证明题：

（1） $f(x)$ 为凸集 $D \subset R^n$ 上的函数，上图 $epi(f)=\{(x,y)\,|\,x\in D, y\in R, y\geq f(x)\}$，证明 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $epi(f)$ 为凸集。

证明：充分性：对于任意的 $x_1, x_2 \in D, \alpha\in[0,1]$，由 $epi(f)$ 的定义，$(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2))\in epi(f)$，而 $epi(f)$ 为凸集，得

$\alpha(x_1, f(x_1))+(1-\alpha)(x_2, f(x_2))\in epi(f)$，即

$(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2))\in epi(f)$，

因此 $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\geq f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$，从而 $f(x)$ 为凸函数。

必要性：对于任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in epi(f), \alpha\in[0,1]$，有

$y_1\geq f(x_1), y_2\geq f(x_2)$

于 $f(x)$ 为凸函数，有 $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\leq \alpha y_1+(1-\alpha)y_2$，

所以 $(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, \alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\in epi(f)$，即

$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\in epi(f)$，

$epi(f)$ 为凸集。

(2)考虑规划问题：$\begin{array}{ll}\min & f(x)\\ s.t. & c_i(x)\leq 0\end{array}$，其中，$\boldsymbol{f(x), c_i(x)(i=1,2,\cdots,m): R^n\to R}$ 是凸函数，证明：（1）该问题的可行域是凸集；（2）该问题的最优解的集合 $\boldsymbol{A}$ 是凸集。

证明：（1）设 $\boldsymbol{D_i=\{x\,|\,c_i(x)\leq 0\}}$，可行域 $\boldsymbol{D=\bigcap_{i=1}^m D_i}$。

对于任意 $\boldsymbol{x_1, x_2\in D_i=\{x\,|\,c_i(x)\leq 0\}}$，任意 $\alpha\in[0,1]$，有

$\boldsymbol{c_i(x_1)\leq 0, c_i(x_2)\leq 0}$，根据 $\boldsymbol{c_i(x)}$ 是凸函数

$\boldsymbol{c_i(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq \alpha c_i(x_1)+(1-\alpha)c_i(x_2)\leq 0}$，

因此 $\boldsymbol{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in D_i}$。

凸集的交集是凸集，因此 $\boldsymbol{D=\bigcap_{i=1}^m D_i}$ 为凸集。

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为最优解的集合，若 A 不是空集，任取 $\boldsymbol{x_1, x_2\in A, \alpha\in[0,1]}$，有 $\boldsymbol{x_1, x_2\in D}$。由于 $\boldsymbol{D}$ 是凸集，$\boldsymbol{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in D}$。$\boldsymbol{f(x)}$ 是凸函数，

$\boldsymbol{f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)}$。

$\boldsymbol{x_1, x_2}$ 都是最优解，因此 $\boldsymbol{f(x_1)=f(x_2)}$ 为最优函数值。得

$\boldsymbol{f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)=f(x_1)}$

$\boldsymbol{f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=f(x_1)}$，因此 $\boldsymbol{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2}$ 也是最优解，从而 A 为凸集

(3)设 $z^*, s^*$ 分别为下列两个问题 $(I)\begin{array}{ll} & \min c^Tx\\ s.t. & Ax=b\\ & x\geq 0\end{array}$ $(II)\begin{array}{ll} & \min c^Tx\\ s.t. & Ax=b+d\\ & x\geq 0\end{array}$ 的最优值。$y^*$ 是(I)的对偶问题的最优解，证明 $z^*+y^{*T}d\leq s^*$。

证明：（I）与（II）的对偶规划分别为 $(DI)\begin{array}{ll} & \max b^Ty\\ s.t. & A^Ty\leq c\end{array}$ $(DII)\begin{array}{ll} & \max (b+d)^Ty\\ s.t. & A^Ty\leq c\end{array}$

（I）的最优值与（DI）的最优值相同，得 $z^*=b^Ty^*$.

$y^*$ 是（DI）对偶规划的最优解，从而是（DII）的可行解。$y^*$ 在（DII）的目标函数值不大于最优值，$(b+d)^T y^* \le s^*$。因此 $z^* + y^{*T} d \le s^*$。

（4）设 $\overline{x}, \overline{y}$ 分别为下列两个问题

$$
\begin{array}{llll}
 & \min c^T x & & \max y^T b \\
(I)\, s.t. & Ax \ge b & (II)\, s.t. & y^T A \le c^T \\
 & x \ge 0 & & y \ge 0
\end{array}
$$

的可行解。证明 $c^T \overline{x} \ge \overline{y}^T b$。

证明：由题意，$A\overline{x} \ge b, \overline{x} \ge 0, \overline{y}^T A \le c^T, \overline{y} \ge 0,$

由 $A\overline{x} - b \ge 0, \overline{y} \ge 0$ 得 $\overline{y}^T (A\overline{x} - b) \ge 0$，$\overline{y}^T A\overline{x} \ge \overline{y}^T b$，

由 $\overline{x} \ge 0, \overline{y}^T A - c^T \le 0$ 得 $(\overline{y}^T A - c^T)\overline{x} \le 0$，$\overline{y}^T A\overline{x} \le c^T \overline{x}$，所以 $c^T \overline{x} \ge \overline{y}^T b$。

计算题

一、（18％）（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$
\begin{aligned}
\mathbf{min}\ & -3\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{x}_2 \\
\boldsymbol{s.t.}\ & 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \le 4 \\
& \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \le 3 \\
& \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量 $\boldsymbol{x}_1$ 写出对应的割平面方程。

解：（1）该线性规划的标准型为：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{min}\ & -3\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{x}_2 \\
\boldsymbol{s.t.}\ & 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 4 \\
& \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \quad + \boldsymbol{x}_4 = 3 \\
& \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

以 $p_3, p_4$ 为基，$(0,0,4,3)^T$ 为初始基可行解，单纯形表为

| $c_j$ | | | -3 | -4 | 0 | 0 | $\theta_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cB | B | b | p1 | p2 | p3 | p4 | |
| 0 | p3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | p4 | 3 | 1 | (3) | 0 | 1 | 1 |
| σ j | | | -3 | -4 | 0 | 0 | |
| 0 | p3 | 3 | (5/3) | 0 | 1 | -1/3 | 9/5 |
| -4 | p2 | 1 | 1/3 | 1 | 0 | 1/3 | 3 |
| σ j | | | -5/3 | 0 | 0 | 4/3 | |
| -3 | p1 | 9/5 | 1 | 0 | 3/5 | -1/5 | |
| -4 | p2 | 2/5 | 0 | 1 | -1/5 | 2/5 | |
| σ j | | | 0 | 0 | 1 | 1 | |

原问题最优解为 $(\frac{9}{5}, \frac{2}{5})^T$，最优值为-7。

（2）影子价格向量为 $(c_B^T B^{-1})^T = \left( (-3,-4) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right)^T = (-1,-1)^T$

（3）由单纯形表可以得到

$x_1+\frac{3}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4=\frac{9}{5}$，

即 $x_1-x_4-1=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}x_3-\frac{4}{5}x_4$

割平面方程为 $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}x_3-\frac{4}{5}x_4\le 0$ 。

二、解：（1）利用消元法，得到以 $p_1,p_2$ 为基矩阵的规范式为：

$$\min 2x_3-x_4+\frac{7}{2}$$

$$s.t.\ x_1+x_3-3x_4=\frac{5}{2}$$

$$x_2+4x_4=\frac{1}{2}$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$$

（或者：以 $B=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}$ 为基矩阵，在约束方程组的两端同时左乘 $B^{-1}$，得到约束方程组为

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&0&2&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}，\text{得到}\quad \begin{matrix}x_2+4x_4=\frac{1}{2}\\ x_1+x_3-3x_4=\frac{5}{2}\end{matrix}，$$

然后再将目标函数中基变量系数消为 0。

约束等式交换两行，不影响后面的计算和结果）

以 $p_1,p_2$ 为基，$(\frac{5}{2},\frac{1}{2},0,0)^T$ 为初始基可行解，单纯形表为

| $c_j$ | | | 0 | 0 | 2 | -1 | $\theta_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cB | B | b | p1 | p2 | p3 | p4 | |
| 0 | P1 | 5/2 | 1 | 0 | 1 | -3 | |
| 0 | P2 | 1/2 | 0 | 1 | 0 | (4) | 1/8 |
| σ j | | | 0 | 0 | 2 | -1 | |
| 0 | P1 | 23/8 | 1 | 3/4 | 1 | 0 | |
| -1 | P4 | 1/8 | 0 | 1/4 | 0 | 1 | |
| σ j | | | 0 | 1/4 | 2 | 0 | |

原问题最优解为 $(\frac{23}{8},0,0,\frac{1}{8})^T$，最优函数值为 27/8。

（2）影子价格向量为 $(c_B^TB^{-1})^T=\left((1,4)\begin{pmatrix}1&1\\2&-6\end{pmatrix}^{-1}\right)^T$

$$=\left((1,4)\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}\end{pmatrix}^{-1}\right)^T=(\frac{7}{4},-\frac{3}{8})^T$$

（3）由单纯形表可以得到

因为 $\frac{23}{8}=2+\frac{7}{8}$，所以分枝后的两个线性规划为

$$\begin{aligned}&\min\ 2x_3-x_4+\frac{7}{2}\\&s.t.\ x_1+x_3-3x_4=\frac{5}{2}\\&\quad x_2+4x_4=\frac{1}{2}\\&x_1\le 2\\&\quad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{aligned}\quad,\quad\begin{aligned}&\min\ 2x_3-x_4+\frac{7}{2}\\&s.t.\ x_1+x_3-3x_4=\frac{5}{2}\\&\quad x_2+4x_4=\frac{1}{2}\\&x_1\ge 3\\&\quad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$$

三、提示：先处理 $|x_4|\le 2$ 这个约束，最基本的处理方法：考虑两个约束：$x_4\le 2, x_4\ge -2$

也可以令 $2+x_4$（或 $2-x_4$）为一个新变量再处理。

然后必须用两阶段或者大 M 法来进行求解。

最优解是 $(3,0,0,2)^T$.

四、提示：把 mn 个变量对应的矩阵写出来。

对偶规划：
$$\begin{aligned}&\max\sum_{i=1}^{m}a_i y_i+\sum_{i=1}^{n}b_i z_i\\&s.t.\ y_i+z_j\le c_{ij}(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

五、若线性规划
$$\begin{aligned}&\min x_1+2x_2+x_3\\&s.t.\ 3x_1+4x_2\qquad\ =5\\&\quad x_1\qquad\ +2x_3=u\\&\quad x_1,x_2,x_3\ge 0\end{aligned}$$
的最优解为 $(a,b,c)^T$，其对偶规划的最优解为 $(1/6,1/2)^T$。$a,b,c,u$ 四个常数中，你可以确定哪些？如果有不能确定的常数，确定其范围。

解：$x^*=(a,b,c)^T, y^*=(\frac{1}{6},\frac{1}{2})^T$，

$$A^T y^*-\overline{c}=\begin{bmatrix}3&1\\4&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{4}{3}\\0\end{bmatrix}$$

（注：字母 $c$ 在题目中已用，我们将价格向量用 $\overline{c}$ 表示）

由互补松弛性定理，$(A^T y^*-\overline{c})^T x^*=0$，得 $-\frac{4}{3}b=0$，$b=0$.

$x^*=(a,b,c)^T$ 可行，由第一个等式约束得 $3a+4b=5$，$a=\frac{5}{3}$.

$c$ 的范围是 $c\ge 0$，由第二个约束等式，$\frac{5}{3}+4c=u$，$u\ge\frac{5}{3}$.