

工程矩阵理论：广义逆矩阵

东南大学·数学系·周建华

August 15, 2015

本章内容概要

- ① 将“逆矩阵”推广到一般情形
- ② 广义逆矩阵的计算
- ③ 广义逆矩阵的性质
- ④ 应用：不相容线性方程组的求解

1903年, Fredholm, 积分算子的广义逆

1920年, Moore, 矩阵的广义逆

1955年, Penrose, 证明了唯一性

所以, 在下面的矩阵的广义逆的定义中的四个方程也称为Moore-Penrose方程, 简称M-P方程。

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s \times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n \times s}$ 满足下述四个条件, 则称 G 是 A 的广义逆矩阵:

- ① $AGA = A$;
- ② $GAG = G$;
- ③ $(AG)^H = AG$;
- ④ $(GA)^H = GA$.

这四个方程也称为M-P方程.

Example

1. 若 A 是可逆阵, 则 A^{-1} 就是 A 的广义逆;
2. $A = O_{s \times n}, G = O_{n \times s}$.

存在性和唯一性

Theorem

设 $A \in \mathbb{C}^{s \times n}$, 则 A 的广义逆矩阵是存在的, 且是唯一的. A 的广义逆记为 A^+ .

由广义逆存在性的证明可知：如果矩阵 A 的满秩分解为 $A = BC$ ，则

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

Example

设 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ，求 A^+ 。

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，求 A^+ 。

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^+ .

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^+ .

Example

设 3×2 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^+ .

广义逆矩阵的性质

Example

$$1. O_{s \times n}^+ = O_{n \times s}.$$

$$2. \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ \\ O \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^+ & & & \\ & \lambda_2^+ & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^+ \end{pmatrix},$$

$$\text{其中, } \lambda_j^+ = \begin{cases} \lambda_j^{-1}, & \lambda_j \neq 0 \\ 0, & \lambda_j = 0 \end{cases}$$

注意:

$(AB)^+$ 与 B^+A^+ 一般不相等!

$$\text{例: } A = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s \times n}$, 则:

1, $(A^+)^+ = A$;

2, $(A^H)^+ = (A^+)^H$;

3, $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4, 若 k 为实数, 则 $(kA)^+ = k^+ A^+$, $k^+ = \begin{cases} k^{-1}, & \text{若 } k \neq 0 \\ 0, & \text{若 } k = 0 \end{cases}$;

5, $A^H = A^H A A^+ = A^+ A A^H$;

6, $(A^H A)^+ = A^+ (A^H)^+$; $(A A^H)^+ = (A^H)^+ A^+$;

7, $A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (A A^H)^+$;

8, 若 U, V 是酉矩阵, 则 $(UAV)^+ = V^H A^+ U^H$;

9, $A^+ AB = A^+ AC \Leftrightarrow AB = AC$.

Example

证明：若 A 是Hermite矩阵，则 A^+ 也是Hermite矩阵.

Example

设 A 是正规矩阵，证明： $(A^2)^+ = (A^+)^2$.

广义逆的值域与核

Theorem

- ① $AA^+x = \begin{cases} x, & \text{若 } x \in R(A) \\ \theta, & \text{若 } x \in K(A^H) \end{cases};$
- ② $A^+Ax = \begin{cases} x, & \text{若 } x \in R(A^H) \\ \theta, & \text{若 } x \in K(A) \end{cases};$
- ③ $R(A^+) = R(A^H) = R(A^H A) = R(A^+ A) = K(I - A^+ A);$
- ④ $R(A)^\perp = K(A^H) = K(A^+) = R(I - AA^+);$
- ⑤ $R(A^+)^\perp = K(A) = K(A^H A) = R(I - A^+ A)$

最小二乘解

当线性方程组 $Ax = b$ 无解时，如何求最好的近似解，即求 x 使得 $\|Ax - b\|_2$ 最小？

Definition

设 $A \in C^{s \times n}$, $x_0 \in C^n$ ，若

$$\|b - Ax_0\| = \min_{x \in C^n} \|b - Ax\|$$

则称 x_0 是线性方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解，长度最小的最小二乘解称为极小最小二乘解。

Theorem

η 是 $Ax = b$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow \eta$ 是 $A^H Ax = A^H b$ 的解.

Theorem

$Ax = b$ 的最小二乘解的通解

为: $x = A^+b + (I - A^+A)y, \forall y \in C^n$, 其中, A^+b 是唯一的极小
最小二乘解.