Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5.3: Morfismos.

Ejercicio 1.

Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y, en caso afirmativo, hallar núcleo e imagen:

(a) *f: G ⟶ F dada por f (x)= 2^x y siendo los grupos G= (ℝ, +) los reales con la suma usual, F= ($\mathbb{R}_0$, *) los reales sin el 0 con el producto usual.*

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo x, y ∈ G, f (x + y)= f (x) f (y). En particular, f (x + y)= 2^{x+y}= $2^x 2^y$= f (x) f (y), por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los elementos de G que se mapean al neutro de F, el cual es 1, ya que, para cualquier a ∈ F, a * 1= a. En particular, f (x)= 1 ⟺ 2^x= 1 ⟺ x= 0 y, entonces, Nu(f)= {0}.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los valores que puede tomar f (x) cuando x recorre G. En particular, Im(f)= $\mathbb{R}_+$= {y ∈ ℝ: y > 0}.

(b) *f: G ⟶ F dada por f (x)= -x y siendo los grupos G= (ℤ, *) los enteros con la operación a*b= a + b + ab, F= (ℤ, ∘) los enteros con la operación a∘b= a + b - ab.*

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo x, y ∈ G, f (x * y)= f (x) ∘ f (y). En particular, f (x * y)= f (x + y + xy)= -(x + y + xy)= -x - y - xy ⟺ f (x) ∘ f (y)= (-x)∘(-y)= -x - y - (-x) (-y)= -x - y - xy, por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los elementos de G que se mapean al neutro de F, el cual es 0, ya que, para cualquier a ∈ F, a∘0= a + 0 - a * 0= a + 0 - 0= a. En particular, f (x)= 0 ⟺ -x= 0 ⟺ x= $\frac{0}{-1}$ ⟺ x= 0 y, entonces, Nu(f)= {0}.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los valores que puede tomar f (x) cuando x recorre G. En particular, Im(f)= ℤ.

(c) *f: (P (A), ∪) ⟶ (P (A), ∩) dada por f (X)= X^c (siendo A cualquier conjunto, P (A) indica el conjunto de partes de A y X^c el complemento de un conjunto).*

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo X, Y ∈ (P (A), ∪), f (X ∪ Y)= f (X) ∩ f (Y). En particular, f (X ∪ Y)= $(X \cup Y)^c$= $X^c \cap Y^c$= f (X) ∩ f (Y), por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los conjuntos de (P (A), ∪) que se mapean al neutro de F, el cual es A, ya que, para cualquier Y ∈ (P (A), ∩), Y ∩ A= Y. En particular, f (X)= A ⟺ X^c= A ⟺ X= A^c y, entonces, Nu(f)= $\{A^c\}$.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los conjuntos que puede tomar f (X) cuando X recorre (P (A), ∪). En particular, Im(f)= P (A).

Ejercicio 2.

Sea f: G ⟶ H un homomorfismo de grupos. Demostrar que el núcleo y la imagen de f son subgrupos de G y H, respectivamente.

El núcleo de f, denotado por Nu(f), se define como:

Nu(f)= {x ∈ G: f (x)= e_H}, donde e_H es el elemento neutro de H.
Nu(f) ⊂ G.

Cerradura: Para cada x, y ∈ Nu(f), xy ∈ Nu(f). En particular, f (xy)= f (x) f (y) (por f homomorfismo)= $e_H e_H$= e_H, por lo que xy ∈ Nu(f).

Elemento neutro: El elemento neutro de f en G también existe en Nu(f). En particular, e_G ∈ Nu(f), ya que f (e_G)= e_H.

Inversos: Un elemento x ∈ Nu(f) tiene inverso si existe x^{-1} ∈ Nu(f) tal que xx^{-1}= x^{-1}x= e_G. En particular, para x ∈ Nu(f), su inverso en G es x^{-1} y, entonces, f (x^{-1})= $[f\ (x)]^{-1}$ (por f homomorfismo)= e_H^{-1}= e_H, por lo que existe inverso para todo x ∈ Nu(f), ya que x^{-1} ∈ Nu(f).

Por lo tanto, queda demostrado que el núcleo de f es un subgrupo de G, ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

La imagen de f, denotada por Im(f), se define como:

Im(f)= {f (x): x ∈ G}.
Im(f) ⊂ H.

Cerradura: Para cada a, b ∈ Im(f), ab ∈ Im(f). En particular, ab= f (x) f (y)= f (xy) (por f homomorfismo), con xy ∈ G (por (G, *) grupo), por lo que ab ∈ Im(f).

Elemento neutro: El elemento neutro de f en H también existe en Im(f). En particular, e_H ∈ Im(f), ya que e_H= f (e_G).

Inversos: Un elemento a ∈ Im(f) tiene inverso si existe a^{-1} ∈ Im(f) tal que aa^{-1}= a^{-1}a= e_H. En particular, para a ∈ Im(f), su inverso en H es a^{-1}= $[f\ (x)]^{-1}$= f (x^{-1}) (por f homomorfismo), con x^{-1} ∈ G (por (G, *) grupo), por lo que existe inverso para todo a ∈ Im(f), ya que a^{-1} ∈ Im(f).

Por lo tanto, queda demostrado que la imagen de f es un subgrupo de H, ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 3.

*Sea (G, *) un grupo. Demostrar que la función f: G ⟶ G definida por f (a)= a^2 es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano (recordar un ejercicio de grupos abelianos del TP5.1).*

Si f (a)= a^2 es un homomorfismo, entonces, para todo a, b ∈ G, f (ab)= f (a) f (b), lo que implica que $(ab)^2$= a^2b^2 ⟺ abab= aabb ⟺ ba= ab. Por lo tanto, G es abeliano.

Si (G, *) es abeliano, entonces, para cada a, b ∈ G, ab= ba. En particular, f (ab)= $(ab)^2$= abab= aabb (por (G, *) abeliano)= a^2b^2= f (a) f (b), por lo que f (ab)= f (a) f (b). Por lo tanto, f (a)= a^2 es un homomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función f: G ⟶ G definida por f (a)= a^2 es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano.

Juan Menduiña

Ejercicio 4.

Si H_1, H_2 son dos subgrupos de un grupo conmutativo G, probar que la aplicación f: H_1 x H_2 ⟶ G dada por f (a, b)= ab es un morfismo de grupos.

La aplicación f es un morfismo de grupos si se cumple que, para todo (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in H_1$ x H_2, f $((a_1, b_1)$ $(a_2, b_2))$= f (a_1, b_1) f (a_2, b_2). En particular, f $((a_1, b_1)$ $(a_2, b_2))$= f (a_1a_2, b_1b_2)= $a_1a_2b_1b_2$= $a_1b_1a_2b_2$ (por (G, *) conmutativo)= f (a_1, b_1) f (a_2, b_2), por lo que f es un morfismo de grupos.

Por lo tanto, queda demostrado que la aplicación f: H_1 x H_2 ⟶ G dada por f (a, b)= ab es un morfismo de grupos.

Ejercicio 5.

Si f: $G_1 \longrightarrow G_2$ es un morfismo de grupos, entonces, es monomorfismo si y sólo si Nu(f)= $\{e_1\}$.

Sea f: $G_1 \longrightarrow G_2$ un morfismo de grupos, donde G_1 y G_2 son grupos, y e_1 y e_2 son los elementos neutros de G_1 y G_2, respectivamente.

Se quiere probar que f es un monomorfismo si y sólo si Nu(f)= $\{e_1\}$.

Si f es un monomorfismo, entonces, f es inyectiva, lo que implica que, si f (a)= f (b), entonces, a= b. En particular, si f (a)= e_2 (por definición de núcleo) y f (e_1)= e_2 (por preservación del neutro de los morfismos), entonces, a= e_1. Por lo tanto, Nu(f)= $\{e_1\}$.

Si Nu(f)= $\{e_1\}$ y, suponiendo que f (a)= f (b) para algunos a, b $\in G_1$, entonces, f (a)= f (b) $\Leftrightarrow$ f (a) $[f\ (b)]^{-1}$= f (b) $[f\ (b)]^{-1}$ (post-multiplicando por $[f\ (b)]^{-1}$) $\Leftrightarrow$ f (a) $[f\ (b)]^{-1}$= e_2 (por (G_2, *) grupo) $\Leftrightarrow$ f (a) f (b^{-1})= e_2 (por f morfismo) $\Leftrightarrow$ f (ab^{-1})= e_2 (por f morfismo), lo que implica que ab^{-1} $\in$ Nu(f), por lo que ab^{-1}= e_1 (por hipótesis) $\Leftrightarrow$ ab^{-1}b= e_1b (post-multiplicando por b) $\Leftrightarrow$ ae_1= b (por (G_1, *) grupo) $\Leftrightarrow$ a= b (por (G_1, *) grupo) y, entonces, f es inyectiva. Por lo tanto, f es un monomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que, si f: $G_1 \longrightarrow G_2$ es un morfismo de grupos, entonces, es monomorfismo si y sólo si Nu(f)= $\{e_1\}$.

Ejercicio 6.

*Sea (G, *) un grupo. Demostrar que la función f: G ⟶ G definida por f (a)=* a^{-1} *es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano.*

Si f (a)= a^{-1} es un isomorfismo, entonces, para todo a, b ∈ G, f (ab)= f (a) f (b), lo que implica que $(ab)^{-1}$= $a^{-1}b^{-1}$ ⟺ $(ab)^{-1}$= $(ba)^{-1}$ ⟺ ab= ba. Por lo tanto, G es abeliano.

Si (G, *) es abeliano, entonces, para cada a, b ∈ G, ab= ba. Por un lado, se considera f (ab)= $(ab)^{-1}$= $(ba)^{-1}$ (por (G, *) abeliano)= $a^{-1}b^{-1}$= f (a) f (b), por lo que f (ab)= f (a) f (b) y, entonces, f (a)= a^{-1} es un homomorfismo. Por otro lado, si f (a)= f (b), entonces, a^{-1}= b^{-1} ⟺ a= b, por lo que f es inyectiva; y, para todo b ∈ G (codominio), existe a ∈ G (dominio) tal que f (a)= b (en particular, a^{-1}= b ⟺ a= b^{-1} ∈ G (dominio)), por lo que f es sobreyectiva. Por lo tanto, f (a)= a^{-1} es un isomorfismo, ya que es un homomorfismo biyectivo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función f: G ⟶ G definida por f (a)= a^{-1} es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano.

Juan Menduiña

Ejercicio 7.

*Sea R una relación de congruencia sobre un semigrupo (S, *) y (S/R, *) el semigrupo cociente correspondiente. Demostrar que la función f_R: S ⟶ S/R definida por f_R (a)= $\bar{a}$ es un homomorfismo.*

La función f_R es un homomorfismo si se cumple que, para todo a, b ∈ S, f_R (ab)= f_R (a) f_R (b). En particular, f_R (ab)= $\overline{ab}$= $\bar{a}\bar{b}$ (por R relación de congruencia)= f_R (a) f_R (b), por lo que f_R es un homomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función f_R: S ⟶ S/R definida por f_R (a)= $\bar{a}$ es un homomorfismo.

Juan Menduiña

Ejercicio 8.

Sea z un número complejo. ¿Cuándo será un isomorfismo de grupos la aplicación f: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, siendo $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos, dada por f (x)= zx?

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo x, y $\in \mathbb{C}$, f (x + y)= f (x) + f (y). En particular, f (x + y)= z (x + y)= zx + zy= f (x) f (y), por lo que f es un homomorfismo.

Inyectividad: f es inyectiva si f (x)= f (y) implica x= y. En particular, f (x)= f (y) $\Leftrightarrow$ zx= zy $\Leftrightarrow$ x= y, por lo que f es inyectiva.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva si, para todo y $\in \mathbb{C}$ (codominio), existe x $\in \mathbb{C}$ (dominio) tal que f (x)= y. En particular, zx= y $\Leftrightarrow$ x= $\frac{y}{z} \in \mathbb{C}$ (dominio), si z$\neq$ 0, por lo que f es sobreyectiva si y sólo si z$\neq$ 0.

Por lo tanto, dado z un número complejo, la aplicación f: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, siendo $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos, dada por f (x)= zx, será un isomorfismo de grupos (con la operación +) cuando z$\neq$ 0.

Ejercicio 9.

Probar que hay un isomorfismo entre el grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales $\mathbb{R}^4$ *con la suma usual.*

Se define la aplicación f: M_2 ($\mathbb{R}$) ⟶ $\mathbb{R}^4$ que mapea una matriz de 2x2 a una cuaterna de números reales, tomando los elementos de la matriz. Es decir, para una matriz A ∈ M_2 ($\mathbb{R}$) dada por A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se define f (A)= (a, b, c, d) ∈ $\mathbb{R}^4$.

<u>Condición de homomorfismo:</u> f es un homomorfismo si se cumple que, para todo A, B ∈ M_2 ($\mathbb{R}$), f (A + B)= f (A) + f (B). En particular, f (A + B)= f ($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$)= f ($\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$)= (a+e, b+f, c+g, d+h)= (a, b, c, d) + (e, f, g, h)= f (A) + f (B), por lo que f es un homomorfismo.

<u>Inyectividad:</u> f es inyectiva si f (A)= f (B) implica A= B. En particular, f (A)= f (B) ⟺ f ($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$)= f ($\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$) ⟺ (a, b, c, d)= (e, f, g, h) ⟺ A= B, por lo que f es inyectiva.

<u>Sobreyectividad:</u> f es sobreyectiva si, para todo (a, b, c, d) ∈ $\mathbb{R}^4$ (codominio), existe A ∈ M_2 ($\mathbb{R}$) (dominio) tal que f (A)= (a, b, c, d). En particular, A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ∈ M_2 ($\mathbb{R}$) (dominio), por lo que f es sobreyectiva.

Por lo tanto, queda demostrado que hay un isomorfismo entre el grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales $\mathbb{R}^4$ con la suma usual.

Ejercicio 10.

Probar que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a ($\mathbb{Z}_m$, +).

Sea G un grupo cíclico de orden m con generador g ∈ G, es decir:

G= $\langle g \rangle$= {g^x: x ∈ $\mathbb{Z}$, 0 ≤ x < m}= {e, g, g^2, … , g^{m-1}}, con g^m= e, donde e es el elemento neutro de G.

Sea ($\mathbb{Z}_m$, +) el grupo formado por los enteros {0, 1, 2, … , m-1} con la operación + módulo m.

Se define la función φ: G ⟶ $\mathbb{Z}_m$ como:

φ (g^k)= k mod m, para k= 0, 1, … , m-1.

Condición de homomorfismo: φ es un homomorfismo si se cumple que, para todo g^x, g^y ∈ G, φ ($g^x g^y$)= φ (g^x) + φ (g^y). En particular, φ ($g^x g^y$)= φ (g^{x+y})= (x + y) mod m= x mod m + y mod m= φ (g^x) + φ (g^y), por lo que φ es un homomorfismo.

Inyectividad: φ es inyectiva si φ (g^x)= φ (g^y) implica g^x= g^y. En particular, φ (g^x)= φ (g^y) ⟺ x mod m= y mod m ⟺ x mod m - y mod m= 0 ⟺ (x - y) mod m= 0 ⟺ x= y ⟺ g^x= g^y, por lo que φ es inyectiva.

Sobreyectividad: φ es sobreyectiva si, para todo k ∈ $\mathbb{Z}_m$ (codominio), existe g^k ∈ G (dominio) tal que φ (g^k)= k mod m. En particular, φ (g^k)= k mod m (por definición de φ), con g^k ∈ G (dominio), por lo que φ es sobreyectiva.

Por lo tanto, queda demostrado que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a ($\mathbb{Z}_m$, +).