第三章 泊松过程

- 泊松过程定义
- 泊松过程的数字特征
- 时间间隔分布、等待时间分布及到达时间的条件分布
- 非齐次泊松过程
- 复合泊松过程

§3.1 泊松过程的定义

定义3.1：称随机过程{N(t),t≥0}为计数过程，若N(t)表示到时刻t为止已发生的“事件A”的总数，且N(t)满足下列条件：

1. N(t) ≥0;
2. N(t)取正整数值；
3. 若s<t，则N(s) ≤N(t)；
4. 当s<t时，N(t)-N(s)等于区间(s,t]中发生的“事件A”的次数。

如果计数过程在不相重叠的时间间隔内，事件A发生的次数是相互独立的。

计数过程N(t)是独立增量过程

若计数过程N(t)在(t,t+s]内（S>0），事件A发生的次数N(t+s)-N(t)仅与时间差s有关，而与t无关。

计数过程N(t)是平稳增量过程

定义3.2：称计数过程{X(t),t≥0}为具有参数λ>0的泊松过程，若它满足下列条件：

1. X(0)=0；
2. X(t)是独立增量过程；
3. 在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从参数λ>0的泊松分布，即对任意s,t≥0，有

$$P\{X(t+s)-X(s)=k\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,1,2\ldots$$

泊松过程同时也是平稳增量过程

定义3.3：称计数过程{X(t),t≥0}为具有参数λ>0的泊松过程，若它满足下列条件：

1. X(0)=0；
2. X(t)是平稳独立增量过程；
3. X(t)满足下列两式：

$$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda h+o(h) \qquad (a)$$

$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h) \qquad (b)$$

将式(a),(b)合起来可得，在$[t,t+h]$内事件不发生的概率为：$P_0(t,t+h)=1-P_1(t,t+h)-\sum_{j=2}^{+\infty}P_j(t,t+h)$

$$=1-\lambda h+0(h) \qquad (c)$$

例如：

1. 电话交换机在一段时间内接到的呼叫次数；
2. 火车站某段时间内购买车票的旅客数；
3. 机器在一段时间内发生故障的次数；

定理：定义3.2和定义3.3是等价的。

证明

§3.2 泊松过程的基本性质

一.数字特征:

设{X(t),t≥0}是泊松过程，对任意的t,s∈[0, ∞)，且s<t，由泊松过程的增量分布服从泊松分布可得:

$$E[X(t)-X(s)]=D[X(t)-X(s)]=\lambda(t-s)$$

由于X(0)=0，所以 令$s=0, X(0)=0$

$$\Rightarrow m_X(t)=E[X(t)]=E[X(t)-X(0)]=\lambda t$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{E[X(t)]}{t}$$ (λ是单位时间内随机事件发生的平均次数，故称λ为过程的速率或强度。)

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=\lambda t$$

$$E[X^2(t)]=D[X(t)]+\{E[X(t)]\}^2$$

$$=\lambda t+\lambda^2 t^2=\lambda t(1+\lambda t)$$

当$0\le s<t$,

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E\{X(s)[X(t)-X(s)+X(s)]\}$$

$$=E\{[X(s)-X(0)][X(t)-X(s)]\}+E[X(s)]^2$$

$$=E[X(s)-X(0)]\cdot E[X(t)-X(s)]+\lambda s(1+\lambda s)$$

$$=\lambda s\cdot\lambda(t-s)+\lambda s+(\lambda s)^2=\lambda^2 st+\lambda s$$

同理：当$s>t, R_X(s,t)=\lambda^2 st+\lambda t,\ s>t\ge 0$

$$\therefore R_X(s,t)=\lambda^2 st+\lambda\min(s,t)$$

一般情况下，泊松过程的协方差函数可表示为

$$B_X(s,t)=\lambda\min(s,t)(=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t))$$

泊松过程的特征函数为:

$$g_X(\theta)=E[e^{i\theta X(t)}]=\exp\{\lambda t(e^{i\theta})-1\}$$

二、时间间隔与等待时间的分布

设随机点相继出现时间为$W_1,W_2,\cdots,W_n\cdots$的泊松流，强度为λ，对应的$\{X(t),t\ge 0\}$为相应的泊松过程。

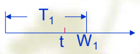
显然,W_n为随机变量,称为第n次事件A出现的时刻或第n次事件A的等待时间。

记$W_0=0, T_i=W_i-W_{i-1}, i=1,2,\cdots$称$T_i$为第$i-1$个至第$i$个随机点的点间间距，也是随机变量。

$W_n=T_1+T_2+\cdots+T_n$

定理：设$\{X(t),t\ge 0\}$是具有参数λ为的泊松过程,$\{T_n,n\ge 1\}$是对应的时间间隔序列，则随机变量T_n（$n=1,2\cdots$）是独立同分布的均值为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布。

证：注意，事件$\{T_1>t\}$发生当且仅当泊松过程在时间$[0,t)$内没有事件发生，所以



$$P\{T_1>t\}=P\{X(t)=0\}=e^{-\lambda t}$$

即：$F_{T_1}(t)=P\{T_1\le t\}=1-P\{T_1>t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

所以T_1是服从均值为$1/\lambda$的指数分布。

利用泊松过程的平稳独立增量性质，有

$$P\{T_2>t/T_1=s\}$$

$$=P\{在(s,s+t]内没事件发生/T_1=s\}$$

$$=P\{在(s,s+t]内无事件发生\}$$

$$=P\{X(t+s)-X(s)=0\}=e^{-\lambda t}$$

$$F_{T_2}(t)=P\{T_2\le t\}=1-P\{T_2>t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

其概率密度为：$f_{T_2}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

故T_2也服从均值为$1/\lambda$的指数分布。

对任意的$n\ge 1$，和$t,s_1,s_2,,s_{n-1}\ge 0$，有

$P\{T_n>t/T_1=s_1,\cdots,T_{n-1}=s_{n-1}\}$

$=P\{X(t+s_1+\cdots+s_{n-1})-X(s_1+s_2+\cdots+s_{n-1})=0\}=e^{-\lambda t}$

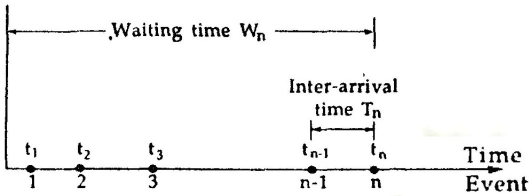
对于任意n=1,2, …事件A相继到达的时间间隔T_n的分布为：

$$F_{T_n}(t)=P\{T_n\le t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

其概率密度为：

$$f_{T_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

等待时间的分布



W_n是指第n次事件A到达的等待时间

$$W_n=\sum_{i=1}^{n}T_i$$

因此W_n是n个相互独立的指数分布随机变量之和。

定理：设$\{W_n,n\ge 1\}$是与泊松过程$\{X(t),t\ge 0\}$对应的一个等待时间序列，则W_n服从参数为n与λ的Γ分布，其密度函数为：

$$f_{W_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

证：由上面定理知W_n是n个相互独立的指数分布随机变量和，故用特征函数方法立即可得，分布密度与特征函数可通过付氏变换得。

另证：对$\forall t>0,n\in Z^+$,有"$X(t)\ge n$"$\Leftrightarrow$"$W_n\le t$"

即第n个事件在时刻t或之前发生当且仅当到时间t已发生的事件数至少是n

$$\therefore F_{W_n}(t)=P\{W_n\le t\}=P\{X(t)\ge n\}=\sum_{j=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\ t>0$$

$F_{W_n}(t)=0$，当$t\le 0$

对t求导得：

$$f_{W_n}(t)=-\sum_{j=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}+\sum_{j=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\quad t\ge 0$$

$f_{W_n}(t)=0\qquad t\le 0$

此分布又称为爱尔兰分布

当$n=1$时,$f_{W_1}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$

为指数分布，与T_i的分布相同。

定理：令$W=(W_1,W_2,\cdots,W_n)$,W_i是强度为λ的泊松过程，第i个随机点的等待时间，则W的联合概率密度为：

$$f_W(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n} & 0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

证：$\because\{W_i\in(t_i,t_i+h_i),i=1,2,\cdots,n\}$

$=\{X(t_1)=0,X(t_1+h_1)-X(t_1)=1,$

$X(t_2)-X(t_1+h_1)=0,X(t_2+h_2)-X(t_2)=1,$

$\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1}+h_{n-1})=0,X(t_n+h_n)-X(t_n)=1\}$

$\therefore P\{W_i\in(t_i,t_i+h_i),i=1,2,\cdots,n\}$

$=P\{X(t_1)=0\}\cdot P\{X(t_1+h_1)-X(t_1)=1\}\cdot$

$P\{X(t_2)-X(t_1+h_1)=0\}\cdot P\{X(t_2+h_2)-X(t_2)=1\}\cdot$

$\cdots P\{X(t_n)-X(t_{n-1}+h_{n-1})=0\}\cdot P\{X(t_n+h_n)-X(t_n)=1\}$

$=e^{-\lambda t_1}\cdot(\lambda h_1 e^{-\lambda h_1})\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1-h_1)}\cdots\cdots e^{-\lambda(t_n-t_{n-1}-h_{n-1})}\cdot(\lambda h_n e^{-\lambda h_n})$

$=\lambda^n h_1 h_2\cdots h_n e^{-\lambda(t_n+h_n)}$

$$\therefore f_W(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{\partial^n F_W(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_1,\cdots,\partial t_n}$$

$$=\lim_{h_i\to 0}\frac{P\{W_i\in(t_i,t_i+h_i),i=1,2,\cdots,n\}}{h_1\cdots h_n}$$

$$=\lambda^n e^{-\lambda t_n}\qquad 0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n$$

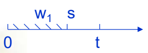
三、到达时间的条件分布

假设在**[0,t]**内事件**A**已经发生一次，我们要确定这一事件到达时间**W$_1$**的分布。

泊松过程 → 平稳独立增量过程

可以认为**[0,t]**内长度相等的区间包含这个事件的概率应该相等，或者说，这个事件的到达时间应在**[0,t]**上服从均匀分布。对于**0≤s＜t**有

$$P\{W_1\le s/X(t)=1\}=?$$



$$P\{W_1\le s/X(t)=1\}=\frac{P\{W_1\le s,X(t)=1\}}{P\{X(t)=1\}}=\frac{P\{X(s)=1,X(t)-X(s)=0\}}{P\{X(t)=1\}}$$

$$=\frac{P\{X(s)=1\}\cdot P\{X(t)-X(s)=0\}}{P\{X(t)=1\}}=\frac{\lambda s e^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}}=\frac{s}{t}$$

即分布函数为：

$$F_{W_1/X(t)=1}(s)=\begin{cases}0, & s<0\\ s/t, & 0\le s<t\\ 1, & s\ge t\end{cases}$$

条件分布密度为：

$$f_{W_1/X(t)=1}(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}, & 0\le s<t\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

推广到一般情况

定理：设**{X(t),t≥0}**是泊松过程，已知在**[0,t]**内事件**A**发生**n**次，则这**n**次到达时间**W$_1$<W$_2$, …<W$_n$**与相应于**n**个**[0,t]**上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同的分布。

证：令$0\le t_1<\cdots\le t_n$

$$P\{W_i\in(t_i,t_i+h_i),i=1,2,\cdots,n/X(t)=n\}$$

$$=\frac{\begin{array}{c}P\{X(t_1)=0\}\cdot P\{X(t_1+h_1)-X(t_1)=1\}\cdot\\ P\{X(t_2)-X(t_1+h_1)=0\}\cdot P\{X(t_2+h_2)-X(t_2)=1\}\cdot\\ \cdots P\{X(t_n)-X(t_{n-1}+h_{n-1})=0\}\cdot P\{X(t_n+h_n)-X(t_n)=1\}\\ \cdot P\{X(t)-X(t_n+h_n)=0\}\end{array}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t_1}\cdot(\lambda h_1 e^{-\lambda h_1})\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1-h_1)}\cdot\cdots\cdot e^{-\lambda(t_n-t_{n-1}-h_{n-1})}\cdot(\lambda h_n e^{-\lambda h_n})e^{-\lambda(t-t_n-h_n)}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}$$

$$=\frac{\lambda^n h_1h_2\cdots h_n e^{-\lambda t}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}=\frac{n!}{t^n}h_1h_2\cdots h_n$$

$$\therefore f_{W/X(t)=n}(t_1,t_2,,t_n)=\frac{\partial F^n_{W/X(t)=n}(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_1\cdots\partial t_n}$$

$$=\lim_{h_i\to 0}\frac{P\{W_i\in(t_i,t_i+h_i),i=1,2,\cdots,n/X(t)=n\}}{h_1\cdots h_n}=\frac{n!}{t^n}$$

即

$$f_{W/X(t)=n}(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases}n!/t^n, & 0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

注：设$U_1,U_2,\cdots,U_n$是独立地服从$[0,t)$上的均匀分布，则它们的联合密度函数是：

$$f_{U_1,\cdots,U_n}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{t^n}, & 0\le u_1,u_2,\cdots,u_n\le t\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对应于$U_1,U_2,\cdots,U_n$的顺序统计量$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$有联合概率密度：

$$f_{\tau_1,\cdots,\tau_n}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n} & 0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

25

例：设在$[0,t]$内事件A已经发生n次，且$0<s<t$，对于$0<k<n$，求$P\{X(s)=k/X(t)=n\}$。

解：$P\{X(s)=k/X(t)=n\}=\dfrac{P\{X(s)=k,X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$

$$=\frac{P\{X(s)=k,X(t)-X(s)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{\dfrac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}\cdot\dfrac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}}{\dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}=C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

这是一个参数为n和$\dfrac{s}{t}$的二项分布

26

例：设在$[0,t]$内事件A已经发生n次，求第$k(k<n)$次事件A发生的时间W_k的条件概率密度函数。

解：当h充分小时

$$P\{s<W_k\le s+h/X(t)=n\}$$
$$=P\{s<W_k\le s+h,X(t)=n\}/P\{X(t)=n\}$$
$$=P\{s<W_k\le s+h,X(t)-X(s+h)=n-k\}/P\{X(t)=n\}$$
$$=\frac{P\{s<W_k\le s+h\}\cdot P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}$$

27

除以h，并$h\to 0$令取极限得：

$$f_{W_k/X(t)=n}(s)=\lim_{h\to 0}\frac{P\{s<W_k\le s+h/X(t)=n\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{P\{s<W_k\le s+h\}}{h}\cdot\frac{P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$
$$=f_{W_k}(s)P\{X(t)-X(s)=n-k\}e^{\lambda t}(\lambda t)^{-n}n!$$
$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{s^{k-1}}{t^k}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

这是一个$Bata$分布

$$f_{W_k}(s)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda s}\dfrac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} & s\ge 0\\ 0 & s<0\end{cases}$$

28

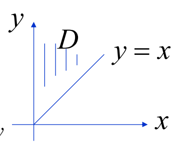
例：设$\{X_1(t),t\ge 0\},\{X_2(t),t\ge 0\}$是相互独立的泊松过程，泊松强度分别为$\lambda_1$，$\lambda_2$，记$W_k^{(1)}$表示$X_1(t)$的第$k$次事件到达时间，$W_1^{(2)}$表示$X_2(t)$第一次事件到达时间. 求$P\{W_k^{(1)}<W_1^{(2)}\}$

解：$W_k^{(1)}$的概率密度为：$f_{W_k^{(1)}}(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\dfrac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$W_1^{(2)}$的密度为：$f_{W_1^{(2)}}(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

29

则$P\{W_k^{(1)}<W_1^{(2)}\}=\iint_D f(x,y)dxdy$



$$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dy$$
$$=\int_0^{+\infty}\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}dx$$
$$=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\int_0^{+\infty}(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)x]^{k-1}}{(k-1)!}dx$$
$$=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

Γ分布的密度函数积分为1

30

例：仪器受震动引起损伤，震动按强度为λ的泊松过程发生。第k次震动引起损伤为D_k，$D_1, D_2, \cdots$独立同分布序列且和$\{N(t), t \geq 0\}$独立，其中$N(t)$表示$[0,t]$内受到的震动次数，又损伤随时间按指数减小。即初始损伤为表示为D,经时间t后减小为$De^{-\alpha t} \cdot (\alpha > 0)$

在时刻t的损伤表示为：$D(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)}$

求：$E[D(t)]$

τ_k为第k次震动的时刻，在$(0,t)$内$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k$,$k$个事件的发生时间,看作无次序的随机变量，则它们独立地均匀分布在$(0,t)$上。

解：$E[D(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)}\right]$

$$= E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)} / N(t)\right]\right\}$$

由于$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)} / N(t) = n\right]$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{n} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)} / N(t) = n\right]$$

$$= E(D_1)e^{-\alpha t} E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{+\alpha\tau_k} / N(t) = n\right]$$

$$= E(D_1)e^{-\alpha t} E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{+\alpha U_k}\right] = E(D_1)e^{-\alpha t} \cdot nE(e^{\alpha U_k})$$

$$= E(D_1)e^{-\alpha t} \cdot n\int_0^t e^{\alpha x} \cdot \frac{1}{t} dx = E(D_1)e^{-\alpha t} \cdot \frac{n}{\alpha t}(e^{\alpha t} - 1)$$

U_k是$[0,t)$上相互独立的均匀随机变量的顺序统计量。

$$\therefore E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)} / N(t)\right] = E(D_1)e^{-\alpha t} \cdot \frac{N(t)}{\alpha t}(e^{\alpha t} - 1)$$

$$\therefore E[D(t)] = E(D_1)e^{-\alpha t} \cdot \frac{E[N(t)]}{\alpha t}(e^{\alpha t} - 1)$$

$$= E(D_1)e^{-\alpha t} \cdot \frac{\lambda t}{\alpha t}(e^{\alpha t} - 1)$$

$$= \frac{\lambda E(D_1)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

§3.3 非齐次泊松过程

在泊松过程的定义中，关于平稳增量的条件是对计数过程的一种限制，在许多物理系统中是满足的，若时刻 t 到达的速率是 t 的函数，则关于平稳增量的条件应舍去，从而产生非齐次泊松过程的概念。

定义：称计数过程{X(t),t≥0}为具有跳跃强度函数λ(t)的非齐次泊松过程，若它满足下列条件：

1. X(0)=0;
2. X(t)是独立增量过程;
3.

$$P\{X(t+h) - X(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$$

$$P\{X(t+h) - X(t) \geq 2\} = o(h)$$

其分布为：

$$P\{X(t) = k\} = \frac{[\int_0^t \lambda(t)dt]^k}{k!} e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

非齐次泊松过程的数字特征为:

$$m_X(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1,t_2)} \lambda(t)dt[1 + \int_0^{\max(t_1,t_2)} \lambda(t)dt]$$

$$B_X(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1,t_2)} \lambda(t)dt$$

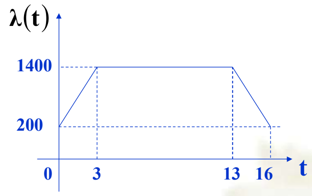
例：设$\{X(t),t\geq 0\}$是具有跳跃强度$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$的非齐次泊松过程$(\omega\neq 0)$，求$E[X(t)]$和$D[X(t)]$.

$$解：E[X(t)]=\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos\omega t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

$$D[X(t)]=E[X(t)]=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

例题：设某路公共汽车从早上5时到晚上9时有车发出，乘客流量如下：5时按平均乘客为200人/时计算；5时至8时乘客平均到达率按线性增加，8时到达率为1400人/时；8时至18时保持平均到达率不变；18时到21时从到达率1400人/时按线性下降，到21时为200人/时。假定乘客数在不相重叠时间间隔内是相互独立的。求12时至14时有2000人来站乘车的概率，并求这两个小时内来站乘车人数的数学期望。

解：将时间5:00~21:00平移为0~16,依题意得乘客到达率为：



乘客到达率与时间关系

$$\lambda(t)=\begin{cases}200+400t, & 0\leq t\leq 3\\ 1400, & 3<t<13\\ 1400-400(t-13), & 13<t\leq 16\end{cases}$$

$\because E[X(9)-X(7)]=\int_7^9 1400dt=2800$

$\therefore$ 在12时～14时有2000名乘客的概率为：

$$P\{X(9)-X(7)=2000\}=e^{-2800}\cdot\frac{(2800)^{2000}}{2000!}$$

12时～14时乘客数的期望为：

$E[X(9)-X(7)]=2800(人)$

§ 3.4　复合泊松过程

定义：设$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，$\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$是一列独立同分布随机变量，且与$\{N(t),t\geq 0\}$独立。

令$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k$，$t\geq 0$

则称$\{X(t),t\geq 0\}$为复合泊松过程。

例：设$N(t)$是在$(0,t)$内来到某商点的顾客人数，$\{N(t),t\geq 0\}$是泊松过程，若Y_k是第k个顾客在商店所花的钱数，则$\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$是独立同分布随机变量序列，且与$\{N(t),t\geq 0\}$独立。

记$X(t)$为该商店在$(0,t)$内的营业额，则$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k,t\geq 0$是一个复合泊松过程。

又如保险公司买了人寿保险的人在时刻$W_1,W_2,\cdots$死亡，在时刻W_n死亡的人，保险公司赔偿金额是Y_n，在$(0,t)$死亡人数记为$N(t)$，则$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k$表示公司在$(0,t)$需支付的赔偿金总额。

定理：设$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k$，$t\ge 0$是复合泊松过程，则

(1).$\{X(t),t\ge 0\}$是独立增量过程；

(2).$X(t)$的特征函数：$g_{X(t)}(u)=\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}$；

其中$g_Y(u)$是随机变量Y_1的特征函数，λ是事件的到达率。

(3).若$E[Y_1^2]<\infty$，则$E[X(t)]=\lambda tE[Y_1]$, $D[X(t)]=\lambda tE[Y_1^2]$。

证:(2) $g_{X(t)}(u)=E[e^{iuX(t)}]=E\{E[e^{iuX(t)}/N(t)]\}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E[e^{iuX(t)}/N(t)=n]\cdot P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{iu\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k}/N(t)=n\right]\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{iu\sum_{k=1}^{n}Y_k}\right]\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[g_{Y_1}(u)]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}$$

(3)、由条件期望的性质

$$E[X(t)]=E\{E[X(t)/N(t)]\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E[X(t)/N(t)=n]\cdot P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\sum_{k=1}^{n}Y_k/N(t)=n\right]\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\sum_{n=1}^{\infty}nE(Y_1)\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda te^{-\lambda t}E(Y_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda tE(Y_1)$$

或: $E[X(t)/N(t)=n]=E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i/N(t)=n\right]$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i/N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]=nE(Y_1)$$

$\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\text{与}N(t)\text{独立}\right)$

$$E[X(t)/N(t)]=E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i/N(t)\right]=N(t)E(Y_1)$$

$$\therefore E[X(t)]=E\{E[X(t)/N(t)]\}=E[N(t)]E(Y_1)=\lambda tE(Y_1)$$

$$E[X^2(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}E[X^2(t)/N(t)=n]\cdot P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)^2/N(t)=n\right]\cdot P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E[\sum_{k=1}^{n}Y_k]^2\cdot P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{D\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)+\left[E\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)\right]^2\right\}\cdot P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{nD(Y_1)+n^2(EY_1)^2\}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda tD(Y_1)+\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)(EY_1)^2+n(EY_1)^2]\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda tD(Y_1)+\lambda t(EY_1)^2+(\lambda t)^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}(EY_1)^2e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda tD(Y_1)+\lambda t(EY_1)^2+(\lambda t)^2(EY_1)^2$$

$$D[X(t)]=E[X^2(t)]-E([X(t)])^2$$

$$=\lambda tD(Y_1)+\lambda t(EY_1)^2+(\lambda t)^2(EY_1)^2-(\lambda t)^2(EY_1)^2$$

$$=\lambda tEY_1^2$$

另：利用特征函数与矩的关系：$g^{(k)}(0)=i^k EX^k$

由$g_{X(t)}(u)=e^{\lambda t[g_Y(u)-1]}$求一阶导数

$$g'_{X(t)}(u)=e^{\lambda t[g_Y(u)-1]}\cdot\lambda t g'_Y(u)$$

$$\therefore g'_{X(t)}(0)=\lambda t g'_Y(0)\Rightarrow E[X(t)]=\lambda t E(Y_1)$$

$$g''_{X(t)}(u)=e^{\lambda t[g_Y(u)-1]}\cdot(\lambda t)^2(g'_Y(u))^2+e^{\lambda t[g_Y(u)-1]}\cdot\lambda t g''_Y(u)$$

$$\Rightarrow g''_{X(t)}(0)=(\lambda t)^2[g'_Y(0)]^2+\lambda t g''_Y(0)$$

$$EX^2(t)=(\lambda t)^2(EY_1)^2+\lambda t EY^2$$

$$D[X(t)]=EX^2(t)-(E[X(t)])^2$$

$$=(\lambda t)^2(EY_1)^2+\lambda t EY_1^2-(\lambda t)^2(EY_1)^2=\lambda t EY_1^2$$

作业：3.1，3.2，3.3，3.5，3.7