المراجعة النهائية

ملخص أهم قوانين

الرياضيات

الصف الثاني الثانوى

الفصل الدراسى الثاني

منتدى توجيه الرياضيات

أ / عادل إدوار

أولاً : الجبر

المتتابعة

هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $ص^+$ و مجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح (د : $ص^+ \longrightarrow$ ح)

المتتابعة المنتهية و المتتابعة غير المنتهية

- تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهياً (**أى يمكن حصره أو عده)**
- تكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته **(عدد لا نهائى من العناصر)**

المتتابعة التزايدية و المتتابعة التناقصية و المتتابعة الثابتة

- المتتابعة التزايدية : $ح_{ن+1} - ح_ن >$ الصفر
- المتتابعة التناقصية : $ح_{ن+1} - ح_ن <$ الصفر
- المتتابعة الثابتة : $ح_{ن+1} - ح_ن =$ الصفر

المتسلسلات و رمز التجميع

الخواص الجبرية للتجميع

إذا كانت $(ح_ر)$ ، $(ح_هـ)$ متتابعتين ، $ن \in ص^+$ ، $جـ \in ح$ فإن:

① $\sum_{ر=1}^{ن} جـ = جـ ن$

② $\sum_{ر=1}^{ن} أ ح_ر = أ \sum_{ر=1}^{ن} ح_ر$

③ $\sum_{ر=1}^{ن} (ح_ر \pm ح_هـ) = \sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \pm \sum_{ر=1}^{ن} ح_هـ$

④ قانون مجموع الأعداد الصحيحة : $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+1)}{2}$

⑤ قانون مجموع مربع الأعداد الصحيحة: $\sum ر^2 = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{...}$

المتتابعات الحسابية و الهندسية

	المتتابعة الحسابية	المتتابعة الهندسية
التعريف	تكون المتتابعة $(ع_{ن})$ حسابية إذا كان: $ع_{ن+١} - ع_{ن} =$ ثابت (الأساس)	تكون المتتابعة $(ع_{ن})$ هندسية إذا كان: $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}} =$ ثابت (الأساس)
الأساس	ء = أي حد − الحد السابق له مباشرة	$ر = \frac{\text{أي حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$
الصورة العامة	$(ع_{ن}) = ($أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، .... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل$)$	$(ع_{ن}) = ($أ ، أر ، أر^{٢} ، .... ، $\frac{ل}{ر^{٢}}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل$)$
الحد العام	$ع_{ن} = أ + (ن - ١)ء$	$ع_{ن} = أ\,ر^{ن-١}$
الأوساط	إذا كان: أ ، ب ، حـ في تتابع حسابي فإن: ب يكون وسط حسابي بين أ ، حـ ويكون: $٢ب = أ + حـ$ أو $ب = \frac{أ + حـ}{٢}$	إذا كان: أ ، ب ، حـ في تتابع هندسي فإن: ب يكون وسط هندسي بين أ ، حـ ويكون: $ب^{٢} = أ \times حـ$ أو $ب = \pm\sqrt{أ\,حـ}$
المجموع	$حـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ $حـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[\,٢أ + (ن - ١)ء\,]$	$حـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$ $حـ_{ن} = \frac{ل\,ر - أ}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$

ملاحظات على المتتابعات الحسابية

❶ لإيجاد رتبة أول حد موجب: نضع $ع_{ن} >$ صفر أي : $أ + (ن - ١)ء >$ صفر

❷ لإيجاد رتبة أول حد سالب: نضع $ع_{ن} <$ صفر أي : $أ + (ن - ١)ء <$ صفر

❸ لإيجاد أكبر مجموع نوجد عدد الحدود الموجبة بوضع $ع_{ن} > ٠$ لإيجاد قيمة ن

❹ لإيجاد أصغر مجموع نوجد عدد الحدود السالبة بوضع $ع_{ن} < ٠$ لإيجاد قيمة ن

❺ لإيجاد مجموع المتتابعة بدءً من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ونعوض عنه بدلاً من أ

❻ لإيجاد قيمة ن التي تجعل المجموع موجباً نضع $حـ_{ن} > ٠$ أي : $٢أ + (ن - ١)ء > ٠$

❼ لإيجاد قيمة ن التي تجعل المجموع سالباً نضع $حـ_{ن} < ٠$ أي : $٢أ + (ن - ١)ء < ٠$

❽ لإيجاد قيمة ن التي يتلاشى عندها المجموع نضع $حـ_{ن} = ٠$ أي : $٢أ + (ن - ١)ء = ٠$

ملاحظات على المتتابعات الهندسية

يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية إذا وفقط إذا كان:

$|ر| < ١$ أي : $-١ < ر < ١$ ويكون : $ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

العلاقة بين الوسطين الحسابي والهندسي

نظرية : الوسط الحسابي لعددين حقيقين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسي.

أي انه لأي عددين س ، ص حيث س ، ص $\in ع^+$، س $\neq$ ص

يكون : $\frac{س + ص}{٢} > \sqrt{س.ص}$

أي أن الوسط الحسابي أكبر من الوسط الهندسي الموجب ، ولما كان الوسط الهندسي الموجب أكبر من الوسط الهندسي السالب فإن الوسط الحسابي يكون أكبر من الوسط الهندسي (على الإطلاق).

ملاحظات

- إذا كان س ، ص ، ع ثلاثة أعداد في تتابع حسابي فإن: ص وسط حسابي بين س ، ع
  ويكون : ص $> \sqrt{س ع}$
- إذا كان س ، ص ، ع ثلاثة أعداد في تتابع هندسي فإن: ص وسط هندسي بين س ، ع
  ويكون : $\frac{س + ع}{٢} >$ ص

مبدأ العد - التباديل - التوافيق

مبدأ العد

إذا أمكن إجراء عمل ما بطرق عددها م ، و عمل آخر بطرق عددها ن ، فإنه يمكن إجراء العملين معاً بطرق عددها م × ن

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب بالصورة : $\underline{|ن}$ هو يساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الأقل من أو تساوي ن

أي أن : $\underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) \times .... \times ٣ \times ٢ \times ١$

ملاحظات

- ☺ عدد عوامل $\underline{|ن}$ يساوي ن عامل أكبرها ن و أصغرها الواحد الصحيح.
- ☺ $\underline{|ن} = ن \, \underline{|ن-١} = ن(ن-١)\underline{|ن-٢} = ن(ن-١)(ن-٢)\underline{|ن-٣}$
  أي أن مضروب العدد = العدد × مضروب (العدد - ١)
- ☺ $\underline{|١} = \underline{|الصفر} = ١$ و العكس صحيح إذا كان : $\underline{|س} = ١$ فإن س = ٠ أو ١
- ☺ يمكن استخدام الحاسبة العلمية لحساب مضروب العدد فمثلا لحساب : $\underline{|٥}$

نكتب : $\boxed{5}$ $\boxed{shift}$ $\boxed{x^{-1}}$ (x!) يظهر لنا على الشاشة " 5! " ثم بالضغط على $\boxed{=}$

نجد أن الناتج يساوي ١٢٠ ($\therefore \underline{|٥} = ١٢٠$)

☺ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء في صف = $\underline{|ن}$

☺ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء في دائرة = $\underline{|(ن - ١)}$

التباديل

يرمز لعدد ن من التباديل المتمايزة مأخوذ منها ر من العناصر في كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$

حيث : $^{ن}ل_{ر} = ن (ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)............(ن - ر + ١)$

، $ر \leqslant ن$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

ملاحظات

☺ أي أن : $^{ن}ل_{ر}$ تعني حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي عددها ر و أكبرها ن ، و أصغرها (ن - ر + ١)

☺ $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{|ن}{|ن - ر} = \dfrac{|العلم}{|العلم - الدليل}$

☺ يمكن استخدام الحاسبة العلمية لحساب التباديل فمثلا لحساب : $^{٨}ل_{٣}$

نكتب : $\boxed{8}$ $\boxed{shift}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ يظهر لنا على الشاشة " 8P3 " ثم بالضغط على $\boxed{=}$ نجد أن الناتج يساوي ٣٣٦ ($\therefore$ $^{٨}ل_{٣} = ٣٣٦$)

التوافيق

هي كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها .

أي أن : $^{ن}ق_{ر}$ هو عدد التوافيق المكون كل منها من ر من الأشياء المختارة من بين ن من العناصر حيث ، $ر \leqslant ن$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

ملاحظات

☺ $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{^{ن}ل_{ر}}{|ر} = \dfrac{|ن}{|(ن - ر) . |ر}$

☺ $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ " قانون التبسيط "

☺ إذا كان : $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن : س = ص أ، س + ص = ن

" إذا كان العلم = العلم الدليل فإن إما : الدليل = الدليل أ، مجموع الدليلين = العلم"

☺ يمكن استخدام الحاسبة العلمية لحساب التوافيق فمثلا لحساب : $^{٧}ق_{٢}$

نكتب : $\boxed{7}$ $\boxed{shift}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ يظهر لنا على الشاشة " 7C2 " ثم بالضغط على $\boxed{=}$ نجد أن الناتج يساوي ٢٦ ($\therefore$ $^{٧}ق_{٢} = ٢٦$)

ثانياً: التفاضل و التكامل

التغير

إذا كانت: ص = د(س) وتغيرت س من س إلى س + هـ فإن ص تتغيراً تبعاً لذلك من د(س) إلى د(س + هـ) وعلى ذلك فإن التغير في ص يكون د(س + هـ) − د(س) والذي يرمز له بالرمز ت(هـ) أي أن:

☺ دالة التغير ت(هـ) = د(س + هـ) − د(س)

☺ دالة متوسط التغير م(هـ) = $\frac{\text{ت(هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د(س+هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$

☺ دالة معدل التغير دَ(س) = $\lim_{\text{هـ} \to 0}$ م(هـ) = $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د(س+هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$

تذكر أن

(١) مساحة الدائرة = π نق^٢ ، محيط الدائرة = ٢ π نق

(٢) مساحة المربع = ل^٢ ، محيطه = ٤ ل

(٣) مساحة المستطيل = الطول × العرض ، محيطه = ٢(الطول + العرض)

(٤) مساحة المكعب الكلية = ٦ ل^٢ ، المساحة الجانبية = ٤ ل^٢ ، حجم المكعب = ل^٣

(٥) مساحة الكرة = ٤ π نق^٢ ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣

(٦) مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب طولي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

الإشتقاق:

إذا كانت ص = د(س)

المشتقة الأولى للدالة د بالنسبة إلى س يرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = صَ = دَ(س) = $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$(د(س))

ملاحظة هامة:

المشتقة الأولى لدالة عند نقطة = ميل المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة = ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة = معدل تغير الدالة عند هذه النقطة.

أي أن: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = صَ = دَ(س) = $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$(د(س)) = م = ظا هـ

قابلية الإشتقاق :

يقال أن الدالة " د " قابلة للإشتقاق عند س = أ حيث أ ∋ مجال الدالة " د " : إذا و فقط إذا كانت : $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(أ+هـ)-د(أ)}{هـ}$ (لها وجود)

قابلية للإشتقاق للدالة متعددة التعريف (المشتقة اليمنى و اليسرى)

إذا كانت س = أ نقطة تنتمي لمجال الدالة " د " و كان قاعدة الدالة عند س > أ تختلف عن قاعدتها عند س < أ (في جوار أ). فعند بحث قابلية الإشتقاق عند س = أ يجب بحث المشتقة اليمنى $د'(أ^+)$ ، و المشتقة اليسرى $د'(أ^-)$ والمقارنة بينهما حيث :

$$د'(أ^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(أ+هـ)-د(أ)}{هـ} \quad ,, \quad د'(أ^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(أ+هـ)-د(أ)}{هـ}$$

فإذا كان : $د'(أ^+) = د'(أ^-)$ فإن الدالة د تكون قابلة للإشتقاق عند س=أ

ملاحظات:

(١) كل دالة غير متصلة عند نقطة تكون غير قابلة للإشتقاق عند نفس النقطة .

(٢) الدالة المتصلة عند نقطة ليس من الضروري أن تكون قابلة للإشتقاق عند نفس النقطة .أي أن اتصال الدالة عند نقطة شرط ضروري و لكنه غير كاف لقابلية اشتقاق الدالة عند ذات النقطة.

(٣) كل دالة قابلة للإشتقاق عند نقطة تكون متصله عند نفس النقطة .

(٤) إذا كانت الدالة غير قابلة للإشتقاق عند نقطة فإنه ليس من الضروري أن تكون متصلة عند نفس النقطة .

هام جداً :

إذا كانت الدالة د قابلة للإشتقاق عند س=أ فإن :

(١) الدالة متصلة عند س=أ ⟸ $د(أ^-) = د(أ^+) = د(أ)$

(٢) $د'(أ^-) = د'(أ^+)$

♦ قواعد الاشتقاق

(١) إذا كانت ص = أ حيث أ ثابت فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

(٢) إذا كانت ص = أ $س^ن$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = أ \times ن\, س^{ن-١}$

(٣) $\frac{ء}{ءس}(ص \pm ع) = \frac{ءص}{ءس} \pm \frac{ءع}{ءس}$ (مشتقة مجموع دالتين)

(٤) إذا كانت ص = $\sqrt{\text{د(س)}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{\text{٢} \times \text{الجذر}}$

(٥) إذا كانت ص = د(س) . ن(س) فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{دَ . ن + د . نَ}$

أي أن مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الأولي × الثانية + الأولي × مشتقة الثانية

(٦) إذا كانت ص = $\frac{\text{د(س)}}{\text{ن(س)}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دَ . ن − نَ . د}}{[\text{ن(س)}]^{٢}}$

أي أن مشتقة خارج قسمة دالتين

= (مشتقة البسط × المقام − مشتقة المقام × البسط) ÷ مربع المقام

(٧) إذا كانت ص = $[\text{د(س)}]^{ن}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن} \, [\text{د(س)}]^{ن-١} \times \text{دَ(س)}$

أي أن مشتقة $(\text{قوس})^{ن}$ = ن $(\text{القوس})^{ن-١}$ × مشتقة ما بداخل القوس

(٨) إذا كانت : ص = جا[د(س)] فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = دَ(س) × جتا[د(س)]

(٩) إذا كانت : ص = جتا[د(س)] فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = دَ(س) × −جا[د(س)]

(١٠) إذا كانت : ص = ظا[د(س)] فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = دَ(س) × $\text{قا}^{٢}$[د(س)]

(١١) قاعدة السلسلة : إذا كانت ص = د(ع) ، ع = ر(س) فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

تذكر أن :

ميل الخط المستقيم :

☒ م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{\text{− معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = ظا هـ

☒ ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = صفر

☒ ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات غير معرف = $\frac{١}{\text{صفر}}$

☒ إذا كان : $ل_١ // ل_٢$ فإن : $م_١ = م_٢$

☒ إذا كان : $ل_١ \perp ل_٢$ فإن : $م_١ \times م_٢ = -١$

☒ للحصول على نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات : بوضع ص = ٠

☒ للحصول على نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات : بوضع س = ٠

☒ للحصول على نقط تقاطع منحنين : نقوم بحل معادليتهما جبرياً

معادلة المماس و العمودي عليه لمنحنى الدالة :

☺ معادلة المماس : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$ حيث $(س_١ ، ص_١)$ نقطة على المماس ، $م = \frac{ءص}{ءس}$

☺ معادلة العمودي : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \bar{م}$ حيث $(س_١ ، ص_١)$ نقطة على العمودي ، $\bar{م} = - \frac{١}{\frac{ءص}{ءس}}$

التكامل

☒ $\int س^{ن} \, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$

☒ $\int (أس + ب)^{ن} \, ءس = \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ(ن+١)} + ث$

☒ $\int [د(س)]^{ن} \times د'(س) \, ءس = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$

☒ $\int جتا(أس + ب) ءس = \frac{١}{أ} جا(أس + ب) + ث$

☒ $\int جا(أس + ب) ءس = - \frac{١}{أ} جتا(أس + ب) + ث$

☒ $\int قا^{٢}(أس + ب) ءس = \frac{١}{أ} ظا(أس + ب) + ث$

ثالثاً : حساب المثلثات

تذكر أن :

العلاقات الأساسية بين النسب المثلثية

$جا^{٢}\theta + جتا^{٢}\theta = ١$ $\qquad ١ + ظا^{٢}\theta = قا^{٢}\theta$ $\qquad ١ + ظتا^{٢}\theta = قتا^{٢}\theta$

$ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$ $\qquad ظتا\theta = \frac{جتا\theta}{جا\theta}$

مقلوبات النسب المثلثية الأساسية :

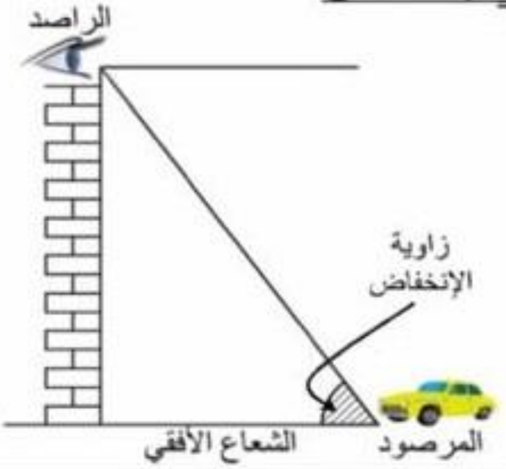
$قا\theta = \frac{١}{جتا\theta}$ $\qquad قتا\theta = \frac{١}{جا\theta}$ $\qquad ظتا\theta = \frac{١}{ظا\theta}$

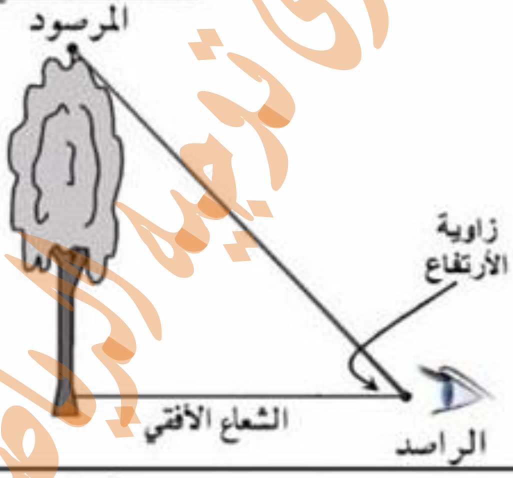
قاعدة الجيب : في المثلث : أ ب جـ يكون $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$

قاعدة جيب التمام : $\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - ٢\,\text{ب جـ جتا أ}$

، جتا أ $= \frac{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{٢\,\text{ب جـ}}$

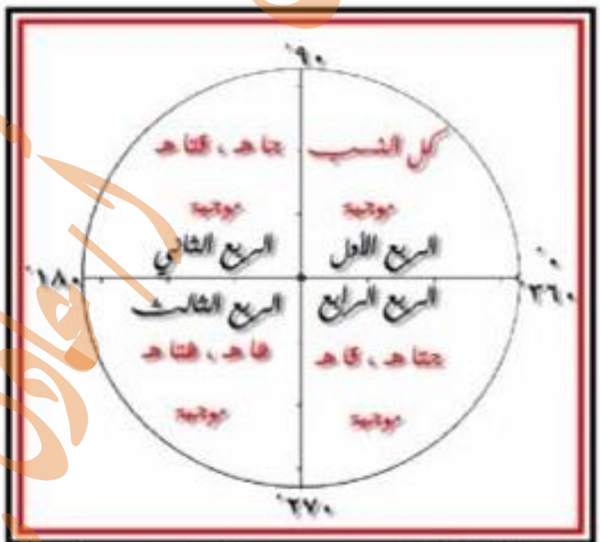
زوايا الإرتفاع و زوايا الإنخفاض





إشارات الدوال المثلثية

انظر الشكل التالي:



الدوال المثلثية لمجموع و الفرق بين قياسي زاويتين

جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

جا(أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب

جتا(أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

جتا(أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

ظا(أ + ب) $= \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}}$ ، ظا(أ − ب) $= \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}}$

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

جا٢أ = ٢جاأ جتاأ

جتا٢أ = جتا^{٢}أ − جا^{٢}أ = ٢جتا^{٢}أ − ١ = ١ − ٢جا^{٢}أ

ظا٢أ = $\dfrac{\text{٢ظاأ}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{أ}}$

وكذلك يمكن اثبات أن :

جا٤س = ٢جا٢س جتا٢س

، جتا٦حـ = جتا^{٢}٣حـ − جا^{٢}٣حـ = ٢جتا^{٢}٣حـ − ١ = ١ − ٢جا^{٢}٣حـ

، ظا١٠هـ = $\dfrac{\text{٢ظا٥هـ}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{٥هـ}}$

الدوال المثلثية لنصف قياس الزاوية

جا $\dfrac{\text{أ}}{٢}$ = $\pm\sqrt{\dfrac{\text{١ − جتاأ}}{٢}}$

جتا $\dfrac{\text{أ}}{٢}$ = $\pm\sqrt{\dfrac{\text{١ + جتاأ}}{٢}}$

ظا $\dfrac{\text{أ}}{٢}$ = $\pm\sqrt{\dfrac{\text{١ − جتاأ}}{\text{١ + جتاأ}}}$

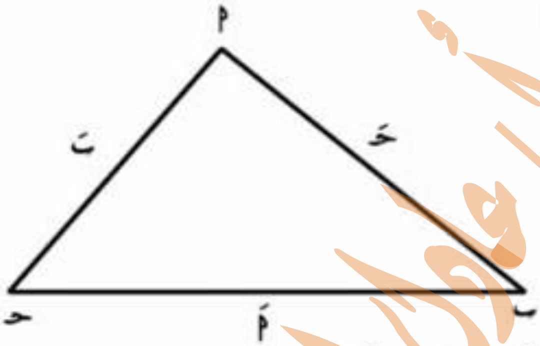
صيغة هيرون لحساب مساحة المثلث

في المثلث أ ب حـ : إذا كان نصف محيط المثلث أ ب حـ

ع = $\dfrac{\text{أَ + بَ + حَ}}{٢}$

و تكون مساحة المثلث أ ب حـ

Δ = $\sqrt{\text{ع(ع − أَ)(ع − بَ)(ع − حَ)}}$



طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث

تذكر ان الدائرة الداخلة لمثلث هي الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ، و مركزها هو نقطة تقاطع منصفات زواية الداخلة .

إذا كان إذا كان " ع " نصف محيط المثلث أ ب حـ

، " Δ " مساحة المثلث أ ب حـ

، نق طول نصف قطر الدائرة الداخلة للمثلث أ ب حـ فإن:

نق = $\dfrac{Δ}{\text{ع}}$