第三章第四章证明题

1. 设 G 为 n 阶正定对称矩阵，$u_1, u_2, \cdots, u_n \in R^n$ 线性无关。p_k 按如下方式生成：

$p_1 = u_1$，$\boldsymbol{p_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{u_{k+1}^T G p_i}{p_i^T G p_i} p_i (k = 1, 2, \cdots, n-1)}$，证明 $\boldsymbol{p_1, p_2, \cdots, p_n}$ 关于 $\boldsymbol{G}$ 共轭。

2. 设 A 为 n 阶对称正定矩阵，非零向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 关于矩阵 A 共轭，证明

$A^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k p_k^T}{p_k^T A p_k}$。

3. 用 PRP 共轭梯度法求解无约束优化问题 $\min\ f(x)$，若一维搜索是精确的，且在求解过程中，每一步的梯度都是非零向量，证明 PRP 方法产生的搜索方向都是下降方向。

4. 设 A 为 n 阶对称正定矩阵，非零向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 关于矩阵 A 共轭，$x \in R^n$. 证明

$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k^T A x}{p_k^T A p_k} p_k$。

5. $f: R^n \to R$ 为可微凸函数，证明 x^* 为优化问题 $\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.t. & x \geq 0 \end{array}$ 的最优解的充要条件是

$x^* \geq 0, \nabla f(x^*) \geq 0, (\nabla f(x^*))^T x^* = 0$。