《最优化方法》第二章习题

一、填空题

1. 线性规划 $\begin{aligned}&\max 2x_1+x_2\\&s.t.-x_1+2x_2\ge 1\\&\quad x_1+3x_2=5\\&\quad x_1\ge 0\end{aligned}$ 的对偶规划为 ____________________

2. 在三维空间 R^3 中，集合 $\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$ 的极点构成的集合为________________

3. 集合 $\left\{(x,y)\mid x^2+2y^2\le 4, x\ge 1, y\ge 1\right\}$ 的极点构成的集合为________

4. 在二维空间 R^2 中，集合 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge x\right\}$ 的极点构成的集合为________________

5. 线性规划 $\begin{aligned}&\min 3x_1-2x_2\\&s.t.\ x_1+x_2\le 10\\&\quad 5x_1+4x_2\ge 11\\&\quad x_2\ge 0\end{aligned}$ 的可行域共有_____个不同的极点。

6. 若 $f(x)=3x_1^2+x_2^2+ax_1x_2$ 为严格凸函数，则 a 取值范围是_____

二、证明题

1. $f(x)$ 为凸集 $D\subset R^n$ 上的函数，上图 $epi(f)=\{(x,y)\mid x\in D, y\in R, y\ge f(x)\}$，证明 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $epi(f)$ 为凸集。

2．考虑规划问题：$\begin{aligned}&\mathbf{min}\quad \boldsymbol{f(x)}\\&\mathbf{s.t.}\quad \boldsymbol{c_i(x)}\le 0\end{aligned}$，其中，$\boldsymbol{f(x), c_i(x)(i=1,2,\cdots,m): R^n\to R}$ 是凸函数，证明：（1）该问题的可行域是凸集；（2）该问题的最优解的集合 $\boldsymbol{A}$ 是凸集。

3. 设 z^*, s^* 分别为下列两个问题 $(I)\begin{aligned}&\min c^Tx\\ s.t.\quad &Ax=b\\ &x\ge 0\end{aligned}$ $\quad (II)\begin{aligned}&\min c^Tx\\ s.t.\quad &Ax=b+d\\ &x\ge 0\end{aligned}$ 的最优

值。y^*是(I)的对偶问题的最优解，证明$z^*+y^{*T}d\le s^*$ 。

4 设$\bar{x},\bar{y}$分别为下列两个问题

$$(I)\ \begin{aligned}&\min c^T x\\ s.t.\ \ &Ax\ge b\\ &x\ge 0\end{aligned}\qquad (II)\ \begin{aligned}&\max y^T b\\ s.t.\ \ &y^T A\le c^T\\ &y\ge 0\end{aligned}$$

的可行解。证明$c^T\bar{x}\ge\bar{y}^T b$。

三、 计算题

1、（1）用单纯形方法求解下面的线性规划
$$\begin{aligned}&\min -4x_1-3x_2\\ s.t.\ &2x_1+3x_2\le 14\\ &3x_1+x_2\le 16\\ &x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量x_1写出对应的割平面方程。

或（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对对变量x_2写出分枝后的线性规划。

2、扩展题

二、（18％）（1）以$(5/2,1/2,0,0)^t$为初始基可行解，用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned}&\min x_1+2x_2+3x_3+4x_4\\ s.t.\ \ &x_1+x_2+x_3+x_4=3\\ &2x_1\qquad+2x_3-6x_4=5,\\ &x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0,x_4\ge 0.\end{aligned}$$

（2） 写 出 该 线 性 规 划 的 影 子 价 格 向 量 ；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对变量x_1写出分枝后的线性规划。

三、（教材 90 页第（4）小题））求解线性规划

$$\begin{aligned}&\min 3x_1+2x_2+x_3-x_4\\ s.t.\ \ &x_1-2x_2+x_3-x_4\le 15\\ &2x_1+x_2-x_3+2x_4\ge 10,\\ &x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0,|x_4|\le 2.\end{aligned}$$

四、（教材 92 页第（5）小题）写对偶规划

$$\min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, i=1,2,\cdots,m \\ & \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, j=1,2,\cdots,n \\ & x_{ij}\ge 0, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

五、若线性规划 $\begin{aligned} &\min x_1+2x_2+x_3 \\ &s.t.\ 3x_1+4x_2 \qquad =5 \\ &\quad x_1 \qquad +2x_3=u \\ &\quad x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$ 的最优解为 $(a,b,c)^T$，其对偶规划的最优解为 $(1/6,1/2)^T$. a,b,c,u 四个常数中，你可以确定哪些？如果有不能确定的常数，确定其范围。