第2章 内积空间与等距变换

主要内容

2.1 内积空间的基本概念

2.2 标准正交基与Schmidt正交化

2.3 正交子空间

2.4 等距变换

2.1 内积空间的基本概念

设V为数域P上的线性空间，如果按照某种对应法则，使得V中任意两个向量α, β都可以确定一个数(α, β)，且这个对应法则满足：对$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$, $k \in P$, 有

（1）共轭对称性：$(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$

（2）齐次性：$(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$

（3）可加性：$(\alpha + \gamma, \beta) = (\alpha, \beta) + (\gamma, \beta)$

（4）正定性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$, 当且仅当$\alpha=0$时$(\alpha,\alpha)=0$.

则称该对应法则为V上的一个内积，复数(α,β)称为α与β的内积. 定义了内积的线性空间称为内积空间.

当$P=R$时，定义了内积的实线性空间V称为欧几里德空间（简称欧氏空间），也称实内积空间.

当$P=C$时，定义了内积的复线性空间V称为酉空间，也称复内积空间.

例2.1 在实线性空间R^n (C^n)中，对任意两个向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n),\ \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

定义内积为

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \alpha \beta^T \qquad (2.1)$$

$$(\alpha, \beta) = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \cdots + a_n \overline{b_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} = \alpha \beta^H \qquad (2.1')$$

易验证这样定义的(α,β)满足内积的4个条件，所以式(2.1)是R^n的一种内积 (式(2.1')是C^n的一种内积)，此内积称为R^n (C^n)的标准内积，记为$\alpha\beta^T$ ($\alpha\beta^H$).

其中β^H表示的β共轭转置向量，即 $\beta^H = \overline{\beta}^T$.

例2.3 在连续实函数组成的实线性空间中$C[a,b]$，对任意两个连续实函数$f(x), g(x)$，定义内积为

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

利用定积分的性质可以证明这样定义的

$$(f(x), g(x))$$

是$C[a,b]$的内积.

向量的长度与夹角

定义2.2 在欧氏空间V中，对$\alpha \in V$，称非负实数$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$为向量α的长度，记为记为$\|\alpha\|$. 当 $\|\alpha\| = 1$ 时，称α为单位向量.

容易验证，向量的长度具有下列性质：

非负性：$\forall \alpha \in V, \|\alpha\| \geq 0$. 且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha=0$.

齐次性：$\forall \alpha \in V,\ k \in R, \|k\alpha\| = |k| \|\alpha\|$；

三角不等式：$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

对任意非零向量α，向量 $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是与α同方向长度的单位向量，由α求 $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 的过程称为把向量α单位化.

Cauchy—Schwarz不等式

设V为内积空间，对$\forall \alpha,\beta\in V$, 有

$$\left|(\alpha,\beta)\right|^2\le(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)=\|\alpha\|^2\|\beta\|^2 \quad (2.2)$$

其中等号当且仅当α与β线性相关时成立.

Cauchy—Schwarz不等式

设V为内积空间，对$\forall \alpha,\beta\in V$, 有

$$\left|(\alpha,\beta)\right|^2\le(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)=\|\alpha\|^2\|\beta\|^2 \quad (2.2)$$

其中等号当且仅当α与β线性相关时成立.

$$\left|(\alpha,\beta)\right|\le\sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}=\|\alpha\|\,\|\beta\|$$

在R^n中不等式

$$\left|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

在$C[a,b]$中不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

定义2.3 对欧氏空间V中任意非零向量α,β, 定义

$$\theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}$$

为非零向量α与β的夹角. 若$(\alpha,\beta)=0$, 则称向量α与β正交，记为 $\alpha\perp\beta$.

由定义2.3可知，与几何向量一样有

(1) $\forall\alpha\in V$, 有$0\perp\alpha$

(2) $\forall\alpha\in V$, 有$\alpha\perp\alpha\Leftrightarrow\alpha=0$

(3) 若$\forall\alpha,\beta\in V$均是非零元素, 则$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow$ α与β的夹角为$\pi/2$.

2.2 标准正交基与Schmidt正交化

一、 标准正交基

定义2.4 在内积空间V中，一组两两正交的非零向量称为V中的正交向量组.

定理2.2 若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$是正交向量组，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关.

定义2.5 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$是内积空间$V$的一组基, 且它们两两正交, 则称 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$为$V$的一组正交基.

当正交基的每一个向量都是单位向量时，则称这组正交基为V的标准正交基.

显然，由定义2.5知, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$是$n$维内积空间$V$的标准正交基的充要条件是:

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}0, & i\ne j;\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

标准正交基的特性:

定理2.3 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$是内积空间$V$的一组标准正交基，有下列结论成立:

(1) 对$\forall\alpha\in V$, 设向量α在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$下的坐标为$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, 则$x_i=(\alpha,\varepsilon_i)$, $i=1,2,\ldots,n$;

标准正交基的特性:

定理2.3 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是内积空间$V$的一组标准正交基，有下列结论成立:

(1) 对$\forall \alpha \in V$, 设向量α在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的坐标为$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 则$x_i=(\alpha, \varepsilon_i)$, $i=1,2,\ldots,n$;

(2) 若α, β在该基下的坐标分别为X和Y，则 $(\alpha,\beta)=(X,Y)$;

标准正交基的特性:

定理2.3 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是内积空间$V$的一组标准正交基，有下列结论成立:

(1) 对$\forall \alpha \in V$, 设向量α在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的坐标为$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 则$x_i=(\alpha, \varepsilon_i)$, $i=1,2,\ldots,n$;

(2) 若α, β在该基下的坐标分别为X和Y，则 $(\alpha,\beta)=(X,Y)$;

(3) 对$\forall \alpha \in V$, 设向量α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的坐标为$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 则

$$\|\alpha\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

2.2.2 Schmidt正交化方法

给定内积空间V的一组基，能否由此构造出内积空间V的一组标准正交基，如何构造?

设$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_r$是内积空间$V$的一组线性无关的向量组, 要求的一组两两正交的单位向量$e_1,e_2, \ldots, e_r$, 使$e_1, e_2, \ldots, e_r$与$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_r$等价，这一过程称为把向量组$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_r$标准正交化.

显然，e_i是$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_r$的线性组合.

施密特正交化过程

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$是内积空间$V$的一个基, 要求$V$的一个标准正交基, 就是找一组两两正交的单位向量组$e_1, e_2, \ldots, e_r$, 使$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$与$e_1,e_2, \ldots, e_r$等价.

若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$是线性空间$V$的一组基，

则 $e_1, e_2, \ldots, e_r$就是V的一组标准正交基.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$是内积空间$V$的一个基, 求$V$的一组两两正交的单位向量组$e_1, e_2, \ldots, e_r$且与$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$等价.

(1) 正交化，取 $\beta_1 = \alpha_1$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{(\beta_1, \alpha_r)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_r)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\beta_{r-1}, \alpha_r)}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})}\beta_{r-1},$$

那么$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$两两正交，且$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$与$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$等价.

(2) 单位化，取

$$e_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\quad e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\ \cdots,e_r=\frac{\beta_r}{|\beta_r|},$$

向量组$e_1,e_2,\ldots,e_r$即为一组标准正交基.

上述有线性无关向量组通过正交化过程构造标准正交组的过程称为施密特正交化过程.

例2.5 设$P_3[x]$是全体次数小于3的实系数多项式构成一个实线性空间，定义内积为

$$\left(f(x),g(x)\right)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx,$$
$$\forall f(x),g(x)\in P_3[x]$$

不难验证这样定义的 $\left(f(x),g(x)\right)$ 是$P_3[x]$的内积，

试求$P_3[x]$的一组标准正交基.

在$P_3[x]$ 内积为 $\left(f(x),g(x)\right)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$,
求$P_3[x]$的一组标准正交基.

2.3 正交子空间

定义2.6 设W_1与W_2是内积空间V的非空子集，若对于任意$\alpha\in W_1$，$\beta\in W_2$，都有$(\alpha,\beta)=0$，则称W_1与W_2互相正交，记为$W_1\perp W_2$；若$\alpha\in V$，对任意$\beta\in W_1$都有$(\alpha,\beta)=0$，则称α与W_1正交，记为$\alpha\perp W_1$.

定义2.7 设V是一个内积空间，集合

$W^{\perp}=\{\alpha \mid \alpha\in V, \alpha\perp W\}$ 称为W的正交补.

由定义2.7知：无论W是否为V的子空间，$W^{\perp}$必是V的子空间.

注：由定义2.6知：若W_1与W_2是内积空间V两个互相正交的子空间，即$W_1\perp W_2$，则必有$W_1\cap W_2=\{0\}$，所以两个互相正交的子空间之和必为直和。

定理2.4 设V是一个n维内积空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_r$, $\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\ldots,\varepsilon_n$ 是V的一组标准正交基 $(1\le r\le n)$,
记 $W=\mathrm{span}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_r\}$,
$S=\mathrm{span}\{\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\ldots,\varepsilon_n\}$,
则 $S=W^{\perp}$, $W=S^{\perp}$.

下面定理讨论了内积空间分解为互相正交的子空间的直和问题.

定理2.5（内积空间正交直和分解）设V是一个n维内积空间, W是V的子空间，则$V=W\oplus W^{\perp}$.

注：由定理2.5知：对每个$\alpha\in V$, 有唯一的表示：

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_1\in W,\quad \alpha_2\in W^{\perp},$$

称α_1为α沿着空间$W^{\perp}$向W的正交投影，α_2为α沿着空间W向$W^{\perp}$的正交投影

例2.6 设欧氏空间$P_3[x]$中的多项式$f(x)$与$g(x)$的内积定义为

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

选取$f_1(x)=x$，构造子空间$W=\text{span}(x)$.

(1) 求$W^{\perp}$的一组正交基;

(2) 将$W^{\perp}$分解为两个正交的非零子空间的和.

解 (1) 设 $g(x)=k_0+k_1x+k_2x^2\in W^{\perp}$，则有

$$(f_1(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f_1(x)g(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}x(k_0+k_1x+k_2x^2)dx=0$$

得$k_1=0$，于是

$$W^{\perp}=\{g(x)\,|\,g(x)=k_0+k_2x^2,k_0,k_2\in R\}$$

取$W^{\perp}$的一组基$1,x^2$，并进行正交化可得

$$g_1(x)=1,\quad g_2(x)=x^2-1/3,$$

则 $g_1(x),g_2(x)$是$W^{\perp}$的一组正交基.

(2) 令

$$V_1=\text{span}(g_1(x)),\quad V_2=\text{span}(g_2(x))$$

则V_1与V_2正交，且$V=V_1\oplus V_2$.

2.4 等距变换

定义2.8 设T是内积空间V上的一个线性变换，若对$\forall\alpha,\beta\in V$成立$(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta)$，则称$T$是**等距变换**. 特别地，当$V$是酉空间时，则称$T$是**酉变换**；当$V$是欧氏空间时，则称$T$是**正交变换**.

例2.7 在酉空间C^n中，对任意$X\in C^n$，作变换T: $TX=AX$，其中n阶方阵A为酉矩阵，则

$$(TX,TY)=Y^HA^HAX=Y^HX=(X,Y)$$

所以此变换是一个酉变换. 若在欧氏空间R^n中且方阵A为正交阵，则$TX=AX$是正交变换.

例2.8 设$H=I_n-2uu^H\in C^{n\times n}$，且$u\in C^n$，$u^Hu=1$，定义变换

$$H(\alpha)=\alpha-2uu^H\alpha$$

则H是C^n上的酉变换，称为Householder镜象变换，它将α映射为关于与u正交的$n-1$维空间的镜象.

事实上：

$$(H(\alpha),H(\beta))=(\alpha-2uu^H\alpha,\beta-2uu^H\beta)$$
$$=(\beta^H-2\beta^Huu^H)(\alpha-2uu^H\alpha)$$
$$=\beta^H\alpha=(\alpha,\beta).$$

定理2.6 设T是内积空间V上的一个线性变换，则下列命题等价：

(1) $(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in V$;

(2) $\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|,\forall\alpha\in V$;

定理2.6 设T是内积空间V上的一个线性变换，则下列命题等价：

(1) $(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta), \forall \alpha, \beta \in V$;

(2) $\|T(\alpha)\| = \|\alpha\|, \forall \alpha \in V$;

当V是有限维时, 以上命题进一步与以下命题等价.

(3) 若$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$是$V$的一组标准正交基，则$T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \dots, T(\varepsilon_n)$也是$V$的一组标准正交基;

(4) T在V的任一组标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$下的矩阵是酉矩阵。