最优化第二章作业题

填空

（1）在三维空间R^3中，集合$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$的极点构成的集合为____________________________________。

（2）线性规划$\begin{aligned}&\min 2x_1-x_2\\ &s.t.\ x_1+x_2+x_3 \quad =4\\ &\quad -x_1-x_2 \quad +x_4=2\\ &\quad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$的可行域共有______个不同的极点。

（3）集合$\{(x,y)\mid x^2+2y^2\le 4, x\ge 1, y\ge 1\}$的极点构成的集合为______________________。

（4）在二维空间R^2中，集合$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge x\}$的极点构成的集合为

______________________________________。

（5）函数$f(x_1,x_2)=ax_1^2+x_1x_2+2x_2^2-x_1+2x_2+1$为严格凸函数，则常数$a$的取值范围是___________________。

（6）线性规划$\begin{aligned}&\min 2x_1-3x_2\\ &s.t.\ x_1+x_2\ge -1\\ &\quad -3x_1+5x_2\le 2\\ &\quad x_2\le 0\end{aligned}$的对偶规划为____________________。

证明

（1）$f(x)$为凸集$D\subset R^n$上的函数，上图$epi(f)=\{(x,y)\mid x\in D, y\in R, y\ge f(x)\}$，证明$f(x)$为凸函数的充要条件是$epi(f)$为凸集。

（2）考虑规划问题：$\begin{aligned}&\min\quad f(x)\\ &s.t.\quad c_i(x)\le 0\end{aligned}$，其中，$f(x),c_i(x)(i=1,2,\cdots,m):R^n\to R$是凸函数，证明：（1）该问题的可行域是凸集；（2）该问题的最优解的集合A是凸集。

（3）设z^*,s^*分别为下列两个问题$(I)\begin{aligned}&\min c^Tx\\ s.t.\quad &Ax=b\\ &x\ge 0\end{aligned}$ $(II)\begin{aligned}&\min c^Tx\\ s.t.\quad &Ax=b+d\\ &x\ge 0\end{aligned}$的最优值。$y^*$是(I)的对偶问题的最优解，证明$z^*+y^{*T}d\le s^*$。

（4）设$\bar{x},\bar{y}$分别为下列两个问题

$$(I)\begin{aligned}&\min c^Tx\\ s.t.\quad &Ax\ge b\\ &x\ge 0\end{aligned}\qquad (II)\begin{aligned}&\max y^Tb\\ s.t.\quad &y^TA\le c^T\\ &y\ge 0\end{aligned}$$

的可行解。证明$c^T\bar{x}\ge \bar{y}^Tb$。

计算

一、（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & -3x_1-4x_2\\
s.t.\ & 2x_1+x_2\le 4\\
& x_1+3x_2\le 3\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量 x_1 写出对应的割平面方程。

二、（18％）（1）以 $(5/2,1/2,0,0)^T$ 为初始基可行解，用单纯形方法求解下面的线性规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1+2x_2+3x_3+4x_4\\
s.t.\ & x_1+x_2+x_3+x_4=3\\
& 2x_1+2x_3-6x_4=5,\\
& x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0,x_4\ge 0.
\end{aligned}
$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对变量 x_1 写出分枝后的线性规划。

三、（教材 90 页第（4）小题））求解线性规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1+2x_2+x_3-x_4\\
s.t.\ & x_1-2x_2+x_3-x_4\le 15\\
& 2x_1+x_2-x_3+2x_4\ge 10,\\
& x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0,|x_4|\le 2.
\end{aligned}
$$

四、（教材 92 页第（5）小题）写对偶规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\\
s.t.\ & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,i=1,2,\cdots,m\\
& \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,j=1,2,\cdots,n\\
& x_{ij}\ge 0,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
$$