

工程矩阵理论：矩阵的相似标准形

东南大学·数学系·周建华

August 15, 2015

本章的目的

- 对给定的矩阵，找一最简单的矩阵与之相似。
- 对给定的线性空间上的线性变换，确定线性空间有一组基，使得线性变换的矩阵最简单。

矩阵的特征值与特征向量

假设 A 是 n 阶方阵, λ_0 是数, 若存在 n 维列向量 η , 使得

$$\eta \neq \theta, \text{ 且 } A\eta = \lambda_0\eta,$$

则称 λ_0 是 A 的特征值, η 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

Theorem

假设 A 是 n 阶方阵, 则 A 相似于对角阵的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量特征向量。

线性变换的特征值与特征向量

Definition

设 f 是线性空间 V 上的线性变换, 假设 $\lambda_0 \in F$, 若存在 $\eta \in V$ 使得

$$\theta \neq \eta \in V, \text{ 且 } f(\eta) = \lambda_0 \eta,$$

则称 λ_0 是线性变换 f 的特征值, η 是相应于 λ_0 的特征向量。

线性变换的可对角化问题

Theorem

设 V 是 n 维线性空间, f 是线性空间 V 上的线性变换, 则存在 V 的基使得 f 的矩阵是对角阵当且仅当 f 有 n 个线性无关的特征向量。

Example

设 $f \in \text{Hom}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ 定义为:

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad f(X) = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ 2z \end{pmatrix},$$

求 f 的特征值、特征向量。

线性变换的特征值、特征向量的计算

设 f 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵是 A ,

若 $\lambda_0 \in F$, $\eta \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标是 x_0 , 则 $f(\eta)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标是 Ax_0 , 故

$$f(\eta) = \lambda_0 \eta \Leftrightarrow Ax_0 = \lambda_0 x_0$$

即: η 是 f 的属于特征值 λ_0 的特征向量当且仅当 x_0 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

Example

设 $f \in \text{Hom}(C^{2 \times 2}, C^{2 \times 2})$ 定义为:

$$\forall X \in C^{2 \times 2}, f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X.$$

求 f 的特征值、特征向量。

Theorem

若 $A, B \in C^{n \times n}$ 是相似的, 则 $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$.

注记:

- ① 定理的逆命题不成立。
- ② 可定义线性变换的特征多项式。

特征多项式的计算

Definition

假设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, 则 A 的第 i_1, i_2, \cdots, i_k 行, 第 i_1, i_2, \cdots, i_k 列交叉处的元素构成的 k 阶子式称为 A 的 k 阶主子式。

Example

矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

的3阶子式 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix},$

3阶主子式 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$

Cauchy-Binet公式

Theorem

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| \\ = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \cdots (-1)^k b_k \lambda^{n-k} + \\ \cdots + (-1)^{n-1} b_{n-1} \lambda + (-1)^n b_n, \end{aligned}$$

其中, b_j 为 A 的所有 j 阶主子式之和), 特别地,

$$b_1 = - \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad b_n = (-1)^n |A|.$$

矩阵的迹

Definition

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 称 $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 为 A 的迹, 记为 $tr(A)$.

① 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

② 若 A, B 相似, 则 $tr(A) = tr(B), |A| = |B|$.

Example

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $A = \alpha\beta^H$. 求 A 的特征值。

化零多项式

Lemma

设 $f(x)$ 是多项式, 若 $f(A) = 0$, 则 A 的特征值均是 $f(x) = 0$ 的根.

Example

已知 $A^2 = A$, 证明: A 的特征值只能是0 或1.

Hamilton-Cayley定理

Lemma

*Schur*引理: 对 $\forall A \in C^{n \times n}$, 存在酉矩阵 U 使得 $U^H A U$ 是上三角矩阵。

Theorem

设 $A \in F^{n \times n}$, $C(\lambda) = |\lambda I - A|$, 则 $C(A) = O$ 。

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$, $C(\lambda)$ 是 f 的特征多项式, 则 $C(f) = O$ 。

Example

设 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} 。

$$C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Example

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} 。 $C(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$

矩阵的最小多项式

Definition

矩阵 A 的次数最低的、最高次项系数为一的化零多项式称为 A 的最小多项式.

性质:

- ① 若 $m(x), \varphi(x)$ 分别是矩阵 A 的最小多项式、化零多项式, 则 $m(x) | \varphi(x)$.
- ② 任意矩阵的最小多项式是唯一的.
- ③ 如果矩阵 A, B 相似, 则 A, B 有相同的最小多项式.

线性变换的最小多项式

Definition

设线性变换 $f \in V$ 在 V 的一组基下的矩阵为 A , A 的最小多项式称为 f 的最小多项式.

等价定义:

Definition

线性变换 f 的次数最低的、最高次项系数为一的化零多项式称为 f 的最小多项式.

Theorem

设 $m(x), C(x)$ 分别是矩阵 A 的最小多项式和特征多项式, 则 $m(x)|C(x)$, 并且, 对 $\lambda_0 \in C, m(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow C(\lambda_0) = 0$ 。

Example

求下列矩阵的最小多项

式: $\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 0 \\ & & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$

Example

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $A = \alpha\beta^H$, 求 A 的最小多项式。

Example

$f \in \text{Hom}(C^{2 \times 2}, C^{2 \times 2})$, 定义

为: $\forall X \in C^{2 \times 2}$, $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$, 求 f 的最小多项式。

可对角化的条件

目的：对给定的矩阵，判断其是否相似于对角阵；
对给定的线性空间上的线性变换，判断是否存在空间的一组基，
使得其矩阵是对角阵.

Theorem

- ① $n \times n$ 矩阵 A 相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- ② 矩阵的属于不同特征值的特征向量线性无关.
- ③ 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是矩阵 A 的互不相同的特征值,
 $\eta_{1i}, \eta_{2i}, \dots, \eta_{t_i i}$ 是 A 相应于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量, 则

$$\eta_{11}, \eta_{21}, \dots, \eta_{t_1 1}, \eta_{12}, \eta_{22}, \dots, \eta_{t_2 2}, \dots, \eta_{1s}, \eta_{2s}, \dots, \eta_{t_s s}$$

线性无关.

线性变换的可对角化问题

Theorem

假设 V 是 n 维线性空间, $f \in \text{Hom}(V, V)$. 则,

- ① f 可对角化当且仅当 f 有 n 个线性无关的特征向量.
- ② f 的属于不同特征值的特征向量线性无关.
- ③ 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是矩阵 A 的互不相同的特征值,
 $\eta_{1i}, \eta_{2i}, \dots, \eta_{t_i i}$ 是 f 相应于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量, 则

$$\eta_{11}, \eta_{21}, \dots, \eta_{t_1 1}, \eta_{12}, \eta_{22}, \dots, \eta_{t_2 2}, \dots, \eta_{1s}, \eta_{2s}, \dots, \eta_{t_s s}$$

线性无关.

特征子空间

Definition

设 $f \in \text{Hom}(V, V)$, λ_0 是 f 的特征值, 称

$$V_{\lambda_0} = \{\eta \in V | f(\eta) = \lambda_0 \eta\}$$

为 f 的相应于特征值 λ_0 的特征子空间.

显然有:

相应于特征值 λ_0 , f 刚好有 $\dim V_{\lambda_0}$ 个线性无关的特征向量.

Theorem

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 为 f 的相异特征值, 则 $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_s}$ 是直和.

Theorem

假设 $\dim V = n$, $f \in \text{Hom}(V, V)$ 的特征多项式为

$$C(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{c_1} (\lambda - \lambda_2)^{c_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{c_s}$$

则存在 V 的基使得 f 的矩阵是对角阵的充分必要条件是

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} = n.$$

Example

$f \in \text{Hom}(C^{2 \times 2}, C^{2 \times 2})$ 定义

为 $\forall X \in C^{2 \times 2}, f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$, 求 f 的特征值及相应的特征子空间的基.

几何重数

Theorem

设 $f \in \text{Hom}(V, V)$ 的特征多项式
是 $C(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{c_i}$, 则 $\dim V_{\lambda_i} \leq c_i$.

Theorem

设 $f \in \text{Hom}(V, V)$ 的特征多项式是 $C(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{c_i}$, 则下述条件是等价的:

- ① f 是可对角化的;
- ② $\forall i, \quad \dim V_{\lambda_i} = c_i$;
- ③ $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$

Example

$f \in \text{Hom}(C^{2 \times 2}, C^{2 \times 2})$ 定义为: $\forall X \in C^{2 \times 2}, f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$

- ① 求 f 在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵;
- ② 求 f 的特征值及相应的特征子空间的基;
- ③ 问: 是否存在 $C^{2 \times 2}$ 的基, 使得 f 的矩阵为对角阵? 为什么?

最小多项式与可对角化

Lemma

若 n 阶矩阵 M_i 满足 $M_1 M_2 \cdots M_s = O$, 则 $\sum_{i=1}^s r(M_i) \leq (s-1)n$.

Theorem

$n \times n$ 矩阵 A 相似于对角阵当且仅当 A 的最小多项式无重根.

Example

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 则 A 相似于对角阵.

Example

已知 $A \in C^{n \times n}$ 满足 $A^2 = 3A + 10I$, 并且, $r(A - 5I) = r$. 求行列式 $|A + 3I|$.

如果给定的矩阵不与任何对角阵相似，如何找一最简单的矩阵与之相似？

等价的问题：

若线性空间上给定的线性变换不可对角化，确定线性空间有一组基，能使线性变换的矩阵最简单？

Jordan形矩阵

Definition

① 形如 $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$ 的矩阵称为Jordan块

② 形如 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ (其中, J_i 均是Jordan块) 的矩阵称为Jordan形矩阵.

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition

若 J 是若当形矩阵，且矩阵 A 与 J 相似，则称 J 是 A 的若当标准形.

若当标准形的唯一性

若 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ 是矩阵 A 的 *Jordan* 标准形,

$$K = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & \\ & J_{i_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{i_s} \end{pmatrix},$$

其中, $J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_s}$ 是 J_1, J_2, \dots, J_s 的一个排列, 则 K 也是 A 的 *Jordan* 标准形.

下面的定理表明：在承认存在性的前提下，除了相差Jordan块的次序外，每个矩阵的Jordan标准形是唯一的。

Theorem

（假设矩阵的Jordan标准形是存在的）设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的特征值，则对任意一正整数 k . A 的Jordan 标准形中主对角元为 λ_0 且阶数为 k 的Jordan 块的块数等于

$$r(B^{k-1}) - 2r(B^k) + r(B^{k+1})$$

其中， $B = A - \lambda_0 I$.

唯一性的证明思路:

- ① 若 A 与 J 相似, λ_0 是数, 则对一切正整数 k , $r(A - \lambda_0 I)^k = r(J - \lambda_0 I)^k$;

- ② 若 $n \times n$ 矩阵 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$,

$$\text{则 } r(N^{k-1}) - r(N^k) = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

- ③ 若 J 是Jordan矩阵, 则 $r(J - \lambda_0 I)^{k-1} - r(J - \lambda_0 I)^k$ 等于 J 中阶数 $\geq k$ 的, 以 λ_0 为主对角元的Jordan块的块数.

Example

已知矩阵 A 的特征多项式是 $C(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^4$,
且 $r(A - 2I) = 4$,求 A 的Jordan标准形.

Example

已知矩阵 A 的特征多项式是 $C(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^4$,
且 $r(A - 2I) = 4, r(A - 2I)^2 = 3$,求 A 的Jordan标准形.

Example

求下列矩阵的Jordan标准形：

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}, C_A(x) = (x+3)(x-1)^2.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, C_B(x) = (x-1)^3.$$

Jordan标准形与最小多项式

Theorem

若 $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 则矩阵 M, A, B 的最小多项式间有关系: $m_M(\lambda) = [m_A(\lambda), m_B(\lambda)]$.

Theorem

假设矩阵 A 的最小多项式是 $m(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$,
则 r_i 即是 A 的 *Jordan* 标准形中以 λ_i 为主对角元的 *Jordan* 块的最高阶数. 特别地, A 相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 的最小多项式无重根.

Example

已知 A 的特征多项式和最小多项式分别是 $C(x) = (x-1)^2(x-2)^5$, $m(x) = (x-1)(x-2)^2$, 求 A 的可能的Jordan形.

Example

已知 A 的特征多项式和最小多项式均是 $C(x) = m(x) = x^4$, 求 A 及 A^2 的Jordan标准形.

Example

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $A = \alpha\beta^H$. 求 A 的Jordan标准形.

Example

已知 $\text{tr}(A) = r(A) = 1$, 证明: $A^2 = A$.

Example

求相似变换矩阵 P , 将下列矩阵变成其Jordan标准

形: $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix},$

$$C_A(x) = (x+3)(x-1)^2$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C_B(x) = (x-1)^3.$$

若当标准形的存在性

存在性的证明思路:

假设 V 是复数域上 n 维线性空间, $f \in \text{Hom}(V, V)$ 的特征多项式为 $C(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{c_i}$, 记 $V_i = K(f - \lambda_i I)^{c_i}$. 可以证明:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

于是, 取适当的基, 可以使 f 的矩阵为分块对角阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

并且, A_i 只有一个特征值.

因此，只需处理只有一个特征值的线性变换.

设 $f \in \text{Hom}(V, V)$ 只有一个特征值，比如，全为 a ，

令 $g = f - aI$ ，则 g 的特征值全为零，并且，在 V 的一组基

下， f 的矩阵是 Jordan 形矩阵当且仅当 g 的矩阵是 Jordan 形矩阵.

问题转化为：只需讨论特征值全为零的线性变换.

设 $g \in \text{Hom}(W, W)$ 的特征值全为0. 需证明: W 可以分解成关于 g 的不变子空间的直和:

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

并且, 对其中的直和项, 比如 W_0 , 存在基, 使得 $g|_{W_0}$ 在这组基下的矩阵可以写成形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} "$$

这等价于说, W_0 有一组基

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$$

使得 $g(\xi_1) = \theta, g(\xi_2) = \xi_1, g(\xi_3) = \xi_2, \dots, g(\xi_t) = \xi_{t-1}$ 特别地, $W_i = L(g^{t-1}(\xi_t), g^{t-2}(\xi_t), \dots, g(\xi_t), \xi_t)$

Theorem

假设 $g \in \text{Hom}(W, W)$ 是幂零线性变换, $\alpha \in W$.

则 $W_0 = L(g^{t-1}(\alpha), g^{t-2}(\alpha), \dots, g(\alpha), \alpha)$ 是关于 g 的不变子空间当且仅当 $g^t(\alpha) = \theta$. 称形如 W_0 的不变子空间为循环不变子空间.

Theorem

假设 $g \in \text{Hom}(W, W)$ 是幂零线性变换, 则 W 可以分解成循环不变子空间的直和.

盖尔圆

Definition

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$. 称 A 的特征值的集合为 A 的谱.

称 A 的特征值的模的最大值为 A 的谱半径, 记为 $\rho(A)$.
记

$$R_i = |a_{i1}| + \cdots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \cdots + |a_{in}|,$$

$$C_i = \{z \mid |z - a_{ii}| \leq R_i\},$$

称之为 A 的第 i 个盖尔圆;

称 $G = \bigcup_{i=1}^n C_i$ 为 A 的盖尔圆系.

特征值的估计

Theorem

矩阵 A 的特征值必定在 A 的盖尔圆系中.

注意: 并不是每个盖尔圆上都有特征值, 但是在盖尔圆之外没有特征值.

Example

设 $A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ C_1 中有两个特征值, 但 C_2 中没有特征值.

Definition

设 $A \in C^{n \times n}$, 在 A 的 n 个盖尔圆中, 有 k 个圆构成一连通区域, 但与其余 $n - k$ 个圆不相交, 则称这个连通区域为 k -区.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem

A 的盖尔圆的 k -区中有且仅有 A 的 k 个特征值.

Corollary

如果 A 的 n 个盖尔圆互不相交, 则 A 有 n 个互不相等的特征值.

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.11 \\ 0.01 & 0.9 & 0.14 \\ 0.02 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}$

讨论 A 和 A^T 的盖尔圆 k -区.

谱半径的估计

Theorem

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,

$$\rho_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}, \quad \rho_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

则 $\rho(A) \leq \rho_1, \rho_2$.

Example

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.11 \\ 0.01 & 0.9 & 0.14 \\ 0.02 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 证明 } \rho(A) < 6.$$

应用

Corollary

- ① 如果 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的 n 个盖尔圆互不相交, 则 A 一定与对角阵相似.
- ② 如果 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的 n 个盖尔圆互不相交, 则 A 的特征值全是实数.

Definition

假设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若对 $1 \leq i \leq n$

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \cdots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \cdots + |a_{in}|$$

则称 A 是行对角占优的.

如果对 $1 \leq i \leq n$

$$|a_{ii}| > |a_{1i}| + \cdots + |a_{i-1i}| + |a_{i+1i}| + \cdots + |a_{ni}|$$

则称 A 是列对角占优的.

Definition

行对角占优矩阵和列对角占优矩阵统称为对角占优矩阵.

Corollary

假设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是对角占优矩阵, 则

- (1) A 是可逆矩阵;
- (2) $\rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{2|a_{ii}|\}$;
- (3) 若 $a_{ii} > 0$, 则 A 的特征值的实部全都大于零.