§ 4.3 状态空间的分解

前面给出了马氏链状态分类的一些基本概念以及如何判别状态分类的定理，但如果对状态空间中的每个状态都按照这些定理逐一检查分类，这不仅是很繁琐的甚至是不可能的，因此,如果能够借助状态之间的转移使得对状态分类不再是一个一个地进行，而是“群体”地进行，也就是说如果能从某个状态的分类来确定一类状态的分类，无疑这将给我们带来很大方便。从某种意义上看相当于对状态空间进行分解。

定义：状态空间I的子集C称为闭集，如对任意$i\in C$及$k\notin C$都有$p_{ik}=0$；闭集C称为不可约的，如C的状态互通；称马氏链为不可约的，如其状态空间不可约。

若单点集$\{i\}$为闭集，称i为吸收状态。$(p_{ii}=1)$

闭集的直观含义是自C的内部不能到达C的外部，这意味着一旦质点进入闭集C中，它将永远留在C中。

引理：C是闭集的充要条件为对任意$i\in C$及$k\notin C$都有$p_{ik}(n)=0$，$n\geq 1$。

证：只需证必要性，用归纳法，设C为闭集，由定义知当$n=1$时结论成立，现设$n=m$时，$p_{ik}(m)=0$，$i\in C$，$k\notin C$，则

$$p_{ik}(m+1)=\sum_{j\in c}p_{ij}(m)p_{jk}+\sum_{j\notin c}p_{ij}(m)p_{jk}$$

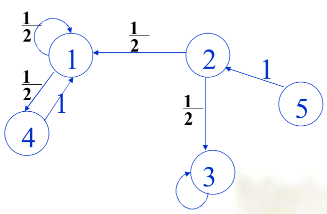
$$=\sum_{j\in c}p_{ij}(m)\times 0+\sum_{j\notin c}0\times p_{jk}=0$$

由归纳法引理得证。

例：设马氏链$\{X_n\}$的状态空间$I=\{1,2,3,4,5\}$转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

状态转移图为：



由转移图可知，状态3是吸收的，故$\{3\}$是闭集(最小闭集)，另外$\{1,4\}$、$\{1,4,3\}$、$\{1,4,2,3\}$都是闭集。其中$\{3\}$、$\{1,4\}$是不可约的，I本身是最大闭集，又I含有子闭集，故马氏链$\{X_n\}$不是不可约链。

分解定理：任一马氏链的状态空间I，可唯一地分解成有限个或可列个互不相交的子集$D,C_1,C_2,\cdots$之和，使得

(1) 每一个C_n是常返态组成的不可约闭集且C_n的状态不可能从$C_m(m\neq n)$中的状态到达；

(2) C_n中的状态同类，或全是正常返，或全是零常返，它们有相同的周期且$f_{jk}=1$，j，$k\in C_n$；

(3) D由全体非常返状态组成，自C_n中的状态不能到达D中的状态。

证:(1)记C为全体常返状态组成的集合，$D=I-C$ 为非常返状态全体，将C按互通关系进行分解,则 $I=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots$;

(2) 其中每一个C_n是由常返状态组成的不可约的闭集，而不可约闭集中状态是互通的，又由互通关系知状态是同一类型的；

(3) 显然，从C_n中的状态不能到达D中状态，一般称C_n为基本常返闭集。

定理中的D不一定是闭集，如马氏链的初态为某一非常返态，则当D为闭集时，状态转移一直在D中进行，反之则可能在某一时刻离开D而进入某个基本常返闭集C_n，当然一旦进入C_n，它将永远在C_n中运动。($\because C_n$是不可约的闭集)

注：I为有限集时，则D一定不是闭集，即不管系统自什么状态出发迟早要进入常返闭集。

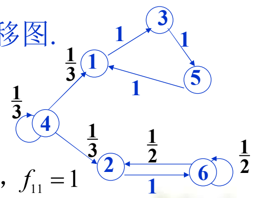
定理：如果$i\to j$，i为常返状态，则j也为常返状态，且$f_{ji}=1$，$i\leftrightarrow j$。

例 设$I=\{1,2,\cdots,6\}$转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

试分解此链并指出各状态的常返性及周期性

解：由转移矩阵可得转移图.



$f_{11}(3)=1$，$f_{11}(n)=0$，$n\neq 3$，$f_{11}=1$

$\therefore \mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{11}(n)=3<\infty$

即1为正常返状态，且周期等于3

含1的基本常返闭集为：$C_1=\{k:1\to k\}=\{1,3,5\}$

从而状态3及5也为正常返且周期为3;

同理，$f_{66}(1)=\frac{1}{2}$，$f_{66}(2)=\frac{1}{2}$，$f_{66}(n)=0$，$n>2$

$f_{66}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$， $\because p_{66}(n)>0$，周期为1，

故6为正常返状态，$\mu_6=\frac{3}{2}$，周期为1，$\therefore$ 6是遍历状态。

含6的基本常返闭集为：

$C_2=\{k:6\to k\}=\{2,6\}$ 可见2是遍历状态。

由于$f_{44}(1)=\frac{1}{3}$，$f_{44}(n)=0$，$n\neq 1$，故4为非常返。

于是I可分解为：

$I=D\cup C_1\cup C_2=\{4\}\cup\{1,3,5\}\cup\{2,6\}$。

下面考虑在不可约闭集C中的运动情况。

定义:称矩阵(p_{ij})为随机矩阵，如元素非负，且对每个$i\in I$，有$\sum_{j\in I} p_{ij}=1$，其k步转移矩阵$P(k)=(p_{ij}(k))$也为随机矩阵。

引理：设C为闭集，又$G=(p_{ij}(k))$，i，$j\in C$是C上所得的k步转移子矩阵，则G仍是随机矩阵。

证：任取$i\in C$，则有

$1=\sum_{j\in I} p_{ij}(k)=\sum_{j\in c} p_{ij}(k)+\sum_{j\notin c} p_{ij}(k)=\sum_{j\in c} p_{ij}(k)$

显然$p_{ij}(k)\geq 0$，故G为随机矩阵。

可见对I的一个子集C，可考虑C上的原马氏链的子马氏链，其状态空间为C，转移矩阵为：
$G=(p_{ij})$，i，$j\in C$，是原马氏链转移矩阵$P=(p_{ij})$ i，$j\in I$的子矩阵。

下面是周期为d的不可约马氏链的分解定理：

定理：周期为d的不可约马氏链，其状态空间I可唯一地分解为d个互不相交的子集之和。

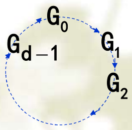
即: (1) $I=\bigcup_{r=0}^{d-1}G_r, G_r\bigcap G_s=\Phi \quad (r\neq s)$

(2) 从任一G_r中某一状态出发，经一步转移必进入G_{r+1}中，其中$G_d=G_0$

任取状态i

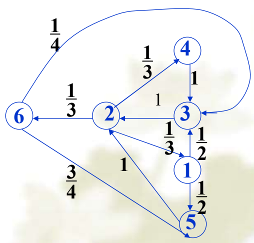
$G_r=\{j$：对某个$n\ge 0, p_{ij}(nd+r)>0\}$

$r=0,1,\cdots$，$d-1$



例：设不可约马氏链状态空间 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$转移矩阵为P，其转移图如下：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$



从图易见，从I的任一个状态出发,都有一个首尾相连接的“三角形”，故各状态的周期都为3现固定状态1，并令：

$G_0=\{k,$对某个n有$p_{1k}(3n)>0\}=\{1,4,6\}$;

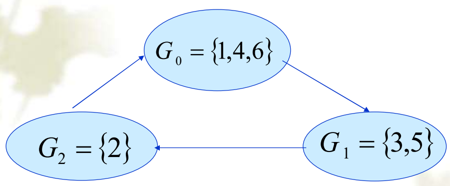
$G_1=\{k,$对某个n有$p_{1k}(3n+1)>0\}=\{3,5\}$;

$G_2=\{k,$对某个n有$p_{1k}(3n+2)>0\}=\{2\}$。

注：取$n=0$易看出

故$I=G_0\bigcup G_1\bigcup G_2=\{1,4,6\}\bigcup\{3,5\}\bigcup\{2\}$

此链在I中的运动如图



经一步转移可从$G_i\to G_{i+1}$

§4.4 $p_{ij}(n)$的渐近性质与平稳分布

在实际应用中，人们常关心的问题有两个：

(1)当$n\to\infty$时，$p\{X_n=j\}=p_j(n)$的极限是否存在？

(2)在什么条件下，一个马尔可夫链是一个平稳序列。

由于 $p_j(n)=\sum_{i\in I}p_i(0)p_{ij}(n)$

故可转化为研究$p_{ij}(n)$的渐近性质

即$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)$是否存在?若存在，其极限是否与有关?

对于(2)实际上是一个平稳分布是否存在的问题。

这两个问题有密切联系。

在马氏链理论中，有关这类问题的定理，统称为遍历定理。

一.$p_{ij}(n)$的渐近性质

1.j是非常返或零常返的情况

定理：设j为非常返或零常返，则对一切i，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=0 \qquad \forall i\in I$$

证：由前面定理，对$1\le N<n$有

$$p_{ij}(n)=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k)p_{jj}(n-k)$$
$$\le \sum_{k=1}^{N} f_{ij}(k)p_{jj}(n-k)+\sum_{k=N+1}^{n} f_{ij}(k)$$

固定N，先令$n\to\infty$，若j为零常返，则$\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n)=0$

(定理推论)

若j为非常返，由$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}(n)<\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}(n)=0$

$\therefore$右边第一项$\to 0$；再令$N\to\infty$，由于$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k)\le 1$,

$\Rightarrow \sum_{k=N+1}^{\infty} f_{ij}(k)\to 0$, $N\to\infty$，故$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=0$。级数收敛

推论：如马氏链的状态有限，则这些状态不可能全是非常返状态，也不可能含有零常返状态。从而不可约的有限马氏链必为正常返的。

证：$I=\{0,1,2,,N\}$,如果所有状态全是非常返，则对$\forall i,j\in I$由定理知$p_{ij}(n)\to 0(n\to\infty)$。

而对任意n,$1=\sum_{j=0}^{N} p_{ij}(n)\to 0 \quad (n\to\infty)$产生矛盾。

另外，如I含有零常返态i，则$C=\{j:i\to j\}$是不可约闭集，又因为它是有限集，故C中所有状态均为零常返，于是由上面定理知：

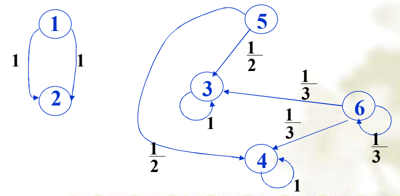
$1=\sum_{j\in c} p_{ij}(n)\to 0$　　产生矛盾。

推论2：如马氏链有一个零常返态，则必有无限多个零常返状态。

证：设i为零常返，则$C=\{j,i\to j\}$为不可约闭集，其状态全为零常返，故不能为有限集，否则与$1=\sum_{j\in c} p_{ij}(n)\to 0$矛盾。

2.是正常返情形

以上讨论了零常返与非常返情形，现讨论正常返情形。这比前面两种情况要复杂一此，事实上，如果状态j是正常返的，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$不一定存在，即使存在也可能与$i$有关，例如下图描述了一个有6种状态的马氏链的状态转移概率情况，由下图易见



$p_{11}(2n)=1$, $p_{11}(2n-1)=0,(n=1,2,\cdots)$

故$\lim_{n\to\infty} p_{11}(n)$不存在；

另外$p_{33}(n)\equiv 1$, $p_{53}(n)\equiv \frac{1}{2}(n>1)$, $p_{23}(n)\equiv 0$,

这说明对正常返状态，极限$\lim_{n\to\infty} p_{i3}(n)$存在$(i=2,3,5)$

但极限值与i有关。

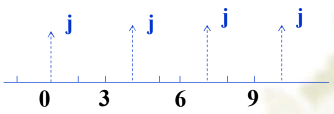
对正常返状态j，我们一般不讨论极限$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$，

而只研究:(1)$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nd)$;(2)$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k)$。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(nd)$

记 $f_{ij}^{(r)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}(md+r), 0 \le r \le d-1,$

表示从i出发，在某时刻$n = r(\bmod(d))$(不计周期)首次到达状态j的概率，式中d为马氏链的周期。



显然：$\sum\limits_{r=0}^{d-1} f_{ij}^{(r)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{r=0}^{d-1} f_{ij}(md+r) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}(m) = f_{ij}$

展开：$f_{ij}(0) + f_{ij}(1) + \cdots + f_{ij}(d-1) +$

$f_{ij}(d) + f_{ij}(d+1) + \cdots + f_{ij}(d+d-1) +$

$f_{ij}(2d) + f_{ij}(2d+1) + \cdots + f_{ij}(2d+d-1) + \cdots$

定理：如j为正常返，周期为d，则对任意的i及$0 \le r \le d-1$有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nd+r) = f_{ij}^{(r)} \cdot \frac{d}{\mu_j}$$

证：因为d为j的周期，所以当n不能被d整除时，

$p_{jj}(n) = 0 \quad (n \ne 0(\bmod(d)))$

所以 $p_{ij}(nd+r) = \sum\limits_{v=0}^{nd+r} f_{ij}(v) \cdot p_{jj}(nd+r-v)$

$= \sum\limits_{m=0}^{n} f_{ij}(md+r) \cdot p_{jj}(n-m)d$

于是，对任意的$1 \le N \le n$有

$\sum\limits_{m=0}^{N} f_{ij}(md+r) p_{jj}(n-m)d \le p_{ij}(nd+r)$

$\le \sum\limits_{m=0}^{N} f_{ij}(md+r) p_{jj}(n-m)d + \sum\limits_{m=N+1}^{\infty} f_{ij}(md+r)$

在上式中先固定N，然后令$n\to\infty$，再令$N\to\infty$，

由前面定理得:$\left(\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(nd) = \frac{d}{\mu_i}\right)$

$f_{ij}^{(r)} \frac{d}{\mu_j} \le \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(nd+r) \le f_{ij}^{(r)} \frac{d}{\mu_j}$

$f_{ij}^{(r)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}(md+r)$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(nd+r) = f_{ij}^{(r)} \cdot \frac{d}{\mu_j}$

推论：设不可约，正常返，周期d的马氏链，其状态空间为I，则对一切i，$j \in I$有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nd) = \begin{cases} \frac{d}{\mu_j}, & 如i与j同属于子集G_s \\ 0, & 否则 \end{cases}$$

其中$I = \bigcup\limits_{s=0}^{d-1} G_s$，前面定理给出。

特别当$d=1$，则对一切i，j有

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \frac{1}{\mu_j} \quad \left\{\frac{1}{\mu_j}, j \in I\right\}$称为极限分布。

证：在定理中取$r=0$

则得:$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(nd) = f_{ij}^{(0)} \frac{d}{\mu_j}$，其中 $f_{ij}^{(0)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}(md)$

如果i与j不在同一个G_s中，则$p_{ij}(md) = 0$(对G_s中的i经周期倍回到G_s中），从而$f_{ij}(md) = 0 \therefore f_{ij}^{(0)} = 0$

如果i与j同属于G_s,则当$n \ne 0(\bmod(d))$时

$p_{ij}(n) = 0$,从而$f_{ij}(n) = 0$

所以$f_{ij}^{(0)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}(md) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}(m) = f_{ij} = 1$

所以:$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(nd) = \begin{cases} \frac{d}{u_j}, & 如i与j同属于子集G_s \\ 0, & 否则 \end{cases}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}(k)$

$\sum_{k=1}^{n}p_{jj}(k)$表示从j出发，在n步之内返回到的j平均次数，

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{jj}(k)$表示单位时间内再回到$j$的平均次数。

$\because \mu_j=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{jj}(n)$表示平均返回时间，如$\mu_j=0.5$小时，

平均半小时返回一次，$\frac{1}{\mu_j}=2$单位时间内返回二次。

而$\frac{1}{\mu_j}$也表示从j出发，单位时间回到j的平均次数，

所以应有 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{jj}(k)\approx\frac{1}{\mu_j}$

如果质点由i出发，则要考虑从i出发能否到达j的情况，即要考虑f_{ij}的大小，于是有如下定理：

定理：对任意状态i，j有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}(k)=\begin{cases}0, & \text{如}j\text{为非常返或零常返}\\ \frac{f_{ij}}{\mu_j}, & \text{如}j\text{为正常返}\end{cases}$$

证：如j为非常返或零常返，由定理知$p_{ij}(n)\to 0$

$\therefore \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}(k)\to 0,(n\to\infty)$

（数学分析中结论：若$a_n\to a$，则$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\to a$）

如j为正常返，有周期d，应用数分中的如下结论：

假设有d个数列$\{a_{nd+r}\}$，$r=0,1,2,\cdots$，$d-1$

$n=0,1,2,\cdots$

如对每一r，存在$\lim_{n\to\infty}a_{nd+r}=b_r$，则必有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{d}\sum_{r=0}^{d-1}b_r$$

令 $a_{nd+r}=p_{ij}(nd+r)$

由上个定理知：$b_r=f_{ij}^{(r)}\cdot\frac{d}{\mu_j}$

于是有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}(k)=\frac{1}{d}\sum_{r=0}^{d-1}f_{ij}^{(r)}\frac{d}{\mu_j}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$

推论：如$\{X_n\}$为不可约，常返，则对任意i，j有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}(k)=\frac{1}{\mu_j}\qquad (f_{ij}=1)$$

定理说明：尽管$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)$不一定存在，但其平均值的极限存在，特别当链不可约时，其极限与i无关。

二、平稳分布

考虑绝对概率$\pi_j(n)=P\{X_n=j\},j\in I$的极限

$$\pi_j(n)=\sum_{i\in I}\pi_i(n-1)p_{ij}$$

若$\pi_j(n)$与n无关,记$\pi_j(n)=\pi_j$,则上式可写成

$$\pi_j=\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij}$$

定义：设$\{X_n,n\ge 0\}$为齐次马氏链，状态空间为I，转移概率为p_{ij}，称概率分布$\{\pi_j,j\in I\}$为马氏链的平稳分布。若它满足

$$\begin{cases}\pi_j=\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij}, & \text{或}\bar{\pi}=\bar{\pi}P\left(\bar{\pi}=\left(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_j\cdots\right)\right)\\ \sum_{j\in I}\pi_j=1, & \pi_j\ge 0\end{cases}$$

平稳分布的直观含义： 过程在任何时刻处于状 态j的概率都相等。

对于平稳分布 $\bar{\pi}$，若用$\bar{\pi}$作为链的初始分布，即$\bar{p}(0)=\bar{\pi}$，则链在任一时刻 n的绝对分布$\bar{p}(n)$永远与$\bar{\pi}$一致。

事实上由 $\bar{p}(n)=\bar{p}(0)P(n)$和$\bar{\pi}=\bar{\pi}P$

有：$\bar{p}(n)=\bar{p}(0)P(n)=\bar{\pi}P^n=\bar{\pi}\cdot P^{n-1}$

$=\cdots=\bar{\pi}P=\bar{\pi}=\bar{p}(0)$

注：平稳分布$\{\pi_j,j\in I\}$有$\pi_j=\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij}(n)$或$\bar{\pi}=\bar{\pi}p^n$

平稳分布也称马氏链的不变概率测度。

定理：不可约非周期马氏链是正常返的充要条件是存在平稳分布，且此平稳分布就是极限分布

$$\left\{\frac{1}{u_j},\ j\in I\right\}$$

证：先证充分性

设$\{\pi_j,\ j\in I\}$是平稳分布，$\therefore \pi_j=\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij}(n)$

由于$\sum_{i\in I}\pi_i=1,\ \pi_i\geq 0$，故可交换极限与求和顺序，

得 $$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij}(n)=\sum_{i\in I}\pi_i\left(\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)\right)$$

$$=\sum_{i\in I}\pi_i\left(\frac{1}{\mu_j}\right)=\frac{1}{\mu_j}$$

$\because \sum_{i\in I}\pi_i=1$，故至少存在一个$\pi_k>0$，即 $\frac{1}{u_k}>0$

于是$\lim_{n\to\infty}p_{ik}(n)=\frac{1}{\mu_k}>0\Rightarrow \mu_k>0$($=0$为非常返,或零常返)

$\therefore k$为正常返态，故该马氏链是正常返的。

再证必要性：

设马氏链是非周期正常返的，于是

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)=\frac{1}{u_k}>0$$

由方程$c-k$，对任意正整数N，有

$$p_{ij}(n+m)=\sum_{k\in I}p_{ik}(m)p_{kj}(n)\geq\sum_{k=0}^{N}p_{ik}(m)p_{kj}(n)$$

令$m\to\infty$取极限得：

$$\frac{1}{\mu_j}\geq\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{u_k}\right)p_{kj}(n)$$

再令$N\to\infty$取极限得：

$$\frac{1}{\mu_j}\geq\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{\mu_k}\right)p_{kj}(n)=\sum_{k\in I}\left(\frac{1}{\mu_k}\right)p_{kj}(n)\qquad(1)$$

下面来证明等号成立，由

$$1=\sum_{k\in I}p_{ik}(n)\geq\sum_{k=0}^{N}p_{ik}(n)$$

先令$n\to\infty$，再令$N\to\infty$取极限得：

$$1\geq\sum_{k\in I}\left(\frac{1}{u_k}\right)\qquad(2)$$

将式(1)对于j求和，并假定对某个j,(1)式为严格大于产生矛盾。

$$1\geq\sum_{j\in I}\frac{1}{\mu_j}>\sum_{j\in I}\left(\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}p_{kj}(n)\right)$$

$$=\sum_{k\in I}\left(\frac{1}{\mu_k}\sum_{j\in I}p_{kj}(n)\right)=\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}\qquad 产生矛盾,$$

故有$\frac{1}{\mu_j}=\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}p_{ij}(n)$,令$n\to\infty$取极限得：

$$\frac{1}{\mu_j}=\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}\left(\lim_{n\to\infty}p_{kj}(n)\right)=\frac{1}{\mu_j}\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}\Rightarrow\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}=1$$

$\therefore\left\{\frac{1}{\mu_j},j\in I\right\}$是平稳分布。

有限马尔可夫链性质：

(1)所有非常返状态组成的集合不可能是闭集；

(2)没有零常返状态；

(3)必有正常返状态；

(4)不可约有限马氏链只有正常返态；

(5)$I=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$。

每个C_n，$n=1,2,\cdots$均是由正常返态组成的有限不可约闭集，D是非常返态。

对于一般的马尔可夫链，其平稳分布是否存在？若存在，是否唯一？有以下结论：
定理：设C_+为马尔可夫链中全体正常返状态构成的集合，则有：
(1) 平稳分布不存在的充要条件为$C_+=\phi$;
(2) 平稳分布唯一存在的充要条件为只有一个基本常返闭集；
(3) 有限状态马尔可夫链的平稳分布总存在；
(4) 有限不可约非周期马尔可夫链存在唯一的平稳分布。

证(1)充分性：反证，假设该马氏链存在一个平稳分布$\pi\neq 0$则由平稳分布定义知有$\pi=\pi P$，则对$\forall n\geq 1$有
$\pi=\pi P=\cdots=\pi P^n$，当$n\to\infty$时，因为$C_+=\phi$，故该马氏链中均为零常返或非常返，而当$n\to\infty$时，$P^n\to 0$与$\pi\neq 0$矛盾，故该马氏链不存在平稳分布。
必要性：仍用反证法,假设$C_+\neq\phi$，不妨设$C_+=C$只有一个正常返闭集，则该马氏链限制在C上存在一个平稳分布π_1使$\pi_1=\pi_1 P_1$，其中P_1是P在C上的子转移矩阵，即：

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ R & Q_T \end{pmatrix}$$ 此时只需取$\pi=(\pi_1,0)$

则$\pi P=(\pi_1,0)\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ R & Q_T \end{pmatrix}$

$=(\pi_1 P_1,0)=(\pi_1,0)=\pi$

故是平稳分布，与平稳分布不存在矛盾，故$C_+=\phi$。

(2)证明：
必要性：它存在一个平稳分布,故由(1)知$C_+\neq\phi$,又不妨假设其常返态集可分解为两个正常返闭集的并，即$C_+=C_1\bigcup C_2$，则易知一步转移矩阵P可写成：

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ R_1 & R_2 & Q_T \end{pmatrix}$$

其中P_1,P_2分别是P在C_1,C_2上的转移子矩阵，
故存在π_1，π_2，使$\pi_1=\pi_1 P_1$，$\pi_2=\pi_2 P_2$
若取$\pi=(\pi_1,0,0)$，$\pi'=(0,\pi_2,0)$
则$\pi P=(\pi_1 P_1,0,0)=(\pi_1,0,0)=\pi$
$\pi' P=(0,\pi_2 P_2,0)=(0,\pi_2,0)=\pi'$
故π与π'均是平稳分布，与唯一性矛盾，故该马氏链只有一个基本正常返闭集。
(3)有限状态马尔可夫链总存在正常返态；
(不含零常返或不能全是非常返)，即有限状态马氏链总有$C_+\neq\phi$，故由(1)知它的平稳分布总存在。

(4)有限不可约非周期马氏链必为正常返态，由前面定理知存在唯一的平稳分布且等于极限分布。

例设马氏链的转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

求马氏链的平稳分布及各状态的平均返回时间。

解：因为马氏链是不可约的非周期有限状态，所以平稳分布存在，由方程组

$$\begin{cases}\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3 \\ \pi_2 = 0.1\pi_1 + 0.8\pi_2 + 0.05\pi_3 \\ \pi_3 = 0.2\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.9\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1\end{cases}$$

解得：$\pi_1 = 0.1765, \pi_2 = 0.2358, \pi_3 = 0.5882.$

$\therefore$ 平稳分布为：

$\bar{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.1765, 0.2358, 0.5882)$

各状态的平均返回时间分别为：

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi_1} = 5.67, \mu_2 = \frac{1}{\pi_2} = 4.25, \mu_3 = \frac{1}{\pi_3} = 1.70,$$

例：设马氏链具有状态空间$I = \{0,1,2,\cdots\}$，

转移概率为：$p_{ii+1} = p_i, p_{ii} = r_i, p_{ii-1} = q_i (i \geq 0)$

其中$p_i > 0$，$q_i > 0$，$p_i + r_i + q_i = 1$，

称这种马氏链为生灭链，它是不可约的。

记$a_0 = 1$，$a_j = \dfrac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_j} (j \geq 1)$

试证此马氏链存在平稳分布的充要条件为$\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$。

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots \\ r_0 & p_0 & 0 & \cdots & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & p_{j-1} & \\ & & & q_j & r_j & p_j \\ & & & & q_{j+1} & \end{pmatrix}$$

证：由平稳分布所满足的方程组：

$$\begin{cases}\pi_0 = \pi_0 r_0 + \pi_1 q_1 \\ \pi_j = \pi_{j-1} p_{j-1} + \pi_j r_j + \pi_{j+1} q_{j+1} \qquad j \geq 1 \\ p_j + r_j + q_j = 1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 递推关系：

$$\begin{cases} q_1 \pi_1 - p_0 \pi_0 = 0 \\ q_{j+1}\pi_{j+1} - p_j \pi_j = q_j \pi_j - p_{j-1}\pi_{j-1} = \cdots = 0\end{cases}$$

将$r_j = 1 - p_j - q_j$代入$\pi_j r_j$

$$\Rightarrow \pi_j = \frac{p_{j-1}\pi_{j-1}}{q_j}, j \geq 0$$

$$\therefore \pi_j = \frac{p_{j-1}\pi_{j-1}}{q_j} = \cdots = \frac{p_0 \cdots p_{j-1}}{q_1 \cdots q_j}\pi_0 = a_j \pi_0$$

对j求和：$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j$

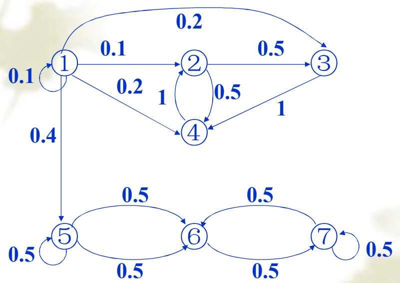
$\therefore$ 平稳分布存在的充要条件是$\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty.$

此时$\pi_0 = \dfrac{1}{\sum a_j}, \pi_j = \dfrac{a_j}{\sum a_j}, j \geq 1$

例：设马氏链的转移矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

求每一个不可约闭集的平稳分布。



解：从图可看出，状态空间可分解为两个不可约常返闭集$C_1=\{2,3,4\}$，$C_2=\{5,6,7\}$；一个非常返集$N=\{1\}$。求平稳分布可在常返闭集上进行，在C_1上对应的转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

利用满足的方程组可解得平稳分布：

$$\left\{0,\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5},0,0,0\right\}$$

类似，在C_2上可解得平稳分布为：

$$\left\{0,0,0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}。$$

作业：**4.1，4.4，4.5，4.9，4.10（1、2），**
4.12，4.15，4.17