工程矩阵理论：范数和矩阵函数

东南大学· 数学系· 周建华

August 15, 2015

本章内容概要

1. 范数
2. 矩阵函数
3. 矩阵函数的应用

范数的定义

设V是数域F上线性空间，ν是定义在V上的实值函数。如果ν满足：

1. 对任意$\theta \neq \alpha \in V$,$\nu(\alpha) > 0$
2. 对任意$\alpha \in V$,$k \in F$, $\nu(k\alpha) = |k|\nu(\alpha)$
3. 对任意$\alpha, \beta \in V$, $\nu(\alpha + \beta) \leq \nu(\alpha) + \nu(\beta)$

则称ν是V上的范数.定义了范数的线性空间称为赋范线性空间.

Example

设V是内积空间.V上内积下的长度$\|\bullet\|$是V上的一个范数.

因此，从现在起，在不致于引起混淆的情况下，任意线性空间上的范数就记为$\|\bullet\|$.

C^n中的范数

对任意$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^n$，

1. 向量1-范数：$\|X\|_1=\Sigma_{i=1}^n|x_i|$
2. 向量2-范数：$\|X\|_2=\sqrt{\Sigma_{i=1}^n|x_i|}$
3. 向量∞-范数：$\|X\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

C^n中更多的范数对任意$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^n$，

1. $p\geq 1$时，有向量p-范数：$\|X\|_p=(\Sigma_{i=1}^n|x_i|^p)^{1/p}$
2. 如果$\|\bullet\|$是已知的范数，A是一可逆矩阵向量，则$\|X\|_A=\|AX\|$也是C^n上的一种范数.

线性空间V上的范数

设V是数域F上n维线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是V的一组基，$\|\bullet\|$是C^n上已知的范数，据此可以定义V上的范数：若$\eta \in V$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的坐标是$X$,规定

$$\|\eta\| = \|X\|$$

.

向量序列的收敛性

设$\|\bullet\|$是V上的范数，$\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$是$V$中的一个向量序列，$\eta_0 \in V$.如果

$$\lim_{k\to\infty} \|\eta_k - \eta_0\| = 0$$

则称向量序列$\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$在范数$\|\bullet\|$下收敛到$\eta_0$．记为

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k = \eta_0$$

范数的可比较性

Definition

假设$\|\bullet\|$和$\|\bullet\|'$都是线性空间V上的范数.若存在大于零的数$k_1 \leq k_2$,使得对任意$\eta \in V$, 不等式$k_1\|\eta\|' \leq \|\eta\| \leq k_2\|\eta\|'$成立，则称$V$上的范数$\|\bullet\|$和$\|\bullet\|'$ 是可比较的.

Theorem

有限维线性空间V上任意两个范数都是可比较的.

矩阵p范数

矩阵 p -范数：
设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则有下列矩阵范数：

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{i,j}|a_{ij}|\,;$$

$$\|A\|_{m_2}=\left(\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}=\left(trA^HA\right)^{1/2}=\left(trAA^H\right)^{1/2}$$

$$\|A\|_{m_\infty}=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}\,,$$

$\|A\|_{m_2}$ 又记为 $\|A\|_F$，称为Frobenius范数，简称F范数.

F范数是酉不变的：若 U,V是酉矩阵，则 $\|A\|_F=\|UAV\|_F$.

范数的相容性

Definition

设 $\mathbb{C}^{s\times m}, \mathbb{C}^{m\times n}, \mathbb{C}^{s\times n}$ 中定义了范数 $\|\bullet\|_a$, $\|\bullet\|_b$, $\|\bullet\|_c$, 若对 $\forall A \in \mathbb{C}^{s\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

$$\|AB\|_c \le \|A\|_a \|B\|_b ,$$

则称范数 $\|\bullet\|_a$, $\|\bullet\|_b$, $\|\bullet\|_c$ 是相容的.

Theorem

$\|\bullet\|_{m_1}$, $\|\bullet\|_{m_2}$ 是相容的，$\|\bullet\|_{m_\infty}$ 是不相容的.

算子范数

设 $\|\bullet\|_{\nu_n}, \|\bullet\|_{\nu_m}$ 分别是 $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ 上的范数，定义 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的实值函数 $\|\bullet\|$:

$$\|A\| = \max_{\theta\neq X\in C^n} \frac{\|AX\|_{\nu_m}}{\|X\|_{\nu_n}}$$

称 $\|\bullet\|$ 是由 $\|\bullet\|_{\nu_n}$, $\|\bullet\|_{\nu_m}$ 诱导的算子范数.

问题:

(1), $\|A\|$ 是否有意义？

(2), $\|A\|$ 是否满足范数公理?

Theorem

算子范数一定是相容的矩阵范数.

$\|\bullet\|_1$，$\|\bullet\|_2$，$\|\bullet\|_\infty$ 诱导的 A 的算子范数分别被称为 A 的算子1-范数，算子2-范数，算子 ∞-范数，分别记为 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$.

Theorem

设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，则

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{s}|a_{ij}|\right\},\quad \text{列模和范数;}$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^H A)},\quad \text{谱范数;}$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le s}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\},\quad \text{行模和范数.}$$

Example

设 A 是酉矩阵，证明: $\|A\|_2 = 1$.

Example

若 A 是正规阵，证明: $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Example

设 $\|A\|_F = a,\ \|B\|_F = b,\ \|A\|_2 = c,\ \|B\|_2 = d,\ M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$，

求 $\|M\|_F$ 及 $\|M\|_2$.

矩阵序列的收敛性

Definition

设矩阵序列 $\{A_k\}_{1\leq k\leq +\infty}$, $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}$, 如果 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 且 $\forall i, j,\ \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$, 则称 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$.

可以证明：若 $\|\bullet\|$ 是一矩阵范数，则

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0.$$

幂序列

对给定的方阵 A，考虑方阵序列 $\{A^k\}$.

Theorem

若有相容矩阵范数 $\|\bullet\|$，使得 $\|A\| < 1$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$.

Theorem

$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$

Theorem

若 $\|\bullet\|$ 是相容矩阵范数，则 $\rho(A) \leq \|A\|$.

Theorem

对任意矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，若 $\varepsilon > 0$，则一定存在 $\mathbb{C}^{n\times n}$上相容矩阵范数 $\|\bullet\|$，使得 $\|A\| < \rho(A) + \varepsilon$.

矩阵幂级数

设 A 是方阵，对于幂级数

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i, \quad f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

若矩阵序列 $\{f_n(A)\}$ 收敛于矩阵 M，则称矩阵幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i A^i$ 收敛于 M.

Theorem

若幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ 的收敛半径为 r，则

当 $\rho(A) < r$ 时，矩阵幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i A^i$ 收敛；

当 $\rho(A) > r$ 时，矩阵幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i A^i$ 发散.

矩阵函数

设函数 $f(x)$ 可以展开成幂级数

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i, |x| < R,$$

设 $A \in C^{n\times n}$，且 $\rho(A) < R$, 定义

$$f(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i A^i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i A^i.$$

几个重要的函数

$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!};$$

$$\sin x = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!};$$

$$\cos x = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

利用定义计算

Example

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 e^A.

Example

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\sin A$.

Jordan形矩阵的函数

假设

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

其中 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

$$f_n(J)=\begin{pmatrix} f_n(J_1) & & & \\ & f_n(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(J_s) \end{pmatrix}$$

令 $n\to\infty$，得

$$f(J)=\begin{pmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{pmatrix}$$

Jordan块的函数

设 $n \times n$ 若当块 $J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$, 则

$$f_k(J_0) = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_0) & \frac{f_k{}'(\lambda_0)}{1!} & \frac{f_k{}''(\lambda_0)}{2!} & \cdots & \frac{f_k{}^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} & \frac{f_k{}^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!} \\ 0 & f_k(\lambda_0) & \frac{f_k{}'(\lambda_0)}{1!} & \ddots & \cdots & \frac{f_k{}^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f_k(\lambda_0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{f_k{}''(\lambda_0)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \frac{f_k{}'(\lambda_0)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & f_k(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

Jordan块的函数

$$f(J_0)=\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \frac{f''(\lambda_0)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \ddots & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda_0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda_0)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & f(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

Example

设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，求 $e^A,\ \sin A,\ \sin At.$

利用Jordan标准形计算

Theorem

设矩阵 A 的$Jordan$标准形是

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

则

$$f(A) = Pf(J)P^{-1}.$$

Example

已知 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，求 $\sin A, \sin At$.

可以求得 $J=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Theorem

已知 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $f(A)$ 的特征值为$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

Example

设 A 是 $n \times n$ 矩阵，证明：$\det e^A = e^{trA}$.

待定系数法

设矩阵A的Jordan标准形是

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

则：$f(A) = Pf(J)P^{-1}$，

其中，$f(J) = \begin{pmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{pmatrix}.$

Theorem

若 A 的最小多项式为 $m(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{t_i}$，则 $f(A)=g(A)\Leftrightarrow$ 对每个特征值λ_i,

$$f(\lambda_i)=g(\lambda_i),$$

$$f'(\lambda_i)=g'(\lambda_i),$$

$$\cdots,$$

$$f^{(t_i-1)}(\lambda_i)=g^{(t_i-1)}(\lambda_i).$$

Example

已知 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$，求 e^A 及 e^{At}.

Example

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\sin At$.

矩阵函数的性质

Theorem

设 $A, B \in C^{n\times n}$，O 是 $n \times n$ 零矩阵，则：

1. $e^O = I$;
2. 若$AB = BA$,则 $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$;
3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Example

假设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 e^A.

Example

假设 A 是Hermite阵，证明：e^{iA} 是酉矩阵.

注:并非对任意矩阵 A，B，均有$e^{A+B}=e^A\cdot e^B$.

线性微分方程组

设矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))$, 其中, $a_{ij}(t)$ 是关于 t 的可微函数,

Definition

$$\frac{dA(t)}{dt}=\left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right); \quad \int_a^b A(t)dt=\left(\int_a^b a_{ij}(t)dt\right).$$

(1) $\frac{d}{dt}(A(t)+B(t))=\frac{d}{dt}A(t)+\frac{d}{dt}B(t);$

(2) $\frac{d}{dt}(A(t)B(t))=(\frac{d}{dt}A(t))B(t)+A(t)(\frac{d}{dt}B(t));$

(3) $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A.$

常系数线性微分方程组

微分方程的初值问题: $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t) \\ x(0) = b \end{cases}$ 有唯一解: $x(t) = be^{at}$.

设 a_{ij} 均是常数，考虑关于未定函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 的微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

如果记：

$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $X(t)=\left(x_1(t)\,x_2(t)\,\cdots\,x_n(t)\right)^T$,

则这个方程组可以写成矩阵方程的形式：

$$\frac{d}{dt}X(t)=AX(t).$$

常系数线性微分方程

Theorem

假设 $A, X(t)$ 如前，X_0 是已知的 n 维列向量，则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

有唯一解

$$X(t) = e^{At}X_0.$$