第七章 平稳过程的谱分析

§7.1 平稳过程的谱密度

一. 普通时间函数$x(t)$的频谱,能谱密度的概念.

设$x(t)$绝对可积,即$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$，则$x(t)$的付里叶变换存在。

$$F_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (1)$$

$F_x(\omega)$是复值函数

$$F_x(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{i\omega t}dt=\overline{F_x(\omega)}$$

$F_x(\omega)$的反变换为：$x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (2)$

利用(1)式和(2)式可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(\omega)e^{i\omega t}d\omega dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(\omega)d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(\omega)\overline{F_x(\omega)}d\omega$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_x(\omega)|^2d\omega \qquad (3)$$

(3)式称为巴塞伐等式

若把$x(t)$看作是通过1Ω电阻上的电流或电压，根据电学中电功公式：$W=I^2R=U^2/R$，左边的积分表示消耗在1Ω电阻上的总能量，这是因为$x^2(t)dt$为时间$(t,t+dt)$中的电功，故右边积分中的被积函数$|F_x(\omega)|^2$相应地称为能谱密度。

巴塞伐等式可理解为总能量的谱表示式。

工程技术中许多重要的时间函数的总能量是无限的，不满足付氏换条件，但它的平均功率：$\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt$却有限，为此我们考虑平均功率及功率谱密度。

对函数作一截尾函数：

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t), & |t|\le T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$$

$\because x_T(t)$有限，其付氏变换存在,

$$F_x(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_T(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

反变换：$x_T(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(\omega,T)e^{i\omega t}d\omega$

由(3)式得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x_T^2(t)dt=\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_x(\omega,T)|^2d\omega$$

$$\therefore\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega,T)|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2d\omega$$

左边可看作$x(t)$消耗在1Ω电阻上的平均功率，相应称右边的被积函数：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2$$

为功率谱密度。

二. 随机信号过程的功率谱密度

设$X(t)$是均方连续随机过程，作截尾过程：

$$X_T(t)=\begin{cases}X(t), & |t|\le T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$$

$\because X_T(t)$均方可积，故存在付氏变换：

$$F_X(\omega,T)=\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}X_T^2(t)dt=\int_{-T}^{T}X^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_X(\omega,t)|^2d\omega$$

$X(t)$是随机过程，故上式两边都是随机变量，要求取平均值，不仅要对时间区间$[-T,T]$取平均，还要求概率意义下的统计平均。

$$\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E\left[\frac{1}{2T}|F_X(\omega,T)|^2\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[|F_X(\omega,T)|^2\right]d\omega.$$

上式就是随机过程$X(t)$的平均功率和功率谱密度关系的表达式。

定义：设$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$为均方连续随机过程，

称：$Q=\psi_X^2=\lim\limits_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt\right]$为$X(t)$的平均功率。

称：$S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[|F_X(\omega,T)|^2\right]$

为$X(t)$的功率谱密度，简称谱密度。

当$X(t)$为平稳过程时，由于$E[X^2(t)]$与t无关的常数，

此时：$\psi_X^2=\lim\limits_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt\right]=E[X^2(t)]=R_X(0)$

平稳过程的平均功率等于该过程的均方值或等于它的谱密度在频域上的积分，即

$$\psi_X^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega \qquad (4)$$

(4)式是平稳过程的平均功率的频谱展开式。

例：设随机过程$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta),a,\omega_0$为常数。求$X(t)$的平均功率。

(1) $\Theta\sim U(0,2\pi)$;　　(2) $\Theta\sim U\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

解:(1) 由前面的例可知，随机相位正弦波$X(t)$是平稳过程，且自相关函数为：$R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau$

$\therefore X(t)$的平均功率为：$\psi_X^2=R_X(0)=\frac{a^2}{2}$

(2)由于：$E[X^2(t)]=E[a^2\cos^2(\omega t+\Theta)]$

$$=E\left[\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\cos(2\omega t+2\Theta)\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\omega t+2\theta)\frac{2}{\pi}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{\pi}\sin(2\omega t)\qquad \text{与}t\text{有关}$$

故$X(t)$为非平稳过程，$X(t)$的平均功率为：

$$Q=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{\pi}\sin(2\omega t)\right]dt=\frac{a^2}{2}$$

三. 平稳 随机序列的谱密度

设$\{X_n,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳随机序列，均值为零，若$\tau$只取离散值，且相关函数$R_X(\tau)$满足$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|R_X(n)|<\infty$，当$\omega$在$[-\pi,\pi]$上取值时，

若$S_X(\omega)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}R_X(n)e^{-in\omega}$绝对一致收敛，则$S_X(\omega)$是$[-\pi,\pi]$上的连续函数。

称$S_X(\omega)$为$\{X_n,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的谱密度.

$$R_X(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_X(\omega)e^{in\omega}d\omega\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

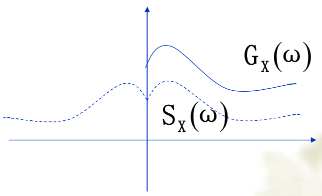
四. 单边功率谱

在实际工程中,由于只在正的频率范围内进行测量。根据平稳过程谱密度$S_X(\omega)$的偶函数性质，可将负的频率范围内的值折算到正频率范围内。引入单边谱密度如下：

$$G_X(\omega)=\begin{cases}2\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[\left|\int_0^T X(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2\right], & \omega\ge0\\ 0, & \omega<0\end{cases}$$

它与$S_X(\omega)$的关系：

$$G_X(\omega)=\begin{cases}2S_X(\omega), & \omega\ge 0\\ 0, & \omega<0\end{cases}$$



§ 7.2 谱密度的性质

设$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是均方连续平稳过程，$R_X(\tau)$为它的自相关函数，$S_X(\omega)$为它的功率谱密度，$S_X(\omega)$具有以下性质：

1.若$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_X(\tau)|d\tau<\infty$，则$S_X(\omega)$与$R_X(\tau)$是一对付氏变换。

即：$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (1)$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \qquad (2)$$

称式(1)和式(2)为维纳－辛钦公式.

证： $S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[|F_X(\omega,t)|^2\right]$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[\left|\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{\int_{-T}^{T}X(t_1)e^{i\omega t_1}dt_1\int_{-T}^{T}X(t_2)e^{-i\omega t_2}dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E[X(t_1)X(t_2)]e^{-i\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_2-t_1)e^{-i\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2$$

类似于均值各态历经定理的证明过程。

作变换代换：$\begin{cases}\tau_1=t_1+t_2\\ \tau_2=t_2-t_1\end{cases}$

$$|J|=\left|\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau_1,\tau_2)}\right|=\frac{1}{2}$$

令：$R_X(\tau,T)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau), & |\tau|\le 2T\\ 0 & |\tau|>2T\end{cases}$

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{2T}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau-\lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{2T}\frac{|\tau|}{2T}R_X(\tau)e^{-i\omega t}d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{2T}R_X(\tau,T)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}R_X(\tau,T)e^{-i\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}|R_X(\tau)|d\tau<\infty$

$$\Rightarrow\lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{2T}\frac{|\tau|}{2T}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=0$$

由付氏反变换可得：

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

当$X(t)$为实平稳过程时

$$S_X(\omega)=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}S_X(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$$

$$\because S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)[\cos(\omega\tau)-i\sin(\omega\tau)]d\tau$$
$$=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau.$$
$$S_X(0)=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)d\tau$$

同理有$R_X(\tau)=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}S_X(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$

2. $S_X(\omega)$是ω的实的非负偶函数

证：对任意的ω，有

$$|F_X(\omega,T)|^2=F_X(\omega,T)\cdot F(-\omega,T)\geq 0$$

是ω的实的非负偶函数，所以它的均值极限也必为实的，非负偶函数。

3当$S_X(\omega)$是ω的有理函数时，其形式必为：

$$S_X(\omega)=s_0\frac{\omega^{2n}+a_{2n-2}\omega^{2n-2}+\cdots+a_0}{\omega^{2m}+b_{2m-2}\omega^{2m-2}+\cdots+b_0}$$

式中$s_0>0$，要求有理函数的分子，分母只出现偶次项的原因是$S_X(\omega)$为偶函数，又要平均功率有限，所以必须满足$m>n$，且分母应该无实根。

注：关于平稳过程谱密度的计算，包括由相关函数算谱密度和由谱密度算相关函数两方面。实际上这是计算正反付里叶变换问题。
计算方法有两种：一种是利用付氏变换原函数和象函数的表以及付氏变换的性质进行计算。如表中给出的最常用的相关函数和谱密度的变换；另一种是直接计算积分的方法。

例：已知平稳过程的相关函数为：

$$R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}\cos(\omega_0\tau),$$

其中$a>0$，ω_0为常数。求$S_X(\omega)$。

解：

$$S_X(\omega)=2\int_0^{+\infty}e^{-a\tau}\cos(\omega_0\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$$
$$=\int_0^{+\infty}e^{-a\tau}[\cos(\omega_0+\omega)\tau+\cos(\omega_0-\omega)\tau]d\tau$$
$$=\frac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}+\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$$

例：已知平稳过程$X(t)$具有如下功率谱密度

$$S_X(\omega)=\frac{1}{\omega^4+5\omega^2-4}$$

求$X(t)$的相关函数$R_X(\tau)$及平均功率ψ_X^2

注：若$f(x)$是分母无实零点的有理函数，且分子分母没有相同的零点，而分母的幂比分子至少高一次，则对$a>0$，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum_k \mathrm{Res}\left[f(z)e^{iaz},z_k\right]$$

z_k是$f(z)$的分母在上半复平面的零点。

解：$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^4+5\omega^2+4}e^{i\omega\tau}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left\{\frac{e^{i|\tau|z}}{(z^2+1)(z^2+4)}\text{在}z=i,2i\text{处留数之和}\right\}$$

$$=i\left[\lim_{z\to i}\frac{e^{i|\tau|z}}{(z+i)(z^2+4)}+\lim_{z\to 2i}\frac{e^{i|\tau|z}}{(z^2+1)(z+2i)}\right]$$

$$=i\left\{\frac{1}{6i}e^{-|\tau|}-\frac{1}{12i}e^{-2|\tau|}\right\}=\frac{1}{6}\left(e^{-|\tau|}-\frac{1}{2}e^{-2|\tau|}\right)$$

$\therefore$ 平均功率为：$\psi_X^2=R_X(0)=\frac{1}{12}$

本例也可用付氏变换公式求得。

付氏变换常用性质：

①线性性质；

②反变换性质；

③卷积性质。

先将$S_X(\omega)$化为部分分式：

$$S_X(\omega)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\omega^2+1}-\frac{1}{\omega^2+4}\right)$$

由 $e^{-a|\tau|}\leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

$\therefore R_X(\tau)=F^{-1}\{S_X(\omega)\}$

$$=\frac{1}{3}F^{-1}\left(\frac{1}{\omega^2+1}\right)-\frac{1}{3}F^{-1}\left(\frac{1}{\omega^2+2^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}e^{-|\tau|}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}e^{-2|\tau|}$$

$$=\frac{1}{6}\left(e^{-|\tau|}-\frac{1}{2}e^{-2|\tau|}\right)$$

例 $R_X(\tau)=5+4e^{-3|\tau|}\cos^2 2\tau$

求$S_X(\omega)$

$$R_X(\tau)=5+2e^{-3|\tau|}(1+\cos 4\tau)$$
$$=5+2e^{-3|\tau|}+2e^{-3|\tau|}\cos 4\tau$$

利用付氏变换

$S_X(\omega)$

$$=10\pi\delta(\omega)+\frac{12}{\omega^2+9}+\frac{6}{(\omega-4)^2+9}+\frac{6}{(\omega+4)^2+9}$$

例 设随机过程$X(t)$，已知其自相关函数为：$R_X(\tau)$

功率谱密度为$S_X(\omega)$，若$|\omega|>\omega_0$时，$S_X(\omega)=0$。

证明：①$R_X(0)-R_X(\tau)\le\frac{1}{2}R_X(0)\omega_0^2\tau^2$；

②$P\{|X(t+\tau)-X(t)|>\varepsilon\}\le\frac{\omega_0^2\tau^2E[X^2(t)]}{\varepsilon^2}\quad\varepsilon>0$。

证：(1)由$|\sin\omega\tau|\le|\omega\tau|$得

$$1-\cos\omega\tau=2\sin^2\frac{\omega\tau}{2}\le\frac{\omega^2\tau^2}{2}$$

$$R_X(0)-R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}S_X(\omega)(1-\cos\omega\tau)d\omega$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}S_X(\omega)\cdot\frac{\omega^2\tau^2}{2}d\omega$$

$$\le\frac{\omega_0^2\tau^2}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}S_X(\omega)d\omega=\frac{\omega_0^2\tau^2}{2}R_X(0)$$

(2) 由切比雪夫不等式：

$$P\{|X(t+\tau)-X(\tau)|>\varepsilon\}\le E[|X(t+\tau)-X(\tau)|]^2/\varepsilon^2$$
$$=\frac{2[R_X(0)-R_X(\tau)]}{\varepsilon^2}$$

由平稳过程$E[X(t+\tau)-X(\tau)]=0$

由 $R_X(0)-R_X(\tau)\le\frac{1}{2}R_X(0)\omega_0^2\tau^2$

且 $R_X(0)=E[X^2(t)]$

则有：

$$P\{|X(t+\tau)-X(t)|>\varepsilon\}\le\frac{\omega_0^2\tau^2E[X^2(t)]}{\varepsilon^2}$$

§ 7.3 白噪声过程的功率谱密度

一. 白噪声过程定义

设$\{X(t),\ t\in(-\infty,+\infty)\}$为平稳过程，若它的均值为零，且谱密度在整个频率轴上非零常数，

$$S_X(\omega)=N_0\qquad(-\infty<\omega<+\infty)$$

则称为$X(t)$白噪声过程。

白噪声过程有类似白光的性质，其能量谱在各种频率上均匀分布。

为了对白噪声过程进行频谱分析，下面引进δ函数的付氏变换概念。

二.δ函数

具有下列性质的函数称为δ函数.

(1) $\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$

δ函数的重要运算性质，即对任何连续函数$f(x)$有：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$

或　$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$

由此可知δ函数的付氏变换为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=e^{-i\omega\tau}\Big|_{\tau=0}=1$$

反之 $\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{i\omega\tau}d\omega$

说明　$\delta(\tau)\leftrightarrow 1$构成一对付氏变换。

同理，由 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{i\omega\tau}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2\pi}$

或　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=1$

说明　$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$构成一对付氏变换。

例：已知白噪声过程的谱密度为：

$$S_X(\omega)=N_0(\text{常数})\quad(-\infty<\omega<+\infty)$$

求 $R_X(\tau)$。

解：由于$\delta(\tau)\leftrightarrow 1$　$\therefore R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$

可见，白噪声过程也可定义为均值为零，相关函数为$N_0\delta(\tau)$的平稳过程。表明任何两时刻t_1和t_2，$X(t_1)$与$X(t_2)$不相关，即白噪声随时间变化的起伏极快，而过程的功率谱极宽，对不同输入频率的信号都能产生干扰。

例：已知相关函数$R_X(\tau)=a\cos(\omega_0\tau)$，$a,\omega_0$为常数。求谱密度$S_X(\omega)$。

解：由$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}]e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau\right]$$

$$=a\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$R_X(\tau)$与$S_X(\omega)$的图见书中表

更一般对地，若$R_X(\tau)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cos(\omega_i\tau)$

则它的谱密度为：

$$S_X(\omega)=\pi\sum_{i=1}^{n}a_i[\delta(\omega-\omega_i)+\delta(\omega+\omega_i)]$$

§ 7.4　联合平稳过程的互谱密度

1. 互谱密度

设 $\{X(t)\},\{Y(t)\}$为联合平稳过程，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_{XY}(\tau)|d\tau<+\infty$$

则称 $S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

为互谱密度。

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

令 $\tau=0$，$R_{XY}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)d\omega$

2. 互谱密度的性质.

(1) $S_{XY}(\omega)=\overline{S_{YX}(\omega)}$

$$\begin{aligned}\because \overline{S_{YX}(\omega)}&=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\\&\overset{\tau_1=-\tau}{=}-\int_{+\infty}^{-\infty}R_{YX}(-\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1\\&=S_{XY}(\omega)\end{aligned}$$

注：互谱密度一般不再是ω的实的正函数.

(2) $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$为$\omega$的偶函数.

而$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$是的$\omega$奇函数.

$$\because S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cos\omega\tau d\tau-i\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

故其实部是ω的偶函数，虚部为ω的奇函数。

(3) $|S_{XY}(\omega)|^2\le S_X(\omega)S_Y(\omega)$

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{F_X(-\omega,T)F_Y(\omega,T)\}$$

利用$S_{XY}(\omega)$的付氏变换式和施瓦兹不等式即可证,

$$\begin{aligned}|S_{XY}(\omega)|&\le\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\sqrt{E\{|F_X(-\omega,T)|^2\}}\cdot\sqrt{E\{|F_Y(\omega,T)|^2\}}\\&=\sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_X(-\omega,T)|^2\}}\cdot\sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_Y(\omega,T)|^2\}}\\&=\sqrt{S_X(\omega)}\sqrt{S_Y(\omega)}\end{aligned}$$

(4) 若$X(t)$和$Y(t)$相互正交，则

$$S_{XY}(\omega)=S_{YX}(\omega)=0.$$

例 已知平稳过程$X(t)$和$Y(t)$的互谱密度为:

$$S_{XY}(\omega)=\begin{cases}a+ib\omega/\omega_0, & |\omega|<\omega_0\\ 0, & |\omega|\ge\omega_0\end{cases}$$

其中a,b,ω_0为实常数,求$R_{XY}(\tau)$

解: $R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left(a+ib\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{i\omega\tau}d\omega\\&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}e^{i\omega\tau}d\omega+\frac{ib}{2\pi\omega_0}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\omega e^{i\omega\tau}d\omega\\&=\frac{1}{\pi\omega_0\tau^2}[(a\omega_0\tau-b)\sin(\omega_0\tau)+b\omega_0\tau\cos(\omega_0\tau)]\end{aligned}$$

例：设随机过程$Y(t)$是由一各态历经的白噪声过程$X(t)$延迟时间T后产生的，若$X(t)$和$Y(t)$的谱密度为s_0，求互相关$R_{XY}(\tau)$，$R_{YX}(\tau)$及$S_{XY}(\omega)$，$S_{YX}(\omega)$。

解：$\because Y(t)=X(t-T)$

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$
$$=E[X(t)X(t+\tau-T)]=R_X(\tau-T)$$

由于 $S_X(\omega)=S_Y(\omega)=s_0$

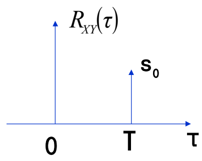
由$\delta(\tau)\leftrightarrow 1 \Rightarrow R_X(\tau)=s_0\delta(\tau)$

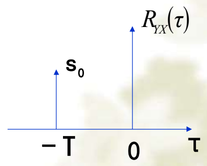
$\therefore R_{XY}(\tau)=R_X(\tau-T)=s_0\delta(\tau-T)$

而 $R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)==s_0\delta(\tau+T)$

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}s_0\delta(\tau-T)e^{-i\omega\tau}d\tau=s_0e^{-i\omega T}$$

同样 $S_{YX}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s_0\delta(\tau+T)e^{-i\omega\tau}d\tau=s_0e^{i\omega T}$





§ 7.5　平稳过程通过线性系统的分析

一.线性时不变系统

1. 设对系统输入$x(t)$，系统的作用为L，其输出为$y(t)$，则它们的函数关系为：

$$y(t)=L[x(t)]$$

L在数学上代表算子，它可以是加法、乘法、微分、积分和微分方程求解等数学运算。

2. 线性时不变系统

1) 称满足下列条件的算子为线性算子。

若 $y_1(t)=L[x_1(t)]$，$y_2(t)=L[x_2(t)]$

则对任意常数α，β有：

$$L[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha L[x_1(t)]+\beta L[x_2(t)]$$
$$=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$$

对一个系统，若算子L是线性的，则称该系统为线性系统。

2)若系统L有$y(t)=L[x(t)]$，并对任一时间平移τ，都有 $y(t+\tau)=L[x(t+\tau)]$

则称该系统为时不变系统(定常)。

例：微分算子$L=\dfrac{d}{dt}$是线性时不变的。

解：设$y(t)=L[x(t)]=\dfrac{d}{dt}x(t)$

由导数运算性质知，微分算子满足线性条件，且

$$L[x(t+\tau)]=\frac{d}{dt}x(t+\tau)=\frac{dx(t+\tau)}{d(t+\tau)}$$
$$=y(t+\tau)$$

设$y(t)=L[x(t)]=a(t)\dfrac{d}{dt}x(t)$，其中$a(t)$是$t$的函数，

则$L=a(t)\dfrac{d}{dt}$是线性的但不是时不变的。

例：积分算子$L=\int_{-\infty}^{t}(\cdot)dt$是线性时不变的。

解：设$y(t)=L[x(t)]=\int_{-\infty}^{t}x(u)du$，且$y(-\infty)=0$

由积分运算性质知，积分算子满足线性条件，且

$$L[x(t+\tau)]=\int_{-\infty}^{t}x(u+\tau)du$$
$$=\int_{-\infty}^{t}x(u+\tau)d(u+\tau)=y(t+\tau)$$

注：一个系统的线性性质，表现为该系统满足叠加原理，系统的时不变性，表现为输出对输入的关系不随时间推移而改变。

因此一个线性时不变系统，叠加原理的数学表达式为：

$$y(t)=L\left[\sum_{k=1}^{n}a_k x_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{n}a_k L[x_k(t)]=\sum_{k=1}^{n}a_k y_k(t)$$

在工程实际中，属于这类较简单而又重要的系统，是输入与输出之间可以用下列常系数线性微分方程来描述的系统。

$$b_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+b_0 y(t)$$
$$=a_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+a_0 x(t)$$

其中$n>m.\qquad -\infty<t<+\infty$

二. 频率响应与脉冲响应

1.频率响应函数

当系统输入端输入一个激励信号时，输出端出现一个对应的响应信号，激励信号与响应信号之间的对应关系L，又称为响应特性。

定理：设L为线性时不变系统，若输入一谐波信号$x(t)=e^{i\omega t}$。则输出为：

$$y(t)=L\left[e^{i\omega t}\right]=H(\omega)e^{i\omega t}\qquad(1)$$

其中$H(\omega)=L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}$

证：令$y(t)=L\left[e^{i\omega t}\right]$，由系统的线性时不变性，对固定的$\tau$和任意的$t$有：

$$y(t+\tau)=L\left[e^{i\omega(t+\tau)}\right]=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]$$

令$t=0$得：

$$y(\tau)=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}=H(\omega)e^{i\omega\tau}$$

此定理表明，对线性时不变系统，输入一谐波信号时，其输出也是同频率的谐波，只不过振幅和相位有所变化，其中$H(\omega)$表示了这个变化，称它为系统的频率响应函数，一般它是复值函数。

例如：当$L=\dfrac{d}{dt}$时，则系统的频率响应为：

$$H(\omega)=L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}=\frac{d}{dt}e^{i\omega t}\Big|_{t=0}=i\omega$$

例：$y(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t-T}^{t}x(t)dt$

令：$x(t)=e^{i\omega t}\Rightarrow y(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t-T}^{t}e^{i\omega t}dt=\dfrac{1}{i\omega T}\left[e^{i\omega t}-e^{i\omega(t-T)}\right]$

$$=\frac{e^{i\omega t}}{i\omega T}\left[1-e^{-i\omega T}\right]$$

$$\Rightarrow H(\omega)=\frac{1-e^{-i\omega T}}{i\omega T}$$

2. 系统的时域分析(脉冲响应)

根据δ函数的性质有:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\qquad(2)$$

$$\therefore y(t)=L[x(t)]=L\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)L[\delta(t-\tau)]d\tau\quad(L\text{只对时间函数运算})$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\qquad(3)$$

其中：$h(t-\tau)=L[\delta(t-\tau)]$

当输入$x(t)$为单位脉冲δ函数时，

则上式：$y(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=h(t)\qquad(4)$

上式表明$h(t)$是输入为脉冲时的输出，故称它为系统的脉冲响应。

例：设$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(u)e^{-a^2(t-u)}du$

则系统的脉冲响应为：

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)e^{-a^2(t-u)}du$$

$$=e^{-a^2t}\int_{-\infty}^{t}\delta(u)e^{a^2u}du=\begin{cases}e^{-a^2t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

对(3)式通过变量代换得：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \overset{u=t-\tau,\tau=u}{\Rightarrow}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau \qquad (5)$$

(3)式与(5)式就是从时域研究系统输入$x(t)$与输出$y(t)$的关系式，表明线性时不变系统的输出$y(t)$等于输入$x(t)$与脉冲响应$h(t)$的卷积。

即 $y(t)=h(t)*x(t)$ (6)

3.系统的频域分析

设$x(t)$，$y(t)$都满足付氏变换条件，且它们的付氏变换分别为$X(\omega)$、$Y(\omega)$和$H(\omega)$，则有下列变换对：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (7)$$

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (8)$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (9)$$

为了求出输入与输出之间的频谱关系，利用(1)式(7)式：

$$y(t)=L[x(t)]=L\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)L\left[e^{i\omega t}\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\cdot H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (10)$$

比较(8)式和(10)式得：

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \qquad (11)$$

此式就是在频域上系统输入频谱$X(\omega)$与输出频谱$Y(\omega)$的关系式。

为了满足信号加入之前，系统不产生响应，必须要求脉冲函数符合条件：

$h(t)=0$，当$t<0$

满足此条件的系统称物理可实现系统。

相应有： $y(t)=\int_{0}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

或 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$H(\omega)=\int_{0}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}d\tau$$

三. 线性系统输出的均值和相关函数

若系统输入过程$X(t)$时，其输出

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)X(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$$

下面讨论输入过程$X(t)$的均值和相关函数与输出过程的均值和相关函数的关系。

定理：设输入平稳过程$X(t)$的均值为m_X，相关函数为$R_X(\tau)$。则输出过程

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

的均值和相关函数为：

$$m_Y(t)=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=m_XH(0)=\text{常数}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv$$
$$=R_Y(\tau)\qquad(\tau=t_2-t_1)$$

证：$m_Y(t)=E[Y(t)]=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t-\tau)]h(\tau)d\tau$$
$$=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=m_X\cdot H(0)=\text{常数}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]$$
$$=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t_1-u)h(u)du\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}X(t_2-v)h(v)dv\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t_1-u)X(t_2-v)]h(u)h(v)dudv$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv$$
$$=R_X(\tau)*h(-\tau)*h(\tau)=R_Y(\tau)\qquad\text{仅与}\tau\text{有关}$$

故输出过程也是平稳的。

平稳过程输入与输出的相关性可由互相关函数表示。

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$
$$=E\left[X(t)\int_{-\infty}^{+\infty}X(t+\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t)X(t+\tau-\lambda)]h(\lambda)d\lambda$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=R_X(\tau)*h(\tau)$$
$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

与输入相关函数比较知，输出相关函数可通过两次卷积产生，第一次是输入相关函数与脉冲响应的卷积，其结果为$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数，第二次是$R_{XY}(\tau)$与$h(-\tau)$的卷积，结果为$R_Y(\tau)$。

$$\xrightarrow{R_X(\tau)}\boxed{h(\tau)}\xrightarrow{R_{XY}(\tau)}\boxed{h(-\tau)}\xrightarrow{R_Y(\tau)}$$

例：设线性系统输入一个白噪声过程$X(t)$，

$$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$$

则：$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}N_0\delta(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=N_0h(\tau)$

$$\therefore h(\tau)=\frac{1}{N_0}R_{XY}(\tau)$$

四. 线性系统的谱密度

下面讨论具有频率响应$H(\omega)$的线性系统，其输出的谱密度$S_Y(\omega)$与输入谱密度$S_X(\omega)$的关系。

定理：设输入平稳过程$X(t)$具有谱密度$S_X(\omega)$，则输出平稳过程$Y(t)$的谱密度为：

$$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$$

其中$H(\omega)$是系统的频率响应函数，称$|H(\omega)|^2$为系统的频率增益因子或频率传输函数。

证：$S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv\right]e^{-i\omega\tau}d\tau$$

令：$\tau-v+u=s$

$$S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(s)h(u)h(v)e^{-i\omega(s+v-u)}dsdudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(s)e^{-i\omega s}ds\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)e^{i\omega u}du\int_{-\infty}^{+\infty}h(v)e^{-i\omega v}dv$$

$$=S_X(\omega)\cdot H(-\omega)H(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$$

或由 $R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)*h(\tau)$

两边取付氏变换即得：$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$

由$R_X(\tau)$求$R_{XY}(\tau)$和$R_Y(\tau)$计算较复杂，可由$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$，求出$S_Y(\omega)$。
通过反变换得输出相关函数：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_Y(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)|H(\omega)|^2e^{i\omega\tau}d\omega$$

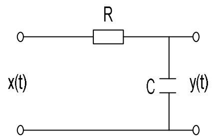
输出的平均功率(均方值)为：

$$R_Y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2S_X(\omega)d\omega.$$

由$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)$可得：
输入与输出过程的互谱密度为：

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

例：如图示的RC电路，若输入白噪声电压$X(t)$，其相关函数为$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$，求输出电压$Y(t)$的相关函数和平均功率。



解：$\because$ 输入样本函数与输出样本函数满足微分方程：

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

这是一个常系数线性微分方程，是一个线性时不变系统。取$X(t)=e^{i\omega t}$，由定理有：

$$y(t)=H(\omega)e^{i\omega t}$$

代入上式：$RC\frac{d\left[H(\omega)e^{i\omega t}\right]}{dt}+H(\omega)e^{i\omega t}=e^{i\omega t}$

故RC电路系统的频率响应函数为：

$$H(\omega)=\frac{1}{i\omega RC+1}=\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}\qquad 其中\alpha=\frac{1}{RC}$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha e^{i\omega t}}{i(\omega-i\alpha)}d\omega$$

$\because \frac{\alpha}{i(\omega-i\alpha)}$在上半平面有一阶极点，故当$t>0$时

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Res}(i\alpha)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left[\frac{\alpha e^{i\cdot i\alpha\cdot t}}{i}\right]=\alpha e^{-\alpha t}$$

$$\therefore h(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)h(v)N_0\delta(\tau-v+u)dudv$$
$$=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)du\int_{-\infty}^{+\infty}h(v)\delta(\tau-v+u)dv$$
$$=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\cdot h(u+\tau)du$$
$$=\begin{cases}N_0\int_0^{+\infty}\alpha^2e^{-\alpha u}\cdot e^{-\alpha(u+\tau)}du, & \tau\ge 0\\ N_0\int_{-\tau}^{+\infty}\alpha^2e^{-\alpha u}\cdot e^{-\alpha(u+\tau)}du, & \tau<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{\alpha N_0}{2}e^{-\alpha\tau}, & \tau\ge 0\\ \frac{\alpha N_0}{2}e^{\alpha\tau} & \tau<0\end{cases}=\frac{\alpha N_0}{2}e^{-\alpha|\tau|}\qquad(-\infty<\tau<+\infty)$$

令$\tau=0$得输出平均功率为：$R_Y(0)=\frac{\alpha N_0}{2}$

例：设系统输入一个白噪声，即$R_X(\tau)=s_0\delta(\tau)$或$S_X(\omega)=s_0$(常数$s_0>0$)。试求输入与输出的互相关函数和互谱密度。

解：互相关函数

$$R_{XY}(\tau)=\int_0^{+\infty}R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda$$
$$=\int_0^{+\infty}s_0\delta(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=\begin{cases}s_0h(\tau), & 当\tau>0\\ 0, & 当\tau\le 0\end{cases}$$
$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

此例结果可用以对线性系统进行辨识，

当 $\tau>0$时，有 $h(\tau)=\frac{1}{s_0}R_{XY}(\tau)$

如果将一个白噪声输入系统，能够计算得到互相关函数$R_{XY}(\tau)$，那么由上式能够获得系统的脉冲响应函数，即完全地确定系统的动态特性。

作业：7.4，7.6，7.13，7.15，7.18

复习提纲：

1.特征函数、母函数、条件期望；

2.随机过程的分布(一、二维) 及数学特征
  重要过程中的维纳过程和正态过程；

3.泊松过程：重点齐次泊松过程的定义及基本性质(分布、数字特征、时间间隔与等待时间分布、到达时间的条件分布等)

4.马尔可夫链
(1)转移概率、初始概率与绝对概率、有限维分布；
(2)马氏链的状态分类、周期性、状态空间的分解、遍历性与平稳分布。

5.连续时间的马尔可夫链.
(1)连续性条件、Q矩阵、前进与后退方程、绝对概率所满足的方程、平稳分布；
(2)生灭过程，排队系统，例M/M/S、M/M/1，机器维修问题等。

6.平稳过程
(1)证明过程是平稳过程，相关函数的性质，
  判断平稳过程是否各态历经性(定义和充要条件)
(2)随机分析：均方连续、均方导数、均方积分。

7.平稳过程的谱密度分析

(1)谱密度、平均功率，常用函数的付氏变换关系，白噪声过程；

(2)平稳过程通过线性系统的分析

①线性时不变系统；

②频率响应与脉冲响应；

③输出的均值和相关函数；

④线性系统的谱密度、互谱密度。

§ 7.3 白噪声过程的功率谱密度

一. 白噪声过程定义

设$\{X(t),\ t\in(-\infty,+\infty)\}$为平稳过程，若它的均值为零，且谱密度在整个频率轴上非零常数，

$$S_X(\omega)=N_0 \qquad (-\infty<\omega<+\infty)$$

则称为$X(t)$白噪声过程。

白噪声过程有类似白光的性质，其能量谱在各种频率上均匀分布。

为了对白噪声过程进行频谱分析，下面引进δ函数的付氏变换概念。

二.δ函数

具有下列性质的函数称为δ函数.

$$(1)\ \delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases} \qquad (2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$$

δ函数的重要运算性质，即对任何连续函数$f(x)$有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$$

由此可知δ函数的付氏变换为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=e^{-i\omega\tau}\big|_{\tau=0}=1$$

反之 $\delta(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{i\omega\tau}d\omega$

说明 $\delta(\tau)\leftrightarrow 1$构成一对付氏变换。

同理，由 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\dfrac{1}{2\pi}e^{i\omega\tau}\big|_{\omega=0}=\dfrac{1}{2\pi}$

或 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=1$

说明 $1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$构成一对付氏变换。

例：已知白噪声过程的谱密度为：

$$S_X(\omega)=N_0(\text{常数})\ (-\infty<\omega<+\infty)$$

求 $R_X(\tau)$。

解：由于$\delta(\tau)\leftrightarrow 1 \quad \therefore R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$

可见，白噪声过程也可定义为均值为零，相关函数为$N_0\delta(\tau)$的平稳过程。表明任何两时刻t_1和t_2，$X(t_1)$与$X(t_2)$不相关，即白噪声随时间变化的起伏极快，而过程的功率谱极宽，对不同输入频率的信号都能产生干扰。

例：已知相关函数$R_X(\tau)=a\cos(\omega_0\tau)$，$a,\omega_0$为常数。求谱密度$S_X(\omega)$。

解：由$S_X(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$\begin{aligned}
&=\int_{-\infty}^{+\infty}a\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\\
&=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}]e^{-i\omega\tau}d\tau\\
&=\frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau\right]\\
&=a\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]
\end{aligned}$$

$R_X(\tau)$与$S_X(\omega)$的图见书中表.

更一般对地，若$R_X(\tau)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\cos(\omega_i\tau)$

则它的谱密度为：

$$S_X(\omega)=\pi\sum_{i=1}^{n}a_i[\delta(\omega-\omega_i)+\delta(\omega+\omega_i)]$$

§ 7.4　联合平稳过程的互谱密度

1. 互谱密度

设 $\{X(t)\},\{Y(t)\}$为联合平稳过程，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_{XY}(\tau)|d\tau<+\infty$$

则称 $S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

为互谱密度。

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

令 $\tau=0$，$R_{XY}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)d\omega$

2. 互谱密度的性质.

(1) $S_{XY}(\omega)=\overline{S_{YX}(\omega)}$

$$\because \overline{S_{YX}(\omega)}=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau$$

$$\overset{\tau_1=-\tau}{=}-\int_{+\infty}^{-\infty}R_{YX}(-\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1$$

$$=S_{XY}(\omega)$$

注：互谱密度一般不再是ω的实的正函数.

(2) $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$为$\omega$的偶函数.

而$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$是的$\omega$奇函数.

$$\because S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cos\omega\tau d\tau-i\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

故其实部是ω的偶函数，虚部为ω的奇函数。

(3) $|S_{XY}(\omega)|^2\le S_X(\omega)S_Y(\omega)$

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{F_X(-\omega,T)F_Y(\omega,T)\}$$

利用$S_{XY}(\omega)$的付氏变换式和施瓦兹不等式

即可证，

$$|S_{XY}(\omega)|\le\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\sqrt{E\{|F_X(-\omega,T)|^2\}}\cdot\sqrt{E\{|F_Y(\omega,T)|^2\}}$$

$$=\sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_X(-\omega,T)|^2\}}\cdot\sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_Y(\omega,T)|^2\}}$$

$$=\sqrt{S_X(\omega)}\sqrt{S_Y(\omega)}$$

(4) 若$X(t)$和$Y(t)$相互正交，则

$$S_{XY}(\omega)=S_{YX}(\omega)=0.$$

例 已知平稳过程$X(t)$和$Y(t)$的互谱密度为:

$$S_{XY}(\omega)=\begin{cases}a+ib\omega/\omega_0, & |\omega|<\omega_0\\ 0, & |\omega|\ge\omega_0\end{cases}$$

其中a,b,ω_0为实常数,求$R_{XY}(\tau)$

解: $R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left(a+ib\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{a}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}e^{i\omega\tau}d\omega+\frac{ib}{2\pi\omega_0}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\omega e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi\omega_0\tau^2}[(a\omega_0\tau-b)\sin(\omega_0\tau)+b\omega_0\tau\cos(\omega_0\tau)]$$

例：设随机过程$Y(t)$是由一各态历经的白噪声过程$X(t)$延迟时间T后产生的，若$X(t)$和$Y(t)$的谱密度为s_0，求互相关$R_{XY}(\tau)$，$R_{YX}(\tau)$及$S_{XY}(\omega)$，$S_{YX}(\omega)$。

解：$\because Y(t)=X(t-T)$

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E[X(t)X(t+\tau-T)]=R_X(\tau-T)$$

由于　$S_X(\omega)=S_Y(\omega)=s_0$

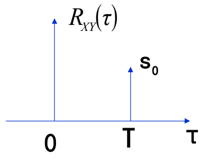
由$\delta(\tau)\leftrightarrow 1\Rightarrow R_X(\tau)=s_0\delta(\tau)$

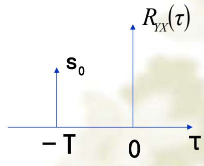
$\therefore R_{XY}(\tau)=R_X(\tau-T)=s_0\delta(\tau-T)$

而 $R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)==s_0\delta(\tau+T)$

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}s_0\delta(\tau-T)e^{-i\omega\tau}d\tau=s_0e^{-i\omega T}$$

同样 $S_{YX}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s_0\delta(\tau+T)e^{-i\omega\tau}d\tau=s_0e^{i\omega T}$





§7.5 平稳过程通过线性系统的分析

一.线性时不变系统

1. 设对系统输入$x(t)$，系统的作用为L，其输出为$y(t)$，则它们的函数关系为：

$$y(t)=L[x(t)]$$

L在数学上代表算子，它可以是加法、乘法、微分、积分和微分方程求解等数学运算。

2. 线性时不变系统

1) 称满足下列条件的算子为线性算子。

若 $y_1(t)=L[x_1(t)]$，$y_2(t)=L[x_2(t)]$

则对任意常数α，β有：

$$L[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha L[x_1(t)]+\beta L[x_2(t)]$$
$$=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$$

对一个系统，若算子L是线性的，则称该系统为线性系统。

2)若系统L有$y(t)=L[x(t)]$，并对任一时间平移τ，都有 $y(t+\tau)=L[x(t+\tau)]$

则称该系统为时不变系统(定常)。

例：微分算子$L=\dfrac{d}{dt}$是线性时不变的。

解：设$y(t)=L[x(t)]=\dfrac{d}{dt}x(t)$

由导数运算性质知，微分算子满足线性条件，且

$$L[x(t+\tau)]=\frac{d}{dt}x(t+\tau)=\frac{dx(t+\tau)}{d(t+\tau)}$$
$$=y(t+\tau)$$

设$y(t)=L[x(t)]=a(t)\dfrac{d}{dt}x(t)$，其中$a(t)$是$t$的函数，

则$L=a(t)\dfrac{d}{dt}$是线性的但不是时不变的。

例：积分算子$L=\int_{-\infty}^{t}(\cdot)dt$是线性时不变的。

解：设$y(t)=L[x(t)]=\int_{-\infty}^{t}x(u)du$，且$y(-\infty)=0$

由积分运算性质知，积分算子满足线性条件，且

$$L[x(t+\tau)]=\int_{-\infty}^{t}x(u+\tau)du$$
$$=\int_{-\infty}^{t}x(u+\tau)d(u+\tau)=y(t+\tau)$$

注：一个系统的线性性质，表现为该系统满足叠加原理，系统的时不变性，表现为输出对输入的关系不随时间推移而改变。

因此一个线性时不变系统，叠加原理的数学表达式为：

$$y(t)=L\left[\sum_{k=1}^{n}a_kx_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{n}a_kL[x_k(t)]=\sum_{k=1}^{n}a_ky_k(t)$$

在工程实际中，属于这类较简单而又重要的系统，是输入与输出之间可以用下列常系数线性微分方程来描述的系统。

$$b_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+b_0 y(t)$$
$$=a_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+a_0 x(t)$$

其中$n>m.\qquad -\infty<t<+\infty$

二. 频率响应与脉冲响应

1.频率响应函数

当系统输入端输入一个激励信号时，输出端出现一个对应的响应信号，激励信号与响应信号之间的对应关系L，又称为响应特性。

定理：设L为线性时不变系统，若输入一谐波信号$x(t)=e^{i\omega t}$。则输出为：

$$y(t)=L\left[e^{i\omega t}\right]=H(\omega)e^{i\omega t}\qquad(1)$$

其中$H(\omega)=L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}$

证：令$y(t)=L\left[e^{i\omega t}\right]$，由系统的线性时不变性，对固定的$\tau$和任意的$t$有：

$$y(t+\tau)=L\left[e^{i\omega(t+\tau)}\right]=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]$$

令$t=0$得：

$$y(\tau)=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}=H(\omega)e^{i\omega\tau}$$

此定理表明，对线性时不变系统，输入一谐波信号时，其输出也是同频率的谐波，只不过振幅和相位有所变化，其中$H(\omega)$表示了这个变化，称它为系统的频率响应函数，一般它是复值函数。

例如：当$L=\dfrac{d}{dt}$时，则系统的频率响应为：

$$H(\omega)=L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}=\frac{d}{dt}e^{i\omega t}\Big|_{t=0}=i\omega$$

例：$y(t)=\dfrac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(t)dt$

令：$x(t)=e^{i\omega t}\Rightarrow y(t)=\dfrac{1}{T}\int_{t-T}^{t}e^{i\omega t}dt=\dfrac{1}{i\omega T}[e^{i\omega t}-e^{i\omega(t-T)}]$

$$=\frac{e^{i\omega t}}{i\omega T}[1-e^{-i\omega T}]$$

$$\Rightarrow H(\omega)=\frac{1-e^{-i\omega T}}{i\omega T}$$

2. 系统的时域分析(脉冲响应)

根据δ函数的性质有:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\qquad(2)$$

$$\therefore y(t)=L[x(t)]=L\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)L[\delta(t-\tau)]d\tau\quad(L\text{只对时间函数运算})$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\qquad(3)$$

其中：$h(t-\tau)=L[\delta(t-\tau)]$

当输入$x(t)$为单位脉冲δ函数时，

则上式：$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=h(t)\qquad(4)$

上式表明$h(t)$是输入为脉冲时的输出，故称它为系统的脉冲响应。

例：设$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(u)e^{-a^2(t-u)}du$

则系统的脉冲响应为：

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)e^{-a^2(t-u)}du$$
$$=e^{-a^2t}\int_{-\infty}^{t}\delta(u)e^{a^2u}du=\begin{cases}e^{-a^2t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

对(3)式通过变量代换得：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \overset{u=t-\tau,\tau=u}{\Rightarrow}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau \qquad (5)$$

(3)式与(5)式就是从时域研究系统输入$x(t)$与输出$y(t)$的关系式，表明线性时不变系统的输出$y(t)$等于输入$x(t)$与脉冲响应$h(t)$的卷积。

即 $y(t)=h(t)*x(t)$ (6)

3.系统的频域分析

设$x(t)$，$y(t)$都满足付氏变换条件，且它们的付氏变换分别为$X(\omega)$、$Y(\omega)$和$H(\omega)$，则有下列变换对：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (7)$$

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (8)$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (9)$$

为了求出输入与输出之间的频谱关系，利用(1)式(7)式：

$$y(t)=L[x(t)]=L\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)L\left[e^{i\omega t}\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\cdot H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (10)$$

比较(8)式和(10)式得：

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \qquad (11)$$

此式就是在频域上系统输入频谱$X(\omega)$与输出频谱$Y(\omega)$的关系式。

为了满足信号加入之前，系统不产生响应，必须要求脉冲函数符合条件：

$h(t)=0$，当$t<0$

满足此条件的系统称物理可实现系统。

相应有： $y(t)=\int_{0}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

或 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$H(\omega)=\int_{0}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}d\tau$$

三. 线性系统输出的均值和相关函数

若系统输入过程$X(t)$时，其输出

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)X(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$$

下面讨论输入过程$X(t)$的均值和相关函数与输出过程的均值和相关函数的关系。

定理：设输入平稳过程$X(t)$的均值为m_X，相关函数为$R_X(\tau)$。则输出过程

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

的均值和相关函数为：

$$m_Y(t)=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=m_XH(0)=\text{常数}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv$$

$$=R_Y(\tau) \qquad (\tau=t_2-t_1)$$

证：$m_Y(t)=E[Y(t)]=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t-\tau)]h(\tau)d\tau$$

$$=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=m_X\cdot H(0)=\text{常数}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t_1-u)h(u)du\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}X(t_2-v)h(v)dv\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t_1-u)X(t_2-v)]h(u)h(v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv$$

$$=R_X(\tau)*h(-\tau)*h(\tau)=R_Y(\tau)\quad\text{仅与}\tau\text{有关}$$

故输出过程也是平稳的。

平稳过程输入与输出的相关性可由互相关函数表示。

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E\left[X(t)\int_{-\infty}^{+\infty}X(t+\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t)X(t+\tau-\lambda)]h(\lambda)d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=R_X(\tau)*h(\tau)$$

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

与输入相关函数比较知，输出相关函数可通过两次卷积产生，第一次是输入相关函数与脉冲响应的卷积，其结果为$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数，第二次是$R_{XY}(\tau)$与$h(-\tau)$的卷积，结果为$R_Y(\tau)$。

$$\xrightarrow{R_X(\tau)}\boxed{h(\tau)}\xrightarrow{R_{XY}(\tau)}\boxed{h(-\tau)}\xrightarrow{R_Y(\tau)}$$

例：设线性系统输入一个白噪声过程$X(t)$，

$$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$$

则：$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}N_0\delta(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=N_0h(\tau)$

$$\therefore h(\tau)=\frac{1}{N_0}R_{XY}(\tau)$$

四. 线性系统的谱密度

下面讨论具有频率响应$H(\omega)$的线性系统，其输出的谱密度$S_Y(\omega)$与输入谱密度$S_X(\omega)$的关系。

定理：设输入平稳过程$X(t)$具有谱密度$S_X(\omega)$，则输出平稳过程$Y(t)$的谱密度为：

$$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$$

其中$H(\omega)$是系统的频率响应函数，称$|H(\omega)|^2$为系统的频率增益因子或频率传输函数。

证：$S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv\right]e^{-i\omega\tau}d\tau$$

令：$\tau-v+u=s$

$$S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(s)h(u)h(v)e^{-i\omega(s+v-u)}dsdudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(s)e^{-i\omega s}ds\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)e^{i\omega u}du\int_{-\infty}^{+\infty}h(v)e^{-i\omega v}dv$$

$$=S_X(\omega)\cdot H(-\omega)H(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$$

或由　$R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)*h(\tau)$

两边取付氏变换即得：$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$

由$R_X(\tau)$求$R_{XY}(\tau)$和$R_Y(\tau)$计算较复杂，可由
$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2 S_X(\omega)$，求出$S_Y(\omega)$。
通过反变换得输出相关函数：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_Y(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)|H(\omega)|^2 e^{i\omega\tau}d\omega$$

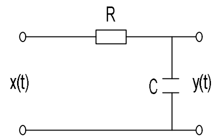
输出的平均功率(均方值)为：

$$R_Y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 S_X(\omega)d\omega.$$

由$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)$可得：
输入与输出过程的互谱密度为：

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

例：如图示的RC电路，若输入白噪声电压$X(t)$，其相关函数为$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$，求输出电压$Y(t)$的相关函数和平均功率。



解：$\because$输入样本函数与输出样本函数满足微分方程：

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

这是一个常系数线性微分方程，是一个线性时不变系统。取$X(t)=e^{i\omega t}$，由定理有：

$$y(t)=H(\omega)e^{i\omega t}$$

代入上式：$RC\dfrac{d\left[H(\omega)e^{i\omega t}\right]}{dt}+H(\omega)e^{i\omega t}=e^{i\omega t}$

故RC电路系统的频率响应函数为：

$$H(\omega)=\frac{1}{i\omega RC+1}=\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}\qquad \text{其中}\alpha=\frac{1}{RC}$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}e^{i\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha e^{i\omega t}}{i(\omega-i\alpha)}d\omega$$

$\because\dfrac{\alpha}{i(\omega-i\alpha)}$在上半平面有一阶极点，故当$t>0$时

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Res}(i\alpha)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left[\frac{\alpha e^{i\cdot i\alpha\cdot t}}{i}\right]=\alpha e^{-\alpha t}$$

$$\therefore h(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)h(v)N_0\delta(\tau-v+u)dudv$$
$$=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)du\int_{-\infty}^{+\infty}h(v)\delta(\tau-v+u)dv$$
$$=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\cdot h(u+\tau)du$$
$$=\begin{cases}N_0\int_0^{+\infty}\alpha^2e^{-\alpha u}\cdot e^{-\alpha(u+\tau)}du, & \tau\geq 0\\ N_0\int_{-\tau}^{+\infty}\alpha^2e^{-\alpha u}\cdot e^{-\alpha(u+\tau)}du, & \tau<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{\alpha N_0}{2}e^{-\alpha\tau}, & \tau\geq 0\\ \frac{\alpha N_0}{2}e^{\alpha\tau} & \tau<0\end{cases}=\frac{\alpha N_0}{2}e^{-\alpha|\tau|}\qquad(-\infty<\tau<+\infty)$$

令$\tau=0$得输出平均功率为：$R_Y(0)=\dfrac{\alpha N_0}{2}$

例：设系统输入一个白噪声，即$R_X(\tau)=s_0\delta(\tau)$ 或$S_X(\omega)=s_0$(常数$s_0>0$)。试求输入与输出的互相关函数和互谱密度。

解：互相关函数

$$R_{XY}(\tau)=\int_0^{+\infty}R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda$$

$$=\int_0^{+\infty}s_0\delta(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=\begin{cases}s_0h(\tau), & 当\tau>0\\ 0, & 当\tau\le 0\end{cases}$$

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

此例结果可用以对线性系统进行辨识，

当 $\tau>0$时，有 $h(\tau)=\dfrac{1}{s_0}R_{XY}(\tau)$

如果将一个白噪声输入系统，能够计算得到互相关函数$R_{XY}(\tau)$，那么由上式能够获得系统的脉冲响应函数，即完全地确定系统的动态特性。

作业：7.4，7.6，7.13，7.15，7.18

复习提纲：

1.特征函数、母函数、条件期望；

2.随机过程的分布(一、二维) 及数学特征

重要过程中的维纳过程和正态过程；

3.泊松过程：重点齐次泊松过程的定义及基本性质(分布、数字特征、时间间隔与等待时间分布、到达时间的条件分布等)

4.马尔可夫链

(1)转移概率、初始概率与绝对概率、有限维分布；

(2)马氏链的状态分类、周期性、状态空间的分解、遍历性与平稳分布。

5.连续时间的马尔可夫链.

(1)连续性条件、**Q**矩阵、前进与后退方程、绝对概率所满足的方程、平稳分布；

(2)生灭过程，排队系统，例**M/M/S**、**M/M/1**，机器维修问题等。

6.平稳过程

(1)证明过程是平稳过程，相关函数的性质，判断平稳过程是否各态历经性(定义和充要条件)

(2)随机分析：均方连续、均方导数、均方积分。

7.平稳过程的谱密度分析

(1)谱密度、平均功率，常用函数的付氏变换关系，白噪声过程；

(2)平稳过程通过线性系统的分析

①线性时不变系统；

②频率响应与脉冲响应；

③输出的均值和相关函数；

④线性系统的谱密度、互谱密度。