Methods and Heuristics for Learning and Optimization

Romain Mencattini

24 octobre 2016

Table des matières

1 Le voyageur de commerce

Il s'agit du problème sur lequel nous allons tester l'algorithme du recuit simulé. Détaillons le de manière mathématique.
Nous avons un ensemble de villes : V. Où $v = \{x, y\} \in V$. est une ville qui avec une coordonnée x et une coordonnée y qui appratiennent à $\mathbb{N}$.

On veut visiter toutes les villes, une et une seule fois. Notre résultat sera une permutation de ces villes : $[v_1, v_2, ..., v_N]$. Une liste avec N villes. Où v_1 sera la première ville visitée, v_2 la deuxième etc.

On utilise la distance euclidienne :

$$euclidienne(v_1, v_2) = \sqrt{(v_{1_x} - v_{2_x})^2 + (v_{1_y} - v_{2_y})^2}$$

On veut minimiser la distance totale qui est :

$$d_{total} = \sum_{i=2}^{N} euclidienne(v_{i-1}, v_i)$$

2 Algorithme

Pour ce faire on va comparer plusieurs algorithmes.

2.1 Recuit simulé

Voici le principe de l'algorithme du recuit simulé, ou SA.

1. Choisir une solution initiale, s_0, qui est une permutation des villes.
2. Calculer la température initiale. Pour ce faire, on fait 100 transformations élémentaires aléatoires, et on regarde le Δ d'énergie. En résolvant l'équation :
$$e^{\frac{-<\Delta E>}{T_0}} = 0.5$$
3. Effectuer une transformation élémentaire aléatoire pour obtenir s_1.
4. On applique la règle d'acceptation (de Métropolis) :
$$P = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta E < 0 \\ e^{\frac{-\Delta E}{T}} & \text{sinon} \end{cases}$$
On accepte si $rand() < P$ où $rand() \in [0, 1[$. Si on accepte $s_0 = s_1$.
5. On considère qu'un équilibre est atteint lorsqu'on a accepté $12n$ changements ou qu'il y a eu $100n$ perturbations sans changements.
6. Lorsqu'on est en équilibre, on diminue la température : $T_{k+1} = 0.9T_k$.
7. On arrête l'algorithme lorsqu'on a diminué trois fois la température, sans qu'il y ait eu aucun changements de solutions. On considèrera que la solution est suffisemment stable pour qu'elle ne change plus.

Il reste à expliquer ce que signifie une perturbation élémentaire. Cela consiste en une nouvelle permutation où on aura échangé deux villes.

2.2 Greedy

L'algorithme est plus simple que celui du recuit. Il faut :

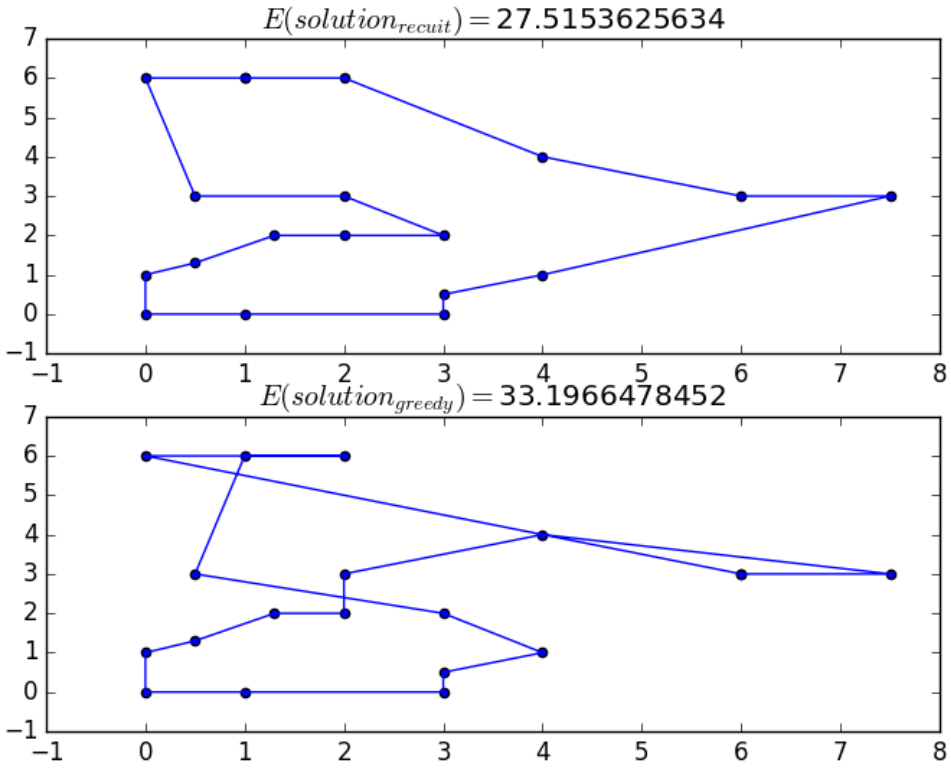
1. Choisir une ville aléatoire, v_0.
2. Ajouter la ville la plus prochaine à notre solution.
3. Répéter l'étape 2. jusqu'à ce qu'on ait vue toutes les viles.

Suivant le choix du développeur, on peut choisir d'ajouter la première ville, à la fin pour avoir une boucle. Cet algorithme est totalement déterministe pour un V fixé et une ville initiale v_0 fixée.

3 Mesures et Résultats

Voici les résultats obtenus en moyenne lors de dix lancés.

3.1 Cities.dat



On remarque que les deux solutions sont assez bonnes, (visuellement et en terme d'énergie). On peut noter que le recuit est meilleur dans ce cas. Il s'agit d'un seul lancé pour

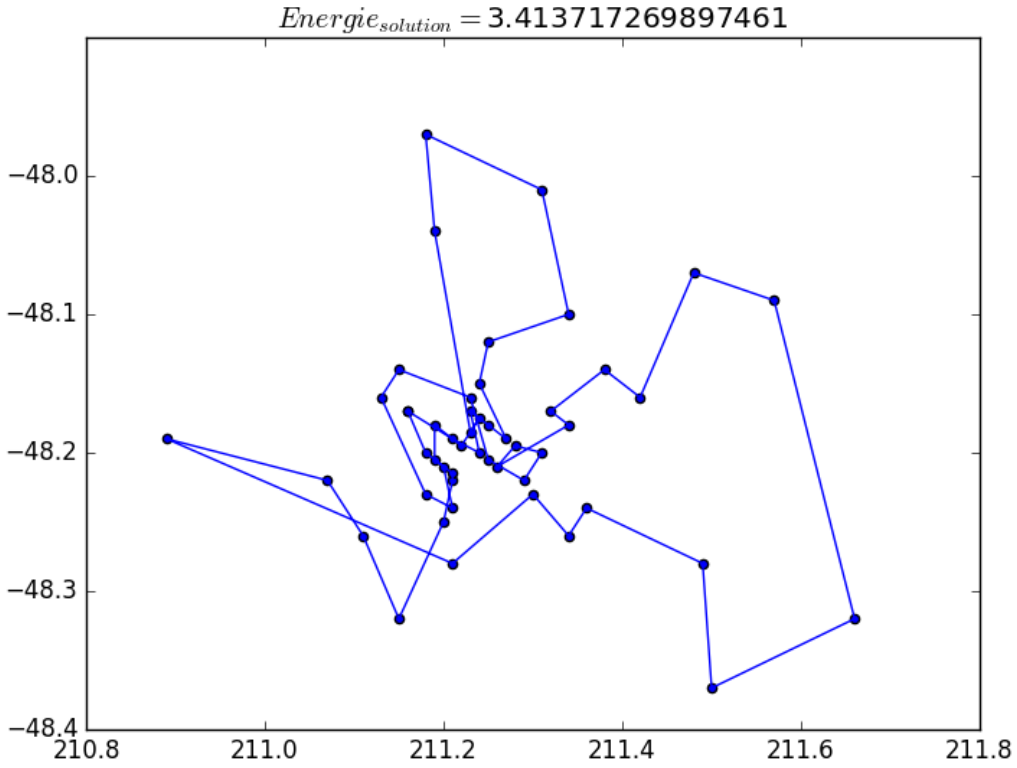
illustré, ce à quoi ça ressemble. Voici le tableau avec la moyenne :

Cities.dat		
	Moyenne	Déviation standard
Greedy	33.2325687408	1.77688
Recuit	31.3042554855	1.71704

On voit que le recuit est en moyenne meilleur. Il n'a que peu de déviation standard. Environ 3% de la valeur moyenne d'énergie. Les deux algorithmes sont donc assez stable.

Les résultats moyens sont un peu éloigné du meilleur résultat trouvé plus haut. Il y a moins de 10% de différence, ce qui signifie qu'on trouve de bon solution, assez proche de l'optimum global.

3.2 Cities2.dat



Les points centraux étant très proches, cela peut engendré beaucoup de différences d'un lancé à un autre. Il est également plus compliqué de trouver l'optimum.

Voici le tableau avec la moyenne :

Cities2.dat		
	Moyenne	Déviation standard
Greedy	3.46352212408	0.166237
Recuit	3.54229936614	0.171651

Le point positif est que la déviation standard est très faible. On a confirmation que les algorithmes sont stables sur plusieurs lancés.

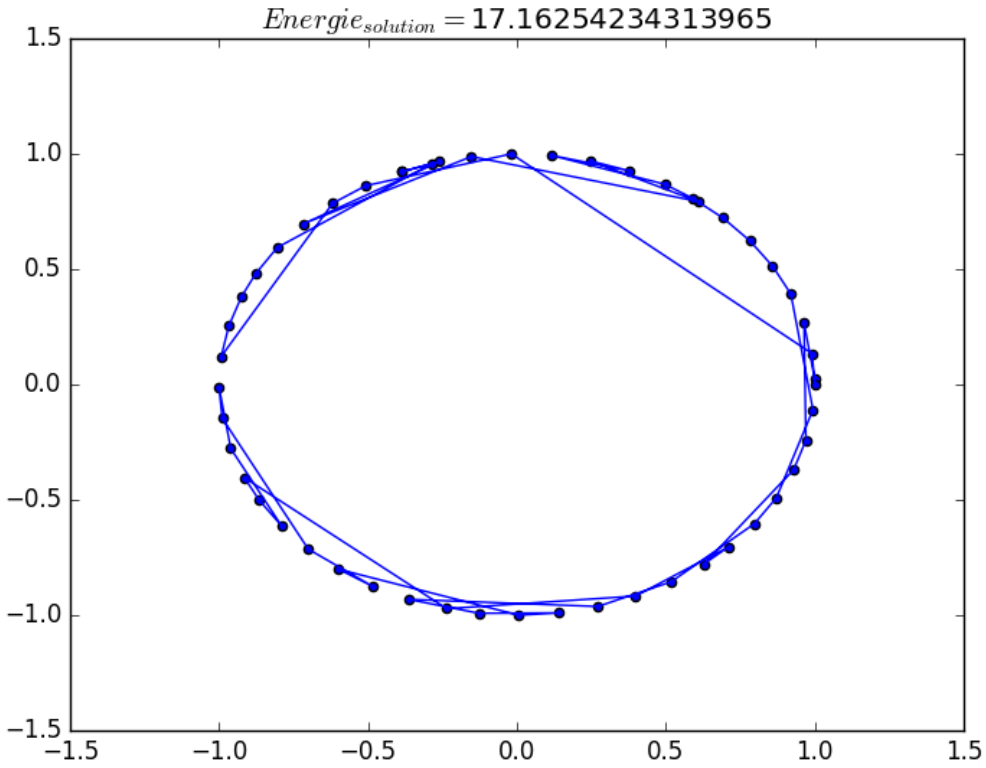
Cette fois ci, le *greedy* est légèrement meilleur. Nous pensons que cela vient des points centraux très proches qui peuvent perturber l'algorithme du recit et engendré des résultats moins bon.

3.3 CitiesN.dat

Pour les versions avec $n = \{50, 60, 80, 100\}$, nous avons généré des points en cercle, afin de savoir le résultat optimal et visualiser à quel point nos algorithmes trouvent la solution optimale.

L'algorithme *greedy* trouve toujours l'optimum global, car en prenant le point le plus proche dans un cercle, on trouve la meilleure solution. Ce n'est donc pertinant que pour nous donner la valeur optimal comme comparaison.

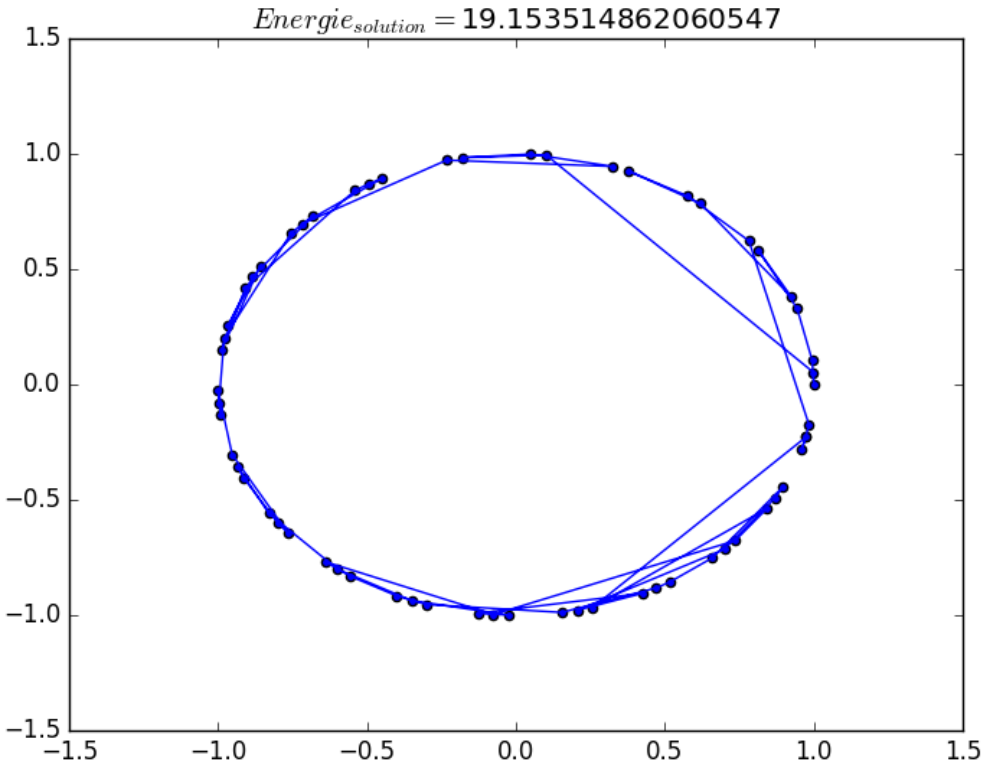
3.3.1 Cities50.dat



Voici le tableau avec la moyenne :

Cities50.dat		
	Moyenne	Déviation standard
Greedy	6.27877907753	1.50789e-07
Recuit	16.9541293144	1.70877

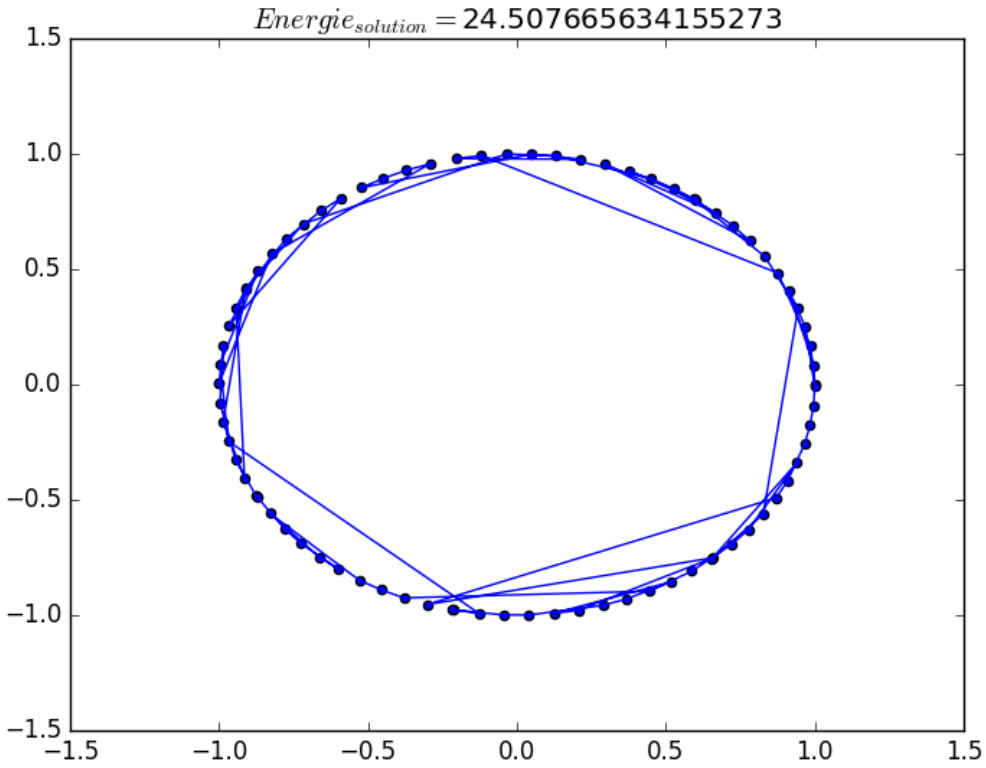
3.3.2 Cities60.dat



Voici le tableau avec la moyenne :

Cities60.dat		
	Moyenne	Déviation standard
Greedy	6.31829538345	0.051879
Recuit	19.7690262794	2.64644

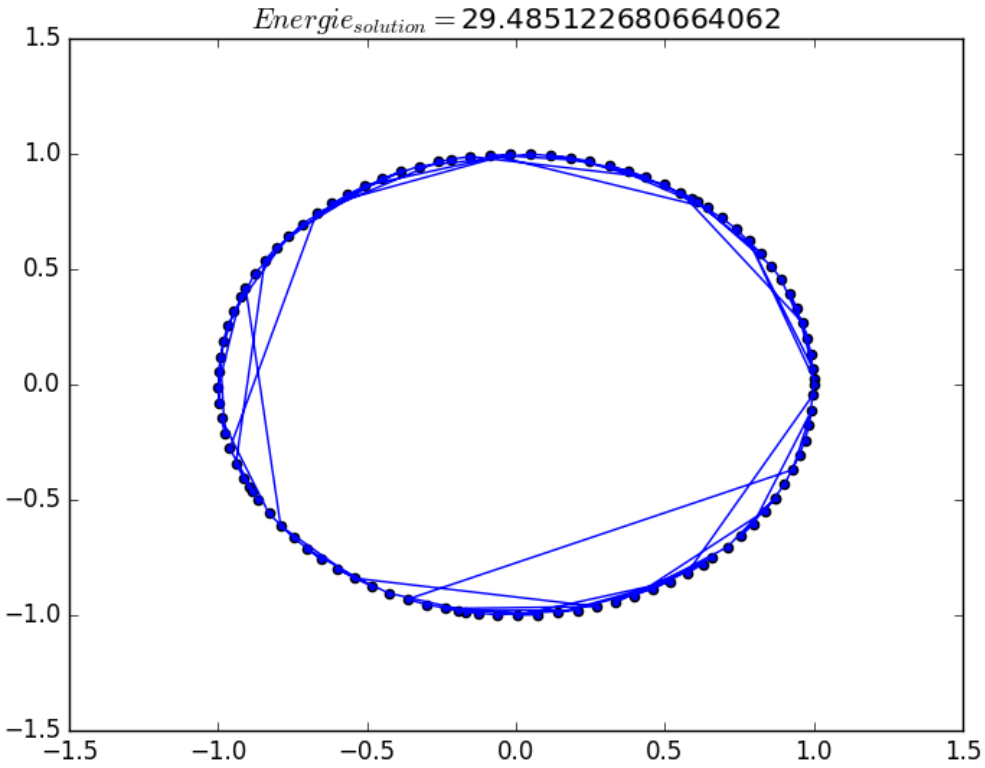
3.3.3 Cities80.dat



Voici le tableau avec la moyenne :

Cities80.dat		
	Moyenne	Déviation standard
Greedy	6.28134675026	5.43678e-07
Recuit	27.2583179474	2.54419

3.3.4 Cities100.dat



Voici le tableau avec la moyenne :

Cities100.dat		
	Moyenne	Déviation standard
Greedy	6.28206834793	3.69356e-07
Recuit	31.6346078873	2.16477

3.3.5 Remarques

On voit que la valeur de l'algorithme *greedy* tend vers $d\pi$ où $d = 2$. On tend donc bien vers le perimètre d'un cercle comme valeur optimale. Concernant le recuit, on remarque que la majorité de la solution est bien placée, sauf certains points (environ 10% de n), ce qui fait augmenter l'énergie.

On peut imaginer que le paysage étant très irrégulier cela influencer le résultat. Il est également possible que les valeurs des paramètres d'acceptations peuvent jouer. Ou bien la manière de diminuer la température.