最优化第一章作业题

（1）用黄金分割法求函数 x^2-x+1 在区间[-4,1]上的极小点，经过迭代后可以使得区间的长度小于 1。

（2）用黄金分割法求函数在[0,1]上的极小点，第一步所取的两个点为_________。

（3）用黄金分割法求函数 x^2-3x+2 在[0,4]上的极小点，迭代一步之后得到的区间为_______。

（4）用黄金分割法求函数 $2x^2-5x+1$ 在[1,6]上的极小点，要使得最后区间的长度小于 1，必须至少迭代________步。

（5）向量 $(1,r)^T$ 是问题 $\begin{aligned}&\min x_1-4x_2\\ &s.t.\ 3x_1-2x_2\ge 6\\ &\quad 2x_1+6x_2\le 12\\ &\quad x_2\ge 0\end{aligned}$ 在点 $(2,0)^T$ 的可行下降方向，求 r 的范围。

（6）课件第 69 页作业，证明 $\boldsymbol{\phi'(\alpha)=\nabla f(x_k+\alpha p_k)^T p_k}$

最优化第二章作业题

填空

（1）在三维空间 R^3 中，集合 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$ 的极点构成的集合为____。

（2）线性规划 $\begin{aligned} &\min 2x_1-x_2 \\ &s.t.\ x_1+x_2+x_3 \quad =4 \\ &\quad -x_1-x_2 \quad +x_4=2 \\ &\quad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0 \end{aligned}$ 的可行域共有_______个不同的极点。

（3）集合 $\{(x,y)\mid x^2+2y^2\le 4, x\ge 1, y\ge 1\}$ 的极点构成的集合为_________________________。

（4）在二维空间 R^2 中，集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge x\}$ 的极点构成的集合为

____。

（5）函数 $f(x_1,x_2)=ax_1^2+x_1x_2+2x_2^2-x_1+2x_2+1$ 为严格凸函数，则常数 a 的取值范围是_____________________。

（6）线性规划 $\begin{aligned} &\min 2x_1-3x_2 \\ &s.t.\ x_1+x_2\ge -1 \\ &\quad -3x_1+5x_2\le 2 \\ &\quad x_2\le 0 \end{aligned}$ 的对偶规划为____________________。

证明

（1） $f(x)$ 为凸集 $D\subset R^n$ 上的函数，上图 $epi(f)=\{(x,y)\mid x\in D, y\in R, y\ge f(x)\}$，证明 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $epi(f)$ 为凸集。

（2）考虑规划问题：$\begin{aligned} &\mathbf{\min} \quad \boldsymbol{f(x)} \\ &\boldsymbol{s.t.} \quad \boldsymbol{c_i(x)\le 0} \end{aligned}$，其中，$\boldsymbol{f(x), c_i(x)(i=1,2,\cdots,m): R^n\to R}$ 是凸函数，证明：（1）该问题的可行域是凸集；（2）该问题的最优解的集合 $\boldsymbol{A}$ 是凸集。

（3）设 z^*, s^* 分别为下列两个问题 $(I)\begin{aligned} &\min c^Tx \\ s.t.\quad &Ax=b \\ &x\ge 0 \end{aligned}$ $\quad (II)\begin{aligned} &\min c^Tx \\ s.t.\quad &Ax=b+d \\ &x\ge 0 \end{aligned}$ 的最优值。y^* 是(I)的对偶问题的最优解，证明 $z^*+y^{*T}d\le s^*$ 。

（4）设 $\bar{x}, \bar{y}$ 分别为下列两个问题

$$(I)\begin{aligned} &\min c^Tx \\ s.t.\quad &Ax\ge b \\ &x\ge 0 \end{aligned} \qquad (II)\begin{aligned} &\max y^Tb \\ s.t.\quad &y^TA\le c^T \\ &y\ge 0 \end{aligned}$$

的可行解。证明 $c^T\bar{x}\ge \bar{y}^Tb$ 。

计算

一、（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned} &\min -3x_1-4x_2 \\ &s.t.\ 2x_1+x_2\le 4 \\ &\quad x_1+3x_2\le 3 \\ &\quad x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量 x_1 写出对应的割平面方程。

二、（18％）（1）以 $(5/2,1/2,0,0)^T$ 为初始基可行解，用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned} &\min\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \\ &s.t.\quad x_1+x_2+x_3+\ x_4=3 \\ &\qquad 2x_1\quad\ +2x_3-6x_4=5, \\ &\quad x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0,x_4\ge 0. \end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对变量 x_1 写出分枝后的线性规划。

三、（教材 90 页第（4）小题））求解线性规划

$$\begin{aligned} &\min 3x_1+2x_2+x_3-x_4 \\ &s.t.\quad x_1-2x_2+x_3-\ x_4\le 15 \\ &\qquad 2x_1+x_2-x_3+2x_4\ge 10, \\ &\quad x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0,|\,x_4\,|\le 2. \end{aligned}$$

四、（教材 92 页第（5）小题）写对偶规划

$$\begin{aligned} &\min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \\ &s.t.\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,i=1,2,\cdots,m \\ &\qquad \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,j=1,2,\cdots,n \\ &\quad x_{ij}\ge 0,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

第三章

（1）已知两个向量 $p_1=(-1,5)^T, p_2=(1,1)^T$ 关于矩阵 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 共轭，则 $a=$______。

（2）在最速下降法，Newton 法，FR 方法，DFP 方法，BFGS 方法中不具备二次终止性的算法为________________。

（3）在 R^3 中 2 维平面 $\{(1,1,1)+k_1(1,0,2)^T+k_2(-1,2,0)^T \mid k_1,k_2\in R\}$ 上，函数 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 的极小点为________________。

（4）用牛顿法求解问题 $\min(x_1+2x_2)^2+(x_2-x_3+1)^2+(x_1+x_3-2)^2$，以 $x^{(0)}=(1,10,-9)^T$ 为初始点迭代一步后得到的点 $x^{(1)}=$__________。

(5)函数 $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ 在 2 维超平面 $\{(1,1)+k_1(1,2)^T \mid k_1\in R\}$ 上的极小点为 $(1,1)+\beta(1,2)^T$，则 β=__________________。

(6)用最速下降法求解问题 $\min x_1^2+2x_2^2$，以 $x^{(0)}=(1,1)^T$ 为初始点迭代一步后得到的点 $x^{(1)}=$__________________。

(7)已知常数 a,b 满足 $-a+b=\frac{16}{5}$，两个向量 $p_1=(1,2)^T, p_2=(a,-1)^T$ 关于矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$ 共轭，则常数 $b=$________。

(8)用 DFP 算法求解无约束最优化问题，$\boldsymbol{H_k}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{g_k}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,则方向 $\boldsymbol{p_k}=$____.

(9)请写出求解无约束最优化问题的具备二次终止性的四个算法____________

(10) a,b 是两个实数，两个向量 $p_1=(-3,a)^T, p_2=(-1,1)^T$ 关于矩阵 $\begin{bmatrix} b & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 共轭，则 a^2+b^2 的最小值为________。

第四章

（1）对于优化问题
$$\begin{aligned} \min\ & f(x_1,x_2) \\ s.t.\ & 4-(x_1^2+x_2^2)\ge 0 \\ & x_1\ge 0 \\ & 1-x_1\ge 0 \\ & x_2\ge 0 \end{aligned}$$
，该问题在点 $(1,\sqrt{3})^T$ 处的有效集为____，

（2）用外罚函数方法求解 $\begin{aligned} \min\ & x_1^4+x_2^4 \\ s.t.\ & x_1-x_2^2=1 \end{aligned}$，其增广目标函数为________________。

(3)用(对数)内罚函数方法求解 $\begin{aligned} \min\ & x_1^4+x_2^4 \\ s.t.\ & x_1+x_2^2\ge 1 \end{aligned}$，其增广目标函数为______________。

(4)用乘子法求解 $\begin{aligned} \min\ & x_1^2+2x_2^2 \\ s.t.\ & x_1+x_2^3=1 \end{aligned}$，其增广 Lagrange 函数为____________________。

第三章计算题

一、用 Newton 方法求解问题 $\min \quad x_1^4 + x_2^2 - 2x_1 - x_2$，初始点 $x^{(0)} = (1,1)^T$. 求 $x^{(1)}$.

二、用 FR 方法求解问题 $\min \quad x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_1 - x_2$，初始点 $x^{(0)} = (1,1)^T$.

三、用 PRP 方法求解问题 $\min \quad x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1$，初始点 $x^{(0)} = (1,1)^T$.

四、用 DFP 方法求解问题 $\min \quad x_1^2 + 2x_2^2$，初始点 $x^{(0)} = (1/2, 1/4)^T$. $H_0 = I$. DFP 矩阵修正公式为 $H_{k+1} = H_k - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k}$.

第三章证明题

一、设 G 为 n 阶正定对称矩阵，$u_1, u_2, \cdots, u_n \in R^n$ 线性无关。p_k 按如下方式生成：

$p_1 = u_1$，$p_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{u_{k+1}^T G p_i}{p_i^T G p_i} p_i (k = 1, 2, \cdots, n-1)$，证明 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 关于 G 共轭。

二、设 A 为 n 阶对称正定矩阵，非零向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 关于矩阵 A 共轭，证明

$A^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k p_k^T}{p_k^T A p_k}$。

三、用 PRP 共轭梯度法求解无约束优化问题 $\min \ f(x)$，若一维搜索是精确的，且在求解过程中，每一步的梯度都是非零向量，证明 PRP 方法产生的搜索方向都是下降方向。

四、 设 A 为 n 阶对称正定矩阵，非零向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 关于矩阵 A 共轭，$x \in R^n$. 证明

$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k^T A x}{p_k^T A p_k} p_k$。

第四章计算题

一、用外罚函数法求解 $\begin{array}{l} \min \ x_1^2 + 3x_2^2 \\ s.t. \ x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \end{array}$。

二、用内罚函数法（对数罚函数）求解 $\begin{array}{l} \min \ x_1^2 + 5x_2^2 \\ s.t. \ x_1 + x_2 - 3 \geq 0 \end{array}$。

三、用乘子法求解问题 $\begin{array}{l} \min \ x_1^2 + 2x_2^2 \\ s.t. \ 2x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{array}$。

四、求解二次规划（不使用代入法）

$$\begin{aligned}&\min\ 3x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3+2.5x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2-8x_1-3x_2-3x_3\\&s.t.\ x_1+x_3=3\\&\quad\ \ x_2+x_3=0\end{aligned}$$

。

五、已知 $x^*=(1,3)^T$ 是求下面问题的 KT 点，确定常数 p 的取值范围。

$$\begin{aligned}&\min\ px_1^2+x_2^2\\&s.t.\ c_1(x)=x_1+x_2-4=0\\&\quad\ \ c_2(x)=-3x_1+x_2\ge 0\end{aligned}$$

六、求下面问题的可行域内的 KT 点。$\begin{aligned}&\min\ (x_1-1)^2+(x_2-2)^2\\&s.t.\ c_1(x)=x_1-2\ge 0\\&\quad\ \ c_2(x)=x_1+x_2=0\end{aligned}$ 。

第四章证明题

一、 $f:R^n\to R$ 为可微凸函数，证明 x^* 为优化问题 $\begin{aligned}&\min\quad f(x)\\&s.t.\quad x\ge 0\end{aligned}$ 的最优解的充要条件是

$x^*\ge 0,\nabla f(x^*)\ge 0,(\nabla f(x^*))^T x^*=0$ 。