§ 7.3 白噪声过程的功率谱密度

一. 白噪声过程定义

设$\{X(t),\ t\in(-\infty,+\infty)\}$为平稳过程，若它的均值为零，且谱密度在整个频率轴上非零常数，

$$S_X(\omega)=N_0 \qquad (-\infty<\omega<+\infty)$$

则称为$X(t)$白噪声过程。

白噪声过程有类似白光的性质，其能量谱在各种频率上均匀分布。

为了对白噪声过程进行频谱分析，下面引进δ函数的付氏变换概念。

二.δ函数

具有下列性质的函数称为δ函数.

$$(1)\ \delta(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ \infty, x=0\end{cases} \qquad (2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$$

δ函数的重要运算性质，即对任何连续函数$f(x)$有： $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$

或 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$

由此可知δ函数的付氏变换为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=e^{-i\omega\tau}\Big|_{\tau=0}=1$$

反之 $\delta(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{i\omega\tau}d\omega$

说明 $\delta(\tau)\leftrightarrow 1$构成一对付氏变换。

同理，由 $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\dfrac{1}{2\pi}e^{i\omega\tau}\Big|_{\omega=0}=\dfrac{1}{2\pi}$

或 $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=1$

说明 $1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$构成一对付氏变换。

例：已知白噪声过程的谱密度为：

$$S_X(\omega)=N_0(\text{常数})\ (-\infty<\omega<+\infty)$$

求 $R_X(\tau)$。

解：由于$\delta(\tau)\leftrightarrow 1 \quad \therefore R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$

可见，白噪声过程也可定义为均值为零，相关函数为$N_0\delta(\tau)$的平稳过程。表明任何两时刻t_1和t_2，$X(t_1)$与$X(t_2)$不相关，即白噪声随时间变化的起伏极快，而过程的功率谱极宽，对不同输入频率的信号都能产生干扰。

例：已知相关函数$R_X(\tau)=a\cos(\omega_0\tau)$，$a,\omega_0$为常数。求谱密度$S_X(\omega)$。

解：由$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$\begin{aligned}
&=\int_{-\infty}^{+\infty}a\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\\
&=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}]e^{-i\omega\tau}d\tau\\
&=\frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau\right]\\
&=a\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]
\end{aligned}$$

$R_X(\tau)$与$S_X(\omega)$的图见书中表.

更一般对地，若$R_X(\tau)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cos(\omega_i\tau)$

则它的谱密度为：

$$S_X(\omega)=\pi\sum_{i=1}^{n}a_i[\delta(\omega-\omega_i)+\delta(\omega+\omega_i)]$$

§ 7.4 联合平稳过程的互谱密度

1. 互谱密度

设 $\{X(t)\},\{Y(t)\}$为联合平稳过程，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_{XY}(\tau)|d\tau<+\infty$$

则称 $S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

为互谱密度。

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

令 $\tau=0$，$R_{XY}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)d\omega$

2. 互谱密度的性质.

(1) $S_{XY}(\omega)=\overline{S_{YX}(\omega)}$

$$\because \overline{S_{YX}(\omega)}=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau$$
$$\overset{\tau_1=-\tau}{=}-\int_{+\infty}^{-\infty}R_{YX}(-\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1$$
$$=S_{XY}(\omega)$$

注：互谱密度一般不再是ω的实的正函数.

(2) $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$为$\omega$的偶函数.

而$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$是的$\omega$奇函数.

$$\because S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cos\omega\tau d\tau-i\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

故其实部是ω的偶函数，虚部为ω的奇函数。

(3) $|S_{XY}(\omega)|^2\le S_X(\omega)S_Y(\omega)$

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{F_X(-\omega,T)F_Y(\omega,T)\}$$

利用$S_{XY}(\omega)$的付氏变换式和施瓦兹不等式

即可证，

$$|S_{XY}(\omega)|\le\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\sqrt{E\{|F_X(-\omega,T)|^2\}}\cdot\sqrt{E\{|F_Y(\omega,T)|^2\}}$$
$$=\sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_X(-\omega,T)|^2\}}\cdot\sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_Y(\omega,T)|^2\}}$$
$$=\sqrt{S_X(\omega)}\sqrt{S_Y(\omega)}$$

(4) 若$X(t)$和$Y(t)$相互正交，则

$$S_{XY}(\omega)=S_{YX}(\omega)=0.$$

例 已知平稳过程$X(t)$和$Y(t)$的互谱密度为：

$$S_{XY}(\omega)=\begin{cases}a+ib\omega/\omega_0, & |\omega|<\omega_0\\ 0, & |\omega|\ge\omega_0\end{cases}$$

其中a,b,ω_0为实常数,求$R_{XY}(\tau)$

解：$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left(a+ib\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{i\omega\tau}d\omega$$
$$=\frac{a}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}e^{i\omega\tau}d\omega+\frac{ib}{2\pi\omega_0}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\omega e^{i\omega\tau}d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi\omega_0\tau^2}[(a\omega_0\tau-b)\sin(\omega_0\tau)+b\omega_0\tau\cos(\omega_0\tau)]$$

例：设随机过程$Y(t)$是由一各态历经的白噪声过程$X(t)$延迟时间T后产生的，若$X(t)$和$Y(t)$的谱密度为s_0，求互相关$R_{XY}(\tau)$，$R_{YX}(\tau)$及$S_{XY}(\omega)$，$S_{YX}(\omega)$。

解：$\because Y(t)=X(t-T)$

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$
$$=E[X(t)X(t+\tau-T)]=R_X(\tau-T)$$

由于 $S_X(\omega)=S_Y(\omega)=s_0$

由$\delta(\tau)\leftrightarrow 1\Rightarrow R_X(\tau)=s_0\delta(\tau)$

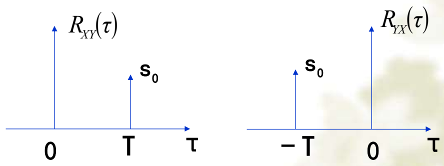
$\therefore R_{XY}(\tau)=R_X(\tau-T)=s_0\delta(\tau-T)$

而 $R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)==s_0\delta(\tau+T)$

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}s_0\delta(\tau-T)e^{-i\omega\tau}d\tau=s_0e^{-i\omega T}$$

同样 $S_{YX}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s_0\delta(\tau+T)e^{-i\omega\tau}d\tau=s_0e^{i\omega T}$



§7.5 平稳过程通过线性系统的分析

一.线性时不变系统

1. 设对系统输入$x(t)$，系统的作用为L，其输出为$y(t)$，则它们的函数关系为：

$$y(t)=L[x(t)]$$

L在数学上代表算子，它可以是加法、乘法、微分、积分和微分方程求解等数学运算。

2. 线性时不变系统

1) 称满足下列条件的算子为线性算子。

若 $y_1(t)=L[x_1(t)]$，$y_2(t)=L[x_2(t)]$

则对任意常数α，β有：

$$L[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha L[x_1(t)]+\beta L[x_2(t)]$$

$$=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$$

对一个系统，若算子L是线性的，则称该系统为线性系统。

2)若系统L有$y(t)=L[x(t)]$，并对任一时间平移τ，都有 $y(t+\tau)=L[x(t+\tau)]$

则称该系统为时不变系统(定常)。

例：微分算子$L=\dfrac{d}{dt}$是线性时不变的。

解：设$y(t)=L[x(t)]=\dfrac{d}{dt}x(t)$

由导数运算性质知，微分算子满足线性条件，且

$$L[x(t+\tau)]=\frac{d}{dt}x(t+\tau)=\frac{dx(t+\tau)}{d(t+\tau)}$$

$$=y(t+\tau)$$

设$y(t)=L[x(t)]=a(t)\dfrac{d}{dt}x(t)$，其中$a(t)$是$t$的函数，

则$L=a(t)\dfrac{d}{dt}$是线性的但不是时不变的。

例：积分算子$L=\int_{-\infty}^{t}(\cdot)dt$是线性时不变的。

解：设$y(t)=L[x(t)]=\int_{-\infty}^{t}x(u)du$，且$y(-\infty)=0$

由积分运算性质知，积分算子满足线性条件，且

$$L[x(t+\tau)]=\int_{-\infty}^{t}x(u+\tau)du$$

$$=\int_{-\infty}^{t}x(u+\tau)d(u+\tau)=y(t+\tau)$$

注：一个系统的线性性质，表现为该系统满足叠加原理，系统的时不变性，表现为输出对输入的关系不随时间推移而改变。

因此一个线性时不变系统，叠加原理的数学表达式为：

$$y(t)=L\left[\sum_{k=1}^{n}a_kx_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{n}a_kL[x_k(t)]=\sum_{k=1}^{n}a_ky_k(t)$$

在工程实际中，属于这类较简单而又重要的系统，是输入与输出之间可以用下列常系数线性微分方程来描述的系统。

$$b_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+b_0 y(t)$$

$$=a_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+a_0 x(t)$$

其中$n>m.\qquad -\infty<t<+\infty$

二. 频率响应与脉冲响应

1.频率响应函数

当系统输入端输入一个激励信号时，输出端出现一个对应的响应信号，激励信号与响应信号之间的对应关系L，又称为响应特性。

定理：设L为线性时不变系统，若输入一谐波信号$x(t)=e^{i\omega t}$。则输出为：

$$y(t)=L\left[e^{i\omega t}\right]=H(\omega)e^{i\omega t}\qquad(1)$$

其中$H(\omega)=L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}$

证：令$y(t)=L\left[e^{i\omega t}\right]$，由系统的线性时不变性，对固定的$\tau$和任意的$t$有：

$$y(t+\tau)=L\left[e^{i\omega(t+\tau)}\right]=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]$$

令$t=0$得：

$$y(\tau)=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}=H(\omega)e^{i\omega\tau}$$

此定理表明，对线性时不变系统，输入一谐波信号时，其输出也是同频率的谐波，只不过振幅和相位有所变化，其中$H(\omega)$表示了这个变化，称它为系统的频率响应函数，一般它是复值函数。

例如：当$L=\dfrac{d}{dt}$时，则系统的频率响应为：

$$H(\omega)=L\left[e^{i\omega t}\right]_{t=0}=\frac{d}{dt}e^{i\omega t}\Big|_{t=0}=i\omega$$

例：$y(t)=\dfrac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(t)dt$

令：$x(t)=e^{i\omega t}\Rightarrow y(t)=\dfrac{1}{T}\int_{t-T}^{t}e^{i\omega t}dt=\dfrac{1}{i\omega T}[e^{i\omega t}-e^{i\omega(t-T)}]$

$$=\frac{e^{i\omega t}}{i\omega T}[1-e^{-i\omega T}]$$

$$\Rightarrow H(\omega)=\frac{1-e^{-i\omega T}}{i\omega T}$$

2. 系统的时域分析(脉冲响应)

根据δ函数的性质有:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\qquad(2)$$

$$\therefore y(t)=L[x(t)]=L\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)L[\delta(t-\tau)]d\tau\quad(L\text{只对时间函数运算})$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\qquad(3)$$

其中：$h(t-\tau)=L[\delta(t-\tau)]$

当输入$x(t)$为单位脉冲δ函数时，

则上式：$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=h(t)\qquad(4)$

上式表明$h(t)$是输入为脉冲时的输出，故称它为系统的脉冲响应。

例：设$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(u)e^{-a^2(t-u)}du$

则系统的脉冲响应为：

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)e^{-a^2(t-u)}du$$

$$=e^{-a^2t}\int_{-\infty}^{t}\delta(u)e^{a^2u}du=\begin{cases}e^{-a^2t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

对(3)式通过变量代换得：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \overset{u=t-\tau,\tau=u}{\Rightarrow}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau \qquad (5)$$

(3)式与(5)式就是从时域研究系统输入$x(t)$与输出$y(t)$的关系式，表明线性时不变系统的输出$y(t)$等于输入$x(t)$与脉冲响应$h(t)$的卷积。

即 $y(t)=h(t)*x(t)$ (6)

3.系统的频域分析

设$x(t)$，$y(t)$都满足付氏变换条件，且它们的付氏变换分别为$X(\omega)$、$Y(\omega)$和$H(\omega)$，则有下列变换对：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (7)$$

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (8)$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (9)$$

为了求出输入与输出之间的频谱关系，利用(1)式(7)式：

$$y(t)=L[x(t)]=L\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)L\left[e^{i\omega t}\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\cdot H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (10)$$

比较(8)式和(10)式得：

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \qquad (11)$$

此式就是在频域上系统输入频谱$X(\omega)$与输出频谱$Y(\omega)$的关系式。

为了满足信号加入之前，系统不产生响应，必须要求脉冲函数符合条件：

$h(t)=0$，当$t<0$

满足此条件的系统称物理可实现系统。

相应有： $y(t)=\int_{0}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

或 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$H(\omega)=\int_{0}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt$$

三. 线性系统输出的均值和相关函数

若系统输入过程$X(t)$时，其输出

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)X(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$$

下面讨论输入过程$X(t)$的均值和相关函数与输出过程的均值和相关函数的关系。

定理：设输入平稳过程$X(t)$的均值为m_X，相关函数为$R_X(\tau)$。则输出过程

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

的均值和相关函数为：

$$m_Y(t)=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=m_X H(0)=\text{常数}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv$$

$$=R_Y(\tau) \qquad (\tau=t_2-t_1)$$

证： $m_Y(t)=E[Y(t)]=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t-\tau)]h(\tau)d\tau$$

$$=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=m_X\cdot H(0)=\text{常数}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t_1-u)h(u)du\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}X(t_2-v)h(v)dv\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t_1-u)X(t_2-v)]h(u)h(v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv$$

$$=R_X(\tau)*h(-\tau)*h(\tau)=R_Y(\tau)\quad \text{仅与}\tau\text{有关}$$

故输出过程也是平稳的。

平稳过程输入与输出的相关性可由互相关函数表示。

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E\left[X(t)\int_{-\infty}^{+\infty}X(t+\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t)X(t+\tau-\lambda)]h(\lambda)d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=R_X(\tau)*h(\tau)$$

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

与输入相关函数比较知，输出相关函数可通过两次卷积产生，第一次是输入相关函数与脉冲响应的卷积，其结果为$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数，第二次是$R_{XY}(\tau)$与$h(-\tau)$的卷积，结果为$R_Y(\tau)$。

$$R_X(\tau)\longrightarrow\boxed{h(\tau)}\xrightarrow{R_{XY}(\tau)}\boxed{h(-\tau)}\longrightarrow R_Y(\tau)$$

例：设线性系统输入一个白噪声过程$X(t)$，

$$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$$

则：$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}N_0\delta(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=N_0h(\tau)$

$$\therefore h(\tau)=\frac{1}{N_0}R_{XY}(\tau)$$

四．线性系统的谱密度

下面讨论具有频率响应$H(\omega)$的线性系统，其输出的谱密度$S_Y(\omega)$与输入谱密度$S_X(\omega)$的关系。

定理： 设输入平稳过程$X(t)$具有谱密度$S_X(\omega)$，则输出平稳过程$Y(t)$的谱密度为：

$$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$$

其中$H(\omega)$是系统的频率响应函数，称$|H(\omega)|^2$为系统的频率增益因子或频率传输函数。

证：$S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-v+u)h(u)h(v)dudv\right]e^{-i\omega\tau}d\tau$$

令：$\tau-v+u=s$

$$S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(s)h(u)h(v)e^{-i\omega(s+v-u)}dsdudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(s)e^{-i\omega s}ds\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)e^{i\omega u}du\int_{-\infty}^{+\infty}h(v)e^{-i\omega v}dv$$

$$=S_X(\omega)\cdot H(-\omega)H(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$$

或由 $R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)*h(\tau)$

两边取付氏变换即得：$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$

由$R_X(\tau)$求$R_{XY}(\tau)$和$R_Y(\tau)$计算较复杂，可由
$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2 S_X(\omega)$，求出$S_Y(\omega)$。
通过反变换得输出相关函数：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)|H(\omega)|^2 e^{i\omega t}d\omega$$

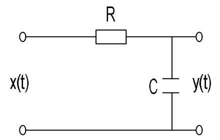
输出的平均功率(均方值)为：

$$R_Y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 S_X(\omega)d\omega.$$

由$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)$可得：
输入与输出过程的互谱密度为：

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

例：如图示的RC电路，若输入白噪声电压$X(t)$，其相关函数为$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$，求输出电压$Y(t)$的相关函数和平均功率。



解：∵输入样本函数与输出样本函数满足微分方程：

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

这是一个常系数线性微分方程，是一个线性时不变系统。取$X(t)=e^{i\omega t}$，由定理有：

$$y(t)=H(\omega)e^{i\omega t}$$

代入上式：$RC\frac{d\left[H(\omega)e^{i\omega t}\right]}{dt}+H(\omega)e^{i\omega t}=e^{i\omega t}$

故RC电路系统的频率响应函数为：

$$H(\omega)=\frac{1}{i\omega RC+1}=\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}\qquad \text{其中}\ \alpha=\frac{1}{RC}$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}e^{i\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha e^{i\omega t}}{i(\omega-i\alpha)}d\omega$$

$\because \frac{\alpha}{i(\omega-i\alpha)}$在上半平面有一阶极点，故当$t>0$时

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Res}(i\alpha)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left[\frac{\alpha e^{i\cdot i\alpha\cdot t}}{i}\right]=\alpha e^{-\alpha t}$$

$$\therefore h(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)h(v)N_0\delta(\tau-v+u)dudv$$
$$=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)du\int_{-\infty}^{+\infty}h(v)\delta(\tau-v+u)dv$$
$$=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\cdot h(u+\tau)du$$
$$=\begin{cases}N_0\int_0^{+\infty}\alpha^2e^{-\alpha u}\cdot e^{-\alpha(u+\tau)}du, & \tau\ge 0\\ N_0\int_{-\tau}^{+\infty}\alpha^2e^{-\alpha u}\cdot e^{-\alpha(u+\tau)}du, & \tau<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{\alpha N_0}{2}e^{-\alpha\tau}, & \tau\ge 0\\ \frac{\alpha N_0}{2}e^{\alpha\tau} & \tau<0\end{cases}=\frac{\alpha N_0}{2}e^{-\alpha|\tau|}\qquad(-\infty<\tau<+\infty)$$

令$\tau=0$得输出平均功率为：$R_Y(0)=\dfrac{\alpha N_0}{2}$

例：设系统输入一个白噪声，即$R_X(\tau)=s_0\delta(\tau)$或$S_X(\omega)=s_0$(常数$s_0>0$)。试求输入与输出的互相关函数和互谱密度。

解：互相关函数

$$R_{XY}(\tau)=\int_0^{+\infty}R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda$$

$$=\int_0^{+\infty}s_0\delta(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=\begin{cases}s_0h(\tau), & \text{当}\tau>0\\ 0, & \text{当}\tau\le 0\end{cases}$$

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(\omega)$$

此例结果可用以对线性系统进行辨识，

当 $\tau>0$时，有 $h(\tau)=\dfrac{1}{s_0}R_{XY}(\tau)$

如果将一个白噪声输入系统，能够计算得到互相关函数$R_{XY}(\tau)$，那么由上式能够获得系统的脉冲响应函数，即完全地确定系统的动态特性。

作业：7.4，7.6，7.13，7.15，7.18

复习提纲：

1.特征函数、母函数、条件期望；

2.随机过程的分布**(**一、二维**)** 及数学特征
重要过程中的维纳过程和正态过程；

3.泊松过程：重点齐次泊松过程的定义及基本性质**(**分布、数字特征、时间间隔与等待时间分布、到达时间的条件分布等**)**

4.马尔可夫链

(1)转移概率、初始概率与绝对概率、有限维分布；

(2)马氏链的状态分类、周期性、状态空间的分解、遍历性与平稳分布。

5.连续时间的马尔可夫链**.**

(1)连续性条件、**Q**矩阵、前进与后退方程、绝对概率所满足的方程、平稳分布；

(2)生灭过程，排队系统，例**M/M/S**、**M/M/1**，机器维修问题等。

6.平稳过程

(1)证明过程是平稳过程，相关函数的性质，判断平稳过程是否各态历经性**(**定义和充要条件**)**

(2)随机分析：均方连续、均方导数、均方积分。

7.平稳过程的谱密度分析

(1)谱密度、平均功率，常用函数的付氏变换关系，白噪声过程；

(2)平稳过程通过线性系统的分析

①线性时不变系统；

②频率响应与脉冲响应；

③输出的均值和相关函数；

④线性系统的谱密度、互谱密度。