第五章 连续时间的马尔可夫链

§5.1 连续时间马尔可夫链

一、定义和一般性质

为方便计，以下设参数集$T=[0,+\infty)$，状态空间$I=\{0,1,2,\cdots\}$

定义：随机过程$\{X(t),t\ge 0\}$状态空间$I=\{0,1,2,\cdots\}$若对任意$0\le t_1<t_2<\cdots<t_{n+1}$及非负整数$i_1,i_2,\cdots,i_{n+1}\in I$有：

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}/X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n\}=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}/X(t_n)=i_n\}$$

则称$\{X(t),\ t\ge 0\}$为连续时间马尔可夫链,

1

记：$p_{ij}(s,t)=P\{X(s+t)=j/X(s)=i\}$为转移概率.

同样若转移概率与s无关,称此连续参数马氏链为齐次的。记：$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$

$P(t)=(p_{ij}(t)),(i,j\in I,t\ge 0)$为转移矩阵。

显然 $p_{ij}(t)\ge 0,\sum_{j\in I}p_{ij}(t)=1$

$c\to k$方程：$p_{ij}(t+s)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)p_{kj}(s)$

或$P(s+t)=P(s)\cdot P(t)$

证明与前面类似

2

$$\begin{cases}\text{初始概率与：} & p_j(0)=P\{X(0)=j\}\\ \text{初始分布：} & \{p_j(0),j\in I\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{绝对概率与：} & p_j(t)=P\{X(t)=j\}\\ \text{绝对分布：} & \{p_j(t),j\in I\}\end{cases}$$

定理：齐次连续参数马氏链的绝对概率及有限维分布具有以下性质：

(1) $p_j(t)\ge 0$, (2) $\sum_{j\in I}p_j(t)=1$

(3) $p_j(t)=\sum_{i\in I}p_i(0)p_{ij}(t)$, (4) $p_j(t+\tau)=\sum_{i\in I}p_i(t)p_{ij}(\tau)$

(5) $P\{X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}$

$$=\sum_{i\in I}p_i(0)p_{ii_1}(t_1)p_{i_1i_2}(t_2-t_1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})$$

证明与前面类似

3

例：试证明泊松过程$\{X(t),\ t\ge 0\}$为连续参数马氏链。

证：先证泊松过程具有马氏性，再证齐次性。

因为泊松过程是独立增量过程，且$X(0)=0$

对任意$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}$有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}/X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n/X(t_1)-X(0)=i_1,X(t_2)-X(t_1)=i_2-i_1,\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})=i_n-i_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}$$

4

另一方面，因为

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}/X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n/X(t_n)-X(0)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}$$
$$\therefore P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}/X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}/X(t_n)=i_n\}$$

即具有马尔可夫性

5

证：齐次性，当$j\ge i$时，由泊松过程定义

$$P\{X(s+t)=j/X(s)=i\}$$
$$=P\{X(s+t)-X(s)=j-i\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

当$j<i$时由过程增量仅取非负整数，

故 $p_{ij}(s,t)=0$

$$\therefore p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)=\begin{cases}e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j\ge i,t>0\\ 0, & j<i\end{cases}$$

与s无关，所以是齐次的。

6

§5.2柯尔莫哥洛夫微分方程

一.连续性条件(正则性条件)

规定 $\lim\limits_{t\to0^+} p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\ne j\end{cases}$ 或 $\lim\limits_{t\to0^+}P(t)=I$

称此为连续性条件(正则性条件)

说明：过程刚进入某状态不可能立即又跳跃到另一状态，这正好说明一个物理系统要在有限时间内发生无限多次跳跃，从而消耗无穷多的能量这是不可能的，亦即经过很短时间系统的状态几乎是不变的。

定理：设连续参数齐次马氏链满足正则性条件，则：

(1) $p_{ii}(t)>0$，$t\ge0$;

(2)若有t_0使$p_{ij}(t_0)>0$，则对一切$t>t_0$均有$p_{ij}(t)>0$;

(3)$p_{ij}(t)$是$[0,+\infty)$上的一致连续函数。

证:(1) $\because\ p_{ii}(t)=p_{ii}\left(\frac{t}{n}+\frac{t}{n}+\cdots+\frac{t}{n}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}\left(\frac{t}{n}\right)p_{ki}\left(\frac{n-1}{n}t\right)$

$$\ge p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\cdot p_{ii}\left(\frac{n-1}{n}t\right)\ge\cdots\ge\left[p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n>0\quad(n>N)$$

$$\because\ p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}1$$

(2) $p_{ij}(t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t_0)p_{kj}(t-t_0)\ge p_{ij}(t_0)p_{jj}(t-t_0)>0$

(3)证：设$h>0$,

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_{r\in I}p_{ir}(h)\cdot p_{rj}(t)-p_{ij}(t)$$
$$=p_{ii}(h)p_{ij}(t)-p_{ij}(t)+\sum_{r\ne i}p_{ir}(h)\cdot p_{rj}(t)$$
$$=-[1-p_{ii}(h)]p_{ij}(t)+\sum_{r\ne i}p_{ir}(h)\cdot p_{rj}(t)$$
$$\therefore\ p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\ge-[1-p_{ii}(h)]p_{ij}(t)\ge-[1-p_{ii}(h)]$$
$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\le\sum_{r\ne i}p_{ir}(h)\cdot p_{rj}(t)$$
$$\le\sum_{r\ne i}p_{ir}(h)=1-p_{ii}(h)$$
$$\therefore\ \left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right|\le1-p_{ii}(h)$$

对于$h<0$，同样有：

$$p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)$$
$$=\sum_{r\in I}p_{ir}(-h)\cdot p_{rj}(t+h)-p_{ij}(t+h)$$
$$=p_{ii}(-h)\cdot p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t+h)+\sum_{r\ne i}p_{ir}(-h)\cdot p_{rj}(t+h)$$
$$=-[1-p_{ii}(-h)]p_{ij}(t+h)+\sum_{r\ne i}p_{ir}(-h)\cdot p_{rj}(t+h)$$

故有: $p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\ge-[1-p_{ii}(-h)]p_{ij}(t+h)$

$$\ge-[1-p_{ii}(-h)]$$
$$p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\le\sum_{r\ne i}p_{ir}(-h)\cdot p_{rj}(t+h)$$
$$\le\sum_{r\ne i}p_{ir}(-h)=1-p_{ii}(-h)$$

$$\therefore\ \left|p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\right|\le1-p_{ii}(-h)$$

综合有: $\left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right|\le1-p_{ii}(|h|)$

由正则性条件: $\lim\limits_{h\to0}\left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right|=0$

即$p_{ij}(t)$关于t是一致连续的。

二.**Q**矩阵

对连续参数马氏链而言，担当一步转移概率角色的是转移强度，它是用转移概率函数在**0**点的导数来定义的。

定理：设$p_{ij}(t)$是齐次马尔可夫过程的转移概率，则下列极限存在：

$$\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}=\lim_{h\to0^+}\frac{p_{ij}(h)-p_{ij}(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{p_{ij}(h)-\delta_{ij}}{h}=q_{ij}$$

即: (1) $\left.\frac{dp_{ii}(t)}{dt}\right|_{t=0}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}=q_{ii}$

(2) $\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{p_{ij}(h)}{h}=q_{ij}<\infty\qquad i\ne j$

也即：$\begin{cases} p_{ii}(h) = 1 + q_{ii}h + o(h) \\ p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h) \end{cases}$

称q_{ij}为齐次马尔可夫过程从状态i到状态j的转移速率或跳跃强度，定理的概率含义为：在一个长为h的时间区间内，从状态i转移到其它状态的概率为$1 - p_{ii}(h)$等于$-q_{ii}h + o(h)$；而由状态i转移到状态j的概率$p_{ij}(h)$等于$q_{ij}h + o(h)$。

推论：对有限齐次马尔可夫过程，有

$$-q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$$

称该马尔可夫过程为保守的。

证：$\because \sum_{j \in I} p_{ij}(h) = 1 \Rightarrow 1 - p_{ii}(h) = \sum_{j \neq i} p_{ij}(h)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

即 $-q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$ (状态空间有限)

对于状态空间无限的齐次马尔可夫过程一般只有

$$-q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} q_{ij} \geq 0$$

若状态空间为$I = \{1, 2, \cdots, N\}$有限，

记 $$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \cdots & \cdots & & \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{pmatrix}$$

称Q为转移速率矩阵，简称Q矩阵。

若$Q = (q_{ij})$满足$\forall i \in I, \sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} < \infty$

称Q为保守矩阵，对应的马尔可夫过程为保守的。

易见$\lim_{h \to 0^+} \frac{P(h) - I}{h} = Q$

$\because p_{ij}(h) \geq 0$，$h > 0$，$\therefore q_{ij} \geq 0$，非负$(i \neq j)$

$\frac{p_{ii}(h) - 1}{h} \leq 0$，$\therefore q_{ii} \leq 0$,(主对角线上元素为负)

又$\sum_{j=1}^{N} q_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(h) - \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} \right)$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(1 - 1) = 0$

$\therefore Q$矩阵主对角线上元素为负，其余元素非负，而各行元素之和都为0。

三.前进方程与后退方程

定理：设$\{X(t), t \geq 0\}$，$I = \{1, 2, \cdots, N\}$为连续参数有限马氏链。

则 $\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{r \in I} p_{ir}(t) q_{rj}$ 称为前进方程

$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{r \in I} q_{ir} p_{rj}(t)$ 称为后退方程

或 $$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q = QP(t) \Rightarrow P(t) = e^{Qt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Qt)^j}{j!}$$

证：令$h > 0$，$\frac{P(t+h) - P(t)}{h}$

$$= \begin{cases} \frac{P(t)P(h) - P(t)}{h} = P(t)\frac{P(h) - I}{h} \to P(t)Q \\ \frac{P(h)P(t) - P(t)}{h} = \frac{P(h) - I}{h} P(t) \to QP(t) \end{cases}$$

对$h < 0$，$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(t) - P(t+h)}{-h}$

$$= \begin{cases} \frac{P(t+h)P(-h) - P(t+h)}{-h} = P(t+h)\frac{P(-h) - I}{-h} \to P(t)Q \\ \frac{P(-h)P(t+h) - P(t+h)}{-h} = \frac{P(-h) - I}{-h} P(t+h) \to QP(t) \end{cases}$$

令$h \to 0$，取极限得：$\dfrac{dP(t)}{dt} = P(t)Q = QP(t)$

在实际应用中，当固定最后所处状态j，研究$p_{ij}(t)$时$(i = 0,1,\cdots,N)$，采用向后方程较方便，解出$p_{rj}(t)$，$r \in I$；当固定状态i，研究$p_{ij}(t)$时，$(j = 0,1,2,\cdots,N)$则采用向前方程较方便，解出$p_{ir}(t), r \in I$。

注：虽然前进方程和后退方程在形式上有所不同，但两者的解都是同一的，费勒在1940年已证明。

推论：绝对概率所满足的方程：

$$p_j'(t) = \sum_{r\in I} p_r(t) q_{rj} \qquad j \in I$$

$$p_j'(t) = \left[\sum_{i\in I} p_i(0) p_{ij}(t)\right]' = \sum_{i\in I} p_i(0) p_{ij}{}'(t)$$

$$= \sum_{i\in I} p_i(0)\cdot\left[\sum_{r\in I} p_{ir}(t) q_{rj}\right] = \sum_{r\in I}\left[\sum_{i\in I} p_i(0) p_{ir}(t)\right] q_{rj}$$

$$= \sum_{r\in I} p_r(t) q_{rj}$$

如果令：$\bar{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \cdots, p_N(t))$

$\bar{p}(0) = (p_0(0), p_1(0), \cdots, p_N(0))$

则可表示为：$\dfrac{d\bar{p}(t)}{dt} = \bar{p}(t)' = \bar{p}(t)Q$

例：设有一参数连续，状态离散的马尔可夫过程$\{X(t), t \ge 0\}$，状态空间为$I = \{1,2,\cdots,N\}$，当$i \ne j$，时$q_{ij} = 1$，$i, j = 1,2,\cdots,N$，当$i = 1,2,\cdots,N$时，$q_{ii} = -(N-1)$，求$p_{ij}(t)$。

解：由前进方程：

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{r=1}^{N} p_{ir}(t) q_{rj} = -(N-1)p_{ij}(t) + \sum_{\substack{r\ne j\\ r\in I}} p_{ir}(t)$$

又$\because \sum_{r\in I} p_{ir}(t) = 1 \Rightarrow \sum_{\substack{r\ne j\\ r\in I}} p_{ir}(t) = 1 - p_{ij}(t)$

$$\therefore \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -(N-1)p_{ij}(t) + 1 - p_{ij}(t)$$

$$= -Np_{ij}(t) + 1 \Rightarrow p_{ij}(t) = ce^{-Nt} + \frac{1}{N}.$$

$(i, j = 1,2,\cdots,N)$

利用初始条件：$p_{ii}(0) = 1$，$p_{ij}(0) = 0 (i \ne j)$

$\therefore$当$i = j$时，$c = 1 - \dfrac{1}{N}$，$p_{ii}(t) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)e^{-Nt} + \dfrac{1}{N}$

而当$i \ne j$时$c = -\dfrac{1}{N}$，$p_{ij}(t) = \dfrac{1}{N}\left(1 - e^{-Nt}\right)$

四.状态分类与平稳分布

1.状态关系

可达：$i \to j$，$\exists t \ge 0$，使$p_{ij}(t) > 0$；若对一切$t > 0$，$p_{ij}(t) = 0$，则称i不可达j，$i \not\to j$。

互通：$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow i \to j$，$j \to i$。

若所有状态都是互通的，则称此马尔可夫链为不可约的。

2.离散骨架：为了与离散参数情形进行比较并利用其有关结果，对连续参数马氏链$\{X(t)\}$及给定的$h > 0$，考虑由此派生出来的随机序列$\{X(nh)\}$易见这一序列是一个离散参数马氏链，如果把$\{p_{ij}(h)\}$看作是马氏链的一步转移概率的话，则它的n步转移概率为$p_{ij}(nh)$。通常称离散马氏链$X(nh)$为$X(t)$的步长为h的离散骨架。

$\because$ 对所有$h>0$，及正整数n及所有$i\in I$，$p_{ii}(nh)>0$，
则对每个离散骨架$X(nh)$，每个状态i都是非周期的，
所以对$\forall i,j\in I,\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(nh)=\pi_{ij}$总存在，加上$p_{ij}(t)$
在$[0,+\infty)$上的一致连续性，可以得到$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(t)$总存在。

3.状态的类型(常返性)

定义：如果$\int_0^{+\infty} p_{ii}(t)dt=\infty$，则称状态$i$是常返的，
否则称状态i是非常返的；设i常返，且$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)>0$，
则称i为正常返，若$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)=0$，则称$i$为零常返的。

定理：i为常返的充要条件是对 某一个步长h的
离散骨架$\{X(nh)\}$对i来说是常返的。

即有:$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)dt=\infty \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh)=\infty$

4.$p_{ij}(t)$的遍历性及平稳分布

(1)引理：当$t\to\infty$时，$p_j(t)$趋于一个与初始分布
$p_j(0)$无关的极限，其充要条件是相应的条件概率
$p_{ij}(t)$对任何i趋于同一极限。

$\because p_j(t)=\sum\limits_{i\in I} p_i(0)p_{ij}(t)$

若$p_j(t)\to\pi_j$,取$p_i(0)=1,p_k(0)=0,k\neq i\in I$

则$p_j(t)=p_{ij}(t)$，当$t\to\infty,\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=\pi_j$

若$t\to\infty,\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j,\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\sum p_i(0)p_{ij}(t)=\pi_j$

$\{\pi_j,j\in I\}$为$\{X(t),t\geq 0\}$的极限分布。

(2)平稳分布

若概率分布$\pi=\{\pi_j,j\in I\}$满足$\pi=\pi P(t)$，$\forall t\geq 0$，
称π为$\{X(t),t\geq 0\}$的平稳分布。

(3)$p_{ij}(t)$的渐近性质

定理：设连续时间的马尔可夫链是不可约的，
则有下列性质：

①若它是正常返的，则极限$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$存在且等于
$\pi_j\geq 0,j\in I$，这里π_j是$\sum\limits_{i\in I}\pi_i q_{ij}=0,\sum\limits_{j\in I}\pi_j=1$的唯一
非负解，此时称$\{\pi_j,j\in I\}$是该过程的平稳分布，
并且有$\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=\pi_j$

②若它是零常返或非常返的，则
$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=0,i,j\in I$

由$\pi_j=\sum\limits_{i\in I}\pi_i p_{ij}(t)$对$t$求导

$$0=\sum_{i\in I}\pi_i p'_{ij}(t)=\sum_{i\in I}\pi_i\sum_{r\in I}p_{ir}(t)q_{rj}$$
$$=\sum_{r\in I}\left(\sum_{i\in I}\pi_i p_{ir}(t)\right)q_{rj}=\sum_{r\in I}\pi_r q_{rj}$$

或写成　$\pi Q=0$

定理：不可约链是正常返的充要条件是它存在
平稳分布，且此时平稳分布就等于极限分布。

例：考虑两个状态的连续时间马氏链，在转移
到状态1之前马氏链在状态0停留的时间是参数
为λ的指数变量，而在回到状态0之前，它停留
在状态1的时间是参数为μ的指数变量。显然该
马氏链是一个齐次马氏链。

其状态转移概率为：

$\begin{cases} p_{01}(h)=\lambda h+0(h) \\ p_{10}(h)=\mu h+0(h)\end{cases}$ 由指数分布的无后效性得到。

理由如下：设正常工作为0状态，故障为1状态。
设器件寿命X服从参数为λ的指数分布。

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

则器件在$[0,t)$正常工作，即寿命超过t的概率为：

$$P\{X>t\}=\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda t}$$

已知器件用了t小时，器件寿命超过$t+h$，
即在$[t,t+h)$器件不坏的概率为：

$$p_{00}(h)=P\{X>t+h/X>t\}$$
$$=\frac{P\{X>t+h,X>t\}}{P\{X>t\}}=\frac{P\{X>t+h\}}{P\{X>t\}}$$
$$=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda h}=1-\lambda h+0(h)$$

与起始时间t无关

$$p_{00}(h)=1-\lambda h+0(h)\qquad 0\text{状态}\to 0\text{状态}$$
$$p_{01}(h)=\lambda h+0(h)\qquad 0\text{状态}\to 1\text{状态}$$
$$p_{11}(h)=1-\mu h+0(h)$$
$$p_{10}(h)=1-p_{11}(h)=\mu h+0(h)$$

$$q_{00}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{00}(h)-1}{h}=-\lambda\qquad q_{11}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{11}(h)-1}{h}=-\mu$$
$$q_{01}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{01}(h)}{h}=\lambda\qquad q_{10}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{10}(h)}{h}=\mu$$

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

由柯尔莫哥洛夫前进方程：

$$P'(t)=P(t)Q$$
$$\begin{pmatrix}p'_{00}(t) & p'_{01}(t)\\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{00}(t) & p_{01}(t)\\ p_{10}(t) & p_{11}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$
$$\therefore p'_{00}(t)=\mu p_{01}(t)-\lambda p_{00}(t)$$
$$=-(\lambda+\mu)p_{00}(t)+\mu\quad (p_{01}(t)=1-p_{00}(t))$$
$$e^{(\lambda+\mu)t}[p'_{00}(t)+(\lambda+\mu)p_{00}(t)]=\mu e^{(\lambda+\mu)t}$$
$$\frac{d}{dt}\left[e^{(\lambda+\mu)t}p_{00}(t)\right]=\mu e^{(\lambda+\mu)t}$$
$$\therefore e^{(\lambda+\mu)t}p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t}+c$$

由 $p_{00}(0)=1\Rightarrow c=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

$$\therefore p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

若记 $\lambda_0=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu},\mu_0=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$

则 $p_{00}(t)=\mu_0+\lambda_0 e^{-(\lambda+\mu)t}$

类似由前进方程 $p'_{01}(t)=\lambda p_{00}(t)-\mu p_{01}(t)$

解得： $p_{01}(t)=\lambda_0\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$

由对称性知： $p_{11}(t)=\lambda_0+\mu_0 e^{-(\lambda+\mu)t}$

$p_{10}(t)=\mu_0\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$

转移概率的极限为:

$$\lim_{t\to\infty}p_{00}(t)=\mu_0=\lim_{t\to\infty}p_{10}(t)$$
$$\lim_{t\to\infty}p_{11}(t)=\lambda_0=\lim_{t\to\infty}p_{01}(t)$$

由此可见，当$t\to\infty$时，$p_{ij}(t)$的极限存在且与i无关，
所以平稳分布为：$\pi_0=\mu_0$，$\pi_1=\lambda_0$
若取初始分布为平稳分布：$\bar{p}(0)=(\mu_0,\lambda_0)$
则绝对分布：$\bar{p}(t)=(\mu_0,\lambda_0)$

§ 5.3 生灭过程

1.生灭过程的定义：

定义：设连续参数齐次马氏链$\{X(t),\ t\geq 0\}$的状态空间为$I=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为$p_{ij}(t)$

如果：
$$\begin{aligned}
&p_{i,i+1}(h)=\lambda_i h+0(h)\ (\lambda_i>0),\\
&p_{i,i-1}(h)=\mu_i h+0(h)\quad(\mu_i>0,\mu_0=0)\\
&p_{ii}(h)=1-(\lambda_i+\mu_i)h+0(h)\\
&p_{ij}(h)=0(h)\qquad |i-j|\geq 2
\end{aligned}$$

则称$\{X(t),t\geq 0\}$为生灭过程。

λ_i为出生率，μ_i为死亡率。

若$\lambda_i=i\lambda$，$\mu_i=i\mu$,(λ，μ是正常数)

则称$\{X(t),\ t\geq 0\}$为线性生灭过程。

若$\mu_i\equiv 0$，则称$\{X(t),\ t\geq 0\}$为纯生过程；

$\lambda_i\equiv 0$则称$\{X(t),\ t\geq 0\}$为纯灭过程。

生灭过程含义：$X(t)$表示一个生物群体在t时刻的大小，它在很短的时间h内(不计高阶无穷小)，群体只能生1死1或不变，且其概率正比于区间长度。

对于有限生灭过程$I=\{0,1,2,\cdots,N\}$

易见
$$\begin{aligned}
&q_{i,i+1}=\lambda_i\quad i=0,1,\cdots,N-1\quad \lambda_N=0\\
&q_{i,i-1}=\mu_i\quad i=1,2,\cdots,N\quad \mu_0=0\\
&q_{i,i}=-(\lambda_i+\mu_i)\quad i=0,1,\cdots,N\\
&q_{ij}=0,\ |i-j|\geq 2
\end{aligned}$$

$$Q=\begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & & \\
\mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & \cdots & & \\
 & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \mu_{N-1} & & -(\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}) & \lambda_{N-1}\\
 & & & & \mu_N & -\mu_N
\end{pmatrix}$$

2.生灭过程的向前，向后方程

由前进方程

$$\begin{cases}
p'_{ij}(t)=\sum\limits_r p_{ir}(t)q_{rj}\\
=\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t)+\mu_{j+1}p_{i,j+1}(t)\\
i,j\in I,\text{这里}r=j-1,j,j+1\text{其余}q_{rj}=0\\
p'_{io}(t)=-\lambda_0 p_{i0}(t)+\mu_1 p_{i1}(t)\\
p'_{iN}(t)=-\mu_N p_{iN}(t)+\lambda_{N-1}P_{i,N-1}(t)
\end{cases}$$

向后方程：
$$\begin{cases}
p'_{ij}(t)=\lambda_i p_{i+1,j}(t)-(\lambda_i+\mu_i)p_{ij}(t)+\mu_i p_{i-1,j}(t)\\
p'_{0j}(t)=\lambda_0 p_{0j}(t)+\lambda_0 p_{0j}(t)
\end{cases}$$

类似向前方程，绝对概率也有如下方程：

$$\begin{cases}
p'_j(t)=-(\mu_j+\lambda_j)p_j(t)+\lambda_{j-1}p_{j-1}(t)+\mu_{j+1}p_{j+1}(t)\\
p'_0(t)=-p_0(t)\lambda_0+\mu_1 p_1(t)
\end{cases}$$

3.平稳分布 $\sum\limits_r \pi_r q_{rj}=0,\sum\limits_r \pi_r=1$

$$\begin{cases}
-\lambda_0\pi_0+\mu_1\pi_1=0\\
\lambda_0\pi_0-(\lambda_1+\mu_1)\pi_1+\mu_2\pi_2=0\\
\cdots\\
\lambda_{j-1}\pi_{j-1}-(\lambda_j+\mu_j)\pi_j+\mu_{j+1}\pi_{j+1}=0\\
\vdots\\
\lambda_{N-1}\pi_{N-1}-\pi_N\mu_N=0
\end{cases}$$

用递推方法:

$$\Rightarrow \pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

$$\pi_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$$

$$\cdots$$

$$\pi_N=\frac{\lambda_{N-1}}{\mu_N}\pi_{N-1}=\cdots=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{N-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}\pi_0$$

利用 $\sum_r \pi_r = 1 \Rightarrow \pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdots\mu_j}\right)^{-1}$

$$\pi_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdots\mu_j}\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdots\mu_j}\right)^{-1}$$

由此可知，若状态空间无限，则平稳分布存在的充要条件是：

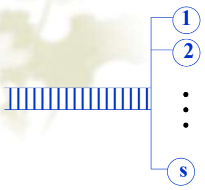
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdots\mu_j} < \infty \qquad \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \qquad i,j\in I$$

当$t\to\infty$，$p_{ij}(t)=\pi_j$，　$i,j\in I$

即平稳分布可作为转移概率当t充分大时的近似。

例：$M/M/S$排队系统(等待制服务系统)

顾客按参数为λ的泊松过程来到一个有S个服务员的服务站，即相继来到之间的时间是均值为$1/\lambda$的独立指数随机变量，每一顾客一来到，如有服务空闲，则直接进行服务，否则此顾客加入排队行列，当一个服务员结束对一位顾客的服务时，顾客就离开服务系统，排队中的下一个顾客进入服务，假定相继的服务时间是独立的指数随机变量，均值为$1/\mu$，如以$X(t)$记时刻t系统中的人数，则$\{X(t),\ t\ge 0\}$是生灭过程。



λ – Poisson来到，

μ – 指数分布

s – 服务员个数

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & 1\le i<s \quad i=1,2,\cdots,s-1 \\ s\mu, & i>s \quad i=s \quad s+1,\cdots \end{cases}$$

$\lambda_i = \lambda,\ i=0,1,\cdots$

①顾客到达过程是泊松过程，到达率为λ；

②有s个服务人员；

③每个服务人员对顾客的服务时间均为指数分布的随机变量，平均服务时间$\frac{1}{\mu}$；

④当s个服务人员均在服务时，再到达的顾客参加排队，且按先到先服务原则，如服务员空闲，则立刻接受服务；

⑤顾客的到达过程和各个服务人员对顾客的服务时间均相互独立。

$P_k(t) = P\{X(t)=k\}$

基本事件：$(t,t+h)$来到一个的概率为：

$$\lambda h + 0(h)$$

来到二个或二个以上的概率为：

$$0(h)$$

$\because$ 在$(t,t+h)$内服务完一个的概率

$$P\{z\le h\} = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + 0(h)$$

继续服务的概率为：

$$1 - \mu h + 0(h)$$

$\therefore$ 在$(t,t+h)$中，k个人在服务，指定的一个服务员服务完一个而其它未完成的概率为：

$$\mu h(1-\mu h)^{k-1} + 0(h) = \mu h + 0(h)$$

则任意一个服务员完成而其他未完成的概率为：

$$k\mu h + 0(h)$$

完成二个以上的概率为：

$$\sum_{i=2}^{k} C_k^i (\mu h)^i (1-\mu h)^{k-i} = 0(h)$$

$(t, \ t+h)$ 增1 / 不变 $\longrightarrow$ 生灭过程 / 减1

$$p_{i,i+1}(h)=\lambda h+0(h)$$

$$p_{i,i-1}(h)=\begin{cases} i\mu h+0(h), & i<s \\ s\mu h+0(h), & i\ge s \end{cases}$$

$$p_{ii}(h)=\begin{cases} 1-\lambda h-i\mu h+0(h), & i<s \\ 1-\lambda h-s\mu h+0(h), & i\ge s \end{cases}$$

$$p_{ij}(h)=0(h) \qquad |i-j|\ge 2$$

$$q_{i,i+1}=\lambda$$

$$q_{i,i-1}=\begin{cases} i\mu, & i<s \\ s\mu, & i\ge s \end{cases}$$

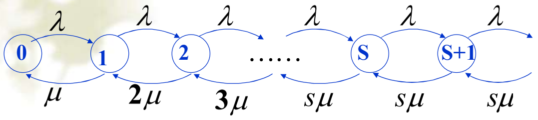
$$q_{ii}=\begin{cases} -\lambda-i\mu, & i<s \\ -\lambda-s\mu, & i\ge s \end{cases}$$

$$q_{ij}=0, \qquad |i-j|\ge 2$$

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & & \\ & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & & \\ & & & & & \\ & & & s\mu & -\lambda-s\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

$\cdots$

状态转移图如下：



平稳分布：

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0+\mu\pi_1=0 \\ \lambda\pi_{k-1}-(\lambda+k\mu)\pi_k+(k+1)\mu\pi_{k+1}=0 & 1\le k\le s-1 \\ \lambda\pi_{k-1}-(\lambda+s\mu)\pi_k+s\mu\pi_{k+1}=0 & k\ge s \end{cases}$$

$$\pi_k=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\pi_0, \qquad 1\le k<s-1$$

$$\pi_k=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{s!s^{k-s}}\pi_0, \qquad k\ge s$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=1. \qquad \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\pi_0+\sum_{k=s}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{s!s^{k-s}}\pi_0=1$$

$$\pi_0^{-1}=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}+\frac{s^s}{s!}\sum_{k=s}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k$$

令$\rho=\dfrac{\lambda}{s\mu}$

来到强度（λ）

服务能力（$s\mu$）

来往强度（ρ）

存在平稳分布 $\Leftrightarrow$ $\rho<1$(稳态系统)

特殊情况，在$M/M/1$排队系统中，

$$\lambda_i=\lambda, \mu_i=\mu.$$

将$s=1$代入上面即得：

$$\pi_0^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}\Rightarrow\pi_0=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

$$\Rightarrow\pi_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

①要平稳分布存在：$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$，顾客按速率$\lambda$到来

且以速率μ受到服务；

②当$\lambda > \mu$时，顾客到来的速率高于他受到服务的速率，排队的长度超于无穷；

③当$\lambda = \mu$时，零常返，无平稳分布存在。

排队问题常研究的四个问题，求在稳态下的几个数量指标。

(1)系统的平均队长

设到达平稳后，系统中出现k个顾客的概率为π_k

故系统中顾客的平均数为：

$$L = \lim_{t\to\infty} E[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

由$\lim_{t\to\infty} E\left[X^2(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\pi_k$

$$= \rho\left[\frac{2}{(1-\rho)^2} - \frac{1}{1-\rho}\right] \Rightarrow \lim_{t\to\infty} D[X(t)] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

(2)平均等待的顾客数

当系统中有个k人，其中一人被服务，$(k-1)$人排队等候时，排队等待的顾客平均数为：

$$L_Q = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k - \sum_{k=1}^{\infty}\pi_k$$

$$= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - (1-\pi_0) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

(3)顾客在系统中所花费时间的平均值W

若某顾客到达服务点时系统中已有k个人，其中一人在被服务，$k-1$个人在等待，由于服务时间服从指数分布，每个顾客的服务时间均值为$\frac{1}{\mu}$，且相互独立。

此顾客平均等候时间为$\frac{k}{\mu}$(无记忆性)，再加上本人服务时间$\frac{1}{\mu}$，此顾客花费时间的平均值为$\frac{k+1}{\mu}$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} E\{\text{某顾客在系统中花费时间}/\text{已有}k\text{个顾客在系统中}\}\cdot\pi_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{1}{\mu}\pi_k = \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda}{\mu-\lambda}+1\right] = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

(4)顾客排队等候所花费的平均时间W_Q

$$W_Q = \sum_{k=0}^{\infty} E\{\text{顾客排队等候时间}/\text{已有}k\text{个顾客在系统中}\}\cdot\pi_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{\mu}\pi_k = \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

排队服务中的基本关系式：

① $$L=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\lambda W$$

系统中顾客平均数等于顾客到达率乘以顾客在系统中花费的时间平均值。

② $$L_Q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\lambda W_Q$$

在排队等候的顾客平均数等于顾客到达率乘以顾客在排队等候的时间平均值。

(5)费用最优参数

考虑最优服务率的问题设每一顾客在系统一小时损失c_1元，服务机构每小时费用正比于μ，比例系数为c_2，记$R(\mu)$为每小时费用，则系统平均每小时费用损失为：

$$E[R(\mu)]=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}c_1+c_2\mu$$

如何选取最优的μ^*,使$ER(\mu^*)=\min ER(\mu)$

由 $$\frac{dER(\mu)}{d\mu}=0\Rightarrow \mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_2}}$$

例 机器维修问题

设有m台机床，s个维修工人$(s<m)$，机床或者工作，或者损坏等待修理。机床损坏后，空着的维修工人立即来修理，若维修工人不空，则机床按先坏先修排队等待维修。

假定在h时间内，每台机床从工作转到损坏的概率为：$\lambda h+o(h)$，每台修理的机床转到工作的概率为：$\mu h+o(h)$。用$X(t)$表示时刻t损坏的机床台数，则$\{X(t),\ t\ge 0\}$是连续时间马氏链，其状态空间为：$I=\{0,1,\cdots,m\}$

设时刻t有i台机床损坏，则在$(t,t+h)$内又有一机床损坏的概率，在不计高阶无穷小时，它应等于原来正在工作的$m-i$台机床中，在$(t,t+h)$内恰有一台损坏的概率，于是该过程为一生灭过程。

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(h)=(m-i)\lambda h+0(h), & i=0,1,\cdots,m-1 \\ p_{i,i-1}(h)=\begin{cases} i\mu h+0(h), & 1\le i\le s \\ s\mu h+0(h), & s<i\le m \end{cases} & \\ p_{i,i}(h)=\begin{cases} 1-i\mu h-(m-i)\lambda h+0(h), & 1\le i\le s \\ 1-s\mu h-(m-i)\lambda h+0(h), & s<i\le m \end{cases} & \\ p_{ij}(h)=0(h), & |i-j|\ge 2 \end{cases}$$

$$\lambda_i=(m-i)\lambda,\ \ i=0,1,\cdots,m.$$

$$\mu_i=\begin{cases} i\mu, & 1\le i\le s. \\ s\mu, & s<i\le m \end{cases}$$

$$q_{i,i+1}=(m-i)\lambda$$

$$q_{i,i+1}=\begin{cases} i\mu, & i<s \\ s\mu, & i\ge s \end{cases}$$

$$q_{i,i}=\begin{cases} -(m-i)\lambda-i\mu, & i<s \\ -(m-i)\lambda-s\mu, & i\ge s \end{cases}$$

$$Q=\begin{pmatrix} -m\lambda & m\lambda & \cdots & & \\ \mu & -(m-1)\lambda-\mu & (m-1)\lambda & & \\ & & & (m-i+1)\lambda & \\ & & i\mu & -(m-i)\lambda-i\mu & (m-i)\lambda \\ & & & (i+1)\mu & \end{pmatrix}$$

平稳分布：

$$\begin{cases} m\lambda\pi_0=\mu\pi_1 \\ (m-i)\lambda\pi_i+i\mu\pi_i=(m-i+1)\lambda\pi_{i-1}+(i+1)\mu\pi_{i+1}, & 1\le i<s \\ (m-i)\lambda\pi_i+s\mu\pi_i=(m-i+1)\lambda\pi_{i-1}+s\mu\pi_{i+1}, & s\le i<m \end{cases}$$

$\pi_1 = \frac{m\lambda}{\mu}\pi_0.$

$(m-i)\lambda\pi_i = (i+1)\mu\pi_{i+1} \qquad 1 \le i < s$

$(m-i)\lambda\pi_i = s\mu\pi_{i+1} \qquad s \le i < m$

$$\pi_{i+1} = \frac{(m-i)\lambda}{(i+1)\mu}\pi_i = \frac{(m-i)(m-i+1)\cdots m}{(i+1)i\cdots 1}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+1}\pi_0, (1 \le i < s)$$

$$\pi_{i+1} = \frac{(m-i)\lambda}{s\mu}\pi_i = \frac{(m-i)(m-i+1)\cdots m}{s^{i+1-s}\cdot s(s-1)\cdots 1}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+1}\pi_0, (s \le i < m)$$

再根据 $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_m$

或直接由书中5.14式得平稳分布。

当已知m、λ、μ可由上述平稳分布计算出在安排s个维修工人时，系统中损坏机床的平均数：

$$L = \sum_{k=0}^{m} k\pi_k$$

同样可计算等待维修机床的平均数：

$$L_Q = \sum_{k=0}^{m}(k-1)\pi_k;$$

机器的损失系数为：

$$\frac{L_Q}{m} = \frac{\text{等待维修机床平均数}}{\text{机器总数}}$$

作业：**5.2，5.3，5.4**