第二章计算题

1、（1）用单纯形方法求解下面的线性规划
$$\begin{aligned} &\min -4x_1-3x_2 \\ &s.t.\ 2x_1+3x_2\le 14 \\ &\quad 3x_1+x_2\le 16 \\ &\quad x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量 x_1 写出对应的割平面方程。

或（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对对变量 x_2 写出分枝后的线性规划。

解：（1）问题化为标准型：

$$\begin{aligned} &\min -4x_1-3x_2 \\ &s.t.\ 2x_1+3x_2+x_3=14 \\ &\quad 3x_1+x_2\quad +x_4=16 \\ &\quad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0 \end{aligned}$$

p_3,p_4 为初始可行基，$(0,0,4,3)^T$ 为初始基可行解，相应的单纯形表如下

c_j			-4	-3	0	0	θ_j
cB	B	b	p1	p2	p3	p4	
0	p3	14	2	3	1	0	7
0	p4	16	(3)	1	0	1	16/3
σ*j*			-4	-3	0	0	
0	p3	10/3	0	(7/3)	1	-2/3	10/7
-4	p1	16/3	1	1/3	0	1/3	16
σ*j*			0	-5/3	0	4/3	
-3	p2	10/7	0	1	3/7	-2/7	
-4	p1	34/7	1	0	-1/7	3/7	
σ*j*			0	0	5/7	6/7	

判别数均非负，所以得到最优解为$(\frac{34}{7},\frac{10}{7})^T$，最有函数值 $f^*=-\frac{166}{7}$。

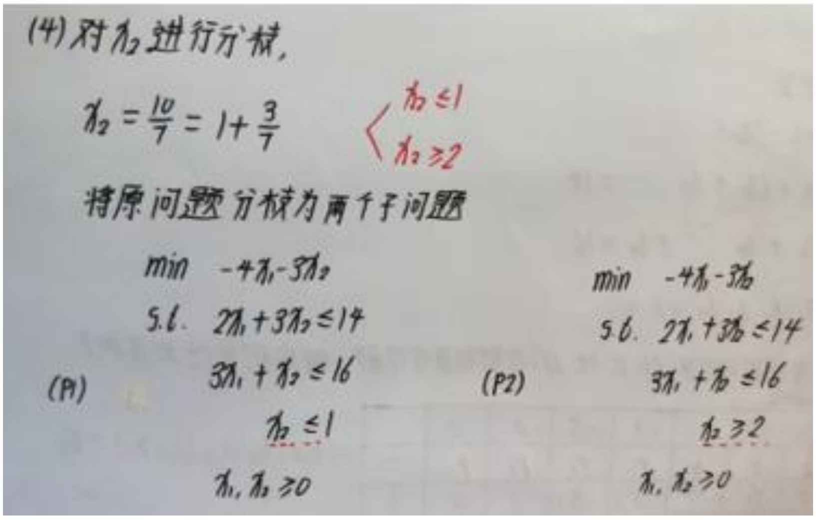
（2）影子价格向量为$(c_B^T B^{-1})^T = \left((-4,-3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\right)^T = (-\frac{5}{7},-\frac{6}{7})^T$

（3）（5 分）由单纯形表可以得到

$x_1 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 = \frac{34}{7}$，

即 $x_1 - x_3 - 4 = \frac{6}{7} - \frac{6}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4$

割平面方程为$\frac{6}{7} - \frac{6}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 \le 0$ 。



(4) 对x_2进行分枝，

$x_2 = \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$ $\left\langle \begin{array}{l} x_2 \le 1 \\ x_2 \ge 2 \end{array} \right.$

将原问题分枝为两个子问题

(P1)

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ & 3x_1 + x_2 \le 16 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(P2)

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ & 3x_1 + x_2 \le 16 \\ & x_2 \ge 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

第三章计算题

1. 用 Newton 法求解$\min \quad x_1^4 + x_2^2 - 2x_1 - x_2$， 设初始点为$x^{(0)} = (1,1)^T$.

解： $g(x) = (4x_1^3 - 2, 2x_2 - 1)^T, G(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$x^{(0)} = (1,1)^T, g_0 = (2,1)^T, G(x_0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$正定，

$$x^{(1)} = x^{(0)} - G_0^{-1}p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

2. 用 PRP 方法求解问题 $\min \quad 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1$，初始点 $x^{(0)} = (0,0)^T$.

解：$g(x) = (4x_1 - 2x_2 + 6, -2x_1 + 2x_2)^T$，$x^{(0)} = (0,0)^T$，$g_0 = (6,0)^T$，$p_0 = -g_0 = (-6,0)^T$，

一维搜索：$\min f(x^{(0)}+\alpha p_0)=72\alpha^2-36\alpha$ 的最优解为 $\alpha_0=\frac{1}{4}$，

$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0 p_0=(-\frac{3}{2},0)^T$，

$g^{(1)}=(0,3)^T$，

根据 PRP 方法，有 $p_1=-g_1+\beta_0 p_0$， $\beta_0=\frac{g_1^T(g_1-g_0)}{g_0^T g_0}=\frac{1}{4}$，

$p_1=(-\frac{3}{2},-3)^T$，

一维搜索：$\min f(x^{(1)}+\alpha p_1)=\frac{9}{2}\alpha^2-9\alpha-\frac{9}{2}$ 的最优解为 $\alpha_1=1$，

$x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha p_1=(-3,-3)^T$， $g_2=(0,0)^T$。

因此最优解为 $x^*=x^{(2)}=(-3,-3)^T$。

3. 用 FR 共轭梯度方法求解问题 $\mathbf{\min f(x)=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-2x_1}$ ，初始点 $\boldsymbol{x^{(0)}=(0,0)^T}$.

解：$\boldsymbol{g(x)=(3x_1-x_2-2,x_2-x_1)^T}$， $x^{(0)}=(0,0)^T$， $g_0=(-2,0)^T$， $p_0=-g_0=(2,0)^T$，

一维搜索：$\min f(x^{(0)}+\alpha p_0)=6\alpha^2-4\alpha$ 的最优解为 $\alpha_0=\frac{1}{3}$，

$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0 p_0=(\frac{2}{3},0)^T$，

$g^{(1)}=(0,-\frac{2}{3})^T$，

根据 FR 公式，有 $p_1=-g_1+\beta_0 p_0$， $\beta_0=\frac{g_1^T g_1}{g_0^T g_0}=\frac{1}{9}$，

$p_1=(\frac{2}{9},\frac{2}{3})^T$，

一维搜索：$\min f(x^{(1)}+\alpha p_1)=\frac{4}{27}\alpha^2-\frac{4}{9}\alpha+\frac{2}{3}$ 的最优解为 $\alpha_1=\frac{3}{2}$，

$x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha p_1=(1,1)^T$， $g_2=(0,0)^T$。

因此最优解为 $x^*=x^{(2)}=(1,1)^T$， $f^*=-1$。

4. 用 DFP 方法求解问题 $\mathbf{\min}\quad x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1$，初始点 $\boldsymbol{x^{(0)}=(1,1)^T}$.

$H_0 = I$. DFP 矩阵修正公式为 $H_{k+1} = H_k - \dfrac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \dfrac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k}$.

解: $g(x) = (2x_1 - 2x_2 - 4,\ 4x_2 - 2x_1)^T$

$x_0 = (1,1)^T \Rightarrow g_0 = (-4,2)^T$, $p_0 = -g_0 = (4,-2)^T$

(i) 求迭代点 x_1, 令 $\varphi_0(\alpha) = f(x_0 + \alpha p_0) = 40\alpha^2 - 20\alpha - 3 \Rightarrow$ 极小点 $\alpha_0 = \frac{1}{4}$

$\therefore\ x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = (2, 0.5)^T \Rightarrow g_1 = (-1,-2)^T$

$\Rightarrow s_0 = x_1 - x_0 = (1, -0.5)^T$, $y_0 = g_1 - g_0 = (3,-4)^T$

由DFP修正公式, 得: $H_1 = H_0 - \dfrac{H_0 y_0 y_0^T H_0}{y_0^T H_0 y_0} + \dfrac{s_0 s_0^T}{y_0^T s_0} = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 84 & 38 \\ 38 & 41 \end{pmatrix}$

下一搜索方向为 $p_1 = -H_1 g_1 = (1.6, 1.2)^T$

(ii) 求迭代点 x_2, 令 $\varphi_1(\alpha) = f(x_1 + \alpha p_1) = 1.6\alpha^2 - 4\alpha - 5.5 \Rightarrow$ 极小点 $\alpha_1 = 1.25$

$\therefore\ x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1 = (4,2)^T$, $g_2 = (0,0)^T$

故 $x^* = x_2 = (4,2)^T$, $f^* = -8$.

第 4 章计算题

1. 用外罚函数法求解 $\begin{aligned} &\min\ x_1^2 + 3x_2^2 \\ &s.t.\ x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \end{aligned}$

解：构造增广目标函数是 $P(x,\sigma) = x_1^2 + 3x_2^2 + \sigma(x_1 + 2x_2 - 1)^2$，

(注：可以是 $P(x,\sigma) = x_1^2 + 3x_2^2 + \dfrac{\sigma}{2}(x_1 + 2x_2 - 1)^2$)

$$\frac{\partial P(x,\sigma)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\sigma(x_1 + 2x_2 - 1)$$
$$\frac{\partial P(x,\sigma)}{\partial x_2} = 6x_2 + 4\sigma(x_1 + 2x_2 - 1)$$

求驻点：$\dfrac{\partial P(x,\sigma)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial P(x,\sigma)}{\partial x_2} = 0$， 得 $x_1 = \dfrac{3\sigma}{3+7\sigma}, x_2 = \dfrac{2\sigma}{3+7\sigma}$，

令 $\sigma \to +\infty$， $x_1 \to \frac{3}{7}, x_2 \to \frac{2}{7}. \ x \to x^* = (\frac{3}{7}, \frac{2}{7})^T, f^* = \frac{3}{7}$。

2. 用内罚函数法（对数罚函数）求解 $\begin{array}{l}\min\ x_1^2 + 5x_2^2 \\ s.t.\ x_1 + x_2 - 3 \ge 0\end{array}$

解：构造增广目标函数是 $B(x,r) = x_1^2 + 5x_2^2 - r(x_1 + x_2 - 3)$，

$$\frac{\partial B(x,r)}{\partial x_1} = 2x_1 - \frac{r}{x_1 + x_2 - 3}$$
$$\frac{\partial B(x,r)}{\partial x_2} = 10x_2 - \frac{r}{x_1 + x_2 - 3}$$

令 $\frac{\partial B(x,r)}{\partial x_1} = \frac{\partial B(x,r)}{\partial x_2} = 0$，

得 $x_1 = \frac{30 + \sqrt{900 + 240r}}{24}, x_2 = \frac{30 + \sqrt{900 + 240r}}{120}$（负号舍去）

令 $r \to 0$， $x_1 \to \frac{5}{2}, x_2 \to \frac{1}{2}. \ x \to x^* = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})^T, f^* = \frac{15}{2}$。

3、用乘子法求解问题 $\begin{array}{l}\min\ x_1^2 + 2x_2^2 \\ s.t.\ 2x_1 + x_2 - 4 = 0\end{array}$

解： 构造增广拉格朗日函数为

$$M = x_1^2 + 2x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 4) + \frac{\sigma}{2}(2x_1 + x_2 - 4)^2，$$

令 $\frac{\partial M}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda + 2\sigma(2x_1 + x_2 - 4) = 0$， $\frac{\partial M}{\partial x_2} = 4x_2 - \lambda + \sigma(2x_1 + x_2 - 4) = 0$，

解得 $x_1 = \frac{16\sigma + 4\lambda}{9\sigma + 4}, x_2 = \frac{4\sigma + \lambda}{9\sigma + 4}$。

根据乘子迭代公式

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \sigma(2x_1 + x_2 - 4) = \frac{4}{9\sigma + 4}\lambda_k + \frac{16\sigma}{9\sigma + 4}。$$

当 $\sigma > 0$ 时，迭代收敛，且 $\lambda_k \to \lambda^* = \frac{16}{9}$。

在 $x_1 = \frac{16\sigma + 4\lambda}{9\sigma + 4}, x_2 = \frac{4\sigma + \lambda}{9\sigma + 4}$ 中，令 $\lambda = \frac{16}{9}$，得 $x_1 = \frac{16}{9}, x_2 = \frac{4}{9}$。

$f^* = \frac{32}{9}$。

4. 已知 $x^* = (1,3)^T$ 是求下面问题的 KT 点，确定常数 p 的取值范围。

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 \\ &s.t.\ \boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 4 = 0 \\ &\quad \boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}) = -3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \geq 0 \end{aligned}$$

解：点 $x^* = (1,3)^T$ 处的有效集为 $I^* = \{1,2\}$，

$\nabla f(x) = (2px_1, 2x_2)^T$， $\nabla f(x^*) = (2p, 6)^T$， $\nabla c_1(x) = (1,1)^T$， $\nabla c_2(x) = (-3,1)^T$，

$x^* = (1,3)^T$ 是问题的 KT 点，所以存在乘子 λ_1, λ_2，使得下面条件成立。

$\nabla f(x^*) - \lambda_1 \nabla c_1(x^*) - \lambda_2 \nabla c_2(x^*) = 0,$

$\lambda_2 \geq 0$

根据由 $\begin{pmatrix} 2p \\ 6 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$，可以得

$\lambda_1 = \dfrac{9+p}{2}, \lambda_2 = \dfrac{3-p}{2}$。

由 $\lambda_2 = \dfrac{3-p}{2} \geq 0$，解得 $p \leq 3$。

5. 求下面问题的可行的 KT 点
$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{x}_1^2 \text{-} \boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 \\ &s.t.\ \boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 \geq 0 \\ &\quad \boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^2 + 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 0 \end{aligned}$$

解： $\nabla f(x) = (2x_1, -1, 3)^T$， $\nabla c_1(x) = (1,1,1)^T$， $\nabla c_2(x) = (2x_1, 2, -1)^T$

可行的 KT 点满足条件
$$\begin{aligned} &\nabla f(x) - \lambda_1 \nabla c_1(x) - \lambda_2 \nabla c_2(x) = 0 \\ &\lambda_1 c_1(x) = 0, \\ &\lambda_1 \geq 0 \end{aligned}$$

根据 $\nabla f(x) - \lambda_1 \nabla c_1(x) - \lambda_2 \nabla c_2(x) = 0$ 得 $\begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

进而解得： $\lambda_1 = \dfrac{5}{3}$， $\lambda_2 = -\dfrac{4}{3}$， $x_1 = \dfrac{5}{14}$

根据 $\lambda_1 c_1(x) = 0$， $\lambda_1 \neq 0$ 可得： $\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$

联合 $\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^2 + 2\boldsymbol{x}_2 \text{-} \boldsymbol{x}_3 = 0$，得到 $x_2 = -\dfrac{95}{588}$， $x_3 = -\dfrac{115}{588}$

由于 $\lambda_1=\frac{5}{3}>0$，$(\frac{5}{14},-\frac{95}{588},-\frac{115}{588})^T$ 为可行的 KT 点。

五、求解二次规划
$$\begin{aligned}&\min\ \boldsymbol{x}_1^2+2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3+2\boldsymbol{x}_2^2+2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3+6\boldsymbol{x}_3^2-4\boldsymbol{x}_1+3\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3\\ &\boldsymbol{s.t.}\ \boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_3=1\\ &\quad -\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=2\end{aligned}$$

解：$G=\begin{bmatrix}2&2&4\\2&4&2\\4&2&12\end{bmatrix}$，$c=\begin{bmatrix}-4\\3\\1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

根据等式约束二次规划最优解的充要条件有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}&-\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

即
$$\begin{bmatrix}2&2&4&-1&0\\2&4&2&0&1\\4&2&12&-2&-1\\1&0&2&0&0\\0&-1&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{\lambda}_1\\\boldsymbol{\lambda}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

该方程组有唯一解 $(6,-\frac{9}{2},-\frac{5}{2},-11,8)^T$

因此最优解为 $x^*=(6,-\frac{9}{2},-\frac{5}{2})^T$，最优乘子向量为 $\lambda^*=(-11,8)^T$