

工程矩阵理论:课程介绍, 复习引申

东南大学·数学系·周建华

September 5, 2015

教材：**工程矩阵理论**，第2版，张明淳，东南大学出版社，2011
参考书：

- ① 北京大学，**高等代数**，第4版，高等教育出版社，2012
- ② R.A.Horn and C.R.Johnson,**Matrix Analysis**,Cambridge University Press, 2004

建议：

- ① 重点是基本理论，基本方法
- ② 结合授课内容，熟悉课本；
- ③ 通过例题，理解概念；
- ④ 通过练习题，熟悉理论和方法。

课程大致内容：

- 第0章：复习与引申
- 第1章：线性空间与线性变换
- 第2章：内积空间、等距变换
- 第3章：矩阵的相似标准形
- 第4章：Hermite二次型
- 第5章：范数及矩阵函数
- 第6章：矩阵的广义逆

- ① 计算 A^k .
- ② 讨论矩阵序列的极限
- ③ 求线性方程组 $AX = b$ 的近似解

主要方面

- ① 矩阵的代数运算
- ② 线性方程组
- ③ 向量
- ④ 矩阵的秩

矩阵的乘法存在非零零因子

Example

$$N_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法不可交换

Example

假设 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$, 其中, d_1, d_2, \dots, d_n 互异. 什么样的矩阵与 D 可交换?

由此导致的一些问题

- ① 乘法消去率不成立
- ② 一些代数恒等式对矩阵不再成立

注意：当矩阵 $AB = BA$ 时，相应的二项式定理成立，即，

$$\begin{aligned} & (A + B)^m \\ &= A^m + C_m^1 A^{m-1} B + C_m^2 A^{m-2} B^2 + \cdots + C_m^{m-1} A B^{m-1} + B^m. \end{aligned}$$

Example

计算下述 n 阶方阵 A 的 k 次幂，其中：

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

分块矩阵

设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times t}$

将这两个矩阵分块: $A = (A_{ij})_{p \times q}$, $B = (B_{ij})_{q \times r}$.

在一定条件下, $C = AB$ 也可以写成分块矩阵

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{pmatrix}.$$

其中, $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{iq}B_{qj}$.

典型的分块方式1

设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times t}$.

分成 2×2 的分块矩阵

假设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times t}$:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Example

假设 A , B 分别 $m \times n$ 阶、 $n \times m$ 阶方阵, 构造矩

阵 $M = \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix}$.

(1), 计算 MG 和 GM ;

(2), 证明: $|I_m - AB| = |I_n - BA|$.

典型的分块方式2

将 A 视作一块, B 按列分块

假设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times t}$:

$$AB = A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_t).$$

由此可以推出

若 $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$.

典型的分块方式3

将 A 按列分块, B 不分块

假设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times t}$:

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nt} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n b_{i1} \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_{i2} \alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^n b_{it} \alpha_i \right). \end{aligned}$$

由此可以推出

$$r(AB) \leq r(A), r(B).$$

矩阵的相似对角化问题

如果 $n \times n$ 矩阵 A 相似于对角阵

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

其中

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{则}$$

$$Ap_i = \lambda_i p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

线性方程组

设方程组 $Ax = b$, $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $b = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_s)^T$ 则有

- ① 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b)$.
- ② 若 $r(A) = r(A, b) = r$, 则有唯一解 $\Leftrightarrow r = n$.
- ③ 若 $r(A) = r(A, b) = r < n$, 则通解中含有 $n - r$ 个自由未知量.

齐次线性方程组的基础解系

对于齐次线性方程组 $Ax = 0$, $A = (a_{ij})_{s \times n}$ 则有

- ① 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$.
- ② 若 $r(A) < n$, 则其基础解系中含 $n - r$ 个解向量.
- ③ 若 $r(A) < n$, 则其任意 $n - r$ 个线性无关的解向量是其基础解系.

Example

求下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

(简化)阶梯形矩阵

满足下列条件的矩阵称为阶梯形矩阵：

- ① 元素全为零的行（称为零行）均在矩阵的下方.
- ② 非零首元所在列的下标随着行标的增大而严格增大；

满足下述条件的阶梯形矩阵称为简化阶梯形矩阵：

- ① 各个非零行的非零首元均为1；
- ② 除了非零首元外，非零首元所在的列其余元素都为零.

Gauss 消元法

- ① 用初等行变换将增广矩阵化成阶梯形矩阵;
- ② 确定自由未知量;
- ③ 用回代法找出通解.

Example

求下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}$$

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足

- ① $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- ② $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中每个向量均可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示, 则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大无关组.

- ① 如果一向量组的极大无关组中含 r 个向量, 则称这个向量组的秩为 r .
- ② 若向量组的秩为 r , 则该向量组中任意 r 个线性无关的向量均是其极大无关组.

极大无关组的计算

Example

求向量组

$$\alpha_1 = (1, -2, 0, 2), \alpha_2 = (2, 1, 1, -1),$$

$$\alpha_3 = (1, 2, 1, -3), \alpha_4 = (1, 1, 2, 2),$$

$$\alpha_5 = (1, 0, 1, 2)$$

的秩和一个极大无关组,并将其余的向量用此极大无关组线性表出.

有关矩阵的秩的不等式

- ① $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$;
- ② $r(AB) \leq r(A), r(B)$;
- ③ 若 $A_{s \times n} B_{n \times t} = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$;
- ④ $r(A_{s \times n} B_{n \times t}) \geq r(A) + r(B) - n$.

矩阵的秩

Example

证明：若 P, Q 都是可逆矩阵，则

$$r(PAQ) = r(A).$$

Example

证明：若 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$ ，则

$$r(A) + r(I - A) = n.$$

Example

设 A 是 $s \times n$ 矩阵, b 是 s 维列向量, 证明:

- ① $r(A) = r(A^H A)$;
- ② 线性方程组 $A^H A x = A^H b$ 恒有解.

矩阵的等价标准形

$s \times n$ 矩阵 A 的秩等于 r

$\Leftrightarrow A$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 等价

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 $P_{s \times s}, Q_{n \times n}$ 使得 $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$.

Example

假设 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 r , 证明: 存在 $s \times r$ 矩阵 B 及 $r \times n$ 矩阵 C , 使得 $A = BC$. (矩阵的满秩分解)

Example

求 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ 的满秩分解.