第六章 平稳随机过程

§6.1 平稳过程的概念及例

平稳过程的特点是过程的统计特性不随时间的推移而变化。

1. 严平稳过程

设随机过程$\{X(t), t\in T\}$，对$\forall n$，任意的$t_1,\cdots, t_n\in T$

及$\forall h$，$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))' \overset{d}{\Leftrightarrow} (X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h))'$

即n维随机向量同分布

即：$F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1+h,\cdots,t_n+h)$

若密度存在$\Leftrightarrow f_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$

$=f_n(x_1,\cdots,x_n;t_1+h,\cdots,t_n+h)$

则称$\{X(t),t\in T\}$为严平稳过程，若上述定义只对$n\le k$成立，则称k阶严平稳。

2.平稳过程的一、二维概率密度及数字特征在密度函数式中，令$h=-t_1$有

$$f_1(x_1;t_1)=f_1(x_1;t_1+h)=f_1(x_1;0)=f_1(x_1)$$

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;t_1+h,t_2+h)$$

记 $t_2-t_1=\tau$ $\quad =f_2(x_1,x_2;0,t_2-t_1)=f_2(x_1,x_2;0,\tau)$

表明严平稳过程的一维概率密度与时间无关，二维概率密度只与t_1,t_2时间间隔τ有关，而与时间起点无关。

由此可导出严平稳过程的数字特征(若存在)

$$\left.\begin{aligned}E[X(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1f_1(x_1)dx_1=m_X=\text{常数}\\ E[X^2(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1^2f_1(x_1)dx_1=\psi_X^2\\ D[X(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-\mu_X)^2f_1(x_1)dx_1=\sigma_X^2\end{aligned}\right\}\text{与}t\text{无关}$$

$$E[X(t)X(t+\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f_2(x_1x_2;\tau)dx_1dx_2=R_X(\tau)$$

$$E[(X(t)-\mu_X)(X(t+\tau)-\mu_X)]=R_X(\tau)-\mu_X^2=B_X(\tau)$$

仅与τ有关

3.宽平稳过程(简称平稳过程)

设$\{X(t),t\in T\}$的一、二阶矩存在，且有

①$E[X(t)]=m_X$为常数；

②$E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$仅与$\tau$有关；

③$E[X^2(t)]<+\infty$(二阶矩存在)。

则称$\{X(t),t\in T\}$为宽平稳过程。

4.严平稳与宽平稳的关系

严平稳过程不一定是宽平稳的，因为严平稳定义只涉及有限维分布，而并不要求一、二阶矩存在，但对二阶矩过程，严平稳必是宽平稳。

反过来，宽平稳也不一定是严平稳，因为宽平稳只要求均值函数与t无关，导不出一维分布与t无关，又相关函数$R(t,t+\tau)$与t无关，导不出二维分布$F(x_1,x_2;t,t+\tau)$与t无关。

但对于正态平稳过程是个例外，由于正态过程的概率密度是由均值和相关函数完全确定，另外正态过程的二阶矩总是存在的。

例：设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程。

由于 $m_X(t)=0$，$R_X(t_1,t_2)=\sigma^2\min(t_1,t_2)$

虽然$X(t)$具有平稳独立的增量，但$X(t)$不是平稳过程。

例：设$Z(t)=X\sin\omega_0t+Y\cos\omega_0t$，其中$X,Y$为相互独立同分布的随机变量，具分布律为：

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

(i)求$Z(t)$的均值和自相关函数；

(ii)证明$Z(t)$是宽平稳过程，但非严平稳。

解：

$(i) E[Z(t)] = EX \cdot \sin\omega_0 t + EY \cos\omega_0 t = 0$

$R_X(t, t+\tau)$

$= E\{[X\sin\omega_0 t + Y\cos\omega_0 t][X\sin\omega_0(t+\tau) + Y\cos\omega_0(t+\tau)]\}$

$= EX^2 \sin\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau)$

$+ E(XY)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + E(YX)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)$

$+ EY^2 \cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)$

$\because X$与Y独立,$E(XY) = EX \cdot EY = 0$

$EX^2 = EY^2 = (-1)^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} = 2$

$\therefore R_X(t, t+\tau) = 2\cos\omega_0\tau$

(ii) 由(i)知$Z(t)$为宽平稳的，但非严平稳。

事实上，可以证明：

$$EZ^3(t) = 2(\sin^3\omega_0 t + \cos^3\omega_0 t)$$

与t的取值有关，故非严平稳。

例：随机电报信号

若随机过程$\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$满足下列条件，则称为随机电报信号。

①相继取值$+1$或-1，且

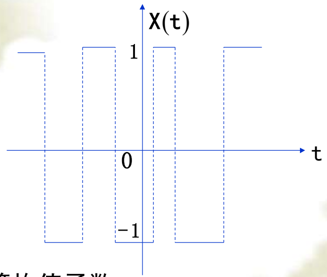
$$P\{X(t) = 1\} = P\{X(t) = -1\} = \frac{1}{2};$$

②在任意区间$[t, t+\tau)$内变号的次数$N(t, t+\tau)$服从泊松分布。

即：$P\{N(t, t+\tau) = k\} = \frac{(\lambda|\tau|)^k}{k!} e^{-\lambda|\tau|}$，$k = 0, 1, 2, \cdots$

试讨论其平稳性。

其一条样本函数曲线为：



先计算均值函数

$E[X(t)] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0.$ 为常数

再计算自相关函数：

$$\because X(t)X(t+\tau) = \begin{cases} 1, & N(t, t+\tau)\text{为偶} \\ -1 & N(t, t+\tau)\text{为奇} \end{cases}$$

$\therefore R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$

$= 1 \cdot P\{N(t, t+\tau)\text{为偶}\} + (-1)P\{N(t, t+\tau)\text{为奇}\}$

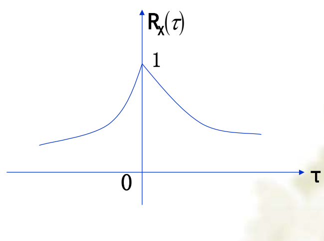
$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t, t+\tau) = 2k\} - \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t, t+\tau) = 2k+1\}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda|\tau|} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda|\tau|}$

$= e^{-\lambda|\tau|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda|\tau|)^k}{k!} = e^{-2\lambda|\tau|} = R_X(\tau)$

与t无关，可见随机电报信号是平稳过程。

其相关函数图如下：



6.复平稳过程

定义：设$\{Z(t), t\in T\}$是复随机过程，

若 $m_z(t)=E[Z(t)]=m_Z$(复常数)$t\in T$

且 $R_Z(t_1,t_2)$仅与t_2-t_1有关，而与t_1无关

即：$R_Z(t,t+\tau)=E\left[Z(t)\overline{Z(t+\tau)}\right]=R_Z(\tau)$， $t,t+\tau\in T$

则称$\{Z(t),\ t\in T\}$是复平稳过程。

例：设复随机过程$Z(t)=Z_1e^{i\lambda_1 t}+Z_2e^{i\lambda_2 t}$，$-\infty<t<+\infty$

其中λ_1和λ_2是实数，且$\lambda_1\neq\lambda_2$，而Z_1，Z_2是不相关的

复随机变量，有$EZ_1=EZ_2=0, E|Z_1|^2=\sigma_1^2, E|Z_2|^2=\sigma_2^2$

试讨论它的平稳性。

解：$m_Z(t)=E[Z(t)]=EZ_1\cdot e^{i\lambda_1 t}+EZ_2\cdot e^{i\lambda_2 t}=0$

$$
\begin{aligned}
R_Z(t,t+\tau)&=E\left[Z(t)\overline{Z(t+\tau)}\right]\\
&=E\left[\left(Z_1e^{i\lambda_1 t}+Z_2e^{i\lambda_2 t}\right)\left(\overline{Z}_1e^{-i\lambda_1(t+\tau)}+\overline{Z}_2e^{-i\lambda_2(t+\tau)}\right)\right]\\
&=E|Z_1|^2e^{-i\lambda_1\tau}+E|Z_2|^2e^{-i\lambda_2\tau}=\sigma_1^2e^{-i\lambda_1\tau}+\sigma_2^2e^{-i\lambda_2\tau}\\
&=R_X(\tau)
\end{aligned}
$$

与t无关，$\therefore Z(t)$是复平稳过程。

另外：设$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}Z_ke^{i\lambda_k t}$，$-\infty<t<+\infty$

其中$\lambda_l\neq\lambda_j(l\neq j, l,j=1,2,\cdots,n)$

而$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$为两两不相关复随机变量，

且：$EZ_k=0$，$DZ_k=\sigma_k^2$

则 $E[Z(t)]=0$

$$R_Z(t,t+\tau)=E\left[Z(t)\overline{Z(t+\tau)}\right]=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2e^{-i\lambda_k\tau}=R_X(\tau)$$

也为平稳过程。

§6.2平稳过程及其相关函数的性质

一.相关函数的性质(实平稳过程)

设 $\{X(t), t\in T\}$是平稳过程，相关函数为$R_X(\tau)$

(1) $R_X(0)=E\left[X^2(t)\right]=\psi_X^2\geq 0$

(2) $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$， 即$R_X(\tau)$是偶函数。

$\because R_X(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=E[X(t+\tau)X(t)]=R_X(-\tau)$

由此性质，在实际问题中只需计算或测量$R_X(\tau)$

在$\tau\geq 0$的值即可。

(3) $|R_X(\tau)|\leq R_X(0)$， $|B_X(\tau)|\leq B_X(0)$

$E|XY|\leq\sqrt{EX^2}\cdot\sqrt{EY^2}$(施瓦兹不等式)

$$
\begin{aligned}
\because\ R_X^2(\tau)&=(E[X(t)X(t+\tau)])^2\\
&\leq E\left[X^2(t)\right]\cdot E\left[X^2(t+\tau)\right]=R_X^2(0)
\end{aligned}
$$

表明自相关函数在$\tau=0$处取得最大值。

(4) $R_X(\tau)$具有非负定性，即对任意实数$t_1,\cdots,t_n$，

$a_1,\cdots,a_n$有：$\sum_{i,j=1}^{n}R_X(t_i,t_j)a_ia_j\geq 0$

$$
\begin{aligned}
\because \sum_{i,j=1}^{n}R_X(t_i,t_j)a_ia_j&=\sum_{i,j=1}^{n}E\left[X(t_i)X(t_j)\right]a_ia_j\\
&=E\left[\sum_{i,j=1}^{n}X(t_i)X(t_j)a_ia_j\right]\\
&=E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}X(t_i)a_i\right]^2\right\}\geq 0
\end{aligned}
$$

在理论上可证明：任一连续函数只要具有非负定性，则该函数必是某平稳过程的自相关函数。

(5) $X(t)$为周期T的平稳过程 $\Leftrightarrow$ $R_X(\tau)$以T为周期。

即：$X(t)=X(t+T) \Leftrightarrow R_X(\tau)=R_X(\tau+T)$

证：$\Rightarrow$ $R_X(\tau+T)=E[X(t)X(t+\tau+T)]$

$$=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$$

$$\Leftarrow D[X(t+T)-X(t)]=E\left[|X(t+T)-X(t)|^2\right]-0$$

$$=E[X^2(t+T)]+E[X^2(t)]-2E[X(t)X(t+T)]$$

$$=R_X(0)+R_X(0)-2R_X(T)=2R_X(0)-2R_X(0)=0$$

根据方差性质知：

$X(t+T)-X(t)=C=E[X(t+T)-X(t)]=0$

$\therefore X(t+T)=X(t)$即以T为周期的平稳过程。

(6) 若$X(t)$是不含周期分量的非周期过程，

当$|\tau|\to\infty$时，$X(t)$与$X(t+\tau)$相互独立，

则 $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau)=m_X^2$

$$\because \lim_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau)=\lim_{|\tau|\to\infty} E[X(t)X(t+\tau)]$$

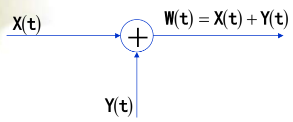
$$=E[X(t)\cdot\lim_{|\tau|\to\infty} X(t+\tau)]$$

$$=E[X(t)]\cdot E[\lim_{|\tau|\to\infty} X(t+\tau)]=m_X^2$$

在实际应用中，对非周期性的噪声和干扰，一般当τ值适当增大，$X(t)$和$X(t+\tau)$即呈现独立性，若为零均值，则其自相关函数趋于0。

(7) $R_X(\tau)$在$(-\infty,+\infty)$连续 $\Leftrightarrow$ $R_X(\tau)$在$\tau=0$连续。

二.联合平稳过程及互相关函数的性质



设$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$是两个平稳过程，若它们的互相关函数$R_{XY}(t,t+\tau)$，$R_{YX}(t,t+\tau)$仅与τ有关而与t无关，则称$X(t)$和$Y(t)$是联合平稳过程。

当两个平稳过程$X(t)$，$Y(t)$是联合平稳时，则它们的和$W(t)$也是平稳过程，且其相关函数为：

$$R_W(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

类似可得联合平稳过程$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数性质：

(1) $|R_{XY}(\tau)|^2\le R_X(0)R_Y(0)$,

$|R_{YX}(\tau)|^2\le R_X(0)\cdot R_Y(0)$,

证：由施瓦兹不等式：

$$|R_{XY}(\tau)|^2=|E[X(t)Y(t+\tau)]|^2$$

$$\le E[X(t)]^2\cdot E[Y^2(t+\tau)]$$

$$=R_X(0)R_Y(0)$$

(2) $R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$

证：$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$

$$=E[Y(t+\tau)X(t)]=R_{YX}(-\tau)$$

例：设$X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$，$Y(t)=B\sin(\omega t+\Theta-\varphi)$为两个平稳过程，其中$A,B,\omega$为常数，$\Theta\sim U(0,2\pi)$。求$R_{XY}(\tau)$和$R_{YX}(\tau)$。

解：$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$

$$=E[A\sin(\omega t+\Theta)\cdot B\sin(\omega t+\omega\tau+\Theta-\varphi)]$$

$$=\int_0^{2\pi} AB\sin(\omega t+\theta)\cdot\sin(\omega t+\omega\tau+\theta-\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega t+\theta)\cdot[\sin(\omega t+\theta)\cos(\omega\tau-\varphi)$$

$$+\cos(\omega t+\theta)\sin(\omega\tau-\varphi)]d\theta=\frac{AB}{2}\cos(\omega\tau-\varphi)$$

根据$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$得$R_{YX}(\tau)=\frac{1}{2}AB\cos(\omega\tau+\varphi)$

§6.3 随机分析

一.收敛性概念

对(Ω, F, P)上的随机序列，每个试验结果e都对应一序列$X_1(e), X_2(e), \cdots, X_n(e)\cdots$(一族序列)。

1、处处收敛

如果对每个e都收敛，则称随机序列$\{X_n\}$处处收敛

即满足$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ (X为随机变量)

25

2.几乎处处收敛

定义：称二阶矩随机序列$\{X_n(e)\}$以概率1收敛于二阶矩随机变量$X(e)$。

若使：$\lim\limits_{n\to\infty} X_n(e) = X(e)$，成立的$e$的集合的概率为1

即：$P\{e: \lim\limits_{n\to\infty} X_n(e) = X(e)\} = 1$(不一定对每个$e$都收敛)

或称$\{X_n(e)\}$几乎处处收敛于$X(e)$，记作$X_n \xrightarrow{a.e} X$。

26

3.依概率收敛

定义：称二阶矩随机序列$\{X_n(e)\}$依概率收敛于二阶矩随机变量$X(e)$，若对$\forall \varepsilon > 0$有：

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n(e) - X(e)| \geq \varepsilon\} = 0 \quad \text{记作} X_n \xrightarrow{P} X$$

4.依分布收敛(弱收敛)

定义：若$\{X_n\}$相应的分布函数列$\{F_n(x)\}$在X的分布函数$F(x)$的每个连续点处有：

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

称$\{X_n\}$依分布收敛于随机变量X，记$X_n \xrightarrow{d} X$

27

5.均方收敛

定义：设有二阶矩随机序列$\{X_n\}$和二阶矩随机变量X。

若有：$\lim\limits_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0$成立，

则称$\{X_n\}$均方收敛于X，记作$X_n \xrightarrow{m.s} X$

极限常写成$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$

(limit in mean squane)

28

$H \overset{\Delta}{=} \{X, EX^2 < \infty\}$

H是由二阶矩存在的随机变量全体构成的集合，称为H空间。

$$\|X\| = \left(E|X|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (X, X)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\| = \lim_{n\to\infty} \left(E|X_n - X|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow l.i.m X_n = X$$

定理：二阶矩随机序列$\{X_n\}$均方收敛于二阶矩随机变量X的充要条件为：

$$\{X_n, n \geq 1\}\text{均方收敛} \Leftrightarrow \lim_{n,m\to\infty} E\left[|X_n - X_m|^2\right] = 0$$

这个准则平行于实数序列的柯西收敛准则。(证略)

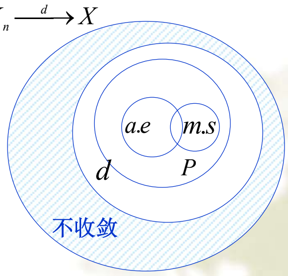
29

对以上几种收敛定义有下列关系：

① 若$X_n \xrightarrow{m.s} X$，则$X_n \xrightarrow{P} X$

② 若$X_n \xrightarrow{a.e} X$，则$X_n \xrightarrow{P} X$

③ 若$X_n \xrightarrow{P} X$，则$X_n \xrightarrow{d} X$



30

①证：由切比雪夫不等式：

$$P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} \le \frac{E\left[|X_n - X|^2\right]}{\varepsilon^2}$$

若有 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^2\right] = 0$

则 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} = 0, X_n \xrightarrow{P} X$

②由 $P\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \to 0\} = 1$

$\therefore$ 则 $\forall \varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$

即：$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} = 0, X_n \xrightarrow{P} X$

31

6.均方收敛性质

定理：设 $\{X_n\},\{Y_n\}$ 为随机变量序列，X，Y 为随机变量，(c_n) 为数列，a,b,c 为常数，且有

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X.\quad \underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y,\quad \lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

则有(1) $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, c_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$

(2) $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X = X$

(3) $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, c_n X_n = cX$

(4) $\underset{n\to\infty}{l.i.m}(aX_n + bY_n) = a\,\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n + b\,\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = aX + bY$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n] = E\left[\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n\right] = EX$

(6) $\lim\limits_{m,n\to\infty} E[X_n Y_m] = E\left[\left(\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n\right)\left(\underset{m\to\infty}{l.i.m}\, Y_m\right)\right] = E(XY)$

32

证：(1)(2)(3)由均方收敛定义可以证得。

(4) $\because$ 当 $n \to \infty$ 时，有

$E\left[|aX_n + bY_n - (aX + bY)|^2\right]$

$= E\left[|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)|^2\right]$

$\le 2a^2 E\left[|X_n - X|^2\right] + 2b^2 E\left[|Y_n - Y|^2\right] \to 0.$

$\left(a^2|X_n - X|^2 + b^2|Y_n - Y|^2 \ge 2ab(X_n - X)(Y_n - Y)\right)$

由均方收敛定义知(4)成立。

33

(5)由许瓦兹不等式：$(E|XY|)^2 \le E|X|^2 E|Y|^2$

$(E|Y|)^2 = (E[|Y \cdot 1|])^2 \le E|Y|^2 \cdot 1$

令：$Y = X_n - X$ 代入上式得：

$0 \le |E[X_n] - E[X]|^2 = |E(X_n - X)|^2 \le E|X_n - X|^2 \to 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = E(X) = E\left[\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n\right]$

34

(6) $|E(X_n Y_m) - E(XY)| = |E(X_n Y_m - XY)|$

$= |E[(X_n - X)(Y_m - Y) + X(Y_m - Y) + (X_n - X)Y]|$

$\le E|(X_n - X)(Y_m - Y)| + E|X(Y_m - Y)| + E|(X_n - X)Y|$

利用许瓦兹不等式：$E|XY| \le \sqrt{E|X|^2} \cdot \sqrt{E|Y|^2}$

$\therefore |E(X_n Y_m) - E(XY)|$

$\le \sqrt{E|X_n - X|^2} \cdot \sqrt{E|Y_m - Y|^2}$

$+ \sqrt{E|X|^2} \cdot \sqrt{E|Y_m - Y|^2} + \sqrt{E|X_n - X|^2} \cdot \sqrt{E|Y|^2} \to 0$

$\therefore \lim\limits_{n,m\to\infty} E[X_n Y_m] = E(XY)$

35

性质(5)、(6)表明，极限与数学期望可交换次序，但前者为普通极限，后者为均方极限。

在(6)中，令 $Y_m = 1$，$m = 1,2,\cdots$，(显然 $Y = 1$) $\Rightarrow$ (5)

令 $Y_m = X_n$，$Y = X \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\left[|X_n|^2\right] = E\left[|X|^2\right]$

由 $D(X_n) = EX_n^{\ 2} - [E(X_n)]^2$

取极限：$\lim\limits_{n\to\infty} D(X_n) = \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n^2) - \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)^2$

$= E\left(\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n^2\right) - \left(E\,\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n\right)^2$

$= EX^2 - (EX)^2 = D(X)$

36

7.均方收敛准则：

$$l.i.m X_n = X \Leftrightarrow \lim_{n,m\to\infty} E(X_n X_m) = c$$

证：$\Rightarrow$由性质(6)即得到。

$\Leftarrow E\left[(X_m - X_n)^2\right] = E(X_m^2) - 2E(X_m X_n) + E(X_n^2)$

当 $\underset{m\to\infty}{\overset{n\to\infty}{\to}} c - 2c + c = 0$

由收敛定理知$\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$存在，即$\{X_n\}$均方收敛。

由性质(6)知$c = E(X^2)$，$\left(\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} E(X_n X_m) = E(X^2) = c\right)$

上述结果扩充到复随机变量情形仍然成立。

二.均方连续

下面讨论随机过程$\{X(t), t\in T\}$的均方连续、均方导数、均方积分等概念。假定$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程，参数集T为直线上的一个有限区间(或无穷区间)。

1.定义：设有二阶矩阵过程$\{X(t), t\in T\}$，若对某一个$t_0\in T$，有$\lim_{h\to 0} E\left[|X(t_0+h) - X(t_0)|^2\right] = 0$。

则称$X(t)$在t_0点均方连续，记作：$\underset{h\to 0}{l.i.m}\, X(t_0+h) = X(t_0)$

若对T中一切点都均方连续，则称$X(t)$在T上均方连续。

例：泊松过程是均方连续的。

$\because E(N(t+h) - N(t))^2 = (\lambda h)^2 + \lambda h \to 0$

由于

$E\left[|X(t+h) - X(t)|^2\right]$

$= E[X^2(t+h)] - E[X(t+h)X(t)]$

$- E[X(t)X(t+h)] + E[X^2(t)]$

$= R_X(t+h, t+h) - R_X(t+h, t) - R_X(t, t+h) + R_X(t,t)$

故$X(t)$在t处连续性与相关函数的连续性密切相关.

2.均方连续准则：

$\{X(t), t\in T\}$在t处均方连续$\Leftrightarrow R_X(t_1, t_2)$在点$(t,t)$处连续。

证：由均方极限的判别准则知

$\underset{h\to 0}{l.i.m}\, X(t+h) = X(t)$

$\Leftrightarrow \lim_{\substack{h_1\to 0\\h_2\to 0}} E[X(t+h_1)X(t+h_2)] = c$

$\Leftrightarrow \lim_{\substack{t_1\to t\\t_2\to t}} R_X(t_1, t_2) = c = R_X(t,t)$

即$R_X(t_1,t_2)$在(t,t)连续，由此可知：

$X(t)$在$t\in T$上连续$\Leftrightarrow R_X(t_1,t_2)$在$t_1 = t_2 = t$连续。

3.性质：

(1)$X(t)$在T上均方连续$\Rightarrow m_X(t) = E[X(t)]$在$T$上连续

$\because \lim_{h\to 0} m_X(t+h) = \lim_{h\to 0} E[X(t+h)]$

$= E[\underset{h\to 0}{l.i.m}\, X(t+h)] = E[X(t)] = m_X(t)$

(2)$X(t)$在T上均方连续$\Rightarrow R_X(t_1,t_2)$在$T\times T$上连续.

$\because \lim_{\substack{h_1\to 0\\h_2\to 0}} R_X(t_1+h_1, t_2+h_2) = \lim_{\substack{h_1\to 0\\h_2\to 0}} E[X(t_1+h_1)X(t_2+h_2)]$

$= E\left[\underset{h_1\to 0}{l.i.m}\, X(t_1+h_1)\cdot \underset{h_2\to 0}{l.i.m}\, X(t_2+h_2)\right]$

$= E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(t_1,t_2)$

(3)$R_X(t_1,t_2)$在对角线$t_1 = t_2$上连续

$\Rightarrow R_X(t_1,t_2)$在$T\times T$连续

$\because R_X(t_1,t_2)$在$t_1 = t_2$连续

$\Rightarrow X(t)$在T上连续(均方连续准则)

$\Rightarrow R_X(t_1,t_2)$在$T\times T$上连续

随机过程的均方连续性与自相关函数的连续性等价。而$R_X(t_1,t_2)$只要在对角线$t_1 = t_2$上连续，就必在其定义域上连续。

三.均方导数

1.定义设$\{X(t),\ t\in T\}$为二阶矩过程，若存在另一个随机过程$X'(t)$，满足：

$$\lim_{h\to 0} E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-X'(t)\right|^2=0$$

则称$X(t)$在t点均方可微，记作：

$$X'(t)=\frac{dX(t)}{dt}=\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$$

并称$X'(t)$为$X(t)$在t点的均方导数。

若$X(t)$在T上每一点t均方可微，则称它在T上均方可微。

类似,若$\{X'(t),t\in T\}$在t点均方可微，则称$X(t)$在t点二次均方可微，$X'(t)$的均方导数记为：

$$X''(t)\text{或}\frac{d^2X(t)}{dt^2}$$

(同理可定义更高阶均方导数)。

2.广义二阶导数

为了给出$X(t)$可微的充要条件，先介绍广义二阶导数的定义。

我们把相关函数$R_X(t_1,t_2)$的下列极限(若存在)

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\left[\frac{R_X(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_X(t_1+h_1,t_2)}{h_1h_2}-\frac{R_X(t_1,t_2+h_2)-R_X(t_1,t_2)}{h_1h_2}\right]$$

称为$R_X(t_1,t_2)$在点(t_1,t_2)的广义二阶导数。

记作：$\dfrac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial(t_1,t_2)}$，注意与二阶混合偏导的不同处。

二阶混合偏导：

$$\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial R_X(t_1+h_1,t_2)}{\partial t_2}-\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right]$$

$$=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\left[\lim_{h_2\to 0}\frac{R_X(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_X(t_1+h_1,t_2)}{h_2}-\lim_{h_2\to 0}\frac{R_X(t_1,t_2+h_2)-R_X(t_1,t_2)}{h_2}\right]$$

$$=\lim_{h_1\to 0}\lim_{h_2\to 0}\frac{1}{h_1h_2}[R_X(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_X(t_1+h_1,t_2)-R_X(t_1,t_2+h_2)+R_X(t_1,t_2)]$$

二阶混合偏导是累次极限，而广义二阶导数是混合极限，当混合偏导存在且连续时，有：

$$\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial(t_1,t_2)}=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$$

3.均方可微准则：

$X(t)$在T上可微$\Leftrightarrow R_X(t_1,t_2)$在$t_1=t_2=t\in T$上广义二阶导数存在。

由均方收敛准则可知

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}E\left[\frac{X(t+h_1)-X(t)}{h_1}\cdot\frac{X(t+h_2)-X(t)}{h_2}\right]$$

$$=\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}E\left\{\frac{1}{h_1h_2}[X(t+h_1)X(t+h_2)-X(t+h_1)X(t)-X(t)X(t+h_2)+X(t)X(t)]\right\}$$

$$= \lim_{\substack{h_1\to0\\h_2\to0}} \frac{1}{h_1h_2}\big[R_X(t+h_1,t+h_2)-R_X(t+h_1,t)$$
$$-R_X(t,t+h_2)+R_X(t,t)\big]$$
$$=\left.\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial(t_1,t_2)}\right|_{t_1=t_2=t}$$

故要求上式极限存在，即要求$R_X(t_1,t_2)$在点(t,t)的广义二阶导数存在。

4.导数的数字特征

若$\{X(t),\ t\in T\}$在T上可微，则

(1) $\frac{d}{dt}E[X(t)]=E[X'(t)]=m_{X'}(t)$

(2) $\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial(t_1)}=E[X'(t_1)X(t_2)]=R_{X'X}(t_1,t_2)$

$\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}=E[X(t_1)X'(t_2)]=R_{XX'}(t_1,t_2)$

(3) $\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=E[X'(t_1)X'(t_2)]=R_{X'}(t_1,t_2)$

$\frac{\partial^2 B_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=B_{X'}(t_1,t_2)$

证(1):$\frac{d}{dt}E[X(t)]=\lim_{h\to0}\frac{E[X(t+h)]-E[X(t)]}{h}$

$=\lim_{h\to0}E\left[\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right]=E\left[\underset{h\to0}{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right]$

$=E[X'(t)]=m_{X'}(t)$

其它证明类似。

表明均方导数运算与求期望可以交换次序。若$X'(t)$存在，则$X'(t)$的数字特征可通过$X(t)$的数字特征的微分求得。

5.导数的性质

(1)X为任意一个随机变量(可以为常数).则$X'=0$;

(2)$X'(t)$存在$\Rightarrow X(t)$连续；

(3)$(aX(t)+bY(t))'=aX'(t)+bY'(t)$，$a$，$b$为常数；

(4)$X'(t)=Y'(t)\Rightarrow Y(t)=X(t)+X$，相差一个随机变量

(5)$[f(t)X(t)]'=f'(t)X(t)+f(t)X'(t)$，$f(t)$为可微函数

(6)$X'(t)=Y(t)$，$X'(t)=Z(t)$，则$Y(t)=Z(t)$，唯一性。

证:(2) $\underset{h\to0}{l.i.m}[X(t+h)-X(t)]$

$=\underset{h\to0}{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\cdot h=X'(t)\cdot0=0$

例：维纳过程不可微。

$\because R_X(t_1,t_2)=\sigma^2\min(t_1,t_2)=\begin{cases}\sigma^2t_1, & t_2\ge t_1\\ \sigma^2t_2, & t_2<t_1\end{cases}$

$\therefore \frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\begin{cases}\sigma^2, & t_2\ge t_1\\ 0, & t_2<t_1\end{cases}$

$\therefore R_X(t_1,t_2)$在$t_1=t_2$处一阶偏导不存在，

$\therefore$其二阶混合偏导也不存在，

$\therefore$维纳过程不可微。

四.均方积分

1.定义：设$\{X(t),t\in T\}$为二阶矩过程

$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$

$\int_a^b X(t)dt=\underset{\|\Delta_n\|\to0}{l.i.m}\sum_{i=1}^n X(t_i')(t_i-t_{i-1})$

这里$\|\Delta_n\|=\left|\max_{1\le i\le n}\{(t_i-t_{i-1})\}\right|$

$t_{i-1}\le t_i'\le t_i \qquad i=1,2,\cdots,n$

2.均方可积准则

$\int_a^b X(t)dt$存在 $\Leftrightarrow \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$存在

证： $\int_a^b X(t)dt = \underset{\|\Delta_n\|\to 0}{l.i.m}\sum_{i=1}^{n} X(t_i')(t_i - t_{i-1})$

$\Leftrightarrow \lim_{\substack{\|\Delta_n\|\to 0\\ \|\Delta_m\|\to 0}} E\left[\sum_{k=1}^{n} X(t_k')(t_k - t_{k-1})\cdot\sum_{l=1}^{m} X(t_l')(t_l - t_{l-1})\right]$

$= \lim_{\substack{\|\Delta_n\|\to 0\\ \|\Delta_m\|\to 0}} E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} X(t_k')X(t_l')(t_k - t_{k-1})(t_l - t_{l-1})\right]$

$= \lim_{\substack{\|\Delta_n\|\to 0\\ \|\Delta_m\|\to 0}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} R_X(t_k',t_l')(t_k - t_{k-1})(t_l - t_{l-1})$

$= \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$

推论：

(1) $\int_a^{+\infty} X(t)dt$存在 $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty}\int_a^{+\infty} R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$存在

(2) $X(t)$连续 $\Rightarrow X(t)$可积

$\because X(t)$连续 $\Rightarrow R_X(t_1,t_2)$在$t_1=t_2$连续，

$\Rightarrow R_X(t_1,t_2)$在$T\times T$连续，

$\Rightarrow \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$存在，

$\Rightarrow X(t)$可积。

3.积分的数字特征

(1) $E\left[\int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b E[X(t)]dt$

(2) $E\left[\int_a^b X(t)dt\cdot\int_c^d X(t)dt\right] = \int_a^b\int_c^d R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$

特别：$E\left[\left(\int_a^b X(t)dt\right)^2\right] = \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$

(3) $\operatorname{cov}\left[\int_a^b X(t)dt,\int_c^d X(t)dt\right] = \int_a^b\int_c^d B_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$

特别：$D\left[\int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b\int_a^b B_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$

$\because D\left[\int_a^b X(t)dt\right] = E\left[\int_a^b X(t)dt\right]^2 - \left[E\int_a^b X(t)dt\right]^2$

$= \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2 - \int_a^b\int_a^b m_X(t_1)m_X(t_2)dt_1dt_2$

$= \int_a^b\int_a^b B_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$

说明：积分与期望可交 换次序。

(4)性质：这些性质与普通积分性质类似

(i) $\left\|\int_a^b X(t)dt\right\| \le \int_a^b\|X(t)\|dt \le M(b-a)$

其中$M=\max\|X(t)\| \quad a\le t\le b$

(ii) 对$a<c<b$有：

$\int_a^b X(t)dt = \int_a^c X(t)dt + \int_c^b X(t)dt$

(iii) 对任意常数α，β有：

$\int_a^b[\alpha X(t)+\beta Y(t)]dt = \alpha\int_a^b X(t)dt + \beta\int_a^b Y(t)dt$

5.不定积分

定义：设$X(t)$在$[a,b]$上均方可积，则

$Y(t) = \int_a^t X(\tau)d\tau$

称作$X(t)$的不定积分(均方意义下)。

性质:(1)$X(t)$均方连续$\Rightarrow Y(t)$均方连续；

$\|Y(t+h)-Y(t)\| = \left\|\int_t^{t+h} X(\tau)d\tau\right\|$

$\le \max_{t\le\tau\le t+h}\|X(\tau)\|\cdot h \to 0$

(2) $X(t)$均方连续 $\Rightarrow Y(t)$均方可微，$Y'(t)=X(t)$

$$\left\|\frac{Y(t+h)-Y(t)}{h}-X(t)\right\|$$
$$=\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}X(\tau)d\tau-X(t)\right\|$$
$$=\frac{1}{|h|}\left\|\int_t^{t+h}(X(\tau)-X(t))d\tau\right\|$$
$$\le \max_{t\le\tau\le t+h}\|X(\tau)-X(t)\|\cdot\frac{h}{|h|}\to 0$$

(3) $X(t)$均方可微，且$X'(t)$均方连续，则：

$$X(t)-X(a)=\int_a^t X'(\tau)d\tau$$

特别：$X(b)-X(a)=\int_a^b X'(\tau)d\tau$

相当于普通积分中的牛顿−莱布尼兹公式

$\because \left(\int_a^t X'(\tau)d\tau\right)'=X'(t)$

$\therefore \int_a^t X'(t)d\tau=X(t)+X$

令$t=a\Rightarrow X=-X(a)\quad \therefore \int_a^t X'(\tau)d\tau=X(t)-X(a)$

再令$t=b\Rightarrow X(b)-X(a)=\int_a^b X'(t)d\tau$

(4) $X(t)$是正态过程 $\Rightarrow Y(t)=\int_a^t X(t)dt$

也是正态过程 $\Rightarrow \int_a^b X(t)dt$是正态$r.v$

例：设$Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t X(\tau)d\tau$，求$Y(t)$的均值函数和协方差函数。

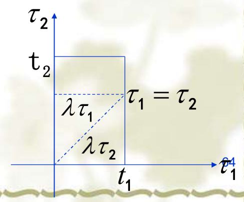
若(1) $X(t)$为泊松过程;(2) $X(t)$为维纳过程。

解：由于泊松过程，维纳过程都是均方连续的，所以它们都均方可积。

$$(1)E[Y(t)]=\frac{1}{t}\int_0^t E[X(\tau)]d\tau=\frac{1}{t}\int_0^t \lambda t d\tau=\frac{\lambda t}{2}$$

不妨设$t_2\ge t_1$

$$B_Y(t_1,t_2)=\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}B_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$
$$=\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\lambda\min(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$
$$=\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}d\tau_1\int_0^{\tau_1}\lambda\tau_2d\tau_2+\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}d\tau_1\int_{\tau_1}^{t_2}\lambda\tau_1d\tau_2$$
$$=\frac{\lambda t_1(3t_2-t_1)}{6t_2}$$



当$t_1>t_2$，类似可得：$B_Y(t_1,t_2)=\dfrac{\lambda t_2(3t_1-t_2)}{6t_1}$

(2)用完全相同的方法得：

$$E[Y(t)]=\frac{1}{t}\int_0^t E[X(t)]dt=0$$

$$B_Y(t_1,t_2)=\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\sigma^2\min(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2t_1(3t_2-t_1)}{6t_2}, & t_1\le t_2\\ \dfrac{\sigma^2t_2(3t_1-t_2)}{6t_1}, & t_1>t_2\end{cases}$$

五.平稳过程的一些性质

(1) $X(t)$连续 $\Leftrightarrow R_X(\tau)$在$\tau=0$连续

(相当于$t_1=t_2$对角线上连续，由均方 连续的判别准则)

(2) $X'(t)$存在 $\Leftrightarrow R''_X(\tau)\big|_{\tau=0}$存在连续

证：$\because \dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}=\dfrac{\partial R_X(t_2-t_1)}{\partial t_2}=\dfrac{dR_X(\tau)}{d\tau}\cdot 1=R'_X(\tau)$

$\dfrac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=-R''_X(\tau)\therefore X'(t)$存在 $\Leftrightarrow \left.\dfrac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1=t_2}$

存在，连续 $\Leftrightarrow -R''_X(\tau)\big|_{\tau=0}$存在

(二阶混合编导与广义二阶偏导相同)

(3) $X(t)$平稳 $\Leftrightarrow X'(t)$平稳。

证：$\because m_{X'}(t)=E[X'(t)]=\dfrac{d}{dt}E[X(t)]=0$ 为常数，

$$R_{X'}(t_1,t_2)=E[X'(t_1)X'(t_2)]$$

$$=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}=-R_X''(\tau) \text{ 仅与 } \tau \text{有关，}$$

$\therefore$ 是平稳过程

§ 6.4 平稳过程的各态历经性

在实际工作中，确定随机过程的均值函数和自相关函数等数字特征很重要，然而要求这些数字特征需知一维、二维分布函数，而这些分布在实际问题中没给出，为此，只能用统计实验的方法对观察数据进行估计，如可把均值和自相关函数近似表示为：

$$m_X(t_1)=E[X(t_1)]\approx\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k(t_1)$$

$$R_X(\tau)=R_X(t_2-t_1)\approx\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k(t_1)x_k(t_2) \text{统计平均}$$

因此，估计m_X，$R_X(\tau)$需作大量实验，次数越多越精确，而在实际中，能否通过一次实验，长时间的观察值来估计？即按时间取平均来代替统计平均，这就是所谓的遍历性问题。

由大数定律可知,对于独立同分布的随机变量序列$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$若存在均值$E[X_n]=m$，

则 $\lim\limits_{N\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}X_k-m\right|<\varepsilon\right\}=1.$

用随机过程的观点看,$\{X_n,n\geq 1\}$可看作是具有离散参数的随机过程，则 $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}X_k$

为随机过程的样本函数按不同时刻取平均，它随样本不同而变，是个随机变量，而$m=E[X_n]$是随机过程的均值，即在某一时刻过程的现实取值的统计平均值。

$\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}X_k\xrightarrow{P}m$表明

随机过程的样本按时间的平均值以越来越大的概率无限接近随机过程的统计平均值$E[X_n]$。

也就是说，只要观测的时间足够长，则随机过程的每个样本函数都能够"遍历"各种可能状态，随机过程的这种特性叫各态历经性。

定义：设$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$为均方连续的平稳过程，则分别称

$$\langle X(t)\rangle=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt.$$

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt.$$

为该过程的时间均值和时间相关函数。

定义：设$\{X(t),\ t\in(-\infty,+\infty)\}$是均方连续的平稳过程。

①若$\langle X(t)\rangle=E[X(t)]=m_X$以概率1成立，则称该平稳过程的均值具有各态历经性；

②若$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=R_X(\tau)$以概率1成立，则称该平稳过程的自相关函数具有各态历经性；

③如果平稳过程的均值和自相关函数都具有各态历经性，则称该过程具有各态历经性。

注：随机过程的时间平均是对给定的e，样本函数对t的积分值再取平均，积分值依赖于e，故为随机变量，但如果$X(t)$是各态历经过程，则时间平均不再依赖于e，而是以概率1分别等于过程的均值和自相关函数。这表明各态历经过程各样本函数的时间平均可认为相同，即可用任一个样本函数的时间平均来代替过程的统计平均。

另一方面也表明$E[X(t)]$和$E[X(t)X(t+\tau)]$必定与无关，即各态历经过程必是平稳过程。但平稳过程在什么条件下具有各态历经性呢?

平稳过程的均值具有各态历经性的充要条件。

定理：设$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是均方连续的平稳过程，则它的均值具有各态历经性的充要条件为:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T(0)}^{T(2T)}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-m_X^2\right]d\tau=0$$

证:$\because\langle X(t)\rangle$是随机变量，可求出它的均值和方差

$$E[\langle X(t)\rangle]=E[\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X(t)]dt$$

$$=m_X=E[X(t)]$$

由方差的性质知，若能证明$D[\langle X(t)\rangle]=0$，则$\langle X(t)\rangle$依概率1等于$E[X(t)]$。

所以要证明$X(t)$的均值具有各态历经性等价于

证 $D[\langle X(t)\rangle]=0$

由于$D[\langle X(t)\rangle]=E[\langle X(t)\rangle]^2-m_X^2$

而$E[\langle X(t)\rangle]^2=E\left[\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]^2$

$$=\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}X(t_1)dt_1\int_{-T}^{T}X(t_2)dt_2\right]$$

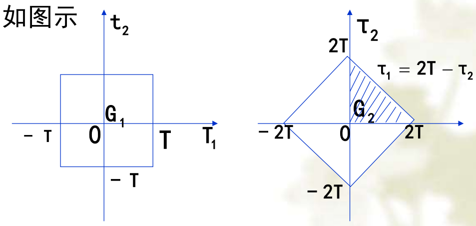
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_2-t_1)dt_1dt_2$$

作变量代换$\begin{cases}\tau_1=t_1+t_2\\ \tau_2=t_2-t_1\end{cases}$

变换的雅可比式为:$\left|\dfrac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau_1,\tau_2)}\right|=\dfrac{1}{2}$

在上述变换下,区域的变化由$G_1\Rightarrow G_2$.

如图示



于是：$E[\langle X(t)\rangle]^2 = \lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{4T^2}\iint\limits_{G_2}\frac{1}{2}R_X(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$

注意：$R_X(\tau_2)$是τ_2的偶函数，且与τ_1无关，利用对称性，积分值G_2为中阴影区域上的4倍。

即：$E[\langle X(t)\rangle]^2 = \lim\limits_{T\to+\infty}\frac{4}{4T^2}\iint\limits_{D}\frac{1}{2}R_X(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T^2}\int_0^{2T}d\tau_2\int_0^{2T-\tau_2}R_X(\tau_2)d\tau_1$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T^2}\int_0^{2T}(2T-\tau)R_X(\tau)d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R_X(\tau)d\tau$$

$$\therefore D[\langle X(t)\rangle] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R_X(\tau)d\tau - m_X^2$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-m_X^2\right]d\tau$$

这里利用了积分$\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)d\tau = 1$

$\therefore X(t)$的均值各态历经性的充要条件可写成

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-m_X^2\right]d\tau = 0$$

推论：若平稳过程$X(t)$满足条件：$\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau) = m_X^2$

则 $\langle X(t)\rangle = m_X$

定理：设$\{X(t), t\in T\}$为均方连续的平稳过程，则其相关函数具有各态历经性的充要条件为：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)\left[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)\right]d\tau_1 = 0$$

其中$B(\tau_1) = E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$

证：对于固定的τ，记$Y(t) = X(t)X(t+\tau)$

$Y(t)$为均方连续的平稳过程，

且$m_Y = E[Y(t)] = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$

$R_Y(\tau_1) = E[Y(t)Y(t+\tau_1)] = B(\tau_1)$

根据上面的定理可得：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)\left[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)\right]d\tau_1 = 0$$

在实际应用中常讨论的是时间为$0\le t<\infty$的平稳过程。

则均值各态历经的充要条件可写成：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\left[R_X(\tau)-m_X^2\right]d\tau = 0$$

自相关各态历经的充要条件可写成：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)\left[B_X(\tau_1)-R_X^2(\tau)\right]d\tau_1 = 0$$

例：已知随机电报信号过程$X(t)$，$E[X(t)] = 0$，$R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$，问$X(t)$是否均值各态历经?

解：代入充要条件式：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[e^{-2\lambda|\tau|}-0\right]d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\lambda T}\left(1-\frac{1-e^{-2\lambda\tau}}{4\lambda T}\right) = 0$$

$\therefore X(t)$的均值具有各态历经性。

例：设随机相位过程$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，$a,\omega$为常数，$\Theta\sim U(0,2\pi)$，问$X(t)$是否为各态历经过程。

解：$\because E[X(t)]=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$

$$R_X(t,t+\tau)=E[a\cos(\omega t+\Theta)a\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)]$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2\pi}\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)=R_X(\tau)$$

而 $\langle X(t)\rangle=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(\omega t+\Theta)dt$

$$=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{a}{2T}\frac{\sin(\omega T+\Theta)-\sin(-\omega T+\Theta)}{\omega}=0$$

$\therefore\langle X(t)\rangle=E[X(t)]$

又 $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$

$$=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a^2\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)dt$$

$$=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{a^2}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}[\cos(\omega\tau)-\cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)]dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

故有 $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=R_X(\tau)$

由于过程$X(t)$的均值和相关函数都具有各态历经性，所以随机相位过程是各态历经的。

例：讨论过程$X(t)=Y$的各态历经性，其中Y是方差不为零的随机变量。

解：显然$X(t)=Y$是平稳过程。

$\because E[X(t)]=E[Y]=m_X$(常数)

$R_X(t,t+\tau)=E[Y^2]=D[Y]+m_x^2$(与$t$无关)

但此过程不具有各态历经性，

$\because\langle X(t)\rangle=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Ydt=Y$(非常数)

$\neq E[X(t)]$

所以$X(t)=Y$的均值不具有各态历经性。

类似可证其相关函数也不具有各态历经性。

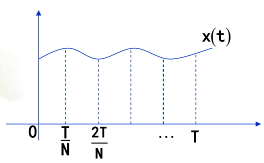
各态历经定理的应用

下面介绍对具有各态历经性的平稳过程，怎样利用一个样本函数估计均值，相关函数。

设$x(t),0\le t<\infty$是平稳过程$\{X(t),0\le t<\infty\}$的样本函数，若$X(t)$的均值具有各态历经性，即

$$m_X=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$$

此式中积分可采取将$[0,T]$等分的方式进行计算。



$$\int_0^T X(t)dt=\underset{N\to\infty}{l.i.m}\sum_{k=1}^{N}X(t_k)\Delta t_k=\underset{N\to\infty}{l.i.m}\frac{T}{N}\sum_{k=1}^{N}X\left(k\frac{T}{N}\right)$$

其中$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$，

$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}=\frac{T}{N}$，$t_k=k\Delta t_k$

于是：$m_X = \underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{T}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\frac{T}{N}\sum_{k=1}^{N}X\left(k\frac{T}{N}\right)$

$$= \underset{T\to\infty}{l.i.m}\,\underset{N\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X\left(k\frac{T}{N}\right)$$

因均方收敛必依概率收敛，所以对$\forall\varepsilon>0$有

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{N\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X\left(k\frac{T}{N}\right)-m_X\right|<\varepsilon\right\}=1$$

于是，当T，N相当大，且$\frac{T}{N}$很小时，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X\left(k\frac{T}{N}\right)-m_X\right|<\varepsilon\right\}\approx 1$$

根据实际推断原理，一次抽样得到的样本函数$x(t)$，可认为一定有：

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x\left(k\frac{T}{N}\right)-m_X\right|<\varepsilon.$$

于是 $m_X\approx\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x\left(k\frac{T}{N}\right)$

由此式可见，近似计算m_X实际上只需用到

样本函数$x(t)$在$k\frac{T}{N}(1\le k\le N)$点上的函数值，

这些点可以称为采样点。

下面介绍相关函数$R_X(\tau)$的近似估计，考察$\tau=r\frac{T}{N}$，其中r固定，$r=0,1,2,\cdots,m$若相关函数具有各态历经性，则对任意$\varepsilon>0$,

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m}\,\underset{N\to\infty}{l.i.m}\,P\left\{\left|\frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r}X(k\frac{T}{N})X(k\frac{T}{N}+r\frac{T}{N})-R_X(\tau)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

因而，$R_X\left(r\frac{T}{N}\right)\approx\frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r}x\left(k\frac{T}{N}\right)x\left((k+r)\frac{T}{N}\right)$

此式要求$N,N-r$很大，而$\frac{T}{N}$很小，通常取

$m=\frac{N}{5}\sim\frac{N}{2}$便能符合$N-r$很大的要求。

作业：**6.1，6.3，6.7，6.11，6.16**