



AARHUS UNIVERSITET

# Transient respons

*Øvelse 4*

**Emma Spanner 201907955**  
**Mads Emil Nielsen 201908775**  
**Peter Gehlert Theilgaard 201907648**

**Hold 2**

9. december 2019

IKLT-MMLS 1. semester  
Ingeniørhøjskolen Aarhus Universitet

# Indhold

<b>1</b>	<b>Indledning</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Analyse</b>	<b>3</b>
2.1	Analyse af 1. ordens lavpasfilter . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Simulering</b>	<b>9</b>
3.1	Simulering af 1. ordens lavpasfilter . . . . .	9
3.1.1	Simulering af 10 k $\Omega$ . . . . .	9
3.1.2	Simulering af 100 k $\Omega$ . . . . .	11
3.2	Simulering af 2. ordens lavpasfilter . . . . .	13
3.2.1	Simulering af 1 k $\Omega$ . . . . .	13
3.2.2	Simulering af 10 k $\Omega$ . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Realisering</b>	<b>15</b>
4.1	Realisering af 1. ordens lavpasfilter . . . . .	15
4.1.1	1k $\Omega$ . . . . .	15
4.1.2	100k $\Omega$ . . . . .	15

# 1 Indledning

Formålet med denne øvelse er at vise:

- Hvordan beregnes og måles steprespons signaler i et kredsløb.
- Hvordan påvirker et kredsløbs komponenter det beregnede og målte steprespons.

I øvelsen betragtes 1. og 2. ordens lavpasfiltre. Resultaterne fra øvelsen præsenteres i form af en målejournal og godkendes af underviserne ved det den afsluttede måling.

## 2 Analyse

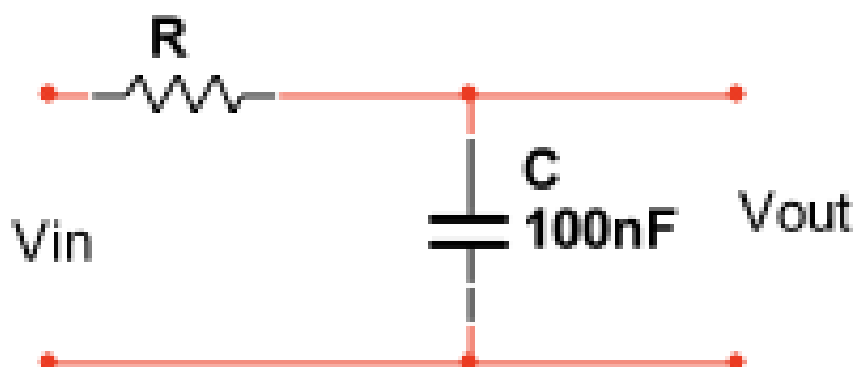
Øvelsen er opdelt i to dele, 1. og 2. ordens lavpasfilter.

### 2.1 Analyse af 1. ordens lavpasfilter

Figur 1 viser et 1. ordens lavpasfilter med en modstand og en kondensator.  $V_{in}$  er stepinput med spænding 0 – 5 V. Steppet sker til tiden  $t=0$  sek.

$$V_{in}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ V_0 & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ligning: 1 Indgangs spændingen er en funktion af  $t$



Figur 1: Første ordens lavpasfilter

Strøm-spænding sammenhængen for en modstand og en kondensator er:  
Modstand:

$$V_R = R \cdot i \quad (2)$$

Ligning 2: Spændingen over en modstand

Kondensator:

$$i = C \cdot \frac{d(V_C)}{dt} \quad (3)$$

Ligning 3: Strømmen gennem en kondensator

Output spænding:

$$V_{Out}(t) = V_C(t) \quad (4)$$

Ligning 4: Spændingen over  $V_C(t)$  er den samme som i punktet  $V_{Out}(t)$

Følgende 8 delopgaver er givet:

## 1. Vis ved Kirchhoffs love : KVL

Vis ved Kirchhoffs love at følgende differentialligning gælder for kredsløbet i Figur 1 :

$$V_{in}(t) = R \cdot C \cdot \frac{d(V_{out}(t))}{dt} + V_{out}(t) \quad (5)$$

Efter en kredsløbsanalyse ses det at:

$$V_{in} = V_R + V_C \quad (6)$$

Ved brug af Ligning 1 og Ligning 4 kan ligningen omskrives til

$$V_0 = V_R + V_{out} \quad (7)$$

Ved at kombinere Ligning 2 og Ligning 3, kan der findes et nyt udtryk fra  $V_R$  som er afhængig af tiden  $t$

$$V_R = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} \cdot V_C \quad (8)$$

Dernæst kan den indsættes i Ligning 7 hvilket medføre

$$V_0 = R \cdot C \cdot \frac{d(V_{out}(t))}{dt} + V_{out}(t) \quad (9)$$

## 2. Løs differentialligningen med hensyn til $V_{out}$

Løs differentialligningen med hensyn til  $V_{out}$  for  $0 \leq t < \infty$

Ligning 9 kan omskrives så konstanten foran  $\frac{d(V_{out}(t))}{dt}$  ved at gange igennem med  $\frac{1}{R \cdot C}$ , det medføre

$$\frac{d(V_{out}(t))}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_{out}(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_0 \quad (10)$$

Ved hjælp af en løsnings protokol Ligning 10 nu løses:

$$P(t) = \frac{1}{R \cdot C} \quad (11)$$

$$Q(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_0 \quad (12)$$

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} \rightarrow e^{\left(\frac{t}{R \cdot C}\right)} \quad (13)$$

Ligning 13: Hjælpefunktion

$$F(t) = \int \mu(t) \cdot Q(t)dt \rightarrow V_0 + k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (14)$$

Ligning 14: Stamfunktion

$$V_{Out}(t) = \frac{1}{\mu(t)} \cdot (F(t) + k) \xrightarrow{simplify} V_{Out}(t) = V_0 + k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (15)$$

Ligning 15: Fuldstændig løsning

$$k = V_{Out}(0) \xrightarrow{solve, k} -V_0 \quad (16)$$

Ligning 16: Betingelse

$$V_{Out}(t) = V_0 - V_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (17)$$

Ligning 17: Specifikke Løsning

### 3. Beregn tidskonstanten

Beregn tidskonstanten  $\tau$  for lavpasfilteret med hhv.  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R = 100 \text{ k}\Omega$  og  $C = 100 \text{ nF}$ . Tidskonstanten er et udtryk for at  $V_{Out}$  er opnået 63% af  $V_{in}$ .

$$\tau = R \cdot C \quad (18)$$

Ligning 18: Generel tidskonstant

**Tidskonstant  $\tau_{10}$ :**

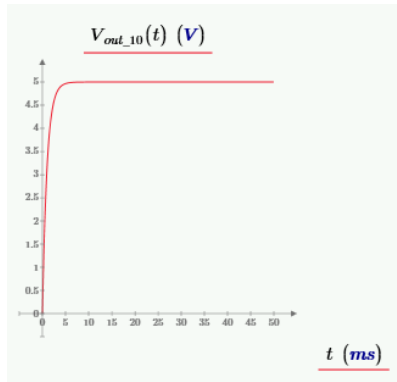
Ved brug af Ligning 18 kan  $\tau_{10}$  beregnes:

$$\begin{aligned} \tau_{10} &= R_{10} \cdot C \\ \tau_{10} &= 10 \text{ k}\Omega \cdot 100 \text{ nF} \\ \tau_{10} &= 1 \text{ ms} \end{aligned} \quad (19)$$

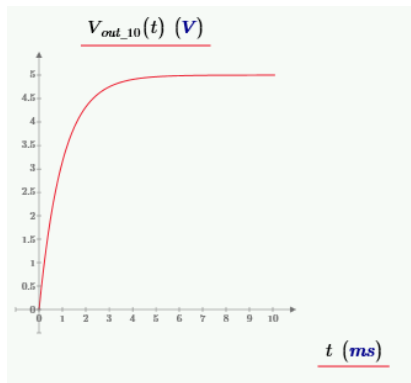
**Tidskonstant  $\tau_{100}$ :**

Ved brug af Ligning 18 kan  $\tau_{100}$  beregnes:

$$\begin{aligned} \tau_{100} &= R_{100} \cdot C \\ \tau_{100} &= 100 \text{ k}\Omega \cdot 100 \text{ nF} \\ \tau_{100} &= 10 \text{ ms} \end{aligned} \quad (20)$$



Figur 2:  $10k\Omega$  - 0-50ms



Figur 3:  $10k\Omega$  - 0-10ms

#### 4. Beregn kurveform

Beregn kurveform for  $V_{out}$  med hhv.  $R = 10 k\Omega$  og  $R = 100 k\Omega$ , og vis disse grafisk for  $0 \leq t \leq 50ms$

Bestemt er:  $V_0 = 5V$  og  $t = 0s, 0.1ms..50ms$

Kurveformen er givet ved Ligning 17, da dette er den specifikke løsning.

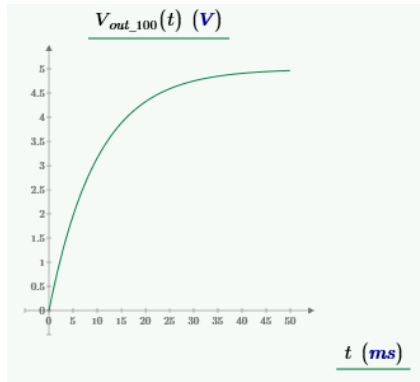
Derefter kan man nu indsætte parametrene i ligningen og derved får man 2 nye ligninger der begge afhænger af tiden  $t$ :

$V_{Out_{10}}(t)$ :

$$V_{Out_{10}}(t) = 5V - 5V \cdot e^{-\frac{t}{10k\Omega \cdot 100nF}} \quad (21)$$

$V_{Out_{100}}(t)$ :

$$V_{Out_{100}}(t) = 5V - 5V \cdot e^{-\frac{t}{100k\Omega \cdot 100nF}} \quad (22)$$



Figur 4:  $10k\Omega$  - 0-50ms

## 5. Beregn Vout max

Beregn den maksimale værdi af Vout i de to tilfælde. Når  $V_{Max}$  skal beregnes vil den være højste i det signalet stepper ned. Det vil sige ved  $t = 50$ ms

$V_{OutMax10}$ :

$$V_{OutMax10}(50ms) = 5V - 5V \cdot e^{-\frac{50ms}{10k\Omega \cdot 100nF}}$$

$$V_{OutMax10}(50ms) = 5V \quad (23)$$

$V_{OutMax100}$ :

$$V_{OutMax100}(50ms) = 5V - 5V \cdot e^{-\frac{50ms}{100k\Omega \cdot 100nF}}$$

$$V_{OutMax100}(50ms) = 4.996V \quad (24)$$

## 6. Bestem stigetiden $tr$

Bestem stigetiden  $tr$  (10-90%). Stigetiden er den tid det tager  $V_{out}$  at komme fra 10% til 90% af  $V_{in}$ .

Ved  $10k\Omega$ :

$$t_{10} = -\ln(0.9) \cdot \tau_{10}$$

$$t_{10} = -\ln(0.9) \cdot 1.0ms$$

$$t_{10} = 0.105ms \quad (25)$$

$$t_{90} = -\ln(0.1) \cdot \tau_{10}$$

$$t_{90} = -\ln(0.1) \cdot 1.0ms$$

$$t_{90} = 2.303ms \quad (26)$$

$$tr_{10} = t_{90} - t_{10}$$

$$tr_{10} = 2.303ms - 0.105ms$$

$$tr_{10} = 2.167ms \quad (27)$$



**Ved  $100k\Omega$ :**

$$\begin{aligned}t_{10} &= -\ln(0.9) \cdot \tau_{100} \\t_{10} &= -\ln(0.9) \cdot 1.0ms \\t_{10} &= 1.054ms\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}t_{90} &= -\ln(0.1) \cdot \tau_{100} \\t_{90} &= -\ln(0.1) \cdot 1.0ms \\t_{90} &= 23.026ms\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}tr_{100} &= t_{90} - t_{10} \\tr_{100} &= 23.026ms - 1.054ms \\tr_{100} &= 21.972ms\end{aligned}\tag{30}$$

## 7. Forklar

Forklar hvordan tidskonstanten og stigetiden kan findes ud fra grafen for  $V_{out}$ , og opstil en ligning til bestemmelse af C , når tidskonstanten  $\tau$  og modstanden R er kendte.

$V_0 = 5V$   $t = 0ms, 0.1ms..50ms$

**Ved  $10k\Omega$**  På figur 3 kan man se kurven

## 8. Indfør resultatur i Tabel 1

Resultaterne indføres i Tabel 1.

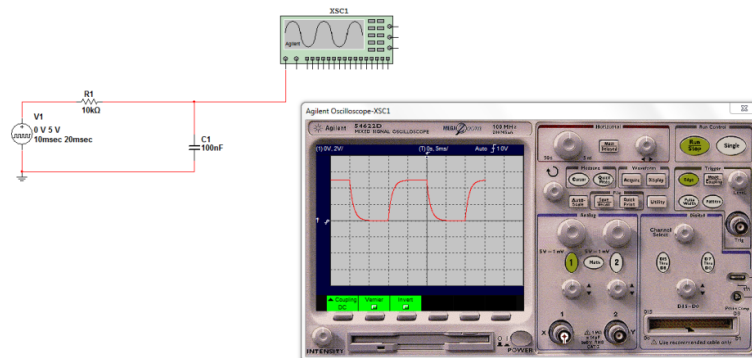
## 3 Simulering

### 3.1 Simulering af 1. ordens lavpasfilter

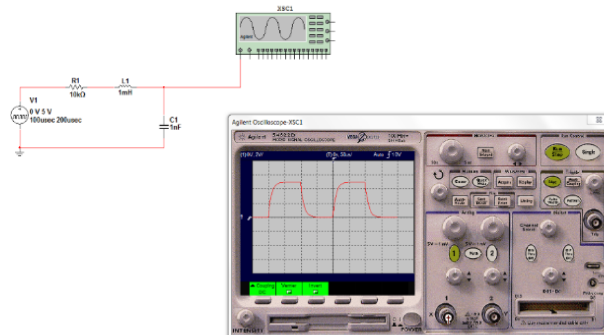
Resultaterne fra analysen simuleres med diagrammerne vist i Figur 5 og 6

I de to tilfælde bestemmes  $\tau$ , stigetiden og den maksimale spænding, disse resultater indføres i tabel 1.

Figur 5 viser simuleringen af 1. ordens lavpasfilter og Figur 6 viser simulering af 2. ordens lavpasfilter.



Figur 5: Simulering af 1. ordens lavpasfilter



Figur 6: Simulering af 2.ordens lavpasfilter

#### 3.1.1 Simulering af 10 kΩ

Tidskonstanten( $\tau$ ) bestemmes ved at beregne:

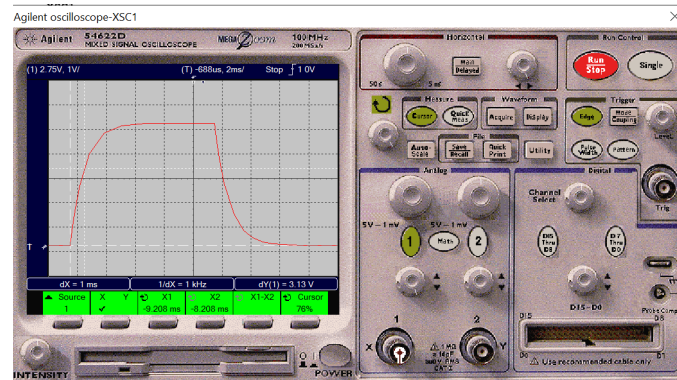
$$V_{max} \cdot 0.63 = V_{\tau}$$

Herefter måles tidsforskellen fra  $t_0$  V til  $V_{\tau}$

$V_{max}$  er ud fra figur 7 målt til 4.97 V

$$4.97 \text{ V} \cdot 0.63 = 3.131 \text{ V}$$

Tidsforskellen fra  $t_0$  V til  $V_{\tau}$  måles via figur 7 til 1.01 ms ( $\tau = 1.01 \text{ ms}$ )



Figur 7: måling af  $\tau$

Stigetiden bestemmes ved formelen:

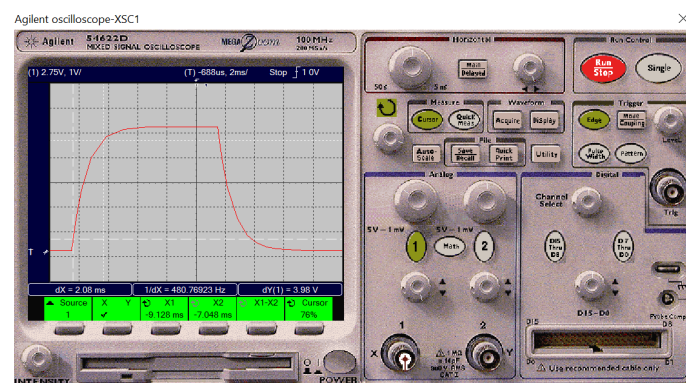
$$t_{90} - t_{10} = \text{stigetid}$$

Ud fra målinger af figur 8 er stigetiden blevet beregnet til

$$t_{10} = 4.97V \cdot 0.1 = 0.497V$$

$$t_{90} = 4.97V \cdot 0.9 = 4.473V$$

Tidsforskellen mellem  $t_{90}$  og  $t_{10}$  måles via figur 8 til 2.08 ms

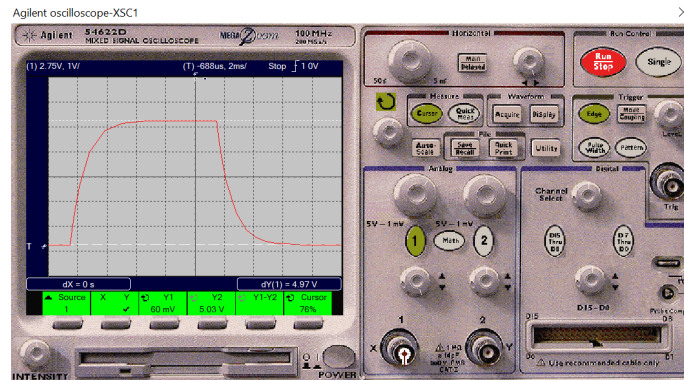


Figur 8: stigetid

Maksimal spænding bestemmes ved formelen:

$$V_{max} - V_{min} = \text{Maksimal spænding}$$

Afstanden mellem  $V_{max}$  og  $V_{min}$  måles via figur 9 til 4.97 V



Figur 9: Maksimal spænding

### 3.1.2 Simulering af 100 k $\Omega$

Tidskonstanten( $\tau$ ) bestemmes ved at beregne:

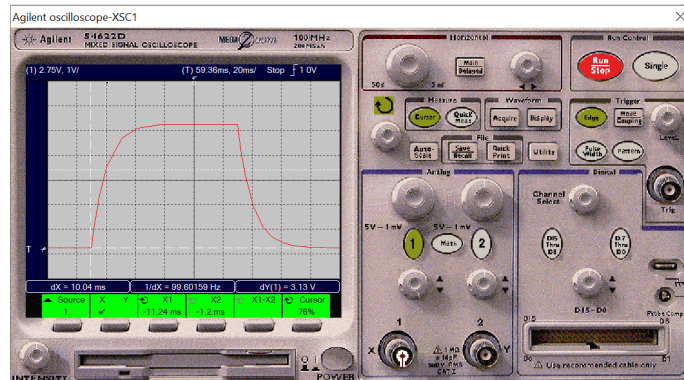
$$V_{max} \cdot 0.63 = V_{\tau}$$

Herefter måles tidsforskellen fra  $t_0$  V til  $V_{\tau}$

$V_{max}$  er ud fra figur ?? målt til 4.96 V

$$4.96 \text{ V} \cdot 0.63 = 3.125 \text{ V}$$

Tidsforskellen fra  $t_0$  V til  $V_{\tau}$  måles via figur 10 til 10.04 ms ( $\tau = 10.04$  ms)



Figur 10: måling af  $\tau$

Stigetiden bestemmes ved formelen:

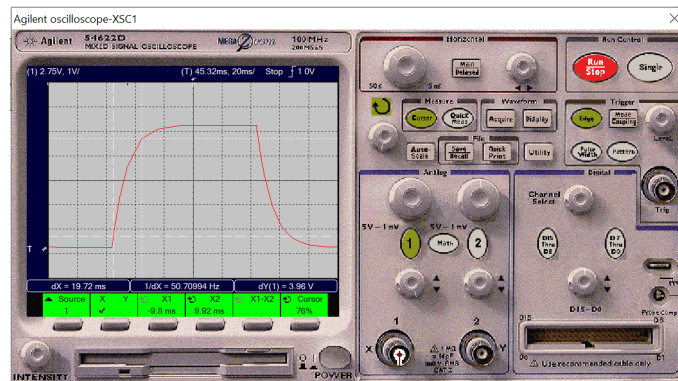
$$t_{90} - t_{10} = \text{stigetid}$$

Ud fra målinger af figur 11 er stigetiden blevet beregnet til

$$u_{10} = 4.96V \cdot 0.1 = 0.496V$$

$$t_{90} = 4.96V \cdot 0.9 = 4.464V$$

Tidsforskellen mellem  $t_{90}$  og  $t_{10}$  måles via figur 11 til 19.72 ms

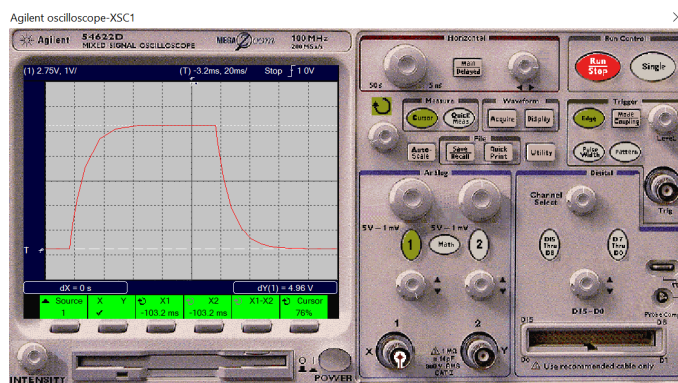


Figur 11: stigetid

Maksimal spænding bestemmes ved formelen:

$$V_{max} - V_{min} = \text{Maksimal spænding}$$

Afstanden mellem  $V_{max}$  og  $V_{min}$  måles via figur 12 til 4.96 V



Figur 12: Maksimal spænding



## 3.2 Simulering af 2. ordens lavpasfilter

### 3.2.1 Simulering af 1 k $\Omega$

$\tau_5$  er via figur 13 afmålt til 4.966 V, altså det tidspunkt, hvor vores kurve er vokset med  $5 \tau$   
Stigetiden bestemmes ved formlen:

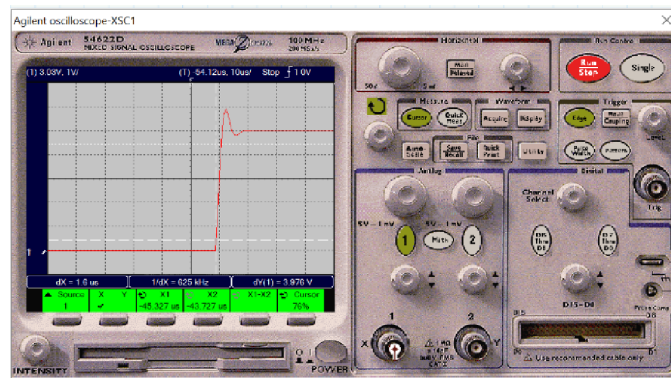
$$t_{90} - t_{10} = \text{stigetid}$$

Ud fra målinger af figur 13 er stigetiden blevet beregnet til

$$t_{90} = 4.966V \cdot 0.9 = 4.473V$$

$$t_{10} = 4.966V \cdot 0.1 = 0.497V$$

Tidsforskellen mellem  $t_{90}$  og  $t_{10}$  måles via figur 13 til  $1.6 \mu s$

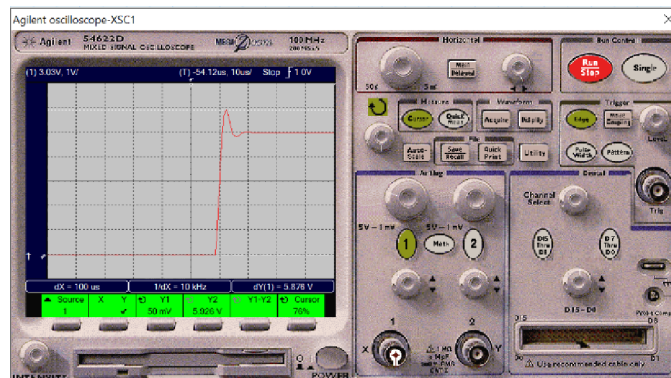


Figur 13: Stigetid

Maksimal spænding bestemmes ved formlen:

$$V_{max} - V_{min} = \text{Maksimal spænding}$$

Afstanden mellem  $V_{max}$  og  $V_{min}$  måles via figur 14 til 5.876 V



Figur 14: Maksimal spænding

### 3.2.2 Simulering af 10 kΩ

$\tau_5$  er via figur15 afmålt til 4.956 V, altså det tidspunkt, hvor vores kurve er vokset med  $5 \tau$   
Stigetiden bestemmes ved formlen:

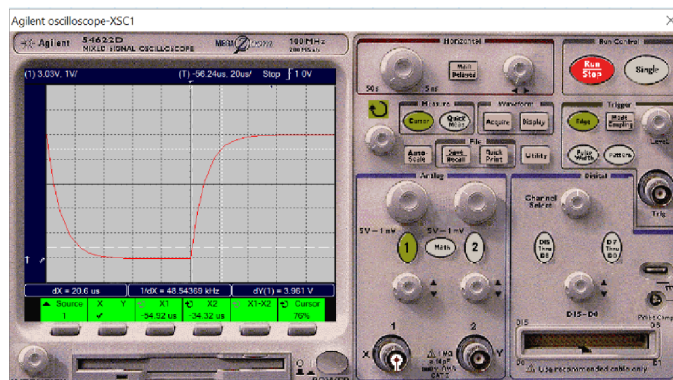
$$t_{90} - t_{10} = \text{stigetid}$$

Ud fra målinger af figur 15 er stigetiden blevet beregnet til

$$t_{90} = 4.956V \cdot 0.9 = 4.46V$$

$$t_{10} = 4.956V \cdot 0.1 = 0.496V$$

Tidsforskellen mellem  $t_{90}$  og  $t_{10}$  måles via figur 15 til  $20.6 \mu s$

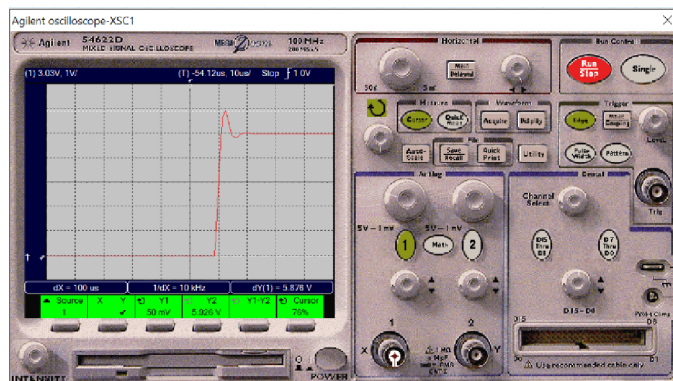


Figur 15: Stigetid

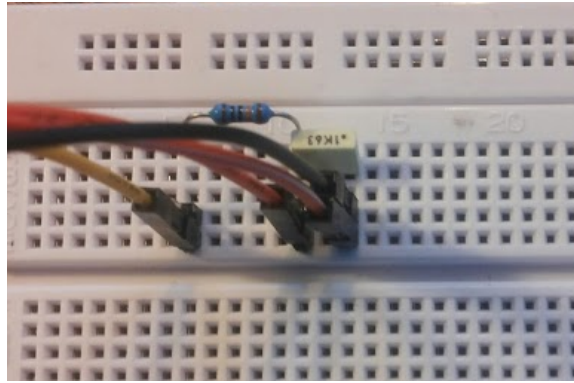
Maksimal spænding bestemmes ved formlen:

$$V_{max} - V_{min} = \text{Maksimal spænding}$$

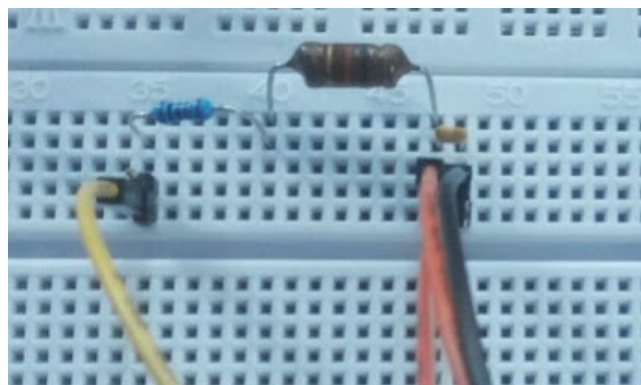
Afstanden mellem  $V_{max}$  og  $V_{min}$  måles via figur 16 til 4.941 V



Figur 16: Maksimal spænding



Figur 17: Lavpasfilter  $R: 100\text{ k}\Omega$ ,  $C = 100\text{ nF}$



Figur 18: Lavpasfilter  $R=1\text{ k}\Omega$ ,  $=1\text{ mH}$ ,  $C=1\text{ nF}$

## 4 Realisering

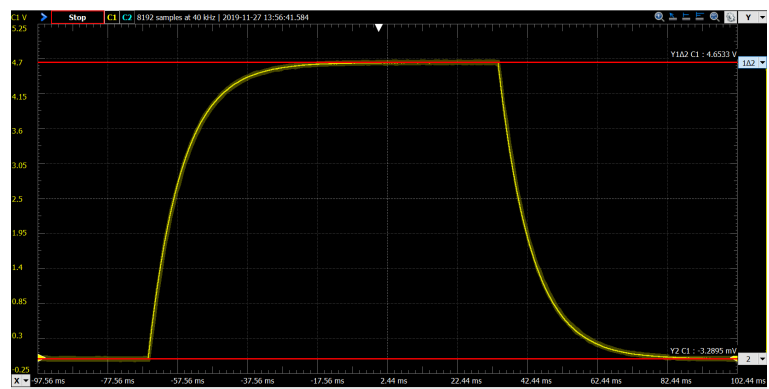
Kredsløbene fra analysen og simuleringen opbygges og måles i laboratoriet med oscilloskop. Figureerne nedenfor viser de fysiske måleopstillinger.

### 4.1 Realisering af 1. ordens lavpasfilter

#### 4.1.1 $1\text{ k}\Omega$

#### 4.1.2 $100\text{ k}\Omega$





Figur 19: Måling  $V_{max}$  på 1. ordens lavpasfilter med  $100\text{k}\Omega$

Tabel 1: Multirow table.

Analyse				Simulering				Måling			
R k $\Omega$	$\tau$ [msek]	$t_r$ [msek]	$V_{Max}$ [V]	R [k $\Omega$ ]	$\tau$ [msek]	$t_r$ [msek]	$V_{Max}$ [V]	R [k $\Omega$ ]	$\tau$ [msek]	$t_r$ [msek]	$V_{Max}$ [V]
<b>1. ordens lavpas filter</b>											
10	1.0 (19)	2.197 (27)	5 (23)	10	1	2.08	4.97	10	1.01	2.18	5.06
100	10 (20)	21.972 (30)	4.966 (24)	100	10.04	19.72	4.96	100	9.87	21.053	4.65
<b>2. ordens lavpas filter</b>											
1		1.849 $\mu s$	5.766	1		1.6 $\mu s$	5.786	1		1.618 $\mu s$	5.79
10		20.905 $\mu s$	5.0	10		20.6 $\mu s$	4.94	10		20.263 $\mu s$	5.03