第二章 随机过程的概念与基本类型

- 随机过程的定义
- 随机过程分布和数字特征
- 复随机过程
- 随机过程基本类型

一、随机过程是随机变量的推广

概率论主要研究的对象是随机变量，即随机试验的结果，可用一个或有限个随机变量描述的随机现象。而有些随机现象仅用一个或有限个随机变量描述是不够的，必须用无穷多个随机变量来描述。

随机变量$X(e)$

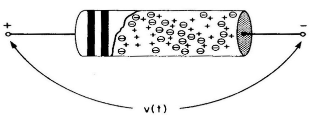
$\rightarrow$随机向量$(X_1(e), X_2(e), \cdots, X_n(e))$

$\rightarrow$随机序列$\{X_n(e), n=1,2\cdots\}$

$\rightarrow$随机过程$\{X(t,e), t\in T\}$

随机变量在每次试验的结果中，以一定的概率取某个事先未知，但为确定的数值。

在实际应用中，我们经常要涉及到在试验过程中随时间t而改变的随机变量。例如，接收机的噪声电压，



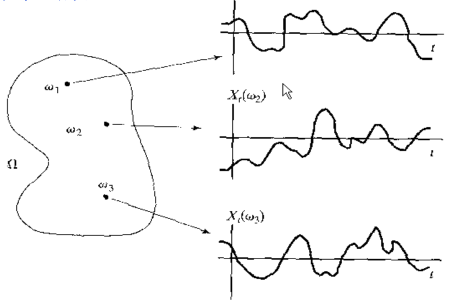
此外，还包括生物群体的增长问题；

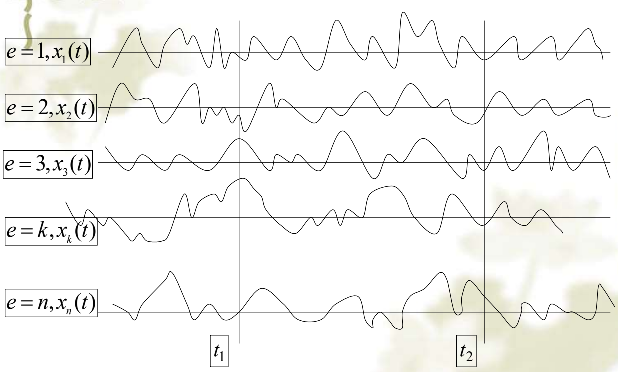
电话交换机在一定时间段内的呼叫次数；

一定时期内的天气预报；

固定点处海平面的垂直振动等等。

对接收机的输出噪声电压，作一次“长时间的观察”，测量获得的噪声电压X_t是一个样本函数





二、随机过程的定义

定义2.1 设(Ω,F,P)是概率空间，T是给定的参数集，若对每一个$t\in T$，有一个随机变量$X(t,e)$与之对应，则称依赖于参数t的随机变量族$\{X(t,e),t\in T\}$是定义在(Ω,F,P)上的随机过程。

简记$\{X(t),t\in T\}$，T称为参数集，

（指标集，通常指时间）

$X(t)$通常表示在时刻t系统的状态

$X(t)$的所有(值域)可能状态称为状态空间

注：从数学的观点来看，随机过程$\{X(t,e),t\in T\}$是定义在$T\times\Omega$上的二元函数

1).对固定的t，$X(t,e)$是(Ω,F,P)上的一个随机变量；

2).对固定的e, $X(t,e)$是定义在T上的一个普通函数，称为样本函数，对应于e的一个样本(轨道)或(实现)，变动$e\in\Omega$，则得到一族样本函数，样本函数的全体称为样本函数空间；

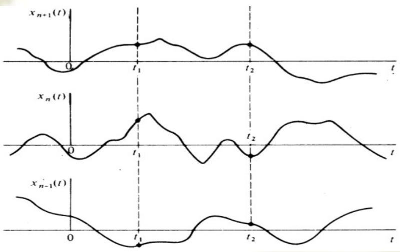
3).当t,e都固定，$X(t,e)$为一个数，即在t时刻系统所处的某一个状态。

三、随机过程的分类

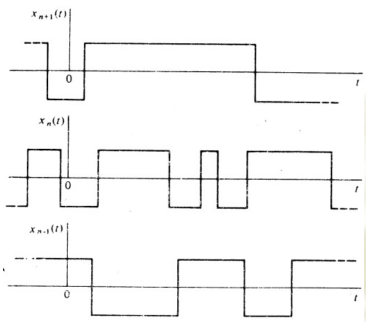
1.通常我们可以根据随机变量X(t)在时间和状态上的类型区分随机过程的类型。

参数集	状态空间	
	离散型	连续型
区间	离散随机过程	连续随机过程
可数集	离散参数链	随机序列

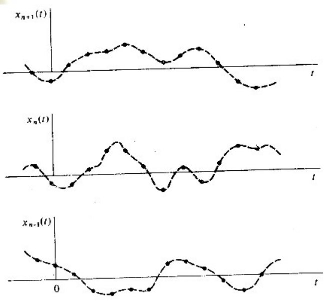
在时间和状态上都连续 → 连续型随机过程



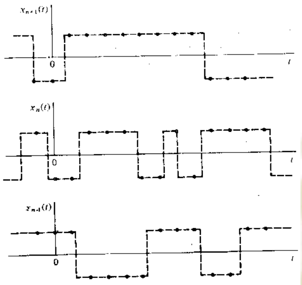
在时间上连续，状态上离散 → 离散型随机过程



在时间上离散，状态上连续 → 连续型随机序列



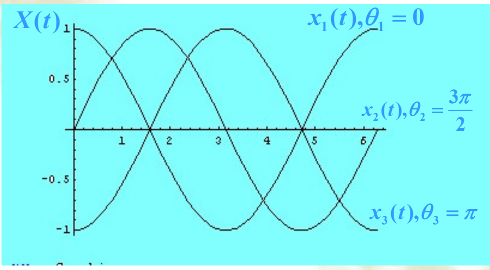
在时间上离散，状态上离散 → 离散参数链



2.按概率特性分：独立增量过程、马尔科夫过程、平稳过程、二阶矩过程等,以其分布函数为依据，有正态过程，泊松过程等。

例. $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$, a,ω为常数$\Theta\sim U(0,2\pi)$, $t\in[0,+\infty)$

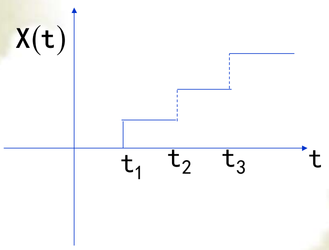
对每个$\theta_i\in(0,2\pi)$，则$X(t)$是t的一个函数，其图形为一条正弦曲线，称一个样本函数.



对固定的时刻$t_i\in T$，$X(t_i)=a\cos(\omega t_i+\Theta)$是一个随机变量，当$t$连续变化时，即得一族随机变量，所以$\{X(t),0\le t<+\infty\}$是一个连续参数，连续状态的随机过程,称为随机相位正弦波。

例. 某电话交换台在时间段 $[0,t)$内接收到的呼叫次数$X(t)$是与t有关的随机变量，

对于固定的t, $X(t)$是一个取非负整数的随机变量，所以$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$是一个连续参数，离散状态的随机过程，其样本函数为一个阶梯函数。



§2.2 随机过程的分布

一、有限维分布函数族

对任一固定时刻，随机过程是一随机变量，这时可用研究随机变量的方法研究随机过程的统计特性，但随机过程是一族随机变量，因此，对随机过程的描述，需用有限维分布函数族。

有限个随机变量 $\xrightarrow{\text{联合分布函数}}$ 统计规律

随机过程 $\xrightarrow{\text{有限维分布函数族}}$ 统计规律

定义2.2 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，对给定时刻$t_1\in T$,称$X(t_1)$的分布函数 $F_1(x;t_1)=P\{X(t_1)\le x\}$
为随机过程$X(t)$的一维分布函数,
对所有不同的$t\in T$，得一族分布函数$\{F_1(x;t), t\in T\}$,
称为一维分布函数族。
若$F_1(x;t)$对x的偏导存在，则称偏导

$$f_1(x;t)=\frac{\partial F(x;t)}{\partial x}$$

为随机过程$X(t)$的一维分布密度
对所有不同的$t\in T$，得一族概率密度函数
$\{f_1(x;t), t\in T\}$，称为一维概率密度函数族。

一维分布函数族只能描述随机过程$X(t)$在某一时刻的统计特性，为了描述随机过程在不同时刻的相互关系，一般需用n个不同时刻$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$所对应的n个随机变量$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$的联合分布函数。

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

当$t_1,t_2,\cdots,t_n$取遍参数集T时，便得一族n维分布函数，这些分布函数的全体：

$$F=\{F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n), t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, n\ge 1\}$$

称为随机过程$X(t)$的有限维分布函数族。

有限维分布函数的性质

对称性

对于$\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$的任意排列:$\{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}\}$，有

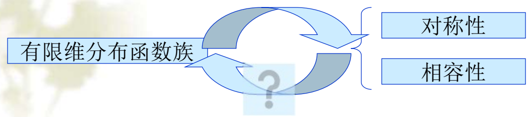
$$F_n\{x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\}=F_n(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n};t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n});$$

相容性

当$m<n$时

$$F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=F_n(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots+\infty;t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)$$

可见，由高维分布可推出低维分布，反之不一定。



Kolmogorov存在定理

设已给参数集T及满足对称性和相容性条件的分布函数族F，则必存在概率空间（Ω,F,P）及定义在其上的随机过程{X(t),t∈T}，它的有限维分布函数族是F。

有限维特征函数族:

$$\Phi=\{g_n(\theta_1,\theta_2,,\cdots\theta_n;t_1,t_2,\cdots,t_n), t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, n\ge 1\}$$

其中 $g_n(\theta_1,\theta_2,,\cdots\theta_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=E\left(\exp\left[i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X(t_k)\right]\right)$
$=E\left[e^{i\theta' X}\right]$

$\theta=(\theta_1,\theta_2,,\cdots\theta_n)'$ $\quad X=(X(t_1),\cdots,X(t_n))'$

二、有限维联合分布数函数族

若同时定义两个随机过程$X(t)$及$Y(t)$，描述它们的统计特征，除了它们各自的有限维分布函数外，还需要反映它们联合统计特征，即联合分布函数族。
$n+m$维联合分布函数

$$F_{n,m}(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n;y_1,\cdots,y_m;t_1',\cdots,t_m')$$
$$=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n;Y(t_1')\le y_1,\cdots,Y(t_m')\le y_m\}$$

有限维联合分布函数族:

$$\{F_{n,m}(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n;y_1,\cdots,y_n;t_1',\cdots,t_m'),$$
$$t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m'\in T, m,n\ge 1\}$$

§2.3 随机过程的数字特征

随机过程的数学特征其定义及计算类同随机变量的数字特征,只是含有参数t，在求数字特征时,可将参数t当作常数看待。

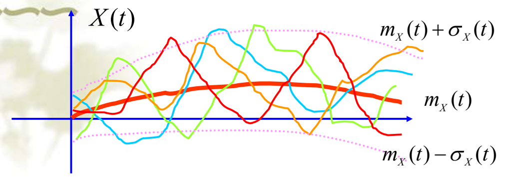
一、均值函数

设{X(t),t∈T}是随机过程，如果对任意t∈T，E[X(t)]存在，则称函数

$$m_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF_1(x;t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_1(x;t)dx \quad t\in T$$

为X(t)的均值函数，

反映随机过程在时刻t的平均值。



显然$m_X(t)$是一个平均函数，它表示随机过程$X(t)$的波动中心，样本曲线绕$m_X(t)$曲线上下波动，注意$m_X(t)$是一条固定的曲线，这里$m_X(t)$是随机过程$X(t)$的所有样本函数在时刻t的函数值的均值，通常称这种平均为统计平均又称集平均。

（二）均方值与方差

我们把随机变量$X(t)$(随机过程对应于某个固定t值）的二阶原点矩

记作 $\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF_1(x;t)$

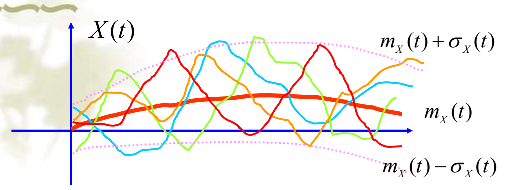
称为随机过程 $X(t)$的均方值函数。

而把 $X(t)$的二阶中心矩，

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的方差函数。

$\sigma_X^2(t)$是t的确定函数，它描述了随机过程的诸样本函数对数学期望 $m_X(t)$的偏离程度见图示。



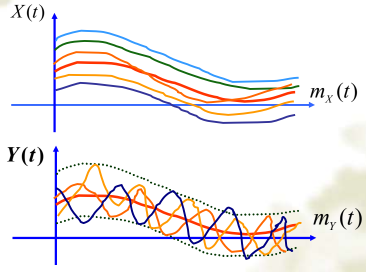
$\sigma_X^2(t)$ 是非负函数，它的平方根称为随机过程的均方差函数。

即： $\sigma_X(t)=\sqrt{\sigma_X^2(t)}=\sqrt{D[X(t)]}$

（三）自相关函数

均值和方差刻划了随机过程在各个时刻的统计特性，但不能描述过程在不同时刻的相关关系，这点可从下图所示的两个随机过程$\{X(t),t\in T\}$和 $\{Y(t),t\in T\}$来说明，从直观上看，它们具有大致相同的均值和方差，但两者的内部结构却有非常明显的差别。

具有相同均值函数和方差函数的两个不同的随机过程



其中 $X(t)$随时间变化缓慢，这个过程在两个不同时刻的状态之间有较强的相关性;

而 $Y(t)$的样本函数变化激烈，波动性大，其不同时刻的状态之间的联系不明显，且时刻间隔越大，联系越弱.

因此，必须引入描述随机过程在不同时刻之间相关程度的数字特征。

自相关函数（简称相关函数）就是用来描述随机过程两个不同时刻状态之间内在联系的重要数字特征。

我们把随机过程 $X(t)$在任意两个不同时刻 $t_1,t_2\in T$ 的随机变量 $X(t_1)$与 $X(t_2)$的混合原点矩（若存在）

$$E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2dF_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

称为随机过程X(t)的自相关函数，简称相关函数，

记作 $R_X(t_1,t_2)$

若取 $t_1=t_2=t$ 则有

$$R_X(t_1,t_2)=R_X(t,t)=E[X^2(t)]$$

此时相关函数即为均方值 $\psi_X^2(t)$。

称 $X(t_1)$与 $X(t_2)$的中心矩

$$B_X(t_1,t_2)$$
$$=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$$

为随机过程的自协方差函数，简称协方差函数。

随机过程数字特征之间的关系：

(1) $\psi_X^2(t)=R_X(t,t)$

(2) $\sigma_X^2(t)=B_X(t,t)=R_X(t,t)-m_X^2(t)$

(3) $B_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$

从这些关系式看出，均值函数 $m_X(t)$和相关函数 $R_X(t_1,t_2)$是最基本的两个数字特征，其它数字特字特征，协方差函数 $B_X(t_1,t_2)$方差函数 $\sigma_X^2(t)$ 都可以由它们确定。

四、互相关函数

两个随机过程之间的关系 $\left\{\begin{array}{l}\boxed{\text{互协方差函数}}\\ \boxed{\text{互相关函数}}\end{array}\right.$

设$\{X(t),t\in T\}\{Y(t),t\in T\}$,是两个二阶矩过程

则称:

$$B_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\},\quad t_1,t_2\in T$$

为过程$X(t)$和$Y(t)$的互协方差函数

称 $R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$

为过程$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数

公式:

$$B_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

$X(t)$与$Y(t)$不相关 $\Leftrightarrow B_{XY}(t_1,t_2)=0$

$\Leftrightarrow R_{XY}(t_1,t_2)=m_X(t_1)m_Y(t_2)$

若$R_{XY}(t_1,t_2)=0$,称$X(t)$与$Y(t)$相互正交

例 设随机过程$X(t)=e^{-At}, t\ge 0, A\sim U(0,1)$

求$X(t)$的数字特征.

解：$m_X(t)=E[X(t)]=E[e^{-At}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-xt}f_A(x)dx$

$$=\int_0^1 e^{-xt}dx=\frac{1}{t}(1-e^{-t})$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[e^{-At_1}\cdot e^{-At_2}]=E[e^{-A(t_1+t_2)}]$$

$$=\frac{1}{t_1+t_2}[1-e^{-(t_1+t_2)}]$$

当$t_1=t_2=t$时,得$\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]=R_X(t,t)=\frac{1}{2t}[1-e^{-2t}]$

$$D[X(t)]=\psi_X^2(t)-m_X^2(t)=\frac{1}{2t}[1-e^{-2t}]-\frac{1}{t^2}[1-e^{-t}]^2$$

例：设$X(t)=Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t), t\ge 0$，其中$Y,Z$是相互独立的随机变量，且$EY=EZ=0, DY=DZ=\sigma^2$

求$\{X(t),\ t\ge 0\}$的均值函数和协方差函数。

解：$E[X(t)]=E[Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)]$

$$=\cos(\theta t)E(Y)+\sin(\theta t)E(Z)=0$$

$R_X(t_1,t_2)$

$=E\{[Y\cos(\theta t_1)+Z\sin(\theta t_1)][Y\cos(\theta t_2)+Z\sin(\theta t_2)]\}$

$=\cos(\theta t_1)\cos(\theta t_2)E(Y^2)+\sin(\theta t_1)\sin(\theta t_2)E(Z^2)$

$=\sigma^2\cos[(t_2-t_1)\theta]$

$$B_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)\cdot m_X(t_2)$$

$$=R_X(t_1,t_2)=\sigma^2\cos[(t_2-t_1)\theta]$$

例：设随机过程 $X(t)=Y+Zt,\ t\ge 0$，其中Y、Z是相互独立的$N(0,1)$随机变量，求$\{X(t),t\ge 0\}$的一、二维概率密度。

解：由于Y与Z是相互独立的正态随机变量,故其线性组合为正态随机变量，要计算$\{X(t),t\ge 0\}$的一、二维概率密度，只需计算数字特征$m_X(t)$, $D_X(t), B_X(t_1,t_2)$即可。

$$m_X(t)=E[Y+Zt]=EY+tEZ=0$$

$$D_X(t)=D(Y+Zt)=DY+t^2DZ=1+t^2$$

$$B_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]-m_X(t_1)m_X(t_2)$$

$$=E[(Y+Zt_1)(Y+Zt_2)]=1+t_1t_2$$

$$\therefore \rho_X(t_1,t_2)=\frac{B_X(t_1,t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)}\cdot\sqrt{D_X(t_2)}}$$

$$=\frac{1+t_1t_2}{\sqrt{(1+t_1^2)}\cdot\sqrt{(1+t_2^2)}}$$

故$X(t)$的一、二维概率密度分别为：

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}\right\},\quad t\ge 0$$

$f_2(x_1,x_2)$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x_1^2}{1+t_1^2}-2\rho\frac{x_1x_2}{\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}}+\frac{x_2^2}{1+t_2^2}\right]\right\},$$

$$t_1,t_2>0$$

其中$\rho=\rho_X(t_1,t_2)$

例 设有两个随机过程$X(t)=g_1(t+\varepsilon)$和$Y(t)=g_2(t+\varepsilon)$，其中$g_1(t)$和$g_2(t)$都是周期为L的方波，$\varepsilon\sim U(0,L)$，求$R_{XY}(t,t+\tau)$的表达式。

解：$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$

$$=E[g_1(t+\varepsilon)g_2(t+\tau+\varepsilon)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)f_\varepsilon(x)dx$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^L g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)dx$$

令$v=t+x$ 利用$g_1(t),g_2(t)$的周期性有：

$$R_{XY}(t,t+\tau)=\frac{1}{L}\int_t^{t+L}g_1(v)g_2(v+\tau)dv=\frac{1}{L}\int_0^L g_1(v)g_2(v+\tau)dv$$

例：设$\{X(t),t\in T\}$为信号过程$\{Y(t),t\in T\}$为噪声过程，

令：$W(t)=X(t)+Y(t)$,

求 $\{W(t),t\in T\}$ 的均值函数和相关函数。

$$m_W(t)=m_X(t)+m_Y(t)$$

$$\begin{aligned}R_W(t_1,t_2)&=E\{[X(t_1)+Y(t_1)][X(t_2)+Y(t_2)]\}\\&=E[X(t_1)X(t_2)]+E[X(t_1)Y(t_2)]\\&\quad+E[Y(t_1)X(t_2)]+E[Y(t_1)Y(t_2)]\\&=R_X(t_1,t_2)+R_{XY}(t_1,t_2)+R_{YX}(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)\end{aligned}$$

表明，两个过程和的相关函数可以表示为各随机过程的相关函数与它们的互相关函数之和。

特别当两个过程互不相关且均值函数为零时,有

$$R_W(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)$$

§ 2.4 复随机过程

一、定义 设$\{X(t),t\in T\},\{Y(t),t\in T\}$是取实数值的两个随机过程,若对任意的$t\in T$，$Z(t)=X(t)+iY(t)$

其中$i=\sqrt{-1}$，则称$\{Z(t),t\in T\}$为复随机过程。

二、复随机过程的数字特征函数

均值函数 $m_Z(t)=E[Z(t)]=E[X(t)]+iE[Y(t)]$

$$=m_X(t)+im_Y(t)$$

方差函数 $D_Z(t)=E\left[|Z(t)-m_Z(t)|^2\right]$

$$=E\left[[Z(t)-m_Z(t)]\overline{[Z(t)-m_Z(t)]}\right]$$

相关函数 $R_Z(t_1,t_2)=E\left[Z(t_1)\cdot\overline{Z(t_2)}\right]$

协方差函数 $B_Z(t_1,t_2)=E\left[(Z(t_1)-m_Z(t_1))\overline{(Z(t_2)-m_Z(t_2))}\right]$

相互之间的关系 $B_Z(t_1,t_2)=R_Z(t_1,t_2)-m_Z(t_1)\overline{m_Z(t_2)}$

三、协方差函数的性质

(1) 对称性$B(t_1,t_2)=\overline{B(t_2,t_1)}$

(2) 非负定性：对任意$t_i\in T$及复数a_i,

$i=1,2,\cdots,n,n\ge1$

有 $\sum_{i,j=1}^{n}B(t_i,t_j)a_i\overline{a_j}\ge0$

证：

$$\begin{aligned}(1)\ B(t_1,t_2)&=E\left[(Z(t_1)-m_Z(t_1))\overline{(Z(t_2)-m_Z(t_2))}\right]\\&=E\left[\overline{\overline{Z(t_1)-m_Z(t_1)}(Z(t_2)-m_Z(t_2))}\right]\\&=\overline{B(t_2,t_1)}\end{aligned}$$

$$(2)\sum_{i,j=1}^{n}B(t_i,t_j)a_i\overline{a_j}$$

$$\begin{aligned}&=E\left\{\sum_{i,j=1}^{n}(Z(t_i)-m_Z(t_i))\overline{(Z(t_j)-m_Z(t_j))}a_i\overline{a_j}\right\}\\&=E\left\{\sum_{i=1}^{n}(Z(t_i)-m_Z(t_i))a_i\cdot\overline{\sum_{j=1}^{n}(Z(t_j)-m_Z(t_j))a_j}\right\}\\&=E\left|\sum_{i=1}^{n}(Z(t_i)-m_Z(t_i))a_i\right|^2\ge0\end{aligned}$$

例 设复随机过程$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}X_ke^{i\omega_kt},t\ge0$，其中

$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立且$X_k\sim N(0,\sigma_k^2)$，$\omega_1,\cdots,\omega_n$是常数，

求$\{Z(t),t\ge0\}$的均值函数和自相关函数。

解：$m_Z(t)=E[Z(t)]=E\left[\sum_{k=1}^{n}X_ke^{i\omega_kt}\right]=0$

$$\begin{aligned}R_Z(t_1,t_2)&=E\left[Z(t_1)\cdot\overline{Z(t_2)}\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n}X_ke^{i\omega_kt_1}\cdot\overline{\sum_{k=1}^{n}X_ke^{i\omega_kt_2}}\right]\\&=\sum_{k,l=1}^{n}E[X_kX_l]e^{i(\omega_kt_1-\omega_lt_2)}=\sum_{k=1}^{n}E(X_k^2)e^{i\omega_k(t_1-t_2)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2e^{i\omega_k(t_1-t_2)}\end{aligned}$$

§ 2.5 随机过程的几种基本类型

- 二阶矩过程
- 正交增量过程
- 独立增量过程
- 马尔可夫过程
- 正态过程
- 维纳过程
- 平稳过程

二阶矩过程

定义：设已给定随机过程 $\{X(t), t\in T\}$，如果对于一切 $t\in T$ 均有 $E|X(t)|^2<\infty$，则称 $X(t)$ 为二阶矩过程。

性质：

1、二阶矩过程必存在均值 $m_X(t)=E[X(t)]$

2、由Schwartz不等式

$$|E[X(s)X(t)]|^2 \le E|X(s)|^2\cdot E|X(t)|^2$$

知其相关函数和协方差都存在。

正交增量过程

1、定义 设 $\{X(t), t\in T\}$ 是零均值的二阶矩过程，若对任意的 $t_1<t_2<t_3<t_4\in T$ 有

$$E[X(t_2)-X(t_1)]\cdot[\overline{X(t_4)-X(t_3)}]=0$$

则称 $X(t)$ 为正交增量过程.

2、特点：不相重叠的区间上状态的增量互不相关。

例题：设{X(t),t∈T}是正交增量过程，T=[a,b]为有限区间，且规定X(a)=0，求其协方差函数。

设 $T=[a,b]$，规定 $X(a)=0$

当 $a<s<t<b$ 时，有

$$\begin{aligned}B_X(s,t)&=R_X(s,t)-m_X(s)\cdot m_X(t)=R_X(s,t)\\&=E[X(s)\overline{X(t)}]\\&=E[X(s)[\overline{X(t)-X(s)+X(s)}]]\\&=E[[X(s)-X(a)][\overline{X(t)-X(s)}]]+E[X(s)\overline{X(s)}]\\&=\sigma_X^2(s)\end{aligned}$$

同理，当 $a<t<s<b$ 时,有 $B_X(s,t)=\sigma_X^2(t)$

于是 $B_X(s,t)=R_X(s,t)=\sigma_X^2(\min(s,t))$

独立增量过程

1、定义 设 $\{X(t), t\in T\}$，$t\ge 0, X(0)=0$，

对 $\forall\ 0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$ 有增量：

$$X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2), \cdots, X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立，则称 $\{X(t), t\ge 0\}$ 为独立增量过程，又称可加过程。

2、特点：独立增量过程在任一个时间间隔上过程状态的改变，不影响任一个与它不相重叠的时间间隔上状态的改变。

3、独立增量过程与正交增量过程的关系

正交增量过程 —— 互不相关

独立增量过程 —— 相互独立

定义依据：不相重叠的时间区间上增量的统计相依性

正交增量过程 $\xrightarrow{\times}$ 独立增量过程

正交增量过程 $\xleftarrow{\text{二阶矩存在，均值函数恒为零}}$ 独立增量过程

4、独立增量过程，其有限维分布，可由增量的分布所确定

证；设 $Y_1=X(t_1)-X(0)=X(t_1)$

$Y_2=X(t_2)-X(t_1)$

$\vdots$

$Y_n=X(t_n)-X(t_{n-1})$

则 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立，且有：

$X(t_1)=Y_1$

$X(t_2)=Y_1+Y_2$

$\vdots$

$X(t_n)=Y_1+Y_2+\cdots Y_n$

则$X=(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$的特征函数为：

$$g_X(\theta_1,\cdots,\theta_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=E\left\{e^{i[\theta_1 X(t_1)+\cdots+\theta_n X(t_n)]}\right\}=E\left\{e^{i\left[\theta_1 Y_1+\theta_2(Y_1+Y_2)+\cdots+\theta_n\sum_{k=1}^{n}Y_k\right]}\right\}$$
$$=E\left\{e^{i\left[\sum_{k=1}^{n}\theta_k Y_1+\sum_{k=2}^{n}\theta_k Y_2+\cdots+\theta n Y_n\right]}\right\}=E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k Y_1}\right]\cdots E\left[e^{i\theta_n Y_n}\right]$$

$\because Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$独立

$$=g_{Y_1}(\theta_1+\cdots+\theta_n)\cdot g_{Y_2}(\theta_2+\cdots+\theta_n)\cdots g_{Y_n}(\theta_n)$$

即有限维分布可由增量分布来确定。

5.平稳独立增量

定义 设$\{X(t),t\in T\}$是独立增量过程，若对任意的$s<t$，增量$X(t)-X(s)$的分布仅依赖于$t-s$，而与起点s无关，则称$\{X(t),t\in T\}$是平稳独立增量过程。

显然，平稳独立增量过程的增量$X(t)-X(s)$与$X(t-s)-X(0)=X(t-s)$有相同的分布，所以此时有限维分布可由其一维分布确定。(即只要间隔一样，分布相同)

定理：平稳独立增量过程的有限维分布函数族由其一维分布和增量的分布确定。

注：有限维分布，首先由增量分布确定，而增量分布由一维分布确定，最重要的独立增量过程是维纳过程和泊松过程。

例题：考虑一种设备一直使用到损坏为止，然后换上同类型的设备。假设设备的使用寿命是随机变量，令N(t)为在时间段[0,t]内更换设备的件数，通常可以认为{N(t)，t≥0}是平稳独立增量过程。

马尔可夫过程

1、定义 设$\{X(t),t\in T\}$为随机过程，若对任意的正整数n及$t_1<t_2<\cdots<t_n$，$P\{X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}>0$且其条件分布(有限维)函数

$$P\{X(t_n)\le x_n/X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)\le x_n/X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

则称$\{X(t),t\in T\}$为马尔可夫过程。

2、马尔可夫性

系统在已知现在所处状态的条件下，它将来所处的状态与过去所处的状态无关。

例 证明独立增量过程是马尔可夫过程

证 设$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$

$$P\{X(t_n)\le x_n/X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1}/X(t_1)-X(0)=x_1,$$
$$X(t_2)-X(t_1)=x_2-x_1,\cdots,$$
$$X(t_{n-1})-X(t_{n-2})=x_{n-1}-x_{n-2}\}$$
$$=P\{X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1}\}$$

而$P\{X(t_n)\le x_n/X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$

$$=P\{X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1}/X(t_{n-1})-X(0)=x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1}\}$$

条件分布函数具有马尔可夫性,所以是马尔可夫过程。

正态过程

定义：设{X(t),t∈T}是随机过程，若对任意正整数n及$t_1,t_2,\dots,t_n$∈T，$(X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n))$是n维正态随机变量，则称{X(t),t∈T}是正态过程或高斯过程。

特点：

1. 在通信中应用广泛；
2. 正态过程只要知道其均值函数和协方差函数，即可确定其有限维分布。

维纳过程

(正态过程的一种特殊情况)

1、物理背景

1827年英国植物学家罗伯特.布朗发现的现象：沉浸在液体或气体中质点不停地作不规则运动,只有在显微镜上才看得清的质点运动,称为布朗运动。

设$X(t)$表示作布朗运动质点在时刻t的位移,(相对于起点$X(0)=0$)。

质点之所以不停地运动是由于受到周围介质力场的不断撞击。

(1).质点在时间区间(s,t)上位移看成许许多多相互独立的小位移之和，由中心极限定理知，假定$X(t)-X(s)$是正态分布是合理的；

(2).因假设介质处于平衡状态，且质点在一个区间上的位移的概率分布只依赖于此区间的长$t-s$，而与起点无关，有理由假设对任意$h>0$，位移$X(t)-X(s)$与$X(t+h)-X(s+h)$有相同分布；

(3).质点的运动完全由不规则分子撞击而引起，在不重迭区间上碰撞次数与大小是独立的,故在不重迭区间上质点的位移是独立的,可理解为有均匀的独立增量。这样导致了维纳过程的定义。

注:维纳是首先从数学上研究布朗运动的人之一。

2、定义：设$\{W(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$为随机过程，如果

(1).$W(0)=0$

(2).是平稳独立增量过程

(3).$\forall s,t$,增量$W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|),\sigma^2>0$

则称$\{W(t),t\in T=(-\infty,+\infty)\}$为维纳过程，也称布朗运动过程，此类过程常用来描述布朗运动，通信中的电流热噪声等。

3.统计特征

定理：设$\{W(t),t\in T\}$是参数为σ^2的维纳过程，则

(1).对任意$t\in T,W(t)\sim N(0,\sigma^2|t|)$

(2).对任意$-\infty<a<s,t<\infty$

$$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]=\sigma^2\min(s-a,t-a)$$

特别$R_W(s,t)=B_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$

证:(1).由$W(t)-W(0)\sim N(0,\sigma^2|t|)$即得,

(2).不妨设$s\le t$,

$$\begin{aligned}&E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]\\&=E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(s)+W(s)-W(a))]\\&=E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(s))]+E[W(s)-W(a)]^2\\&=0+E[W(s)-W(a)]^2=\sigma^2(s-a)\end{aligned}$$

同理：若$t\le s$，则$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]$
$=\sigma^2(t-a)$

$$\therefore E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]=\sigma^2\min(s-a,t-a)$$

例：证明维纳过程是正态过程。

证：设$\{X(t),t\in T\}$是维纳过程对$\forall$ $t_1<t_2<\cdots<t_n$，只要证$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$联合正态即可。

令：
$$\begin{aligned}Y_1&=X(t_1)-X(0)\\Y_2&=X(t_2)-X(t_1)\\&\vdots\\Y_n&=X(t_n)-X(t_{n-1})\end{aligned}$$

$\therefore Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$为相互独立,且每个都服从正态分布。

而 $X(t_1)=Y_1$

$$X(t_2)=Y_1+Y_2$$

$$\vdots$$

$$X(t_n)=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n \qquad \begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))'$是正态向量的线性变换，

由n维正态分布的性质知:$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))'$为$n$维联合正态，所以维纳过程$\{X(t),t\in T\}$为正态过程。

67

平稳过程

定义：设{X(t),t∈T}是随机过程，如果对任意常数h和正整数n，$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，$t_1+h,t_2+h,\ldots,t_n+h\in T$，$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$与$(X(t_1+h),X(t_2+h),\ldots,X(t_n+h))$有相同的联合分布，则称{X(t),t∈T}为严平稳过程或侠义平稳过程。

定义：设{X(t),t∈T}是随机过程，如果

1. {X(t),t∈T}是二阶矩过程；
2. 对任意t∈T，$m_X(t)=E[X(t)]=$常数；
3. 对任意s,t ∈T，$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=R_X(t-s)$则称{X(t),t∈T}为广义平稳过程，简称为平稳过程。

68

$$\boxed{\text{广义平稳过程}} \xrightarrow{\times} \boxed{\text{严平稳过程}}$$

$$\boxed{\text{广义平稳过程}} \xleftarrow{\text{二阶矩存在}} \boxed{\text{严平稳过程}}$$

对于正态过程，广义平稳过程和严平稳过程是等价的。

例：设随机过程X(t)=acos(ωt+Θ)，a和ω都是常数，Θ是在(0,2π)上均匀分布的随机变量，Y(t)=tX(t)，试分别讨论X(t)和Y(t)的平稳性。

69

第二章结束

作业：2.3 2.4 2.8 2.12 2.15

70