第1章

线性空间与线性变换

1

NJUPT

主要内容

1.线性空间的概念
2 基、坐标与维数
3 线性子空间
4 线性变换
5 线性变换的矩阵
6 线性空间的同构

2

NJUPT

1.1 线性空间的基本概念

1.1.1数域

设P是一个包含数1与0的数集，如果P对于数的加、减、乘、除（除数不为零）四则运算都封闭，则称P是一个数域。

显然：复数集C，实数集R，有理数集Q都是数域。

例1.1 数集 $F=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in Q\}$ 是一个数域。

注：最小的数域是有理数域？

3

NJUPT

1.1.2线性空间的定义与性质

设V是一非空集合，P是一个数域，在V中定义加法：$v=\alpha+\beta$; 在V与P之间定义数量乘法 $\delta=k\alpha$. 如果V对加法与数量乘法运算封闭，且加法与数量乘法运算满足

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
3) $\exists\ 0\in V,\forall\alpha\in V,$有$\alpha+0=\alpha$
4) $\forall\alpha\in V,\exists\ \beta\in V,s.t\ \ \alpha+\beta=0$
5) $1\alpha=\alpha$
6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$
7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+l\beta$

则称V是数域P上的线性空间或向量空间.

4

NJUPT

例1. 2 判断下列集合是否构成线性空间

1）空间中不平行于一已知向量ξ的全体向量所的集合，是否构成线性空间？

不

2）数域P上次数等于定数$n(n\geq1)$的多项式全体所构成的集合，是否构成复数域上的线性空间？

不

5

NJUPT

例1.3

1. n维向量空间R^n按照向量的加法以及向量与实数的数乘都构成实线性空间.
2. 全体 $m\times n$实矩阵，在矩阵的加法及数乘两种运算下构成一个实线性空间，记为$R^{m\times n}$.
3. 区间$[a,b]$上的全体连续实函数，按照函数的加法及数与函数的乘法构成一个实线性空间，记为$C[a,b]$.
4. 全体次数小于 n的多项式连同零多项式，按照多项式的加法与数乘构成一个实线性空间，记为 $P_n[x]$.
5. 齐次线性方程组 $AX=0$的全体解向量，在向量的加法及数乘运算下构成一个线性空间，即通常所说的解空间.

注：非齐次线性方程组$AX=b$的全体解向量，在上述两种运算下不构成一个线性空间.

6

NJUPT

例1.3

1. n维向量空间R^n按照向量的加法以及向量与实数的数乘都构成实线性空间.
2. 全体 $m\times n$实矩阵，在矩阵的加法及数乘两种运算下构成一个实线性空间，记为$R^{m\times n}$.
3. 区间$[a,b]$上的全体连续实函数，按照函数的加法及数与函数的乘法构成一个实线性空间，记为$C[a,b]$.

例1.3

4. 全体次数小于 n的多项式连同零多项式，按照多项式的加法与数乘构成一个实线性空间，记为 $P_n[x]$.
5. 齐次线性方程组 $AX=0$的全体解向量，在向量的加法及数乘运算下构成一个线性空间，即通常所说的解空间.

注：非齐次线性方程组$AX=b$的全体解向量，在上述两种运算下不构成一个线性空间.

6. 仅含有单独一个零向量的集合V也构成一个向量空间，称为零空间，记为{0}.

7. 设R_+表示所有正实数的集合，在下述的加法与数乘之下，R_+构成实数域上的向量空间。

$$x\oplus y=xy,\quad k\circ x=x^k\quad (x,y\in R_+,k\in R)$$

注：以上例子表明，线性空间是广泛的，因而向量也是广泛的概念，不仅限于几何向量。可以是几何向量，也可以是数、函数、矩阵、多项式，还可以是变换等。

线性空间的性质

性质1 线性空间V中只有一个零向量. (零向量的唯一性)

性质2 V中每个向量只有一个负向量. (负向量的唯一性)

性质3 $0\alpha=0$, $k0=0$, $(-1)\alpha=-\alpha$.

性质4 若$k\alpha=0$, 则$k=0$或者$\alpha=0$.

1.2 基、坐标与维数

1.2.1 向量组的线性相关性

1. 有关概念

定义1.3 设V是数域P上的线性空间，对V中的向量(元素) $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in P$ 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

则称β是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合，也称β可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，$k_1,k_2,\ldots,k_m$ 称为线性表示的系数。

定义1.4

设V是数域P上的线性空间，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in V$，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in P$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，否则称它们线性无关.

常用的结论

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关当且仅当由

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\Rightarrow k_1=k_2=\cdots k_m=0$$

2. 单个向量α线性相关当且仅当 α=0.
3. R^n中两个向量线性相关当且仅当它们成比例.
4. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关当且仅当其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

5. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则β可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 唯一线性表示.
6. 线性无关组不含零向量，含零向量的向量组必定线性相关.
7. 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，并且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则 $s\le t$.
8. 等价的线性无关向量组必定含有相同个数的向量.

1.2.2　基、坐标与维数

定义1.5　设V是数域P上的线性空间，如果存在n个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$，满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关;

(2) V中任一向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示;

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间V的一组基，n称为V的维数，记为dim$V$, 并称V是n维线性空间.

由定义不难证明:

（1）零空间{0}是零维线性空间，没有基;

（2）n维线性空间V恰有n个线性无关的向量构成的基;

（3）n维线性空间V任意n个线性无关的向量都构成V的一组基。

例1.4 求下列各线性空间的一组基

1) 数域P上全体n阶方阵构成的空间$P^{n\times n}$,

2) $P^{n\times n}$中全体对称矩阵构成数域P上的空间.

解：1) $P^{n\times n}$基为　E_{ij}　$i,j=1,2,\cdots,n$

$\dim(P^{n\times n})=n^2$

其中E_{ij}表示第i行j列元素是1, 其余元素是0的n阶矩阵

2) 令$F_{ij}=\begin{cases}E_{ij}+E_{ji}\\E_{ii}\end{cases}$　$1\le i\le j\le n$

维数为$\dfrac{n(n+1)}{2}$.

NJUPT

向量的坐标

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in V$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，对 V 中任意向量 α 均可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 唯一线性表示为 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$.

记 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, 称为向量 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标.

也可以记为 $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$.

NJUPT

例1.5 在实系数多项式所构成的实线性空间 $P_3[x]$ 中，

令 $f_1=1,f_2=x,f_3=x^2$

则 f_1,f_2,f_3 线性无关，且 $P_3[x]$ 中任一多项式都可以由 f_1,f_2,f_3 线性表示， $1,x,x^2$ 是 $P_3[x]$ 的一组基，且 $f=a+bx+cx^2$ 在该基下的坐标是 $(a,b,c)^T$.

NJUPT

例1.6 在全体二阶实方阵在矩阵的加法及数乘两种运算下构成的实线性空间 $R^{2\times2}$ 中，令

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

NJUPT

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 是 数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基, 设向量 α 在基下的坐标为 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, 则有：

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)X,$$

于是 V 与数域 P 上 n 维向量空间建立了一一对应关系,

$$\alpha \xleftrightarrow{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)} (x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$$

NJUPT

例1.7. 求 $R^{2\times2}$ 中，向量组

$$A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}2&-2\\0&2\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$$

的秩及一个极大无关组。

NJUPT

1.2.3 基变换与坐标变换

n维线性空间V中任意n个线性无关的向量都可以作为V的一组基. 显然，同一个向量在两组基下的坐标是不同的，下面主要研究同一个向量在不同基下的坐标之间的联系 。

定义1.7 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$和$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$是$n$维线性空间$V$的两组基，显然它们可以互相线性表示，

$$\begin{cases} \eta_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{21}\varepsilon_2 + \cdots + c_{n1}\varepsilon_n , \\ \eta_2 = c_{12}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + \cdots + c_{n2}\varepsilon_n , \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \eta_n = c_{1n}\varepsilon_1 + c_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + c_{nn}\varepsilon_n , \end{cases}$$

若将上式用矩阵形式表示，则

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

记

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵C称为由基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$到基$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$的过渡矩阵

定理1.1 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是n维线性空间V的两组基，由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为C, 则C是可逆的；且如果向量在这两组基下的坐标分别是X与Y，则

$$X = CY \quad 或 \quad Y = C^{-1}X$$

上式就是维线性空间V中向量在两组基下的新旧坐标之间的坐标变换公式.

例1.8 在$P_4[x]$中取两组基

$$\begin{cases} \alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x \\ \alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1 \\ \alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ \alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1 \\ \beta_2 = x^2 + 2x + 2 \\ \beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2 \\ \beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2 \end{cases}$$

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (x^3,x^2,x,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (x^3,x^2,x,1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

则有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B$$

例1.9 设R^3中两组基

I $\quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

II $\quad \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

求

(1) 基I到基II的过渡矩阵；

(2) 向量$\alpha = 3\eta_1 + 2\eta_3$在基I下的坐标以及在自然基$e_1, e_2, e_3$下的坐标；

(3) 向量$\beta = (4,1,-2)^T$ 在基 I 下的坐标.

解 （1）设基 **I** 到基 **II** 的过渡矩阵为C，记矩阵 $A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$，$B=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则由基变换公式知有 $B=AC$ ，于是

$$C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&2&1\\1&-1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&2&1\\1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

（2） $\alpha=3\eta_1+2\eta_3$ 在基 **I** 下的坐标为

$$X=CX'=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-6\end{pmatrix}$$

$\alpha=3\eta_1+2\eta_3$ 在自然基 e_1,e_2,e_3 下的坐标可直接算出

$$\alpha=3\eta_1+2\eta_3=3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

（3）自然基 e_1,e_2,e_3 到基 **I** 的过渡矩阵为 $A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$，所以 $\beta=(4,1,-2)^T$ 在基 **I** 下的坐标为

$$Y'=A^{-1}Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

1.3 线性子空间

1.3.1 子空间的概念

定义1.8 设V为数域P上的线性空间，W是线性空间V的非空子集，若W关于V中的线性运算也构成数域P上的线性空间，则称W是V的线性子空间，简称子空间.

对任何线性空间V，显然由中单个零向量构成的子集是的子空间，称为的零子空间,记为{0}; V本身也是V的子空间. 这两个子空间称为V的平凡子空间. V的其它子空间称为V的非平凡子空间.

若W V，且W V，称 W是V的真子空间。

注：线性子空间也是线性空间，所以前面有关基、维数与坐标等概念，对线性子空间也成立.

定理1.2 设 W是线性空间 V的非空子集，则 W是 V的子空间的充要条件是: W对 V中的线性运算封闭.

证明：必要性是显然的，只证充分性.

因W对V中的线性运算封闭，则只需验证满足定义1.2中的八条运算规则.

因为取k=0，$k\alpha=0\in W$；又取k=−1，$k\alpha=-\alpha\in W$，满足规则(3), (4)，即W中存在零元素负元素.又因为W V，所以V中加法与数乘关于定义1.2中的其余六条运算规则对W中的元素运算时必须满足.故由定义1.2知：W是线性空间，从而是V的子空间.

例1.10 设$A\in P^{n\times n}$,证明全体与A可交换的n阶矩阵作成$P^{n\times n}$的一个子空间，记为$C(A)$.

思考：设W_1，W_2都是V的真子空间，则存在$\alpha\in V$，

而$\alpha\notin W_1$且$\alpha\notin W_2$同时成立。

例1.11 n阶上三角实矩阵的集合、下三角实矩阵的集合、实对角矩阵的集合都是线性空间$P^{n\times n}$的子空间.

例1.12 函数集合$C_1=\{f(x)\in C[a,b], f(a)=0\}$是线性空间$C$[a,b]的子空间.

例1.13 函数集合$C_2=\{f(x)\in C[a,b], f(a)=1\}$ 不是线性空间C[a,b]的子空间.

例1.14 取线性空间$P_4[x]$的子集

$$W=\left\{p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \middle| a_2+a_1+a_0=0, a_i\in R\right\}$$

证明W是$P_4[x]$的子空间，并求W的维数.

例1.15 设V为数域P上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$是$V$中的一组向量，则

$$span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in P\}$$

是V的子空间，称为由向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$的生成子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$称为该子空间的生成元.

生成子空间的重要意义在于：n维线性空间V是由它的基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$生成的子空间，即$V=span\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$.

易证对一般的线性空间，成立：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$的任一极大无关组就是$W=span\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$的一组基，且$\dim W=R\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$

(2) 两个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$等价 $\Leftrightarrow$ $span\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}=span\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s\}$.

由于线性空间V的子空间 W是V的一个子集，因此W中线性无关的向量个数不可能比V中的更多，所以 $\dim W\le\dim V$.

进一步有下列定理：

定理1.3 n线性空间V的任何一个子空间W的基都可以扩充成 V的一组基.

1.3.2 子空间的交与和

定义1.9 设W_1与W_2是线性空间V的两个子空间，称

$$W_1\cap W_2=\{\alpha \mid \alpha\in W_1且\alpha\in W_2\}$$

为W_1与W_2的交. 而称

$$W_1+W_2=\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in W_1,\ \alpha_2\in W_2\}$$

为W_1与W_2的和.

定理1.4 设V是数域P上的线性空间，W_1与W_2是V的两个子空间，则$W_1\cap W_2$与W_1+W_2都是V的子空间.

例1.16 设W_1与W_2分别是齐次线性方程组$AX=0$和$BX=0$的解空间，则$W_1\cap W_2$为线性方程组

$$\begin{cases}AX=\mathbf{0}\\BX=\mathbf{0}\end{cases}$$

的解空间.

例1.17

已知$C^{2\times2}$的子空间

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\y&y\end{pmatrix}\middle| x,y\in C\right\},\quad W_2=\left\{\begin{pmatrix}x&-y\\-x&y\end{pmatrix}\middle| x,y\in C\right\}$$

分别求$W_1\cap W_2$, W_1+W_2 的一组基及维数。

定理1.5 设W_1和W_2是线性空间V的子空间，则

$$\dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$$

定理1.5 设W_1和W_2是线性空间V的子空间，则

$$\dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$$

注 一般地

$$\dim(W_1+W_2)\le\dim(W_1)+\dim(W_2)$$

1.3.3 子空间的直和

定义1.10：设V_1和V_2都是线性空间V的子空间,若对任意的

$$\alpha\in V_1+V_2 \text{ 都有 } \alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ (\alpha_i\in V_i)$$

且是唯一的，这个和V_1+V_2就称为直和,记为

$$V_1\oplus V_2$$

定理1.6 设W_1,W_2是线性空间V的子空间,则下列命题等价

(1) W_1+W_2是直和;

(2) W_1+W_2中的零元素分解唯一，即由

$$0=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_i\in W_i$$

则$\alpha_1=\alpha_2=0$;

(3) $W_1\cap W_2=\{0\}$;

(4) 对于W_1,W_2分别取一组线性无关的向量组，它们合起来仍然线性无关;

(5) $\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$.

例 设α,β 线性无关,则$L(\alpha)+L(\beta)$是直和,

而$L(\alpha,\alpha+\beta)+L(\beta)$不是直和.

设$V_1,V_2,\ldots,V_s$是线性空间V的子空间，如果和$V_1+V_2+\ldots+V_s$中的每个向量α表法唯一，

称和$V_1+V_2+\ldots+V_s$是直和，记为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$

定理3：设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间V的子空间，则下列命题相互等价：

（1） $W=V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和；

（2） 零向量表示法唯一；

（3） $V_i\cap(\sum_{j\ne i}V_j)=\{0\}$.

（4） $\dim(W)=\sum\dim(V_i)$.

定理1.7 设W_1是n维线性空间V的一个子空间，则必存在V的一个子空间W_2，使

$$V=W_1\oplus W_2.$$

例1.18
设V是数域P上的2维空间，V的一组基为α_1, α_2, V的两个子空间为

$$W_1=\{k_0(\alpha_1+\alpha_2)|k_0\in P\},$$
$$W_2=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2|k_1,k_2\in P, k_1+k_2=0\}$$

证明个$V=W_1\oplus W_2$.

注意：先证明$V=W_1+W_2$，再证明W_1+W_2为直和.

1.4 线性变换

1.4.1 线性变换的概念

定义 1.10 线性映射（变换）的要点：

(i) T是线性空间V到线性空间U的映射：

$$T: V\to U$$

(ii) T保持线性运算：

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha)+T(\beta)$$
$$T(k\alpha) = kT(\alpha)$$

当$V=U$时，T称为线性空间V上的线性变换。

例1.17 V中的数乘变换T_λ：

c是P中的数，$\forall\alpha\in V$，$T_c(\alpha)=c\alpha$.

特例：c=1，T_λ是恒等变换, 记为I

c=0，T_c是零变换, 记为 O

注：可以在任何线性空间中定义数乘变换.

例1.18 $P^{n\times n}$中的变换 T_A: 设$A\in P^{n\times n}$是一个给定的矩阵，$\forall X\in P^{n\times n}$，$T_A(X)=AX$. 则$T_A$是$P^{n\times n}$的一个线性变换.

例1.19 $P_n[X]$中的微分变换： $T: f(X)\to f'(x)$

注：以上三个例题中的变换都是线性变换.

例1.20 在$P_n[x]$中，定义$T(p)$=1, $\forall p\in P_n[X]$
则T不是$P_n[x]$上的线性变换.

1.4.2 线性变换T的性质：

1. $T(0)=0$; $T(-\alpha)=-T(\alpha)$.

2. $T\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{r}k_iT(\alpha_i)$.

注：线性变换保持线性相关性不变。

3. 若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性相关,则$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\ldots,T(\alpha_r)$也线性相关。

此命题的逆命题不真，即线性变换可能把线性无关的向量组映射成线性相关的向量组。

4. 若线性变换T是单射,则T把线性无关的向量组变成线性无关的向量组.

1.4.3 线性变换的运算

定义1.11 设V是数域P上的线性空间, T_1, T_2都是V上的线性变换, 则定义如下运算:

(1) 变换的加法: T_1+T_2: $(T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha)$

(2) 变换的数乘: kT: $(kT)(\alpha)=kT(\alpha)$

(3) 变换的乘法: T_1T_2: $(T_1T_2)(\alpha)=T_1(T_2(\alpha))$

(4) 可逆变换: 对变换T_1, 若存在变换T_2, 使得

$T_1T_2=T_2T_1=I$（恒等变换），

则称T_1为可逆变换, T_2是T_1的逆变换, 记为

$T_2=T_1^{-1}$.

关于线性变换的运算，有以下几点值得一提：

(1) 上述线性变换运算的结果仍是线性空间V上的线性变换；

(2) 线性变换T可逆当且仅当T为一一对应的；

(3) 若线性变换T可逆，则其逆变换是唯一的；

(4) 线性变换的乘法一般不满足交换律，即 $T_1T_2 \neq T_2T_1$；

(5) 对线性变换T，当n个T相乘时，常用T的n次幂来表示，即

$$T^n=\overbrace{T\cdot T\cdots T}.$$

1.5 线性变换的矩阵

1.5.1 线性变换在给定基下的矩阵

定义1.12 设T是n维线性空间V上的一个线性变换，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是$V$的一组基，如果这组基在线性变换$T$下的象$T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)$由这组基线性表示为

$$\begin{cases} T(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n, \\ T(\varepsilon_2)=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n, \end{cases}$$

即

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A.$$

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则n阶矩阵A就称为线性变换T在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵，

其中A的第j列就是$T(\varepsilon_j)$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的坐标.

显然：矩阵A由基在T下的像$T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)$唯一确定.

例1.21 在R^3中，定义$f(a,b,c)=(a,b,0)$为投影变换.

(1) 求f在自然基$e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$下的矩阵；

(2) 求f在基$\varepsilon_1=(1,0,0), \varepsilon_2=(-1,1,0), \varepsilon_3=(1,1,1)$下的矩阵.

例1.22 取

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

为线性空间$R^{2\times 2}$的一组基，设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$. 在$R^{2\times 2}$上定义线性变换$T$为 $T(X)=AX, \forall X\in R^{2\times 2}$. 求$T$在这一组基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵.

n维线性空间V的线性变换与n阶矩阵之间存在一一对应关系，即有

定理1.8 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是线性空间$V$的一组基，$T$ 和S 是V 的两个线性变换，且它们在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵分别是$A$和$B$，则

(1) $T+S$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下 的矩阵是$A+B$；

(2) kT在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵是$kA$；

(3) TS在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵是$AB$；

(4) T 可逆当且仅当矩阵A可逆，且T^{-1}在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵是$A^{-1}$.

(5) 设线性空间V中任一个向量α与其象$T(\alpha)$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$

下的坐标分别为$X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$与$Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$,

则 $Y=AX$.

注：这就是线性变换的坐标变换公式即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3 不同基下的变换矩阵关系

两组基: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$,

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$$

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$$

$$T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)B$$

则$B=P^{-1}AP$.

定理1.9 线性空间V的一个线性变换T在不同基下的矩阵是相似的. (P29)

例1.23 设T是$R^{2\times 2}$上的线性变换，$\forall A \in R^{2\times 2}$，有

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A$$

求T在基

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

下的矩阵.

1.6值域、核与不变子空间

1.6.1值与核的定义

定义 1.14 (P.29) 线性变换的象空间和零空间

设线性映射$T: V \to U$,

值域 $R(T)=\{\beta \in U \mid \exists \alpha \in V, \beta=T(\alpha)\}$ U

核空间 $N(T)=\{\alpha \mid \alpha \in V, T(\alpha)=0\}$, 也可记为Ker$T$.

定理1.10 $N(T)$, $R(T)$分别是V, U的子空间.

基于以上原因，所以T值域又称为T的像空间, T 的核子空间又称为T的零子空间.

1.6.2 值域与核的性质

定义1.14 设T是线性空间V上的线性变换，$R(T)$的维数称为T的秩, 记为rank$T$; 而$N(T)$的维数称为T的零度或亏度, 记为null$T$.

T 的秩=dim$R(T)$; T 的零度=dim$N(T)$

定理1.11 设T是n维线性空间V上的线性变换，且T在V的一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$下的矩阵是$A$，则

(1) T的值域$R(T)$是$T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \dots, T(\varepsilon_n)$生成的子空间，即

$$R(T)=\text{span}\{T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \dots, T(\varepsilon_n)\}.$$

(2) T的秩 $=r(A)$.

例1.24 由例1.31知R^3上的投影变换$f:(a,b,c) \to (a,b,0)$, 在自然基$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由定理1.11知的T秩 =2. 事实上, 由例1.34知: R^3上的投影变换f的值域就是xoy平面.

定理1.12 设V, U分别是数域P上的n维和m维线性空间，

T: $V\to U$的线性映射，则

$$\dim R(T)+\dim N(T) = n = \dim V.$$

设A 是$m\times n$矩阵，称 $R(A)=\{Ax \mid x\in C^n\}$

为矩阵A的值域; $N(A)=\{x \mid x\in C^n, Ax=0\}$

为A的核。

$\dim R(A)$ $\dim N(A)$ 称为A的秩和零度.

推论

(1) $\dim R(T)+\dim N(T)=\dim V$

(2) $\dim R(A)=rank(A)$

(3) $\dim R(A)+\dim N(A)=n$, n为A的列数。

例1.26 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 在$R^{2\times 2}$上的线性变换定义为

$$TX=AX.$$

求T的值域$R(T)$及核子空间$N(T)$基与维数，并问

$R(T)+N(T)$是否是直和？

注：书上P34页：不变子空间

1.7 向量空间的同构

1.7.1 定义

设V, U都是数域P上的线性空间，如果映射

σ: $V\to U$, 具有如下性质：

i) σ为双射

ii) $\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha)+ \sigma(\beta)$, $\forall \alpha, \beta\in V$

iii) $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$, $\forall k\in P$, $\forall \alpha\in V$

则称σ是V到U的一个**同构映射**，并称线性空间

V和U**同构**，记作 $V\cong U$.

1.7.2 同构的有关结论

1、数域P上任一n维线性空间都与P^n同构.

2、设V, U是数域P上的线性空间，σ是V到U的同构映射，则有

1) $\sigma(0) = 0$, $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$.

2) $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r)$

$= k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\ldots+k_r\sigma(\alpha_r)$,

其中 $k_i\in P$, $\alpha_i\in V$, i=1,2, ... , r.

3) V中向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性相关（线性无关）的充要条件是它们的象$\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \ldots, \sigma(\alpha_r)$ 线性相关（线性无关）.

4) $\dim V=\dim U$.

5) σ: $V\to U$的逆映射σ^{-1}为U到V的同构映射.

6) 若W是V的子空间，则W在σ下的象集

$$\sigma(W) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha\in W\}$$

是的U子空间，且$\dim W=\dim\sigma(W)$.

注: 由2可知，同构映射保持零元、负元、线性组合及线性相关性，并且同构映射把子空间映成子空间.

3、两个同构映射的乘积还是同构映射.

证：设 $\sigma: V \to U$, $\tau: U \to W$ 为线性空间的同构映射，则乘积 $\tau\circ\sigma$ 是 $V \to W$ 的1–1 映射. 任取 $\alpha, \beta \in V$, $k \in P$, 有

$$\tau\circ\sigma(\alpha+\beta) = \tau(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))$$

$$= \tau(\sigma(\alpha)) + \tau(\sigma(\beta)) = \tau\circ\sigma(\alpha) + \tau\circ\sigma(\beta)$$

$$\tau\circ\sigma(k\alpha) = \tau(\sigma(k\alpha)) = \tau(k\sigma(\alpha))$$

$$= k\tau(\sigma(\alpha)) = k\tau\circ\sigma(\alpha)$$

所以，乘积 $\tau\circ\sigma$ 是 V 到 W 的同构映射.

4、数域P上的两个有限维线性空间 V_1, V_2 同构 $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.

证：$(\Rightarrow)$ 若 $V_1 \cong V_2$，由性质2之4) 即得

$$\dim V_1 = \dim V_2.$$

$(\Leftarrow)$ （法一）若 $\dim V_1 = \dim V_2$，

由性质1, 有 $V_1 \cong P^n$, $V_2 \cong P^n$，

$\therefore V_1 \cong V_2$.

"$\Leftarrow$"(法二：构造同构映射)

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 和 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 分别为 V_1 和 V_2 的一组基.

定义 $\sigma: V_1 \to V_2$ 使

$$\forall \alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n \in V_1,$$

$$\sigma(\alpha) = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n.$$

则 σ 就是 V_1 到 V_2 的一个映射.

又任取 $\alpha, \beta \in V$，设 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i$，$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i$，

若 $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$，即 $\sum_{i=1}^{n} a_ie_i = \sum_{i=1}^{n} b_ie_i$，则 $a_i = b_i$，

$i = 1, 2, \cdots, n$，从而, $\alpha = \beta$, 所以 σ 是单射.

任取 $\alpha' \in V_2$，设 $\alpha' = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i$，

则有 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i \in V_1$，使 $\sigma(\alpha) = \alpha'$.

所以 σ 是满射.

再由 σ 的定义，有 $\sigma(\varepsilon_i) = e_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$

易证，对 $\forall \alpha, \beta \in V_1$，$\forall k \in P$ 有

$$\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha),$$

所以 σ 是 V_1 到 V_2 的一个同构映射，故 $V_1 \cong V_2$.

例1.25 把复数域看成实数域 R 上的线性空间，证明：$C \cong R^2$.

证法一：证维数相等

首先，$\forall x \in C$，x 可表成 $x = a1 + bi$，$a, b \in R$

其次，若 $a1 + bi = 0$，则 $a = b = 0$.

所以，1，i 为 C 的一组基，$\dim C = 2$.

又 $\dim R^2 = 2$,

所以 $\dim C = \dim R^2$，故 $C \cong R^2$.

证法二：构造同构映射

作对应 $\sigma: C \to R^2$，$\sigma(a+bi) = (a, b)$.

则 σ 为 C 到 R^2 的一个同构映射.

例1.25 全体正实数 R^+ 关于加法 $\oplus$ 与数量乘法 $\circ$：

$$a \oplus b = ab,\quad k \circ a = a^k$$

作成实数域 R 上的线性空间. 把实数域 R 看成是自身上的线性空间.

证明：$R^+ \cong R$, 并写出一个同构映射.

证：作对应 $\sigma: R^+ \to R$，$\sigma(a)=\ln a$，$\forall a\in R^+$

易证σ为R^+到R的1－1对应.

且对 $\forall a,b\in R^+$，$\forall k\in R$，有

$$\sigma(a\oplus b)=\sigma(ab)=\ln ab=\ln a+\ln b=\sigma(a)+\sigma(b)$$

$$\sigma(k\circ a)=\sigma(a^k)=\ln a^k=k\ln a=k\sigma(a)$$

所以，σ为R^+到R的同构映射．故$R^+\cong R$.

方法二：作对应 $\tau: R\to R^+, \tau(x)=e^x$，$\forall x\in R$

易证：τ为R到R^+的1－1对应，而且也为同构映射.

事实上，τ为σ的逆同构映射.

练习

设集合 $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in R\right\}$

1) 证明：W为$R^{2\times 2}$的子空间，并求出W的维数与一组基.

2) 证明：复数域C看成R上的线性空间与W同构，并写出一个同构映射.

定理1.13 设V,U是有限维线性空间，线性变换

$T:V\to U$.

则T是单射当且仅当$N(T)=\{0\}$;

T是满射当且仅当$R(T)=U$.

定理1.14 设V是n维线性空间，线性变换$T: V\to V$

则以下条件等价：

（1） T是单射；

（2） T是满射；

（3） T是双射.

例1.27 平面上全体向量，对如下定义的加法和数乘

$$\alpha\oplus\beta=\alpha-\beta \qquad k\circ\alpha=-k\alpha$$

则R^2按照上述定义不构成R上的线性空间。

例1.28 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，记

$$L(A)=\left\{B\middle| B\in R^{2\times 2}, AB=BA\right\}$$

求证$L(A)$为$R^{2\times 2}$的线性子空间，并求$\dim L(A)$.

例1.29 设有R^3的两个子空间：

$$W_1=\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle|\,2x_1+x_2-x_3=0\right\}$$

$$W_2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle|\,x_1+x_2=0,\ 3x_1+2x_2-x_3=0\right\}$$

分别求子空间W_1+W_2, $W_1\cap W_2$的基与维数.

例1.30 设W_1, W_2分别是齐次线性方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

与

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间，试证明$R^n=W_1\oplus W_2$.