《最优化方法》第二章习题

一、填空题

1. 线性规划 $\begin{aligned}&\max 2x_1+x_2\\ &s.t. -x_1+2x_2\ge 1\\ &\quad x_1+3x_2=5\\ &\quad x_1\ge 0\end{aligned}$ 的对偶规划为 $\begin{aligned}&\min\ y_1+5y_2\\ &s.t.\quad -y_1+y_2\ge 2\\ &\qquad 2y_1+3y_2=1\\ &\qquad y_1\le 0\end{aligned}$

2. 在三维空间 R^3 中，集合 $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$ 的极点构成的集合为 $\left\{(x,y,0\,|\,x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0\right\}\cup\{(0,0,0)\}$

3．集合 $\left\{(x,y)\,|\,x^2+2y^2\le 4, x\ge 1, y\ge 1\right\}$ 的极点构成的集合为 $\left\{(x,y)\,|\,x^2+2y^2=4, x\ge 1, y\ge 1\right\}$

4. 在二维空间 R^2 中，集合 $\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, y\ge x\right\}$ 的极点构成的集合为 $\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1, y\ge x\right\}$

5. 线性规划 $\begin{aligned}&\min 3x_1-2x_2\\ &s.t.\ x_1+x_2\le 10\\ &\quad 5x_1+4x_2\ge 11\\ &\quad x_2\ge 0\end{aligned}$ 的可行域共有__3__个不同的极点。

6. 若 $f(x)=3x_1^2+x_2^2+ax_1x_2$ 为严格凸函数，则 a 取值范围是 $|a|<2\sqrt{3}$

二、证明题

1. $f(x)$ 为凸集 $D\subset R^n$ 上的函数，上图 $epi(f)=\{(x,y)\,|\,x\in D, y\in R, y\ge f(x)\}$，证明 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $epi(f)$ 为凸集。

证明：充分性：对于任意的 $x_1,x_2\in D,\alpha\in[0,1]$，由 $epi(f)$ 的定义，

$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))\in epi(f)$，而 $epi(f)$ 为凸集，得

$\alpha(x_1,f(x_1))+(1-\alpha)(x_2,f(x_2))\in epi(f)$，即

$(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2))\in epi(f)$，

因此$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\ge f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$，从而$f(x)$为凸函数。

必要性：对于任意的$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in epi(f),\alpha\in[0,1]$，有

$y_1\ge f(x_1),y_2\ge f(x_2)$

由于$f(x)$为凸函数，有

$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\le\alpha y_1+(1-\alpha)y_2$，

所以$(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\in epi(f)$，即

$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\in epi(f)$，

$epi(f)$为凸集。

注：典型错误：在充分性的证明中，一开始就取$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))\in epi(f)$，凸函数的定义不全，

必要性证明中，一开始就取$x_1,x_2\in D,\alpha\in[0,1]$，

2．考虑规划问题：$\begin{array}{ll}\min & f(x)\\ s.t. & c_i(x)\le 0\end{array}$，其中，$f(x),c_i(x)(i=1,2,\cdots,m):R^n\to R$是凸函数，证明：（1）该问题的可行域是凸集；（2）该问题的最优解的集合A是凸集。

证：考虑规划问题：$\begin{array}{ll}\min & f(x)\\ s.t. & c_i(x)\le 0\end{array}$，其中，$f(x),c_i(x)(i=1,2,\cdots,m):R^n\to R$是凸函数，证明：（1）该问题的可行域是凸集；（2）该问题的最优解的集合A是凸集。

证明：（1）设$D_i=\{x\,|\,c_i(x)\le 0\}$，可行域$D=\bigcap_{i=1}^{m}D_i$。

对于任意$x_1,x_2\in D_i=\{x\,|\,c_i(x)\le 0\}$，任意$\alpha\in[0,1]$，有

$c_i(x_1)\le 0,c_i(x_2)\le 0$，根据$c_i(x)$是凸函数

$c_i(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha c_i(x_1)+(1-\alpha)c_i(x_2)\le 0$，

因此$\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{D}_i$。

凸集的交集是凸集，因此$\boldsymbol{D} = \bigcap_{i=1}^{m} \boldsymbol{D}_i$为凸集。

（2）设$\boldsymbol{A}$为最优解的集合，若 A 不是空集，任取$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{A}, \alpha \in [0,1]$，

有$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{D}$。由于$\boldsymbol{D}$是凸集，$\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{D}$。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是凸函数，

$\boldsymbol{f}(\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2) \le \alpha \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$都是最优解，因此$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$为最优函数值。得

$\boldsymbol{f}(\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2) \le \alpha \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$

$\boldsymbol{f}(\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$，因此$\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2$也是最优解，从而 A 为凸集

3. 设z^*, s^*分别为下列两个问题$(I)\begin{array}{ll} & \min c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{array}$ $(II)\begin{array}{ll} & \min c^T x \\ s.t. & Ax = b + d \\ & x \ge 0 \end{array}$的最优值。$y^*$是(I)的对偶问题的最优解，证明$z^* + y^{*T} d \le s^*$ 。

证明:(I)与(II)的对偶规划分别为

$$(DI)\begin{array}{ll} & \max b^T y \\ s.t. & A^T y \le c \end{array} \qquad (DII)\begin{array}{ll} & \max (b+d)^T y \\ s.t. & A^T y \le c \end{array}$$

(I)的最优值与(DI)的最优值相同，得：$z^* = b^T y^*$

y^*是对偶规划(DI)的最优解，从而是(DII)的可行解。

y^*在(DII)的目标函数值不大于最优值，$(b+d)^T y^* \le s^*$

因此，$z^* + y^{*T} d \le s^*$

4 设$\bar{x}, \bar{y}$分别为下列两个问题

$$(I)\begin{array}{ll} & \min c^T x \\ s.t. & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad (II)\begin{array}{ll} & \max y^T b \\ s.t. & y^T A \le c^T \\ & y \ge 0 \end{array}$$

的可行解。证明 $c^T\bar{x}\geq\bar{y}^Tb$ 。

证明：若 $\bar{x},\bar{y}$ 分别是(LP)与(DP)的可行解,则

$$A\bar{x}=b,\bar{x}\geq 0,\bar{y}^TA\leq c^T,\bar{y}\geq 0$$

于是 $\bar{y}^Tb\leq\bar{y}^T(A\bar{x})=(\bar{y}^TA)\bar{x}\leq c^T\bar{x}$

三、　计算题

1、（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned}&\min -4x_1-3x_2\\ &s.t.\ 2x_1+3x_2\leq 14\\ &\quad 3x_1+x_2\leq 16\\ &\quad x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量 x_1 写出对应的割平面方程。

或（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对对变量 x_2 写出分枝后的线性规划。

解：（1）问题化为标准型：

$$\begin{aligned}&\min -4x_1-3x_2\\ &s.t.\ 2x_1+3x_2+x_3=14\\ &\quad 3x_1+x_2\quad +x_4=16\\ &\quad x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\end{aligned}$$

p_3,p_4 为初始可行基，$(0,0,4,3)^T$ 为初始基可行解，相应的单纯形表如下

c_j			-4	-3	0	0	θ_j
cB	B	b	p1	p2	p3	p4	
0	p3	14	2	3	1	0	7

0	p4	16	(3)	1	0	1	16/3
σ*j*			-4	-3	0	0	
0	p3	10/3	0	(7/3)	1	-2/3	10/7
-4	p1	16/3	1	1/3	0	1/3	16
σ*j*			0	-5/3	0	4/3	
-3	p2	10/7	0	1	3/7	-2/7	
-4	p1	34/7	1	0	-1/7	3/7	
σ*j*			0	0	5/7	6/7	

判别数均非负，所以得到最优解为$(\frac{34}{7},\frac{10}{7})^T$，最有函数值 $f^*=-\frac{166}{7}$。

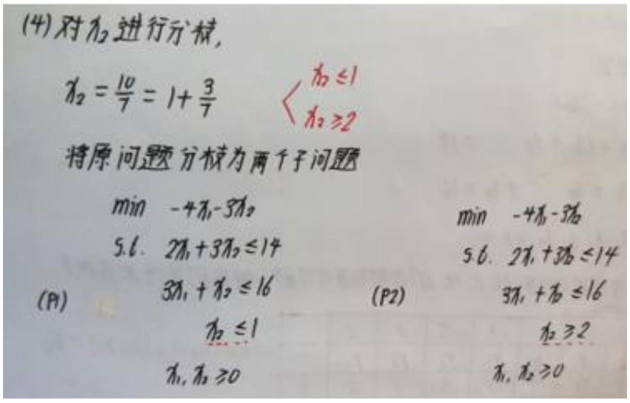
（2）影子价格向量为$(c_B^T B^{-1})^T=\left((-4,-3)\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{pmatrix}\right)^T=(-\frac{5}{7},-\frac{6}{7})^T$

（3）（5 分）由单纯形表可以得到

$x_1-\frac{1}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4=\frac{34}{7}$，

即 $x_1-x_3-4=\frac{6}{7}-\frac{6}{7}x_3-\frac{3}{7}x_4$

割平面方程为$\frac{6}{7}-\frac{6}{7}x_3-\frac{3}{7}x_4\le 0$


(4) 对 x_2 进行分枝，

$x_2=\frac{10}{7}=1+\frac{3}{7}$ $\begin{cases} x_2\le 1\\ x_2\ge 2\end{cases}$

将原问题分枝为两个子问题

(P1)
$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1-3x_2\\ s.t.\ & 2x_1+3x_2\le 14\\ & 3x_1+x_2\le 16\\ & x_2\le 1\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

(P2)
$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1-3x_2\\ s.t.\ & 2x_1+3x_2\le 14\\ & 3x_1+x_2\le 16\\ & x_2\ge 2\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

2、扩展题

二、（18%）（1）以$(5/2, 1/2, 0, 0)^t$为初始基可行解，用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\min\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1+x_2+x_3+\ \ x_4=3 \\ & 2x_1\qquad +2x_3-6x_4=5, \\ & x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0. \end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对变量x_1写出分枝后的线性规划。

二、解：（1）利用消元法，得到以p_1, p_2为基矩阵的规范式为：

$$\min\ 2x_3-x_4+\frac{7}{2}$$

$$s.t.\ x_1+x_3-3x_4=\frac{5}{2}$$

$$x_2+4x_4=\frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4\ge 0$$

（或者：以$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$为基矩阵，在约束方程组的两端同时左乘$B^{-1}$，得到约束方程组为

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}，得到\ \begin{matrix}x_2+4x_4=\dfrac{1}{2}\\ x_1+x_3-3x_4=\dfrac{5}{2}\end{matrix},$$

然后再将目标函数中基变量系数消为0。

约束等式交换两行，不影响后面的计算和结果）

以p_1, p_2为基，$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$为初始基可行解，单纯形表为

c_j			0	0	2	-1	θ_j
cB	B	b	p1	p2	p3	p4	
0	P1	5/2	1	0	1	-3	
0	P2	1/2	0	1	0	(4)	1/8
σ j			0	0	2	-1	
0	P1	23/8	1	3/4	1	0	
-1	P4	1/8	0	1/4	0	1	
σ j			0	1/4	2	0	

原问题最优解为$(\frac{23}{8}, 0, 0, \frac{1}{8})^T$，最优函数值为27/8。

（2）影子价格向量为 $(c_B^T B^{-1})^T = \left((1,4)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T$

$$= \left((1,4)\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}^{-1} \right)^T = (\frac{7}{4}, -\frac{3}{8})^T$$

（3）由单纯形表可以得到

因为 $\frac{23}{8} = 2 + \frac{7}{8}$，所以分枝后的两个线性规划为

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_3 - x_4 + \frac{7}{2} \\ &s.t.\ x_1 + x_3 - 3x_4 = \frac{5}{2} \\ &\quad x_2 + 4x_4 = \frac{1}{2} \\ &x_1 \le 2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} &\min\ 2x_3 - x_4 + \frac{7}{2} \\ &s.t.\ x_1 + x_3 - 3x_4 = \frac{5}{2} \\ &\quad x_2 + 4x_4 = \frac{1}{2} \\ &x_1 \ge 3 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

三、（教材 90 页第（4）小题））求解线性规划

$$\begin{aligned} &\min\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ &s.t.\quad x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \le 15 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \ge 10, \\ &\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, |x_4| \le 2. \end{aligned}$$

三、提示：先处理 $|x_4| \le 2$ 这个约束，最基本的处理方法：考虑两个约束：$x_4 \le 2, x_4 \ge -2$
也可以令 $2 + x_4$（或 $2 - x_4$）为一个新变量再处理。
然后必须用两阶段或者大 M 法来进行求解。
最优解是 $(3,0,0,2)^T$.

四、（教材 92 页第（5）小题）写对偶规划

$$\begin{aligned} &\min\ S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ &s.t.\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,\cdots,m \\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,\cdots,n \\ &\quad x_{ij} \ge 0, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

四、提示：把 mn 个变量对应的矩阵写出来。

对偶规划：
$$\max \sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i$$
$$s.t.\ y_i + z_j \le c_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n)$$

五、若线性规划
$$\begin{aligned} &\min x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &s.t. 3x_1 + 4x_2 \quad\quad = 5 \\ &\quad\ \ x_1 \quad\quad + 2x_3 = u \\ &\quad\ \ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$
的最优解为 $(a,b,c)^T$，其对偶规划的最优解为 $(1/6, 1/2)^T$. a,b,c,u 四个常数中，你可以确定哪些？如果有不能确定的常数，确定其范围。

解：$x^* = (a,b,c)^T, y^* = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})^T$，

$$A^T y^* - \overline{c} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

（注：字母 c 在题目中已用，我们将价格向量用 $\overline{c}$ 表示）

由互补松弛性定理，$(A^T y^* - \overline{c})^T x^* = 0$，得 $-\frac{4}{3} b = 0$，$b = 0$.

$x^* = (a,b,c)^T$ 可行，由第一个等式约束得 $3a + 4b = 5$，$a = \frac{5}{3}$.

c 的范围是 $c \ge 0$，由第二个约束等式，$\frac{5}{3} + 4c = u$，$u \ge \frac{5}{3}$.