工程矩阵理论:Hermite二次型

东南大学· 数学系· 周建华

August 15, 2015

本章内容概要

1. Hermite二次型
2. 标准形
3. 惯性定理
4. 有定性

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义一复变量、复值函数

$$f(X) = X^H AX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j,$$

其中，$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.
可以证明：

$$\forall x_j \in \mathbb{C}, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A^H = A$$

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若有 $A^H = A$, 则称矩阵为Hermite矩阵，简称为 H 阵. 这时的 $f(X)$ 称为是Hermite二次型。

实对称矩阵的性质:

1. 实对称矩阵的特征值都是实数.
2. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.
3. 对任意实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^T AQ$ 是对角阵.

H 阵的性质

Theorem

1. H 阵的特征值均是实数.
2. H 阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.
3. 若 A 是 H 阵, 则必存在酉矩阵 U, 使得 $U^H AU$ 是对角阵.

正规阵

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若 $A^H A = AA^H$，则称 A 是正规阵.

Example

H 阵，酉矩阵，反 H 阵均是正规阵.

Theorem

若 A 既是上三角的，又是正规的，则 A 必是对角阵.

Theorem

$A \in C^{n\times n}$ 是正规阵 $\Longleftrightarrow$ A 酉相似于对角阵.

Corollary

$A \in C^{n\times n}$ 是正规阵 $\Leftrightarrow$ A有 n 个两两正交的单位特征向量.

Example

证明：正规阵 A，B 相似的充要条件是它们有相同的特征多项式.

Example

设 A 是正规阵.证明：

(1) $A^2 = A \Leftrightarrow A$ 的特征值是 0 或 1;

(2) A 是幂零阵 $\Leftrightarrow A = O$.

可逆线性变换

若 A，B 都是 H 阵，且对 $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $X^H AX = X^H BX$,
则 $A = B$.

设 $f(X) = X^H AX$, $g(Y) = Y^H BY$, C 是可逆矩阵，若
在 $X = CY$ 下，$f(X) = g(Y)$，则 $B = C^H AC$.

Definition

设 A，B 是 H 阵，若有可逆阵 C，使得 $B = C^H AC$，则
称 A 与 B 是共轭合同的.

共轭合同关系满足：反身性，对称性，传递性.

标准形

Definition

假设 Hermite 二次型 $f(X)$ 在可逆线性变换下 $X = CY$ 变成只含"平方"项的形式

$$\begin{aligned} g(Y) &= d_1 y_1 \overline{y_1} + d_2 y_2 \overline{y_2} + \cdots + d_n y_n \overline{y_n} \\ &= d_1 |y_1|^2 + d_2 |y_2|^2 + \cdots + d_n |y_n|^2 \end{aligned}$$

则称 $g(Y)$ 是 $f(X)$ 的标准型.

标准形的计算:

1. 配方法(初等变换法)
2. 酉变换法

假设 Hermite 二次型 $f(X)=X^HAX$，A 是相应的Hermite矩阵，酉矩阵 U 满足

$$U^HAU == \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

令 $X=UY$, 则

$$f(X)=a_1\left|y_1\right|^2+a_2\left|y_p\right|^2+\cdots+a_n\left|y_n\right|^2$$

.

唯一性

Theorem

若 $f(X)$ 在可逆线性变换 $X = CY$ 下变成标准形

$$g(Y) = d_1 |y_1|^2 + \cdots + d_p |y_p|^2 - d_{p+1} |y_{p+1}|^2 \cdots - d_r |y_r|^2$$

在可逆线性变换 $X = DZ$下变成标准形：

$$h(Y) = k_1 |z_1|^2 + \cdots + k_q |z_q|^2 - k_{q+1} |z_{q+1}|^2 \cdots - k_r |z_r|^2$$

其中，d_i, k_i 均大于零.则 $p = q$.

Definition

Hermite二次型标准形中的正项个数称为其正惯性指数，负项个数称为其负惯性指数.

惯性定理的矩阵形式：

若 H 阵 A 与

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

共轭合同，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中正、负项个数相同.

Definition

与H 阵A 共轭合同的对角阵中的正项个数称为A 的正惯性指数，负项个数称为A 的负惯性指数.

规范形

如果 $n \times n$ Hermite矩阵 A 的正、负惯性指数分别是 p, q，则 A 必定与矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$ 共轭合同.称此矩阵为 A 的规范形.

Theorem

*$n \times n$ Hermite*矩阵 A，B共轭合同 $\Leftrightarrow$ A, B 有相同的正、负惯性指数.

问：按共轭合同关系，n 阶*Hermite* 矩阵共可分成多少个共轭合同类？

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X)=X^HAX$, 若对 $\forall X_0\neq\theta$, $f(X_0)>0$, 则称 f 是正定的， A 是正定的 H 阵.

如何建立判别方法

1. 设 $=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，则 D 是正定的 $\Leftrightarrow \forall d_i>0$；
2. 若 H 阵 A,B 共轭合同，则 A 正定 $\Leftrightarrow$ B 正定.
3. 若 H 阵 A 与 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 共轭合同，则 A 正定 $\Leftrightarrow \forall d_i>0$.

正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite* 阵，则下述条件等价：

1. A 是正定的;
2. A 的特征值均大于零;
3. A 与 I 共轭合同;
4. 存在可逆阵 P 使得 $A = P^H P$;
5. A 的各顺序主子式均大于零.

Example

假设 α 是 n 维列向量，且 $\|\alpha\| = 1$. 问：当 k 为何值时，矩阵 $A = I - k\alpha\alpha^H$ 是正定的.

Example

设 A 是正定的Hermite 矩阵，证明：存在正定的Hermite 矩阵 S 使得 $A = S^2$.

Example

证明：若酉矩阵 A 是正定的，则 $A = I$.

其它有定性

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X) = X^H AX$.

1. 若对 $\forall X_0 \neq \theta, f(X_0) < 0$, 则称 f 是负定的，A 是负定的 H阵;
2. 若对 $\forall X_0 \neq \theta, f(X_0) \geq 0$，则称 f 是半正定的， A 是半正定的 H 阵;
3. 若对 $\forall X_0 \neq \theta, f(X_0) \leq 0$，则称 f 是半负定的，A 是半负定的 H 阵.

如何建立判别方法

如何建立判别H阵是不是半正定的：

1. 设 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，则 D 是半正定的 $\Leftrightarrow \forall d_i \geq 0;$
2. 若 H 阵 A，B 共轭合同，则 A 半正定 $\Leftrightarrow B$ 半正定：
3. 若 H 阵 A 与 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 共轭合同，则 A 半正定 $\Leftrightarrow \forall d_i \geq 0.$

半正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite*阵，则下述条件等价：

1. A 是半正定的;
2. A 的特征值均大于或等于零;
3. A 与 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix}$ 共轭合同;
4. 存在矩阵 P 使得 $A = P^H P$；
5. A 的各主子式均大于或等于零.

Example

证明：正定矩阵与半正定矩阵的和一定是正定矩阵.

奇值分解定理

Theorem

假设 A 是秩为 r 的 $s \times n$ 矩阵，则 $A^H A$ 是秩为 r 的半正定矩阵.设其非零特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$，
令 $d_i = \sqrt{\lambda_i}$，$D = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_r\}$，则一定存在 s 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，使得

$$A = U \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} V$$

奇值分解定理的证明

假设 A^HA 特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1}=0, \cdots \lambda_n=0$,
相应的标准正交特征向量组是 $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$,
即,$A^HAx_j=\lambda_j x_j, j=1,2,\cdots,n$,
所以,

$$< Ax_i, Ax_j >= x_j^H A^H A x_i = \lambda_i x_j^H x_i = \begin{cases} \lambda_i, & 1 \le i = j \le r, \\ 0, & i \ne j,\ or\ i = j > r \end{cases},$$

因此, $Ax_1, \cdots, Ax_r$ 是一正交向量组,
并且,

$$\|Ax_i\| = \sqrt{\lambda_i}, i=1,2,\cdots,r, \quad Ax_{r+1}=\cdots=Ax_n=\theta$$

令 $y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A x_i,\ i = 1, 2, \cdots, r$,
则 $y_1, \cdots, y_r$ 是 C^s中的一标准正交向量组,
将之扩充成 C^s 的标准正交基:$y_1, \cdots, y_r, y_{r+1}, \cdots, y_s$,
则有

$$
\begin{aligned}
A(x_1, \cdots, x_n) &= (\sqrt{\lambda_1} y_1, \sqrt{\lambda_2} y_2, \cdots, \sqrt{\lambda_r} y_r, \theta, \cdots, \theta) \\
&= (y_1, y_2, \cdots, y_s) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ & O & & O \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

于是，若令

$$D = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_r\},$$

$$U = (y_1, y_2, \cdots, y_s), \quad V = (x_1, y_2, \cdots, x_n)^H$$

则,U,V都是酉矩阵，且

$$A = U \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} V$$

Rayleigh 商

设 A 是 n 阶 H 阵，则 $\forall X \in C^n, X^HAX \in R$, 于是, 可以定义一复变量的实值函数

$$R(X) = \frac{X^HAX}{X^HX}, \forall \theta \neq X \in C^n,$$

称此函数为 A 的Rayleigh 商.

Theorem

假设 H 阵 $A \in C^{n\times n}$，A 的特征值 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$，则

$$\lambda_1 = \min_{\theta \ne X \in C^n} R(X), \qquad \lambda_n = \max_{\theta \ne X \in C^n} R(X).$$

Example

假设 A 是酉矩阵，证明：

$$\max_{\theta \ne X \in C^n} \frac{|X^H AX|}{X^H X} = 1.$$

Theorem

假设 H 阵 $A \in C^{n\times n}$，A 的特征值 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$，相应的标准正交特征向量组是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，
令$S_i = L(x_1,\ x_2,\ \cdots x_{i-1}),\quad T_i = L(x_i,\ x_{i+1}\cdots x_n)$,则

$$\lambda_i = \min_{\theta\neq x\in S_i^{\perp}} R(X) = \max_{\theta\neq x\in T_{i+1}^{\perp}} R(X).$$

Theorem

(Courant极大极小原理) 假设 H 阵 $A \in C^{n\times n}$ 的特征值是 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$，则

$$\lambda_i = \max_{\dim S=i} \{\min{}_{\theta\neq x\in S} R(x)\} = \min_{\dim S=n-i+1} \{\max{}_{\theta\neq x\in S} R(x)\}.$$