工程矩阵理论：线性空间和线性变换

东南大学· 数学系· 周建华

August 15, 2015

线性空间的定义

Definition

线性空间是由下述三个要素确定的代数系统：

（1）一个数域F，一个非空集合V(V中的元素也称为向量)；

（2）两个运算：加法：$V \times V \to V$; 数乘: $F \times V \to V$，

（3）上述运算满足如下八个公理：

线性空间的定义（续）

Definition

满足下述八条公理时，称V是数域F上的线性空间：

- 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in V$，有$\alpha + \beta = \beta + \alpha$；
- 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$，有$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；
- 零元存在性：存在$\theta \in V$，使得$\forall \alpha \in V$，有$\alpha + \theta = \alpha$；
- 负元存在性：$\forall \alpha \in V$，存在$\beta \in V$，使得$\alpha + \beta = \theta$；
- 幺等律：$\forall \alpha \in V$，$1\alpha = \alpha$；
- 数乘结合律：$\forall k, l \in F$，$\forall \alpha \in V$，都有$(kl)\alpha = k(l\alpha)$；
- 分配律：$\forall k, l \in F \forall \alpha \in V$，有$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$；
- 分配律：$\forall k \in F$，$\forall \alpha, \beta \in V$，都有$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$。

线性空间的例子

Example

1. 数域F上所有n 维向量全体，按向量的加法和数乘，构成一个线性空间，记为F^n.
2. 数域F上所有$m \times n$矩阵全体，按矩阵的加法和数乘，构成一个线性空间.记为$F^{m\times n}$.
3. 数域F 上所有一元多项式全体，按多项式的加法和数乘，构成一个线性空间.记为$F[x]$.
4. 数域F 上所有次数小于n的一元多项式全体，按多项式的加法和数乘，构成一个线性空间.记为$F_n[x]$

Example

1. 集合$V = R^+ = \{m \mid m$ 是正实数$\}$, 数域R.
   加法：$m, n \in R^+$, $m \oplus n = mn$
   数乘：$m \in R^+$, $k \in R$, $k \circ m = m^k$
   则R^+ 是R 上的线性空间.
2. 以$C_{[a,b]}$记区间$[a, b]$上的连续函数全体，则$C_{[a,b]}$构成R上的一个线性空间：其加法就是函数的加法，数乘就是函数与数的乘法.

线性空间的性质

设V是数域F上的线性空间，α ，β ，$\gamma \in V$，$k \in K$ ，则：

1. V中的零向量是唯一的.通常记为θ;
2. V中任一向量α的负向量是唯一的.通常记为$-\alpha$;
3. 加法消去律：若$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$，则$\alpha = \beta$；
4. 向量方程的解：$\alpha + x = \beta$ 有唯一解，记为$x = \beta - \alpha$；
5. $(-k)\alpha = -k\alpha$，特别地，$(-1)\alpha = -\alpha$；
6. 若$k\alpha = \theta$，当且仅当则$k = 0$或$\alpha = \theta$.

线性相关性

在线性空间中可以定义线性组合、线性表示、线性相关、线性无关，向量组的极大线性无关组、秩等概念. 例如，

Definition

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$. 若存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_s\alpha_s = \theta$，则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$,线性相关.否则，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

重要性质

1. 若$s \geq 2$，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关当且仅当存在向量α_j，使得α_j可由其余向量线性表示.
2. 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，但$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则β 可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，而且，线性表示的方法是唯一的.
3. 若$t > s$, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，则$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关.

重要性质

Corollary

若$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，且$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关，则$t \leq s$.

Corollary

若$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价，且都线性无关，则$t = s$.

Example

判别下列线性空间中的向量组是否线性相关：

1. 在$F^{2\times 2}$ 中，$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
2. 在$F_3[x]$ 中，
   令$\alpha_1=2+x+3x^2,\ \alpha_2=1+3x-x^2,\ \alpha_3=3+4x+2x^2.$
3. $V=C, F=R, \alpha_1=1, \alpha_2=i=\sqrt{-1}.$
4. $V=C,\ F=C, \alpha_1=1,\ \alpha_2=i=\sqrt{-1}.$

基

Definition

若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$ 满足条件:

1. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关;
2. 任意的$\eta \in V$ 均可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示,

则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是V 的一组基.

维数

注记：

1. 若V 的某一组基中含n个向量，则V的任一组基中都含n个向量.称n是V的维数，记为$dimV$.
2. 若$dimV=n$, 则V 中任意$n+1$ 个向量线性相关.
3. 线性空间的基不一定存在.
   如：只含一个零向量的空间称为零空间.规定零子空间的维数为0.
   再如，$V=F[x]$.规定$\dim F[x]=\infty$

Example

讨论下列空间的基和维数

1. $V = F^n$.
2. $V = F^{2\times 2}$.
3. $V = F_n[x]$.
4. $V = C, F = R$.
5. $V = C, F = C$.

基和维数

Theorem

若$\dim V = n$，则V中任意n个线性无关的向量均构成V的基.

Example

证明：在$F_3[x]$中，向量$f_1(x) = 1+2x+3x^2$，$f_2(x) = 3+x-x^2$，$f_3(x) = 2-x+x^2$构成一组基.

坐标

Definition

(坐标)：设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是V的一组基，$\beta \in V$
且$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$，

则称$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是β 在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标，或$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

是β 在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标(列向量)

Example

F^n中，$\eta = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$在
基$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$下的
坐标.

Example

在$F^{2\times 2}$中，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$在基

$$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$$

下的坐标

注记：

1. 线性空间的基是有序的.
2. 基相当于几何空间中的坐标系.

Theorem

假设$\eta, \eta_i \in V$ 在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 下的坐标分别是X 及X_i,$i = 1, 2, \cdots, s$, 则

1. $\eta = \theta \Leftrightarrow X = \theta$;
2. $\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s \Leftrightarrow X = k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s$;
3. $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性相关$\Leftrightarrow X_1, X_2, \cdots, X_s$ 线性相关.

Example

1. 判断$F_3[x]$中下述向量组的线性相关性：$f_1(x)=1+x, f_2(x)=2+x+x^2, f_3(x)=x+x^2$
2. 求$F^{2\times 2}$中下述向量组的极大无关组：$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

形式记号

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$，定义形式行向量$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$.

比如，若$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$是$\beta$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标，则$\beta$可形式地记成$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)X$

若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，于是，我们可以找到一个$s\times t$矩阵$A$使得$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)A$

形式记号的性质

若

$$(\beta_1, \beta_1, \cdots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)A$$

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_p) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)B$$

则

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_p) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)(AB)$$

Example

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关，

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

证明：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$线性无关$\Leftrightarrow A$是可逆矩阵.

过渡矩阵

Definition

(过渡矩阵) 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$及$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$都是$V$的基，且

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

则称A是从基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵.

过渡矩阵的性质

1. 过渡矩阵一定是可逆的.
2. 若从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵是A，则从基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵是A^{-1}.
3. 若从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵是A，从基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 的过渡矩阵是B，则从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 的过渡矩阵是AB.

Example

在F^3中，求从基$\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (0,1,3), \alpha_3 = (2,1,-1)$到基$\beta_1 = (1,2,3), \beta_2 = (0,1,2), \beta_3 = (2,3,5)$的过渡矩阵.

坐标变换公式

Theorem

设$\eta \in V$ 在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标是X，在基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$下的坐标是$Y$，而从基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵是$P$，则$X = PY$，或$Y = P^{-1}X$.

Example

在$F_3[x]$中，求$f(x) = 1 + x + x^2$在基$f_1(x) = 2 + x, f_2(x) = x + x^2, f_3(x) = 2x + 3x^2$下的坐标.

Definition

设V是数域F上的线性空间，W是V的非空子集.若W 关于V 的运算也构成F上的线性空间，则称W是V的子空间.记$W \leq V$

例：$F_n[x]$是$F[x]$的子空间.

注：W的运算与V中的运算应当相同.

Theorem

设$W \subseteq V$.则W是V的子空间$\Leftrightarrow$ W关于线性运算封闭.

Example

- $\{\theta\}$及V本身均是V的子空间.
- R^3中集合

$$V_1 = \{(x,y,z)|3x+2y-5z=1\}$$

$$V_2 = \{(x,y,z)|3x+2y-5z=0\}$$

两类重要的子空间

1. 设$A\in F^{s\times n}, V=\{\eta\in F^n|A\eta=\theta\}$ 称V 是齐次线性方程组$Ax=\theta$ 的解空间. (基础解系是一组基，维数是$n-r$.)
2. 设V是F上的线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$集合

$$W=\left\{\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i|\forall k_i\in F\right\}$$

称W是由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成的子空间.
称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$W$的生成元.
记$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

1. 若$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,则$\forall\alpha_j\in W$;
2. $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$等价;
3. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组是$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的基,故,

$$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s).$$

Example

1. 在F^4中，已知$\alpha_1=(1,2,1,1),\alpha_2=(2,3,1,2),\alpha_3=(1,1,1,1),\alpha_4=(2,0,1,2)$, 求$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基及其维数.
2. 在$F^{2\times 2}$中，$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，求$W=L(A,B,C,D)$的一组基.求$A,B,C,D$在所得基下的坐标.
   问题：$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$是不是$W$的基？

Example

1. 求$F^{2\times 2}$子空间$W=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} | x,y\in F\right\}$的一组基.
2. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,证明: $W=\{X\in F^{2\times 2}|AX=XA\}$ 是$F^{2\times 2}$的子空间，并求W 的一组基.

Theorem

有限维线性空间V中任意线性无关向量组均可扩充成V的基.

Example

已知$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，将$A$，$B$扩充成$F^{2\times 2}$的一组基.

交与和的定义

假设$V_1, V_2 \leq V$.

Definition

$V_1 \cap V_2 = \{\eta \in V | \eta \in V_1 且 \eta \in V_2\}$.
$V_1 + V_2 = \{\eta \in V | \exists \eta_1 \in V_1, \eta_2 \in V_2 使得 \eta = \eta_1 + \eta_2.\}$ 分别称为子空间的交与和.

Theorem

$V_1 \cap V_2$，$V_1 + V_2$都是V的子空间.

注：交与并的区别

Theorem

若$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s), V_2 = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$，
则$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$

Theorem

(维数定理)

假设$V_1, V_2 \leq V$，有

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$$

Example

设$F^{2\times 2}$子空间

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} | x,y\in F\right\},$$

$$V_2=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} | x,y\in F\right\},$$

分别求V_1, V_2, V_1+V_2及$V_1\cap V_2$的基及维数.

Example

设$\alpha_1=(1,2,1,0)$, $\alpha_2=(-1,1,1,1)$, $\beta_1=(2,-1,0,1)$, $\beta_2=(1,-1,3,7)$, $V_1=L(\alpha_1,\ \alpha_2), V_2=L(\beta_1,\beta_2)$,
求F^4的子空间$V_1+V_2, V_1\cap V_2$的基及维数.

Example

已知$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

$V_1=\left\{x\in F^4|Ax=\theta\right\}, V_2=\left\{x\in F^4|Bx=\theta\right\}$

求$V_1\cap V_2$, V_1+V_2的基及维数.

两个子空间的直和

Definition

设$V_1, V_2 \leq V$, 若$\forall \eta \in V_1 + V_2$，$\exists$唯一的$\eta_1 \in V_1, \eta_2 \in V_2$，使得$\eta = \eta_1 + \eta_2$，则称$V_1 + V_2$是直和.记为$V_1 \oplus V_2$.

Theorem

设$V_1, V_2 \leq V$，则下述条件是等价的：

1. $V_1 + V_2$直和
2. θ的表示方式是唯一的;
3. $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$;
4. $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;
5. 将V_1, V_2的基合在一起就是$V_1 + V_2$的基.

Example

1. 已知$F^{n\times n}$的子空间
   $V_1=\left\{A|A^T=A\right\}, V_2=\left\{A|A^T=-A\right\}$,
   证明：$F^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.
2. 设$A\in F^{n\times n}$，且$A^2=A$.
   $V_1=\{x\in F^n|Ax=\theta\}, V_2=\{x\in F^n|Ax=x\}$
   证明：$F^n=V_1\oplus V_2$.

多个子空间的直和

Definition

设$V_1, V_2, \cdots, V_s \leq V$.若$\forall \eta \in V_1 + V_2 + \cdots + V_s$，$\exists$唯一的$\eta_i \in V_i, i = 1, 2, \cdots, s$，使得$\eta = \sum_{i=1}^{s} \eta_i$，则称$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$是直和，记为$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V$.

Theorem

设$V_1, V_2, \cdots V_s \leq V$，则下述条件是等价的：

1. $V_1 + V_2 + \cdots + V$直和;
2. θ的表示方式是唯一的;
3. $V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = \{\theta\}$;
4. $\dim \sum_{i=1}^{s} V_i = \sum_{i=1}^{s} \dim V_i$
5. 将$V_1, V_2, \cdots, V_s$的基合在一起就是$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$的基.

问题：

1. 当$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \{\theta\}$时，$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$是否是直和？
2. 当$V_i \cap V_j = \{\theta\}, \forall i \neq j$ 时，$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$是否是直和

线性映射的基本概念

Definition

设S 和T 是两个集合，f 是一个法则，使得对S 中每个元素x ，在T 中必存在唯一的元素y 与之对应，则称f 是S 到T 的映射，记为

$$f : S \to T, \quad f(x) = y.$$

如果$f(x) = y$，则称y 为x 的象，x 为y 的原象.

S 在映射f 下的全体象记为$f(S)$，称为f的值域.

集合S到自身的映射$f : S \to S$ 称为S 上的变换.

集合S到自身的映射$I : S \to S; \quad x \mapsto x$ 称为S 上的恒等变换.

Definition

假设映射$f: S \to T$. 若$f(S)=T$，则称f 是满射;
若由"$f(a)=f(b)$"必能推得"$a=b$"，则称f 是单射;
若f 既是满射又是单射，则称f 是双射.

Theorem

$f: S \to T$ 是双射$\Leftrightarrow f$ 是可逆映射(即，存在映射$g: T \to S$，使得$gf=I_S, fg=I_T$).

Definition

设V, U 是数域F 上的线性空间，若映射$f: V \to U$ 满足条件：

1. $\forall x \in V, k \in F, f(kx) = kf(x)$;

2. $\forall x, y \in V, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

则称f 是从V到U 的**线性映射**,

从V 到U的线性映射全体记为$Hom(V, U)$.

V 到V 自身的线性映射称为V 上的 **线性变换**.

Example

1. 假设$A \in F^{s\times n}$，映射$f: F^n \to F^s$ 定义为$\forall x \in F^n$, $f(x) = Ax$.
2. 映射$f: F_n[x] \to F_n[x]$定义为：$\forall p(x) \in F_n[x], f(p(x)) = p'(x)$
3. 假设$A \in F^{n\times n}$，映射$f: F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ 定义为：$\forall X \in F^{n\times n}, f(X) = XA$.
4. $f: R/R \to (R^+, \oplus, \circ)/R, \quad x \mapsto 2^x$

Example

假设V 是数域F 上的线性空间，$\eta_0 \in V$是一给定向量.考虑下列变换是否为线性变换：

1.$\forall x \in V, f(x) = \eta_0.$

2.$\forall x \in V, f(x) = x + \eta_0.$

对任意线性空间V, 下述变换肯定是线性变换：

$O : V \to V, \forall x \in V, O(x) = \theta;$

$I : V \to V, \forall x \in V, I(x) = x.$

假设$f: V \to U$ 是线性映射.则:

1. $f(\theta) = \theta$;
2. 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in V, k_1, k_2, \cdots k_s \in F$,
   则$f(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{s} k_i f(\alpha_i)$;
3. 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in V$ 线性相关,
   则$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots f(\alpha_s) \in U$ 线性相关;
4. 若$V = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$,则$f$ 的值域
   $$R(f) = L(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots f(\alpha_s));$$
5. $K(f) = \{x \in V | f(x) = \theta\}$ 是V 的子空间,称为f 的核空间.

Example

1. 求线性映射f 的值域及核子空间的基和维数：其中：$f: F_3[x] \to F_3[x]$ 定义为：$f(p(x)) = p'(x)$.
2. 设$A \in F^{s\times n}$. 求线性映射f的值域及核子空间的基和维数，其中：$f: F^n \to F^s$ 定义为：$f(x) = Ax, \forall x \in F^n$ (f的值域及核子空间分别记为$R(A), K(A)$.)

线性变换的运算

Definition

假设$f, f' \in Hom(V,U), g \in Hom(U,W), k \in F$, 定义$kf, f+f', gf$ 如下：

1. $kf : V \to U, \quad (kf)(x) = kf(x);$
2. $f+f' : V \to U, \quad (f+f')(x) = f(x) + f'(x);$
3. $gf : V \to W, \quad (gf)(x) = g(f(x)).$

容易验证，以上运算的结果仍然都是线性映射.

线性映射的运算的性质：

$Hom(V,U)$在上述加法、数乘下构成数域F上的线性空间。

假设$f,g,h \in Hom(V,V)$.则：

1. $(fg)h = f(gh)$;
2. $f(g+h) = fg + fh$;
3. $(f+g)h = fh + gh$.

线性映射在基下的矩阵

Definition

设$f \in Hom(V,U)$，选定基偶：

$$V: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n; \quad U: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s,$$

若

$$(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_n)) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)A,$$

则称A 是f在选定基偶下的矩阵.

特别如果$U = V$，且$\alpha_i = \beta_i$,

$$(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_n)) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

则称A 是线性变换f在所选基下的矩阵.

Example

1. 假设$A \in C^{s\times n}$，定义$f: F^n \to F^s$ 为$f(x) = Ax$.求f 在两组标准单位向量构成的基下的矩阵.
2. 定义$f: R_3[x] \to R_3[x]$ 为$f(\varphi(x)) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$.求$f$ 在基$1, x, x^2$在的矩阵.
3. $f \in Hom(F^{2\times 2}, F^{2\times 2})$ 定义为：对$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^{2\times 2}$

$$f(X) = \begin{pmatrix} a-3b & b+2c \\ a-b-c & a+b-3c+4d \end{pmatrix},$$

求f在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵.

Theorem

若$f \in Hom(V,U)$ 在基偶

$$V: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n; \quad U: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$$

下的矩阵是$A, \eta \in V$ 在$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的坐标是X，则$f(\eta)$ 在基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 下的坐标是AX.

Theorem

设$f \in Hom(V,U)$ 在选定基偶：V 的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵是P；U 的一组基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 到基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 的过渡矩阵是Q, 若f 在基偶$\{\alpha_i\}_1^n$ 与$\{\xi_i\}_1^s$ 下矩阵为A, 在基偶$\{\beta_i\}_1^n$ 与$\{\eta_i\}_1^s$ 下矩阵为B, 则$B=Q^{-1}AP$.

特别是，若$f \in Hom(V,V)$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是A，则f 在新的基$(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$下的矩阵是$B=P^{-1}AP$.

Example

求线性变换$f: F_3[x] \to F_3[x]$，$f(p(x)) = p'(x), \forall p(x) \in F_3[x]$ 在基$p_1(x) = 1 + x + 3x^2, p_2(x) = 1 + x, p_3(x) = 1 + 2x - x^2$ 下的矩阵.

Theorem

假设$f, g \in Hom(V, V)$ 在V 的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 下的矩阵分别是A，B，设$k \in F$，则在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$下，

1. kf的矩阵是kA;
2. $f + g$的矩阵是$A + B$;
3. fg的矩阵是AB;
4. f可逆$\Leftrightarrow$矩阵A可逆，并且，f^{-1}的矩阵是A^{-1}.

对线性映射的矩阵有类似的性质.

线性映射的值域和核

Theorem

假设$f \in Hom(V,U)$，则

f是满射$\Leftrightarrow R(f) = U$;

f是单射$\Leftrightarrow K(f) = \{\theta\}$.

值域的计算

若$f \in Hom(V,U)$在基偶$V: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n; \quad U: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$下的矩阵是$A$，即

$$(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_n)) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)A$$

由于

$$R(f) = L(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots f(\alpha_n))$$

$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots f(\alpha_n))$的极大无关组是$R(f)$的基.
特别地，$\dim R(f) = r(A)$.

核子空间的计算

若$f \in Hom(V,U)$在基偶$V:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\quad U:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$下的矩阵是$A$，$\eta \in V$ 在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标是X, 则$f(\eta)$ 在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 下的坐标是AX. 因此，

$$\eta \in K(f) \Leftrightarrow AX = \theta;$$

从而，若$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 是$AX=\theta$ 的基础解系，η_j是以X_j为坐标的V 中的向量，则$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是$K(f)$ 的基.

$$\dim K(f) = n - r(A).$$

Theorem

（维数定理）

假设$\dim V < \infty$，$f \in Hom(V, U)$，则

$$\dim R(f) + \dim K(f) = \dim V$$

Corollary

设$\dim V < \infty, f \in Hom(V, V)$, 则$f$可逆$\Leftrightarrow f$是单射$\Leftrightarrow f$是满射.

注：对无限维空间，推论不成立.

Example

设$f \in Hom(F^{2\times2}, F^{2\times2})$定义为：

对$\forall X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, f(X) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$，求$R(f)$及$K(f)$的一组基及维数.

Definition

设$f \in Hom(V,V), W \leq V$, 若$\forall \eta \in W$，有$f(\eta) \in W$，则称W是f 的不变子空间.

Example

设$f \in Hom(V,V)$, 则$R(f), K(f)$ 均是f 的不变子空间.

为何要讨论不变子空间?

1. 如果W 是关于f 的不变子空间，则$f|_W$ 可以看成是W 上的线性变换；
2. 如果W 是关于f 的不变子空间，取W 的一组基$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，再将其扩充成$V$ 的基$\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots \alpha_n$，则$f$ 在这组基下的矩阵是分块上三角阵$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$；
3. 如果$V = V_1 \oplus V_2$，其中，V_1, V_2 都是关于f 的不变子空间，则取V_1 的基$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，取$V_2$ 的基$\alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$，则$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，$\alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$ 是V 的基，这组基下，f 的矩阵为$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$.

Example

设$f \in Hom(V,V)$, 且$f^2 = f$, 证明：f 在V 的任意基下的矩阵均相似于$\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$

Definition

假设U,V 都是数域F 上的线性空间.如果$f \in Hom(V,U)$ 是双射，则称f 是线性空间U,V 之间的同构.
如果U,V 之间存在同构映射，则称U,V 是同构的.记为$V \cong U$.

假设$f: V \to U$ 是线性空间U, V 之间的同构，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$, 则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关当且仅当$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_s) \in U$ 线性相关.

Theorem

假设U, V 都是数域F 上的线性空间，则$V \cong U$ 当且仅当$\dim V = \dim U$.

Example

假设V, U 分别是数域F 上n 维和s 维线性空间，求$\dim Hom(V, U)$.