最优化第一章作业题

（1）用黄金分割法求函数 x^2-x+1 在区间[-4,1]上的极小点，经过 $\underline{\ 4\ }$ 迭代后可以使得区间的长度小于 1。

（2）用黄金分割法求函数在[0,1]上的极小点，第一步所取的两个点为$\underline{0.382、0.618}$。

（3）用黄金分割法求函数 x^2-3x+2 在[0,4]上的极小点，迭代一步之后得到的区间为________。

（4）用黄金分割法求函数 $2x^2-5x+1$ 在[1,6]上的极小点，要使得最后区间的长度小于 1，必须至少迭代________步。

（5）（已经布置过）向量 $(1,r)^T$ 是问题 $\begin{aligned}&\min x_1-4x_2\\ &s.t.\ 3x_1-2x_2\ge 6\\ &\quad 2x_1+6x_2\le 12\\ &\quad x_2\ge 0\end{aligned}$ 在点 $(2,0)^T$ 的可行下降方向，求 r 的范围。

最优化第二章作业题

填空

（1）在三维空间 R^3 中，集合 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$ 的极点构成的集合为____。

（2）线性规划 $\begin{aligned}&\min 2x_1-x_2\\ &s.t.\ x_1+x_2+x_3\quad =4\\ &\quad -x_1-x_2\quad +x_4=2\\ &\quad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$ 的可行域共有________个不同的极点。

（3）集合 $\{(x,y)\,|\,x^2+2y^2\le 4, x\ge 1, y\ge 1\}$ 的极点构成的集合为____________________。

（4）在二维空间 R^2 中，集合 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, y\ge x\}$ 的极点构成的集合为____。

（5）函数 $f(x_1,x_2)=ax_1^2+x_1x_2+2x_2^2-x_1+2x_2+1$ 为严格凸函数，则常数 a 的取值范围是____________________。

（6）线性规划 $\begin{aligned}&\min 2x_1-3x_2\\ &s.t.\ x_1+x_2\ge -1\\ &\quad -3x_1+5x_2\le 2\\ &\quad x_2\le 0\end{aligned}$ 的对偶规划为__________________。

证明

（1） $f(x)$ 为凸集 $D\subset R^n$ 上的函数，上图 $epi(f)=\{(x,y)\,|\,x\in D, y\in R, y\ge f(x)\}$，证明 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $epi(f)$ 为凸集。

（2）考虑规划问题：$\begin{aligned}&\min\quad f(x)\\ &s.t.\quad c_i(x)\le 0\end{aligned}$，其中，$f(x), c_i(x)(i=1,2,\cdots,m): R^n\to R$ 是凸函数，证明：（1）该问题的可行域是凸集；（2）该问题的最优解的集合 A 是凸集。

（3）设 z^*, s^* 分别为下列两个问题 $(I)\begin{aligned}&\min c^Tx\\ &s.t.\quad Ax=b\\ &\quad x\ge 0\end{aligned}$ $\quad (II)\begin{aligned}&\min c^Tx\\ &s.t.\quad Ax=b+d\\ &\quad x\ge 0\end{aligned}$ 的最优值。y^* 是(I)的对偶问题的最优解，证明 $z^*+y^{*T}d\le s^*$ 。

（4）设 $\bar{x}, \bar{y}$ 分别为下列两个问题

$$
(I)\ \begin{array}{ll} & \min c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (II)\ \begin{array}{ll} & \max\ y^T b \\ s.t. & y^T A \leq c^T \\ & y \geq 0 \end{array}
$$

的可行解。证明 $c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b$。

计算

一、（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$
\begin{aligned}
&\min -3x_1 - 4x_2 \\
&s.t.\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
&\quad x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量 x_1 写出对应的割平面方程。

二、（18％）（1）以 $(5/2,1/2,0,0)^T$ 为初始基可行解，用单纯形方法求解下面的线性规划

$$
\begin{aligned}
&\min\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\
&s.t.\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
&\qquad 2x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 5, \\
&\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

（2） 写 出 该 线 性 规 划 的 影 子 价 格 向 量 ；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对变量 x_1 写出分枝后的线性规划。

三、（教材 90 页第（4）小题））求解线性规划

$$
\begin{aligned}
&\min\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\
&s.t.\quad x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 15 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 10, \\
&\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, |x_4| \leq 2.
\end{aligned}
$$

四、（教材 92 页第（5）小题）写对偶规划

$$
\begin{aligned}
&\min S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
&s.t.\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,\cdots,m \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,\cdots,n \\
&\quad x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

五、若线性规划 $\begin{array}{l} \min x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.t.\ 3x_1 + 4x_2 \qquad = 5 \\ \quad x_1 \qquad + 2x_3 = u \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$ 的最优解为 $(a,b,c)^T$，其对偶规划的最优解为 $(1/6,1/2)^T$. a,b,c,u 四个常数中，你可以确定哪些？如果有不能确定的常数，确定其范围。