Author: mathor

Blog link: wmathor.com

复习题

线性空间

设α为线性空间$V(\mathbb{F})$中非零向量，若$\mathbb{F}$中数k_1与k_2不相等，试证：$k_1\alpha \neq k_2\alpha$

证： 假设$k_1\alpha = k_2\alpha$，则

$$\begin{aligned} k_1\alpha - k_2\alpha &= 0 \\ \Rightarrow (k_1 - k_2)\alpha &= 0 \end{aligned}$$

因为$\alpha \neq 0$，所以$k_1 - k_2 = 0$，则$k_1 = k_2$，这与题意矛盾，故$k_1\alpha \neq k_2\alpha$

线性空间基与维数

求下列线性空间的维数及其一组基：

（1）$\mathbb{F}^{2\times 2}$中全体对称矩阵所构成的$\mathbb{F}$上的线性空间

（2）$\mathbb{C}^{2\times 2}$中全体上三角矩阵所构成的$\mathbb{C}$上的线性空间

（3）$V(\mathbb{F}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \mid x_2 = x_4 = \cdots = x_{2n}, \forall x_i \in \mathbb{F}\}$

（4）$A = diag(1, w, w^2)$，其中$w^3 = 1$，但$w \neq 1$，且$V(\mathbb{R}) = \{f(A) \mid \forall f(x) \in \mathbb{R}[x]\}$

解：

> 线性空间的一组基要满足：**线性无关，空间中任意一个向量都能由这组基表示**

（1）$\mathbb{F}^{2\times 2}$中矩阵的一般形式为$\begin{bmatrix} x & z \\ z & y \end{bmatrix}$，因此很容易得$\mathbb{F}^{2\times 2}$中全体对称矩阵所构成的$\mathbb{F}$上的线性空间的一组基为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

维数为3

（2）$\mathbb{C}^{2\times 2}$中上三角矩阵的一般形式为$\begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix}$，因此很容易得其基为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

维数为3

（3）$V(\mathbb{F})$中向量的一般形式为$(x_1, y, x_3, y, x_5, y, \ldots\ldots, x_{2n-1}, y)$，因此很容易得其基为

$$\begin{gathered} (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ (0, 0, 1, \ldots, 0) \\ \vdots \\ (0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1) \end{gathered}$$

维数为$n+1$

（4）因为$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$，又因为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&w&0\\0&0&w^2\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&w^2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&w&0\\0&0&w^2\end{bmatrix}$$

所以实际上$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+a_3E+a_4A+a_5A^2+\cdots+a_nA^n$，其中

$$A^n=\begin{cases}E, & n\%3=0\\ A, & (n-1)\%3=0\\ A^2, & (n+1)\%3=0\end{cases}$$

容易得E,A,A^2就是该线性空间的一组基，维数为3

子空间

设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$

（1）$V=\{B\mid AB=BA,B\in\mathbb{C}^{n\times n}\}$，证明$V$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的子空间

（2）若$A=E$，求（1）中V

（3）若$A=diag(1,2,\ldots,n)$，求（1）中V

（4）若$n=3,A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$，求（1）中$V$

解:

> 要验证某个线性空间是子空间，只需要判断其**加法**和**数乘**是否封闭

（1）首先验证对于加法是否封闭

$$\begin{gathered}\forall B_1,B_2\in V\\ \because A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2\\ \text{又}\because AB_1=B_1A,AB_2=B_2A\\ \therefore AB_1+AB_2=B_1A+B_2A\Rightarrow A(B_1+B_2)=(B_1+B_2)A\\ \therefore B_1+B_2\in V\end{gathered}$$

其次验证对于数乘是否封闭

$$\begin{gathered}\forall B\in V,k\in\mathbb{C}\\ \because A(kB)=k(AB)=k(BA)=(kB)A\\ \therefore kB\in V\end{gathered}$$

所以V是$\mathbb{C}^{n\times n}$的子空间

（2）因为单位矩阵和任何矩阵相乘，都等于那个矩阵本身，所以$V=\mathbb{C}^{n\times n}$

(3) 设$B=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & 2a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & na_{nn} \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & na_{1n} \\ a_{21} & 2a_{22} & \cdots & na_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{bmatrix}$$

若要满足$AB=BA$，则需要$a_{12}=\cdots a_{1n}=\cdots a_{21}=\cdots a_{nn-1}=0$，故此时$V$是一个$n\times n$的对角阵构成的集合

(4) 设$B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$，则

$$AB=\begin{bmatrix} 3x_1 & 3x_2 & 3x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1+2z_1 & y_2+2z_3 & y_3+2z_3 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 3x_1 & x_2+x_3 & 2x_3 \\ 3y_1 & y_2+y_3 & 2y_3 \\ 3z_1 & z_2+z_3 & 2z_3 \end{bmatrix}$$

由于$AB=BA$，则有

$$\begin{cases} x_2=0 \\ x_3=0 \\ y_1=0 \\ y_2=z_3 \\ y_3=0 \\ z_1=0 \\ z_3=0 \end{cases}$$

故$B=\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & z_2 & y_2 \end{bmatrix}$，其中$x_1,y_2,z_2\in\mathbb{C}$

和空间与交空间

已知$\alpha_1=(1,2,1,0),\alpha_2=(-1,1,1,1),\beta_1=(2,-1,0,1),\beta_2=(1,-1,3,7)$，
$V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2\},V_2=span\{\beta_1,\beta_2\}$，分别求$V_1+V_2,V_1\cap V_2$的一组基

解:

> $V_1+V_2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$

因为

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta_1^T,\beta_2^T)=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&-1\\1&1&0&3\\0&1&1&7\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由于初等行变换后前三列为非零首元，所以在原矩阵中前三列是线性无关的，故列向量组$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta_1^T,\beta_2^T)$的极大线性无关组为$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta_1^T)$，所以$V_1+V_2$的一组基是$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1)$

> $$\begin{aligned}\eta\in V_1\cap V_2 \Leftrightarrow &\exists k_1,k_2\text{使}\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\\ &\exists l_1,l_2\text{使}\eta=l_1\beta_1+l_2\beta_2\end{aligned}$$

设$k_1\alpha_1+k_1\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$，则$k_1\alpha_1+k_1\alpha_2-l_1\beta_1-l_2\beta_2=0$，即

$$\begin{cases}k_1-k_2-2l_1-l_2=0\\2k_1+k_2+l_1+l_2=0\\k_1+k_2-3l_2=0\\k_2-l_1-7l_2=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k_1=-l_2\\k_2=4l_2\\l_1=-3l_2\\l_2\text{自由}\end{cases}$$

不妨令$l_2=1$，则$k_1=-1,k_2=4,l_1=-3$，于是$V_1\cap V_2=\{k(-\alpha_1+4\alpha_2)\}$或$V_1\cap V_2=\{l(-3\beta_1+\beta_2)\}$

故$V_1\cap V_2$的一组基是$-\alpha_1+4\alpha_2$（或$-3\beta_1+\beta_2$）

> 上面带有"或"字样的，写一个即可，考试时并不需要全部写出来

直和

设$V_1=\{A\mid A^T=A,A\in\mathbb{C}^{n\times n}\},V_2=\{A\mid A^T=-A,A\in\mathbb{C}^{n\times n}\}$，试证：$\mathbb{C}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$

证：

> 要证明某个线性空间V是两个子空间V_1,V_2的直和，需要证明以下两点：
>
> 1. $V=V_1+V_2$，要证明相等，实际上就是证明左包含以及右包含
> 2. V_1+V_2是直和

由V_1,V_2的定义明显可得$V_1+V_2\subseteq\mathbb{C}^{n\times n}$；要证明$\mathbb{C}^{n\times n}\subseteq V_1+V_2$，实际上就是要证明

$$\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n},A_1\in V_1,A_2\in V_2\Rightarrow A=A_1+A_2$$

因为$\frac{1}{2}(A+A^T)\in V_1,\frac{1}{2}(A-A^T)\in V_2$，且$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$，所以$\mathbb{C}^{n\times n}\subseteq V_1+V_2$

综上所述$\mathbb{C}^{n\times n}=V_1+V_2$

要证明V_1+V_2是直和，只需要证明$V_1\cap V_2=\{0\}$。任取$A\in V_1\cap V_2$，则有

$$\begin{aligned}A=A^T\text{（因为}A\in V_1\text{）}\\A^T=-A\text{（因为}A\in V_2\text{）}\end{aligned}$$

综上，$A\equiv 0$，所以V_1+V_2是直和，即$\mathbb{C}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$

直和

设$A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$，且$AB=0,B^2=B$，
$V_1=\{X\mid AX=0,X\in\mathbb{F}^n\},V_2=\{X\mid BX=0,X\in\mathbb{F}^n\}$，证明:

（1）$\mathbb{F}^n=V_1+V_2$

（2）$\mathbb{F}^n=V_1\oplus V_2\Leftrightarrow r(A)+r(B)=n$

证:

（1）由V_1,V_2的定义明显可得$V_1+V_2\subseteq\mathbb{F}^n$；要证明$\mathbb{F}^n\subseteq V_1+V_2$，实际上就是要证明

$$\forall X\in\mathbb{F}^n,X_1\in V_1,X_2\in V_2\Rightarrow X=X_1+X_2$$

因为$X=BX+(X-BX)$，下判断$BX\in V_1,(X-BX)\in V_2$

$$\begin{gathered}\because A(BX)=(AB)X=0\\ \therefore BX\in V_1\\ \because B(X-BX)=BX-B^2X=BX-BX=0\\ \therefore (X-BX)\in V_2\end{gathered}$$

所以$\mathbb{F}^n\subseteq V_1+V_2$，综上所述$\mathbb{F}^n=V_1+V_2$

（2）将V_1,V_2看做是齐次线性方程组的解空间，则有

$$\begin{gathered}\dim(V_1)=n-r(A)\\ \dim(V_2)=n-r(B)\end{gathered}$$

要证明$\mathbb{F}^n=V_1\oplus V_2$实际上就是要证$\mathbb{F}^n=V_1+V_2$且$V_1+V_2$是直和，第一问已经证明$\mathbb{F}^n=V_1+V_2$，所以问题就转为证明

$$V_1+V_2\text{是直和}\Leftrightarrow r(A)+r(B)=n$$

因为

$$\begin{aligned}V_1+V_2\text{是直和}&\Leftrightarrow\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)\\ &\Leftrightarrow\dim(\mathbb{F})=\dim(V_1)+\dim(V_2)\\ &\Leftrightarrow n=(n-r(A))+(n-r(B))\\ &\Leftrightarrow r(A)+r(B)=n\end{aligned}$$

证毕

线性变换

在$\mathbb{F}^{2\times 2}$中定义线性变换$\mathscr{A}(X)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}X,\forall X\in\mathbb{F}^{2\times 2}$，分别求$\mathscr{A}$在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$与基$E_{11},E_{21},E_{12},E_{22}$下的矩阵

解:

> 对于基为矩阵的形式，可以将所有的矩阵转为列向量进行处理

根据定义有

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{A}(E_{11}),\mathscr{A}(E_{12}),\mathscr{A}(E_{21}),\mathscr{A}(E_{22})) = (E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})A \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \\
&\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{A}(E_{11}),\mathscr{A}(E_{21}),\mathscr{A}(E_{12}),\mathscr{A}(E_{22})) = (E_{11},E_{21},E_{12},E_{22})B \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B \\
&\Rightarrow B = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

正交矩阵

设A,B都是正交阵，且$|AB|=-1$，证明$|A+B|=0$

证：

> 正交矩阵的性质：$A^T=A^{-1}$

因为$|AB|=-1$，所以$|A|\cdot|B|=-1$，又因为

$$\begin{aligned}
A+B &= A(E+A^{-1}B) \\
&= A(E+A^TB) \\
&= A(B^T+A^T)B \\
&= A(A+B)^TB
\end{aligned}$$

则有$|A+B|=|A|\cdot|(A+B)^T|\cdot|B|=-|A+B|$，故$|A+B|=0$

Jordan标准形（排除法）

试求矩阵的Jordan标准形

(1) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(2) $B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{bmatrix}$

解：

> 关于Jordan标准形的两种求法，请看本文最后附录

(1) 容易求得$|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$，所以$A$的Jordan标准形矩阵只可能是以下三种情况

$$L=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$
$$M=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$
$$N=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

因为A与Jordan标准形J相似，则$rank(A-(-1)E)=rank(J-(-1)E)$，因为$rank(A-(-1)E)=1$，且

$$rank(L-(-1)E)=0$$
$$rank(M-(-1)E)=1$$
$$rank(N-(-1)E)=2$$

所以A的Jordan标准形为$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

（2）容易求得$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda+1)^2$，所以$B$的Jordan标准形矩阵只可能是以下两种情况

$$L=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$
$$M=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

因为B与Jordan标准形J相似，则$rank(B-(-1)E)=rank(J-(-1)E)$，因为$rank(B-(-1)E)=2$，且

$$rank(L-(-1)E)=1$$
$$rank(M-(-1)E)=2$$

所以B的Jordan标准形为$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

Jordan标准形（推论）

将矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{bmatrix}$$

化为Jordan标准形

解： 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2&-6&15\\-1&\lambda-1&5\\-1&-2&\lambda+6\end{bmatrix}=(\lambda+1)^3$$

所以它只有一个特征值$\lambda_1=-1$，代数重数为3

对$\lambda=-1$，令

$$B=A-\lambda_1 E=A+E=\begin{bmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\1&2&-5\end{bmatrix}\qquad rank(B)=1$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad rank(B^2)=0$$

则以λ_1为特征值且阶为1的Jordan块的个数为

$$w_1(A,\lambda_1)-w_2(A,\lambda_1)=[n-r_1(A,\lambda_1)]-[r_1(A,\lambda_1)-r_2(A,\lambda_1)]=[3-1]-[1-0]=1$$

同理，以λ_1为特征值且阶为2的Jordan块的个数为

$$w_2(A,\lambda_1)-w_3(A,\lambda_1)=[r_1(A,\lambda_1)-r_2(A,\lambda_1)]-[r_2(A,\lambda_1)-r_3(A,\lambda_1)]=[1-0]-[0-0]=1$$

上面两个Jordan块阶数之和为3，等于λ_1的代数重数，因而不存在以λ_1为特征值的其它Jordan块，且矩阵A没有其它特征值，故Jordan块求解完毕，矩阵A的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

Jordan标准形（推论）

将矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&-4&0&2\\4&-5&-2&4\\0&0&3&-2\\0&0&2&-1\end{bmatrix}$$

化为Jordan标准形

解： 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-3&4&0&-2\\-4&\lambda+5&2&-4\\0&0&\lambda-3&2\\0&0&-2&\lambda+1\end{bmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$$

所以它有两个特征值$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，代数重数都为2

对$\lambda_1=-1$，令

$$B_1 = A - \lambda_1 E = A + E = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad rank(B_1) = 3$$

$$B_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} \qquad rank(B_1^2) = 2$$

$$B_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 32 & -24 \\ 0 & 0 & 24 & -16 \\ 0 & 0 & 32 & -24 \\ 0 & 0 & 24 & -16 \end{bmatrix} \qquad rank(B_1^3) = 2$$

则以λ_1为特征值且阶为1的Jordan块的个数为

$$w_1(A,\lambda_1) - w_2(A,\lambda_1) = [n - r_1(A,\lambda_1)] - [r_1(A,\lambda_1) - r_2(A,\lambda_1)] = [4-3] - [3-2] = 0$$

以λ_1为特征值且阶为2的Jordan块的个数为

$$w_2(A,\lambda_1) - w_3(A,\lambda_1) = [r_1(A,\lambda_1) - r_2(A,\lambda_1)] - [r_2(A,\lambda_1) - r_3(A,\lambda_1)] = [3-2] - [2-2] = 1$$

上面第二个Jordan块阶数为2，等于λ_1的代数重数，所以以λ_1为特征值的Jordan块求解完毕

对$\lambda_2 = 1$，令

$$B_2 = A - \lambda_2 E = A - E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad rank(B_2) = 3$$

$$B_2^2 = \begin{bmatrix} -12 & 16 & 12 & -16 \\ -16 & 20 & 16 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rank(B_2^2) = 2$$

$$B_2^3 = \begin{bmatrix} 40 & -48 & -40 & 48 \\ 48 & -56 & -48 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rank(B_2^3) = 2$$

则以λ_2为特征值且阶为1的Jordan块的个数为

$$w_1(A,\lambda_2) - w_2(A,\lambda_2) = [n - r_1(A,\lambda_2)] - [r_1(A,\lambda_2) - r_2(A,\lambda_2)] = [4-3] - [3-2] = 0$$

以λ_2为特征值且阶为2的Jordan块的个数为

$$w_2(A,\lambda_2) - w_3(A,\lambda_2) = [r_1(A,\lambda_2) - r_2(A,\lambda_2)] - [r_2(A,\lambda_2) - r_3(A,\lambda_2)] = [3-2] - [2-2] = 1$$

上面第二个 Jordan 块阶数为 2，等于λ_2的重数，所以以λ_2为特征值的 Jordan 块求解完毕

以$\lambda_1 = -1$和$\lambda_2 = 1$为特征值的Jordan块均是2阶的，所以矩阵A的Jordan标准形为

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A^n

已知$A=\begin{bmatrix}17&0&-25\\0&1&0\\9&0&-13\end{bmatrix}$，求$A^{10}$

解： 矩阵A做不了相似对角化，但一定可以化为Jordan标准形（这里省略求Jordan标准形的步骤）

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

设$P=(X_1,X_2,X_3)$，由$AP=PJ$得

$$\begin{aligned}&(AX_1,AX_2,AX_3)=(X_1,2X_2,X_2+2X_3)\\&\Rightarrow\begin{cases}(E-A)X_1=0\\(2E-A)X_2=0\\(2E-A)X_3=-X_2\end{cases}\end{aligned}$$

解得

$$X_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},X_2=\begin{bmatrix}5\\0\\3\end{bmatrix},X_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以$P=\begin{bmatrix}0&5&2\\1&0&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned}A^{10}&=\left(TJT^{-1}\right)^{10}\\&=TJ^{10}T^{-1}\\&=\begin{bmatrix}0&5&2\\1&0&0\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}^{10}\begin{bmatrix}0&5&2\\1&0&0\\0&3&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&5&2\\1&0&0\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^{10}&10\cdot2^9\\0&0&2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&2\\3&0&-5\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}76\cdot2^{10}&0&-125\cdot2^{10}\\0&1&0\\45\cdot2^{10}&0&-74\cdot2^{10}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

矩阵广义逆

设$A\in\mathbb{C}^{s\times n},r(A)=1$，试证：$A^+=(tr(A^HA))^{-1}A^H$

证： 对A进行满秩分解得$A=B_{s\times1}C_{1\times n}$，因为

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

又因为CC^H和B^HB都是数，所以

$$\begin{aligned}A^+&=\frac{1}{(B^HB)(CC^H)}\cdot C^HB^H\\&=\frac{1}{(B^HB)(CC^H)}(BC)^H\\&=\frac{1}{(B^HB)(CC^H)}A^H\end{aligned}$$

因为

$$
\begin{aligned}
A^HA &= (BC)^H(BC) \\
&= C^HB^HBC \\
&= (B^HB)(C^HC) \quad (\text{因为}B^HB\text{是一个数})
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
tr(A^HA) &= B^HB\cdot tr(C^HC) \\
&= B^HB\cdot tr(CC^H) \\
&= B^HB\cdot CC^H
\end{aligned}
$$

证毕

矩阵广义逆

用适当的方式求下列矩阵的广义逆

（1）$A=\begin{bmatrix} 0 & c \\ a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$，其中复数$a,b,c$满足$c\neq 0,|a|^2+|b|^2\neq 0$

（2）$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

解：

（1）实际上有分块广义逆的性质：$B=\begin{bmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow B^+=\begin{bmatrix} 0 & N^+ \\ M^+ & 0 \end{bmatrix}$，于是将$A$进行分块得

$$
A^+=\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^+ \\ \hline \frac{1}{c} & 0 \end{array}\right]
$$

对$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^+$进行满秩分解得$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=B_{2\times 1}C_{1\times 1}$，不妨令$B=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},C=1$，则

$$
\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^+=(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\cdot[\bar{a},\bar{b}]
$$

所以

$$
A^+=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{\bar{b}}{|a|^2+|b|^2} \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

（2）对A做初等行变换得$A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，所以满秩分解$A=BC$，其中

$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，由$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$得

$$
A=\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}
$$

附

Jordan标准形的两种求法

排除法（适用于低阶矩阵）

1. 通过矩阵A的特征多项式$|\lambda E-A|$求得特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$
2. 根据特征值列出所有可能的Jordan标准形矩阵J
3. 由于矩阵A与Jordan标准形J相似，所以可通过$rank(A-\lambda_i E)=rank(J-\lambda_i E)$进行排除，筛选出最终的Jordan标准形

Jordan标准形定理的推论

首先定义

$$r_k(A,\lambda)=\operatorname{rank}(A-\lambda E)^k,\quad r_0(A,\lambda)=n$$

又定义

$$w_k(A,\lambda)=r_{k-1}(A,\lambda)-r_k(A,\lambda),\quad w_1(A,\lambda)=n-r_1(A,\lambda)$$

将矩阵化为Jordan标准形需要三步：

1. 求出矩阵A所有**不同**的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_t$
2. Jordan标准形定理的推论告诉我们：$w_k(A,\lambda)-w_{k+1}(A,\lambda)=m$表示以$\lambda$为特征值且阶为$k$的Jordan块有$m$个。利用这个公式计算出以$\lambda$为特征值，阶为$l=1,2,...$的个数，直到以$\lambda$为特征值的Jordan块阶数之和等于特征值$\lambda$的代数重数
3. 将所获得的Jordan块按任意次序排列成Jordan矩阵

A^n求法

设矩阵A的Jordan标准形为J，且$P=(X_1,X_2,X_3)$，由$AP=PJ$求出P，于是$A^n=(PJP^{-1})^n=PJ^nP^{-1}$，其中

$$J^n=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m^n \end{bmatrix}$$

显然当其中某一个Jordan块J_i阶数k较大时，求幂次略显复杂

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} & \cdots & C_n^{k-1}\lambda^{n-(k-1)} \\ & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \cdots & C_n^{k-2}\lambda^{n-(k-2)} \\ & & \lambda^n & \cdots & C_n^{k-3}\lambda^{n-(k-3)} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

其中

$$C_n^m=\begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & 0\le m\le n \\ 0, & others \end{cases}$$