
RYZYSKO INWESTYCJI W AKCJE EUR/PLN ORAZ
USD/PLN. OPTYMALNY PORTFEL ZE WZGŁĘDU NA
VAR I ES.

Agata Kosel
Emilia Murawiejko

Spis treści

1	PRZEDSTAWIENIE AKTYWÓW	3
1.1	EUR/PLN	3
1.2	USD/PLN	4
2	ANALIZA DANYCH	5
2.1	Stopy strat	5
2.2	Charakterystyka liczbowa	7
3	ANALIZA ROZKŁADU	8
3.1	Dobór rozkładu	8
3.2	Testy normalności	10
4	MIARY RYZYKA	11
4.1	Value-at-Risk	11
4.2	Expected Shortfall	11
5	KOPUŁY	12
5.1	Ograniczenia	12
5.2	Dobór kopuły	13
5.3	Optymalizacja portfela inwestycyjnego	15
6	Optymalizacja portfela inwestycyjnego za pomocą wzorów analitycznych	15
7	Podsumowanie	16

1 PRZEDSTAWIENIE AKTYWÓW

W tym dziale znajduje się opis dwóch z globalnych walut, na podstawie których przeprowadzona została analiza inwestycji w ich akcje.

Globalna waluta to waluta akceptowana w handlu na całym świecie. Niektóre z walut światowych są akceptowane dla większości transakcji międzynarodowych. Najbardziej popularne są: dolar amerykański i euro. Inną nazwą globalnej waluty to waluta rezerwowa.

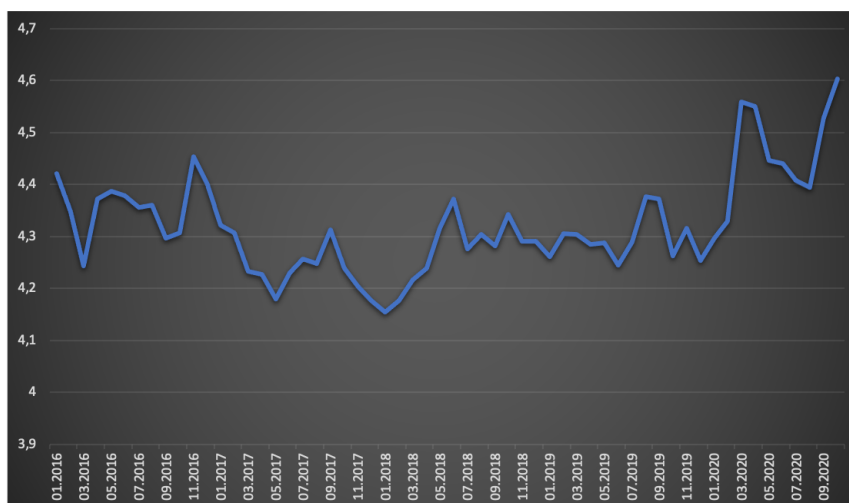
1.1 EUR/PLN

Para

walutowa EUR/PLN wyraża siłę euro wobec polskiego złotego. Szacuje się, że średnia wartość dziennego obrotu na rynku złotego to blisko 17 mld PLN, a największy udział w tym obrocie ma para EUR/PLN w związku ze ścisłym powiązaniem z Unią Europejską. Para walutowa EUR/PLN zaliczana jest do par egzotycznych, a główny obrót wykonywany jest z Polski oraz przez instytucje handlujące na rynku walutowym np. banki inwestycyjne. Para może być również notowana jako PLN/EUR, ale EUR / PLN jest uznana normą. Jeśli wartość pary EUR/PLN wynosi na przykład 4,31, oznacza to, że trzeba zapłacić 4,31 polskich złotych za jedno euro. Pary egzotyczne z reguły są mało płynne, generują stosunkowo małe obroty i potrafią być gwałtowne. Mała płynność wiąże się także z reguły z dużym spreadem – mała ilość ofert wiąże się z małą konkurencją wśród dostarczających oferty. O ile początkującym graczom odradza się inwestowania na parach egzotycznych to potrafią generować one bardzo zyskowne sygnały transakcyjne. Na rysunku 1.2 zostały przedstawione notowania waluty z okresu 01.01.2016 - 30.10.2020:



Rysunek 1.1: Bankoty EURO



Rysunek 1.2: Wykres notowań (na zamknięciu) na giełdzie waluty EUR/PLN

1.2 USD/PLN

Kurs

USD/PLN to podana w polskich złotych cena dolara amerykańskiego. W parze USD/PLN dolar amerykański jest walutą bazową, zaś polski złoty walutą kwotowaną.

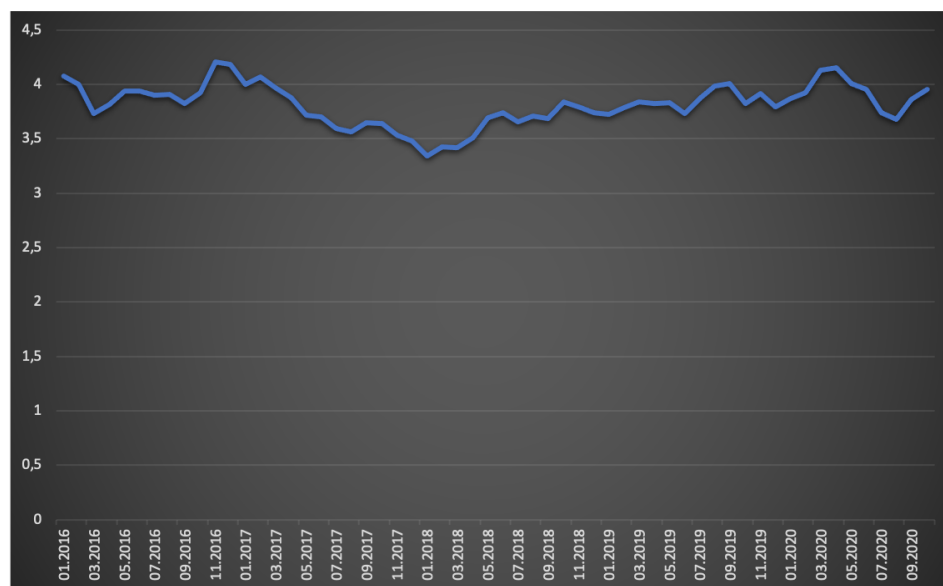
Dolar amerykański to najważniejsza waluta na świecie, która od kilkudziesięciu lat była jedyną globalną walutą rezerwową. Aktywa wyceniane w dolarze posiadają inwestorzy i instytucje z całego świata. Waluta ta używana jest także do rozliczeń międzynarodowych, w niej najczęściej wyceniane są surowce.

Kurs dolara wykazuje wysoką zmienność tuż po publikacji istotnych danych z gospodarki USA lub po ogłoszeniu decyzji Rezerwy Federalnej. Wydarzenia te wpływają na sytuację na najważniejszej parze świata EUR/USD, czego pokłosiem jest zmiana kursu USD/PLN. Historyczne maksimum kursu tej pary walutowej znajdowało się na poziomie 4,75 złotych.

Na rysunku 1.4 zostały przedstawione notowania waluty z okresu 01.01.2016 - 30.10.2020:



Rysunek 1.3: Bankot USD



Rysunek 1.4: Wykres notowań (na zamknięciu) na giełdzie waluty USD/PLN

2 ANALIZA DANYCH

2.1 Stopy strat

W niniejszej pracy do analizy wykorzystano notowania walut EUR/PLN oraz USD/PLN w latach 2016-2020. Dane pochodzą z 1 i są przedstawione w ujęciu miesięcznym. W celu wyliczenia wartości ryzyka inwestycji potrzebne są wartości stóp strat, które zostały obliczone za pomocą następującego wzoru:

$$L = \frac{W_o - W_z}{W_o} \cdot 100\%, \quad (1)$$

gdzie:

L - stopa strat w danym miesiącu,

W_o - wartość notowania na otwarciu w danym miesiącu,

W_z - wartość notowania na zamknięciu w danym miesiącu.

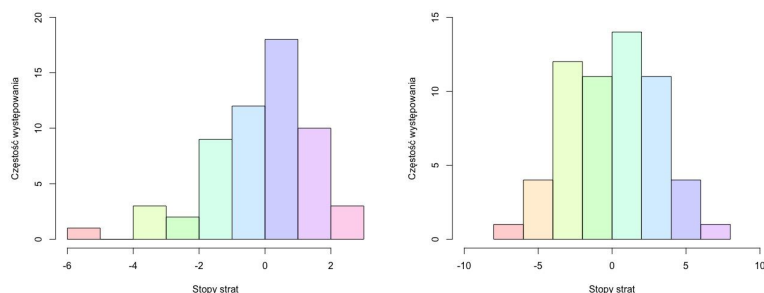
Notowania i wyliczone stopy strat zostały przedstawione w tabeli 2.1:

Tabela 2.1: Ceny otwarcia i zamknięcia badanych walut oraz wyznaczone stopy strat

Data	EUR/PLN			USD/PLN		
	Otwarcie	Zamknięcie	Stopy strat	Otwarcie	Zamknięcie	Stopy strat
01/2016	4.26	4.42	-3.70	3.92	4.08	-3.95
02/2016	4.42	4.35	1.65	4.08	4.00	2.01
03/2016	4.35	4.24	2.48	4.00	3.73	6.71
04/2016	4.24	4.37	-3.05	3.73	3.82	-2.42
05/2016	4.38	4.39	-0.23	3.82	3.94	-3.06
06/2016	4.39	4.38	0.17	3.94	3.94	-0.04
07/2016	4.38	4.36	0.52	3.94	3.90	1.15
08/2016	4.35	4.36	-0.25	3.89	3.91	-0.40
09/2016	4.36	4.30	1.48	3.91	3.82	2.14
10/2016	4.30	4.31	-0.23	3.82	3.92	-2.55
11/2016	4.31	4.45	-3.32	3.93	4.21	-7.15
12/2016	4.45	4.40	1.13	4.20	4.18	0.44
01/2017	4.40	4.32	1.78	4.19	4.00	4.36
02/2017	4.32	4.31	0.37	4.00	4.07	-1.80
03/2017	4.31	4.23	1.71	4.08	3.97	2.54
04/2017	4.23	4.23	0.14	3.97	3.88	2.23
05/2017	4.23	4.18	1.22	3.88	3.72	4.18
06/2017	4.18	4.23	-1.17	3.72	3.70	0.40
07/2017	4.23	4.26	-0.66	3.70	3.59	2.96

Data	EUR/PLN			USD/PLN		
	Otwarcie	Zamknięcie	Stopy strat	Otwarcie	Zamknięcie	Stopy strat
08/2017	4.26	4.25	0.21	3.59	3.57	0.77
09/2017	4.25	4.31	-1.53	3.57	3.65	-2.36
10/2017	4.31	4.24	1.73	3.65	3.64	0.25
11/2017	4.24	4.20	0.86	3.64	3.53	3.00
12/2017	4.20	4.18	0.62	3.53	3.48	1.40
01/2018	4.18	4.15	0.55	3.48	3.34	3.90
02/2018	4.16	4.18	-0.50	3.35	3.42	-2.37
03/2018	4.18	4.22	-0.97	3.43	3.42	0.08
04/2018	4.22	4.24	-0.50	3.42	3.51	-2.55
05/2018	4.24	4.32	-1.84	3.51	3.69	-5.21
06/2018	4.32	4.37	-1.31	3.69	3.74	-1.37
07/2018	4.36	4.28	1.93	3.74	3.66	2.28
08/2018	4.28	4.30	-0.65	3.66	3.71	-1.40
09/2018	4.32	4.28	0.80	3.72	3.69	0.91
10/2018	4.28	4.34	-1.41	3.69	3.84	-4.07
11/2018	4.34	4.29	1.18	3.84	3.79	1.23
12/2018	4.29	4.29	-0.03	3.79	3.74	1.32
01/2019	4.29	4.26	0.63	3.74	3.72	0.49
02/2019	4.26	4.31	-1.03	3.72	3.79	-1.72
03/2019	4.31	4.30	0.09	3.79	3.84	-1.37
04/2019	4.30	4.29	0.44	3.83	3.82	0.31
05/2019	4.29	4.29	-0.04	3.82	3.83	-0.34
06/2019	4.28	4.24	0.89	3.83	3.73	2.62
07/2019	4.25	4.29	-1.01	3.73	3.87	-3.78
08/2019	4.29	4.38	-2.04	3.87	3.98	-2.83
09/2019	4.38	4.37	0.17	3.99	4.01	-0.62
10/2019	4.37	4.26	2.50	4.01	3.82	4.69
11/2019	4.26	4.32	-1.20	3.82	3.92	-2.45
12/2019	4.31	4.25	1.35	3.91	3.79	3.07
01/2020	4.26	4.30	-0.94	3.80	3.87	-2.05
02/2020	4.29	4.33	-0.80	3.87	3.93	-1.40
03/2020	4.32	4.56	-5.54	3.93	4.13	-5.28
04/2020	4.56	4.55	0.21	4.13	4.15	-0.51
05/2020	4.55	4.45	2.24	4.15	4.01	3.52
06/2020	4.45	4.44	0.11	4.01	3.95	1.32
07/2020	4.44	4.41	0.82	3.96	3.74	5.40
08/2020	4.42	4.39	0.50	3.75	3.68	1.82
09/2020	4.40	4.53	-2.98	3.68	3.86	-4.89
10/2020	4.53	4.60	-1.57	3.87	3.95	-2.21

Ze wzoru (1) na wartości stóp strat wynika, że ujemna ich wartość oznacza procentowy zysk w danym miesiącu, zaś dodatnia - stratę. W przypadku EUR/PLN odnotowano 31 strat, natomiast dla USD/PLN było ich 19. Miesiące kwiecień-sierpień 2020 okresem spadków, co było spowodowane panującą pandemią. Natomiast poziom stóp strat USD/PLN regularnie się waha. Poniżej przedstawione zostały histogramy, mówiące o częstotliwości występowania danych stóp strat.



Rysunek 2.1: Histogramy wyliczonych stóp strat

W dalszych częściach pracy, stopa strat dla EUR/PLN będzie oznaczana $L_{eur/pln}$, a dla USD/PLN $L_{usd/pln}$.

Źródła: 2, 3

2.2 Charakterystyka liczbowa

Tabela 2.2: Wyestymowane charakterystyki liczbowe analizowanych danych

	Momenty	
	EUR/PLN	USD/PLN
n	58	58
Minimum	-5,54	-7,15
Maksimum	2,5	6,71
Średnia	-0,1382759	-0,04568966
Mediana	0,125	0,165
Odchylenie standardowe	1,586701	2,923059
Wariancja	2,517620063	8,544273917
Skośność	-0,9301931	-0,05213124
Kurtoza	4,479093	2,695028

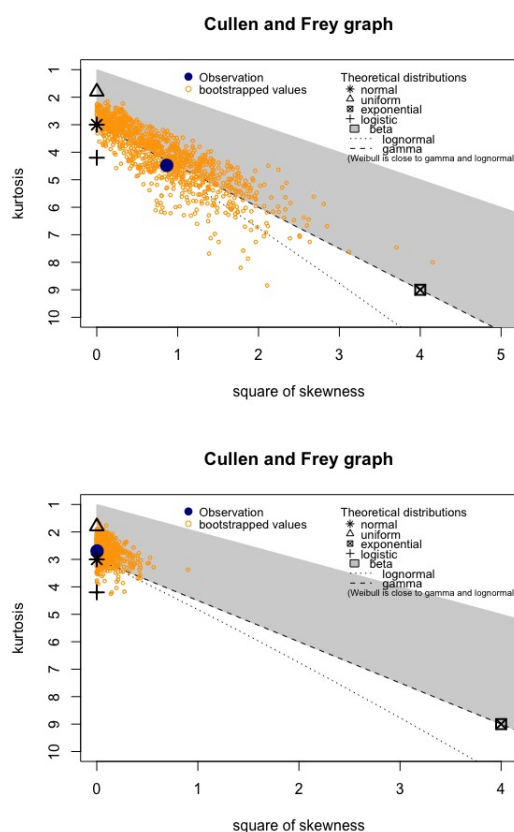
Na podstawie tabeli 2.2 możemy wyciągnąć następujące wnioski. W przypadku obu walut średnia arytmetyczna jest ujemna, co oznacza, że średnio każda inwestycja przynosi zysk. Dodatnia wartość mediany mówi nam, że odnotowano więcej strat niż zysków. Jeśli chodzi o odchylenie standardowe, możemy zauważyć, że mniej danych

odstających od średniej jest dla EUR/PLN, więc inwestycja w tą walutę powinna być mniej ryzykowna. W obu przypadkach skośność jest wartością ujemną-liczba ta mówi nam o lewostronnej asymetrii, dzięki temu wiemy, że więcej danych jest powyżej średniej. Dodatnia kurtoza dla badanych danych oznacza, że rozkład jest bardziej smukły niż w przypadku rozkładu normalnego.

3 ANALIZA ROZKŁADU

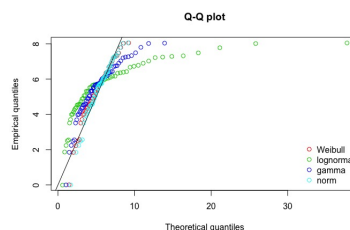
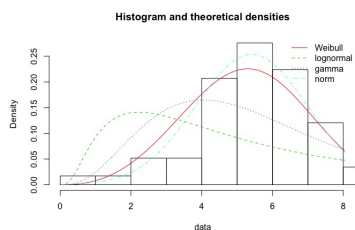
3.1 Dobór rozkładu

Poniżej zostały porównane wyestymowane uprzednio wielkości kurtozy oraz skośności z kurtozami oraz skośnościami rozkładu normalnego, jednostajnego, wykładniczego itd.



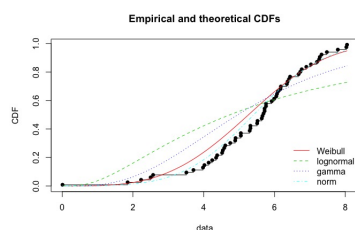
Rysunek 3.1: Dopasowanie rozkładu dla EUR/PLN i USD/PLN

Niebieska kropka oznacza badane dane, a kropki pomarańczowe to próbki bootstrapowe (u nas jest ich 1000). Rozkłady standardowe zostały przedstawione w legendzie. Oś pionowa - wartość kurtozy, oś pozioma - pierwiastek skośności.

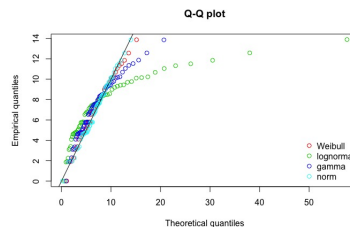
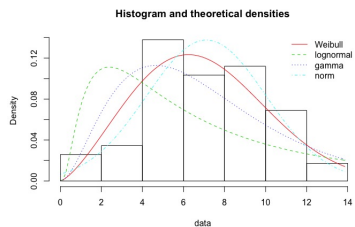


Rysunek 3.2: Wykres dla EUR/PLN otrzy-
many za pomocą funkcji *denscomp*

Rysunek 3.3: Wykres dla EUR/PLN otrzy-
many za pomocą funkcji *qqcomp*

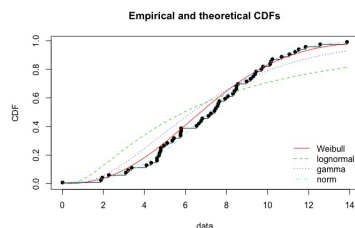


Rysunek 3.4: Wykres dla EUR/PLN otrzymany za pomocą funkcji *cdfcomp*



Rysunek 3.5: Wykres dla USD/PLN otrzy-
many za pomocą funkcji *denscomp*

Rysunek 3.6: Wykres dla USD/PLN otrzy-
many za pomocą funkcji *qqcomp*



Rysunek 3.7: Wykres dla USD/PLN otrzymany za pomocą funkcji *cdfcomp*

Wykresy 3.2, 3.5 stworzone za pomocą funkcji *denscomp* przedstawiają histogram naszych danych porównany z gęstością badanych rozkładów. Wykresy 3.3, 3.6, stwo-

rzony za pomocą *qqcomp* porównują ze sobą z kolei empiryczne oraz teoretyczne kwantyle. Im więcej punktów znajduje się w pobliżu linii $y=x$, tym badane rozkłady bardziej do siebie pasują. Natomiast wykresy 3.4, 3.7 uzyskane przez nas za pomocą funkcji *cdfcomp* to zestawienia wartości empirycznych i teoretycznych dystrybuant dla EUR/PLN oraz USD/PLN. Każdy z wykresów posiada legendę, opisującą dany rozkład. Dzięki niej jesteśmy w stanie wywnioskować, że rozkład lognormalny najbardziej odstaje od reszty, dlatego nie weźmiemy go pod uwagę w dalszych badaniach.

Tabela 3.1: Wyznaczone wskaźniki dopasowań

	EUR/PLN			USD/PLN		
	Weibull	Gamma	Normalny	Weibull	Gamma	Normalny
<i>Loglikelihood</i>	-118,9041	-135,1622	-108,5702	-149,9577	-158,0255	-144,0067
<i>AIC</i>	241,8083	274,3244	221,1404	303,9155	320,0509	292,0133

Najwyższa wartość *Loglikelihood* i jednocześnie najniższa *AIC* dla rozkładu normalnego świadczy o tym, że jest on najodpowiedniejszym do przeprowadzenia dalszej analizy.

3.2 Testy normalności

Na początku zakładanym rozkładem teoretycznym jest rozkład normalny. Hipoteza zerowa H_0 mówi, że dane pochodzą z tego rozkładu, natomiast hipoteza alternatywna H_A mówi, że dane owego rozkładu nie mają. Przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0,05$, co oznacza, że jest to maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju, czyli odrzucenia hipotezy zerowej.

Tabela 3.2: Testy normalności

	Estymator	P-Value
<i>Miara skośności zaprezentowana przez Mardia</i>	16,4918802	0,00242541
<i>Miara kurtozy zaprezentowana przez Mardia</i>	1,76803805	0,07705454
<i>Shapiro-Wilk dla stóp strat EUR/PLN</i>	0,9509	0,02
<i>Shapiro-Wilk dla stóp strat USD/PLN</i>	0,994	0,9935

Otrzymane wyniki wskazują na to, że w przypadku USD/PLN wartość p dla testu *Shapiro-Wilka* jest większa niż zadany poziom istotności $\alpha = 0,05$. W związku z tym nie mamy podstaw do odrzucenia naszej hipotezy zerowej, a więc można przyjąć że dane te mają empiryczny rozkład normalny. Natomiast dla EUR/PLN wartość p dla tego testu jest mniejsza niż zadany poziom istotności $\alpha = 0,05$, co odrzuca nam hipotezę zerową. W przypadku testu *Mardia*, wartość p dla miary skośności jest znacznie mniejsza od poziomu istotności, co wskazuje na to, że wektor dwuwymiarowy nie jest wektorem z rozkładu normalnego.

Mimo tego co otrzymaliśmy, zakładamy, że dane pochodzą z rozkładu normalnego, ponieważ jest on najlepszy patrząc na poprzednie kryteria.
Czyli:

$$L_{usd/pln} \sim \mathcal{N}(\mu = -0,04568966, \sigma = 2,923059)$$

$$L_{eur/pln} \sim \mathcal{N}(\mu = -0,1382759, \sigma = 1,586701)$$

4 MIARY RYZYKA

Miary ryzyka – funkcje, które pozycji finansowej o niepewnej wartości przyszłej przypisują współczynnik ryzyka, wyrażany przez liczbę rzeczywistą. W tym dziale zostały użyte następujące funkcje wyliczające owy współczynnik ryzyka: Value at Risk (wartość zagrożona) oraz Expected Shortfall (uśredniona wartość zagrożona).

4.1 Value-at-Risk

Jest to maksymalna oczekiwana wartość straty, która może wystąpić w warunkach rynkowych w określonym czasie i z określonym prawdopodobieństwem. Polski zwrot VaR to wartość zagrożona. Value at Risk pokazuje jaką stratę może ponieść inwestor realizując daną inwestycję.

Tabela 4.1: Poziom ryzyka VaR dla obu spółek

Wartość wyznaczona za pomocą wzoru analitycznego	
USD/PLN	EUR/PLN
4.762315	2.471616

Wartość wskaźnika Value at Risk dla pary eur/pln jest prawie dwa razy niższa od wartości uzyskanej dla pary dolar/złoty. Świadczy to o tym że portfel złożony wyłącznie z akcji eur/pln jest obciążony niższym ryzykiem związanym z niepowodzeniem inwestycji.

4.2 Expected Shortfall

Kolejną miarą ryzyka jest Expected Shortfall (uśredniona wartość zagrożona). Wyraża ona, jak wysoka może być strata, jeśli poziom strat przekroczy VaR.

Tabela 4.2: Poziom ryzyka ES dla obu walut

Wartość wyznaczona za pomocą wzoru analitycznego	
USD/PLN	EUR/PLN
5.983742	3.134634

Expected Shortfall pokazuje nam, że inwestycja w parę walutową EUR/PLN jest mniej ryzykowna. Dodatkowo wartości są większe niż wartości VaR.

5 KOPUŁY

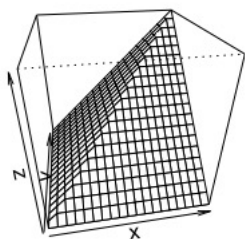
Funkcja kopuła jest to funkcja, dzięki której możemy połączyć rozkład łączny z jego rozkładami brzegowymi.

5.1 Ograniczenia

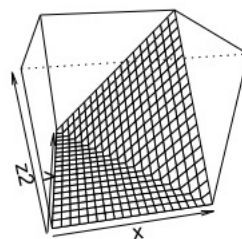
Twierdzenie

Dla dowolnej kopuły $C(x_1, \dots, x_d)$ mamy ograniczenia

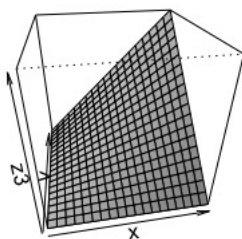
$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d x_i + 1 - d, 0 \right\} \leq C(x_1, \dots, x_d) \leq \min\{x_1, \dots, x_d\}$$



Rysunek 5.1: Ograniczenie górne



Rysunek 5.2: Ograniczenie dolne



Rysunek 5.3: Kopuła niezależności

5.2 Dobór kopuły

W ramach przypomnienia podane zostaną wyznaczone dystrybuanty brzegowe:

$$L_{usd/pln} \sim \mathcal{N}(\mu = -0,04568966, \sigma = 2,923059)$$

$$L_{eur/pln} \sim \mathcal{N}(\mu = -0,1382759, \sigma = 1,586701)$$

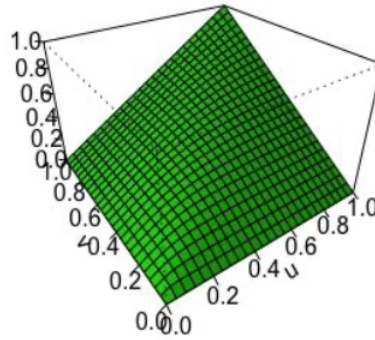
Reasumując rozkład łączny ma postać

$$F_{L_{usd/pln}, L_{eur/pln}}(x_1, x_2) = C(F_{L_{usd/pln}}(x_1), F_{L_{eur/pln}}(x_2)).$$

Analizując wykresy znajdujące się poniżej, ciężko jest zaobserwować jakiegokolwiek różnice w wygenerowanych kopułach. Chcąc wyznaczyć kopułę najbardziej odpowiednią wykorzystane zostały kryteria informacyjne pozwalające dokonać wyboru optymalnego modelu (kryteria są wskaźnikami dopasowania modelu). Przedstawiony zostanie wskaźnik Log-Likelihood, w przypadku którego wartości najwyższe wskazują model najbardziej odpowiedni.

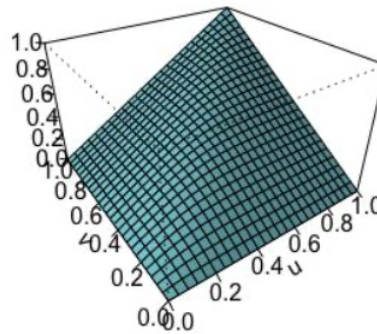
Kopuły archimedejskie

θ	2,467
LogLikelihood	30,29



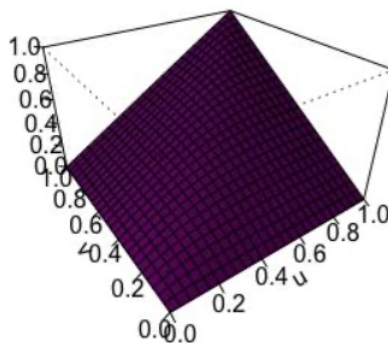
Rysunek 5.4: Kopuła Claytona

θ	9,44
LogLikelihood	33,98



Rysunek 5.5: Kopuła Franka

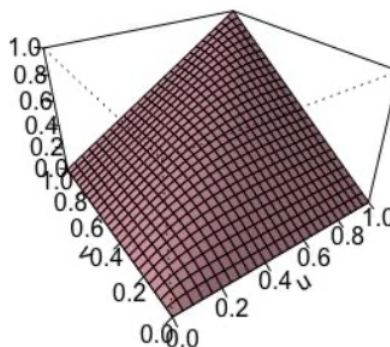
θ	2,626
LogLikelihood	32,3



Rysunek 5.6: Kopuła Gumbela

Kopuła eliptyczna

Współczynnik korelacji	0,8601
Stopnie swobody	186,4802
LogLikelihood	36,16



Rysunek 5.7: Kopuła t-Studenta

Miara Log-Likelihood przyjmuje wartość największą w przypadku kopuły eliptycznej t-Studenta. Wynika stąd, że spośród wszystkich badanych, kopuła ta pasuje najlepiej do naszych danych. W związku z tym, miary ryzyka będziemy wyznaczać dla portfela zdywersyfikowanego właśnie za pomocą kopuły t-Studenta.

5.3 Optymalizacja portfela inwestycyjnego

Przeprowadzono analizę portfela inwestycyjnego, mającą na celu znalezienie portfela zdywersyfikowanego (inwestycji łącznej złożonej z aktywów USD/PLN oraz EUR/PLN).

β	VaR	ES
0	2.709540	3.362953
0.1	2.931715	3.569238
0.2	3.152986	3.787851
0.3	3.315831	4.025717
0.4	3.512693	4.281506
0.5	3.706527	4.539439
0.6	3.890874	4.804202
0.7	4.054264	5.076332
0.8	4.291498	5.364156
0.9	4.552803	5.657636
1	4.803866	5.960157

Tabela 5.1: Wartości miar ryzyka dla portfeli w zależności od zaangażowania kapitału w USD/PLN

Jak można zauważyć, miara Value at Risk wskazuje na portfel złożony w 0% z aktywów USD/PLN oraz w 100% z aktywów EUR/PLN jako ten najmniej ryzykowny. W przypadku Expected Shortfall dokonujemy takiej samej analizy.

6 Optymalizacja portfela inwestycyjnego za pomocą wzorów analitycznych

β	VaR	ES
0	2.564202	3.227220
0.1	2.704618	3.405659
0.2	2.868816	3.613922
0.3	3.052840	3.847048
0.4	3.253247	4.100718
0.5	3.467142	4.371303
0.6	3.692145	4.655818
0.7	3.926323	4.951838
0.8	4.168113	5.257406
0.9	4.416255	5.570938
1	4.669728	5.891155

Tabela 6.1: Wartości miar ryzyka dla portfeli w zależności od zaangażowania kapitału w USD/PLN

Ze względu na VaR portfel optymalny wyznaczony za pomocą wzorów analitycznych składa się w 100% z aktywów EUR/PLN oraz 0% z aktywów USD/PLN jako ten najmniej ryzykowny. W przypadku Expected Shortfall dokonuje się takiej samej analizy.

7 Podsumowanie

Rezultatem dywersyfikacji było zmniejszenie ryzyka wynikającego z inwestycji kapitału w portfel złożony z obu walut w stosunku do inwestycji pojedynczej. Końcowy rezultat otrzymano modelując rozkład łączny dwoma sposobami. Mniejsze ryzyko zauważymy inwestując tylko w EUR/PLN aniżeli w USD/PLN. Każda z przeprowadzonych analiz wskazywała mniejsze ryzyko inwestycji w przypadku właśnie EUR/PLN.

Literatura

- [1] <http://www.opcje24h.pl/dlaczego-dolar-amerykanski-jest-swiatowa-waluta/>
- [2] <https://comparic.pl/category/analizy/analiza-techniczna-eurpln/>
- [3] <https://pl.dreamstime.com/obraz-stock-banknoty-euro-image3170441>
- [4] <https://pl.investing.com/currencies/eur-pln-historical-data>
- [5] <https://pl.investing.com/currencies/usd-pln-historical-data>
- [6] <http://www.mif.pg.gda.pl/homepages/kdz/teoriaryzyka/ErykKosinski.pdf>