第 1 章　线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是线性代数中 n 维向量空间 R^n 以及 R^n 上的线性变换的推广. 线性空间是对所有与 n 维向量空间 R^n 具有同样性质的客观事物的数学抽象. 线性变换是线性空间 V 映入到自身的一种特殊的映射，它保持了加法与数乘运算的对应关系. 本章介绍线性空间、线性变换的基本概念与基本理论，本章内容既是线性代数知识的深化和提高，也是学习本书的基础.

.1.1　线性空间的基本概念

我们知道，向量的加法与数乘有八条非常基本的运算规则；矩阵的加法与数乘也有八条同样的运算规则；甚至于在微积分中，函数与函数的加法以及数与函数相乘也有八条同样的运算规则. 因此，可以把这些不同的对象的全体抽象成为一般的集合，同时定义了具有这八条运算规则的加法与数乘运算，这样一个抽象的代数系统就是我们所说的线性空间.

1.1.1　数域

首先我们介绍数域的概念.

定义 1.1　设 P 是包含 0 和 1 的数集，若 P 中数的和、差、积、商（0 不作除数）均在 P 内，则称 P 是一个**数域**.

显然，复数集 C 、实数集 R 和有理数集 Q 都是数域.

例 1.1　数集 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$ 是一个数域.

容易看出，数集 F 中任意两个数如 $a_1+b_1\sqrt{2}$, $a_2+b_2\sqrt{2}$ 的和、差、积仍是 F 中的数，而它们的商（此时 a_2,b_2 不同时为 0）为

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{a_2^2-2b_2^2}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}$$

由于 a_1,b_1 , a_2 和 b_2 均是有理数，且 a_2,b_2 不同时为 0，故 $\dfrac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$ 和 $\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$ 也是有理数，即 $\dfrac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}\in F$ ，由此证明了数集 F 是一个数域.

若集合 A 上定义了某种运算，而 A 中任意元素进行这种运算所得的结果均仍在 A 中，则称集合 A 对这种运算**封闭**. 这样我们就得到数域的一个等价定义：

设 P 是包含 0 和 1 的数集，若 P 对加、减、乘、除（0 不作除数）运算封闭，则称 P 是一个数域.

1.1.2　线性空间的定义与性质

1．线性空间的定义

定义 1.2　设 V 是一个非空集合， P 是一个数域，如果对 V 中的元素定义了两种代数运算（其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ ， $k,l\in P$ ）：

1．加法，使得： $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ ，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$ ；

2．数量乘法，使得： $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$ 及 $k\in P$ ，有 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$ ；

即V对于加法与数量乘法运算封闭. 如果

加法运算满足下列四条运算规则：

（1）$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

（2）$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\lambda})$；

（3）V中有一个元素$\mathbf{0}$，使$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，有$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$（具有这个性质的元素$\mathbf{0}$称为$V$的**零元素**或**零向量**）；

（4）对每个$\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有一个元素$\boldsymbol{\beta}\in V$，使$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$（$\boldsymbol{\beta}$称为$\boldsymbol{\alpha}$的**负元素**或**负向量**，记为$-\boldsymbol{\alpha}$）；

数量乘法运算满足下列两条运算规则：

（5）$1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

（6）$(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$；

加法与数量乘法满足下列两条运算规则：

（7）$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

（8）$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

则称V为数域P上的**线性空间**.

线性空间中的元素不论其本来面目如何，仍叫做**向量**. 当然，这里所说的向量比R^n的向量的含义要广泛得多. 当$P=R$时，V是实数域上的**线性空间**，简称为**实线性空间**；当$P=C$时，V是复数域上的**线性空间**，简称为**复线性空间**. 本书中主要讨论实线性空间和复线性空间.

我们知道线性空间V必须对加法与数量乘法运算封闭. 因而如果$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\alpha}\in V$，那么对$\forall k\in R$，都有$k\boldsymbol{\alpha}\in V$. 这说明除去$V=\{\mathbf{0}\}$外，有限个元素不可能构成一个线性空间. 下面列举一些线性空间的例子.

例 1.2　n维向量空间R^n（及其子空间）按照向量的加法以及向量与实数的数乘都构成实线性空间.

例 1.3　全体$m\times n$实矩阵，在矩阵的加法及数乘两种运算下构成一个实线性空间，记为$R^{m\times n}$.

例 1.4　区间$[a,b]$上的全体连续实函数，按照函数的加法及数与函数的乘法构成一个实线性空间，记为$C[a,b]$.

例 1.5　全体次数小于n的实系数多项式，按照通常的多项式的加法及数与多项式的乘法，构成一个实线性空间，记为$P_n(x)$，即

$$P_n(x)=\left\{p(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}\cdots+a_1x+a_0\,\middle|\,a_i\in R,i=0,1,\cdots n-1\right\}.$$

显然$P_n(x)$对通常的多项式加法及数与多项式的乘法两种运算封闭.

例 1.6　全体次数等于n的实系数多项式，在多项式的加法及数与多项式的乘法运算下不能构成一个线性空间. 因为加法运算不封闭，例如，$f(x)=x^2+x$，$g(x)=-x^2+2x+1$，此时$f(x)+g(x)$不再是二次多项式.

例 1.7　齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的全体解向量，在向量的加法及数乘两种运算下构成一个线性空间，也就是通常所说的解空间；而非齐次线性方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$的全体解向量，在上述两种运算下不构成一个线性空间.

例 1.8　仅含有n维零向量的集合$\{\ \mathbf{0}\ \}$按照向量的加法以及向量与复数的数乘构成一个复线性空间，称为**零空间**.

例 1.9　设R_+是所有正实数的集合，验证R_+对如下定义的加法与数乘运算

$$x\oplus y=xy,\quad k\circ x=x^k\quad (x,y\in R_+,k\in R)$$

构成实线性空间.

证　对$\forall x,y\in R_+$，有$x\oplus y=xy\in R_+$；又对$\forall x\in R_+,k\in R$，有$k\circ x=x^k\in R_+$，即

R_+ 对所定义的加法与数乘运算封闭. 又对 $\forall x,y,z\in R_+,k,l\in R$ ，有

（1） $x\oplus y=xy=yx=y\oplus x$；

（2） $(x\oplus y)\oplus z=(xy)\oplus z=(xy)z=x(yz)=x\oplus(y\oplus z)$；

（3） $x\oplus 1=x\cdot 1=x$ ，所以 1 是零元；

（4） $x\oplus x^{-1}=x\cdot x^{-1}=1$，所以 x^{-1} 是 x 的负元；

（5） $1\circ x=x^1=x$；

（6） $(kl)\circ x=x^{kl}=(x^k)^l=l\circ(x^k)=l\circ(k\circ x)$；

（7） $k\circ(x\oplus y)=k\circ(xy)=(xy)^k=x^ky^k=x^k\oplus y^k=(k\circ x)\oplus(k\circ y)$；

（8） $(k+l)\circ x=x^{k+l}=x^kx^l=x^k\oplus x^l=(k\circ x)\oplus(l\circ x)$；

所以 R_+ 对这样定义的加法与数乘运算构成实线性空间.

2. 线性空间的简单性质

下面我们直接从定义来证明数域 P 上的线性空间 V 的一些简单性质.

性质 1 V 中只有一个零向量.

证：假设 $\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 都是线性空间 V 中的零向量，那么由 $\mathbf{0}_1$ 是零向量，得 $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2$，又由 $\mathbf{0}_2$ 是零向量，得 $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_1$.

性质 2 V 中每个向量只有一个负向量.

证：假设 $\boldsymbol{\alpha}$ 有两个负向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$，即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，

则 $$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}.$$

性质 3 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$k\mathbf{0}=\mathbf{0}$，$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$.

证：由 $\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=(1+0)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，得 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

另两个关系式的证明留给读者.

性质 4 若 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

证明留给读者.

1.2 基、坐标与维数

1.2.1 向量组的线性相关性

1．有关概念

如同 n 维向量那样，对线性空间中的向量（元素）也可以讨论线性相关性.

定义 1.3 设 V 为数域 P 上的线性空间，对 V 中的向量（元素）$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in P$，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个**线性组合**，或说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性表示**. 称 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为**组合系数（或表示系数）**.

定义 1.4 设 V 为数域 P 上的线性空间，对 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in P$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则称向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**.否则称向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**.

2．有关结论

以上定义是大家已经熟悉的，只是重复了向量空间中相应概念的定义，因而从这些定义出发对 n 维向量所作出的种种论证也可以搬到线性空间中来，并得出相同的结论.我们不再重

复这些论证，只是把几个常用的结论叙述如下：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}\to k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

（2）一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；两个以上的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

（3）如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示法唯一.

（4）线性无关组不含零向量.

（5）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，并且可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，则 $s\leq t$.

（6）等价的线性无关向量组必定含有相同个数的向量.

1.2.2 线性空间的基与维数

1．基与维数

我们知道，在 R^3 中，最多有三个线性无关的向量，而任意四个向量都线性相关；在 R^n 中，最多有 n 个线性无关的向量，而任意 $n+1$ 个向量都线性相关；在一个线性空间 V 中，最多能有几个线性无关的向量呢？这是线性空间的一个重要属性，为此引入维数的概念.

定义 1.5 设 V 是一个线性空间，如果存在 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$ ，满足

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

（2）V 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示；

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一组**基**，n 称为线性空间 V 的**维数**，记为 $\dim V$ ，并称 V 为，记为 V^n ，此时也称 V 是**有限维线性空间**；如果对预先指定的任何正整数 N ，在 V 中总可以找到 N 个线性无关的向量，则称 V 是**无限维线性空间**.

由定义 1.5 知下列结论成立：

1． 零空间 $\{\ \mathbf{0}\ \}$ 是零维的，没有基；

2． n 维线性空间 V 中最多有 n 个线性无关的向量；

3． n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基.

由所有实系数多项式所构成的实线性空间是无限维的.因为对任意的数 n，都有 n 个线性无关的向量

$$1,x,\cdots,x^n\ .$$

无限维空间是一个专门研究的对象，它与有限维空间有比较大的差别.在本书中，我们只讨论有限维空间.

2．向量的坐标

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，由定义 1.5 知， $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关，且对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ ，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，根据前面的**结论（3）**知，$\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示，且表示法唯一.由此引入坐标的概念.

定义 1.6 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$ ，$\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示，且表示法唯一，若

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n \tag{1.1}$$

记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ ，则称 X 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的**坐标**.（1.1）式也常记为 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)X$ 的形式.

例 1.10 在**次数小于 3 的**（去掉）实系数多项式所构成的实线性空间 $P_3(x)$ 中，

令

$$f_1=1,\ f_2=x,\ f_3=x^2,$$

显然f_1, f_2, f_3线性无关，且对$P_3(x)$中任一元素$f=a+bx+cx^2$，有$f=af_1+bf_2+cf_3$. 所以$P_3(x)$是三维线性空间，1, x, x^2是$P_3(x)$的一组基，$f=a+bx+cx^2$在这组基下的坐标是$(a,b,c)^T$.

例 1.11 在全体二阶实方阵在矩阵的加法及数乘两种运算下构成的实线性空间$R^{2\times2}$中，令

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

容易验证$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$线性无关，且对$R^{2\times2}$中任一元素$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，有$A=aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}$. 所以$R^{2\times2}$是四维实线性空间，且$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$是$R^{2\times2}$的一组基，任一元素$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$在这组基下的坐标是$(a,b,c,d)^T$.

由这两个例子可以看出，在数域P上的n维线性空间V中取定了一组基后，V中的元素通过（1.1）式与数域P上的n维向量建立了一一对应的关系：

$$\boldsymbol{\alpha}\xleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\quad x_i\in P, i=1,2,\cdots,n$$

特别当V是n维实线性空间时，V与R^n之间就建立了一一对应的关系.由此可以理解为什么将线性空间中的元素称为向量.

尤其值得一提的是这种一一对应，确切地说是V与R^n间的一一对应映射，且此映射保持了线性关系的不变，即：

设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$是$V$的一组基，对$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，它们在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标分别为$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，设$k,l$为任意实数，则$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标为

$$k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix};$$

反之，V中坐标为$k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$的元素必定是$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$.

可见，在此一一对应映射下，V中元素的线性关系和它们所对应的坐标向量的线性关系完全相同，这种映射称为**同构映射**，此时称V与R^n**同构**.也就是说，任意一个实线性空间都与R^n同构.从某种程度上讲，尽管V与R^n的元素不同，但V与R^n的数学结构完全一致.因而今后

讨论V中元素的线性关系时，常常通过讨论它们所对应的坐标向量的线性关系来进行，而对R^n中的元素我们已经相当熟悉了.

例 1.12 判断$P_4(x)$中多项式组$f_1(x)=-x^3+x+2$，$f_2(x)=3x^3+4x^2-2x+5$，$f_3(x)=x^3+4x^2+9$，$f_4(x)=5x^3+4x^2-4x+1$的线性相关性.

解 取$P_4(x)$中的基 $x^3, x^2, x, 1$，则$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$在这组基下的坐标分别为$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,4,-2,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,0,9)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(5,4,-4,1)$，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}_4$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3$，所以多项式组$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$也线性相关，且$f_4(x)=-2f_1(x)+f_2(x)+0f_3(x)$.

例 1.13 求$R^{2\times2}$中$A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&-2\\0&2\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$A_4=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$的秩和极大无关组.

解 取$R^{2\times2}$中的基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$（见例 1.11），则$A_1, A_2, A_3, A_4$在这组基下的坐标分别为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,0,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,0,1,1)$，而向量组的秩$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=2$，且$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大无关组，所以矩阵组$A_1, A_2, A_3, A_4$的秩为 2，且$A_1, A_3$是$A_1, A_2, A_3, A_4$的一个极大无关组.

关于线性空间的同构的性质，我们将在本章第七节进一步讨论.

1.2.3 基变换与坐标变换

例 1.14 在全体二阶实方阵在矩阵的加法及数乘两种运算下构成的实线性空间$R^{2\times2}$中，令

$$F_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad F_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad F_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

容易验证F_1, F_2, F_3, F_4线性无关（证明留作练习，习题 1 第 4 题），由例 1.11 知$R^{2\times2}$是四维的实线性空间，所以F_1, F_2, F_3, F_4是$R^{2\times2}$的一组基，且对$R^{2\times2}$中任一元素$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，有

$A=(a-b)F_1+(b-c)F_2+(c-d)F_3+dF_4$，即$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$在基$F_1, F_2, F_3, F_4$下的坐标是$(a-b, b-c, c-d, d)^T$.

比较例 1.11 与例 1.14 中，我们看到一个线性空间可以有不同的基，事实上，**n维线性空间V中任意n个线性无关的向量都可以作为V的一组基**. 显然，同一个向量在两组基下的坐标是不同的，下面主要研究同一个向量在不同基下的坐标之间的联系.

定义 1.7 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$是$n$维线性空间$V$的两组基，显然它们可以互相线性表示，若

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=c_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n, \\ \boldsymbol{\eta}_2=c_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n, \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ \boldsymbol{\eta}_n=c_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\end{cases}$$

将上式用矩阵形式表示成

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

则矩阵$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$称为由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$的**过渡矩阵**.（1.2）式称为**基变换公式**.

注意这里的基变换公式只是一个形式表达式，而不是真正意义上的矩阵等式. 不过，这一表达式与分块矩阵具有相似的运算性质，它可以使许多问题的表述更方便，且易于记忆.

下一定理将给出过渡矩阵的性质及不同基下坐标之间的关系.

定理 1.1 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是$n$维线性空间$V$的两组基，由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$的过渡矩阵为$C$，则$C$是可逆的；且如果向量$\boldsymbol{\alpha}$在这两组基下的坐标分别是$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$与$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则

$$X=CY \quad 或 \quad Y=C^{-1}X \tag{1.3}$$

证 考察由过渡矩阵C所构成的齐次线性方程组$CX=\mathbf{0}$，设$X_0=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$是$CX=\mathbf{0}$的任一解，那么

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)X_0=[(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)C]X_0=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(CX_0)=\mathbf{0}$$

即

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\eta}_n=\mathbf{0},$$

又$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是$R^n$的一组基，所以$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$线性无关，故总有$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，即$X_0=\mathbf{0}$. 这表明齐次线性方程组$CX=\mathbf{0}$只有零解，所以$r(C)=n$， 即$C$可逆.

因为向量$\boldsymbol{\alpha}$在这两组基下的坐标分别是$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$与$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，即成立

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)X$$
$$\boldsymbol{\alpha}=y_1\boldsymbol{\eta}_1+y_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\eta}_n=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)Y$$

因而

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)Y=[(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)C]Y=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(CY)$$

又因为向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标唯一，所以

$$X=CY \quad 或 \quad Y=C^{-1}X,$$

（1.3）式就是n维线性空间V中向量在两组基下的新旧坐标之间的**坐标变换公式**.

例 1.15 在例 1.11 与例 1.14 中，求线性空间$R^{2\times 2}$中由基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$到基$F_1,F_2,F_3,F_4$的过渡矩阵.

解 设所求过渡矩阵为C，不难看出

$$F_1=E_{11}，\quad F_2=E_{11}+E_{12}，\quad F_3=E_{11}+E_{12}+E_{21}，\quad F_4=E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22} \tag{1.4}$$

即F_1,F_2,F_3,F_4在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的坐标分别是

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

由定义 1.7 知：过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由基变换公式（1.2）式，有

$$(F_1,F_2,F_3,F_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

显然（1.5）式并不是真正意义上的矩阵等式，只是一个形式表达式. 比较（1.4）与（1.5）式，可见（1.5）式与分块矩阵具有相似的运算性质.

由例 1.11 知：$R^{2\times 2}$ 中任一元素 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的坐标是 $X=(a,b,c,d)^T$，设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 在基 F_1,F_2,F_3,F_4 下的坐标是 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_n)^T$，则由坐标变换公式（7.3）式知，

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c-d\\d\end{pmatrix}$$

可见与例 1.14 中的结论一致.

例 1.16 在 $P_4(x)$ 中取两组基

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=x^3+2x^2-x\\\boldsymbol{\alpha}_2=x^3-x^2+x+1\\\boldsymbol{\alpha}_3=-x^3+2x^2+x+1\\\boldsymbol{\alpha}_4=-x^3-x^2+1\end{cases},\quad\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=2x^3+x^2+1\\\boldsymbol{\beta}_2=x^2+2x+2\\\boldsymbol{\beta}_3=-2x^3+x^2+x+2\\\boldsymbol{\beta}_4=x^3+3x^2+x+2\end{cases}$$

求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵；

解 直接按基变换公式（1.2）式确定过渡矩阵比较麻烦，故采用“中介法”，取 $P_4(x)$ 中的基 $x^3,x^2,x,1$，则显然

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(x^3,x^2,x,1)\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(x^3,x^2,x,1)\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

则有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)A^{-1}B$$

故由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵为$A^{-1}B$，经计算得

$$C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

例 1.17 设R^3中两组基

$$\textbf{I：}\ \boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\textbf{II：}\ \boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

求：

（1）基 **I** 到基 **II** 的过渡矩阵；

（2）向量$\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_3$在基 **I** 下的坐标以及在自然基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$下的坐标；

（3）向量$\boldsymbol{\beta}=(4,1,-2)^T$在基 **I** 下的坐标.

解 （1）设基 **I** 到基 **II** 的过渡矩阵为C，记矩阵$A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$，$B=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，则由基变换公式知有$B=AC$ ，于是

$$C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

（2）根据（**4.6**）式 （？ ），$\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_3$在基 **I** 下的坐标为

$$X=CX'=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-6\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_3$在自然基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$下的坐标可直接算出

$$\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_3=3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

（3）自然基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$到基 **I** 的过渡矩阵为$A=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$，所以$\boldsymbol{\beta}=(4,1,-2)^T$在基 **I** 下的坐标为

$$Y'=A^{-1}Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

1.3 线性子空间

1.3.1 子空间的概念

定义 1.8 设 V 为数域 P 上的**线性空间**，W 是线性空间 V 的非空子集，若 W 关于 V 中的线性运算也构成数域 P 上的线性空间，则称 W 是 V 的**线性子空间**，简称**子空间**.

对任何线性空间 V，显然由 V 中单个零向量构成的子集是 V 的子空间，称为 V 的**零子空间**；V 本身也是 V 的子空间.这两个子空间称为 V 的**平凡子空间**.V 的其它子空间称为 V 的**非平凡子空间**.

因为线性子空间也是线性空间，所以前面有关基、维数与坐标等概念，对线性子空间也成立.

下面定理给出了 V 的非空子集 W 要满足什么条件才构成 V 的子空间.

定理 1.2 设 W 是线性空间 V 的非空子集，则 W 是 V 的子空间的充要条件是：W 对 V 中的线性运算封闭.

证 必要性是显然的，只证充分性.

因 W 对 V 中的线性运算封闭，则只需验证满足定义 1.2 中的八条运算规则.

因为取 $k=0$，$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\in V$；又取 $k=-1$，$k\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}\in V$，满足规则（3）、（4），即 W 中存在零元素负元素.又因为 $W\subseteq V$，所以 V 中加法与数乘关于定义 1.2 中的其余六条运算规则对 W 中的元素运算时必须满足.故由定义 1.2 知：W 是线性空间，从而是 V 的子空间.

例 1.18 n 阶上三角实矩阵的集合、上（改为下）三角实矩阵的集合、实对角矩阵的集合都是线性空间 $R^{n\times n}$ 的子空间.

例 1.19 函数集合 $\{f(x)\in C[a,b]|f(a)=0\}$ 是线性空间 $C[a,b]$ 的子空间.

例 1.20 函数集合 $\{f(x)\in C[a,b]|f(a)=1\}$ 不是线性空间 $C[a,b]$ 的子空间.

例 1.21 取线性空间 $P_4(x)$ 的子集

$$W=\{p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0|a_2+a_1+a_0=0,a_i\in R\}$$

证明 W 是 $P_4(x)$ 的子空间，并求 W 的维数.

证 因为 $0\in W$，所以 W 非空.又因为 $\forall p(x),q(x)\in W$，$\forall k\in R$，有

$$p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\quad q(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$$

其中 $a_2+a_1+a_0=0$，$b_2+b_1+b_0=0$.由于

$$\begin{aligned}p(x)+q(x)&=(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)\\&=(a_3+b_3)x^3+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\end{aligned}$$

$$kp(x)=(ka_3)x^3+(ka_2)x^2+(ka_1)x+(ka_0)$$

且满足

$$(a_2+b_2)+(a_1+b_1)+(a_0+b_0)=(a_2+a_1+a_0)+(b_2+b_1+b_0)=0$$

$$(ka_2)+(ka_1)+(ka_0)=k(a_2+a_1+a_0)=0$$

所以 $p(x)+q(x)\in W$，$kp(x)\in W$，故 $P_4(x)$ 的子空间.取 W 中 3 个多项式

$$p_1(x)=x-1,\quad p_2(x)=x^2-1,\quad p_3(x)=x^3,$$

易证 $p_1(x)$，$p_2(x)$，$p_3(x)$ 线性无关，且对 $\forall p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in W$，有

$$p(x)=a_1p_1(x)+a_2p_2(x)+a_3p_3(x),$$

故 W 是三维的.

例 1.22 设 V 为数域 P 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 中的一组元素（向量），则

$$Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m | k_1,k_2,\cdots,k_m\in P\}$$

是V的子空间，称为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的**生成子空间**，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$称为该**子空间的生成元**.

证 因为$\boldsymbol{\alpha}_1\in Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，所以$Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$非空

又因为$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，$\forall k\in P$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\quad \boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^m s_i\boldsymbol{\alpha}_i$$

由于

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\sum_{i=1}^m s_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^m (k_i+s_i)\boldsymbol{\alpha}_i\in Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),$$

$$k\boldsymbol{\beta}=k\sum_{i=1}^m s_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^m (ks_i)\boldsymbol{\alpha}_i\in Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),$$

所以$Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$是$V$的子空间.

生成子空间的重要意义在于：有限维线性空间V是由它的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$生成的子空间，即

$$V=Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$$

易证对一般的线性空间，成立：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的任一极大无关组就是$Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的一组基，且$Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的维数=$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩.

（2）设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$等价，则

$$Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=Span(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$

加：反之亦真。

由于线性空间V的子空间W是V的一个子集，因此W中线性无关的元素不可能比V中的更多，所以$\dim W\le\dim V$. 并进一步有下列定理：

定理 1.3 线性空间V的任何一个子空间W的基都可以扩充成V的一组基.

证 设$\dim W=m,\dim V=n$，则$0<m\le n$，设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是$W$的一组基.

1）若$m=n$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是$V$的一组基；

2）若$m<n$，则在V中必存在元素$\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$，使得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性无关（否则，对$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}$，则$\boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是$V$的一组基，$\dim V=m$与$m<n$矛盾）. 若$m+1=n$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$是$V$的一组基；若$m+1<n$，同理在$V$中必存在元素$\boldsymbol{\alpha}_{m+2}$，使得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2}$线性无关.

如此有限次重复上述过程，必找到$n-m$个元素$\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，使得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一组基.

1.3.2 子空间的交与和

下面讨论子空间的交与和的概念与性质.

定义 1.9 设W_1,W_2是线性空间V的两个子空间，称

$$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\alpha}\in W_1 且 \boldsymbol{\alpha}\in W_2\}$$

为W_1与W_2的**交**.而称

$$W_1+W_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 | \boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$$

为W_1与W_2的**和**.

定理 1.4 设V是数域P上的线性空间，W_1,W_2是V的两个子空间，则$W_1\cap W_2$与

W_1+W_2都是V的子空间.

证 仅对W_1+W_2的情况给予证明.

首先因为$\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}\in W_1+W_2$，所以$W_1+W_2$非空.

又对$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W_1+W_2$，$\forall k\in P$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2)\in W_1+W_2$$
$$k\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2\in W_1+W_2$$

故W_1+W_2是V的子空间.

例 1.23 设W_1,W_2分别是齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$，$BX=\mathbf{0}$的解空间，则$W_1\cap W_2$为方程组$\begin{cases}AX=\mathbf{0}\\BX=\mathbf{0}\end{cases}$的解空间.

例 1.24 设$W_1=Span(A_1,A_2)$，$W_2=Span(A_3,A_4)$，其中

$$A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2&-2\\0&2\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix},$$

求W_1+W_2与$W_1\cap W_2$的基与维数.

解 容易证明

$$W_1+W_2=Span(A_1,A_2)+Span(A_3,A_4)=Span(A_1,A_2,A_3A_4)$$

例 1.13 已求得矩阵组A_1,A_2,A_3,A_4的秩为 2，且A_1，A_3是A_1,A_2,A_3,A_4的一个极大无关组.所以$\dim(W_1+W_2)=2$，且A_1，A_3是W_1+W_2的一组基.

下面求$W_1\cap W_2$的基与维数.对任意矩阵$A\in W_1\cap W_2$，则$A\in W_1$且$A\in W_2$，即存在$x_1,x_2,x_3,x_4\in P$，使得$A=x_1A_1+x_2A_2=x_3A_3+x_4A_4$，即

$$x_1A_1+x_2A_2-x_3A_3-x_4A_4=0$$

比较矩阵的元素，得方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\-x_1-2x_2-x_3\qquad\quad=0\\\qquad\qquad\quad -x_3-x_4=0\\x_1+2x_2\qquad\quad -x_4=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=-2k_1-k_2\\x_2=k_1\\x_3=-k_2\\x_4=k_2\end{cases}\qquad (k_1,k_2\in P)$$

于是$A=-k_2A_3+k_2A_4=k_2(-A_3+A_4)$，所以$\dim(W_1\cap W_2)=1$，且$-A_3+A_4$是$W_1\cap W_2$的一组基.

由例 1.24 知：$\dim(W_1\cap W_2)=1$，$\dim(W_1+W_2)=2$，而$\dim W_1=1$，$\dim W_2=2$，可见在该例中，子空间W_1与W_2及其交与和的维数满足下列关系：

$$\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2$$

那么，对一般的子空间，该结论是否成立？事实上，关于子空间及其交与和的维数，有下列定理.

定理 1.5 （维数定理）设V是数域P上的线性空间，W_1,W_2是V的两个子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

证 设 $\dim W_1=n_1$，$\dim W_2=n_2$ $\dim(W_1\cap W_2)=m$. 因为 $W_1\cap W_2\subseteq W_1$，$W_1\cap W_2\subseteq W_2$，所以 $m\le n_1$，$m\le n_2$.

若 $m\neq 0$，取 $W_1\cap W_2$ 的一组基：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，把它分别扩充成 W_1 与 W_2 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$，则

$$W_1+W_2=Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}\}$$

下面证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关. 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}+z_1\boldsymbol{\gamma}_1+z_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+z_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}\\&=-z_1\boldsymbol{\gamma}_1-z_2\boldsymbol{\gamma}_2-\cdots-z_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}\end{aligned}$$

由上式第一个等式知 $\boldsymbol{\alpha}\in W_1$，由第二个等式知 $\boldsymbol{\alpha}\in W_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}\in W_1\cap W_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，设 $\boldsymbol{\alpha}=s_1\boldsymbol{\alpha}_1+s_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+s_m\boldsymbol{\alpha}_m$，从而

$$s_1\boldsymbol{\alpha}_1+s_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+s_m\boldsymbol{\alpha}_m=-z_1\boldsymbol{\gamma}_1-z_2\boldsymbol{\gamma}_2-\cdots-z_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$$

即

$$s_1\boldsymbol{\alpha}_1+s_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+s_m\boldsymbol{\alpha}_m+z_1\boldsymbol{\gamma}_1+z_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+z_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 是 W_2 的基知：

$$s_1=s_2=\cdots=s_m=z_1=z_2=\cdots=z_{n_2-m}=0$$

所以此时

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}=\mathbf{0}$$

又由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 是 W_1 的基知：

$$x_1=x_2=\cdots=x_m=y_1=y_2=\cdots=y_{n_1-m}=0$$

这就证明了 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关. 所以

$$\dim(W_1+W_2)=n_1+n_2-m=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

若 $m=0$，即 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$，分别取 W_1 与 W_2 的基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2}$，类似可证，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2}$ 是 W_1+W_2 的基，即维数定理仍成立.

由维数定理知：一般地，有 $\dim(W_1+W_2)\le\dim W_1+\dim W_2$

需要指出的是，在 W_1+W_2 中，元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad(\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2)$$

一般是不唯一的. 如：例 1.24 中，

$$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O+O\quad(O\in W_1,O\in W_2),$$

或

$$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=A_1+(A_3-A_4)\ (A_1\in W_1,A_3-A_4\in W_2)$$

可见零元素的分解式不唯一. 针对这种现象，下面讨论子空间的一种特殊的和.

1.3.3 子空间的直和

定义 1.9 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间，若 W_1+W_2 中每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \quad (\boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2)$$

是唯一的，则称W_1+W_2为直和，记为$W_1 \oplus W_2$.

例 1.25 在 $P_3(x)$ 中，取两个子空间 $W_1=Span\{1,x\}$ 与 $W_2=Span\{x^2\}$，显然 $P_3(x)=W_1 \oplus W_2$.

下面的定理给出了判断子空间是否是直和的充分必要条件.

定理 1.6 设W_1,W_2是线性空间V的两个子空间，则下列条件等价：

（1）W_1+W_2是直和；

（2）W_1+W_2中零元素的分解式唯一，即由

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \quad (\boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2)$$

可推出$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$；

（3）$W_1 \cap W_2=\{\mathbf{0}\}$；

（4）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$分别是$W_1,W_2$的线性无关组，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也线性无关；

（5）$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

证 （1）$\Rightarrow$（2）. 显然.

（2）$\Rightarrow$（3）. 任取$\boldsymbol{\alpha} \in W_1 \cap W_2$，则

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha}) \quad (\boldsymbol{\alpha} \in W_1,\ -\boldsymbol{\alpha} \in W_2)$$

由（2）可得$\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，所以$W_1 \cap W_2=\{\mathbf{0}\}$.

（3）$\Rightarrow$（4）. 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0}$$

则

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=-(y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_s\boldsymbol{\beta}_s)$$

而$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r \in W_1$，$y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_s\boldsymbol{\beta}_s \in W_2$，所以

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r \in W_1 \cap W_2$$

又由（3）知：$W_1 \cap W_2=\{\mathbf{0}\}$，于是$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$，由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，得$x_1=x_2=\cdots=x_r=0$；**（类似的可证$y_1=y_2=\cdots=y_s=0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关）.**

（4）$\Rightarrow$（5）. 设$\dim W_1=n$，$\dim W_2=m$，分别取W_1与W_2的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，则

$$W_1+W_2=Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$$

又由（4）知：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关，所以

$$\dim(W_1+W_2)=n+m=\dim W_1+\dim W_2$$

（5）$\Rightarrow$（1）. 由（5）以及维数定理知：$\dim(W_1 \cap W_2)=0$，即$W_1 \cap W_2=\{\mathbf{0}\}$.现设$\boldsymbol{\alpha} \in W_1+W_2$，有两个分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2 \qquad (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2 \in W_2)$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2 \in W_1 \cap W_2$$

于是$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，即$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，所以$W_1+W_2$是直和.

推论 设W_1,W_2是线性空间V的两个子空间，若W_1+W_2是直和，则

$$\{W_1\text{的基}\}\cup\{W_2\text{的基}\}=\{W_1+W_2\text{的基}\}.$$

证 分别取W_1与W_2的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，则

$$W_1+W_2=Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$$

由定理 1.6 知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关，所以

$$\{W_1+W_2\text{的基}\}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}=\{W_1\text{的基}\}\cup\{W_2\text{的基}\}$$

值得一提的是，该结论的逆命题不成立. 如$P_3(x)$中，取两个子空间$W_1=Span\{1,x\}$与$W_2=Span\{x,x^2\}$，显然$P_3(x)=W_1+W_2$，且成立

$$\{W_1\text{的基}\}\cup\{W_2\text{的基}\}=\{1,x\}\cup\{x,x^2\}=\{1,x,x^2\}=\{P_3(x)\text{的基}\}=\{W_1+W_2\text{的基}\}$$

但

$$\mathbf{0}=x+(-x)\quad(x\in W_1,\ -x\in W_2)$$

可见零元素的分解式不唯一，即W_1+W_2不是直和.

定理 1.7 设W_1是线性空间V^n的一个子空间，则必存在V^n的一个子空间W_2，使

$$V^n=W_1\oplus W_2.$$

证 （1）若$W_1=V$，则取$W_2=\{\mathbf{0}\}$；

（2）若$W_1=\{\mathbf{0}\}$，则取$W_2=V$；

（3）若$W_1=\{\mathbf{0}\}$且$W_1\neq V$，则取W_1的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$，扩充成$V^n$的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 令 $W_2=Span\{\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，则 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$，且$V^n=W_1\oplus W_2$.

线性子空间的交与和、直和的概念可以推广到多个子空间的情形，这里不再一一详述了.

一个高维的线性空间，若能分解为若干个低维子空间的直和，则可将高维线性空间的研究归结为较简单的低维子空间的研究. 这正是引入直和的目的.

1.4 线性变换

在线性空间中，元素之间的联系是通过线性空间到自身的映射来实现的，而线性空间V到自身的映射通常称为的一个变换. 这一节中要讨论的线性变换是最简单也是最基本的一种变换.

1.4.1 线性变换的定义

为了进一步研究线性空间中的向量之间的关系，我们引入下述定义：

定义 1.10 设V^n,U^m分别是数域P上的n维和m维线性空间，如果映射$T:V^n\to U^m$保持加法和数量乘法运算，即对$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V^n$，对任意数$k\in P$，都有

$$T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=T(\boldsymbol{\alpha})+T(\boldsymbol{\beta})$$
$$T(k\boldsymbol{\alpha})=kT(\boldsymbol{\alpha})$$

则称T是线性空间V^n到U^m的一个**线性映射**. $T(\boldsymbol{\alpha})$表示向量$\boldsymbol{\alpha}$在线性变换T下的**象**.

特别地，在定义 1.10 中，当$V^n=U^m$时，则称T为线性空间V^n上的一个**线性变换**.

设A为n阶方阵，R^n上的线性变换$T(\boldsymbol{\alpha})=A\boldsymbol{\alpha}$显然满足定义 1.10 中的两个条件，由此可见，本节讨论的线性空间V上的线性变换是R^n上的线性变换的推广.

很明显，定义 1.10 中的两个条件可以用下述条件代替：对$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，对任意数$k,l\in P$，都有

$$T(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})=kT(\boldsymbol{\alpha})+lT(\boldsymbol{\beta}).$$

简言之，线性变换就是保持线性组合不变的变换.

下面来看几个线性变换的简单例子，它们表明线性变换这个概念是有丰富的内容的.

例 1.26 设映射 $T:R^3\to R^3$，定义为：$T(\boldsymbol{\alpha})=c\boldsymbol{\alpha}$，其中 c 是一个常数，则

$$T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=c(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=c\boldsymbol{\alpha}+c\boldsymbol{\beta}=T(\boldsymbol{\alpha})+T(\boldsymbol{\beta}),\quad T(k\boldsymbol{\alpha})=c(k\boldsymbol{\alpha})=k(c\boldsymbol{\alpha})=kT(\boldsymbol{\alpha}),$$

所以 T 是 R^3 上的一线性变换，通常叫**数乘变换**. 它的几何意义是把 R^3 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 放大 $(c>1)$ 或缩小 $(0<c<1)$ c 倍.

特别地，当 $c=0$ 时，T 把 R^3 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都映射为零向量，此线性变换叫**零变换**. 记作 O，即 $O(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

特别地，当 $c=1$ 时，T 把 R^3 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都映射为它自身，此线性变换叫**恒等变换**. 记作 I，即 $I(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$.

例 1.27 设映射 $f:R^3\to R^3$，取 R^3 的自然基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，则 R^3 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的坐标为 $(a,b,c)^T$，定义（去掉为）：

$$f(\boldsymbol{\alpha})=f(a,b,c)^T=(a,b,0)^T,$$

容易验证：f 是 R^3 上的一线性变换. 它的几何意义是把 R^3 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 投影到 xoy 面（图 1.1），通常叫**投影变换**.

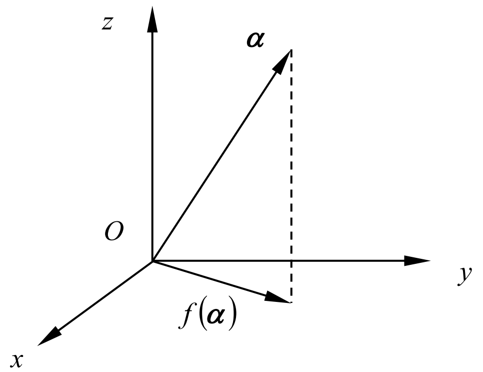

图 1.1

例 1.28 设 $A\in R^{n\times n}$，在 $R^{n\times n}$ 中定义映射

$$T(X)=AX,\quad \forall X\in R^{n\times n},$$

由矩阵运算知 T 是 $R^{n\times n}$ 上的一线性变换.

例 1.29 在 $P_n(x)$ 中，定义

$$T(p)=1,\quad \forall p\in P_n(x),$$

则 T 不是 $P_n(x)$ 上的线性变换，因为对 $\forall p,q\in P_n(x)$，$T(p+q)=1$，而 $T(p)+T(q)=1+1=2$，所以 $T(p+q)\neq T(p)+T(q)$.

例 1.30 在 $P_n(x)$ 中，定义

$$D(f)=f'(x),\quad \forall f(x)\in P_n(x),$$

则由导数的性质知 D 是 $P_n(x)$ 上的线性变换，通常叫**微分变换**.

1.4.2 线性变换的性质

不难从定义直接推出线性变换（或线性映射）具有下述基本性质：

1．$T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，$T(-\boldsymbol{\alpha})=-T(\boldsymbol{\alpha})$.

这是因为

$$T(0)=T(0\cdot\boldsymbol{\alpha})=0T(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\quad T(-\boldsymbol{\alpha})=T((-1)\cdot\boldsymbol{\alpha})=(-1)T(\boldsymbol{\alpha})=-T(\boldsymbol{\alpha}).$$

2．$T\left(\sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^{r} k_i T(\boldsymbol{\alpha}_i)$.

由定义 1.10 知显然成立.

3．线性变换把线性相关的元素组变成线性相关的元素组.

这是因为，若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则存在不全为零的一组数$k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

则

$$k_1T(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2T(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_rT(\boldsymbol{\alpha}_r) = \mathbf{0}.$$

所以$T(\boldsymbol{\alpha}_1), T(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, T(\boldsymbol{\alpha}_r)$也线性相关.

应注意，此结论的逆命题不成立，即线性变换可能把线性无关的元素组也变成线性相关的元素组，最简单的例子莫过于例 1.26 中的零变换.

4．若线性变换T是单射, 则T把线性无关的元素组变成线性无关的元素组.

事实上，设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，又线性无关

$$k_1T(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2T(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_rT(\boldsymbol{\alpha}_r) = \mathbf{0}.$$

则

$$T(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r) = \mathbf{0}$$

因为T是单射且$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，所以

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关知，$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$，故$T(\boldsymbol{\alpha}_1), T(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, T(\boldsymbol{\alpha}_r)$线性无关.

1.4.3　线性变换的运算

当线性空间上定义多个线性变换时，常常会遇到它们的运算.

定义 1.11　设V是数域P上的线性空间，T_1, T_2都是V上的线性变换，则定义如下运算：

（1）变换的加法$T_1 + T_2$：

$$(T_1 + T_2)(\boldsymbol{\alpha}) = T_1(\boldsymbol{\alpha}) + T_2(\boldsymbol{\alpha}) \qquad (\forall \boldsymbol{\alpha} \in V);$$

（2）变换的数乘kT：

$$(kT)(\boldsymbol{\alpha}) = kT(\boldsymbol{\alpha}) \qquad (\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, k \in P);$$

（3）变换的乘法T_1T_2：

$$(T_1T_2)(\boldsymbol{\alpha}) = T_1(T_2(\boldsymbol{\alpha})) \qquad (\forall \boldsymbol{\alpha} \in V);$$

（4）可逆变换：对变换T_1，若存在变换T_2，使得

$$T_1T_2 = T_2T_1 = I \text{（恒等变换），}$$

则称T_1为可逆变换，T_2是T_1的逆变换，记为$T_2 = T_1^{-1}$.

关于线性变换的运算，有以下几点值得一提：

（1）上述线性变换运算的结果仍是线性空间V上的线性变换（可以证明）；

（2）线性变换T可逆的充分必要条件是T为一一对应的（可以证明）；

（3）若线性变换T可逆，则其逆变换是唯一的（可以证明）；

（4）线性变换的乘法一般不满足交换律，即$T_1T_2 \neq T_2T_1$.

（5）对线性变换T，当n个T相乘时，常用T的n次幂来表示，即

$$T^n = \overbrace{T \cdot T \cdots T}^{n}.$$

1.5　线性变换的矩阵

在有限维线性空间中取定一组基后，就可以将一个线性变换与一个矩阵对应，这为人们用矩阵的方法来研究线性变换提供了依据.

1.5.1 线性变换在给定基下的矩阵

定义 1.12 设T是n维线性空间V上的一个线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，如果这组基在线性变换$T$下的象$T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\cdots,T(\varepsilon_n)$由这组基线性表示为

$$\begin{cases} T(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\ , \\ T(\varepsilon_2)=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\ , \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ T(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n\ , \end{cases} \tag{1.6}$$

记$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\cdots,T(\varepsilon_n))$，（1.6）式可以形式上用矩阵乘法表示为

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

那么，n阶方阵A就称为**线性变换T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵**. 其中$A$的第$j$列就是$T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标.

显然，矩阵A由基在T下的象$T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\cdots,T(\varepsilon_n)$唯一确定.

例 1.31 在R^3中，f表示例 1.27 中的投影变换，

（1）求f在自然基$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$下的矩阵；

（2）求f在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$下的矩阵；

解 （1）由投影变换的定义知

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_1,\quad f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_2,\quad f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3$$

因此，投影变换f在自然基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ .$$

（2）由投影变换的定义知

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

而

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\varepsilon}_1，\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\varepsilon}_2，\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2，$$

因此，投影变换 f 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

例 1.32 取

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}，\ E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}，\ E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}，\ E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

为线性空间 $R^{2\times2}$ 的一组基，设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，在 $R^{2\times2}$ 上的线性变换 T 定义为

$$T(X)=AX，\quad \forall X\in R^{2\times2}，$$

求 T 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

解 由于

$$T(E_{11})=AE_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=1\cdot E_{11}+0\cdot E_{12}+(-1)E_{21}+0\cdot E_{22}$$

同理得

$$\begin{aligned}T(E_{12})&=0\cdot E_{11}+1\cdot E_{12}+0\cdot E_{21}+(-1)E_{22}\\T(E_{21})&=1\cdot E_{11}+0\cdot E_{12}+(-1)E_{21}+0\cdot E_{22}\\T(E_{12})&=0\cdot E_{11}+1\cdot E_{12}+0\cdot E_{21}+(-1)E_{22}\end{aligned}$$

所以 T 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&-1&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

由上述两个例子，我们看到，在 n 维线性空间 V 取定一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 以后，由一个线性变换 T，可以唯一确定这组基在 T 下的象 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$，又由定义 1.12 可知，象 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 唯一确定一个矩阵 A；反之，通过（1.6）式可知，由一个矩阵 A 可以唯一确定基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 在某个线性变换 T 下的象 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$，即可唯一确定这个线性变换. 由此可见，$n$ 维线性空间 V 上的线性变换与 n 阶方阵 A 之间存在着一一对应的关系.

线性变换 T 与矩阵 A 的一一对应还表现在它们的运算等方面的一致性.

定理 1.8 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基， T 和 S 是 V 的两个线性变换，且它们在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B，则

（1）$T+S$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 $A+B$；

（2）kT 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 kA；

（3）TS 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 AB；

（4）T 可逆的充分必要条件是矩阵 A 可逆，且 T^{-1} 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 A^{-1}；

（5）设线性空间 V 中任一个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与其象 $T(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标分别 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 与 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则 $Y=AX$.

证 （1）由假设知

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)A,\quad S(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)B$$

于是

$$\begin{aligned}(T+S)(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)&=((T+S)(\boldsymbol{\varepsilon}_1),(T+S)(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,(T+S)(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\\&=(T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))+(S(\boldsymbol{\varepsilon}_1),S(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,S(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)A+(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)B\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(A+B)\end{aligned}$$

（2），（3）同理可证.

（4）根据（3）知：等式 $TS=ST=I$ 与 $AB=BA=I$ 对应，从而 T 可逆的充分必要条件是矩阵 A 可逆，且 T^{-1} 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 A^{-1}.

（5）由假设知成立

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)X$$

$$T(\boldsymbol{\alpha})=y_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+y_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)Y$$

另一方面，由线性变换的性质 2 知

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{\alpha})&=x_1T(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+x_2T(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+x_nT(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=(T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)X\end{aligned}\tag{1.7}$$

又由（1.6）式可表示为 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)A$ 知

$$T(\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)AX.\tag{1.8}$$

因为向量 $T(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标是唯一的，所以 $Y=AX$.

利用定理 1.8 可以计算 V 中任一个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在线性变换 T 下的象 $T(\boldsymbol{\alpha})$.

例 1.33 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 R^3 的一组基，T 是 R^3 上的线性变换，且 $T(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_3$，$T(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2$，$T(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标是 $X=(2,-1,1)^T$，求 $T(\boldsymbol{\alpha})$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

解 由定义 1.12 得　　线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

由定理 1.8 知 $T(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标 Y 为

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

1.5.2 线性变换在不同基下的矩阵

由例 1.31 知，同一个线性变换在不同基下的矩阵是不同的. 为了利用矩阵来研究线性变换，我们有必要弄清楚不同基下的矩阵之间有何联系.

利用过渡矩阵的定义与性质，我们就可以建立线性变换在不同基下的矩阵之间的联系.

定理 1.9 设线性空间 V 上的一个线性变换 T 在两组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B，若由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵为 C，则 $B = C^{-1}AC$.

证 由已知

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)A$$
$$T(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)B$$

与

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)C$$

得

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n) &= T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)C = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)AC \\ &= (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)C^{-1}AC \end{aligned}$$

从矩阵的角度，利用相似的定义来描述的同一个线性变换在不同基下的矩阵之间的关系，则定理 1.9 可以描述为：

定理 1.9´ 线性空间 V 上的一个线性变换 T 在 V 的不同基下的矩阵是相似矩阵.

由相似矩阵的三条基本性质知，相似作为 n 阶方阵之间的关系是一种等价关系. 于是，按照相似这种等价关系将 n 阶方阵分成若干个不同的等价类，使得每一等价类中的矩阵彼此相似，而不同的等价类中的矩阵彼此不相似. 结合定理 1.9´，可以说一个相似的等价类中的矩阵代表的是同一个线性变换，是同一个线性变换在不同基下的矩阵.

1.6 线性变换的值域与核

1.6.1 值域与核的定义

定义 1.13 设 T 是线性空间 V 上的线性变换，则 T 的全体象组成的集合称为 T 的**值域**，记为 $R(T)$，即

$$R(T) = \{T(\boldsymbol{\alpha}) | \boldsymbol{\alpha} \in V\}$$

而所有被 T 变成零元素的原象组成的集合称为 T 的**核**，记为 $N(T)$，即

$$N(T) = \{\boldsymbol{\alpha} | T(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha} \in V\}$$

例 1.34 求 R^3 上的投影变换

$$f(a,b,c)^T = (a,b,0)^T, \quad \forall (a,b,c) \in R^3$$

的值域与核.

解 显然

$$R(T) = \{(a,b,0)^T | a,b \in R\}$$

$$N(T)=\{(0,0,x)^T \mid x\in R\}$$

从几何上看，R^3 上的投影变换的值域 $R(T)$ 就是 xoy 面，核 $N(T)$ 就是 z 轴.

1. 6.2　值域与核的相关理论

关于线性变换的值域与核，有以下一些结论.

定理1.10　设 T 是线性空间 V 上的线性变换，则 T 的值域与核都是 V 的子空间.

证　因为 $\mathbf{0}=T(\mathbf{0})\in R(T)$，所以 $R(T)$ 非空；

又对 $\forall \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in R(T)$，存在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V$，使得 $\boldsymbol{\beta}_1=T(\boldsymbol{\alpha}_1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=T(\boldsymbol{\alpha}_2)$，所以对任意数 $k\in P$，有

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=T(\boldsymbol{\alpha}_1)+T(\boldsymbol{\alpha}_2)=T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)\in R(T)$$

$$k\boldsymbol{\beta}_1=kT(\boldsymbol{\alpha}_1)=T(k\boldsymbol{\alpha}_1)\in R(T)$$

从而 $R(T)$ 是 V 的子空间.

同理可证 $N(T)$ 也是 V 的子空间.

基于以上原因，所以 $R(T)$ 又称为 T 的**象子空间**，$N(T)$ 又称为 T 的**核子空间和零空间**.

定义 1.14　设 T 是线性空间 V 上的线性变换，$R(T)$ 的维数称为 T 的**秩**，记为 $\operatorname{rank} T$；而 $N(T)$ 的维数称为 T 的**零度**或**亏度**，记为 $\operatorname{null} T$.

定理 1.11　设 T 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，且 T 在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是 A，则

（1）T 的值域 $R(T)$ 是 $T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\cdots,T(\varepsilon_n)$ 的生成子空间，即

$$R(T)=span\left(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\cdots,T(\varepsilon_n)\right)$$

（2）T 的秩 $=A$ 的秩.

证　（1）设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中任一元素，则可由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 唯一地表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

于是

$$T(\boldsymbol{\alpha})=k_1T(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+k_2T(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+k_nT(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$$

由此知 $T(\boldsymbol{\alpha})\in span(T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$，因此 $R(T)\subseteq span(T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$.

另一方面，因 $R(T)$ 是 V 的子空间，所以 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 的任一线性组合属于 $R(T)$，即 $span(T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\subseteq R(T)$. 综上可得：$R(T)=span(T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$.

（2）由（1）知 T 的秩等于 $span(T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$ 的维数，即 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 的秩. 另一方面，矩阵 A 是由 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标按列排成的，而我们已经知道：线性空间中的向量与其坐标之间的一一对应保持线性关系的不变，所以 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 与它们的坐标组（即矩阵 A 的列向量组）有相同的秩.

例 1.35　由例 1.31知 R^3 上的投影变换

$$f(a,b,c)^T=(a,b,0)^T,\quad \forall(a,b,c)\in R^3$$

在自然基 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由定理 1.11 知 T 的秩 $=r(A)=2$. 事实上，由例 1.34 知：R^3 上的投影变换的值域 $R(T)$ 就是 xoy 面.

定理 1.12 设V^n, U^m分别是数域P上的n维和m维线性空间，$T: V^n \to U^m$的线性映射，则$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim V^n$

证 设$\dim N(T) = r$，因为$N(T)$是V^n的子空间，所以可将$N(T)$的一组基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r$扩充为$V^n$的一组基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$，下面证明$T(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$是$R(T)$的一组基.

（1）证$T(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$线性无关.

设有一组数$k_{r+1}, \cdots, k_n$，使得

$$k_{r+1}T(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}) + \cdots + k_n T(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \mathbf{0},$$

即

$$T(k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1} + \cdots + k_n \boldsymbol{\varepsilon}_n) = \mathbf{0},$$

可见$k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1} + \cdots + k_n \boldsymbol{\varepsilon}_n \in N(T)$，从而存在数$k_1, \cdots, k_r$，使得

$$k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1} + \cdots + k_n \boldsymbol{\varepsilon}_n = k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + k_r \boldsymbol{\varepsilon}_r,$$

即

$$-k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \cdots - k_r\boldsymbol{\varepsilon}_r + k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1} + \cdots + k_n \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0},$$

由$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$是$V$的基，可得$k_1 = \cdots = k_r = k_{r+1} = \cdots = k_n = 0$，故$T(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$线性无关.

（2）证$\forall \boldsymbol{\beta} \in R(T)$，$\boldsymbol{\beta}$可由$T(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$线性表示.

由定理 1.11 知：

$$R(T) = span(T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_r), T(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$$

又因为$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{\varepsilon}_r) = \mathbf{0}$，于是

$$R(T) = span(T(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$$

所 以 $\forall \boldsymbol{\beta} \in R(T)$ ， $\boldsymbol{\beta}$ 可 由 $T(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 线 性 表 示 .

由定理 1.11 与定理 1.12 可知：若进一步知线性变换T在V的一组基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵是$A$，则$T$的零度$= n - A$的秩.

例 1.36 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，在$R^{2\times2}$上的线性变换$T$定义为

$$T(X) = AX, \quad \forall X \in R^{2\times2},$$

求T的值域$R(T)$及核子空间$N(T)$基与维数，并问$R(T) + N(T)$是否是直和？

解 取$R^{2\times2}$的基为

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有

$$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

该矩阵组的秩为 2，且$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是一个极大无关组. 故值域$R(T)$是二维的，且$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是$R(T)$的一组基.

设$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in N(T)$，则由

$$T(X)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\ -x_1-x_3 & -x_2-x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以得齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2+x_4=0\end{cases}$$

其通解为

$$\begin{cases}x_1=k_1\\ x_2=\quad k_2\\ x_3=-k_1\\ x_4=\quad -k_2\end{cases}\qquad (k_1,k_2\in P)$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\\ -k_1 & -k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad (k_1,k_2\in P)$$

可见T的核子空间$N(T)$是二维的，且

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

是$N(T)$的一组基.

为研究$R(T)+N(T)$是否是直和，取$R(T)$的基$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$N(T)$的基$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，显然矩阵组$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$线性相关，所以$R(T)+N(T)$不是直和.

1.7　线性空间的同构

1.7.1　同构映射的定义

定义 1.15　设V,U分别是数域P上的线性空间，如果存在线性映射$T:V\to U$又是V到U的一个一一映射（即既是单射又是满射），则称线性空间V与U **同构**. T称为**同构映射**.

由定义 1.15 知：V与U同构$\Leftrightarrow$ V与U之间有一一对应关系，且这种对应关系保持加法与数乘的不变.

例 1.37　设R_+是所有正实数的集合，建立$R_+\to R$的映射：

$$T(x)=\ln x\qquad \forall x\in R_+$$

验证这样定义的映射T是R_+到R的同构映射，即R_+与R同构.

证　R是一个实线性空间，又由例 1.9 知：R_+对如下定义的加法与数乘运算

$$x\oplus y=xy,\quad k\circ x=x^k\quad (x,y\in R_+,k\in R)$$

构成实线性空间. 下面证T是线性映射.

利用这样定义的R_+上的加法和数乘运算，知对$\forall x,y\in R_+$，对任意数$k,l\in R$，都有

$$\begin{aligned}T(k\circ x\oplus l\circ y)&=T(x^k y^l)=\ln(x^k y^l)=\ln(x^k)+\ln(y^l)\\&=\ln(x^k)+\ln(y^l)=k\ln(x)+l\ln(y)=kT(x)+lT(y)\end{aligned}.$$

所以T是$R_+ \to R$的线性映射. 又显然$T(x)=\ln x$是R_+到R的一一映射，因而T为R_+到R的同构映射，即R_+与R同构.

1. 7.2　同构映射的性质

定理 1.13　V与U是数域P上的两个线性空间，T是V到U的同构映射，则V中元素$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充分必要条件是$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_s)$也线性无关.

证　必要性. 设有一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s \in P$，使

$$k_1T(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2T(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_sT(\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0},$$

由T是线性映射，得

$$T(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0},$$

$T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$且T是一一映射，于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，即$T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_s)$线性无关.

充分性. 设有一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s \in P$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

上式两边作用线性映射T，得

$$k_1T(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2T(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_sT(\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0},$$

而$T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_s)$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

1. 7.3　同构的充要条件

定理1.14　数域P上的两个有限维线性空间V与U同构的充分必要条件是$\dim V=\dim U$

证　必要性. 若T是V到U的同构映射，设$\dim V=n$，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$是$V$的一组基，下面证明$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$是$U$的一组基.

由定理 1.13 知：$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$线性无关；又因为$\forall\boldsymbol{\beta}\in U$，存在$\boldsymbol{\alpha}\in V$，使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=T(\boldsymbol{\alpha})\\&=T(k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=k_1T(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+k_2T(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+k_nT(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\end{aligned}$$

所以$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$是$U$的一组基.

充分性. 设$\dim V=\dim U=n$，分别取V的一组基为：$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，$U$的一组基为：$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$.

对V中的任一元素$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，令$T(\boldsymbol{\alpha})=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\eta}_n$，可以验证这样定义的映射$T$是$V$到$U$的同构映射，于是$V$与$U$同构.

推论　R上的n维线性空间与R^n同构；

C上的n维线性空间与C^n同构.

这一结论与 1.2 节中通过元素的坐标得到的有关同构的结论是一致的.

1.8　线性变换的应用（参考文献【4】）

1. 8.1* 在数字信号处理中的若干应用

数字信号处理中，一个离散的时间系统，如果满足线性叠加原理，则称为**线性系统**. 用数学的语言可描述为：

$x_1(n)$ 、$x_2(n)$ 分别是系统的输入，$y_1(n)$ 、$y_2(n)$ 分别是系统的输出. $T[\bullet]$ 表示系统变换，描述了输入输入序列的关系，反映系统的特征. $T[\bullet]$ 满足

$$T[kx_1(n)+lx_2(n)]=kT[x_1(n)]+lT[x_2(n)]=ky_1(n)+ly_2(n)$$

则称系统 $T[\bullet]$ 是线性的. 从数学的角度看 $T[\bullet]$ 是一个线性变换.

又数字信号处理中常用的 Z **变换**，定义如下：

$$Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=X(z)$$

可以证明这样定义的 Z **变换**满足

$$Z[kx_1(n)+lx_2(n)]=kX_1(z)+lX_2(z)$$

可见，从数学的角度看 Z 变换也是一个线性变换.

又如：在信号处理中，有时要处理两个或多个分量相乘的信号，这时可以考虑利用解相乘同态系统处理此类问题（见文献[4]）. 若 $x(n)$ 是系统的输入（$x(n)$ 为实的正序列），$y(n)$ 是系统的输出，那么以相乘作为输入与输出运算的同态滤波系统的一般规范形式如下图：

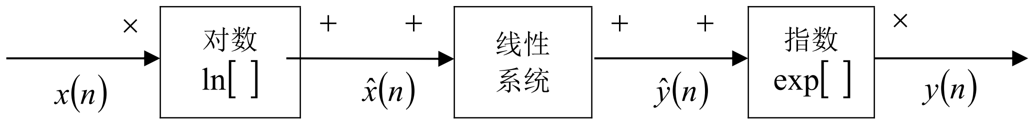

图 1.2 特征系统为变相乘为相加运算的同态滤波系统

可见该系统由三部分组成：对数系统、线性系统、指数系统. 其中对数变换：

$$\hat{x}(n)=\ln[x(n)]$$

是 $R_+\to R$ 的映射，R_+ 是所有正实数的集合. 由例 1.9 知：R_+ 对如下定义的加法与数乘运算

$$x\oplus y=xy,\quad k\circ x=x^k\quad (x,y\in R^+,k\in R)$$

构成实线性空间. 又由例 1.37 知 $\hat{x}(n)=\ln[x(n)]$ 是 $R_+\to R$ 的一个线性映射. 若输入信号具有如下相乘形式：$x(n)=[x_1(n)]^k\cdot[x_2(n)]^l$，此时对数变换：$\hat{x}(n)=\ln[x(n)]$ 可将该相乘形式的信号解为相加形式的信号：

$$\ln\{[x_1(n)]^k\cdot[x_2(n)]^l\}=k\ln[x_1(n)]+l\ln[x_2(n)]$$

则加至线性滤波器的信号为

$$\hat{x}(n)=k\hat{x}_1(n)+l\hat{x}_2(n)$$

其中

$$\hat{x}_1(n)=\ln[x_1(n)],\quad \hat{x}_2(n)=\ln[x_2(n)]$$

1. 8.2 关于矩阵的秩的一些结论

在本科学习中，曾见过 $r(AB)\le r(A)$（或 $r(AB)\le r(B)$）这个关系，应用线性映射理论，可以把上述关系精确化.

定理 设 $A\in R^{m\times n}$，$B\in R^{n\times l}$，则

1．$r(AB)=r(B)-\dim[N(A)\cap R(B)]$

2．$r(AB)=r(A)-\dim[N(B^T)\cap R(A^T)]$

证 1．首先定义一个线性映射 C：

$$C:\ R(B)\to R(A)\qquad \forall x\in R(B)\subset R^n,\ \exists y=Ax\in R(A)\subset R^m$$

（注：映射的概念有三个要素：定义域、值域、对应法则. 这里映射 C 虽然仍通过矩阵 A 来确定对应关系，但定义域不是 R^n 而是 $R(B)$（$R(B)\subset R^n$），因而映射 C 的零空间和值域将有别于 $N(A)$ 和 $R(A)$.）

下面证明 $N(C)=R(B)\cap N(A)$，$R(C)=R(AB)$.

（1）$\forall x\in N(C)$，有 $x\in R(B)$ 且 $Ax=\mathbf{0}$，$\therefore x\in R(B)\cap N(A)$；

又 $\forall x\in R(B)\cap N(A)$，有 $x\in R(B)$ 且 $Ax=\mathbf{0}$，$\therefore x\in N(C)$；因而成立 $N(C)=R(B)\cap N(A)$.

（2）$R(C)=A(R(B))=A(B(R^l))=AB(R^l)=R(AB)$

现在对映射 C 应用定理 1.12，有

$$\dim R(B)=\dim N(C)+\dim R(C)$$

即

$$\dim R(B)=\dim[R(B)\cap N(A)]+\dim R(AB)$$

于是

$$r(AB)=r(B)-\dim[N(A)\cap R(B)]$$

2．由结论 1 以及 $r(B^TA^T)=r(AB)$ 及 $r(A^T)=r(A)$，得

$$r(AB)=r(B^TA^T)=r(A^T)-\dim[N(B^T)\cap R(A^T)]=r(A)-\dim[N(B^T)\cap R(A^T)]$$

利用上述定理可以进一步证明 Sylvester 不等式，该不等式在矩阵的秩的理论中非常常用.

推论 设 $A\in R^{m\times n}$，$B\in R^{n\times l}$，则

$$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le\min(r(A),r(B))$$

证 只证左边不等式. 由于 $\dim[R(B)\cap N(A)]\le\dim[N(A)]$，所以

$$\begin{aligned}r(AB)&=r(B)-\dim[R(B)\cap N(A)]\\&\ge r(B)-\dim[N(A)]\\&=r(B)-\{n-\dim[R(A)]\}\\&=r(B)+r(A)-n\end{aligned}$$

习 题 一

1．有没有一个向量的线性空间？有没有两个向量的线性空间？有没有 m 个向量的线性空间？

2．$R^n\subset C^n$，R^n 是 C^n 的线性子空间？为什么？

3．检验以下集合对所指定的加法和数乘运算是否构成 R 上的线性空间？

（1）全体 n 阶实对称矩阵（或实反对称矩阵，实上三角矩阵，实对角矩阵），对矩阵的加法和数乘；

（2）全体形如 $\begin{pmatrix}0&a\\-a&b\end{pmatrix}$ 的二阶方阵，对矩阵的加法和数乘；

（3）平面上全体向量，对通常的加法和如下定义的数乘：$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

（4）平面上全体向量，对如下定义的加法和数乘：

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$$
$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=-k\boldsymbol{\alpha}.$$

4．在例 1.14 的实线性空间 $R^{2\times2}$ 中，令

$$F_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad F_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad F_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

验证 F_1,F_2,F_3,F_4 线性无关.

5．在 $P_3(x)$ 中，设 $f_1(x)=1$，$f_2(x)=x+1$，$f_3(x)=x^2+x+1$，

（1）证明 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ 是 $P_3(x)$ 的一组基；
（2）求从基 x^2，x，1 到基 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ 的过渡矩阵；
（3）求 $f(x)=x^2+2x+3$ 在基 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ 下的坐标.

6．设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，记

$$L(A)=\{B\,|\,B\in R^{2\times 2}, AB=BA\}$$

求证 $L(A)$ 为 $R^{2\times 2}$ 的线性子空间，并求 $\dim L(A)$.

7．在 R^4 中，求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵.

（1）$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{e}_2\end{cases}$，其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 是自然基，$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1,1)\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,3,1,0)\\ \boldsymbol{\eta}_3=(5,3,2,1)\\ \boldsymbol{\eta}_4=(6,6,1,3)\end{cases}$；

（2）$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,1,1)\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,2,1,1)\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,2,1)\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,3,2,3)\end{cases}$，$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,3,3)\\ \boldsymbol{\eta}_2=(-2,-3,-5,-4)\\ \boldsymbol{\eta}_3=(2,2,5,4)\\ \boldsymbol{\eta}_4=(-2,-3,-4,-4)\end{cases}$

8．在 R^4 中，求齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0,\\3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0,\\3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\,;\end{cases}$$

的解空间的基与维数.

9．设有 R^3 的两个子空间：

$$V_1=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,2x_1+x_2-x_3=0\}$$

$$V_2=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1+x_2=0,\ 3x_1+2x_2-x_3=0\}$$

分别求子空间 V_1+V_2，$V_1\cap V_2$ 的基与维数.

10．设 V_1，V_2 分别是齐次线性方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

与

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间，试证明 $R^n=V_1\oplus V_2$.

11．证明线性空间 $R^{2\times 2}$ 可以分解为二阶实对称矩阵的集合构成的子空间与二阶实反对称矩阵的集合构成的子空间的直和.

12．下列线性空间中定义的变换是否是线性变换，为什么？

（1）$P_3(x)$ 中，定义

$$T(f(x))=f(x)+1，\ \forall f(x)\in P_3(x).$$

（2）$P_3(x)$ 中，定义

$$T(f(x))=f(x+1)，\ \forall f(x)\in P_3(x).$$

（3）$R^{n\times n}$ 中，定义

$T(X)=X^*$，$\forall X\in R^{2\times 2}$，这里 X^* 是 X 的伴随矩阵.

（4）$R^{2\times 2}$ 中，定义

$$T(X)=X^2,\ \forall X\in R^{n\times n}.$$

（5）V 是一线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 V 中非零向量，定义

$$T(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_0,\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V.$$

（6）V 是一线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 V 中非零向量，定义

$$T(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_0,\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V.$$

13． 在 R^2 中，设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)$，证明 $T_1(\boldsymbol{\alpha})=(a_2,-a_1)$ 与 $T_2(\boldsymbol{\alpha})=(a_1,-a_2)$ 是 R^2 上的两个线性变换，并求 T_1+T_2，T_1T_2 以及 T_2T_1.

14．设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是线性空间 L 的一组基，T_1 与 T_2 是 L 上的两个线性变换，$T_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{\eta}_1$，$T_1(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{\eta}_2$，且 $T_2(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)$，$T_2(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)$，证明 $T_1=T_2$.

15．设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是线性空间 L 的一组基，线性变换 T 满足

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2)=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2$$
$$T\boldsymbol{\varepsilon}_1=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$$

求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵.

16．在 $P_4(x)$ 中，求微分变换

$$D(f(x))=f'(x),\ \forall f(x)\in P_4(x)$$

在基 $f_1(x)=x^3$，$f_2(x)=x^2$，$f_3(x)=x$，$f_4(x)=1$ 下的矩阵.

17．V 是实线性空间 $C[a,b]$ 中由函数

$f_1(x)=e^{2x}\cos 3x$，$f_2(x)=e^{2x}\sin 3x$，$f_3(x)=xe^{2x}\cos 3x$，$f_4(x)=xe^{2x}\sin 3x$

所生成的子空间，

（1）试证明 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$ 是 V 的一组基；

（2）求微分变换

$$D(f(x))=f'(x),\ \forall f(x)\in V$$

在这组基下的矩阵.

18．在 $R^{2\times2}$ 中定义线性变换，$\forall A\in R^{2\times2}$，

$$T_1(A)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}A,\ T_2(A)=A\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ T_3(A)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 是 $R^{2\times2}$ 中给定的矩阵，求

（1）T_i 在例 1.11 中的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵 X_i，$i=1,2,3$；

（2）T_1+T_2 和 T_1T_2 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

19．已知 R^3 的线性变换 $T(x_1,x_2,x_3)=(0,x_1,x_2)$，求 T^2 的值域与核的基与维数.

20．设 $A\in R^{n\times n}$，$x\in R^n$，$x\neq0$ 使 $A^{n+1}x\neq0$ 而 $A^nx=0$，证明：

（1）$x,Ax,A^2x,\cdots,A^{n-1}x$ 线性无关；

（2）$A\sim\begin{pmatrix}0&&&&&\\1&0&&&&\\&1&0&&&\\&&&\ddots&&\\&&&&0&\\&&&&1&0\end{pmatrix}$.

21．设 $A\in R^{m\times n}$，验证：

（1）$r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)$；

（2）$R\left(AA^T\right)=R(A)$，$R\left(A^T A\right)=R\left(A^T\right)$；

（3）$N\left(AA^T\right)=N\left(A^T\right)$，$N\left(A^T A\right)=N(A)$.

参 考 答 案

1．有，没有，没有.

2．不是.

3．（1）、（2）是线性空间；（3）、（4）不是线性空间.

5．（2）$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

6．$\dim L(A)=2$.

7．（1）$\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}2&0&1&-1\\-3&1&-2&1\\1&-2&2&-1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$.

8．2 维；基：$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{1}{9},\frac{8}{3},1,0\right)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{2}{9},-\frac{7}{3},0,1\right)^T$.

9．$\dim(V_1+V_2)=2$，V_1+V_2 一组基为：$(1,0,2)^T$，$(1,-2,0)^T$； $\dim(V_1\cap V_2)=1$，$V_1\cap V_2$ 一组基为：$(1,-1,1)^T$.

12．（1）不是；（2）是；（3）是；（4）不是；（5）不是；（6）不是.

13．$(T_1+T_2)\boldsymbol{\alpha}=(a_1+a_2,-a_1-a_2)$；$(T_1T_2)\boldsymbol{\alpha}=(-a_2,-a_1)$；$(T_2T_1)\boldsymbol{\alpha}=(a_2,a_1)$

15．$\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

16．$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

17．（2）$\begin{pmatrix}2&3&1&0\\-3&2&0&1\\0&0&2&2\\0&0&3&3\end{pmatrix}$.

18．（1）$X_1=\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix}$，$X_3=X_1\cdot X_2$；

（2）T_1+T_2 的矩阵：X_1+X_2；T_1T_2 的矩阵：X_3.

19．$R\left(T^2\right)=\{(0,0,x)|x\in R\}$，$N\left(T^2\right)=\{(0,x_2,x_3)|x_2,x_3\in R\}$；

$\dim R\left(T^2\right)=1$，$R\left(T^2\right)$ 的一组基为：$(0,0,1)$；$\dim N\left(T^2\right)=2$，$N\left(T^2\right)$ 的一组基为：$(0,1,0)$，

$(0,0,1)$.

参 考 书

1．杨明，刘先忠. 矩阵论武汉：华中科技大学出版社，2003
2．徐仲，张凯院，陆全，冷国伟. 矩阵论简明教程(第二版). 北京：科学出版社，2005.
3．方保镕，周继东，李医民. 矩阵论. 北京：清华大学出版社，2004.
4．吴兆熊，黄振兴，数字信号处理. 北京：国防工业出版社，1985.
5．魏明果，实用小波分析. 北京：北京理工大学出版社，2005
6．陈武凡，小波分析及其在图像处理中的应用. 北京：科学出版社，2002.
7．张贤达，保铮，通信信号处理. 北京：国防工业出版社，2000
8．张贤达，现代信号处理. 北京：清华大学出版社，1995
9．陈公宁, 矩阵理论与应用. 河北：高等教育出版社，1990.