



AARHUS UNIVERSITET

Transient respons

Øvelse 4

Emma Spanner 201907955
Mads Emil Nielsen 201908775
Peter Gehlert Theilgaard 201907648

Hold 2

9. december 2019

IKLT-MMLS 1. semester
Ingeniørhøjskolen Aarhus Universitet

Indhold

1	Indledning	2
2	Analyse	3
2.1	Analyse af 1. ordens lavpasfilter	3
3	Simulering	9
3.1	Simulering af 1. ordens lavpasfilter	9
3.1.1	Simulering af $10\text{ k}\Omega$	9
3.1.2	Simulering af $100\text{ k}\Omega$	11
3.2	Simulering af 2. ordens lavpasfilter	13
3.2.1	Simulering af $1\text{ k}\Omega$	13
3.2.2	Simulering af $10\text{ k}\Omega$	14
4	Realisering	15
4.1	Realisering af 1. ordens lavpasfilter	16
4.1.1	$10\text{k}\Omega$	16
4.1.2	$100\text{k}\Omega$	18
4.2	Realisering af 2. ordens lavpasfilter	20
4.2.1	$10\text{k}\Omega$	20
4.2.2	$1\text{k}\Omega$	20

1 Indledning

Formålet med denne øvelse er at vise:

- Hvordan beregnes og måles steprespons signaler i et kredsløb.
- Hvordan påvirker et kredsløbs komponenter det beregnede og målte steprespons.

I øvelsen betragtes 1. og 2. ordens lavpasfiltre. Resultaterne fra øvelsen præsenteres i form af en målejournal og godkendes af underviserne ved den afsluttede måling.

2 Analyse

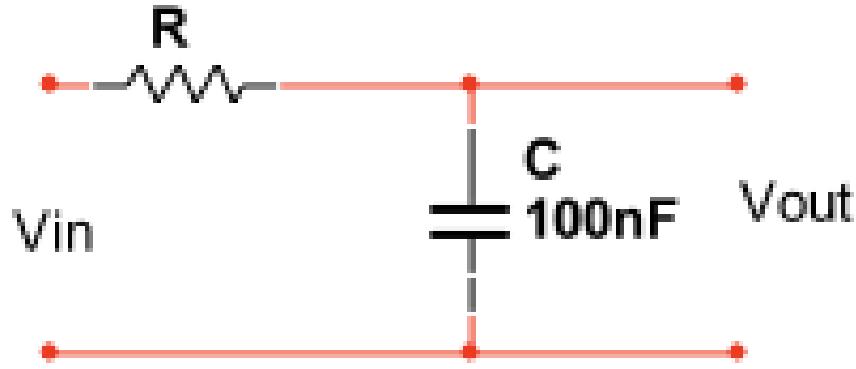
Øvelsen er opdelt i to dele, 1. og 2. ordens lavpasfilter.

2.1 Analyse af 1. ordens lavpasfilter

Figur 1 viser et 1. ordens lavpasfilter med en modstand og en kondensator. V_{in} er stepinput med spænding 0 – 5 V. Steppet sker til tiden $t=0$ sek.

$$V_{in}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ V_0 & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ligning: 1 Indgangs spændingen er en funktion af t



Figur 1: Første ordens lavpasfilter

Strøm-spænding sammenhængen for en modstand og en kondensator er:

Modstand:

$$V_R = R \cdot i \quad (2)$$

Ligning 2: Spændingen over en modstand

Kondensator:

$$i = C \cdot \frac{d(V_C)}{dt} \quad (3)$$

Ligning 3: Strømen gennem en kondensator

Output spænding:

$$V_{Out}(t) = V_C(t) \quad (4)$$

Ligning 4: Spændingen over $V_C(t)$ er den samme som i punktet $V_{Out}(t)$

Følgende 8 delopgaver er givet:

1. Vis ved Kirchhoffs love : KVL

Vis ved Kirchhoffs love at følgende differentialligning gælder for kredsløbet i Figur 1 :

$$V_{in}(t) = R \cdot C \cdot \frac{d(V_{out}(t))}{dt} + V_{out}(t) \quad (5)$$

Efter en kredsløbsanalyse ses det at:

$$V_{in} = V_R + V_C \quad (6)$$

Ved brug af Ligning 1 og Ligning 4 kan ligningen omskrives til

$$V_0 = V_R + V_{out} \quad (7)$$

Ved at kombinere Ligning 2 og Ligning 3, kan der findes et nyt udtryk fra V_R som er afhængig af tiden t

$$V_R = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} \cdot V_C \quad (8)$$

Dernæst kan den indsættes i Ligning 7 hvilket medføre

$$V_0 = R \cdot C \cdot \frac{d(V_{out}(t))}{dt} + V_{out}(t) \quad (9)$$

2. Løs differentialligningen med hensyn til V_{out}

Løs differentialligningen med hensyn til V_{out} for $0 \leq t < \infty$

Ligning 5 kan omskrives så konstanten foran $\frac{d(V_{out}(t))}{dt}$ ved at gange igennem med $\frac{1}{R \cdot C}$, det medføre

$$\frac{d(V_{out}(t))}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_{out}(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_0 \quad (10)$$

Ved hjælp af en løsnings protokol Ligning 10 nu løses:

$$P(t) = \frac{1}{R \cdot C} \quad (11)$$

$$Q(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_0 \quad (12)$$

$$\mu(t) = e^{\int P(t) dt} \rightarrow e^{(\frac{t}{R \cdot C})} \quad (13)$$

Ligning 13: Hjælpefunktion

$$F(t) = \int \mu(t) \cdot Q(t) dt \rightarrow V_0 + k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (14)$$

Ligning 14: Stamfunktion

$$V_{Out}(t) = \frac{1}{\mu(t)} \cdot (F(t) + k) \xrightarrow{\text{simplify}} V_{Out}(t) = V_0 + k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (15)$$

Ligning 15: Fuldstændig løsning

$$k = V_{Out}(0) \xrightarrow{\text{solve}, k} -V_0 \quad (16)$$

Ligning 16: Betingelse

$$V_{Out}(t) = V_0 - V_0 \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \quad (17)$$

Ligning 17: Specifikke Løsning

3. Beregn tidskonstanten

Beregn tidskonstanten τ for lavpasfilteret med hhv. $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R = 100 \text{ k}\Omega$ og $C = 100nF$. Tidskonstanten er et udtryk for at V_{Out} er opnået 63% af V_{in} .

$$\tau = R \cdot C \quad (18)$$

Ligning 18: Generel tidskonstant

Tidskonstant τ_{10} :

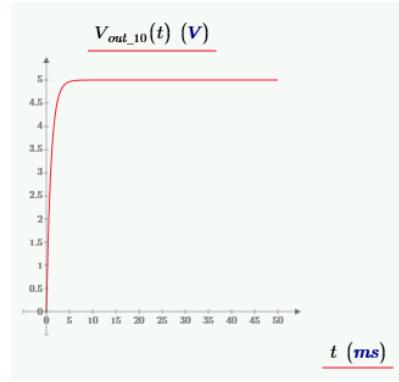
Ved brug af Ligning 18 kan τ_{10} beregnes:

$$\begin{aligned} \tau_{10} &= R_{10} \cdot C \\ \tau_{10} &= 10k\Omega \cdot 100nF \\ \tau_{10} &= 1ms \end{aligned} \quad (19)$$

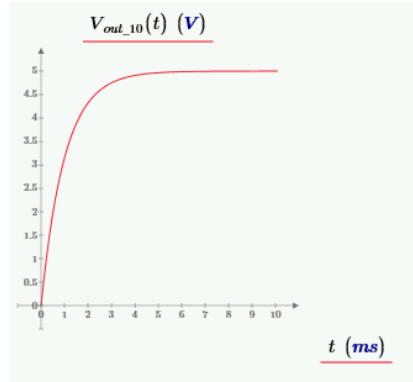
Tidskonstant τ_{100} :

Ved brug af Ligning 18 kan τ_{100} beregnes:

$$\begin{aligned} \tau_{100} &= R_{100} \cdot C \\ \tau_{100} &= 100k\Omega \cdot 100nF \\ \tau_{100} &= 10ms \end{aligned} \quad (20)$$



Figur 2: $10k\Omega$ - 0-50ms



Figur 3: $10k\Omega$ - 0-10ms

4. Beregn kurveform

Beregn kurveform for V_{out} med hhv. $R = 10 k\Omega$ og $R = 100 k\Omega$, og vis disse grafisk for $0 \leq t \leq 50ms$

Bestemt er: $V_0 = 5V$ og $t = 0s, 0.1ms..50ms$

Kurveformen er givet ved Ligning 17, da dette er den specifikke løsning.

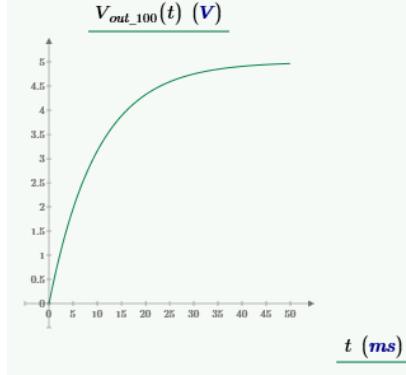
Derefer kan man nu indsætte parametrene i ligningen og derved får man 2 nye ligninger der begge afhænger af tiden t :

$V_{Out10}(t)$:

$$V_{Out10}(t) = 5V - 5V \cdot e^{-\frac{t}{10k\Omega \cdot 100nF}} \quad (21)$$

$V_{Out100}(t)$:

$$V_{Out100}(t) = 5V - 5V \cdot e^{-\frac{t}{100k\Omega \cdot 100nF}} \quad (22)$$



Figur 4: $10k\Omega$ - 0-50ms

5. Beregn Vout max

Beregn den maksimale værdi af V_{out} i de to tilfælde. Når V_{Max} skal beregnes vil den være højste i det signalet stepper ned. Det vil sige ved $t = 50ms$

$V_{OutMax_{10}}$:

$$V_{OutMax_{10}}(50ms) = 5V - 5V \cdot e^{-\frac{50ms}{10k\Omega \cdot 100nF}} \\ V_{OutMax_{10}}(50ms) = 5V \\ (23)$$

$V_{OutMax_{100}}$:

$$V_{OutMax_{100}}(50ms) = 5V - 5V \cdot e^{-\frac{50ms}{100k\Omega \cdot 100nF}} \\ V_{OutMax_{100}}(50ms) = 4.996V \\ (24)$$

6. Bestem stigetiden tr

Bestem stigetiden tr (10-90%). Stigetiden er den tid det tager V_{out} at komme fra 10% til 90% af V_{in} .

Ved $10k\Omega$:

$$t_{10} = -\ln(0.9) \cdot \tau_{10} \\ t_{10} = -\ln(0.9) \cdot 1.0ms \\ t_{10} = 0.105ms \\ (25)$$

$$t_{90} = -\ln(0.1) \cdot \tau_{10} \\ t_{90} = -\ln(0.1) \cdot 1.0ms \\ t_{90} = 2.303ms \\ (26)$$

$$tr_{10} = t_{90} - t_{10} \\ tr_{10} = 2.303ms - 0.105ms \\ tr_{10} = 2.167ms \\ (27)$$

Ved $100k\Omega$:

$$\begin{aligned} t_{10} &= -\ln(0.9) \cdot \tau_{100} \\ t_{10} &= -\ln(0.9) \cdot 1.0ms \\ t_{10} &= 1.054ms \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} t_{90} &= -\ln(0.1) \cdot \tau_{100} \\ t_{90} &= -\ln(0.1) \cdot 1.0ms \\ t_{90} &= 23.026ms \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} tr_{100} &= t_{90} - t_{10} \\ tr_{100} &= 23.026ms - 1.054ms \\ tr_{100} &= 21.972ms \end{aligned} \quad (30)$$

7. Forklar

Forklar hvordan tidskonstanten og stigetiden kan findes ud fra grafen for V_{out} , og opstil en ligning til bestemmelse af C , når tidskonstanten τ og modstanden R er kendte.

$$V_0 = 5V \quad t = 0ms, 0.1ms..50ms$$

Den generelle formel for V_{out} er følgende:

$$V_{out}(t) = V_0 - V_0 \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \quad (31)$$

Ligning 31: Specifikke Løsning

$$0.1 \cdot V_0 = 0.5V \quad 0.9 \cdot V_0 = 4.5V$$

Tidskonstanten findes ved at finde tiden til 63% af den stationære spænding. Da den stationære spænding er aflæst til 5V, vil Tau være 3.15V.

$$10k\Omega$$

Her ses, at tidskonstanten, tau, er aflæst til 1.027ms, til 63% af den stationære spænding. Desuden kan tiden til 10% af den stationære spænding aflæses til 0.116 ms og 90% af den stationære spænding aflæses til 2.316 ms, hvorefter forskellen udregnes.

$$t_{90} - t_{10} = 2.316ms - 0.116ms = 2.2ms$$

$$100k\Omega$$

Her ses, at tidskonstanten, tau, er aflæst til 10.028ms, til 63% af den stationære spænding. Desuden kan tiden til 10% af den stationære spænding aflæses til 1.207 ms og 90% af den stationære spænding aflæses til 23.411 ms, hvorefter forskellen udregnes.

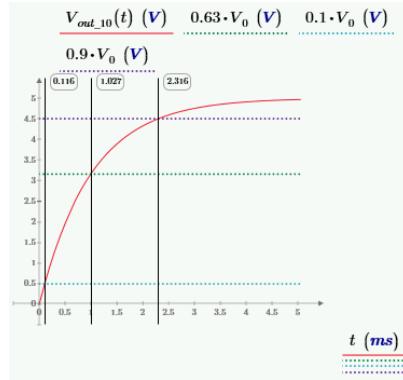
$$t_{90} - t_{10} = 23.442ms - 1.207ms = 22.204ms$$

Bestem C Hvis tidskonstanten τ og modstanden R er kendt, kan man bestemme C :

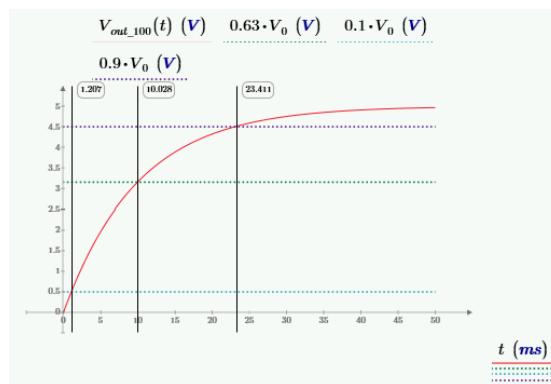
$$\begin{aligned} \tau_C &= R \cdot C \Rightarrow C = \frac{\tau_C}{R} \\ 10 \text{ k}\Omega \quad C_{10} &= \frac{1ms}{10k\Omega} = 100nF \\ 100 \text{ k}\Omega \quad C_{100} &= \frac{1ms}{100k\Omega} = 100nF \end{aligned}$$

8. Indfør resultatur i Tabel 1

Resultaterne indføres i Tabel 1.



Figur 5: 10kΩ



Figur 6: 100kΩ

3 Simulering

3.1 Simulering af 1. ordens lavpasfilter

Resultaterne fra analysen simuleres med diagrammerne vist i Figur 7 og 8

I de to tilfælde bestemmes $\tau(\tau)$, stigetiden og den maksimale spænding, disse resultater indføres i tabel 1.

Figur 7 viser simuleringen af 1. ordens lavpasfilter og Figur 8 viser simulering af 2. ordens lavpasfilter.

3.1.1 Simulering af 10 kΩ

Tidskonstanten(τ) bestemmes ved at beregne:

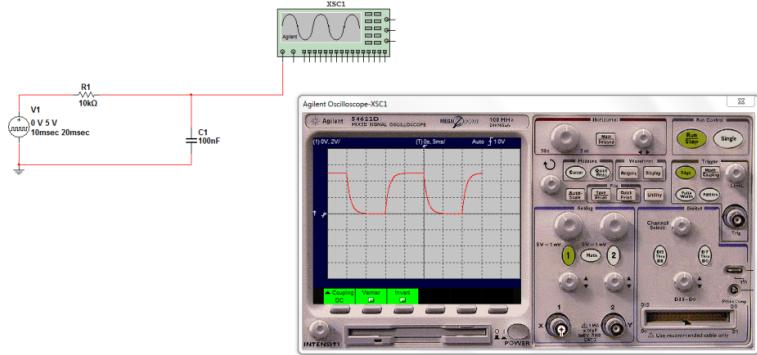
$$V_{max} \cdot 0.63 = V_\tau$$

Herefter måles tidsforskellen fra t_0 V til V_τ

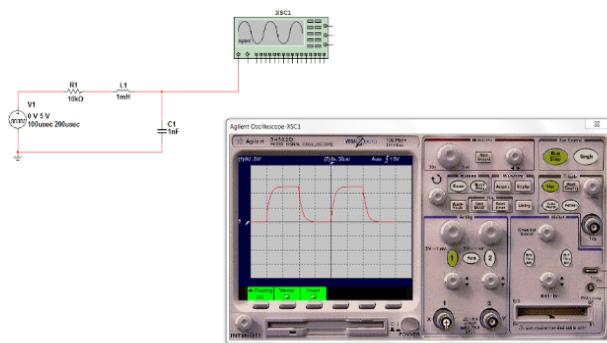
V_{max} er ud fra figur 9 målt til 4.97 V

$$4.97 V \cdot 0.63 = 3.131V$$

Tidsforskellen fra t_0 V til V_τ måles via figur 9 til 1.01 ms ($\tau = 1.01$ ms)



Figur 7: Simulering af 1. ordens lavpasfilter



Figur 8: Simulering af 2.ordens lavpasfilter

Stigetiden bestemmes ved formlen:

$$t_{90} - t_{10} = \text{stigetid}$$

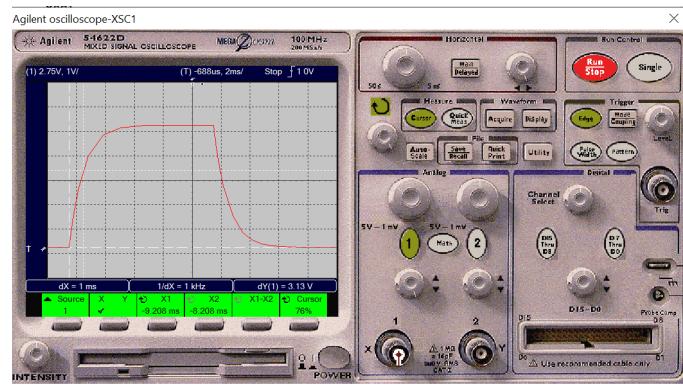
Ud fra målinger af figur 10 er stigetiden blevet beregnet til

$$\begin{aligned} t_{10} &= 4.97V \cdot 0.1 = 0.497V \\ t_{90} &= 4.97V \cdot 0.9 = 4.473V \end{aligned}$$

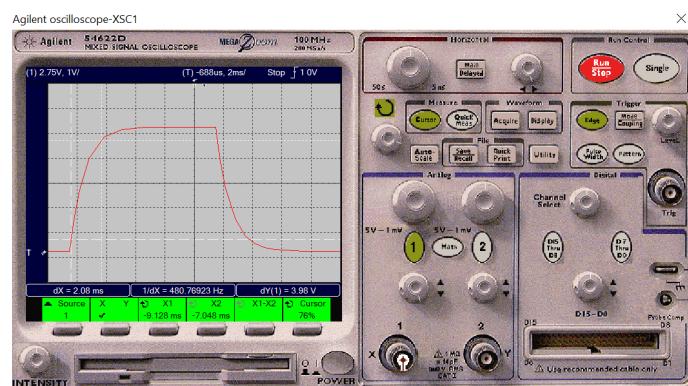
Tidsforskellen mellem t_{90} og t_{10} måles via figur 10 til 2.08 ms
Maksimal spænding bestemmes ved formlen:

$$V_{max} - V_{min} = \text{Maksimal spænding}$$

Afstanden mellem V_{max} og V_{min} måles via figur 11 til 4.97 V



Figur 9: måling af τ



Figur 10: stigetid

3.1.2 Simulering af 100 k Ω

Tidskonstanten(τ) bestemmes ved at beregne:

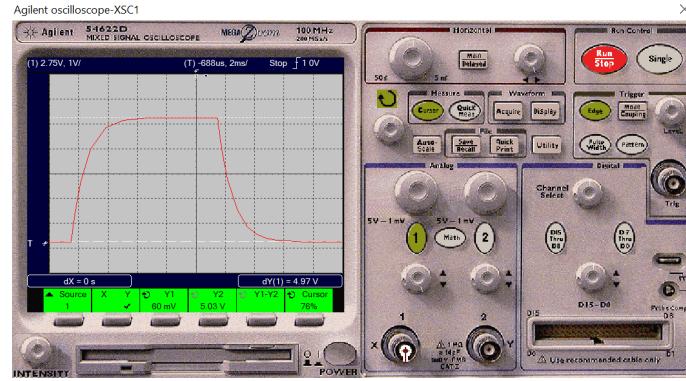
$$V_{max} \cdot 0.63 = V_\tau$$

Herefter måles tidsforskellen fra t_0 V til V_τ

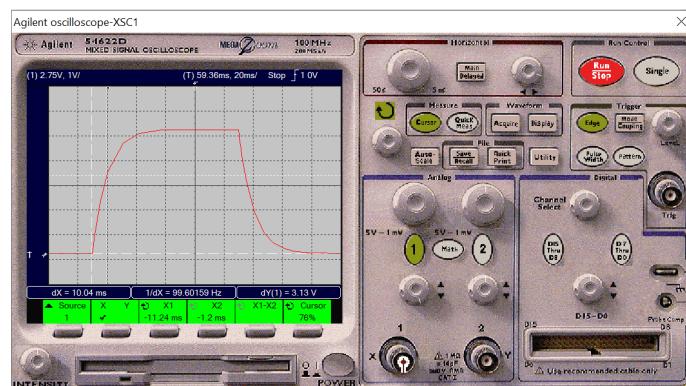
V_{max} er ud fra figur ?? målt til 4.96 V

$$4.96 V \cdot 0.63 = 3.125 V$$

Tidsforskellen fra t_0 V til V_τ måles via figur 12 til 10.04 ms ($\tau = 10.04$ ms)



Figur 11: Maksimal spænding



Figur 12: måling af τ

Stigetiden bestemmes ved formlen:

$$t_{90} - t_{10} = \text{stigetid}$$

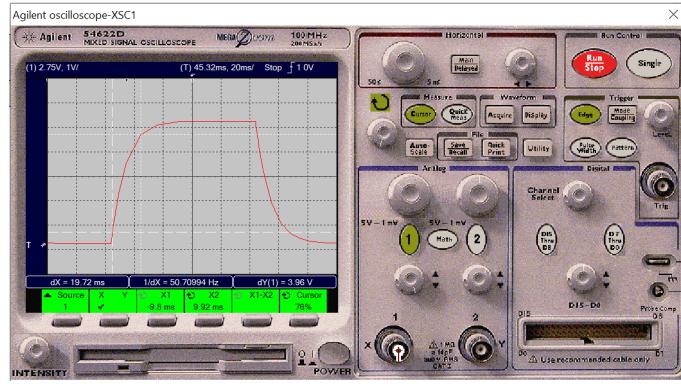
Ud fra målinger af figur 13 er stigetiden blevet beregnet til

$$\begin{aligned} u_{10} &= 4.96V \cdot 0.1 = 0.496V \\ t_{90} &= 4.96V \cdot 0.9 = 4.464V \end{aligned}$$

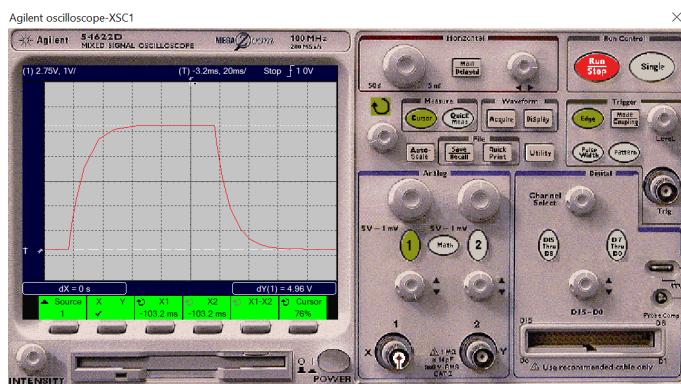
Tidsforskellen mellem t_{90} og t_{10} måles via figur 13 til 19.72 ms
Maksimal spænding bestemmes ved formlen:

$$V_{max} - V_{min} = \text{Maksimal spænding}$$

Afstanden mellem V_{max} og V_{min} måles via figur 14 til 4.96 V



Figur 13: stigetid



Figur 14: Maksimal spænding

3.2 Simulering af 2. ordens lavpasfilter

3.2.1 Simulering af $1\text{ k}\Omega$

τ_5 er via figur 15 afmålt til 4.966 V, altså det tidspunkt, hvor vores kurve er vokset med 5 τ

Stigetiden bestemmes ved formlen:

$$t_{90} - t_{10} = \text{stigetid}$$

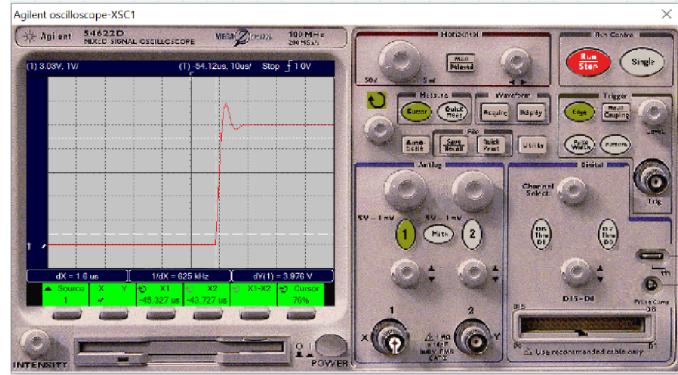
Ud fra målinger af figur 15 er stigetiden blevet beregnet til

$$\begin{aligned} t_{90} &= 4.966V \cdot 0.9 = 4.473V \\ t_{10} &= 4.966V \cdot 0.1 = 0.497V \end{aligned}$$

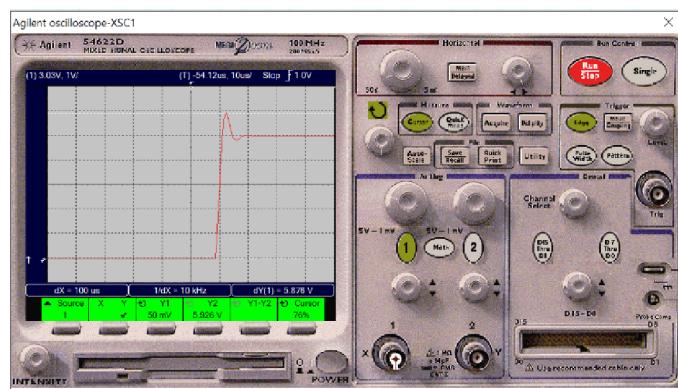
Tidsforskellen mellem t_{90} og t_{10} måles via figur 15 til $1.6\text{ }\mu\text{s}$
Maksimal spænding bestemmes ved formlen:

$$V_{max} - V_{min} = \text{Maksimal spænding}$$

Afstanden mellem V_{max} og V_{min} måles via figur 16 til 5.876 V



Figur 15: Stigetid



Figur 16: Maksimal spænding

3.2.2 Simulering af $10 \text{ k}\Omega$

τ_5 er via figur 17 afmålt til 4.956 V , altså det tidspunkt, hvor vores kurve er vokset med 5τ
Stigetiden bestemmes ved formlen:

$$t_{90} - t_{10} = \text{stigetid}$$

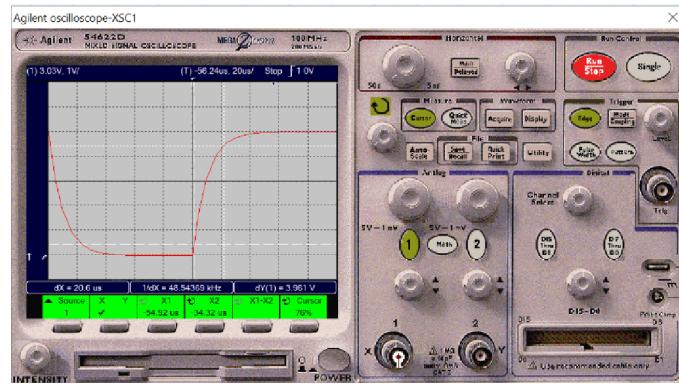
Ud fra målinger af figur 17 er stigetiden blevet beregnet til

$$\begin{aligned} t_{90} &= 4.956V \cdot 0.9 = 4.46V \\ t_{10} &= 4.956V \cdot 0.1 = 0.496V \end{aligned}$$

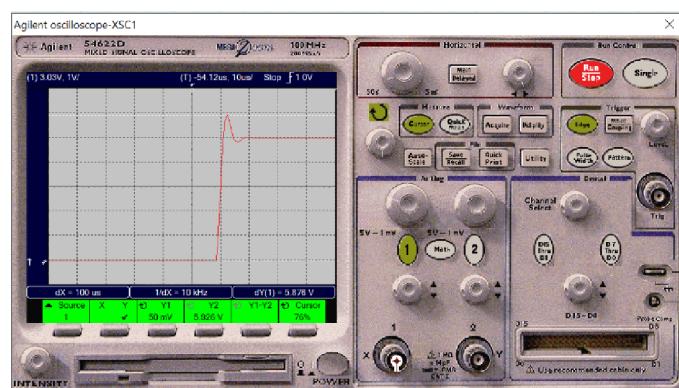
Tidsforskellen mellem t_{90} og t_{10} måles via figur 17 til $20.6 \mu\text{s}$
Maksimal spænding bestemmes ved formlen:

$$V_{max} - V_{min} = \text{Maksimal spænding}$$

Afstanden mellem V_{max} og V_{min} måles via figur 18 til 4.941 V



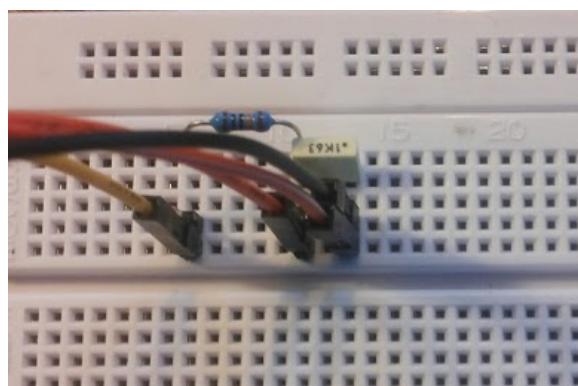
Figur 17: Stigetid



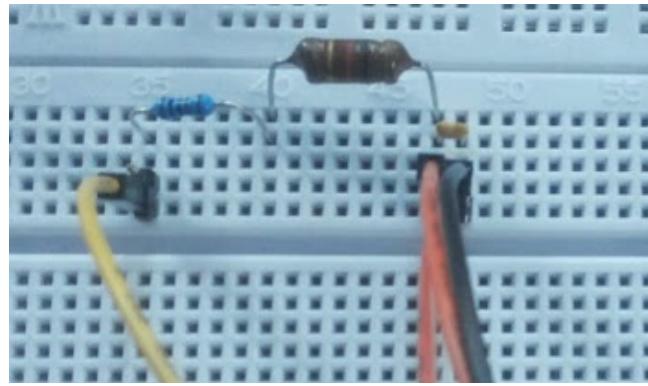
Figur 18: Maksimal spænding

4 Realisering

Kredsløbene fra analysen og simuleringen opbygges og måles i laboratoriet med osciloskop. Figurerne 19 og 20 nedenfor viser de fysiske måleopstillinger.



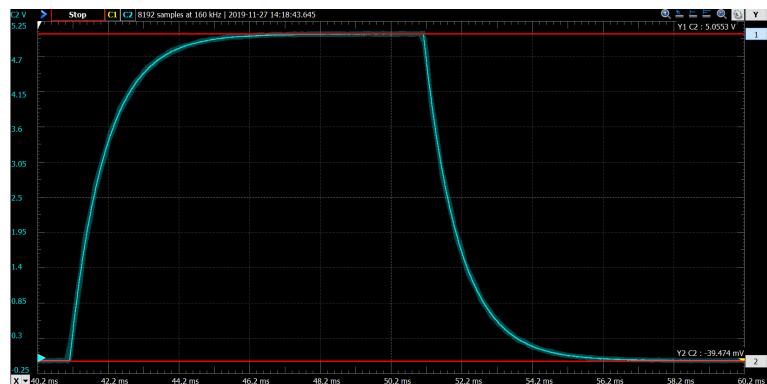
Figur 19: Lavpasfilter R: $100\text{ k}\Omega$, $C = 100\text{nF}$



Figur 20: Lavpasfilter $R=1\text{k}\Omega$, $L=1\text{mH}$, $C=1\text{nF}$

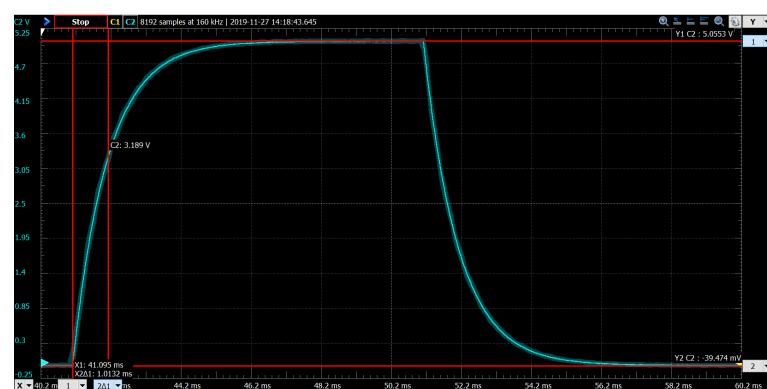
4.1 Realisering af 1. ordens lavpasfilter

4.1.1 $10\text{k}\Omega$



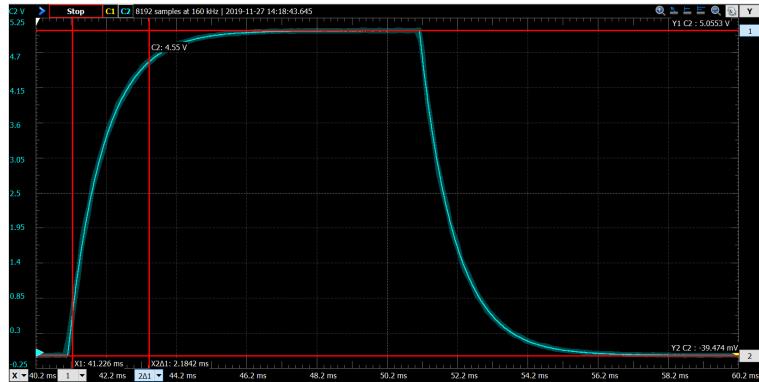
Figur 21: Måling af V_{max} på $10\text{k}\Omega$ 1. ordens lavpasfilter

Osciloskopet indstilles til en amplitude på 2.5V, offset på 2.5V og en frekvens på 50 Hz. V_{max} måles til 5.06V



Figur 22: Måling af tidskonstant på $10\text{k}\Omega$ 1. ordens lavpasfilter

Tidskonstanten måles til 63% af den stationære spænding, hvilket udregnes til $5.06V \cdot 0.63 = 3.188V$. Tidskonstanten τ måles her til 1.01 ms



Figur 23: Måling af stigetid på $10k\Omega$ 1. ordens lavpasfilter

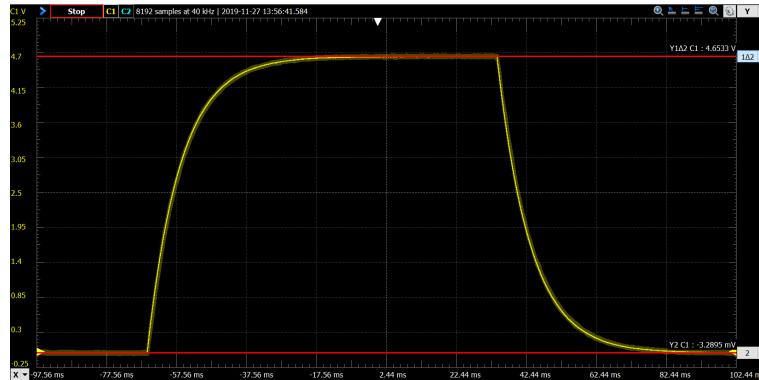
Stigetiden måles ved at måles tiden til 10% og 90% af den stationære spænding.

$$t_{10} = 5.06V \cdot 0.1 = 0.506V$$

$$t_{90} = 5.05V \cdot 0.9 = 4.554V$$

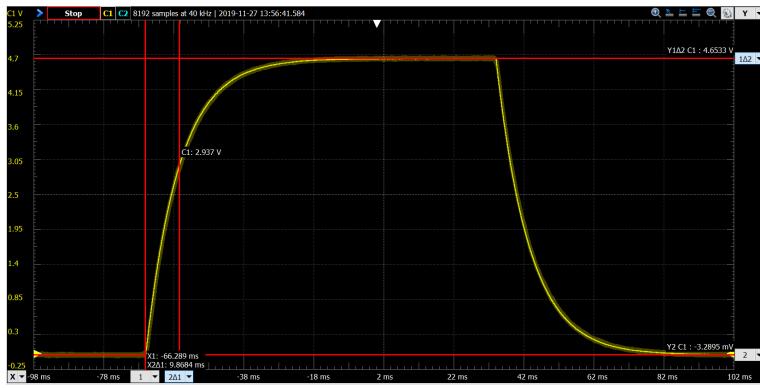
Stigetiden t_r måles til 2.18ms

4.1.2 $100k\Omega$



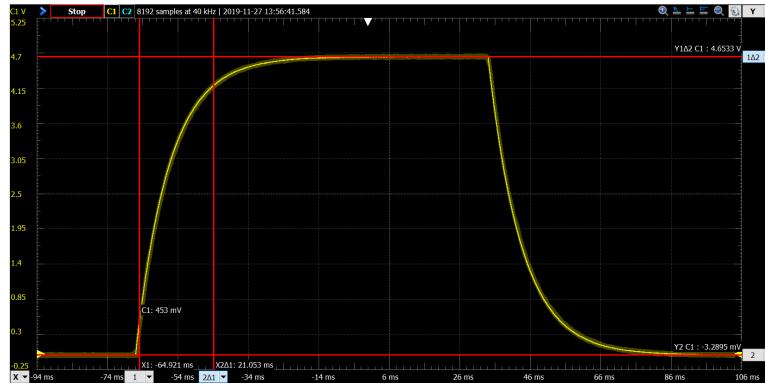
Figur 24: Måling V_{max} på 1. ordens lavpasfilter med $100k\Omega$

Oscilloskopet indstilles til en amplitude på 2.5V, et offset på 2.5 V og en frekvens på 5 Hz V_{max} måles på lavpasfilteret med en $100k\Omega$ modstand til 4.65 V.



Figur 25: Måling af tidskonstant på $100\text{k}\Omega$ 1. ordens lavpasfilter

Tidskonstanten måles til 63% af den aflæste maximale spænding, som svarer til den stationære spænding, hvilket er $4.65\text{V} \cdot 0.63 = 2.93\text{V}$. Tiden til 2.93 V , stigetiden, aflæses til 9.87 ms



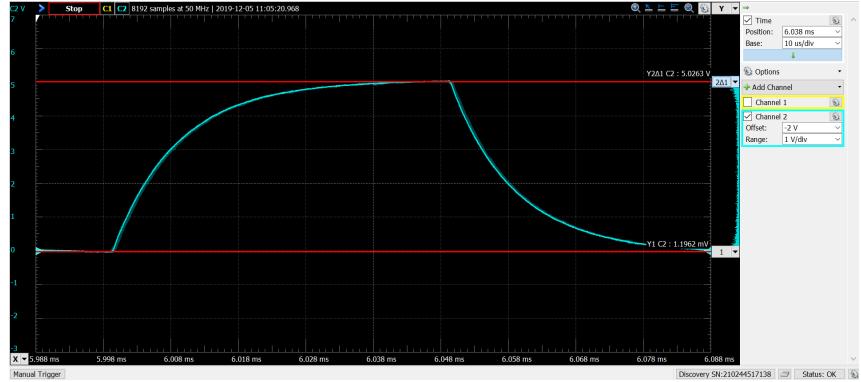
Figur 26: Måling af stigetid på $100\text{k}\Omega$ 1. ordens lavpasfilter

Stigetiden måles ved at måles tiden til 10% og 90% af den stationære spænding, som svarer til den aflæste maksimale spænding.

$$t_{10} = 4.65\text{V} \cdot 0.1 = 0.465\text{V} \quad t_{90} = 4.65\text{V} \cdot 0.9 = 4.185\text{V} \quad \text{Stigetiden } t_r \text{ måles til } 21.05 \text{ ms}$$

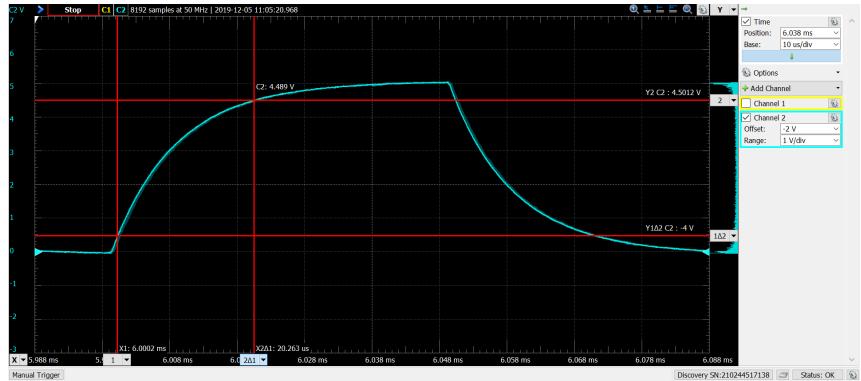
4.2 Realisering af 2. ordens lavpasfilter

4.2.1 10k Ω



Figur 27: Måling af maksimal spænding på 10k Ω 2. ordens lavpasfilter

Oscilloskopet indstilles på amplitude 2.5V, offset på 2.5 og en frekvens på 10kHz. Den maksimale spænding på 10k Ω 2. ordens lavpasfilteret aflæses på grafen til 5.03 V.



Figur 28: Måling af stigetid på 10k Ω 2. ordens lavpasfilter

Stigetiden måles ved at aflæse tiden til 10% og 90% af den stationære spænding, som her måles til 5.05 V.

$$t_{10} = 5.02V \cdot 0.1 = 0.502V$$

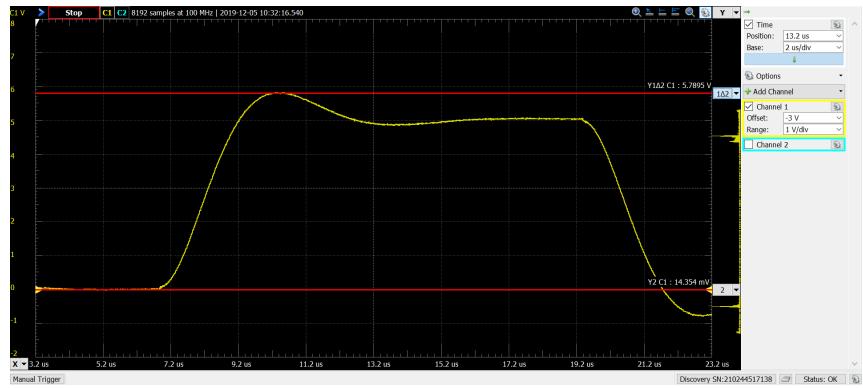
$$t_{90} = 5.02V \cdot 0.9 = 4.518V$$

Stigetiden t_r , Δt aflæses direkte på oscilloskopet til $20.3\mu s$

4.2.2 1k Ω

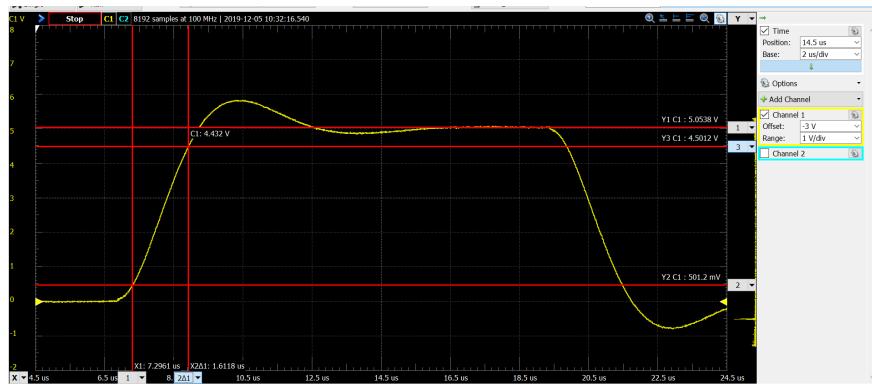
Oscilloskopet indstilles på amplitude 2.5V, offset på 2.5 og en frekvens på 40kHz. Den maksimale spænding på 1k Ω 2. ordens lavpas filter aflæses på grafen til 5.79 V.

Oversvinget skyldes, rent matematisk, at modstanden R er mindre end den kritiske værdi, og derfor vil stigetiden være lille. Når den stationære spænding er nået vil spolen dog



Figur 29: Måling af maksimal spænding på $1k\Omega$ 2. ordens lavpasfilter

ikke kunne ændre strømmen øjeblikkeligt, og det vil derfor tage lidt tid, før kredsløbet stabiliserer sig, og spændingen bliver stationær.



Figur 30: Måling af stigetid på $1k\Omega$ 2. ordens lavpasfilter

Stigetiden måles ved at aflæse tiden til 10% og 90% af den stationære spænding, som her måles til 5.05 V.

$$t_{10} = 5.05V \cdot 0.1 = 0.505V$$

$$t_{90} = 5.05V \cdot 0.9 = 4.553V$$

Stigetiden t_r , Δt aflæses direkte på oscilloskopet til $1.6118\mu s$

Tabel 1: Multirow table.

Analyse			Simulering				Måling				
R kΩ	τ [msek]	t_r [msek]	V_{Max} [V]	R [kΩ]	τ [msek]	t_r [msek]	V_{Max} [V]	R [kΩ]	τ [msek]	t_r [msek]	V_{Max} [V]
1. ordens lavpas filter											
10	1.0 (19)	2.197 (27)	5 (23)	10	1	2.08	4.97	10	1.01	2.18	5.06
100	10 (20)	21.972 (30)	4.966 (24)	100	10.04	19.72	4.96	100	9.87	21.053	4.65
2. ordens lavpas filter											
1		$1.849 \mu s$	5.766	1		$1.6 \mu s$	5.786	1		$1.618 \mu s$	5.79
10		$20.905 \mu s$	5.0	10		$20.6 \mu s$	4.94	10		$20.263 \mu s$	5.03