工程矩阵理论：内积空间和等距变换

东南大学· 数学系· 周建华

August 15, 2015

本章的目的：将内积推广到抽象的线性空间约定：数域F指实数域$\mathbb{R}$ 或复数域$\mathbb{C}$

Definition

假设V 是数域F 上的线性空间，在V 上定义了一个二元函数$\langle\alpha,\beta\rangle$，若

1. $\langle\alpha,\beta\rangle=\overline{\langle\beta,\alpha\rangle}$
2. $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle;$
3. $\forall\alpha,\beta\in V,k\in F,\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle;$
4. $\forall\alpha\in V,\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0;$ 且等号成立当且仅当$\alpha=\theta.$

则称$\langle\alpha,\beta\rangle$是$\alpha,\beta$的内积。

定义了内积的线性空间称为内积空间.

当$F=R$时,称V是欧基里德空间，简称欧氏空间;

当$F=C$时,称V是酉空间.

Example

1. 在空间$V = R^n$ 上定义内积$\langle \alpha, \beta \rangle = \beta^T \alpha$, 则$R^n$ 是欧氏空间.
2. 在空间$V = R^{n\times n}$ 上定义内积$\langle A, B \rangle = tr(B^T A)$, 则$R^{n\times n}$ 是欧氏空间.
3. 在空间$V = R_3[x]$ 上定义内积$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, 则$R_3[x]$ 是欧式空间.
4. 在空间$V = C^n$ 上定义内积$\langle \alpha, \beta \rangle = \beta^H \alpha$, 则$C_3[x]$ 是酉空间.

内积空间中的内积满足下述性质：

1. $\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$;
2. $\langle \alpha, k\beta \rangle = \bar{k} \langle \alpha, \beta \rangle$;
3. $\left\langle \sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{t} l_j \beta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} k_i \bar{l}_j \langle \alpha_i, \beta_j \rangle$;
4. 对任意$\alpha \in V, \langle \alpha, \theta \rangle = \langle \theta, \alpha \rangle = 0$

度量矩阵

Definition

设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是V的基，$\alpha, \beta \in V$的坐标是

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T,$$

则$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = X^T A \overline{Y}$

其中，$A = (\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle)_{n \times n}$，称$A$是$V$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的度量矩阵.

若$F = R$，则度量矩阵是对称矩阵：$A = A^T$;

若$F = C$，则度量矩阵是Hermite矩阵：$A = A^H$

Definition

设$\alpha \in V, \alpha$的模(长度)定义为$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$，若$\|\alpha\| = 1$，则称$\alpha$是单位向量.

性质：

1. $\forall \alpha \in V, \|\alpha\| \geq 0$，且$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$;
2. $\|k\alpha\| = |k| \, \|\alpha\|$;
   故若$\alpha \neq \theta$，则称$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$是单位向量.

Theorem

(C-B不等式)

$\forall\, \alpha, \beta \in V, |\langle \alpha, \beta \rangle| \le \|\alpha\|\, \|\beta\|$

而且，等号成立$\Leftrightarrow \alpha, \beta$ 线性相关.

Theorem

(三角不等式) $\forall\, \alpha, \beta \in V, \|\alpha\| + \|\beta\| \ge \|\alpha + \beta\|$

Definition

向量α, β 间的距离定义为

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$$

三角不等式的距离形式：

$\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in V$

$$d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma).$$

Definition

(正交性)：若向量α, β的内积为零，则称α, β是正交的.记$\alpha \perp \beta$.

Theorem

(勾股定理)：若$\alpha \perp \beta$，则$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$

- 由两两正交的非零向量组成的向量组称为正交向量组.
- 由两两正交的单位向量组成的向量组称为标准正交向量组.
- 由正交向量组组成的基称为是正交基.
- 由标准正交向量组组成的基称为是标准正交基.

标准正交基下的内积

为什么要谈论标准正交基呢？

- 一组向量是空间V 的一组基是标准正交基当且仅当相应的度量矩阵是单位阵.
- 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是$V$的标准正交基，$\alpha, \beta \in V$ 在$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的坐标是$X, Y$，则$\langle \alpha, \beta \rangle = Y^H X = \langle X, Y \rangle_{C^n}$

Schmidt正交化方法

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$ 是线性无关的.
令:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_s &= \alpha_s - \frac{\langle \alpha_s, \beta_{s-1} \rangle}{\langle \beta_{s-1}, \beta_{s-1} \rangle}\beta_{s-1} - \cdots\cdots - \frac{\langle \alpha_s, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1
\end{aligned}
$$

单位化: $\gamma_i = \frac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i, \ i = 1, 2, \cdots, s.$
则$\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_s$ 是与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 等价的标准正交向量组.

Example

1. 若V在$\varepsilon_1, \varepsilon_2$下的度量矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，求$V$的一组标准正交基.
2. 在$V = R_3[x]$中定义内积：$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. 求$V$的一组标准正交基.

酉矩阵

Definition

n阶复矩阵A称为是酉矩阵，若$A^H A = I$.

A是酉矩阵$\Leftrightarrow A^{-1} = A^H \Leftrightarrow A$的行(列)向量组是$C^n$的标准正交基.

Theorem

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$V$的标准正交基，

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)U,$$

则$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$是标准正交基$\Leftrightarrow U$是酉矩阵.

Schmidt正交化方法的应用

1. 若A, B是同阶酉矩阵，则A^{-1}，AB都是酉矩阵.
2. 假设A是上（下）三角矩阵，若A是酉矩阵，则A是对角阵，且其主对角元的模均等于1 .

如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是V的基，则有标准正交基$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 使得$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)T$ 其中，T 是上三角矩阵，且其主对角元均大于零.

矩阵的UT分解

假设A是n阶可逆矩阵，则存在酉矩阵U及主对角元均大于零的上三角矩阵T，使得$A = UT$，而且，满足上述条件的矩阵U,T是唯一的.

Example

假设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的$UT$分解.

基扩充定理

Theorem

假设 W 是 V 的子空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 是 W 的标准正交基，则存在 $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \cdots \alpha_n$，使得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s, \alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \cdots \alpha_n$ 是 V 的标准正交基.

Definition

设 $W \leq V, \alpha \in V$, 若$\forall \beta \in W$，$\alpha \perp \beta$，称 $\alpha \perp W$.
若 $W_1, W_2 \leq V$，对 $\forall \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2, \alpha_1 \perp \alpha_2$,称 $W_1 \perp W_2$.

Theorem

设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s), \eta \in V$, 则 $\eta \perp W \Leftrightarrow \forall j,\ \eta \perp \alpha_j$.

正交补空间

Definition

设 $W \leq V$, 记

$$W^{\perp} = \{\alpha \in V | \alpha \perp W\},$$

易证这是 V 的子空间，称是 W 在V中的正交补空间.

Theorem

若$W \leq V$，则$V = W \oplus W^{\perp}$.

而且，若$V = W \oplus U$，且$W \perp U$，则$U = W^{\perp}$.

Corollary

若$W \leq V$，则$\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$.

$R(A)^{\perp}$ 和$K(A)^{\perp}$的计算

假设$A \in C^{s\times n}$, 定义线性映射$f : C^n \to C^s$ 为：$f(x) = Ax, \forall x \in C^n$,$f$ 的值域和核空间分别记为$R(A), K(A)$.

问题：如何计算$R(A)^{\perp}$ 和$K(A)^{\perp}$?

Theorem

$$R(A)^{\perp} = K(A^H), \quad K(A)^{\perp} = R(A^H).$$

Example

设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $W = \{x|Ax = \theta\}$, 求$W^{\perp}$ 的一组标准正交基.

问题:如何求向量到子空间的距离?
已知 $W \leq V, \alpha \in V$，若 $\eta \in W$满足

$$d(\alpha, \eta) = \min_{\xi \in W} d(\alpha, \xi)?$$

则称η为α在W中的正投影.

Theorem

假设 $W \leq V, \alpha \in V$, 则:

1. 若α在W中的正投影存在，则正投影必定是唯一的；
2. $\eta \in W$ 是α在W中的正投影当且仅当$\eta - \alpha \perp W$

Theorem

如果 $W \leq V$是有限维的，则任意$\alpha \in V$ 在W中的正投影必定存在.

Example

在 R^3 中，已知 $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (2, -1, 3), \alpha = (2, 1, 2)$, 假设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2)$, 求 α 在W 中的正投影.

Example

假设$V = R_3[x]$ 中的内积定义为

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

求$\eta = x^2$ 在$W = L(1, x)$ 中的正投影.

应用

1. Fourier系数:
   在线性空间$C_{[-\pi,\pi]}$ 上定义内积$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$, 于是, $C_{[-\pi,\pi]}$ 成为欧氏空间, 记子空间

$$W_n = L(1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx),$$

   求$f(x) \in C_{[-\pi,\pi]}$ 在W_n 中的正投影.
2. 最小二乘解:
   设$A \in C^{s\times n}$，求线性方程组$Ax = b$ 的最佳近似解.

等距变换

Definition

设 V 是内积空间， $f \in Hom(V,V)$, 若

$$\langle f(\alpha), f(\beta)\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle\,, \quad \forall\, \alpha, \beta \in V$$

称 f 是等距变换.
若$F = R$，称f 是正交变换;
若$F = C$，称f 是酉变换.

Example

设 A 是酉矩阵, $f : C^n \to C^n$定义为:

$$f(x) = Ax, \quad \forall\, x \in C^n.$$

Theorem

设 V 是内积空间，$f \in Hom(V, V)$，下述条件等价：

1. f 保持长度不变;
2. f保持内积不变;
3. f将标准正交基变为标准正交基;
4. f在标准正交基下的矩阵是酉矩阵.

欧氏空间中的镜像变换

假设 V是一个欧氏空间, $\omega \in V$ 是一个单位向量, 映射

$$f : V \to V, \quad \alpha \mapsto \alpha - 2\langle \alpha, \omega \rangle \omega,$$

则f是 V上的等距变换（正交变换）.

问题：假设在欧氏空间 V 中有两个向量 α, β ，是否有正交变换 f，使得 f 将 α 变到 β上？

设 $\beta_0 = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\beta$, 令

$$\omega = \frac{1}{\|\alpha - \beta_0\|}(\alpha - \beta_0) = \frac{1}{\left\|\alpha - \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\beta\right\|}\left(\alpha - \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\beta\right).$$

Example

假设 V 是有限维欧氏空间, $\omega \in V$ 是单位向量, V 上的变换f 定义如下：对任意 $\eta \in V$, $f(\eta) = \eta - 2\langle \eta, \omega \rangle \omega$.

1. 证明：f 是V 上的正交变换.
2. 在 $R[x]_3$ 中定义内积：对$\varphi(x), \psi(x) \in R[x]_3$,

$$\langle \varphi(x), \psi(x) \rangle = \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx,$$

于是, $R[x]_3$ 成为欧氏空间. 分别求 $R[x]_3$ 中向量 $\alpha = 1$ 及$\beta = x$ 的长度，并求正实数 k 及单位向量 $\omega \in R[x]_3$ ，使得相应的正交变换 f 将 α 变成 $k\beta$.