*conj(l4)*(conj(ct1)*conj(st1) + conj(ct1)*conj(st2))
- (ct3*l4*(ct1*st1 + ct1*st2))/2))/2 + Ixx*st3*conj(st3), m3*((ct3*l4*conj(ct3)*conj(l4)*(conj(ct1)*conj(st1) + conj(ct1)*conj(st2)
+ ct1*st2))/4 - (ct3*l4*conj(ct3)*conj(l4)*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*ct2 - st1*st2))/4 + Iyy*ct3*conj(ct3)
+ Ixx*st3*conj(st3), - (ct1*ct2 - st1*st2)*(Ixx*st3*conj(ct3)*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1)) - Iyy*ct3*conj(st3)*(conj(ct1)*
+ conj(ct2)*conj(st1))) - (ct1*st2 + ct2*st1)*(Ixx*st3*conj(ct3)*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2)) - Iyy*ct3*conj(st3)*(conj(ct1)*
- conj(ct1)*conj(ct2)))) [ Ixx*conj(st3)*(ct3*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1))*(ct1*ct2 - st1*st2) + ct3*(conj(st1)*conj(st2)
- conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1)) - Iyy*conj(ct3)*(st3*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1))*(ct1*ct2 - st1*st2)
+ st3*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1)), Ixx*conj(st3)*(ct3*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1))
- st1*st2) + ct3*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1)) - Iyy*conj(ct3)*(st3*(conj(ct1)*conj(st2) +
conj(ct2)*conj(st1))*(ct1*ct2 - st1*st2) + st3*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1)), - (Iyy*conj(st3)*(st3*
+ conj(ct2)*conj(st1))*(ct1*ct2 - st1*st2) + st3*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1))*(conj(ct1)*conj(st2)
+ conj(ct2)*conj(st1)) + Ixx*conj(ct3)*(ct3*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1))*(ct1*ct2 - st1*st2) + ct3*(conj(st1)*conj(st2)
- conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1))*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1))*(ct1*ct2 - st1*st2) - (Iyy*conj(st3)*(st3*(co
+ conj(ct2)*conj(st1))*(ct1*ct2 - st1*st2) + st3*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1))*(conj(st1)*conj(st2)
- conj(ct1)*conj(ct2)) + Ixx*conj(ct3)*(ct3*(conj(ct1)*conj(st2) + conj(ct2)*conj(st1))*(ct1*ct2 - st1*st2) + ct3*(conj(st1)*conj(st2)
- conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1))*(conj(st1)*conj(st2) - conj(ct1)*conj(ct2))*(ct1*st2 + ct2*st1))]
```

7.4 Parametr C

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (13)$$

$$C_{113} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_{13}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial d_{13}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial d_{11}}{\partial \theta_3} \right) = -I_{3xx}c_3s_3 + I_{3yy}c_3s_3 + \frac{1}{2}l_3l_2m_3s_3 + \frac{1}{4}l_3^2m_3s_3c_3 \quad (14)$$

$$C_{131} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_{31}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial d_{11}}{\partial \theta_3} - \frac{\partial d_{13}}{\partial \theta_1} \right) = I_{3xx}c_3s_3 - I_{3yy}c_3s_3 - \frac{1}{2}l_3l_2m_3s_3 - \frac{1}{4}l_3^2m_3s_3c_3 \quad (15)$$

$$C_{311} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_{31}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial d_{11}}{\partial \theta_3} - \frac{\partial d_{13}}{\partial \theta_1} \right) = I_{3xx}c_3s_3 - I_{3yy}c_3s_3 - \frac{1}{2}l_3l_2m_3s_3 - \frac{1}{4}l_3^2m_3s_3c_3 \quad (16)$$

7.5 Parametr G

$$E_{p1} = m_1g * l_1 \quad (17)$$

$$E_{p2} = m_2g * (l_1 - \frac{1}{2}l_3) \quad (18)$$

$$E_{p3} = m_3g * (l_1 - l_3 + \frac{1}{2}l_4c_3) \quad (19)$$

$$E_p = \sum_i E_{pi} \quad (20)$$

$$G = \frac{\partial E_p}{\partial q_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}m_3gl_4s_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

7.6 Równanie

Rysunek 4:

The image shows a handwritten equation on a light blue grid background. The equation is written in blue ink and reads: $\underline{I} = D \ddot{q} + C + G$. The variables are underlined: \underline{I} , \underline{q} , \underline{C} , and \underline{G} . The double dot over \underline{q} indicates a second derivative.