第四章 马尔可夫链

1. 马尔可夫链定义
2. 一步转移概率及多步转移概率
3. **Chapman-Kolmogorov**方程
4. 初始概率及绝对概率
5. 马尔可夫链状态分类
6. 遍历的马尔可夫链及平稳分布

§4.1 马尔可夫链的概念及转移概率

一、马尔可夫链的概念

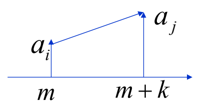
假定马尔可夫过程$X(t)$的状态空间为$I=\{a_1,a_2,\cdots\}$,
而$X(t)$在每一时刻$t(n=0,1,2,\cdots)$,所处状态记为:
$X(n)=X_n$，则所能取的状态必为$a_1,a_2,\cdots$之一，
且过程只在$0,1,2,\cdots,n\cdots$,可列个时刻发生状态转移，
即参数空间为：$T=\{0,1,2,\cdots,n\cdots\}$

1.定义：若过程$X(t)$在$m+k$时刻处在任一状态
$a_{i_{m+k}}$的概率,只与过程在m时刻的状态有关,而与
过程在m时刻以前的状态无关,即条件概率满足:

$$P\{X_{m+k}=a_{i_{m+k}}/X_m=a_{i_m},X_{m-1}=a_{i_{m-1}},\cdots,X_1=a_{i_1}\}$$
$$=P\{X_{m+k}=a_{i_{m+k}}/X_m=a_{i_m}\}$$

则称此随机过程$\{X_n,n\geq 0\}$为马尔可夫链，
简称马氏链。

2、马氏链的转移概率



称条件概率

$$P\{X_{m+k}=a_j/X_m=a_i\}=p_{ij}(m,m+k)$$

为马氏链在m时刻处于a_i状态经k步，在$m+k$时刻
转移到a_j状态的转移概率，记为：$p_{ij}(m,m+k)$
i,j,m,k均为正整数,一般$p_{ij}(m,m+k)$与i,j,m,k有关,
若$p_{ij}(m,m+k)$与m无关，则称马氏链为齐次的，
下面我们仅讨论齐次马氏链。

3、一步转移概率及矩阵

在上面转移概率中，取$k=1$即得一步转移概率

$$p_{ij}=p_{ij}(m,m+1)=P\{X_{m+1}=a_j/X_m=a_i\}$$

由所有的一步转移概率p_{ij}构成的矩阵

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

称为马氏链的一步转移概率矩阵

p_{ij}具有性质:

(1) $p_{ij}\geq 0 \qquad a_i,a_j\in I$

(2) $\sum_{a_j\in I}p_{ij}=1 \qquad a_i\in I$

即从a_i转移到状态空间的某个状态是必然事件
即矩阵中任一行元素之和为1，满足(1),(2)性质的
矩阵称为随机矩阵。

4.多步转移概率的确定

(1)、在转移概率中取$k=n$时,即得n步转移概率:

$$p_{ij}(n)=p_{ij}(m,m+n)=P\{X_{m+n}=a_j/X_m=a_i\}$$

对应的n步转移概率矩阵为:

$$P(n)=\begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1n}(n) & \cdots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots & p_{2n}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & & \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

$P(n)$也为随机矩阵,即也满足性质:

(1) $p_{ij}(n)\geq 0. \quad a_i,a_j\in I$

(2) $\sum\limits_{a_j\in I}p_{ij}(n)=1. \quad a_i\in I$

通常我们还规定:

$$p_{ij}(0)=p_{ij}(m,m)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

(2)、切普曼—柯尔莫哥洛夫方程

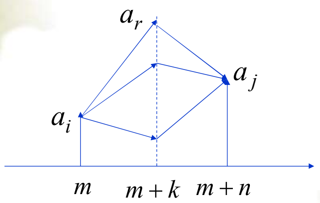
(Chapman-Kolmogorov)

定理:设$\{X_n,n\geq 0\}$为齐次马氏链,则对任意的整数$n\geq 0,a_i,a_j\in I$,有:$p_{ij}(n)=\sum\limits_{a_r\in I}p_{ir}(k)p_{rj}(n-k)$

或 $P(n)=P(k)P(n-k)$

此乃有名的切普曼$-$柯尔莫哥洛夫方程,

简称$c-k$方程。



直观解释对照图

证明:利用概率公式及马尔可夫性有:

$$p_{ij}(n)=P\{X_{m+n}=a_j/X_m=a_i\}$$

$$=\frac{P\{X_m=a_i,X_{m+n}=a_j\}}{P\{X_m=a_i\}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{a_r\in I}P\{X_m=a_i,X_{m+k}=a_r,X_{m+n}=a_j\}}{P\{X_m=a_i\}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{a_r\in I}P\{X_m=a_i,X_{m+k}=a_r\}P\{X_{m+n}=a_j/X_m=a_i,X_{m+k}=a_r\}}{P\{X_m=a_i\}}$$

$$=\sum_{a_r\in I}P\{X_{m+k}=a_r/X_m=a_i\}\cdot P\{X_{m+n}=a_j/X_{m+k}=a_r\}$$

$$=\sum_{a_r\in I}p_{ir}(k)\cdot p_{rj}(n-k)$$

用矩阵形式表示为:$P(n)=P(k)\cdot P(n-k)$

在上式取$k=1$,$P(n)=P\cdot P(n-1)$

则$n=2$时有:$P(2)=P(1)P(1)=P^2$

$n=3$时:$P(3)=P(1)P(2)=P^3$

一般当n为任意整数时有:$P(n)=P^n$

表明一步转移概率是最基本的,它确定了马氏链的状态转移的统计规律。

5、初始概率与绝对概率

(1) 定义:设$\{X_n,n\geq 0\}$为马尔可夫链,分别称$p_j(0)=P\{X_0=a_j\}$和$p_j(n)=P\{X_n=a_j\}$,$(a_j\in I)$为马氏链的初始概率和绝对概率,并分别称$\{p_j(0),a_j\in I\}$和$\{p_j(n),a_j\in I\}$为马氏链的初始分布和绝对分布,简记为和$\{p_j(0)\}$和$\{p_j(n)\}$。

写成向量形式:

$$\vec{p}(0)=(p_1(0),p_2(0),\cdots,p_j(0),\cdots)$$

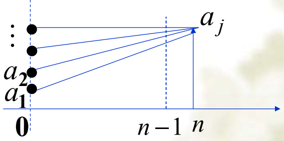
$$\vec{p}(n)=(p_1(n),p_2(n),\cdots,p_j(n),\cdots)$$

(2) 绝对概率与初始概率的关系

定理：设$\{X_n,n\ge 0\}$为马尔可夫链，则对任意的$a_j\in I$和$n\ge 1$，绝对概率$p_j(n)$具有性质：

(1) $p_j(n)=\sum_{a_i\in I}p_i(0)p_{ij}(n)$ 或 $\vec{p}(n)=\vec{p}(0)P(n)$

(2) $p_j(n)=\sum_{a_i\in I}p_i(n-1)p_{ij}$ 或 $\vec{p}(n)=\vec{p}(n-1)P$



证:(1) $p_j(n)=P\{X_n=a_j\}=\sum_{a_i\in I}P\{X_0=a_i,X_n=a_j\}$

$=\sum_{a_i\in I}P\{X_0=a_i\}\cdot P\{X_n=a_j/X_0=a_i\}=\sum_{a_i\in I}p_i(0)p_{ij}(n)$

表明n时刻的绝对概率分布完全由初始分布和n步转移概率所确定。

(2) $p_j(n)=P\{X_n=a_j\}=\sum_{a_i\in I}P\{X_{n-1}=a_i,X_n=a_j\}$

$=\sum_{a_i\in I}P\{X_{n-1}=a_i\}\cdot\{X_n=a_j/X_{n-1}=a_i\}$

$=\sum_{a_i\in I}P_i(n-1)p_{ij}$

（3）马氏链的有限维分布

定理：设$\{X_n,n\ge 0\}$为齐次马氏链，则对任意的$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}\in I$和$n\ge 1$有：

$P\{X_1=a_{i_1},X_2=a_{i_2},\cdots,X_n=a_{i_n}\}=\sum_{a_i\in I}p_i(0)p_{ii_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

证：$P\{X_1=a_{i_1},X_2=a_{i_2},\cdots,X_n=a_{i_n}\}$

$=P\left\{\bigcup_{a_i\in I}X_0=a_i,X_1=a_{i_1},\cdots,X_n=a_{i_n}\right\}$

$=\sum_{a_i\in I}P\{X_0=a_i\}\cdot P\{X_1=a_{i_1}/X_0=a_i\}\cdot P\{X_2=a_{i_2}/$

$X_0=a_i,X_1=a_{i_1}\}\cdots P\{X_n=a_{i_n}/X_0=a_i,X_1=a_{i_1}\cdots X_{n-1}=a_{i_{n-1}}\}$

$=\sum_{a_i\in I}p_i(0)p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

推论：

(1)$P\{X_0=a_{i_0},X_1=a_{i_1},\cdots,X_n=a_{i_n}\}=p_{i_0}(0)p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

(2)$P\{X_1=a_{i_1},X_2=a_{i_2},\cdots,X_n=a_{i_n}/X_0=a_{i_0}\}=p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

总结：

1）齐次马氏链多步转移概率可由一步转移概率确定；

$$P(n)=P^n$$

2) 绝对概率可由初始概率及n步转移概率确定

$$p_j(n)=\sum_{a_i\in I}p_i(0)p_{ij}(n)$$

3)有限维分布可完全由初始概率及一步转移概率确定。

例：随机游动，设$\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$是整数值独立随机变量序列，且$\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$有相同的分布，令$X_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_k$

则称$\{X_n,n\ge 0\}$为随机游动。

随机游动可以解释为质点在直线上的整数格点上作运动的质点，初始位置为$X_0=\xi_0$，每隔一个单位时间质点移动一次，第k次移动的长度为整数ξ_k，于是$X_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_k$ 表示在时刻n质点的位置，则$\{X_n,n\ge 0\}$是随机游动，随机游动$\{X_n,n\ge 0\}$是时齐马氏链。

对任意的$n\ge 1$，和整数$i_0,i_1\cdots,i_n$

$P\{X_n=i_n/X_0=i_0,X_1=i_1\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}$

$=\dfrac{P\{X_0=i_0,X_1=i_1\cdots,X_n=i_n\}}{P\{X_0=i_0,X_1=i_1\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}}$

$=\dfrac{P\{\xi_0=i_0,\xi_1=i_1-i_0\cdots,\xi_n=i_n-i_{n-1}\}}{P\{\xi_0=i_0,\xi_1=i_1-i_0,\cdots,\xi_{n-1}=i_{n-1}-i_{n-2}\}}$

$=P\{\xi_n=i_n-i_{n-1}\}.$

同理：$P\{X_n=i_n/X_{n-1}=i_{n-1}\}=P\{\xi_n=i_n-i_{n-1}\}$

一步转移概率为：

$p_{ij}=P\{X_n=j/X_{n-1}=i\}=P\{\xi_n=j-i\}=p_{j-i}$

几种特殊的随机游动

例.无限制的随机游动：质点在直线上作随机游动，如某一时刻质点位于i，则下一步质点以概率p向右移动一格到达$i+1$，或以概率$q=1-p$向左移一格到达$i-1$，若以X_n表示时刻n时质点的位置，则$\{X_n,n\ge 0\}$是一随机过程。

$$令\xi_k=\begin{cases}1 \ , & 第k次向右移动一格\\ -1, & 第k次向左移动一格\end{cases}$$

则$X_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_n$为随机游动，它是一齐次马氏链

其状态空间为： $I=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$

$$一步转移概率为：\begin{cases}p_{i,i+1}=p & (i\in I,0\le p\le 1)\\ p_{i,i-1}=q & \\ p_{ii}=0 & j\ne i+1,i-1,j\in I\end{cases}$$

下面求它的n步转移概率$p_{ij}(n)$

已知每次转移只有两种可能，向左的概率为q，向右的概率为p，而n次转移的结果是从$i\to j$，如果n次转移中向右m_1次，向左m_2次，则

$$\begin{cases}m_1+m_2=n\\ m_1\times 1+m_2\times(-1)=j-i\end{cases}\Rightarrow m_1=\frac{n+j-i}{2},m_2=\frac{n-j+i}{2}$$

由于m_1,m_2只能取整数，所以$n+(j-i)$必须是偶数，且在n步中哪m_1步向右，哪m_2步向左是任意的，选取方法为：$C_n^{m_1}$

$$\therefore p_{ij}(n)=\begin{cases}C_n^{m_1}p^{m_1}q^{m_2}, & n+(j-i)为偶数\\ 0 & n+(j-i)为奇数\end{cases}$$

$$p_{ii}(n)=\begin{cases}C_n^{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}, & n为偶数\\ 0 & n为奇数\end{cases}$$

例 带一个吸收壁的随机游动

质点在直线上作随机游动,其规律如上例，这里仅作一点改变，即当质点一旦到达$X_n=0$时，就停留在这个零状态了，这样的状态称为吸收态，其状态空间为：$I=\{0,1,2,\cdots\}$，即非负整数集合，它的一步转移概率为：

$$\left.\begin{matrix}p_{i,i+1}=p\\ p_{i,i-1}=q\end{matrix}\right\}(i\ge 1,i\in I)$$

$$\left.\begin{matrix}p_{ii}=0\\ p_{00}=1\end{matrix}\right\}\quad (j\ne i+1,i-1,j\in I,i\ge 1,i\in I)$$

注：状态为吸收状态的充要条件是$p_{ii}=1$

一步转移矩阵为：

$$P=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots\\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & q & 0 & p & \cdots\\ 2 & 0 & q & 0 & p\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

例 带两个吸收壁的随机游动。若随机游动的状态空间为$I=\{0,1,2,\cdots,a\}$其中0，a两状态为吸收状态，则一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$p_{i,i+1}=p \quad 1\le i\le a-1$

$p_{i,i-1}=q \quad 1\le i\le a-1$

$p_{ii}=0 \quad j\ne i-1,i+1, \ 1\le i\le a-1$

$p_{00}=1$

$p_{aa}=1$

$p_{0j}=0 \quad j\ne 0$

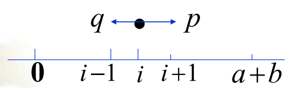
$p_{aj}=0 \quad j\ne a$

用此模型可描述赌徒输光问题

两赌徒甲、乙进行一系列赌博，赌徒甲有a元，赌徒乙有b元，每赌一局输者给赢者一元，没有和局，直到两人中一个输光为止。设在每一局中甲赢的概率为p，输的概率为$q=1-p$，求甲输光的概率。

解：这是带两个吸收壁的随机游动，其状态空间为：

$I=\{0,1,2,\cdots,c\}$，$c=a+b$，现在问题是求质点从a点出发到达0状态先于到达c状态的概率。



设u_i表示甲从状态i出发转移到状态0的概率，即要计算u_a，由于0和c是吸收状态，故$u_0=1$，$u_c=0$，由全概率公式：

$$u_i=pu_{i+1}+qu_{i-1},(i=1,2,\cdots,c-1)\cdots(1)$$

含义为：甲从有i元开始赌到输光的概率等于"他接下去赢了一局（概率为p），处于状态$i+1$后再输光"和"他接下去输了一局（概率为q）处于状态$i-1$后再输光"这两事件的和事件的概率。

由于$p+q=1$,(1)式实质上是一个差分方程

$$u_{i+1}-u_i=r(u_i-u_{i-1})\quad i=1,2,\cdots,c-1\quad(2)$$

其中$r=\frac{q}{p}$，边界条件为$u_0=1,u_c=0\quad(3)$

先讨论$r=1$的情况，

由(2)式：$u_{i+1}-u_i=u_i-u_{i-1}$ (等差数列)

令$i=1,2,\cdots,c-1$,

$u_1=u_0+\alpha$

$u_2=u_1+\alpha=u_0+2\alpha\quad\cdots$

$u_i=u_{i-1}+\alpha=u_0+i\alpha\quad\cdots$

$u_c=u_{c-1}+\alpha=u_0+c\alpha$

将$u_c=0$，$u_0=1$代入最后一式，得$\alpha=-\frac{1}{c}$

$$\therefore u_i=1-\frac{i}{c}\qquad i=1,2,\cdots,c-1$$

令$i=a$,求得甲输光的概率为：$u_a=1-\frac{a}{c}=\frac{b}{a+b}$

表明，在$p=q$情况下，甲输光的概率与乙的赌本b成正比，即赌本小者输光的可能性大，由于甲、乙地位对称、故乙输光的概率为：

$$u_b=\frac{a}{a+b}$$

由于$u_a+u_b=1$，表明甲、乙中必有一人要输光，赌博迟早要结束。

现讨论$r\neq1$，即$p\neq q$的情况。

由(2)式得：

$$\begin{aligned}u_c-u_k&=\sum_{i=k}^{c-1}r(u_i-u_{i-1})\\&=\sum_{i=k}^{c-1}r^i(u_1-u_0)\\&=(u_1-1)\frac{r^k-r^c}{1-r}\quad\cdots(4)\end{aligned}$$

令$k=0$,由于$u_c=0,u_0=1$有

$$1=(1-u_1)\frac{1-r^c}{1-r}\Rightarrow(1-u_1)=\frac{1-r}{1-r^c}$$

代入(4)式得$u_k=\frac{r^k-r^c}{1-r^c},k=1,2,\cdots,c-1$

令$k=a$得甲输光的概率$u_a=\frac{r^a-r^c}{1-r^c}$,

$$u_b=\frac{r^b-r^c}{1-r^c}$$

由$u_a+u_b=1$,两人中总有一个人要输光!

例:四人相互抛一球，人的 标号为1,2,3,4,抛球规律如图示，X_n表示n次抛球后拿球人标号。

$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$为齐次马氏链，状态空 间为:

$I=\{1,2,3,4\}$，若$\vec{p}(0)=\left(\frac{1}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10},\frac{4}{10}\right)$

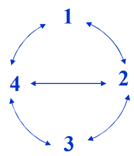
(1)已知开始第一人拿球，经三次传球后又回到第一人的概率；

(2)开始第一人拿球，经三次传球后又回到第一人的概率；

(3)经三次传球后第一人拿球的概率；

(4)经三次传球后，又回开始拿球人的概率。

$$P(1)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$



$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$P(3)=P^3=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{7}{18} & \frac{1}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{27} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} & \frac{7}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{18} & \frac{1}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{27} & \frac{7}{27} & \frac{7}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

(1) $p_{11}(3)=P\{X_3=1/X_0=1\}=\frac{1}{9}$

(2) $P\{X_0=1,X_3=1\}=P\{X_0=1\}\cdot P\{X_3=1/X_0=1\}$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{90}$$

(3) $p_1(3)=P\{X_3=1\}=\sum_{i=1}^{4}p_i(0)\cdot p_{i1}(3)$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{7}{27}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{7}{27}=\frac{1}{5}$$

(4) $\sum_{i=1}^{4}P\{X_0=i,X_3=i\}=\sum_{i=1}^{4}p_i(0)p_{ii}(3)$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{8}{45}$$

例：传输数字0和1的通信系统，每个数字的传输需经过若干个级，设每步传输正确的概率为:

$p=\frac{9}{10}$，传输错误的概率为：$q=\frac{1}{10}$。

以X_n表示第n步传输出的数字，则$\{X_n, n\geq 0\}$是一两状态的齐次马氏链，且状态$I=\{0,1\}$

其一步转移概率矩阵为：$P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$

(1) 设$p=0.9$，求系统二级传输后的传真率与三级传输后的误码率；

(2) 设初始分布$p_1(0)=P\{X_0=1\}=\alpha$，

$p_0(0)=P\{X_0=0\}=1-\alpha$

又已知系统经n级传输后输出为1,问原字符也是1的概率是多少?

解：先求出n步转移概率矩阵$P(n)=P^n$

由于$P=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$有相异的特征根：$\lambda_1=1,\lambda_2=p-q$

由线性代数知识,可将P表示成对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p-q\end{pmatrix}$$

即求出λ_1，λ_2对应的特征向量：

$$e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\qquad e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{-\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

令：$H=(e_1,e_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

则$P=H\Lambda H^{-1}$

于是$P^n=\left(H\Lambda H^{-1}\right)^n=H\Lambda^n H^{-1}$

$$=\begin{array}{c}0\\1\end{array}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n, & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n, & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n\end{pmatrix}$$

(1) 当$p=0.9$时，系统经二级传输后的传真率与三级传输后的误码率分别为：

$$p_{11}(2)=p_{00}(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0.9-0.1)^2=0.820$$

$$p_{10}(3)=p_{01}(3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(0.9-0.1)^3=0.244$$

(2) 根据贝叶斯公式，当已知系统经n级传输后输出为1，原发字符也是1的概率为：

$$P\{X_0=1/X_n=1\}=\frac{P\{X_0=1\}\cdot p\{X_n=1/X_0=1\}}{P\{X_n=1\}}$$

$$=\frac{p_1(0)\cdot p_{11}(n)}{p_0(0)\cdot p_{01}(n)+p_1(0)\cdot p_{11}(n)}$$

$$=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}$$

对于只有两个状态的马氏莲，一步转移概率矩阵一般可表示为：

$$P=\begin{array}{c}0\\1\end{array}\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix},0<a,b<1$$

利用类似的方法,可得n步转移概率矩阵为

$$P(n)=P^n=\begin{array}{c}0\\1\end{array}\begin{pmatrix}p_{oo}(n) & p_{o1}(n)\\ p_{1o}(n) & p_{11}(n)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+\frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}$$

对齐次马尔可夫链,虽然一步转移概率能够完全决定马尔可夫链的统计规律，但仍有许多理论上和实际上的问题需要我们作进一步的讨论。

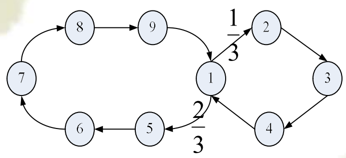
§ 4.2 马尔可夫链的状态分类

一.状态的分类

假设$\{X_n,n\geq 0\}$是齐次马氏链，其状态空间$I=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为$p_{ij},i,j\in I$，初始分布为：$\{p_j(0),j\in I\}$我们依赖概率性质对状态进行分类。

1.周期：确定性机械运动有时会呈现出周期性，例如每隔30分钟发生音乐声响的钟，若令T表示钟响时刻(单位：分)的集合，则$T=\{0,30,60,\cdots\}$。这其中30是中T元素的最大公约数，也即声响周期。但在随机性运动中，情况要复杂得多。

例如：设马氏链的状态空间$I=\{1,2,\cdots,9\}$。状态间的转移规律如下图所示：



由图易见,从状态1出发,再返回状态1的可能步数$T=\{4,6,8,10,12,\cdots\}$，对正数$2\in T$，虽然$p_{11}(2)=0$，但$p_{11}(n\times 2)>0$，而2是$n\times 2,(n>1)$的最大公约数。受确定性问题的启发，给出如下定义：

定义：如集合$\{n: n\geq 1, p_{ii}(n)>0\}$非空，则称该集合的最大公约数为状态的周期，记为：

$$d=G.C.D\{n: n\geq 1, p_{ii}(n)>0\}$$

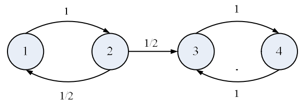
由定义可知，状态i的周期若为d，则说明对i来说，除非经$d, 2d, 3d, \cdots, nd$步，系统是不可能回到状态i的，当然这并不意味着对任何$nd(n\geq 1)$一定有$p_{ii}(n\times d)>0$.($\exists M$对一切$n\geq M$有$p_{ii}(nd)>0$)

通常，如$d>1$，称i为周期的；如$d=1$，则称i为非周期的。对上例来说,状态1是周期的，周期为2。

注：对于使$\{n: n\geq 1, p_{ii}(n)>0\}$为空集的$i$，不定义其周期，即若对任意$n\geq 1$，$p_{ii}(n)=0$，则称无周期。

是否两个具有相同周期的状态所表现出来的性质基本一致呢?下例可说明并非如此。

例：设$I=\{1,2,3,4\}$，状态转移图如下：



由图可知，状态2与3的周期都为2，但由状态3出发经两步必定返回到3，而状态2则不然，当状态2转移到3后，它再也不能返回到2。

为了区别这样两种状态，我们引入常返性概念。

2.首达概率

定义：对任意两个状态 i、j，称随机变量 T_{ij}为从状态i出发首次进入状态 j的时刻。

即 $T_{ij}=\min\{n: X_m=i, X_{m+n}=j, n\geq 1\}$

而称：

$f_{ij}(n)=P\{T_{ij}=n\}$

$=P\{X_{m+v}\neq j, 1\leq v\leq n-1, X_{m+n}=j/X_m=i\}$，$n\geq 1$

为自状态 i出发，经 n步首次到达状态 j的概率，简称首达概率。

注：由齐次马氏链性质知，首达概率与出发时刻无关。所以，如果以$m=0$作出发时刻，则

$$f_{ij}(n)=P\{X_n=j, X_v\neq j, 1\leq v\leq n-1/X_0=i\}$$

$$=\sum_{i_1\neq j}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq j}p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

另一个重要概念是：马氏链位于状态i的条件下，经有穷步后终达状态j的条件概率f_{ij}，即

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}(n)=P\{T_{ij}<\infty\}$$

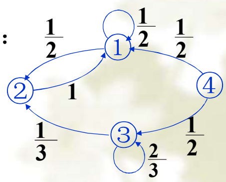
它表示从状态i出发，迟早要到达状态j，表示从i出发经有限步可达j的条件概率。

3.常返性概念

定义：称状态 i为常返的，如 $f_{ii}=1$；称状态 i为非常返的，如 $f_{ii}<1$。

“常返”直观解释，若链从状态 i出发，当i为常返态时，链以概率1无穷次返回i；当i是非常返时，链以概率1只返回 i有限多次，然后就一去 不复返了。

例.马氏链的状态转移图如下：



由图知：对一切 n，$f_{44}(n)=0$，故$f_{44}=0$，

即状态 4为非常返的；

$f_{33}(1)=\frac{2}{3}$ $f_{33}(n)=0(n>1)$，故$f_{33}=\frac{2}{3}<1$，

即状态 3也为非常返的；

$f_{11}(1)=f_{11}(2)=\frac{1}{2}$，$f_{11}=f_{11}(1)+f_{11}(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

即状态1为常返的；

$f_{22}(1)=0, f_{22}(n)=\frac{1}{2^{n-1}}, (n\geq 2)$，

$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1$，即状态 2也为常返的。

从定义知，对常返状态 $i, \{f_{ii}(n), n=1,2,\cdots\}$ 构成一概率分布，且由 $f_{ii}(n)=P\{T_{ii}=n\}$ 知 T_{ii} 的数学期望表示了从状态 i 出发返回的平均返步数。

为了区分有限与无穷的不同情形，给出如下定义：

定义：如 $\mu_i<\infty$，则称常返态 i 为正常返的；反之，如 $\mu_i=\infty$ 则称常返态 i 为零常返的。非周期的正常返态称为遍历状态。

如上例，$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}(n)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<+\infty$

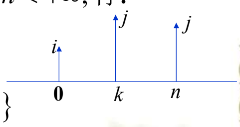
$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{22}(n)=\sum_{n=1}^{\infty} n\times\frac{1}{2^{n-1}}=3<+\infty$$

故状态1与状态2都是正常返态，又因其周期都是1，故它们都是遍历状态。

4. $f_{ij}(n)$ 与 $p_{ij}(n)$ 的关系

定理：对任意状态 i, j 及 $1\le n<+\infty$，有：

$$p_{ij}(n)=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k)\,p_{jj}(n-k)$$



证：$p_{ij}(n)=P\{X_n=j/X_o=i\}$

$$=\sum_{k=1}^{n} P\{X_v\ne j, 1\le v\le k-1, X_k=j, X_n=j/X_0=i\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} P\{X_v\ne j, 1\le v\le k-1, X_k=j/X_0=i\}\cdot$$

$$P\{X_n=j/X_0=i, X_v\ne j, 1\le v\le k-1, X_k=j\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k)\,p_{jj}(n-k)$$

$\because p_{jj}(0)=1$，取 $k=n$

$$f_{ij}(n)=p_{ij}(n)-\sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}(k)\,p_{jj}(n-k)$$

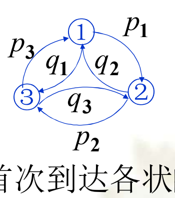
$c\to k$ 方程及此定理是马氏链的关键性公式，它们可以把 $p_{ij}(n)$ 分解成较低步的转移概率之和的形式。

周期的等价定义：

$G.C.D\{n: p_{ii}(n)>0\}=G.C.D\{n: n\ge 1, f_{ii}(n)>0\}$

例：设马氏链的状态空间 $I=\{1,2,3\}$，转移的矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{pmatrix}$$



求从状态1出发经n步转移首次到达各状态的概率

$$f_{12}(n)=\begin{cases}(q_1p_3)^{m-1}q_1q_3, & n=2m, \quad m\ge 1\\ (q_1p_3)^{m}p_1, & n=2m+1, \quad m\ge 0\end{cases}$$

同理：

$$f_{13}(n)=\begin{cases}(p_1q_2)^{m-1}p_1p_2, & n=2m, \quad m\ge 1\\ (p_1q_2)^{m}q_1, & n=2m+1, \quad m\ge 0\end{cases}$$

$$f_{11}(n)=\begin{cases}0, & n=1\\ p_1(p_2q_3)^{m-1}q_2+q_1(q_3p_2)^{m-1}p_3 & n=2m, m\ge 1\\ p_1(p_2q_3)^{m-1}p_2p_3+q_1(q_3p_2)^{m-1}q_2q_3 & n=2m+1, m\ge 1\end{cases}$$

二.常返性的判别及其性质

如何用$p_{ij}(n)$判别常返状态及性质

定理：状态 i为常返的充要条件为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=\infty \qquad (f_{ii}=1)$$

如i非常返，则$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=\dfrac{1}{1-f_{ii}}<\infty \qquad (f_{ii}<1)$

证：规定$p_{ii}(0)=1, f_{ii}(0)=0$，再设$\{p_{ii}(n)\}$与$\{f_{ii}(n)\}$的母函数为$P(s)$与$F(s)$

$$P(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}(k)s^k \qquad |s|<1$$

$$F(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}(k)s^k \qquad |s|<1$$

由$p_{ij}(n)$与$f_{ij}(n)$的关系有：

$$p_{ii}(n)=\sum_{k=1}^{n} f_{ii}(k)p_{ii}(n-k) \qquad n\ge 1$$

于是对$0\le s<1$,(两边乘以s^n,并对$n\ge 1$求和)有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)s^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k)p_{ii}(n-k)s^n$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k)s^k\right)\left(\sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}(n-k)s^{n-k}\right)$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}(k)s^k\right)\left(\sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}(n-k)s^{n-k}\right)$$

$$=F(s)\cdot P(s)$$

即 $P(s)-1=F(s)\cdot P(s)$，故 $P(s)=\dfrac{1}{1-F(s)}$

因为$p_{ii}(n)\ge 0$，故对任意的 $0\le s<1$与给定的正整数N有：

$$\sum_{n=0}^{N} p_{ii}(n)s^n\le P(s)\le\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)$$

当$s\uparrow 1$时，由于$P(s)$不减，故在上式中先令 $s\uparrow 1$，再令$N\to\infty$，则有

$$\lim_{s\uparrow 1} P(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)$$

类似地可证得：$\lim_{s\uparrow 1} F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n)=f_{ii}$

在$P(s)=\dfrac{1}{1-F(s)}$两边令$s\uparrow 1$,

再根据常返状态的定义即可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=\frac{1}{1-\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}$$

若$f_{ii}=1$，则$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=\infty$ 命题得证！

下面解释这个定理的结论：

首先令随机变量 $\xi_n=\begin{cases}1 & 若X_n=i\\ 0 & X_n\ne i\end{cases}$ ， $\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n$

ξ表示马氏链状态位于 i的次数

而$E(\xi/X_0=i)=E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n/X_0=i\right)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} E(\xi_n/X_0=i)=\sum_{n=0}^{\infty} 1\cdot P\{\xi_n=1/X_0=i\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n=i/X_0=i\}=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)$$

可见$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)$实际上表示了马氏链从 i出发再返回i的平均次数。

定理式告诉我，若状态i为常返且过程无限地继续下去时，返回i的次数将无限地增加；而当状态i为非常返时，则返回i的平均次数将有一个有穷极限 $\dfrac{1}{1-f_{ii}}$。

结论:(1)若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=\infty$，则状态$i$是常返的；

(2)若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)<\infty$，则状态$i$是非常返的。

对于确知状态i为常返时，如何进一步判断它是零常返还是遍历的呢？

可以不加证明地给出下面的定理。

定理：设状态 i常返且有周期 d，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(nd)=\frac{d}{\mu_i}$$

其中μ_i为i的平均返回时间，当$\mu_i=\infty$时，$\dfrac{d}{\mu_i}=0$

由此定理立即得推论：设状态i为常返，则

(1) i为零常返$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=0$；

(2) i为遍历状态$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=\dfrac{1}{\mu_i}>0$

证:(1)如i为零常返则 $\mu_i=\infty$，由$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(nd)=\dfrac{d}{\mu_i}=0$

而当n不能被周期 d整除时 $n\neq 0(\mathrm{mod}\,(d))$,

必然有 $p_{ii}(n)=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=0$

$\Leftarrow$反之，若 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=0$,而$i$是正常返，

则由$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(nd)=\dfrac{d}{\mu_i}>0$矛盾.

(2) 如i为遍历，即$d=1$，由上面定理得

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=\dfrac{1}{\mu_i}>0$；反之，若$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=\dfrac{1}{\mu_i}>0$,

则说明$0<\mu_i<\infty$，即i为正常返态。

且$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(nd)=\dfrac{1}{\mu_i}$与定理式$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(nd)=\dfrac{d}{\mu_i}$

比较得$d=1$故状态i为非周期正常返态，

即i为遍历的。

状态分类判别法

状态分类		判别法	
常返态	正常返	$p_{ii}(n)\nrightarrow 0$ $(n\to\infty)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=+\infty$
	零常返	$p_{ii}(n)\to 0$ $n\to\infty$	
非常返态		$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)<+\infty$	

三.状态之间的关系(可达、互通)

定义：称状态 i可达状态j，并记作 $i\to j$

如果存在某个 $n>0$，使$p_{ij}(n)>0$；称状态 i

与j互通，并记为 $i\leftrightarrow j$，如果$i\to j$且$j\to i$。

定理：可达关系与互通关系都具有传递性,

即如果$i\to j, j\to k$则$i\to k$;

如果$i\leftrightarrow j, j\leftrightarrow k$,则$i\leftrightarrow k$。

证：$i\to j$，即存在$l\geq 1$，使$p_{ij}(l)>0$,

$j\to k$，即存在$m\geq 1$，使$p_{jk}(m)>0$

由$c-k$方程:

$$p_{ik}(l+m)=\sum_{r\in I} p_{ir}(l)\cdot p_{rk}(m)\geq p_{ij}(l)\cdot p_{jk}(m)>0$$

且$l+m\geq 1$, $\quad\therefore i\to k$

将可达关系的证明,正向用一次，反向用一次，就可得出互通关系的传递性。

互通关系的状态是同一类型.

定理：如果$i\leftrightarrow j$，则

(1) i与j同为常返或非常返，如为常返，则它们同为正常返或零常返；

(2) i与j有相同的周期。

(1)证：因为$i\leftrightarrow j$，故存在正整数 k与m，使

$$p_{ij}(m)=\alpha>0, p_{ji}(k)=\beta>0$$

于是，对任意正整数 n，有$(c-k$方程$)$

$$p_{jj}(k+n+m)\ge p_{ji}(k)\cdot p_{ii}(n)\cdot p_{ij}(m)=\alpha\beta p_{ii}(n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(k+n+m)\ge\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}(n)$$

若i为常返,则$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}(n)=\infty$，故$\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(k+n+m)=\infty$

更有$\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)=\infty$，因此，状态$j$也是常返的；

类似地，有$p_{ii}(k+n+m)\ge\alpha\beta p_{jj}(n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}(k+n+m)\ge\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)$$

$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}(n)$与$\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)$相互控制，所以它们同为无穷或同为有限。

若j为常返，则$\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)=\infty\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}(n)=\infty$,

即i为常返的；

若i为非常返，则由$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}(n)<\infty\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}(n)<\infty$

故j也非常返，反之也真；

若i为零常返，则 $\lim_{n\to\infty}p_{ii}(n)=0$

再由$p_{ii}(k+n+m)\ge\alpha\beta p_{jj}(n)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}p_{jj}(n)=0$

$\therefore$ j也是零常返的。

同理，若j为零常返，则 i也为零常返。

(2) 证明：设 i的周期 $d_i\ge1$，则对任一使 $p_{jj}(n)>0$ 的n，有 $p_{ii}(n+k+m)\ge\alpha\beta p_{jj}(n)>0$,

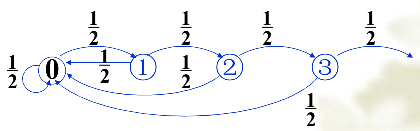
而 $p_{ii}(k+m)\ge\alpha\beta>0$

故d_i既能被 $k+m$整除又能被 $n+k+m$整除，所以d_i能被n整除，设集 $\{n: p_{jj}(n)>0\}$的最大公约数即状态 j的周期为 d_j，则应有 $d_i\le d_j$；由对称性，也能证得：$d_j\le d_i$，故$d_i=d_j$。

此定理说明：相通的状态具有相同的性质.这是分解状态空间的基础。

例：设马氏链的状态空间为$I=\{0,1,2,\cdots\}$,

转移概率为：$p_{00}=\frac{1}{2},p_{i,i+1}=\frac{1}{2},p_{i0}=\frac{1}{2},i\in I$



考查状态0,由上图易知

$$f_{00}(1)=\frac{1}{2},f_{00}(2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},f_{00}(3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

一般有$f_{00}(n)=\frac{1}{2^n}$,故$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$(常返)

进一步$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot2^{-n}=2<\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

可见0为正常返状态，由于$f_{00}(1)=\dfrac{1}{2}>0$，所以它是非周期的，因而是遍历的，对其它状态i求$f_{ii}(n)$较烦，但由定理知，因$i\leftrightarrow 0$，故i也是遍历的。

此例说明，对互通状态的识别，只需对最简单的状态进行判别即可。