（1）对于优化问题 $\begin{aligned} \min\ & f(x_1,x_2) \\ s.t.\ & 4-(x_1^2+x_2^2)\ge 0 \\ & x_1\ge 0 \\ & 1-x_1\ge 0 \\ & x_2\ge 0 \end{aligned}$ ， $p=(-1,b)^T$ 是该问题在点 $(1,\sqrt{3})^T$ 处的可行方向，则常数 b 的取值范围是 $\underline{b<1/\sqrt{3}}$ 。

解：令 $x=(1,\sqrt{3})^T+\alpha(-1,b)^T=(1-\alpha,\sqrt{3}+\alpha b)^T$，在 $\alpha>0$ 充分小时，x 是可行点。

因此，$\begin{aligned} & 4-(1-\alpha)^2-(\sqrt{3}+\alpha b)^2\ge 0 \\ & 1-\alpha\ge 0 \\ & \alpha\ge 0 \\ & \sqrt{3}+\alpha b\ge 0 \end{aligned}$

后面三个不等式在 $\alpha>0$ 充分小时显然成立。第一个不等式是：

$2(1-\sqrt{3}b)\alpha\ge\alpha^2(1+b^2)$，$2(1-\sqrt{3}b)\ge\alpha(1+b^2)$

所以有 $1-\sqrt{3}b>0$，$b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

(2) 向量 $(-1,r)^T$ 是问题 $\begin{aligned} & \max -2x_1+3x_2 \\ & s.t.\ 4x_1+x_2\le -4 \\ & \quad -x_1+3x_2\ge 1 \\ & \quad x_1\le 0 \end{aligned}$ 在点 $(-1,0)^T$ 的下降方向，则 r 的范围是 <u> r<-2/3 </u>。

解：目标函数是 $-2x_1+3x_2$, $g=(-2,3)^T$, $x=(-1,0)^T$, $p=(-1,r)^T$

$g^Tp=2+3r$.

当 $2+3r<0$ 时，是下降方向，当 $2+3r<0$ 时，是下降方向。

当 $2+3r=0$，$r=-\dfrac{2}{3}$，

$$x+\alpha p=(-1,0)^T+\alpha(-1,-\frac{2}{3})^T=(-1-\alpha,-\frac{2}{3}\alpha)^T$$

$$f(x+\alpha p)=-2(-1-\alpha)+3(-\frac{2}{3}\alpha)=2=f(x)$$

所以 $r=-\dfrac{2}{3}$ 时不是下降方向。

结论：$r<-\dfrac{2}{3}$ 时是下降方向。