Álgebra Lineal - Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

1 Espacios Vectoriales

Definición 1.1. *Un* ***Espacio Vectorial sobre el cuerpo K*** *es una estructura algebraica* ***(V,+,.)*** *creada a partir de un conjunto no vacío V, una operación interna "+" llamada suma (definida sobre los elementos del conjunto V), y una operación externa "."llamada producto por escalar (definida entre dicho conjunto y el cuerpo matemático K, que serán los reales o los complejos).*

Estas operaciones son cerradas en V y además deben cumplirse 8 propiedades fundamentales (axiomas).

Esto es, Dado $(V, +, .)$ sobre K, se tiene que:

"+" es cerrado en V, es decir, $\forall v_1, v_2 \in V,\ \ v_1 + v_2 \in V$.

"." es cerrado en V, es decir, $\forall v \in V$ y $\forall k \in K,\ \ k.v \in V$.

Además, se deben satisfacer los siguientes 8 axiomas que se pueden separar en dos clases:
Para la operación "suma"("+"):

- "+" debe ser conmutativa, es decir: $\forall v_1, v_2 \in V;\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
- "+" debe ser asociativa: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V;\ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
- Existencia del elemento *neutro* para "+", es decir, $\exists 0 \in V:\ v + 0 = v, \forall v \in V$.
- Existencia del *opuesto*, es decir, $\forall v \in V,\ \exists -v \in V:\ v + (-v) = 0$.

Mientras que para la operación "producto por escalar" ("$.$")

- "$.$" sea asociativa: $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall v \in V$; $(\alpha\beta).v = \alpha(\beta.v)$.
- "$.$" sea distributiva respecto de la suma de escalares $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall v \in V$; $(\alpha + \beta).v = \alpha.v + \beta.v$.
- "$.$" sea distributiva respecto de la suma de vectores: $\forall \alpha \in K$ y $\forall v_1, v_2 \in V$; $\alpha.(v_1 + v_2) = \alpha.v_1 + \alpha.v_2$.
- $\forall v \in V$, $\exists 1 \in K :\ 1.v = v$.

Ejemplos 1.2. *1. $\mathbb{R}^n$, el conjunto de las n-uplas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con la suma y el producto por escalar usuales, esto es coordenada a coordenada.*

2. El espacio $\mathcal{P}_n$ de los polinomios de grado n con $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}_n = \left\{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0, a_i \in \mathbb{R}\right\}$ (i.e el conjunto de polinomios con grado menor o igual a n) con las operaciones usuales.

3. El espacio M_{mxn} de matrices, a coeficientes reales, de m filas por n columnas con la suma de matrices y el producto por escalar usuales en cualquier conjunto de Matrices.

4. El espacio de las funciones contínuas definidas sobre un intervalo $[a, b]$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, con la suma y el producto por escalar usuales.
($(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(cf)(x) = cf(x)$ para todo x en $[a, b]$ y cualquier c real)

Teorema 1.3. *Sea V un espacio vectorial. Entonces:*

- *Para todo escalar α vale que $\alpha.0 = 0$*
- *Para todo $v \in V$, se cumple $0.v = 0$*
- *Si $\alpha.v = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $v = 0$ (o ambos son nulos)*
- *Para todo $v \in V$ vale que $-1v = v$*

1.1 Subespacios Vectoriales

Definición 1.4. *Un subespacio S de un espacio vectorial V es cualquier subconjunto (no vacío) S de V tal que él mismo es un espacio vectorial. Esto es, un subconjunto S de V que es cerrado bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar.*

Como S es subconjunto de V todos sus elementos pertenecen al espacio, entonces 6 de los 8 axiomas/propiedades se satisfacen automáticamente ("se heredan" de V).
Sólo la condición de clausura (ser cerrado para las operaciones) debe ser examinada y verificada para determinar si S es un "subespacio vectorial". Obviamente, S debe ser no vacío y esto se puede verificar mostrando que el elemento neutro de V pertenezca a S.

Proposición 1.5. *Sea V espacio vectorial, y sea $S \subset V$. Entonces S es un subespacio de V si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $S \neq \emptyset$
2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$.
3. *Dado* $k \in K$ *y* $\forall s \in S \rightarrow k.s \in S$.

Demostración:

Es claro que si S es un subespacio de un espacio vectorial V cumple con las tres condiciones (ya que él mismo es un espacio vectorial)

Ahora veamos que si S cumple con las 3 condiciones entonces será un espacio vectorial:
Las dos operaciones de cerradura ya se dan por hipótesis, al igual que la existencia de al menos un elemento. Como dijimos antes, $S \subset V$ implica que las identidades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa se cumplan para las dos operaciones.
Sólo necesitamos probar las existencias en S del neutro y del opuesto para la operación interna (suma).

- Como para cualquier $k \in K$ y $\forall s \in S \rightarrow k.s \in S$, vale que $-1s$ pertenece a S para todo $s \in S$, pero $-1s = -s$! por lo tanto dado un elemento de S el opuesto en V pertenece al subconjunto S.

- Dado cualquier elemento $s \in S$, vimos en el item anterior que su opuesto pertenece a S, luego por hipótesis tenemos que $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$, entonces vale que $s + (-s) \in S$ ya que tanto s como $-s$ son elementos de S pero $s + (-s) = 0$!!! Luego, el neutro 0 pertenece a S

Por lo tanto, S cumple con todos los axiomas de Espacio Vectorial.

Ejemplos 1.6. *1. El subconjunto de vectores $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.*

Para mostrar que el subconjunto S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ utilicemos la propiedad anterior.

- *Como $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ cumple la condición para pertenecer a S ya que $0 + 0 = 0$, podemos afirmar que $(0, 0) \in S$ y entonces $S \neq \emptyset$ (y además probamos que contiene al neutro para la suma de $\mathbb{R}^2$)*

- *Ahora demostremos que la suma es cerrada en S:*
  Sean $s_1, s_2 \in S$, entonces $s_1 = (x_1, y_1)$ es tal que $x_1 + y_1 = 0$ y $s_2 = (x_2, y_2)$ es tal que $x_2 + y_2 = 0$
  Luego $s_1 + s_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ satisface que
  $\underbrace{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}_{(x_1+y_1)+(x_2+y_2=0+0=0} = 0$ *mostrando que $s_1 + s_2 \in S$.*

- *Por último, veamos que el producto por escalar también es cerrado:*
  Sea $s \in S$ (o sea que $s = (x, y)$ tal que $x + y = 0$) y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha s = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ es tal que $\underbrace{\alpha x + \alpha y}_{\alpha(x+y)=\alpha 0=0} = 0$, y por lo tanto αs pertenece a S.

Como demostramos que S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ (contiene al menos al neutro) cerrado para las operaciones de suma y producto por escalar, por la propiedad anterior S es un subespacio.

2. *El subconjunto de vectores* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ *NO es un subespacio del espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$.

Para probar que no es un subespacio alcanza con mostrar que algunos de los axiomas para ser un espacio vectorial ó, más fácil, algunas de las hipótesis de la propiedad no se cumplen.

En este caso se ve rápidamente que el neutro de $\mathbb{R}^2$ *no pertenece* S *ya que* $(0,0)$ *no cumple la propiedad definitoria de* S, *o sea, no vale claramente que* $0 + 0 = 1$.

Por lo tanto S *no será un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$

** De manera similar podemos probar que la suma o el producto por escalar no son cerrados en* S *para mostrar que no es un subespacio*

1.2 Base de un espacio vectorial

La idea subyacente es la describir un conjunto infinito como lo es un espacio vectorial a través de un conjunto finito[1]

1.2.1 Conjunto Generador - Espacio Generado

Definición 1.7. *Dado un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ del espacio vectorial V, se llama **combinación lineal** de los vectores de S, a los vectores v de la forma $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r$, donde los coeficientes $c_1, c_2 \ldots, c_r$ son escalares.*

Ejemplos 1.8. *Veamos algunos ejemplos de combinaciones lineales de vectores de espacios conocidos*

1. $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[1] *trabajaremos con espacios de dimensión finita*

Teorema 1.9. *Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ son vectores del espacio vectorial V, entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \dots, v_r$, denotado gen(S) $= \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$ es un subespacio de V.*

Demostración:

Tenemos que mostrar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S forman un subespacio de V :

1. Observemos que $0_v = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_r$, es decir, el vector nulo es combinación lineal de los vectores de S. Además es obvio que S es no vacío.

2. Veamos que la suma es cerrada: sean w_1 y w_2 vectores de *gen(S)*, su suma $w_1 + w_2$ pertenecerá a *gen(S)*, esto es, su suma será combinación lineal de vectores de S.

   $w_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r$
   $w_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r$

   $w_1 + w_2 = (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r) + (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r) =$
   $= (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_r + b_r)v_r$

3. Por último probemos que el producto por escalar también es cerrado:

   Sean $w \in gen(S)$ y α un escalar, $\alpha.w$ será combinación lineal de vectores de S:

   $\alpha.w = \alpha.(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r) = \alpha.c_1v_1 + \alpha.c_2v_2 + \cdots + \alpha.c_rv_r = d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_rv_r$

   Entonces $\alpha.w \in gen(S)$ y la operación es cerrada.

Demostramos que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores de un espacio vectorial ES un subespacio de ese espacio, y por lo tanto es él mismo un espacio vectorial.

Definición 1.10. *Al conjunto de todos los vectores que se obtienen como combinación lineal de los vectores de S se lo denomina* ***el espacio generado por S***

Ejemplo 1.11. *¿Cuál será el subespacio de R^3 generado por el conjunto de vectores $S = \{v_1; v_2\} = \{(1,0,1); (1,1,0)\}$?*

Sabemos que el espacio generado es el conjunto de ***todas*** *las combinaciones lineales, veamos que forma tiene un vector genérico de ese subespacio:*

$$(x, y, z) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) = (\alpha_1, 0, \alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_2, 0) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1)$$

$$\begin{cases} x &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ y &= \alpha_2 \\ z &= \alpha_1 \end{cases}$$

Es claro que $x = y + z$.
Estos vectores generan un plano, el subespacio de R^3 tal que la primer coordenada es suma de las otras dos.

Vimos que la combinación lineal de un conjunto de vectores genera un subespacio vectorial, nos interesa ahora saber cómo debería ser ese conjunto de vectores para que genere un espacio vectorial dado.

Definición 1.12. *Se dice que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un conjunto generador del espacio vectorial V si y sólo si todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_r$.*

Esto es lo mismo que decir que $V = gen(S)$, ya que siempre vale que $gen(S) \subset V$ y si S es un conjunto generador entonces todo $v \in V$ puede escribirse como combinación lineal de vectores de S y por lo tanto $V \subset gen(S)$.

Ejemplos 1.13. *Veamos algunos ejemplos de conjuntos generadores:*

1. *Es fácil ver que el espacio* R^3 *está generado por los vectores* $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ *ya que cualquier* $v \in R^3$ *puede escribirse como combinación de ellos:*

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *Miremos si un conjunto dado de vectores puede generar todo el espacio:*

   - $S = \{s_1; s_2\} = \{(1,2,0); (0,0,1)\}$ *puede generar todo* R^3*?* .
     Veamos si es posible escribir cualquier vector de R^3 *como combinación de los vectores de* S
     Esto equivale a preguntarse si es posible encontrar escalares α *y* β *tales que* $v = \alpha.s_1 + \beta.s_2$ *para cualquier* $v \in R^3$
     $(x, y, z) = v = \alpha.s_1 + \beta.s_2 = \alpha.(1, 2, 0) + \beta.(0, 0, 1) = (\alpha, 2\alpha, 0) + (0, 0, \beta) = (\alpha, 2\alpha, \beta)$
     Luego tenemos que $x = \alpha$, $y = 2\alpha$ *y* $z = \beta$, *y de aquí notamos que* $y = 2x$,
     entonces estos vectores no generarán todo R^3*,sino solamente a los vectores que la segunda coordenada sea el doble de la primera.*

   - $S = \{s_1; s_2\} = \{(1, -1); (-2, 1)\}$ *puede generar todo* R^2*?*
     Como antes, analicemos si existen escalares tales que cualquier vector de R^2 *pueda ser escrito como combinación lineal de los vectores de* S
     $(x, y) = \alpha.s_1 + \beta.s_2 = \alpha.(1, -1) + \beta.(-2, 1) = (\alpha, -\alpha) + (-2\beta, \beta) = (\alpha - 2\beta, -\alpha + \beta)$

     Entonces, $\begin{cases} x &= \alpha - 2\beta \\ y &= -\alpha + \beta \end{cases}$

     Operando llegamos a que $\alpha = -2y - x$ *y* $\beta = -x - y$,
     y por lo tanto cualquier (x, y) *se puede generar con estos dos vectores de* S

- $S = \{s_1; s_2; s_3; s_4\}_{=\{(1,0);(1,-1);(-1,1);(2,1)\}}$ *puede generar todo* R^2*?*

  Otra vez analicemos si existen escalares tales que cualquier vector de R^2 *pueda ser escrito como combinación lineal de los vectores de* S

  $(x, y) = \alpha_1.s_1 + \alpha_2.s_2 + \alpha_3.s_3 + \alpha_4.s_4 = \alpha_1.(1, 0) + \alpha_2.(1, -1) + \alpha_3.(-1, 1) + \alpha_4.(2, 1)$

  Entonces, $\begin{cases} x &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ y &= -\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{cases}$

  Se puede ver que este sistema tiene siempre solución (no única!) y por lo tanto cualquier (x, y) *se puede escribir como combinación de los vectores de* S

3. *¿Qué conjunto de vectores podrá generar al subespacio* S *de las matrices simétricas de* $2{\times}2$*?*

   Primero veamos como estas matrices, $S = \{A \in R^{2\times 2} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, a, b, d \in R\}$

   y ahora tomemos una matriz genérica cualquiera de M *y analicemos combinación lineal de cuales vectores pueden ser:*

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Luego, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es un conjunto generador de* S

1.2.2 Independencia Lineal

Nuestro propósito será encontrar al conjunto generador "más pequeño" posible de un espacio vectorial V, es decir, conjuntos generadores de V con la menor cantidad posible de vectores.

Un conjunto de generadores *minimal* para V será aquel conjunto S de vectores que no tenga elementos redundantes o innecesarios, es decir, *todos los vectores del conjunto S deben ser necesarios* para generar V.

Por tanto ninguno de los vectores de S puede ser combinación lineal de los otros para así asegurarme que no tengo elementos redundantes.

Observemos que si un vector es combinación lineal de otros en un conjunto dado, por ejemplo: $v = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r$ (v sería redundante en $\{v, v_1, v_2, \dots, v_r\}$) se puede escribir:

$$0 = v - v = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r - v = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + (-1)v$$

Ejemplo 1.14. *Sea $S = \{(2,1); (1,-2); (1,3)\}$, como $(2,1) = (1,-2) + (1,3)$ podemos decir que S tiene elementos redundantes.*
Al mismo tiempo podemos ver que $(0,0) = (1,-2) + (1,3) - (2,1)$, es decir que pudimos escribir al vector nulo como una combinación no nula *de los vectores de S*

Luego, podemos usar esta idea para ver si hay vectores redundantes, es decir, si dentro de un conjunto de vectores dado hay algunos que son combinaciones lineales de los otros.

Definición 1.15. *Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_r$ de un espacio vectorial V se dicen* **linealmente dependientes** *si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_p$ no todos nulos tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r = 0$*

Equivalentemente,

Definición 1.16. *Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_p$ de un espacio vectorial V se dicen* **linealmente independientes** *si la combinación $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r = 0$ implica que todos los c_i son nulos.*

Ejemplos 1.17.

- *Antes vimos un ejemplo de un conjunto que tenía vectores redundantes, usemos el mismo conjunto para probar la definición de* dependencia lineal

  Hacemos $(0,0) = c_1(1,-2) + c_2(1,3) + c_3(2,1)$*, queremos saber si los* c_i *son todos nulos*

  $(0,0) = (c_1, -2c_1) + (c_2, 3c_2)(2c_3, c_3) = (c_1 + c_2 + 2c_3, -2c_1 + 3c_2 + c_3)$

  $c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$ *y* $-2c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$

  Resolviendo este sistema de dos ecuaciones obtenemos que $c_1 = c_2 = -c_3$ *para cualquier* c_3 *real , no son necesariamente nulos*

- *Analicemos otro conjunto, ahora de* R^3

  Sea $S = \{(1,1,0); (-1,0,1); (1,0,0)\}$*, formemos la combinación lineal nula y veamos como son los coeficientes:*

  $(0,0,0) = c_1(1,1,0) + c_2(-1,0,1) + c_3(1,0,0) =$

  $(c_1, c_1, 0) + (-c_2, 0, c_2) + (c_3, 0, 0) = (c_1 - c_2 + c_3, c_1, c_2)$

  $c_1 - c_2 + c_3 = 0$*,* $c_1 = 0$ *y* $c_2 = 0$*.*

  Claramente los coeficientes son todos nulos y el conjunto es linealmente independiente

Una combinación lineal de un conjunto S de vectores *linealmente independientes* es única. Esto es, existe una única manera de expresar un *vector particular* como combinación lineal de los vectores de S linealmente independientes.

Supongamos que podemos expresar a un vector v de dos maneras diferentes:

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r$ y $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r$

$$v - v = 0 = (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r) - (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r) = (a_1+b_1)v_1 + (a_2+b_2)v_2 + \cdots + (a_r+b_r)v_r$$

Observamos que no todos los $a_i - b_i$ son cero, entonces encontramos una combinación lineal no nula que nos da como resultado al vector nulo, esto significa que los vectores con Linealmente Dependientes! (obtuvimos y demostramos la proposición contrarrecícproca)

También podemos ver que si el conjunto de vectores no es linealmente independiente se podrá escribir cualquier vector de varias formas (por ejemplo sumando la combinación nula a una expresión particular del vector).

1.2.3 Base y Dimensión

Queremos un conjunto generador minimal, o sea un conjunto que no tenga vectores supérfluos, vimos que esto sucede cuando los vectores son independientes.

Un conjunto generador minimal con vectores independientes, es un conjunto "básico" de vectores, que provee las *piezas* para construir el espacio vectorial V.

Definición 1.18. *Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ forma una **base** del espacio vectorial V, si y sólo si:*

1. $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *son linealmente independientes, y*
2. $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *generan V.*

Ejemplo 1.19. *En un ejemplo anterior vimos que el conjunto $S = \{(1, -1); (-2, 1)\}$ generaba todo R^2, si probamos además que estos vectores son* linealmente independientes *, formaran una base.*

Escribamos la combinación lineal nula y veamos como son los coeficientes:
$(0, 0) = c_1(1, -1) + c_2(-2, 1) = (c_1 - 2c_2, -c_1 + c_2$
Luego, $c_1 = 2c_2$ y $c_1 = c_2$, con lo cual $c_2 = 2c_2$ y por lo tanto $c_2 = 0$, y $c_1 = 0$

De esta forma, como los vectores de S forman un conjunto generador y son linealmente independientes podemos decir que S es una base para R^2

Supongamos que tenemos una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial V y un conjunto $M = \{u_1 .... u_m\}$ de $m > n$ vectores de V.
Queremos analizar la independencia o dependencia lineal del conjunto M, para ello podemos escribir la combinación nula y mirar como son los coeficientes: $0 = c_1u_1 + ... + c_mu_m$

Por otro lado, como B es base del espacio, cada u_i de M será combinación lineal de los vectores de B:

$u_1 = a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n$

....

....

$u_j = a_{1j}v_1 + ... + a_{nj}v_n$

....

....

$u_m = a_{1m}v_1 + ... + a_{nm}v_n$

Reemplanzando en la combinación nula obtenemos:

$0 = c_1u_1+....+c_mu_m = c_1\left(a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n\right)+....+c_m\left(a_{1m}v_1 + ... + a_{nm}v_n\right) = \left(c_1a_{11} + ... + c_ma_{1m}\right)v_1+ .... + \left(c_1a_{n1} + ... + c_ma_{nm}\right)v_n$

Como los v_i son independientes por formar parte de una base, cada coeficiente $c_1a_{i1} + ... + c_ma_{im}$ debe ser cero,

$c_1a_{11} + ... + c_ma_{1m} = 0$

....

$c_1a_{i1} + ... + c_ma_{im} = 0$

....

$c_1a_{n1} + ... + c_ma_{nm} = 0$

Tenemos n ecuaciones homogéneas con $m > n$ incógnitas $c_1....c_m$, siendo entonces compatible intederminado (es decir, hay infinitas soluciones) y por lo tanto los u_i son linealmente dependientes.

De aquí se deduce los siguientes resultados

Teorema 1.20. *Si $B = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, todo conjunto $M = \{u_1....u_m\}$ de $m > n$ vectores de V es linealmente dependiente*

Corolario 1.21. *Si $B = \{v_1, ..., v_n\}$ y $B' = \{u_1....u_m\}$ son dos bases de un espacio vectorial V, entonces $m = n$*

Es decir, ***todas*** *las bases de un espacio vectorial V (finitamente generado) tienen el mismo número de elementos.*

Definición 1.22. *Si una base de un espacio vectorial V tiene n vectores, se dice que V tiene* dimensión **n***.*

En particular, el subespacio $\{\mathbf{0}\}$ se dice que tiene *dimensión 0*.

Un espacio vectorial V se dice de *dimensión finita* si existe un conjunto *finito* de vectores que lo generan. En caso contrario se dice que V tiene *dimensión infinita.*

Teorema 1.23. *Si V es un espacio vectorial de "dimensión n" $(n > 0)$ entonces*

1. *Cualquier conjunto de n vectores "linealmente independientes" de V genera todo V (forman una base de V). Además*

2. *Todo conjunto de n vectores que generan V son "linealmente independientes" (o sea, forman una base de V).*

Esto dice que si sabemos la dimensión del espacio y tenemos la cantidad necesaria de vectores no hace falta probar las dos condiciones para ser base, con alguna de las dos bastará.

Ejemplo 1.24. *Se demostró en un ejemplo anterior que el conjunto $S = \{(1, 1, 0); (-1, 0, 1); (1, 0, 0)\}$ de vectores de R^3 es linealmente independiente, como son 3 vectores y la dimensión de R^3 es justamente 3 por el teorema podemos afirmar que S es base de R^3.*

2 Transformaciones Lineales

Definición 2.1. *Una* **transformación lineal** *es una aplicación de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W, y se la denota como $L : V \to W$, si satisface:*

- $\forall v_1, v_2 \in V,\ L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ *y*
- $\forall \alpha \in K$ *y* $\forall v \in V,\ L(\alpha.v) = \alpha.L(v)$.

Ó, equivalentemente, $\forall \alpha, \beta \in K$ *y* $\forall v_1, v_2 \in V,\ L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)$.

Ejemplo 2.2. *Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$, veamos que es una transformación lineal:*

$\forall v_1, v_2 \in V,\ L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ *?*

$L(v_1+v_2) = L((x_1, y_1)+(x_2, y_2)) = L((x_1+x_2, y_1+y_2)) = ((x_1+x_2), (y_1+y_2), (x_1+x_2)+(y_1+y_2)) =$

$= ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2), (x_1 + y_1 + (x_2 + y_2)) = (x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) =$
$= L((x_1, y_1)) + L((x_2, y_2)) = L(v_1) + L(v_2)$

$\forall \alpha \in K$ *y* $\forall v \in V,\ L(\alpha.v) = \alpha.L(v)$ *?*

$L(\alpha.v) = L(\alpha.(x, y)) = L((\alpha.x, \alpha.y)) = (\alpha.x, \alpha.y, \alpha.x+\alpha.y) = (\alpha.x, \alpha.y, \alpha.(x+y)) = \alpha(x, y, x+y) = \alpha.L(v)$

También podríamos haberlo demostrado usando la forma alternativa equivalente que prueba ambos operaciones a la vez.

Más ejemplos,

- *La transformación* ***Identidad*** $\forall v \in V,\ I : V \to V$ *definida por* $I(v) = v$.

$$I(\alpha.v_1 + \beta.v_2) = \alpha.v_1 + \beta.v_2 = I(\alpha.v_1) + I(\beta.v_2) = \alpha.I(v_1) + \beta.I(v_2)$$

- La transformación **Nula** $\forall v \in V,\ N : V \to V$ definida por $N(v) = 0_V$.

$$N(\alpha.v_1 + \beta.v_2) = 0_V = 0_V + 0_V = \alpha.0_V + \beta.0_V = \alpha.N(v_1) + \beta.N(v_2)$$

Ejemplos 2.3. *1. La transformación de dilatación o comprensión (en* $\mathbb{R}^3$*)*
$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $L(x, y, z) = k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$.

2. La transformación de proyección (p.e. aquella que proyecta, en $\mathbb{R}^3$*, sobre el eje x)*
$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $L(x, y, z) = (x, 0, 0)$.

3. La transformación en el espacio de las matrices 2x2 $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ *definida por*

$$L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -x \\ x & z - w \end{pmatrix}.$$

Ahora veamos algunos ejemplos de aplicaciones entre espacios vectoriales que NO son transformaciones lineales:

1. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $L(x, y, z) = (x, 1, z)$

   Si alguna o las dos condiciones de la definición no se cumplen L no será lineal. En este caso no valen ninguna de las dos, mostremos que no se cumple la suma:
   $L(v_1+v_2) = L((x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)) = L((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) = (x_1+x_2, 1, z_1+z_2)$
   $\neq (x_1 + x_2, 2, z_1 + z_2) = (x_1, 1, z_1) + (x_2, 1, z_2) = L((x_1, y_1, z_1)) + L((x_2, y_2, z_2)) = L(v_1) +$
   $L(v_2)$

2. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $L(x, y) = (x + y, xy)$

   En este caso tampoco no valen ninguna de las dos, veamos que no se cumple el producto por escalar:

   $L(\alpha.v) = L(\alpha.(x, y)) = L((\alpha.x, \alpha.y)) = (\alpha.x + \alpha.y, \alpha.x.\alpha.y) = (\alpha.(x + y), \alpha^2.x.y)$

   $\neq (\alpha.(x + y), \alpha.x.y) = \alpha.(x + y, xy) = \alpha.L(x, y) = \alpha.L(v)$

3. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $L(x, y, z) = x + y + z + 4$

   Esta aplicación tampoco cumple ninguna de las dos condiciones.

Pueden probarse fácilmente usando las condiciones de la definición de transformación lineal las siguientes propiedasdes:

Propiedades 2.4. *Dada una transformación lineal* $L : V \to W$*, se cumplen las siguientes propiedades:*

- $L(0_v) = 0_w$.
- $\forall v \in V,\ L(-v) = -L(v)$.
- *Si* $v_1, \dots, v_n \in V$ *entonces* $L(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \cdots + \alpha_n L(v_n)$.

Como **toda** transformación lineal cumple estas propiedades, podemos usarla para mostrar que si una aplicación no la cumple, entonces esa aplicación no es lineal.

En particular es muy útil la propiedad de que toda transformación "lleva el cero al cero" pero no hay que confundirse! la utilidad proviene de utilizar la contrarrecíproca de la propiedad. Es decir, si no cumple la propiedad no es una transformación lineal, si la cumple hay que seguir mirando.

Por ejemplo, $L(x, y) = (x, y, x + y)$ es tal que $L(0_{R2}) = L((0, 0)) = (0, 0, 0) = 0_{R^3}$ y ya probamos que es una transformación lineal.
Por otro lado, $L(x, y, z) = (x, 1, z)$ no cumple que $L(0_{R3}) = 0_{R^3}$ y como vimos antes no es lineal pero $L(x, y) = (x + y, xy)$ si cumple que $L(0_{R2}) = 0_{R^2}$ y tampoco es lineal.

Imagen y Núcleo de una transformación lineal

Definición 2.5. *Sea $L : V \to W$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W, se definen:*

El **Núcleo de una transformación lineal L** *es el conjunto de vectores $v \in V$ que son transformados o "enviados" al vector nulo 0_w de W. Es decir,*

$$Nu(L) = \{v \in V : L(v) = 0_w\}$$

La **Imagen de la transformación lineal L** *es el conjunto de vectores $w \in W$ que son imagen por L de elementos $v \in V$ y se denota como $Im(L)$ ó $L(V)$.*

$$Im(L) = \{w \in W : \exists v \in V \; w = L(v)\}$$

También podemos analizar la imagen de un subespacio de V en lugar de hacerlo para todo el espacio.

Ejemplo 2.6. *Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L((x, y, z)) = (z, x + y)$*

- *Queremos hallar $Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^3 : L(v) = 0\}$.*

  Sabemos que si $v \in Nu(L)$ entonces $L(v) = 0$, es decir,
  $v = (x, y, z)$ y $(0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2} = L(v) = L(x, y, z) = (z, x + y)$, entonces $(0, 0) = (z, x + y)$
  y tenemos que $z = 0$ y $x + y = 0$, $\quad x = -y$, luego $v = (x, y, z) = (x, -x, 0)$
  Por lo tanto $Nu(L) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x, z = 0, x \in R\} = \big\{v \in \mathbb{R}^3 : v = (x, -x, 0)\big\}$.

  Para encontrar la imagen de L, $Im(L) = \{w \in \mathbb{R}^2 : \exists v \in \mathbb{R}^3 \; w = L(v)\}$, tomamos cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ tales que satisfaga: $(a, b) = w = L(v) = L(x, y, z) = (z, x + y)$, luego $(a, b) = (z, x + y)$ y tenemos que $a = z$ cualquier real y $b = x + y$ que también lo cumple cualquier número real (buscamos un real que sea suma de otros dos, no hay más restricciones que esa).
  Por lo tanto los vectores $w = (a, b) = (a, b)$ y $Im(L) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in R\} = \mathbb{R}^2$.

Teorema 2.7. *Si $L : V \to W$ es una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W, entonces:*

1. *El núcleo $Nu(L)$ es un subespacio de V.*

2. *La imagen $Im(L)$ es un subespacio de W.*

Demostración:

1. Para probar que $Nu(L)$ es un subespacio de V debemos mostrar que se cumplen las condiciones del teorema de subespacios :
   $Nu(L) \neq \emptyset$ pues siempre vale que $L(0) = 0$, para toda transformación lineal entonces al menos $0_V \in Nu(L)$ (además con esto vemos que contiene al neutro)

   - Veamos que la suma es cerrada :
     Sean $v_1, v_2 \in Nu(L)$ (esto es, $L(v_1) = 0 = L(v_2)$), probemos que $v_1 + v_2 \in Nu(L)$, es decir que $L(v_1 + v_2) = 0$.
     $L(v_1 + v_2) \underbrace{=}_{\text{ya que } L \text{ es lineal}} L(v_1) + L(v_2) = 0 + 0 = 0.$

   - Ahora probemos que el producto por escalar es cerrado en $Nu(L)$:
     Sean $\alpha \in R$ y $v \in Nu(L)$ entonces por ser L lineal $L(\alpha.v) = \alpha.L(v) = \alpha.0 = 0$ y por lo tanto $\alpha.v \in Nu(L)$

2. Mostremos que $Im(L)$ cumple las condiciones para ser un subespacio de W:
   Como vimos antes, $L(0_V) = 0_W$, esto muestra que dado $0_W \in W$ existe un $v = 0_V \in V$ tal que $L(v) = w = 0_W$ entonces la imagen de L contiene al neutro de W y $Im(L) \neq \emptyset$

   - Clausura de la suma: dados $w_1, w_2 \in Im(L)$, valdrá que $w_1 + w_2 \in Im(L)$
     Queremos mostrar que existe un $v \in V$ tal que $L(v) = w_1 + w_2$, sabemos que existen $v_1, v_2 \in V$ tal que $L(v_1 = w_1$ y $L(v_2) = w_2$. Entonces, si tomamos $v = v_1 + v_2$ en V (ya que V es un espacio vectorial y la suma es cerrada en V) vale que $L(v) = L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = w_1 + w_2$ como queríamos mostrar.

- Clausura del producto por escalar: dados $\alpha \in R$ y $w \in Im(L)$, vale que $\alpha.w \in Im(L)$
  Como $w \in Im(L)$ existe $v \in V$ tal que $L(v) = w$, podemos tomar $\overline{v} = \alpha.v$ en V, entonces $L(\overline{v}) = L(\alpha.v) = \alpha.L(v) = \alpha.w$, así encontramos un elemento de V que transformado por L nos da $\alpha.w$, lo que significa que $\alpha.w$ está en la imagen de L.

Ejemplo 2.8. *Dada $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L((x, y)) = (0, y)$, hallar los subespacios núcleo e imagen y sus respectivas bases y dimensión:*

- $Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = 0\}$.

  Sabemos que $L(v) = 0$ si y sólo si $y = 0$ ya que $L(v) = L(x, y) = (0, y)$, luego $v \in Nu(L)$ si y sólo si $y = 0$, por lo tanto $Nu(L) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \langle(1, 0)\rangle$.
  La base de $Nu(L)$ será $B_N = \{(1, 0)\}$ y su dimensión es 1.

- *Para encontrar la imagen de L, $Im(L) = \{w \in \mathbb{R}^2 : \exists v \in \mathbb{R}^2\ w = L(v)\}$, tomamos cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ tales que satisfaga: $(a, b) = w = L(v) = L(x, y) = (0, y)$, luego $(a, b) = (0, y)$ y por lo tanto los vectores $w = (a, b) = (0, b)$ y $Im(L) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\} = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\} = \langle(0, 1)\rangle$.*
  Luego, la base de la $Im(L)$ es $B_I = \{(0, 1)\}$ y la dimensión es 1.

Teorema 2.9. *Si $L : V \to W$ es una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W de dimensión finita, entonces:*

$$dim(Nu(L)) + dim(Im(L)) = dim(V)$$

Demostración:

Supongamos que $dim(V) = n$. Observemos que como tanto el núcleo como la imagen son subespacios de V sus dimensiones deben ser menores a la dimensión del espacio total V (a lo más pueden llegar a ser igual a la dimensión de V en los casos triviales de la transformación Nula o la transformación Identidad).

Sea $B_N = \{v_1.....v_k\}$ **una base del** $Nu(L)$ (o sea, $dim(Nu(L)) = k$).
Claramente, $L(v_i) = 0$ para todo $v_i \in B_N$.

Como los vectores de la base B_N son vectores de V y obviamente son linealmente independientes, podemos usarlos para conseguir una base de V.
Partiendo de la base B_N y la extendemos a $B = \{v_1.....v_k, v_{k+1}, ...v_n\}$ (n vectores linealmente independientes de V generan el espacio)

Ahora busquemos una base de $Im(L)$.
Sea $w \in Im(L)$, por definición existe un $v \in V$ tal que $w = L(v)$. Como v pertenece a V puede escribirse como combinación de los vectores de la base B:
$v = a_1v_1 + ... + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + ... + a_nv_n$,
entonces: $w = L(v) = L(a1v_1 + ... + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + ... + a_nv_n) =$
$= a_1L(v_1) + ... + a_kL(v_k) + a_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + a_nL(v_n) =$
$a_10 + ... + a_k0 + a_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + a_nL(v_n) = a_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + a_nL(v_n)$

Luego, todo vector en $Im(L)$ es combinación lineal de $\{L(v_{k+1}), ..., L(v_n)\}$,
además son linealmente independientes ya que si suponemos que $0_W = c_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + c_nL(v_n)$ como L es lineal tendríamos que $L(c_{k+1}(v_{k+1}) + ... + c_n(v_n) = 0$ y $c_{k+1}(v_{k+1}) + ... + c_n(v_n)$ pertenecería al $Nu(L)$ y por lo tanto sería combinación lineal de los vectores de B_N, entonces $c_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + c_nL(v_n) = b_1v_1 + ... + b_kv_k$
y de aquí podemos escribir $c_{k+1}L(v_{k+1}) + ... + c_nL(v_n) - b_1v_1 + ... - b_kv_k = 0$ una combinación lineal nula con todos vectores linealmente independientes en V (son los de la base B de V), entonces todos los coeficientes son ceros,en particular $c_{k+1} = ... = c_n = 0$. Así, los vectores $\{L(v_{k+1}), ..., L(v_n)\}$ generan $Im(L)$ y son independientes, y por lo tanto forman una base.

La dimensión de la imagen, la cantidad de vectores en la base, será igual a la cantidad de vectores de la base de V quitando los vectores que provenían de la base del núcleo.

Esto es, $dim(Im(L)) = dim(V) - dim(Nu(L)) = n - k$

Y así, $dim(Nu(L)) + dim(Im(L)) = dim(V)$

Se puede observar que en los ejemplos anteriores se cumple la propiedad.

Corolario 2.10.

- *Una transformación lineal inyectiva conserva la independencia lineal*
- *Una transformación lineal sobreyectiva cubre todo el codominio*

Demostración:

- Recordemos que una aplicación L es inyectiva si $v_1 \neq v_2 \Rightarrow L(v_1) \neq L(v_2)$ (ó, equivalentemente $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$).

  Si $L : V \to W$ es una transformación lineal, la inyectividad es equivalente a que $Nu(L) = \{0_V\}$.

  En efecto, si suponemos que L es inyectiva, $L(v) \neq L(0_V) = 0_W$ para todo $v \neq 0_V$ por lo que el núcleo sólo podrá contener al cero. Por otro lado, si $Nu(L) = \{0_V\}$ podemos tomar dos vectores cualesquiera v_1, v_2 en V y suponer que $L(v_1) = L(v_2)$ entonces $L(v_1) - L(v_2) = 0$ pero como L es lineal tenemos que $L(v_1 - v_2) = 0$ y entonces $v_1 - v_2 \in Nu(L)$ pero como el núleo contiene solamente al vector nulo, $v_1 - v_2 = 0$ y $v_1 = v_2$, por lo tanto L es inyectiva.

  Ahora con esto probemos que una transformación lineal inyectiva conserva la independencia:

  Sea $U = \{u_1, ...u_k\}$ un subconjunto linealmente independiente de V y sea $L : V \to W$ una transformación lineal inyectiva, o lo que es lo mismo, una transformación tal que $Nu(L) = \{0_V\}$, tenemos que probar que $L(U) = \{L(u_1), ...L(u_k)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

  Armamos la combinación nula con los vectores de $L(U)$, $0_W = c_1L(u_1) + ... + c_kL(u_k) = L(\underbrace{c_1u_1 + ... + c_ku_k}_{\in Nu(L)=\{0_V\}})$, y de manera similar a lo probado en el teorema vemos que esto implica que los c_i son todos cero.

- Recordemos que una aplicación L es sobreyectiva si para todo elemento w del codominio existe un elemento$v$ del dominio tal que su imagen por L es w.

  Decir que la transformación cubre todo el codominio es lo mismo que decir que la imagen de la transformación es todo el codominio. Dada una transformación lineal $L : V \to W$, ya sabemos que $Im(L)$ es un subespacio del espacio W, el codominio, usando las dimensiones de los espacios y que los vectores de la imagen generarán W llegamos a que $Im(L) = W$.

Con la transformación del último ejemplo vemos muy claramente que éstas propiedades no se cumplen si la aplicación no es inyectiva o sobreyectiva respectivamente.
$L((x,y)) = (0,y)$ no es inyectiva y se ve de manera fácil que transforma la base canónica por ejemplo en un conjunto que contiene al vector nulo; y tampoco es sobreyectiva y ya mostramos que la imagen no es todo R^2 si no un plano.

Propiedad 2.11. *Si $L : V \to W$ es una transformación lineal, con V un espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base arbitraria de V , entonces L queda completamente determinada por los n vectores $\{L(v_1), ..., L(v_n)\}$, es decir, por las n imágenes de los vectores de la base.*

Esto nos dice que podemos conocer una transformación lineal conociendo solamente como actúa con los vectores de una base cualquiera.

Ejemplo 2.12. *Hallar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que :*

$L(1,0,0) = (1,0)$, $L(0,1,0) = (-1,-6)$, $L(0,0,1) = (0,4)$

Tenemos que encontrar $L(x,y,z) =?$, sabemos cuanto vale en los vectores de una base, en este caso la base canónica y vamos a usar esos datos para ver cuanto vale en cualquier vector del espacio de salida.

Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, escribimos el vector en la base $(x,y,z) = x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$ y aplicamos la transformación lineal L para encontrar su valor:

$L(x,y,z) = L(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)) = xL((1,0,0))+yL((0,1,0))+zL((0,0,1)) = x(1,0)+y(-1,-6)+z(0,4) = (x,0)+(-y,-6y)+(0,4z) = (x-y,-6y+4z)$

Luego, $L(x,y,z) = (x-y,-6y+4z)$ es la transformación buscada.

2.1 Representación matricial-Matriz asociada

Consideremos una transformación $L: V \to W$, con V un espacio vectorial de dimensión n y W otro espacio vectorial (que eventualmente puede ser igual a V) de dimensión m, y sean $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente.

Primeramente evaluamos como actúa L sobre cada vector de la base B_V y luego escribiremos al vector resultante (que pertenece al subespacio W) en términos de los vectores de la base B_W. En efecto,

$$L(v_j) = w = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{ij}w_i + \cdots + a_{mj}w_m$$

Entonces, con las coordenadas a_{ij} formamos la columna j de la matriz A que representará a L en las bases B_V y B_W, es decir:

$$[L]_{B_V B_W} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{12} \\ a_{21} & .. & a_{2m} \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.13. *Dada* $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $L((x, y, z)) = \begin{pmatrix} 3x \\ y - z \\ 2z + x \end{pmatrix}$,

hallar la matriz A *asociada a* L *en las base* $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y la base canónica de* $\mathbb{R}^3$,

$$B_c = \{e_1^T, e_2^T, e_3^T\} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Comenzamos evaluando como actúa L *sobre los vectores de la base* B *y luego escribimos el vector resultante en la base caónica.*

$$L(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3.1\\1-1\\2.1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3.1\\0-(-1)\\2.(-1)+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + -1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3.0\\1-0\\2.0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Con las coordenadas de cada vector formamos las columnas de la matriz y así obtenemos:

$$[L]_{BBc} = A = \begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\\3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Observar que como utilizamos la base canónica para el espacio de llegada las columnas coinciden los vectores imágenes

En el caso especial las transformaciones entre espacios de R^n tenemos la propiedad extra que dice que aplicar la transformación a un vector es lo mismo que multiplicar al vector por la matriz asociada.
Esto es,

Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea A una matriz asociada, entonces $L(v) = A.v$
(obviamente v debe estar expresado en la misma base usada para hallar A).

Por ejemplo, en el caso anterior tenemos que: $L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3x\\y-z\\2z+x\end{pmatrix}$

$$A.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\\3 & -1 & 0\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+3y\\y+z\\3x-y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}3x\\y-z\\2z+x\end{pmatrix}$$

Pero si usamos la base canónica también para el espacio de salida obtendremos la igualdad.[2]

$$L(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbf{0}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbf{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbf{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbf{0}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \mathbf{0}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbf{\text{-}1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbf{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$[L]_{BBc} = C = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Y ahora si

$$C.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x\\y-z\\2z+x\end{pmatrix}$$

[2] *también valdría la igualdad si expresamos* $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *en la base usada para* V