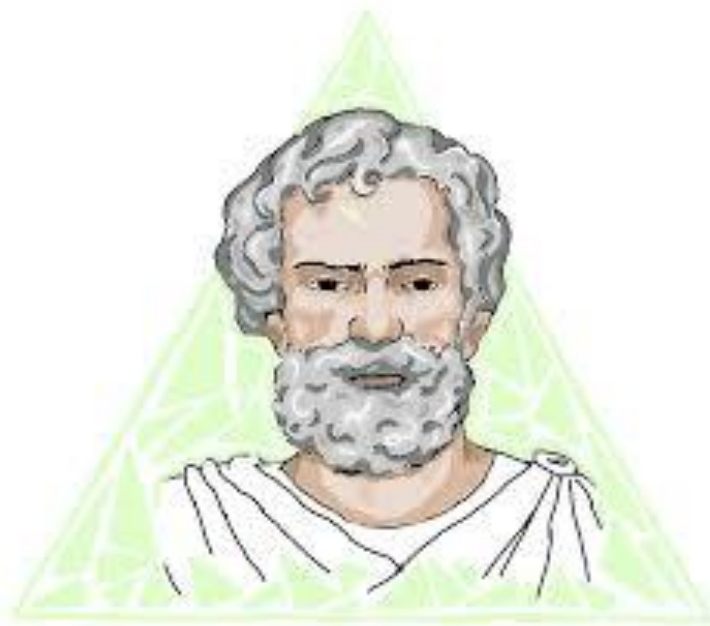




UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Escuela Preparatoria No. 17

Guía de matemáticas Nivel medio superior



Realizada por:
Leslie Livier Orozco Escamilla
Lina Elizabeth Hernández Juárez
Emily Mariana Delgadillo Ruiz
Regina Haydee Ortiz Escamilla

Índice

UNIDAD I CONJUNTOS.....	3
Módulo 2 Conjuntos Cardinales.....	11
Módulo 3 Subconjuntos.....	13
Módulo 4 Operaciones con conjuntos.....	20
Módulo 5 Inducción y Deducción.....	36
Módulo 6.....	39
Proposiciones compuestas	39
Módulo 7.....	41
Negación	41
Módulo 8.....	45
Implicación. Equivalencia Lógica	45
Módulo 9.....	49
Sistema matemático y operaciones binarias	49

UNIDAD I CONJUNTOS

OBJETIVO:

Definir el término conjunto, determinará la pertenencia de un elemento a un conjunto; y la construcción enumerativa y descriptiva de los conjuntos.

La Teoría de Conjuntos es una teoría matemática, que proporciona los mejores medios para entender muchas fases de la matemática y sus aplicaciones en otras ramas de aprendizaje. El primer estudio formal sobre el tema fue realizado por el matemático alemán Georg Cantor¹ en el siglo XIX.

1 Georg Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845, Halle, 6 de enero de 1918) fue un matemático alemán, inventor con Dedekind de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

Cantor descubrió que los conjuntos infinitos no tienen siempre el mismo tamaño, o sea el mismo cardinal: Por ejemplo el conjunto de los racionales es enumerable, es decir del mismo tamaño que el conjunto de los naturales, mientras que el de los reales no lo es: Existen por lo tanto varios infinitos, más grandes los unos que los otros.

La importancia de la Teoría de Conjuntos radica en que a partir de ella se puede reconstruir toda la matemática, salvo la Teoría de Categorías. Por ejemplo, con la Teoría de Conjuntos se pueden definir los siguientes conceptos y probar todas sus propiedades: par ordenado, relación, función, partición, orden, estructuras algebraicas, los naturales, los enteros, los racionales, los reales, los complejos, *etc.*

No existe una definición formal del concepto de conjunto. La idea de conjunto es más bien intuitiva y podemos decir que es una colección de objetos. Así, podemos hablar de un conjunto de personas, de ciudades, de lapiceros o del conjunto de objetos que hay en un momento dado encima de una mesa. Por objeto entenderemos no sólo cosas físicas, como discos, computadoras, *etc.*, si no también abstractos, como son números, letras, *etc.* A los objetos se les llama elementos del conjunto.

Un conjunto está bien definido si se sabe si un determinado elemento pertenece o no al conjunto, así el conjunto de los bolígrafos azules, está bien definido, porque a la vista de un bolígrafo podemos saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque a la vista de una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber distintas personas, que opinen si esa persona es alta o no lo es.

Ejemplos de conjuntos:

1.- Las naranjas en el costal de don Pepe.



2.- Los números: 2, 4, 6, 8 y 10.

3.- Las hojas de un árbol.



4.- Los equipos del fútbol mexicano:



”

5.- Los granos de arena de las playas oaxaqueñas.



6.- Los meses del calendario escolar:



7.- Los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Actividades de aprendizaje

1.- Explica con tus propias palabras el concepto de conjunto.

2.- Da tres ejemplos de conjuntos.

Notación

Conjuntos por extensión o por comprensión

Por lo regular, para denotar a los conjuntos se usan las letras mayúsculas del alfabeto y las minúsculas para sus elementos. Por ejemplo al conjunto de los días de la semana se le puede llamar A y al día lunes por x .

Para representar que un objeto x es elemento de un conjunto A se escribe $x \in A$, que se lee “ x es elemento de A ” o “ x pertenece a A ”. O por el contrario, si “ x no es

elemento de A ” o “ x no pertenece a A ” se escribe $x \notin A$.

Una forma de describir un conjunto es listando sus elementos entre llaves “{ }” y separándolos con comas. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos que son menores que 4 puede ser escrito así

$$\{1, 2, 3\};$$

Otros ejemplos

El conjunto de los días de la semana:

$D = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$; En este conjunto se tiene que “lunes” pertenece al conjunto A, mientras que “enero” no pertenece a A.

El conjunto de los números pares menores que 10:

$$P = \{2, 4, 6, 8\};$$

En este conjunto si $x = 2$ entonces $x \in A$, mientras que si $x = 10$ entonces $x \notin A$.

Si el conjunto tiene una infinidad de elementos, se enlistan unos cuantos entre llaves y se utilizan puntos suspensivos para ilustrar que la lista sigue. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos puede ser escrito

$$\{1, 2, 3, \dots\};$$

Otros ejemplos

El conjunto de números mayores que 1000

$$M = \{1001, 1002, 1003, \dots\};$$

El conjunto de números primos

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\};$$

Esta forma de describir a los conjuntos se conoce con el nombre de **extensión o enumerativa**.

Se debe observar que en un conjunto determinado por extensión no se repite un mismo elemento.

Por ejemplo el conjunto formado por las letras de la palabra “matematica” se representa por extensión así:

$$M = \{m, a, t, e, i, c\}$$

Y a pesar de que la letra “m” aparece dos veces en la palabra “matematica” sólo se escribe una vez en el conjunto. Lo mismo le pasa a la letra “a” que aparece tres veces.

Otra observación importante que se tiene que hacer es que en un conjunto descrito por extensión, el orden de los elementos no importa, es decir, el conjunto M anterior se puede describir por

$$\{m, a, t, e, i, c\} \text{ o por } \{a, e, i, m, t, c\}, \text{ pues tiene los mismos elementos.}$$

A veces también se usa otra forma, que para algunos conjuntos es la única posible, se llama por **comprensión o descripción**. En esta forma se encierra entre las llaves la condición o propiedad que los elementos del conjunto tienen en común.

Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \text{ descrito por extensión.}$$

Como A consiste precisamente de los enteros positivos menores que 10, este conjunto puede ser escrito por comprensión así:

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero positivo menor que } 10\},$$

lo cual se lee “ A es igual al conjunto de todas las x tales que x es un entero positivo menor que 10”.

En esta notación, x denota un elemento típico del conjunto, la barra vertical “ \mid ” se lee “tal que” o “tales que” y lo que sigue después de la barra son las condiciones o propiedades que x debe satisfacer para ser un elemento del conjunto A .

Otros ejemplos

$$A = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ es un número par mayor que } 10\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra matemática}\}$$

Por lo tanto, un conjunto se puede determinar por extensión o por comprensión.

Otros ejemplos

Cuadro comparativo de determinación de conjuntos:

Por extensión

Por comprensión

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$A = \{x/x \text{ es una vocal}\}$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{x/x \text{ es un número par menor que } 10\}$$

$$C = \{m, a, t, e, i, c\}$$

$$C = \{x/x \text{ es una letra de la palabra matemática}\}$$

$$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$D = \{x/x \text{ es un número impar menor que } 10\}$$

$$E = \{b, c, d, f, g, h, j, \dots\}$$

$$E = \{x/x \text{ es una consonante}\}$$

Actividades de Aprendizaje

1.- Describe los conjuntos siguientes por extensión y por comprensión:

a) el conjunto de los números impares menores que 13.

b) el conjunto de los estados de la república mexicana.

c) el conjunto de los deportes.

d) el conjunto de los números mayores que 5 y menores que 17.

e) el conjunto de los matemáticos de la antigüedad.

2.- ¿El elemento "5" pertenece al conjunto de los impares?

3.- ¿El elemento "d" pertenece al conjunto de las vocales?

4.- ¿El elemento "3" pertenece al conjunto de los números primos?

5.- ¿El elemento "Guadalajara" pertenece al conjunto de los estados de la república?

6) Cuáles son los elementos de:

a) El conjunto de los días de la semana

b) El conjunto de las estaciones del año

c) Los números impares menores de 11

d) Los números pares mayor que 10 y menor que 20

e) Los números primos menores de 15

7) Colocar V ó F según lo afirmado sean verdadero o falso

a) $6 \in \{ 2, 4, 5, 6, 9 \}$ ()

b) $y \in \{ o, p, q, x \}$ ()

c) $x \in \{ o, p, q, y \}$ ()

d) $\text{Perú} \in \{ \text{países de Europa} \}$ ()

e) Amazonas $\notin \{ \text{ríos de América} \}$ ()

8. Si tenemos el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

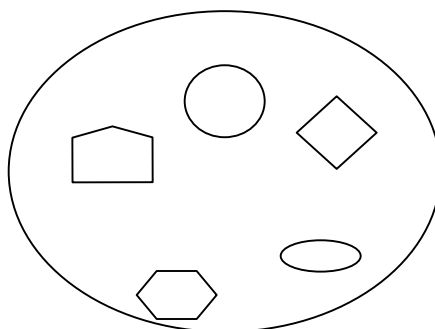
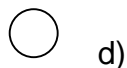
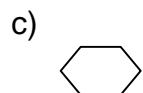
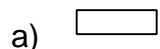
a) $3 \notin A$

b) $2 \in A$

c) $6 \in A$

d) $5 \notin A$

9. Considere el conjunto formado por las figuras geométricas ¿Cuál de los siguientes elementos no pertenece a él?



10. Dado el conjunto

$A = \{ \triangle, \text{rectangle}, \diamond, \bigcirc \}$ ¿Cuál de los siguientes elementos

pertenece a él?



11. Considere el conjunto formado por los países de Centroamérica ¿Qué país no pertenece a este conjunto?

- a) Guatemala
- b) Brasil
- c) El Salvador
- d) Belice

12. El conjunto de los números $\{3, 5, 6, 8, 20, 37\}$, denotado en forma descriptiva es:

- a) $\{ x \mid x \text{ es menor que } 38 \}$
- b) $\{ x \mid x \text{ es mayor que } 38 \}$
- c) $\{ 3, 6, 20, 38 \}$

d) { 1, 7, 9, 25 }

Módulo 2 Conjuntos Cardinales

OBJETIVO:

Encontrará la cardinalidad de un conjunto finito, conocerá los conjuntos finitos e infinitos, el conjunto universo, el conjunto vacío, la igualdad de conjuntos y la equivalencia entre conjuntos.

Un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. En caso contrario, el conjunto es infinito. Por ejemplo:

$M = \{x / x \text{ es un río de la tierra}\}$ es un conjunto finito

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$ es un conjunto infinito

La *Cardinalidad* de un conjunto es el número de elementos que tiene el conjunto.

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d, e\}$ entonces la cardinalidad de A, que se denota por $\text{Card}(A)$ es 5 pues A tiene 5 elementos. Si el conjunto es infinito, decimos que tiene cardinalidad infinita.

Ejemplos

$P = \{x / x \text{ es un país de la tierra}\}$ Conjunto finito

$V = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \dots\}$ Conjunto infinito

Actividades de aprendizaje

De los conjuntos siguientes di si es finito o infinito y en cada caso encuentra su cardinalidad.

- a) $F = \{x / x \text{ es una vocal}\}$
- b) $P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- c) $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- d) $F = \{x / x \text{ es un número natural mayor que } 3\}$

Conjunto Vacío

Es un conjunto que carece de elementos. Se le llama conjunto nulo, y se le denota por el símbolo \emptyset o $\{\}$. Por ejemplo los conjuntos:

$A = \{\text{Los perros que vuelan}\}$

$B = \{x / x \text{ es un mes que tiene 53 días}\}$

son ejemplos de conjuntos vacíos.

Actividades de aprendizaje

De los conjuntos siguientes di si los conjuntos son iguales o diferentes al conjunto vacío:

- a) $A = \{\text{Los días que tienen 28 horas}\}$
- b) $B = \{x / x \text{ es un mes que tiene 29 días}\}$
- d) $C = \{x / x^2 = 9 \text{ y } x \text{ es impar}\}$
- e) $D = \{x / x \text{ es un cuadrilátero con tres lados}\}$

Conjuntos equivalentes

Si dos conjuntos poseen la misma cardinalidad, se dice que son conjuntos equivalentes, ya que tienen el mismo número de elementos, y puede establecerse entre ambos una correspondencia de uno a uno, o biunívoca. Son conjuntos equivalentes el conjunto de sillas de una clase y el del número de alumnos, si todas las sillas están ocupadas y no hay alumnos de pie.

Otro ejemplo:

Los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$ son equivalentes porque tienen el mismo número de elementos.

Conjuntos iguales

Se dice que 2 conjuntos A y B son iguales cuando ambos tienen los mismos elementos, es decir si cada elemento de A pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. La igualdad se denota $A = B$. En la igualdad, el orden de los elementos de cada conjunto no importa.

Ejemplos

- a) Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 1, 2\}$ entonces $A = B$.
- b) Si $E = \{\text{vocal de la palabra mundo}\}$ y $F = \{u, o\}$ entonces $E = F$.

Actividades de aprendizaje

De los conjuntos siguientes di si los conjuntos son iguales o diferentes:

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 4, 1, 2, 6\}$
- b) $E = \{\text{vocal de la palabra sol}\}$ y $F = \{o\}$
- c) $C = \{x / x \text{ es un número natural mayor que 3 y menor que 8}\}$ y $D = \{4, 5, 6, 7\}$
- d) $G = \{\text{consonante de la palabra coco}\}$ y $F = \{c, o\}$

Módulo 3 Subconjuntos

OBJETIVO:

Conocerá la simbología de inclusión, los subconjuntos, el conjunto de números naturales; y definirá los siguientes términos, número primo, y múltiplo de un número

Un conjunto A es un subconjunto de B si todo elemento de A es también un elemento de B. En tal caso, se escribe $A \subseteq B$, y también decimos que A está contenido en B.

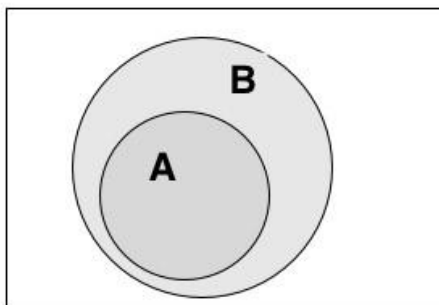
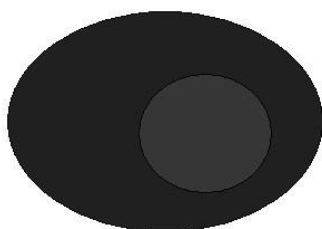
Por ejemplo:

Si $A = \{2, 4\}$ y $B = \{3, 4, 1, 2\}$ entonces $A \subseteq B$, pues cada elemento de A pertenece a B. Sin embargo,

Si $A = \{2, 4\}$ y $B = \{3, 4, 1, 5\}$ entonces A no es subconjunto de B (o no está contenido en B) pues el 4 que es elemento de A no es elemento de B. Y se escribe $A \not\subseteq B$.

La representación gráfica de $A \subseteq B$ está dada por los esquemas siguientes. En el de la izquierda, A es el conjunto pintado de rojo y el B está pintado de azul:

$$A \subseteq B$$



$$A \subseteq B$$

Diagrama que muestra que

Actividades de aprendizaje

De los conjuntos siguientes di si los conjuntos A son subconjuntos de B usando la notación de subconjunto:

a) $A = \{2, 4, 3\}$ y $B = \{3, 4, 1, 2, 5\}$

b) $A = \{\text{vocales}\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f, i, \tilde{n}, o, s, t, u\}$

c) $A = \{0, 2, 4, 3\}$ y $B = \{3, 4, 1, 2, 5\}$

d) $A = \{2, 4, 3, 6\}$ y $B = \{3, 4, 1, 2, 5\}$

e) $A = \{2, 4, 3, 5, 1\}$ y $B = \{3, 4, 1, 2, 5\}$

Conjunto de números naturales N

Los números naturales son un sistema estudiado en aritmética, en el cual el conjunto de objetos es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ (Los puntos suspensivos significan “y así sucesivamente”).

Escribir 1, 2, 3 es diferente de escribir 1, 2, 3,... porque, en el primer caso se consideran únicamente los primeros tres números Naturales y, en el segundo caso, los puntos suspensivos indican que estamos considerando todos los números Naturales. Así, hay mucha diferencia en escribir:

1, 2, 3, 4 Y 1, 2, 3

¿Habrá diferencia en escribir: 1, 2, 3, 4,... Y 1, 2, 3,...?

Claro que no hay diferencia. Cada uno de los números 1, 2, 3,... es un número natural, por lo tanto 48 es un número natural y 479 también lo es. De las siguientes afirmaciones ¿cuáles son ciertas y cuáles falsas?

$\frac{1}{2}$ es un número Natural _____

4715.4 es un número Natural _____

83 295 891 es un número natural _____

Esperamos que hayas puesto falsas las dos primeras y verdadera la última.

En este conjunto podemos ordenar a los elementos a través de las relaciones de orden “menor o igual que”, “mayor o igual que”, simbolizado como \leq , \geq , respectivamente y como operaciones fundamentales la suma y el producto $\{+, \times\}$. El conjunto de los números naturales se identifica con la letra N , es decir:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

¿Podrías decir cuál es el último elemento de este conjunto? _____. La respuesta es no, pues siempre que se de un número natural siempre habrá uno más

grande que él. Por ejemplo: si pensamos que el número más grande es 123456798, basta con sumarle uno para obtener un número más grande que él: 123456799.

De esta manera, resumimos que: La cantidad de números naturales es infinita, porque siempre es posible agregar un número más. No existe un número que sea el mayor de todos.

DIVISIBILIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Desde hace mucho tiempo, el hombre se ha visto ante la necesidad de tener que repartir cantidades de cosas entre personas, dándole a cada una el mismo número de unidades.

A través de la práctica el hombre descubrió que este problema a veces sí tenía solución y a veces no. Este hecho hizo que se estudiase que relación se encontraba entre los números en los que este problema sí tenía solución y los números en los que no. De esta forma comenzó a estudiarse la divisibilidad.

De esta forma surge la pregunta natural ¿cuándo un número es divisible por otro? _____

Un número es divisible entre otro cuando lo contiene exactamente un número entero de veces, es la respuesta.

En otras palabras, si dividimos un número entre otro número, el cociente debe ser un número entero y el residuo debe ser cero.

Por ejemplo:

¿El 20 es divisible entre 5? _____

Así es, pues el cociente es 4 y el residuo es cero

¿El 30 es divisible entre 6? _____

Claro, el cociente es 5 y el residuo es cero.

¿El 48 es divisible entre 9? _____

No verdad, pues el cociente es 5 pero el residuo es 3.

De manera formal, decimos que un número natural b es **divisible** por otro natural a (distinto de cero) si existe un tercer natural c tal que $b = a \cdot c$. Se suele expresar de la forma $a|b$, que se lee a divide a b (o a es **divisor** de b , o también b es **múltiplo** de a).

Por ejemplo, 6 es divisible por 3, ya que $6 = 3 \cdot 2$; pero no es divisible por 4, pues no existe un entero c tal que $6 = 4 \cdot c$. Es decir, el residuo de la división de 6 entre 4 no es cero.

Usando esto último, ¿qué se puede decir de la división de 36 por 4? _____

Si escribiste que el 6 es divisible por 4 porque existe el número natural 9 tal que $6 = 4 \cdot 9$, estás en lo correcto.

Y ¿qué se puede decir de la división de 43 por 6? _____

En este caso, tu respuesta debió ser que el 43 no es divisible por 6 pues no existe un número natural que multiplicado por el 6 te de 43. Aunque esta respuesta puede ser afirmativa si tratamos con números racionales como lo veremos más adelante.

Subconjuntos del conjunto N

a) Conjunto de múltiplos de k; $k \in \mathbb{N}$

Si **k es un elemento de N**, entonces $M = \{k, 2k, 3k, 4k, 5k, \dots\}$ será el conjunto de los múltiplos de "k"

Ejemplo: El conjunto de múltiplos de 7 será: $\{7, 14, 21, 28, 35, \dots\}$

Se dice que un número es divisible entre otro cuando su cociente es un número entero y el residuo es 0. Siempre que un número es múltiplo de otro, es divisible entre este; así 15 que es múltiplo de 3 y de 5, por lo tanto es divisible entre 3 y entre 5.

b) Conjunto de números primos

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$

Todo número natural mayor que 1 es divisible por 1 y por sí mismo. Por ejemplo el 45 es divisible por el 1 y por sí mismo (claro, hay otros que lo dividen, por ejemplo el 5 y el 9)

Los números que no admiten más que estos dos divisores (el 1 y sí mismo) se denominan números primos. Los que admiten más de dos divisores se llaman números compuestos. En otras palabras, los número primos son aquellos números que son divisibles por **sí mismos** y por **la unidad**; es decir estos números solamente presentan dos divisores.

¿Cuál de los números siguientes es número primo? _____

1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97...

¡ Eso es, todos son números primos!

c) Conjunto de números compuestos

$C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, \dots\}$

Los números compuestos son múltiplos de aquellos que son sus factores; así, 12 es un múltiplo de 2, de 3, de 4 y de 6, ya que estos números están contenidos exactamente en 12.

Los números enteros compuestos, se pueden expresar como productos de potencias de números primos, a dicha expresión se le llama descomposición de un número en factores primos.

La descomposición de un número es muy útil pues ayuda a poder calcular el máximo común divisor o mínimo común múltiplo de varios números.

Para descomponer un número en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

- 1.- Dividir el número por el menor número primo posible.
- 2.- Si el resultado puede dividirse nuevamente por ese número, realizar la división.
- 3.- Si el resultado no puede volver a dividirse por ese número, buscar el menor número primo posible para continuar dividiendo.
- 4.- Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

90		2
45		3
15		3
5		5
1		

90 = 2 × 3² × 5

Otros ejemplos:

20196		2	12675		3
10098		2	4225		5
5049		3	845		5
1683		3	169		13
561		3	13		13
187		11	1		
17		17			
1					

$$20196 = 2^2 \times 3^3 \times 11 \times 17$$

$$12675 = 3 \times 5^2 \times 13^2$$

Actividades de Aprendizaje

- 1.- ¿Cuál de los siguientes números es primo? 13, 33, 93
- 2.- ¿Cuál de los siguientes números no es primo? 53, 63, 73
- 3.- ¿Cuál de los siguientes números es un número compuesto? 11, 17, 20
- 4.- ¿Cuál de los siguientes números no es un número compuesto? 41, 57, 65

5.- ¿Cuál de los siguientes números es divisor de 20? 3, 5, 7.

6.- ¿Cuál es la cantidad de números primos menores que 100?




7.- Descompón en producto de factores primos los números siguientes:

$$6936 =$$




$$1200 =$$



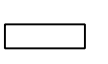
8. ¿En cual de las siguientes opciones se muestra un subconjunto propio de:

{ , , ,  }

a) { , ,  }

b) { , ,  }

c) { , ,  }

d) { , ,  }

9. ¿En que opción se muestra un subconjunto de $A = \{ 5, 4, 3, 2, 1 \}$



a) { 6, 5, 4 }

b) { 3, 5, 1 }

c) { 1, 2, 3, 6 }

d) { 1, 2, 7, 8, 9 }

10. ¿Cuál es un subconjunto propio de { 8, 10, 12, 14 }

a) { 8, 9, 10, 11 }

b) { 8, 10, 12 }

c) { 9, 11, 13 }

d) { 8, 10, 13, 14 }

11. Todos los números primos del conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

a) { 1, 2, 3, 5, 7, 9 }

b) { 1, 2, 3, 4, 5 }

c) { 2, 3, 5, 7 }

d) { 2, 4, 6, 8 }

12. ¿En que opción se muestra el conjunto de los múltiplos de 10 ?

a) { 2, 5, 10 }

b) { 10, 15, 20 }

c) { 10, 20, 30 }

d) { 1, 2, 3..... 10 }

13. ¿Cuál es la factorización en factores primos de 72 ?

- a) $2 \times 2 \times 2 \times 9$
- b) $2 \times 3 \times 3 \times 4$
- c) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
- d) $2 \times 2 \times 3 \times 6$

14. ¿Cuál es la factorización en factores primos de 105?

- a) $1 \times 7 \times 15$
- b) 1×105
- c) $1 \times 5 \times 21$
- d) $1 \times 3 \times 5 \times 7$

Módulo 4 Operaciones con conjuntos

OBJETIVO:

Conocerá los términos y representación gráfica de la unión entre dos conjuntos mediante el diagrama de Venn, el conjunto universo, la intersección de dos conjuntos, el complemento de un conjunto arbitrario, la relación e inclusión y operaciones entre conjuntos.

Conjunto Universo

Es el conjunto que contiene a todos los elementos de los que se este tratando. Se le denota por la letra U. Por ejemplo, cuando se habla del conjunto de los animales puede pensarse que sus elementos son peces, aves, conejos, monos, etc. Así el conjunto universal es $U = \{\text{animales}\}$. Al conjunto universo también se le llama conjunto universal.

Actividades de aprendizaje

Define con tus propias palabras el conjunto universo.

Da tres ejemplos de conjuntos universo.

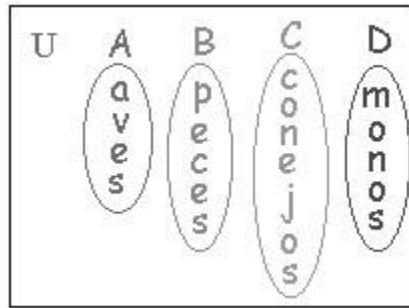
Representación gráfica de un conjunto mediante el diagrama de Venn, considerando el conjunto universo

Un diagrama de Venn (llamado así por su inventor John Venn) es una representación gráfica de los conjuntos. A cada conjunto se le considera encerrado dentro de círculos u otras figuras cerradas. Usualmente se dibujan dentro de un rectángulo el cual denota al conjunto universo. Los diagramas son empleados para representar tanto a los conjuntos como a sus operaciones, y constituyen una poderosa herramienta geométrica, desprovista de validez lógica.

John Venn (Drypool, 4 de agosto de 1834 - Cambridge, 4 de abril de 1923), fue un matemático y lógico británico.

Destacó por sus investigaciones en lógica inductiva. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad y cantidad) y silogismos. Los diagramas de Venn permiten, además, una comprobación de la verdad o falsedad de un silogismo. Posteriormente fueron utilizados para mostrar visualmente las operaciones más elementales de la teoría de conjuntos

Por ejemplo, el conjunto universo de los animales se representa gráficamente como se observa a continuación:



Observar que los conjuntos:

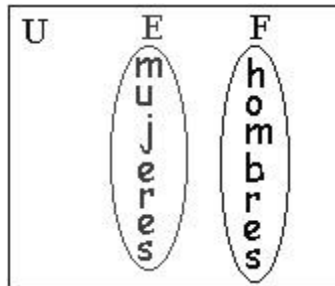
$$A = \{ \text{aves} \} \quad B = \{ \text{peces} \} \quad C = \{ \text{conejos} \} \quad D = \{ \text{monos} \}$$

Todos son subconjuntos del conjunto universo U.

Otro ejemplo:

Si el conjunto universo es el conjunto de seres humanos entonces sus elementos pueden ser los hombres y mujeres.

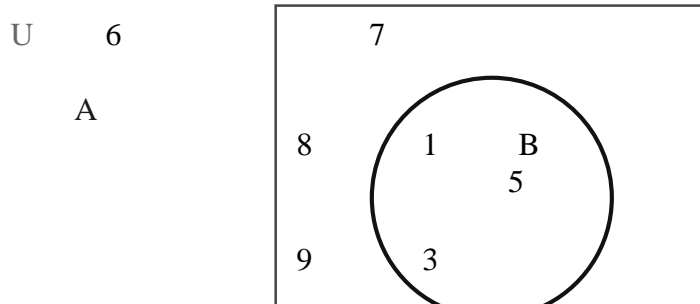
Gráficamente se representa por el diagrama de Venn tal como se observa a continuación.

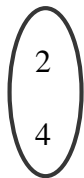


Otros ejemplos:

Si el conjunto universo es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

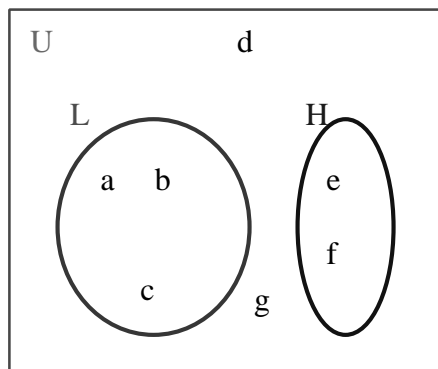
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 4\}$ entonces el diagrama de Venn es:





Observar que el conjunto B es subconjunto de A.

Si el conjunto universo es $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
 $L = \{a, b, c\}$ y $H = \{e, f\}$ entonces el diagrama de Venn es



Observar que los conjuntos L y H no tienen elementos en común. En este caso se llaman **conjuntos ajenos**.

Actividades de aprendizaje

Representa gráficamente los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn considerando al conjunto universo U que se da en cada caso:

- a) $A = \{1, 4, 5\}$, con conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- b) $B = \{\text{consonantes}\}$, con conjunto universo $U = \{\text{alfabeto español}\}$.
- c) $C = \{\text{polígonos}\}$, con conjunto universo $U = \{\text{figuras geométricas}\}$.
- d) $D = \{1, 2, 3\}$ y $F = \{4, 5\}$ con conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Unión de conjuntos.

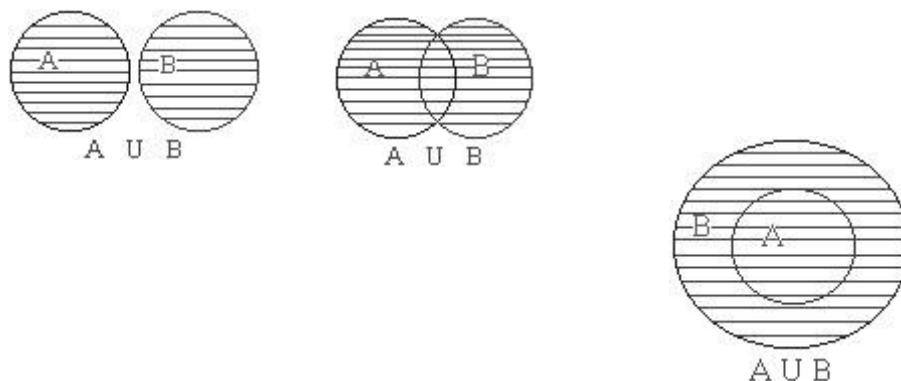
La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos.

Se denota: $A \cup B$. La unión de conjuntos se define como:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Observar que en la definición de la unión de conjuntos utilizamos la letra “o”, más adelante veremos que esta letra juega un papel importante como conector lógico.

Mediante diagramas de Venn, las uniones de conjuntos pueden ser como se ilustra:



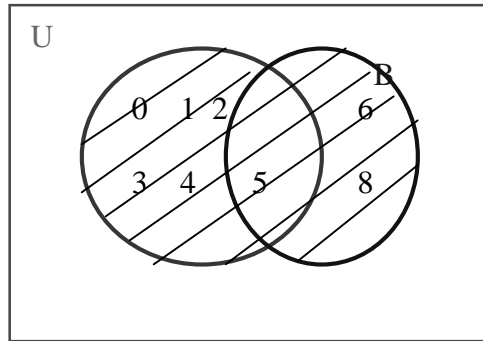
	Quando tienen
Quando no tienen	Quando todos los elementos de un
	algunos
elementos	conjunto pertenecen a otro
	elementos comunes
comunes conjunto	

Por ejemplo:

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{5, 6, 8\}$ entonces la unión de A con B es el conjunto $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

Observar que la unión de A con B consiste de todos los elementos de A y de B y en caso de que tengan elementos en común, estos deben aparecer una sola vez en la unión. Por ejemplo, el elemento “5” pertenece tanto a A como a B pero en la unión sólo debe aparecer una vez.

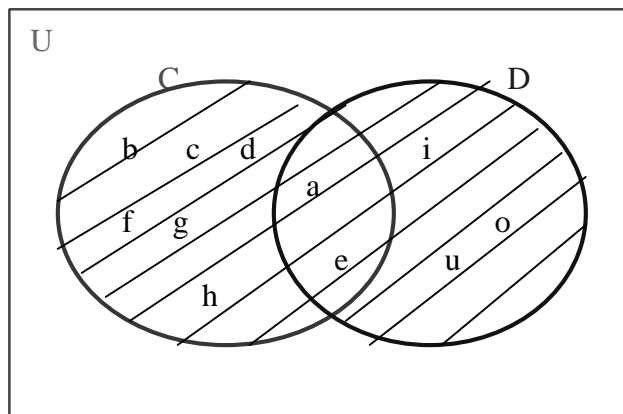
En el diagrama de Venn, lo iluminado representa la unión de A con B:



Veamos otros ejemplos:

1.- Si $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $D = \{a, e, i, o, u\}$ entonces la unión de C con D es el conjunto

$$C \cup D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}$$

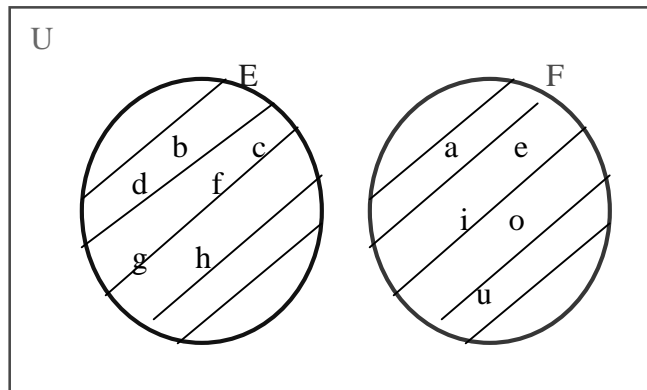


La región sombreada es $C \cup D$

2.- Si $E = \{b, c, d, f, g, h\}$ y $F = \{a, e, i, o, u\}$ entonces la unión de E con F es el conjunto

$$E \cup F = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}.$$

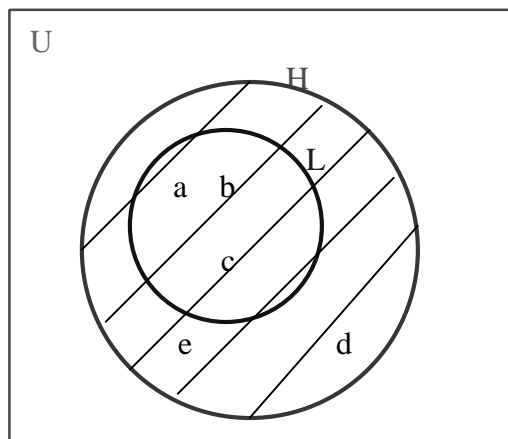
En este caso los conjuntos E y F son ajenos y la unión queda representada en el diagrama de Venn como sigue:



La región sombreada es $E \cup F$

3.- Si $L = \{a, b, c\}$ y $H = \{a, b, c, d, e\}$ entonces la unión de L con H es el conjunto $L \cup H = \{a, b, c, d, e\}$

En este caso, el conjunto L es subconjunto de H entonces la unión resulta el mismo conjunto H. El diagrama de Venn queda como sigue:

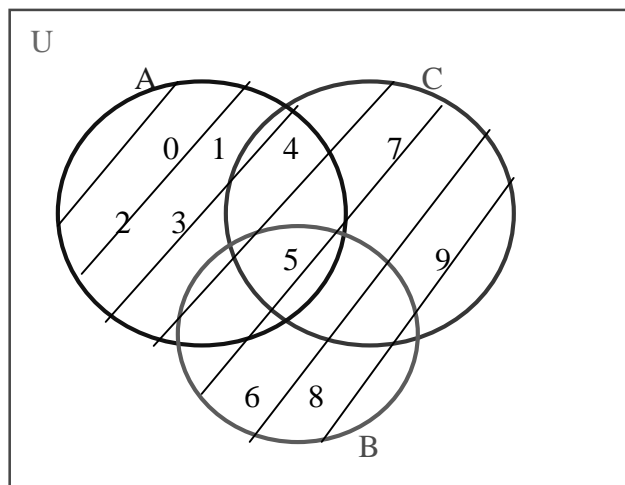


La región sombreada es $E \cup F$

4.- También se pueden unir más de dos conjuntos:

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 8\}$ y $C = \{4, 5, 7, 9\}$ entonces la unión de A, B y C es el conjunto

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9\}$$



La región sombreada es $A \cup B \cup C$

5.- Si $C = \{\text{personas obesas}\}$ y $D = \{\text{personas hipertensas}\}$



entonces $C \cup D = \{\text{personas obesas o hipertensas}\}$

Actividades de aprendizaje

- 1.- Define con tus propias palabras la unión de dos conjuntos.
- 2.- Representa gráficamente la unión de los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn
 - a) $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $D = \{a, b, c, e, i, o, u\}$
 - b) $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F = \{5, 6, 7\}$
 - c) $L = \{2, 4, 6\}$ y $H = \{\text{pares}\}$
 - d) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 8, 7, 2\}$ y $C = \{2, 4, 5, 7, 9\}$

Intersección de conjuntos

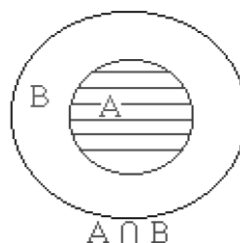
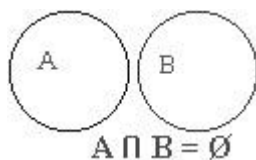
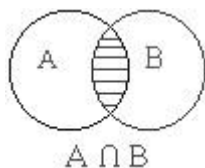
Se define la intersección de dos conjuntos A y B al conjunto de elementos que son comunes a A y B. Se denota por $A \cap B$, que se lee: A intersección B.

La intersección de A y B también se puede definir:

$$A \cap B = \{ x / x \in A \text{ y } x \in B \}$$

Observar que en la definición de la intersección de conjuntos utilizamos la letra “y”. Más adelante veremos que esta letra juega un papel importante como conector lógico.

Mediante un diagrama de Venn se tienen los casos siguientes:



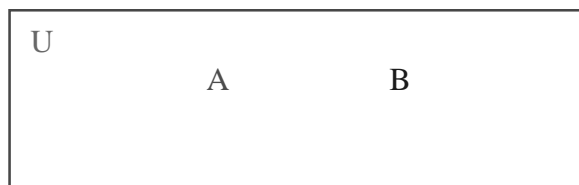
Cuando tienen Cuando no tienen Cuando todos los elementos de un elementos
comunes elementos comunes conjunto pertenecen a otro conjunto

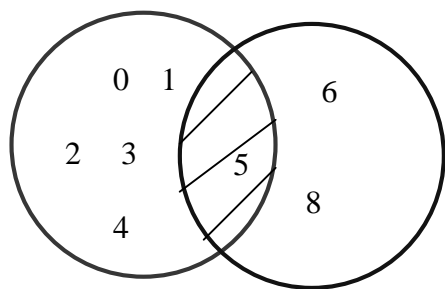
Por ejemplo:

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{5, 6, 8\}$ entonces la intersección de A con B es el conjunto

$$A \cap B = \{5\}$$

La intersección de A con B consiste de todos los elementos que tienen en común A y B, es decir, de los elementos que se repiten. En este caso, el elemento “5” pertenece tanto a A como a B (es el que se repite) y ningún otro está en ambos. Así que la intersección de A con B consiste sólo del “5”. El diagrama de Venn es como sigue. Lo iluminado representa $A \cap B$.



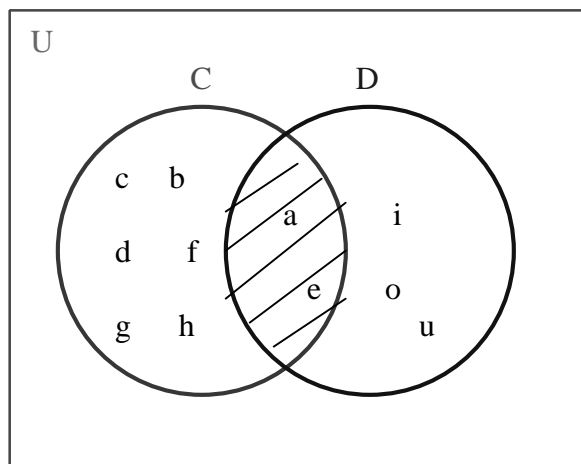


La región sombreada es $A \cap B$

Otros ejemplos:

1.- Si $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $D = \{a, e, i, o, u\}$ entonces la intersección de C con D es el conjunto

$$C \cap D = \{a, e\}$$



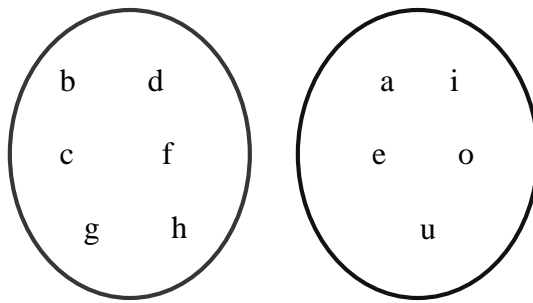
La región sombreada es $C \cap D$

2.- Si $E = \{b, c, d, f, g, h\}$ y $F = \{a, e, i, o, u\}$ entonces la intersección de E con F es el conjunto

$$E \cap F = \{\}$$

En este caso los conjuntos E y F son ajenos y la intersección es el conjunto vacío. Así que en el diagrama de Venn no se ilumina nada



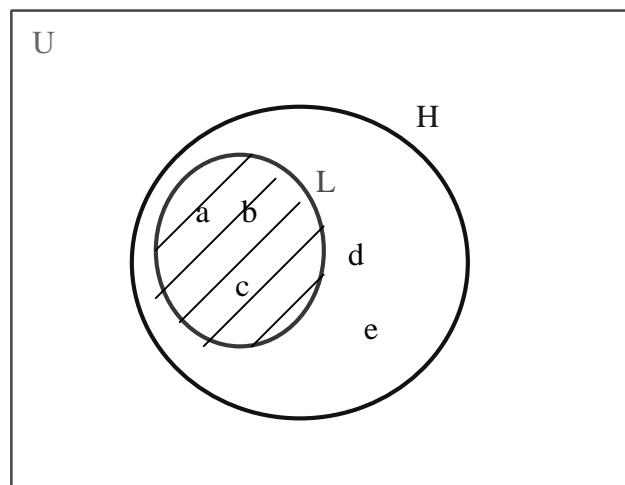


Aquí no se sombrea nada, pues $E \cap F = \varnothing$

3.- Si $L = \{a, b, c\}$ y $H = \{a, b, c, d, e\}$ entonces la intersección de L con H es el conjunto

$$L \cap H = \{a, b, c\}$$

En este caso, el conjunto L es subconjunto de H entonces la intersección resulta ahora el conjunto L, pues los elementos que tienen en común L y H son todos los de L. El diagrama de Venn queda como sigue:

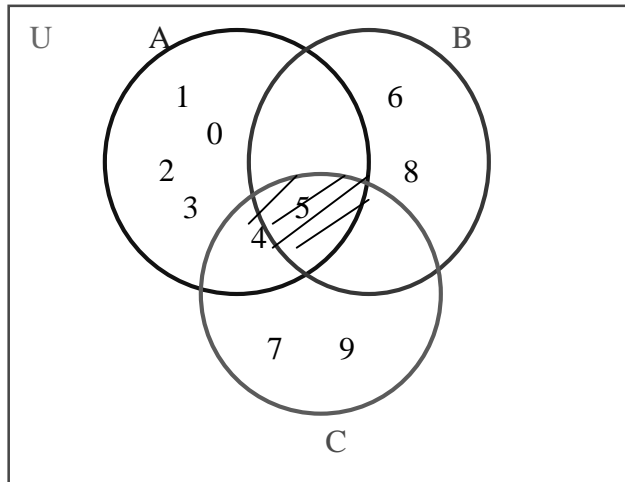


La región sombreada es $L \cap H$, la cual coincide con L

4.- También se pueden intersectar más de dos conjuntos:

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 8\}$ y $C = \{4, 5, 7, 9\}$ entonces la intersección de A, B y C es el conjunto

$$A \cap B \cap C = \{5\}$$



La región sombreada es $A \cap B \cap C$

Observa que en este caso, el elemento 5 es el único que se encuentra en los tres conjuntos. Es por eso que es el único elemento que forma la intersección de los tres conjuntos.

5.- Si $C = \{\text{personas obesas}\}$ y $D = \{\text{personas hipertensas}\}$ entonces $C \cap D = \{\text{personas obesas e hipertensas}\}$



La obesidad es un proceso que afecta tanto a varones como a mujeres. El estilo de vida de la sociedad actual propicia su aparición.

Actividades de aprendizaje

- 1.- Define con tus propias palabras la intersección de dos conjuntos.
- 2.- Representa gráficamente la intersección de los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn

a) $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $D = \{a, b, c, e, i, o, u\}$

b) $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F = \{5, 6, 7\}$

c) $L = \{2, 4, 6\}$ y $H = \{\text{pares}\}$

d) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 8, 7, 2\}$ y $C = \{2, 4, 5, 7, 9\}$

Diferencia de Conjuntos

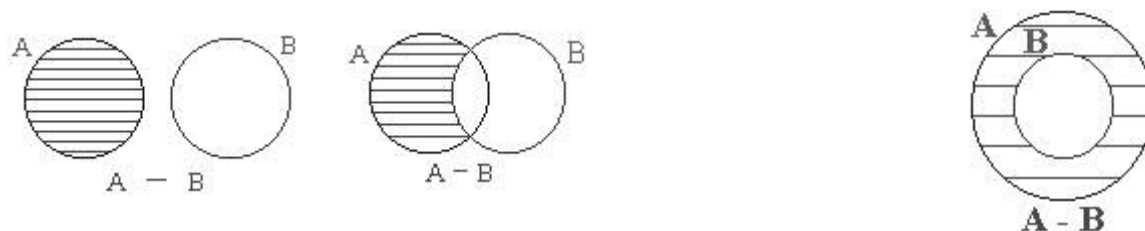
Se denomina diferencia de dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos de A pero que no pertenecen a B.

La diferencia se denota por: $A - B$ que se lee: A diferencia B o A menos B.

Se define la diferencia de dos conjuntos también como:

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Mediante un diagrama de Venn se tienen los casos siguientes:



Quando no tienen elementos comunes Quando tienen elementos comunes Quando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto

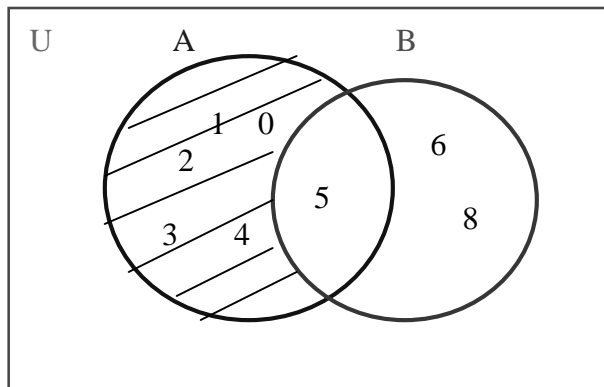
Por ejemplo:

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{5, 6, 8\}$ entonces la diferencia de A con B es el conjunto:

$$A - B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Obsérvese que la diferencia de A con B consiste de todos los elementos que pertenecen a A pero que no están en B. En este caso, los elementos 0, 1, 2, 3 y 4 pertenecen a A y no pertenecen a B mientras que el elemento "5" pertenece tanto a A como a B, por lo tanto no se debe poner en la diferencia de A con B

El diagrama de Venn es como sigue. Lo iluminado representa $A - B$:



La región sombreada es $A - B$

Observar que no es lo mismo $A - B$ que $B - A$:

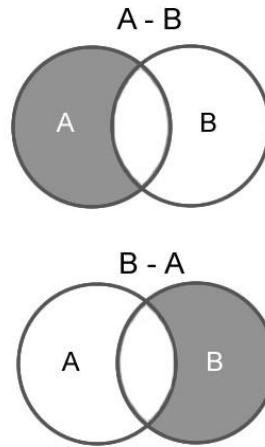
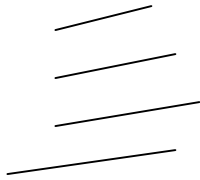


Diagrama de Venn que muestra $A - B$ y $B - A$

En el ejemplo anterior se tiene que $B - A = \{6, 8\}$, pues en este caso se escriben todos los elementos que están en B y que no están en A y su diagrama queda así:



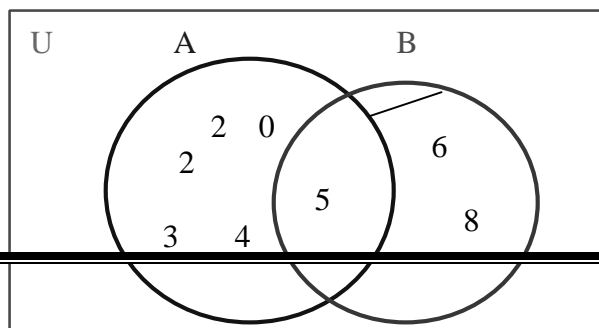
La región sombreada es $B - A$

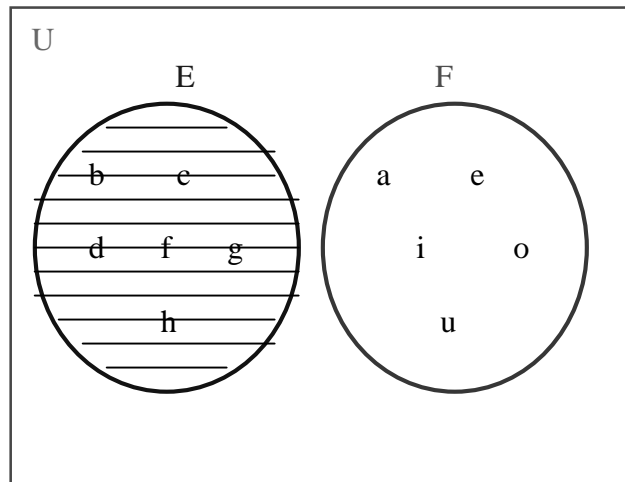
Otros ejemplos:

1.- Si $E = \{b, c, d, f, g, h\}$ y $F = \{a, e, i, o, u\}$ entonces la diferencia de E con F es el conjunto

$$E - F = \{b, c, d, f, g, h\}.$$

En este caso los conjuntos E y F son ajenos y la diferencia es el mismo conjunto E pues los elementos de E que no están en F son todos los elementos de F.

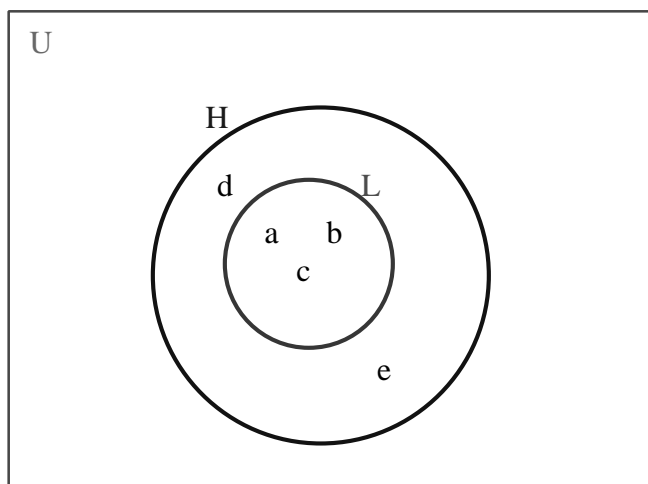




La región sombreada es $E - F$

2.- Si $L = \{a, b, c\}$ y $H = \{a, b, c, d, e\}$ entonces la diferencia de L con H es el conjunto
 $L - H = \{ \}$

En este caso, se observa que el conjunto L es subconjunto de H entonces la diferencia resulta ahora el conjunto vacío, pues los elementos que están en L también son elementos de H. Así que en el diagrama de Venn no se ilumina nada pues el vacío no se puede iluminar y queda como sigue:



Aquí no hay región sombreada pues $L - H = \varnothing$

3.- Si $C = \{\text{personas obesas}\}$ y $D = \{\text{personas hipertensas}\}$ entonces

$C - D = \{\text{personas obesas que no son hipertensas}\}$



Actividades de aprendizaje

- 1.- Define con tus propias palabras la diferencia de dos conjuntos.
- 2.- Representa gráficamente la diferencia de los conjuntos siguientes mediante diagramas de Venn
 - a) $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $D = \{a, b, c, e, i, o, u\}$, $C - D$
 - b) $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F = \{5, 6, 7\}$, $E - F$
 - c) $L = \{2, 4, 6\}$ y $H = \{\text{pares}\}$, $L - H$

Complemento de un conjunto

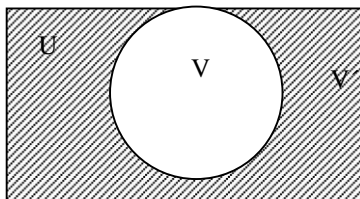
Si un conjunto A es subconjunto de otro conjunto universal U , *al conjunto A' formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A , se le llama **complemento de A** . Simbólicamente se expresa:*

$$A' = \{x / x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Ejemplo

$V = \{a, e, i, o, u\}$

El complemento de V es: $V' = \{\text{Consonantes del alfabeto}\}$

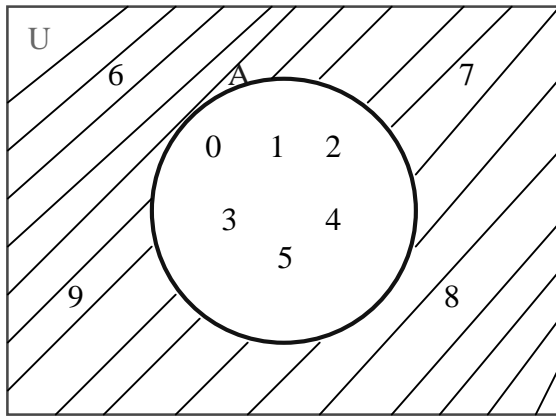


Por ejemplo:

Si el conjunto universal es $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces el complemento de A es el conjunto:

$$A' = \{6, 7, 8, 9\}$$

Es decir, el complemento de A está formado por los elementos que le faltan a A para ser el conjunto universal. Observar que siempre un conjunto unión su complemento forman el conjunto universal. Su diagrama de Venn queda como sigue y lo iluminado es el complemento de A :

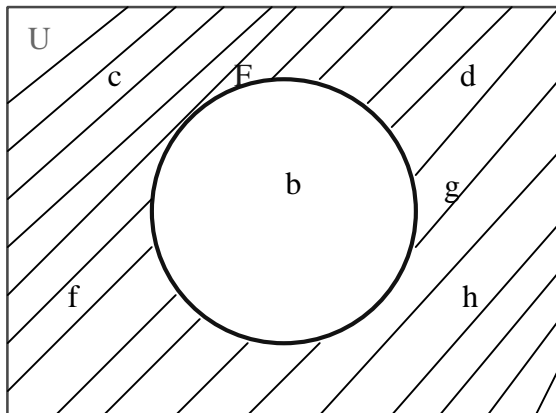


La región sombreada es A'

Otros ejemplos:

Si el conjunto universal es $U = \{b, c, d, f, g, h\}$ y $F = \{b\}$ entonces el complemento de F es el conjunto

$$F' = \{c, d, f, g, h\}.$$



La región sombreada es F'

Si $U = \{\text{personas}\}$ y $C = \{\text{personas obesas}\}$ entonces $C' = \{\text{personas no obesas}\}.$



Módulo 5 Inducción y Deducción

OBJETIVO:

Distinguirá razonamientos en que se empleen los métodos inductivo y deductivo; la definición, construcción y forma de graficar en Diagrama de Venn las proposiciones simples y abiertas identificando su valor de verdad.

Lógica

Es la ciencia que tiene por objeto llegar a la verdad, utilizando el método racional.

Razonamiento inductivo

Es el proceso de encontrar un principio general, basándose en la presentación de hechos o casos particulares.

Ejemplo:

- Hecho numero uno: Meter la mano en agua a 350 grados (quemadura).
- Hecho numero dos: Meter la mano en agua a 350 grados (quemadura).
- Hecho numero tres: Meter la mano en agua a 350 grados (quemadura).
- Principio General: Al meter la mano en agua a 350 grados sufrirías quemaduras de primer grado.

Usemos el razonamiento inductivo para establecer un principio general:

Un borrego fue alimentado con alfalfa durante nueve días consecutivos.

¿qué induces que pasó en el décimo día?

Conclusión: _____

Razonamiento deductivo

Es el proceso de utilizar un principio general aceptado como verdadero para obtener una conclusión en un caso o hecho en particular.

Ejemplo:

- Principio general aceptado como verdadero: Al meter la mano en agua a 350 grados sufrirías quemaduras de primer grado.
- Hecho numero uno: Meter la mano en agua a 350 grados (quemadura).

Usemos el razonamiento deductivo para establecer un principio particular:

Todos los estudiantes de prepa aprueban matemáticas. Si Juan es un estudiante de prepa entonces:

Conclusión: _____ **Proposición**

Es una oración de la que se puede decir si es verdadera o falsa.

Por ejemplo:

El perro es un animal mamífero (verdadera) México
está en el continente europeo (falsa)

Dos ejemplos de oraciones que no son proposiciones abiertas son las siguientes:

Karla tiene 10 años (no es verdadera ni falsa puesto que no se sabe de que Karla se está hablando).

Juan Gabriel es el mejor cantante de México. (no es verdadera ni falsa puesto que no se sabe de que Juan Gabriel se está hablando).

Proposiciones simples

Son las oraciones o proposiciones que inmediatamente se puede decir si son verdaderas o son falsas.

Valor de verdad: Es la clasificación de la proposición simple de acuerdo a si es verdadera o es falsa.

Ejemplos:

Proposición simple: Los números pares son impares.

Valor de verdad: Falso.

Proposición simple: Monterrey es la capital de Nuevo León.

Valor de verdad: Verdadero.

Proposiciones abiertas

Es una oración en la que interviene alguna variable (letra) y se debe tener un conjunto de reemplazamiento para decidir si es verdadera o falsa.

Conjunto de verdad: Es el conjunto de elementos que hacen que la proposición sea verdadera.

Ejemplos:

Oración abierta: X es un numero impar

Conjunto de reemplazamiento: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

Conjunto de verdad: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}

Oración abierta:

X es un numero primo

Conjunto de reemplazamiento: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

Conjunto de verdad: { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

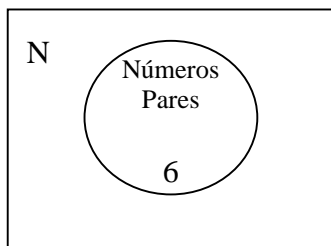
Gráfica de proposiciones

Los diagramas de Venn son una forma de graficar proposiciones de tal manera que nos puedan ayudar a identificar mas fácilmente los conjuntos.

Ejemplos:

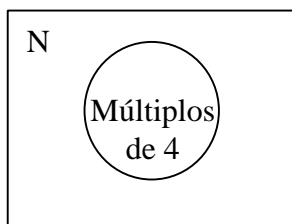
Proposición simple: El numero 6 es un numero par.

Diagrama de Venn



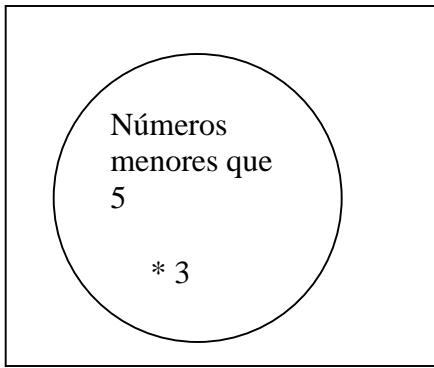
Proposición abierta: X es un múltiplo de 4.

Diagrama de Venn



Proposición: $3 < 5$

Esta proposición dice que el 3 es un elemento del conjunto de números menores que 5 y su gráfica es:



Módulo 6

Proposiciones compuestas

OBJETIVO:

Conocerá las proposiciones simples y compuestas, la conjunción de proposiciones, la disyunción de proposiciones, la disyunción inclusiva y la exclusiva

PROPOSICIONES COMPUESTAS: Es la unión de dos proposiciones simples mediante un conector lógico: "y", "o", "si...entonces".

CONJUNCIÓN: Es la unión de dos proposiciones simples unidas por el conectivo lógico “y”.

Ejemplo: Laura es una mujer **y** trabaja
El número cinco es número dígito **y** es impar

Para que una conjunción sea verdadera, las dos proposiciones deberán ser verdaderas.

Por ejemplo, la proposición: El perro tiene cuatro patas y es mamífero es verdadera pues las dos proposiciones simples que la forman son verdaderas.

Para que una conjunción sea falsa, una de las proposiciones deberá ser falsa.

La proposición: El perro tiene cuatro patas y vuela es falsa pues aunque la primer proposición simple es verdadera, la segunda es falsa.

La CONJUNCION, se representará como una INTERSECCION de conjuntos.

Ejemplo: x es número dígito y es número par.

Primero determinamos, los elementos de la primer proposición

{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Después los elementos de la segunda proposición

{2,4,6,8,10,12...}

y vemos cuales son los números que cumplen con la condición de ser números dígitos y a la vez pares. En este caso el resultado sería:

{ 2,4,6,8}

El conjunto solución de esta CONJUNCION es la INTERSECCIÓN entre el primero y segundo conjuntos, es decir:

$\{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \cap \{2,4,6,8,10,12...\} = \{2,4,6,8\}.$

DISYUNCION: Son dos proposiciones simples unidas mediante el conectivo lógico “o”.

4 es par ó 5 es impar

7 es dígito ó 9 es natural

Para que una disyunción sea verdadera, cualquiera de las proposiciones será verdadera.

Una disyunción será falsa, únicamente cuando las dos proposiciones sean falsas.

Para encontrar el conjunto solución de una disyunción primero determinamos que elementos componen a cada una de las proposiciones y después las unimos como si se tratara de una UNION de conjuntos.

X es menor que 9 ó es divisor de 6

Conjunto de reemplazamiento de la primer proposición:

$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Conjunto de reemplazamiento de la segunda proposición:

$\{1,2,3,6\}$

Conjunto de verdad

$\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \cup \{1,2,3,6\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

El conjunto solución será la unión entre los dos conjuntos anteriores, esto es, $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Módulo 7

Negación

OBJETIVO:

Expresará la negación de una proposición dada, graficará el conjunto de verdad de la negación de una proposición, negará conjunciones y disyunciones. Construirá proposiciones con cuantificadores y las negará.

Negación: Es la contradicción a la proposición afirmativa utilizando el conectivo lógico “no”

Ejemplo:

Afirmativa: El día es agradable

Negación: El día no es agradable

Afirmativa: Todos los números negativos son naturales

Negación: Todos los números negativos no son naturales

Dada una proposición p , se denomina la negación de p a otra proposición denotada por $\sim p$ (se lee "no p ") que le asigna el valor de verdad opuesto al de p . Por ejemplo:

p : Diego estudia matemática

$\sim p$: Diego no estudia matemática

Por lo que nos resulta sencillo construir su tabla de verdad:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Observamos aquí que al valor V de p , la negación le hace corresponder el valor F, y viceversa.

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

Ejemplo: La negación de " p : todos los alumnos estudian matemática" es

$\sim p$: no todos los alumnos estudian matemática

o bien:

$\sim p$: no es cierto que todos los alumnos estudian matemática

$\sim p$: hay alumnos que no estudian matemática

Negación de proposiciones compuestas:

Negación de una Implicación

Las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $\sim (p \wedge \sim q)$ son equivalentes, como vemos realizando la tabla de valores correspondientes:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

Con esto, comprobamos que la negación de la primera equivale a la negación de la segunda, es decir

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim \{ \sim(p \wedge \sim q) \}$, y podemos concluir entonces que:

$$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$$

Es decir, la negación de una implicación no es una implicación sino la conjunción del antecedente con la negación del consecuente.

Ejemplo: Sea la implicación p: hoy es viernes **entonces** mañana es domingo

Su negación es $\sim p$: hoy es viernes **y** mañana **no** es domingo.

Es la contradicción a una o todas las proposiciones simples mediante el conectivo lógico “no”

Ejemplo:

$A = \{X \in \mathbb{N} \mid X < 5 \text{ y } X \text{ no es número par}\}$

$A = \{1, 3\}$

Luego, la negación de A es $\{X \in \mathbb{N} \mid X \leq 5 \text{ o } X \text{ no es par}\}$

Cuantificadores: Sirven para dar un valor cuantitativo a las proposiciones Ejemplos: Todos, ninguno, algunos, etc.

Ejemplo:

Todos los múltiplos de 6 son números pares

Cuantificadores universales: Son los cuantificadores que incluyen a la totalidad de los elementos

Ejemplo:

Todos los hombres son mortales

Cuantificadores particulares: Son los cuantificadores que no incluyen la totalidad de los elementos de un universo

Ejemplo:

Por lo menos un hombre no es mortal

Función Proposicional

Supongamos los enunciados abiertos:

" x es la capital de Francia"

" $y + 4 = 11$ "

Estos no tienen un valor de verdad. Pero si en el primero de ellos hacemos $x = \text{París}$, tenemos:

"París es la capital de Francia" (V)

Asimismo, si en el segundo hacemos $x = 9$, resulta: $9 + 4 = 11$ (F)

Podemos, entonces, dar la siguiente definición: "Una función proposicional es un enunciado abierto de la forma $P(x)$ que se convierte en una proposición cuando se le asigna un valor específico a la variable".

Ejemplos:

$p(x) : 2x + 5 > 11$, si $x = 4$ entonces $13 > 11$ (Verdadero) $q(x) : 3x + 7 = 11$, si x

$= 5$ entonces $22 = 16$ (Falso) $r(x) : 2x + 1 = 5$, si $x = 2$ entonces $5 = 5$

(Verdadero) $s(x) : x$ es un animal, si $x = \text{mesa}$ se tendrá: mesa es un animal

(Falso) $t(x) : x$ es un ave, si $x = \text{flamenco}$ se tiene: el flamenco es un ave

(Verdadero)

Más sobre Cuantificadores

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Asociados a la indeterminada x , introducimos los símbolos $\forall x$ y $\exists x$, llamados **cuantificador universal** y **cuantificador existencial** respectivamente. Las expresiones

Para todo x , se verifica $p(x)$ se denota por $\forall x : p(x)$

Existe x , tal que se verifica $p(x)$ se denota por $\exists x / p(x)$

Corresponden a una función proposicional $p(x)$ cuantificada universalmente en el primer caso, y existencialmente en el segundo.

Ejemplo: Una función proposicional cuantificada universalmente es V si y sólo si son V todas las proposiciones particulares asociadas a aquella. Para asegurar la verdad de una proposición cuantificada universalmente es suficiente que sea verdadera alguna de las proposiciones asociadas a la función proposicional.

Un problema de interés es la negación de funciones proposicionales cuantificadas. Por ejemplo, La negación de "Todos los enteros son impares" es "Existen enteros que no son impares" y en símbolos: $\exists x / \sim p(x)$

Entonces, para negar una función proposicional cuantificada universalmente se cambia el cuantificador en existencial, y se niega la función proposicional.

Ejemplo: Supongamos la proposición: Todos los alumnos de mi colegio son aplicados. La vamos a escribir en lenguaje simbólico, negarla y retraducir la negación al lenguaje ordinario.

Nos damos cuenta pronto que se trata de la implicación de dos funciones proposicionales: $p(x)$: es alumno de mi colegio

$q(x)$: es aplicado

Tenemos: $\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)$

Teniendo en cuenta la forma de negar una función proposicional cuantificada universalmente y una implicación resulta:

$$\exists x / p(x) \wedge \sim q(x)$$

Y traduciendo al lenguaje ordinario resulta: Existen alumnos de mi colegio que no son aplicados.

Módulo 8

Implicación. Equivalencia Lógica

OBJETIVO:

Identificará la suposición o hipótesis de la implicación y su conclusión, expresará en diferentes formas una implicación; e identificará las proposiciones equivalentes.

Implicación: Es una proposición compuesta que utiliza el conectivo lógico si entonces.

Se considera un tipo de razonamiento donde hay una hipótesis y una posible conclusión.

Ejemplo:

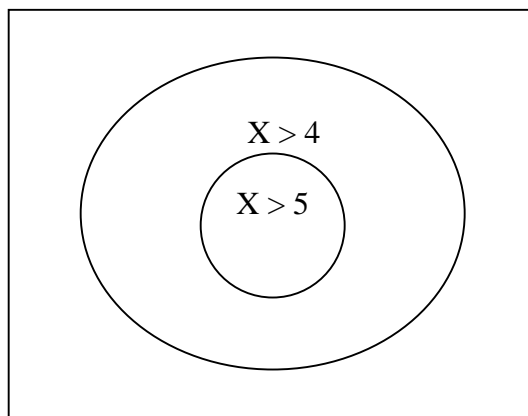
Hipótesis: $X > 5$

Conclusión: $X > 4$

Si X es mayor a 5 implica que X tiene que ser forzosamente mayor a 4 Ejemplo: **Si** un animal vuela, **entonces** es un ave.

En este ejemplo la hipótesis es la oración: Un animal vuela y la conclusión es la oración: es un ave.

En el diagrama de Venn la implicación se representa como un subconjunto, en donde la conclusión es el conjunto mayor y la hipótesis el subconjunto:



En otras palabras: La implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \Rightarrow q$ (si p entonces q) cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p se llama antecedente, y la proposición q se llama consecuente de la implicación o condicional. La tabla nos muestra que la implicación sólo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Por ejemplo, analicemos la siguiente implicación y su valor de verdad:

$$x > 4 \Rightarrow x > 6$$

Observe que si al antecedente " $x > 4$ " lo tomamos como verdadero entonces el consecuente " $x > 6$ " es falso y así la implicación es falsa porque no todos los números que son mayores que 4 son mayores que 6. Por ejemplo, el 5 es mayor que 4 pero no mayor que 6.

Veamos más ejemplos:

Ejemplo: Supongamos la implicación:

$$\underbrace{\text{Si apruebo}}_p, \text{ entonces } \underbrace{\text{te presto el libro}}_q \Rightarrow$$

La implicación está compuesta de las proposiciones p:

apruebo q: te presto el libro

Nos interesa conocer la verdad o falsedad de la implicación anterior, en relación a la verdad o falsedad de las proposiciones p y q. El enunciado puede pensarse como un compromiso, condicionado por p, y podemos asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Es evidente que si p es F, es decir si no apruebo el examen, quedo liberado del compromiso y preste o no el libro la implicación es verdadera.

Si p es verdadera, es decir si apruebo el examen, y no presto el libro, el compromiso no se cumple y la proposición i) es falsa. Si p y q son verdaderas, entonces la proposición i) es verdadera pues el compromiso se cumple. *Ejemplo:* $1 = -1 \Rightarrow 1^2 = (-1)^2$ (F)

La proposición resulta ser falsa por ser el antecedente ($1 = -1$) es falso.

Proposiciones equivalentes: Son las proposiciones que tienen el mismo valor de verdad o el mismo conjunto de verdad

Ejemplo:

Todos los ángulos rectos son de la misma medida

Si los ángulos son rectos entonces tienen la misma medida

El conjunto de ángulos rectos es un subconjunto del conjunto de ángulos con la misma medida.

VARIANTES DE LA IMPLICACION

Conversa: Es una variante de la implicación en la cual cambiamos el orden de las proposiciones dejando en su lugar al conectivo

Ejemplo:

Si tiene alas, entonces vuela

Su conversa es: Si vuela, entonces tiene alas

Si un numero entero es múltiplo de 8, entonces es numero par

Su conversa es: Si un numero entero es par, entonces es múltiplo de 8

Inversa: Se niega cada una de las proposiciones que componen la implicación.

Si es un animal, entonces es un ser vivo.

Su inversa es: Si no es un animal, entonces no es un ser vivo

Contrapositiva: Es utilizar la proposición conversa pero negando ambas proposiciones

Ejemplo:

Si x es mayor que 7, entonces x es mayor que 4

Su contra positiva es: Si x no es mayor que 4, entonces x no es mayor que 7

Si una figura geométrica es un rectángulo, entonces es un paralelogramo Su contra positiva es: Si una figura geométrica no es un paralelogramo, entonces no es un rectángulo

Silogismos: Es una unidad básica en las demostraciones y se forma con tres preposiciones, premisa mayor, premisa menor y conclusión.

La premisa mayor siempre es una implicación mientras que la premisa menor es solo una proposición simple.

Ejemplo:

Premisa Mayor: Si un animal es un oso entonces le gusta la miel Premisa

Menor: mi animal preferido es un oso

Conclusión: Mi animal preferido le gusta la miel.

Observe que la conclusión se obtiene utilizando ambas premisas con el fin de llegar a algo lógico. De hecho, para llegar a la conclusión se debe ver como se relacionan ambas premisas, se puede decir que la conclusión parte de la premisa menor para relacionarla con el consecuente de la premisa mayor.

Premisa mayor: Si un numero es múltiplo de 4 entonces es divisible entre dos Premisa

menor: El numero 16 es múltiplo de 4

Conclusión: El numero 16 es divisible entre dos.

Módulo 9

Sistema matemático y operaciones binarias

OBJETIVO:

Identificar los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales; resolver una operación binaria, representar un número racional en forma decimal

Números Naturales

Son un sistema estudiado en aritmética, en el cual el conjunto de objetos es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$; tienen como relaciones de orden “menor o igual que”, “mayor o igual que”, simbolizado como \leq , \geq respectivamente y como operaciones fundamentales la suma y el producto $\{+, \times\}$.

El conjunto de los números naturales se identifica con la letra N, es decir: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

La cantidad de números naturales es infinita, porque siempre es posible agregar un número más.

No existe un número que sea el mayor de todos.

<http://www.te.ipn.mx/polilibros/algebra/cap1/unid-111.html>

Puesto que la ecuación $b + x = 0$, con b perteneciente a los naturales, no tiene solución dentro de éste conjunto N, se debe ampliar el conjunto numérico de los naturales, de tal manera que toda ecuación de este tipo tenga solución.

Existen muchos números que no son Naturales. Uno de ellos es el cero (0) y otro son los números negativos, Por ejemplo, (-5) es un número negativo que se lee “5 negativo” o “menos cinco”.

Observe que (-3) y (3) son opuestos en el sentido de que $(-3) + 3 = 0$

Se dice que (-3) y (3), cada uno es el *Inverso Aditivo* del otro. Esto es:

3 es el inverso aditivo de (-3) Y

(-3) es el inverso aditivo de 3

Si al conjunto N le agregamos el elemento 0 entonces definimos al conjunto de números no negativos:

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Números Enteros

Un número Entero es cualquiera de los números

$\{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Un número Natural es a su vez un número Entero. Dicho de otra manera, los números enteros se componen de los números naturales, sus inversos aditivos y el cero. Visto así, el inverso aditivo de todo número natural es un número Entero.

Si todo número Natural es a su vez un número Entero ¿Todo número Entero es a su vez un número Natural? Es claro que no: por ejemplo, (-5) es un número Entero, pero no es un número Natural. Así mismo, el cero es un entero, pero no es un natural.

El conjunto de los números enteros lo notamos por E, es decir nombrado por extensión queda:

$$E = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

En la literatura matemática también se denota a los números enteros con la letra Z.

Ahora, el sistema de los números enteros es el conjunto E y las relaciones “mayor o igual que” y “menor o igual que”, y las operaciones definidas son la suma, resta, multiplicación y división.

Al estudiar el comportamiento de las ecuaciones en los números enteros se encuentra que las ecuaciones del tipo, $(b)(x) = 1$ con $b \neq 0$, no tiene solución en el campo de los números enteros (E). Por ejemplo, no hay un número entero que multiplicado por 4 de uno.

Al ampliar el sistema numérico se pueden construir las soluciones a dichas ecuaciones.

Números Racionales

El sistema de los números racionales, se define como una ampliación de los números enteros, como un sistema en el cual se cumplan las siguientes condiciones:

El conjunto de objetos, expresado por comprensión, es $\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ y } q \in E, q \neq 0 \}$.

El conjunto de relaciones es $\{<, >, \leq, \geq\}$. El conjunto de las operaciones es $\{+, -, \times, \div\}$.

1 La solución a la ecuación $(b)(x) = 1$, x es el número racional llamado el b

inverso multiplicativo de b, tal que: $(b)(\frac{1}{b}) = 1$

Si se denota por D, al conjunto de los números Racionales, entonces queda determinado el conjunto, por comprensión, así:

$$D = \{ p / q \mid p \text{ y } q \in E, q \neq 0 \}$$

En la literatura matemática también se denota a los números racionales con la letra Q.

Son racionales por ejemplo los números $3/5$, $7/9$, $8/3$, 0 , -9 , 13 ,..., etc.

Un número racional es aquel que se puede expresar como el cociente de dos números, es decir, el número que se obtiene al dividir uno de los números por el otro. La división puede, de hecho, haberse desarrollado o simplemente indicarse, siempre y cuando el denominador no sea cero.

Por ejemplo, el cociente de 6 entre 3 se puede indicar como 2 o como $6/3$. Del mismo modo, el cociente de 5 entre 2 se puede indicar como $5/2$ o como $2\frac{1}{2}$.

Cualquier número que se pueda expresar como un cociente de enteros, es un número Racional. Así, $2/5$ es un número Racional porque está expresado como el cociente de los números enteros 2 y 5.

El número 7 es un número racional porque se puede expresar como $14/2$, $21/3$, $28/4$, $-35/-5$ o simplemente como $7/1$. Del mismo modo $1\frac{1}{2}$ es un número racional puesto que se puede expresar como $3/2$ que es, sin duda, el cociente de los enteros 3 y 2.

El número 1 es Racional porque se puede expresar como un cociente de cualquier número entre si mismo: $5/5$, $7/7$, $-3/-3$ o simplemente $1/1$.

¡El cero también es un número Racional! Porque se puede expresar como el cociente del mismo cero, que es un número entero, entre cualquier otro número entero que no sea cero. Es decir $0/5$, $0/9$, $0/-13$, etc.

Es claro que al dividir un número entero por 1, el número entero no cambia. Esto es, si n es un número entero, entonces:

n

$= n$

$\frac{n}{1}$

Esto significa que cualquier entero se puede expresar como un cociente de enteros y, por lo tanto, será un número Racional.

Cuando se expresa un número Racional como cociente de Enteros, se puede escribir como una fracción común, pero también se pueden escribir como fracciones decimales.

En realidad, todo número Racional tiene una forma decimal; por ejemplo, la forma decimal de $\frac{1}{2}$ es 0.5 o bien, la forma decimal de $\frac{3}{4}$ es 0.75 y de $\frac{1}{4}$ es 0.25.

Un número racional se definió como un decimal que termina o un decimal que se repite indefinidamente. Si un decimal ni se repite indefinidamente ni termina, no es un número Racional.

Números Irracionales

Al conjunto formado por todas las expresiones decimales infinitas y no periódicas se le llama el conjunto de los números irracionales y se denota por D' . Es decir, un número matemática también se denota a los números irracionales con la letra I .

Irracional es aquel cuya forma decimal ni termina ni se repite indefinidamente.

En la literatura

Las expresiones decimales siguientes:

1, 41421356...

3, 14159256...

2, 645751311...

2, 718281887...

Que son infinitas y no periódicas, no pueden representar un número racional, puesto que resulta imposible escribirlas como razón o cociente de dos enteros (p/q). Los ejemplos anteriores son la expresión decimal de los números irracionales 2 , π , e y el número e . $\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$

Conunto de los Números Reales

El conjunto de los números reales tiene como conjunto de objetos a la reunión de todos los números que pertenecen a los sistemas anteriormente estudiados, es decir, si denotamos al conjunto de los números reales por R , se puede escribir que $R = D \cup D'$.

De esta forma podemos decir que un número real es un decimal finito, infinito, nulo, positivo o negativo. En pocas palabras, todos los números que hasta ahora conocemos.

Por lo tanto el conjunto de los reales esta formado así:

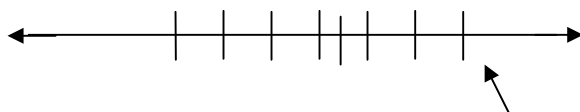
$R = (\text{Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales})$

-

$R = \{..., -3, -2, -1/2, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 1.5, 2, \pi, \dots\}$

Representación de los Reales en la recta.

La famosa recta numérica ahora ya le podemos cambiar de nombre y le llamaremos recta de los reales o recta real. Así, la recta real es la recta donde a cada punto de ella le asociamos un único número real y viceversa.



-3 -2 -1 0 $\frac{1}{2}$ 1 2 3 π

Hay ejemplos donde se usan los reales en una gráfica donde no necesariamente son rectas:

Ejemplo 1



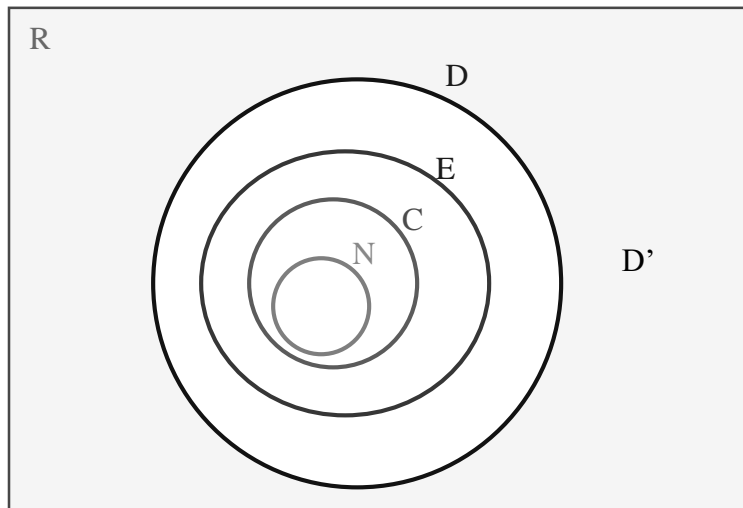
Ejemplo 2



REPRESENTACIÓN DE LOS REALES EN UN DIAGRAMA.

Anteriormente estudiamos colecciones de números como los Naturales, los Enteros, los Racionales, los Irracionales y, considerándolos a todos juntos, a los números Reales.

En lo general, un número natural es a su vez un número Entero y todo número Entero es al mismo tiempo un número Racional. Por supuesto, todo número Natural es a su vez un número Racional. Esta generalidad se puede representar como sigue:



Si analizamos las relaciones que hay entre estos conjuntos usando las operaciones de conjuntos tenemos las siguientes:

- 1.- $N \subset E \subset D \subset R$, es decir, los Naturales están contenidos en los Enteros, los Enteros están contenidos en los Racionales y éstos en los Reales.
- 2.- $D' \subset R$, es decir, los Irracionales están contenidos en los Reales.
- 3.- $D \cup D' = R$, es decir, la unión de los Racionales con los Irracionales es el conjunto de los Reales.
- 4.- $D \cap D' = \varnothing$, es decir, los Racionales y los Irracionales no se intersectan. En otras palabras son ajenos.

Operaciones binarias

Operación Binaria: Es una regla que nos asocia a cada par de elementos de un conjunto con otro elemento único de otro conjunto

Ejemplo:

El numero 3 y el numero 4 la suma los asocia con el 7

Operación binaria: Suma

Operación unaria: Es una regla que nos asocia a un elemento de un conjunto con otro único elemento

Ejemplo:

Al duplicar el numero 4 lo asociamos con el numero 8.

Propiedades de la igualdad

La Propiedad Reflexiva

Si escribimos una afirmación verdadera como

$$4+5=9$$

lo que deseamos decir es que $(4+5)$ y 9 son dos nombres para el mismo número.

Como todo número es igual a sí mismo, se puede afirmar que:

$$\forall x \in \mathbf{R}; \quad x = x.$$

Por ejemplo, $7=7$; $3=3$ y $0=0$. Cuando se afirma que $x = x$, se genera una afirmación verdadera para todas las sustituciones de la variable x , lo cual significa que, todo número es igual a sí mismo.

El hecho de que todo número sea igual a sí mismo, se conoce como la **propiedad reflexiva** de las igualdades. Así, $7=7$ por la propiedad reflexiva de la igualdad.

La Propiedad Simétrica

Debido a propiedad reflexiva de la igualdad, se puede invertir cualquier afirmación de igualdad, como se desee. Por ejemplo, como $5+2 = 7$ entonces $7 = 5+2$. El hecho de poder invertir cualquier afirmación de igualdad verdadera, conduce a otra propiedad de la igualdad: **la propiedad simétrica**, en la que, si $a=b$, entonces $b=a$. De este modo, se habla de la propiedad simétrica de la igualdad, como el hecho de poder invertir cualquier afirmación verdadera de igualdad. Esto es, si $x=y$ entonces $y=x$.

De esta propiedad se puede afirmar que, si $x+y=m+n$ entonces, $m+n=x+y$.

También, si $m=x$ y entonces $x = m$, evidentemente.

Ya aprendimos que en la propiedad asociativa de la adición se afirma que:

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$$

Por la propiedad simétrica de las igualdades, esta afirmación puede escribirse:

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R}, x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Por ejemplo: $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$ Veamos
ahora otra útil propiedad.

La Propiedad Transitiva

De la propiedad reflexiva, el hecho de que $3+4=7$ se interpretó como que $(3+4)$ y 7 representan el mismo número. Si el siete también se puede escribir como $(5+2)$, entonces es posible afirmar que $3+4=5+2$ porque son dos maneras distintas de escribir el mismo número 7. Del mismo modo, si $9+2=11$ y $6+5=11$, se puede afirmar que $9+2 = 9+2 = 6+5$.

Con esto, se está utilizando otra importante propiedad de las igualdades, que muy frecuentemente se identifica como una propiedad en cadena: si un número es igual a un segundo número, y éste es a su vez igual a un tercero, entonces el primero será igual al tercero. Esta conducta numérica, se expresa simbólicamente como:

$$\text{Si } a = b \text{ y } b = c \text{ entonces } a = c.$$

Esta conducta se identifica en matemáticas como la **propiedad transitiva** de la igualdad. De esta manera, si $r=s$ y $s=t$ entonces $r = t$. Esta es, desde luego, otra manera de expresar la propiedad transitiva, por supuesto. Por esta propiedad de las igualdades, si $x=a+b$ y $a+b=y$, entonces $x = y$.

En resumen, se puede decir que: *números que son iguales al mismo número, son iguales entre sí.*

La Propiedad Aditiva.

Una propiedad más de la igualdad puede representarse como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Si } a &= b \\ \text{y } c &= d \text{ entonces } a + c \\ &= b + d \end{aligned}$$

La expresión en español de esta propiedad, es: “*Si números iguales se suman a números iguales, las sumas son iguales*”. Otra forma de escribir esto es que, si $x = y$ y $r = s$, entonces $x + r = y + s$.

Por ejemplo: como $4 = 4$ y $a = b$ entonces $4 + a = 4 + b$.

Ahora, si $x = y$ y $m = n$, entonces $x + m = y + n$. Esto se obtiene sumando miembro a miembro de cada igualdad.

La Propiedad Multiplicativa

La propiedad multiplicativa de la igualdad dice que:

$$\begin{aligned} \text{Si } a &= b \\ \text{y } c &= d \text{ entonces } ac \\ &= bd \end{aligned}$$

También se puede decir, usando otras literales, que si $x = y$ y $s = t$, entonces $xs = yt$. Esta propiedad de la igualdad, se conoce como la propiedad multiplicativa de la igualdad. En español dice que si tenemos dos igualdades y las multiplicamos miembro a miembro entonces los productos son iguales.

Por ejemplo: como $4 = 4$ y $a = b$ entonces $4a = 4b$.