第 5 章

矩阵分析

同数学分析一样，矩阵分析理论的建立，也是以极限理论为重要基础的，其内容丰富，是研究数值分析方法和其它数学分支以及许多工程问题的重要工具。本章首先讨论n维线性空间C^n中的向量范数与矩阵空间$C^{m\times n}$中矩阵范数的理论与性质，接着讨论矩阵函数的相关概念、性质、求法；函数矩阵的微分与积分，最后介绍矩阵函数在微分方程组中的应用.

5.1 向量范数及其性质

5.1.1 向量范数

定义5.1 设V是数域P（实数域或复数域）上的线性空间，如果对任意向量x，按照某个对应法则，对应于一个实数 $\|x\|$，且满足下列三个条件：

(1) 正定性 $\|x\|\geq 0$， 且$\|x\|=0$当且仅当$x=0$；

(2) 齐次性 $\|kx\|=|k|\,\|x\|$；

(3) 三角不等式 $\|x+y\|\leq \|x\|+\|y\|$；

则称$\|x\|$为V上向量x的范数，简称为向量范数. 在线性空间V中定义了范数，就称V是线性赋范空间.

向量范数有以下性质

(1) 当 $\|x\|\neq 0, \left\|\frac{1}{\|x\|}\cdot x\right\|=1$　　(2) $\forall x\in V, \|-x\|=\|x\|$

(3) $\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|$　　(4) $\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x+y\|$

仅证明(3)

$\|x\|=\|x-y+y\|\leq\|x-y\|+\|y\|$　　$\Rightarrow \|x\|-\|y\|\leq\|x-y\|$

类似的, $\|y\|-\|x\|\leq\|y-x\|=\|-(x-y)\|=\|x-y\|$

$\Rightarrow \|x\|-\|y\|\geq -\|x-y\|$

因此：$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|$

例5.1 设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^n$，规定

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

则$\|x\|$是C^n上的一个范数. 此范数称为向量x的1-范数，记为$\|x\|_1$，即

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

例5.2 设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^n$，规定

$$\|x\|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

则$\|x\|$是C^n上的一个范数. 此范数称为向量x的∞-范数，记为$\|x\|_\infty$，即

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

例5.3 设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^n$，规定

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

则$\|x\|$是C^n上的一个范数. 此范数称为向量x的2-范数，记为$\|x\|_2$，即

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}=\sqrt{x^H x}$$

例5.4 设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^n$，规定

$$\|x\|=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}},\quad p\ge 1$$

则$\|x\|$是C^n上的一个范数. 此范数称为向量x的p-范数，记为$\|x\|_p$，即

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

证明：当p=1时为向量的1-范数, p>1时, 对$x\neq 0$ 有

(1) $\|x\|_p=\left(|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}>0,$

且$\|x\|$=0当且仅当x=0.

(2) $\|\alpha x\|_p=\|(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)\|_p$

$$=\left(|\alpha x_1|^p+|\alpha x_2|^p+\cdots+|\alpha x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=|\alpha|\left(|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\|x\|_p$$

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

证明：(3) 对$\forall x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in C^n$

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\qquad \|y\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x+y\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\|x+y\|_p\right)^p=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|y_i|$$

应用Hölder不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|\le\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}},\ p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i|\le\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|y_i|\le\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\le\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|y_i|$$

$$\le\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right]^{1-\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right]^{1-\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i|\le\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|y_i|\le\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\quad\Rightarrow\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p},\ (p-1)q=p$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \le \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|y_i|$$

$$\le\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right]^{1-\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right]^{1-\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

即 $\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$.

因此，$\|x\|_p$是C^n上的一个范数.

NJUPT

在C^n中常用的p-范数有三类

p=1时，x的1-范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

p=2时，x的2-范数，也称为即欧氏范数

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

$p\to\infty$时，得到 x 的∞-范数

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

NJUPT

定理5.1 若记 $\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$，则 $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$.

证明： 令 $\omega=\max_{1\le i\le n}|x_i|$，则

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{\omega}\right|^p\cdot\omega^p\right)^{\frac{1}{p}}=\omega\underline{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{\omega}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

由于$\left|\frac{x_i}{\omega}\right|^p\le 1$且$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{\omega}\right|^p\ge\left|\frac{\omega}{\omega}\right|^p=1$，因此

$$1\le\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{\omega}\right|^p\le n\quad\Rightarrow 1\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{\omega}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le n^{\frac{1}{p}}\xrightarrow{p\to\infty}1$$

NJUPT

例5.5 设A是任意n阶实对称正定矩阵, n维列向量x, 则函数

$$\|x\|_A=(x^TAx)^{1/2}$$

是R^n上的一种向量范数, 称为加权范数或椭圆范数.

NJUPT

例5.6 设向量 $x=(3i, 2, -5)^T$，求

$$\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$$

NJUPT

5.1.2 向量范数的连续性与等价性

定理5.2 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$是n维线性空间中任意两种向量范数，则一定存在两个与向量无关的正常数c_1, c_2，使得对所有$x\in V$，有不等式

$$c_1\|x\|_\beta\le\|x\|_\alpha\le c_2\|x\|_\beta \qquad (5.1)$$

NJUPT

证明：设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是线性空间$V$的一组基，于是对$\forall x\in V$有 $x=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$.

于是，$\|x\|_\alpha=\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i\right\|_\alpha \overset{记为}{=} \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

同理，$\|y\|_\alpha=\left\|\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i\right\|_\alpha \overset{记为}{=} \varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

$$\left|\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)-\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right|=\left|\|y\|_\alpha-\|x\|_\alpha\right|$$

$$\le\|y-x\|_\alpha=\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\alpha_i\right\|_\alpha$$

$$\le|y_1-x_1|\|\alpha_1\|_\alpha+|y_2-x_2|\|\alpha_2\|_\alpha+\cdots+|y_n-x_n|\|\alpha_n\|_\alpha\xrightarrow{y\to x}0.$$

于是，$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的连续函数.

NJUPT

下面利用连续函数的性质证明：

$$c_1\|x\|_\beta\le\|x\|_\alpha\le c_2\|x\|_\beta$$

$x=0$ 结论显然. 当 $x\ne0$ 时，$\|x\|_\alpha\ne0$, $\|x\|_\beta\ne0$, 且

$f(x)\overset{记}{=}\dfrac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$ 也是 $x_1,x_2,\ldots,x_n$的连续函数.

考虑单位超球面：$S=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\left|\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=1\right.\right\}$

由于S为有界闭集，且$f(x)$在S上的点均不为零且连续，因此f在S上有最大值M和最小值m，即

$$0<m\le\frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}\le M$$

NJUPT

定义5.2 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是n维线性空间中任意两种向量范数，若存在两个与向量无关的正常数c_1, c_2, 使得对所有$x\in V$, 有不等式

$$c_1\|x\|_\beta\le\|x\|_\alpha\le c_2\|x\|_\beta$$

则称向量范数$\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 是等价的.

NJUPT

5.2 矩阵范数及其性质

5.2.1 矩阵范数的定义与性质

定义5.3 设$A\in C^{m\times n}$，按照某个对应法则，对应于一个实数$\|A\|$，且满足下列四个条件：

（1）正定性 $\|A\|\ge0$，且$\|A\|=0$当且仅当A=0;

（2）齐次性 $\|kA\|=|k|\,\|A\|$

（3）三角不等式 $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$

（4）相容性 $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$，其中A,B可乘。

则称$\|A\|$为$C^{m\times n}$上矩阵A的范数。

注：类似于定理5.2，所有满足定义5.3的矩阵范数都是等价的.

NJUPT

例5.6 设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in C^{m\times n}$，定义

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{m_\infty}=\max(m,n)\max_{i,j}|a_{ij}|$$

则$\|A\|_{m_1}$, $\|A\|_{m_\infty}$都是$C^{m\times n}$上的矩阵范数. 此范数分别称为矩阵A的m_1-范数及m_∞范数。

NJUPT

定义5.4 对于$C^{m\times n}$上的矩阵范数$\|.\|_M$, C^m与C^n上的同类向量范数$\|x\|_V$，如果

$$\|Ax\|_V\le\|A\|_M\|x\|_V$$

则称矩阵范数$\|.\|_M$与向量范数$\|.\|_V$相容。

NJUPT

例5.7 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in C^{m\times n}$，证明函数

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

则$\|A\|_F$是$C^{m\times n}$上的一个矩阵范数. 且与向量范数$\|\cdot\|_2$相容。

此范数称为**Frobenius范数**，简称为**F-范数**或者**m_2-范数**。

定理5.3 设矩阵$A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，$P\in C^{m\times m}$，$Q\in C^{n\times n}$，都是酉矩阵，则

$$\|PA\|_F=\|A\|_F=\|AQ\|_F$$

推论5.1 两个酉相似矩阵的F-范数相同。即若$B=Q^HAQ$,其中Q是酉矩阵，则

$$\|B\|_F=\|A\|_F$$

例5.6 设 $\|\cdot\|_M$ 是$C^{n\times n}$矩阵范数，任取C^n中的非零列向量y，则函数

$$\|x\|_V=\|xy^H\|_M\ (\forall x\in C^n)$$

是C^n中的向量范数，且矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与向量范数 $\|\cdot\|_V$ 相容。

5.2.2 几种常用的矩阵范数

定理5.4 已知C^m和C^n上的向量范数$\|\cdot\|$，设$A\in C^{m\times n}$,则函数

$$\|A\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

是$C^{m\times n}$上的矩阵范数，且与已知的向量范数相容。

称为由向量范数导出的矩阵范数，简称为向量的**从属范数**或者**算子范数**。

定理5.5 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in C^{m\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$，则从属于向量的三种范数 $\|x\|_1,\|x\|_2,\|x\|_\infty$ 的矩阵范数依次为：

(1) $\|A\|_1=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ （5.9）

(2) $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1}$ （5.10）

其中λ_1是A^HA的最大特征值。

(3) $\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ （5.11）

例5.8 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&3-4i\\1&2&0\end{pmatrix}$$

求 $\|A\|_{m_1},\|A\|_{m_2},\|A\|_{m_\infty}\ \|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty$

定理5.6 $\|x\|_\alpha$是C^n上的向量范数，$A\in C^{n\times n}$ 则一定存在与向量范数相容的矩阵范数$\|A\|_M$，可定义为

$$\|A\|_M = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} \qquad (5.12)$$

则称方阵范数$\|A\|_M$是从属于向量范数$\|x\|_\alpha$的导出范数，或称$\|A\|_M$是由向量范数$\|x\|_\alpha$诱导出的矩阵范数. 也称$\|A\|_M$是与$\|x\|_\alpha$相应的算子范数.

5.2.3 范数的应用—矩阵非异性条件

设$C^{n\times n}$，可以根据范数的大小来判断是否为非奇异矩阵.

定理5.7 设 $C^{n\times n}$，且对设上的某种矩阵范数，有 $\|A\|<1$，则$I-A$非奇异，且

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{\|I\|}{1-\|A\|}$$

定理5.8 设$A\in C^{n\times n}$，且设对$C^{n\times n}$上的某种矩阵范数满足$\|A\|<1$，则

$$\|I-(I-A)^{-1}\| \le \frac{\|A\|}{1-\|A\|}.$$

定义3.13 设A是n阶矩阵，它的特征值的全体称为A的谱，记为$\lambda(A)$，并且称

$$\max_{\lambda\in\lambda(A)}|\lambda|$$

为矩阵A的谱半径，记为$\rho(A)$.

定理5.9 对于任意$A\in C^{n\times n}$，总有

$$\rho(A)\le\|A\|.$$

定理5.10 设$A\in C^{n\times n}$是正规矩阵，则$\rho(A)=\|A\|_2$.

定理5.11 设$A\in C^{n\times n}$是n阶非奇异矩阵，则A的谱范数为

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}=\sqrt{\rho(AA^H)}.$$

5.3 矩阵序列与矩阵级数

5.3.1 向量序列与矩阵序列

5.3.2 矩阵级数

5.3.1.1 向量序列

定义5.6 设 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$, $k=1,2,\cdots$ 是空间C^n的一个向量序列, 记为$\{x^{(k)}\}$. 如果当$k\to+\infty$时, 它的n个分量数列都收敛，即

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=a_i, \quad i=1,2,\cdots,n$$

则称向量序列 $\{x^{(k)}\}$是按分量收敛的，向量

$$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$$

称为它的极限向量，记为

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=\alpha \quad 或 \quad x^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to}\alpha .$$

如果至少有一个分量数列是发散的，则称该向量序列是发散的.

例如 向量序列 $x^{(k)}=\begin{pmatrix}2^{-k}\\ \frac{1}{k+1}\\ 1-\frac{\sin k}{k+1}\end{pmatrix}, k=0,1,2,\cdots$

是一个收敛的向量序列，且 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

而向量序列 $x^{(k)}=\begin{pmatrix}2^{-k}\\ \frac{1}{k+1}\\ \sin k\end{pmatrix}, k=0,1,2,\cdots$

是发散的，因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\sin k$不存在.

定义5.7 设 $\{x^{(k)}\}$ 是C^n中的向量序列，$\|x\|$是C^n的任意一个向量范数. 如果存在向量$\alpha\in C^n$，使当$k\to+\infty$ 时

$$\left\|x^{(k)}-\alpha\right\|\to 0$$

则称向量序列按向量范数收敛于α.

定理5.11 设 $\{x^{(k)}\}$ 是C^n中的向量序列，它按分量收敛当且仅当它按C^n中的任一向量范数收敛.

5.3.1.2 矩阵序列

设$m\times n$矩阵序列$\{A^{(k)}\}$, 其中

$$A^{(k)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & L & a_{1n}^{(k)}\\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & L & a_{2n}^{(k)}\\ L & L & L & L\\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & L & a_{mn}^{(k)}\end{pmatrix}, k=1,2,L$$

定义 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij} \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)}=A=(a_{ij})_{m\times n}$

不收敛的矩阵序列则称为发散的.

类似于定理定理5.11有

定理5.12 设$\{A^{(k)}\}, A\in C^{m\times n}$, $k=1, 2, \ldots$

则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)}=A$ 当且仅当 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$,

其中$\|\cdot\|$是$C^{m\times n}$上的任一矩阵范数.

命题5.1 设$\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A, \lim\limits_{k\to+\infty} B^{(k)}=B. \alpha,\beta\in C$,则

(1) $\lim\limits_{k\to+\infty}(\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)})=\alpha A+\beta B$;

(2) $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}B^{(k)}=AB$;

(3) 当$A^{(k)}$与A都可逆时，$\lim\limits_{k\to+\infty}(A^{(k)})^{-1}=A^{-1}$.

(4) $PA^{(k)}Q\underset{k\to\infty}{\to}PAQ$

定义5.9 设A为n阶方阵, 且当$k\to+\infty$时, 则$A^k\to 0$, 称A为收敛矩阵，否则就称A为发散矩阵.

例5.11 设

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

则

$$A^k=\begin{pmatrix}(\frac{1}{2})^k & 0 & 0\\ 0 & (\frac{1}{3})^k & k(\frac{1}{3})^{k-1}\\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^k\end{pmatrix}$$

可见 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$，所以$A$为收敛矩阵.

43

NJUPT

定理5.13 n阶方阵A为收敛矩阵的充要条件是A的谱半径 $\rho(A)<1$.

定理5.14 设$A\in C^{n\times n}$，若存在$C^{n\times n}$上的一种矩阵范数$\|\cdot\|$，使得$\|A\|<1$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=0$.

定理5.15 设$\|\cdot\|$是$C^{n\times n}$上的一种矩阵范数，则对任意矩阵 $A\in C^{n\times n}$，有

$$\rho(A)=\lim_{k\to+\infty}\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}.$$

44

NJUPT

5.3.2 矩阵级数

定义5.10 设$\{A^{(k)}\}$是$C^{m\times n}$的矩阵序列，称

$$A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

为矩阵级数，记为$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$. 称 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A^{(k)}$ 为$\{A^{(k)}\}$部分和. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 存在，则称矩阵级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$ 收敛，且极限为S，记为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=S$.

不收敛的矩阵级数称为发散的.

45

NJUPT

如果mn个数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)},\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

都绝对收敛,则称矩阵级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$绝对收敛.

命题5.2 在$C^{n\times n}$中，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$绝对收敛的充要条件是正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|$收敛.

必要性：

证明： $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$绝对收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{ij}^{(k)}|\le M$ $\Rightarrow$

46

NJUPT

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{(k)}\|_{m_1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}^{(k)}|\right)\le mnM$$

$\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|A^{(k)}\|_{m_1}$收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|A^{(k)}\|$收敛

充分性：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|A^{(k)}\|$收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|A^{(k)}\|_{m_1}$收敛

$\xrightarrow{|a_{ij}^{(k)}|\le\|A^{(k)}\|_{m_1}}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)}$绝对收敛

47

NJUPT

定理5.16 (Neumann定理) 方阵A的Neumann级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$$

收敛的充要条件是$\rho(A)<1$，且收敛时,其和为$(I-A)^{-1}$.

证：充分性： $\rho(A)<1$ $\Rightarrow$ $I-A$可逆

$\Rightarrow$ $(I+A+A^2+\ldots+A^k)(I-A)=I-A^{k+1}$

$\Rightarrow$ $I+A+A^2+\ldots+A^k=(I-A)^{-1}-A^{k+1}(I-A)^{-1}$

$\xrightarrow{\rho(A)<1}$ $I+A+A^2+\ldots+A^k\to(I-A)^{-1}$

48

NJUPT

必要性：$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛

➡ $\delta_{ij}+(A)_{ij}+(A^2)_{ij}+\ldots+(A^k)_{ij}+\ldots$ 收敛

➡ $(A^k)_{ij}\to 0$

➡ $A^k=((A^k)_{ij})\to 0$ (收敛矩阵)

➡ $\rho(A)<1$

定理5.17 若n阶方阵A的特征值全部落在幂级数

$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛域内，则矩阵A的幂级数

$\varphi(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 是绝对收敛的；

反之，若A存在落在$\varphi(z)$的收敛域之外的特征值，则$\varphi(A)$是发散的.

推论5.3 若幂级数$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$在整个复平面上收敛, 则对任何的$n$阶方阵$A$, $\varphi(A)$均收敛.

推论5.4 设幂级数 $\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛半径为r, $A\in C^{n\times n}$. 若存在$C^{n\times n}$上的某一矩阵范数$\|\cdot\|$使得$\|A\|<r$, 则矩阵幂级数 $\varphi(A)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛.

例5.12 判断下列矩阵幂级数的敛散性.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^k$$

解 令 $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\rho(A)=\frac{5}{6}<1$，

而 $\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ 的收敛半径为 $r=1$，

所以 $\varphi(A)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{6^k}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^k$ 绝对收敛.

5.4 矩阵函数

矩阵函数的概念与通常的函数概念类似, 所不同的是这里的自变量和因变量都是阶方阵. 本节介绍矩阵函数的定义及计算方法，并给出矩阵函数的应用以及矩阵的微分与积分.

5.4.1、矩阵函数的定义

定义5.11 设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 收敛半径为R, 且当$|z|<R$时, 幂级数收敛于$f(z)$, 即

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ , \quad |z|<R$$

如果$A\in C^{n\times n}$满足 $\rho(A)<R$, 则称收敛的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 的和为矩阵函数, 记为$f(A)$, 即

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k.$$

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k,$$

把$f(A)$的方阵A换为At, t为参数，则得到

$$f(At)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(At)^k,$$

常用的矩阵函数：

(1) $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k,\quad A\in C^{n\times n}$

(2) $\sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1},\quad A\in C^{n\times n}$

(3) $\cos A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k},\quad A\in C^{n\times n}$

(4) $(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k,\quad \rho(A)<1$

(5) $\ln(I+A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}A^{k+1},\quad \rho(A)<1$

定理5.18 若n阶矩阵A, B满足$AB=BA$

则 $e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$.

推论1 $e^Ae^{-A}=e^{-A}e^A=e^0=I$

$(e^A)^{-1}=e^{-A}$, $(e^A)^m=e^{mA}$

其中m是整数。

矩阵函数的性质

若$AB=BA$,则

（1） $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

（2） $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

5.4.2矩阵函数的计算

1. 利用Hamilton-Cayley定理计算矩阵指数函数、正弦函数、余弦函数

例5.13 已知四阶矩阵A的特征值是π、−π、0、0, 求$\sin A$, $\cos A$, e^A.

解 A的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-\pi)(\lambda+\pi)=\lambda^4-\pi^2\lambda^2$$

由Hamilton-Cayley定理

$$f(A)=A^4-\pi^2A^2=0$$

$A^4=\pi^2A^2, A^5=\pi^2A^3, A^6=\pi^2A^4=\pi^4A^2, \dots, A^{2k}=\pi^{2(k-1)}A^2$

于是

$$\sin A=A+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}=A+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2(k-1)}A^3$$

$$=A+\frac{1}{\pi^3}A^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k+1}=A+\frac{1}{\pi^3}(\sin\pi-\pi)A^3=A-\frac{1}{\pi^2}A^3$$

$$\cos A=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}=I+A^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\pi^{2(k-1)}$$

$$=I+\frac{1}{\pi^2}(\cos\pi-1)A^2=I-\frac{2}{\pi^2}A^2$$

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k=I+A+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}A^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}A^{2k+1}$$

$$=I+A+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\pi^{2(k-1)}A^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\pi^{2(k-1)}A^3$$

$$=I+A+\frac{\cosh\pi-\pi}{\pi^2}A^2+\frac{\sinh\pi-\pi}{\pi^2}A^3$$

例5.11 已知 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，求 e^{At}.

解： A的特征多项式多项式为 $|\lambda I-A|=\lambda^2+1$

由Hamilton-Cayley定理知: $A^2+I=0$.

从而: $A^2=-I,\ A^3=-A,\ A^4=I,\ A^5=A,\cdots$

即: $A^{2k}=(-1)^k I,\quad A^{2k+1}=(-1)^k A,\ k=1,2,\cdots$

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\right)I+\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\right)A$$

$$=(\cos t)I+(\sin t)A=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$$

2. 待定系数法

利用Jordan标准型求解矩阵函数的方法比较复杂，它需要求若当标准形和变换矩阵.现给出根据最小多项式求解矩阵函数的一种方法.

（1）设A 的最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},\quad m=\sum_{i=1}^{s}m_i$$

（2）形式上写出待定多项式

$$g(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\lambda^i=c_0+c_1\lambda+\cdots+c_{m-1}\lambda^{m-1}$$

（3）求解关于 $c_0,c_1,\cdots,c_{m-1}$ 的线性方程组

$$g^{(k)}(\lambda_i)=f^{(k)}(\lambda_i)(k=0,1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,s)$$

（4）求出$g(\lambda)$即可得$g(A)=f(A)$

例5.12 计算矩阵A的函数$\sqrt{A}$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

解： 令 $f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$，$A$的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^4$

即: $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3$

解得: $g(A)=\frac{5}{16}I+\frac{15}{16}A-\frac{5}{16}A^2+\frac{1}{16}A^3$

得:

$$f(A)=g(A)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

例5.13 计算矩阵A的函数，求 e^{At}, $\sin A$

其中

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}.$$

解:

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&1\\2&\lambda&-2\\1&1&\lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}.$$

故A的最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$

3.利用相似对角化

设A是可对角化的矩阵，则存在n阶可逆矩阵P, 使得

$$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\Lambda$$

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(P\Lambda P^{-1})^k=P(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Lambda^k)P^{-1}$$

$$=Pdiag(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_1^k,\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_2^k,\cdots,\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_n^k)P^{-1}$$

$$=Pdiag(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n))P^{-1}$$

从而

$$f(At)=Pdiag(f(\lambda_1t),f(\lambda_2t),\cdots,f(\lambda_nt))P^{-1}$$

例5.14　已知

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

求 $e^{At},\cos A$

解　$\det(\lambda I-A)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$所以$A$的特征值为，

$$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$$

对应于$\lambda_1=-2$的特征向量为$(-1,1,1)^T$，对应于$\lambda_2=1$线性无关的特征向量$(-2,1,0)^T, (0,0,1)^T$.

故取 $P=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2e^t-e^{-2t}&2e^t-2e^{-2t}&0\\e^{-2t}-e^t&2e^{-2t}-e^t&0\\e^{-2t}-e^t&2e^{-2t}-2e^t&e^t\end{pmatrix}$$

$$\cos A=P\begin{pmatrix}\cos(-2)&0&0\\0&\cos 1&0\\0&0&\cos 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cos 1-\cos 2&2\cos 1-2\cos 2&0\\\cos 2-\cos 1&2\cos 2-\cos 1&0\\\cos 2-\cos 1&2\cos 2-2\cos 1&\cos 1\end{pmatrix}$$

例5.15　$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求$\sin A$.

解　1) 化为Jordan标准形

$$A\longrightarrow J_1=1, J_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

2) 计算 $\sin J_i$

$$\sin J_1=\sin 1, \sin J_2=\begin{pmatrix}\sin 1&\frac{1}{1!}\cos 1\\0&\sin 1\end{pmatrix}$$

$$\sin A=\begin{pmatrix}\sin 1&0&0\\0&\sin 1&\cos 1\\0&0&\sin 1\end{pmatrix}$$

5.4.3 函数矩阵的微分与积分

设元素是实变量t的实函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)&\cdots&a_{2n}(t)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}(t)&a_{m2}(t)&\cdots&a_{mn}(t)\end{pmatrix}$$

$A(t)$的所有元素$a_{ij}(t)$定义在同一区间$[a,b]$上.

如果$A(t)$的所有元素$a_{ij}(t)$均在区间$[a,b]$上有界、连续、可微、可积, 就分别称$A(t)$在区间$[a,b]$上有界、连续、可微、可积.

1.矩阵函数的极限与连续

定义5.12　若函数矩阵$A(t)$的所有元素$a_{ij}(t)$, 当$t\to t_0$时，有极限a_{ij}，其中a_{ij}是常数，则称函数矩阵$A(t)$当$t\to t_0$时有极限为A，即 $\lim\limits_{t\to t_0}A(t)=A$，其中$A=(a_{ij})$.

如果$A(t)$的所有元素$a_{ij}(t)$，在$t=t_0$处连续,即

$$\lim_{t\to t_0}a_{ij}(t)=a_{ij}(t_0)$$

则称矩阵$A(t)$函数在$t=t_0$处连续，记为

$$\lim_{t\to t_0}A(t)=A(t_0)$$

性质1 设函数矩阵

$$A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n},B(t)=(b_{ij}(t))_{n\times n}$$

且 $\lim\limits_{t\to t_0}A(t)=A=(a_{ij})_{n\times n},\lim\limits_{t\to t_0}B(t)=B=(b_{ij})_{n\times n}$

则

(1) $\lim\limits_{t\to t_0}[A(t)\pm B(t)]=A\pm B;$

(2) $\lim\limits_{t\to t_0}[kA(t)]=kA;$

(3) $\lim\limits_{t\to t_0}[A(t)B(t)]=AB.$

例5.16 设函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & e^{-2t}\\ \cos t & t\end{pmatrix},B(t)=\begin{pmatrix}\cos 2t & \sin 3t\\ 3\sin 2t & \sin 3t-\cos 4t\end{pmatrix}$$

求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}A(t)B(t)$

解

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}A(t)B(t)=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}\sin t & e^{-2t}\\ \cos t & t\end{pmatrix}\cdot\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}\cos 2t & \sin 3t\\ 3\sin 2t & \sin 3t-\cos 4t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & e^{-\pi}\\ 0 & \dfrac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1-e^{-\pi}\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

2.函数矩阵的微分及其性质

定义5.13 若函数矩阵$A(t)$的所有元素$a_{ij}(t)$均在t_0(或区间(a,b)上)可微，则称此函数矩阵$A(t)$在t_0(或区间(a,b)上)可导，且把各元素$a_{ij}(t)$在t_0处的导数为元素的矩阵$\left(\dfrac{da_{ij}(t)}{dt}\right)_{m\times n}$，称为函数矩阵在$t_0$处的导数，记作

$$A'(t_0)=\left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right)_{m\times n}\Bigg|_{t=t_0}=\begin{pmatrix}a_{11}'(t_0) & a_{12}'(t_0) & \cdots & a_{1n}'(t_0)\\ a_{21}'(t_0) & a_{22}'(t_0) & \cdots & a_{2n}'(t_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}'(t_0) & a_{m2}'(t_0) & \cdots & a_{mn}'(t_0)\end{pmatrix}$$

并记以元素$a_{ij}(t)$在t_0处的微分为元素的矩阵称为函数矩阵$A(t)$在t_0处的微分，记作

$$\mathrm{d}A(t_0)=(\mathrm{d}a_{ij}(t_0))_{m\times n}.$$

例5.17 求函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\sin 2t}{t} & e^{-2t} & t^2+2t\\ \cos t & \ln(1+t) & 3t-1\\ 1 & 0 & 2\sin t\end{pmatrix}$$

$(t>0)$的导数.

可微函数矩阵的性质

(1) $\dfrac{d}{dt}(A(t)+B(t))=\dfrac{d}{dt}A(t)+\dfrac{d}{dt}B(t);$

(2) $\dfrac{d}{dt}[cA(t)]=c\dfrac{d}{dt}A(t)$

(3) $\dfrac{d}{dt}[A(t)B(t)]=[\dfrac{d}{dt}A(t)]\cdot B(t)+A(t)\cdot[\dfrac{d}{dt}B(t)]$

(4) $A(t),t=f(u),\dfrac{d}{du}A(t)=f'(u)\dfrac{d}{dt}A(t)$

(5) $\dfrac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)[\dfrac{d}{dt}A(t)]A^{-1}(t)$

例5.18 设函数矩阵 $A(t)=\begin{pmatrix}0 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$

求（1）$A'(t)$

（2）$[A^{-1}(t)]'$

3. 函数矩阵的积分

定义5.14 若函数矩阵$A(t)$的所有元素$a_{ij}(t)$均在$[a,b]$上可积，则称此函数矩阵$A(t)$在$[a,b]$上可积，且把各元素在$[a,b]$上的积分为元素的矩阵，称为函数矩阵$A(t)$在$[a,b]$上的积分，记作

$$\int_a^b A(t)dt=\begin{pmatrix}\int_a^b a_{11}(t)dt & \int_a^b a_{12}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{1n}(t)dt\\ \int_a^b a_{21}(t)dt & \int_a^b a_{22}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{2n}(t)dt\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \int_a^b a_{m1}(t)dt & \int_a^b a_{m2}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{mn}(t)dt\end{pmatrix}$$
$$=(\int_a^b a_{ij}(t)dt)_{m\times n}$$

性质3 函数矩阵$A(t)$，$B(t)$在区间$[a,b]$上均可积分，则

(1) $\int_a^b [A(t)+B(t)]dt=\int_a^b A(t)dt+\int_a^b B(t)dt$

(2) $\int_a^b cA(t)dt=c\int_a^b A(t)dt$ c是实常数；

(3) $\int_a^b A(t)Bdt=[\int_a^b A(t)dt]\cdot B$

(4) $\int_a^b A\cdot B(t)dt=A\cdot[\int_a^b B(t)dt]$

其中A, B 都是与 t 无关的常数矩阵。

(5) $\int_a^b A(t)B'(t)dt=A(t)B(t)-\int_a^b [A'(t)B(t)]dt$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b A(\tau)d\tau=A(t)$$

例5.19 已知函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin\pi t & 3t^2\\ -2t & e^t\end{pmatrix}$$

求 $\int_0^1 A(t)dt.$

例5.20 设函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin 2t & t^2\\ -2\cos t & 0\end{pmatrix}$$

求 $\frac{d}{dt}[\int_0^{t^3} A(\tau)d\tau].$

5.5 常系数线性微分方程

微分方程 的初值问题：

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)$$
$$x(o)=b$$

有唯一解： $x(t)=be^{at}.$

常系数线性微分方程组

设a_{ij}均是常数，考虑关于未定函数

$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$的微分方程组：

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}x_1(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)\\ \frac{d}{dt}x_2(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d}{dt}x_n(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)\end{cases}$$

如果记：

$$A=(a_{ij})_{n\times n},X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix},$$

则，这个方程组可以写成矩阵方程的形式：

$$\frac{d}{dt}X(t)=AX(t)$$

定理5.8

假设$A, X(t)$如前，X_0是已知的n维列向量，则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

有唯一解

$$X(t) = e^{At}X_0$$

定理5.9

假设$A, X(t)$如前，X_0是已知的n维列向量，则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = AX(t) + f(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

则通解为

$$X = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau$$

例5.21 设,求下列微分方程组 $\dfrac{dX(t)}{dt} = AX(t)$

满足初始条件 $X(0) = (1,1,1)^T$ 的解，其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

解 由定理5.8得到满足初始条件的解为$X = e^{At}X(0)$，由例5.14得到

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} & 2e^t - 2e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t} - e^t & 2e^{-2t} - e^t & 0 \\ e^{-2t} - e^t & 2e^{-2t} - 2e^t & e^t \end{pmatrix}$$

故所求的解为

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} & 2e^t - 2e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t} - e^t & 2e^{-2t} - e^t & 0 \\ e^{-2t} - e^t & 2e^{-2t} - 2e^t & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} + 4e^t \\ 3e^{-2t} - 2e^t \\ 3e^{-2t} - 2e^t \end{pmatrix}$$

例5.22设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $f(t) = (e^{2t}, e^{2t}, 0)^T$

求微分方程组 $\dfrac{dX}{dt} = AX + f(t)$ 满足初始条件

$X(0) = (-1,1,0)^T$

的解.

解 利用最小多项式可求得

$$e^{At} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & -t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}$$

$$e^{-A\tau}f(\tau) = e^{-2\tau}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tau & 1-\tau & -\tau \\ -\tau & \tau & 1-\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ e^{2\tau} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

故该方程组的解是

$$X(t) = e^{At}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{At}\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & -t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-1)e^{2t} \\ (1-t)e^{2t} \\ -2te^{2t} \end{pmatrix}$$