Colas de prioridad

Agenda

- Aplicaciones
- Definición
- Distintas implementaciones
- Heap Binaria
  - Propiedad Estructural
  - Propiedad de Orden
  - Implementación
- Operaciones: Insert, DeleteMin, Operaciones adicionales
- Construcción de una Heap: operación BuildHeap
  - Eficiencia
- HeapSort

Aplicaciones

- Cola de impresión
- Sistema Operativo
- Algoritmos de Ordenación

Definición

Una cola de prioridad es una estructura de datos que permite al menos dos operaciones:

- Insert

  Inserta un elemento en la estructura

- DeleteMin

  Encuentra, recupera y elimina el elemento mínimo

DeleteMin ← Cola de Prioridades ← Insert

Implementaciones

- ✓ Lista ordenada
  - Insert tiene O(N) operaciones
  - DeleteMin tiene O(1) operaciones
- ✓ Lista no ordenada
  - Insert tiene O(1) operaciones
  - DeleteMin tiene O(N) operaciones
- ✓ Árbol Binario de Búsqueda
  - Insert y DeleteMin tienen en promedio O(log N) operaciones

Heap Binaria

- Es una implementación de colas de prioridad que no usa punteros y permite implementar ambas operaciones con O(log N) operaciones en el peor caso

- Cumple con dos propiedades:
  - ✓ Propiedad estructural
  - ✓ Propiedad de orden

Propiedad estructural

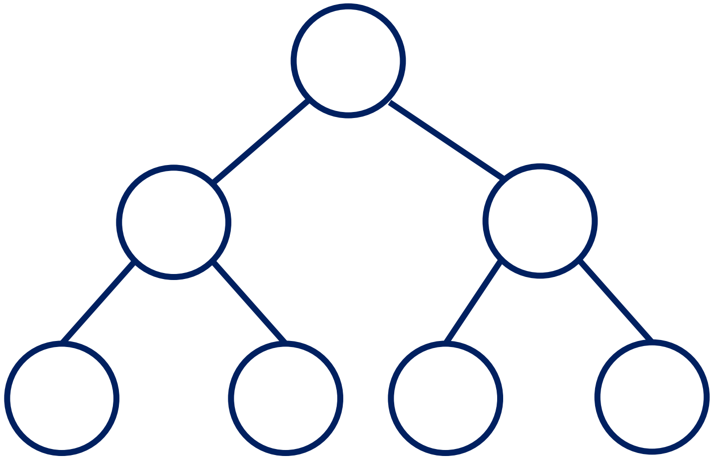
Una heap es un árbol binario completo

- En un árbol binario lleno de altura *h*, los nodos internos tienen exactamente 2 hijos y las hojas tienen la misma profundidad

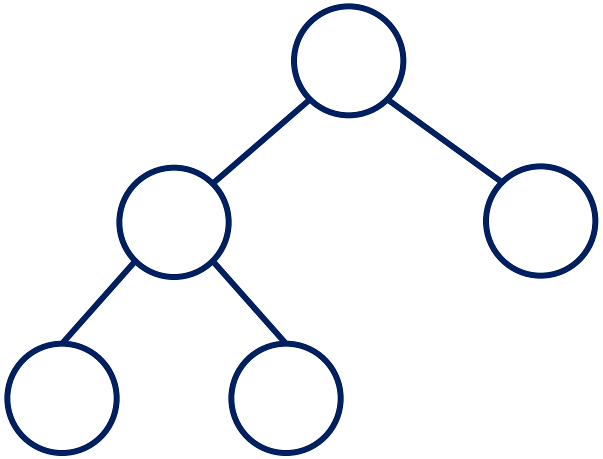
- Un árbol binario completo de altura *h* es un árbol binario lleno de altura *h-1* y en el nivel *h*, los nodos se completan de izquierda a derecha

Propiedad estructural (cont.)

Árbol binario lleno

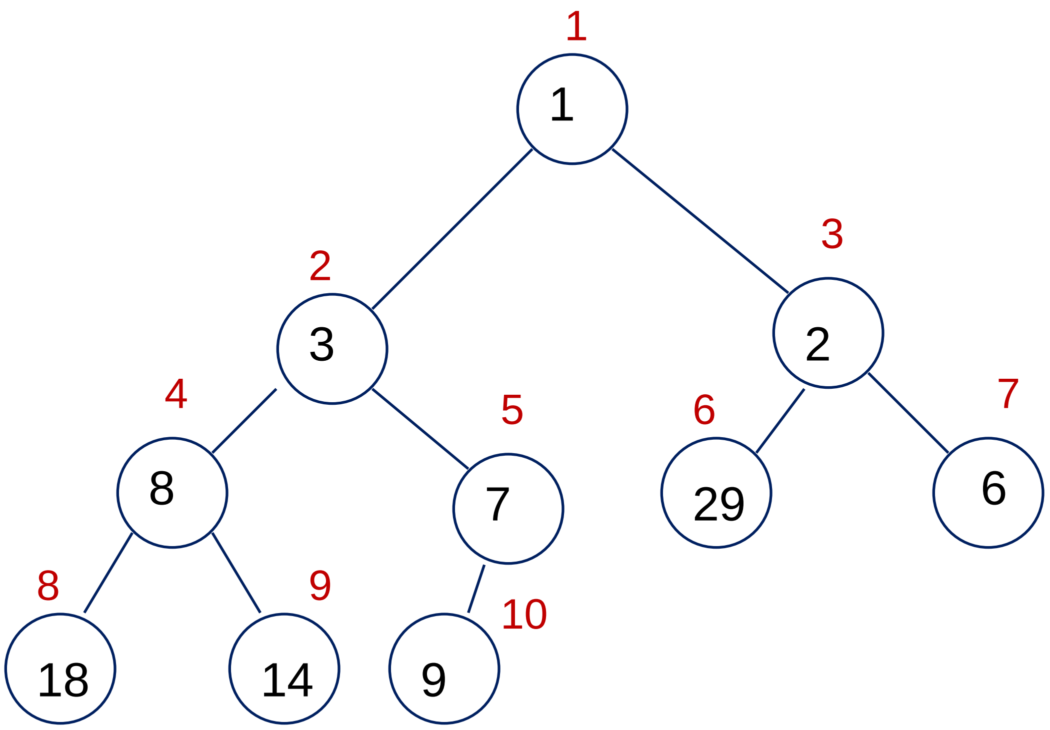


Árbol binario completo



Propiedad estructural (cont.)

Ejemplo:



Propiedad estructural (cont.)

✓ El número de nodos *n* de un árbol binario completo de altura *h*, satisface:

$$2^h \leq n \leq (2^{h+1}-1)$$

Demostración:

- Si el árbol es lleno, $n = 2^{h+1}-1$
- Si no, el árbol es lleno en la altura *h-1* y tiene por lo menos un nodo en el nivel *h:*

  $n = 2^{h-1+1}-1+1=2^h$

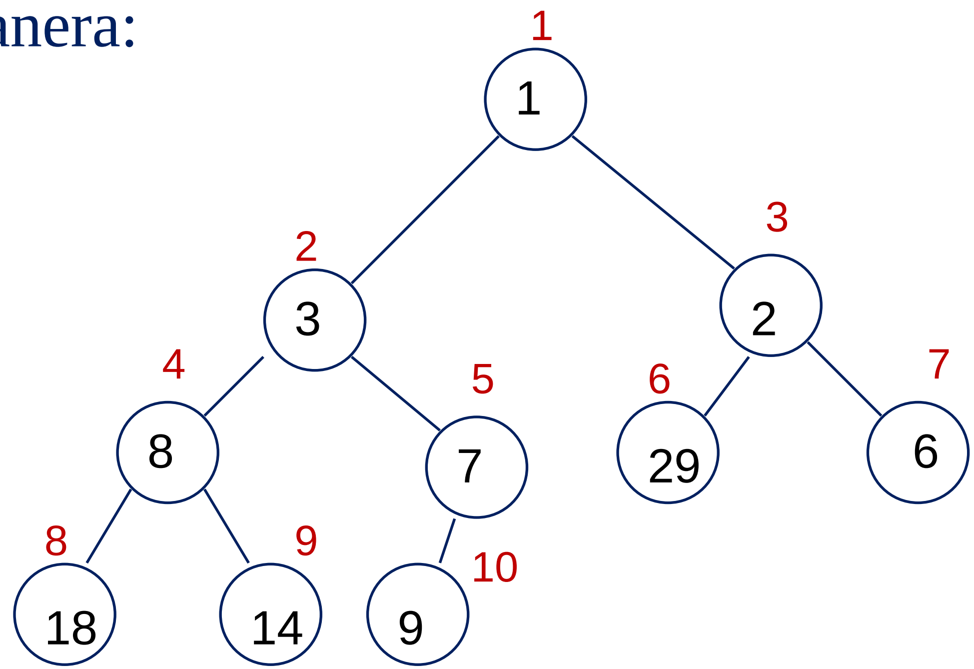
La altura *h* del árbol es de **O(log n)**

Propiedad estructural (cont.)

- Dado que un árbol binario completo es una estructura de datos regular, puede almacenarse en un arreglo, tal que:
  - ✓ La raíz está almacenada en la posición 1
  - ✓ Para un elemento que está en la posición i:
    - El hijo izquierdo está en la posición 2*i
    - El hijo derecho está en la posición 2*i + 1
    - El padre está en la posición $\lfloor i/2 \rfloor$

Propiedad estructural (cont.)

El árbol que vimos como ejemplo, puede almacenarse de la siguiente manera:



1	3	2	8	7	29	6	18	14	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Propiedad de orden

- MinHeap
  - El elemento mínimo está almacenado en la raíz
  - El dato almacenado en cada nodo es menor o igual al de sus hijos

- MaxHeap
  - Se usa la propiedad inversa

Implementación de Heap

Una heap H consta de:

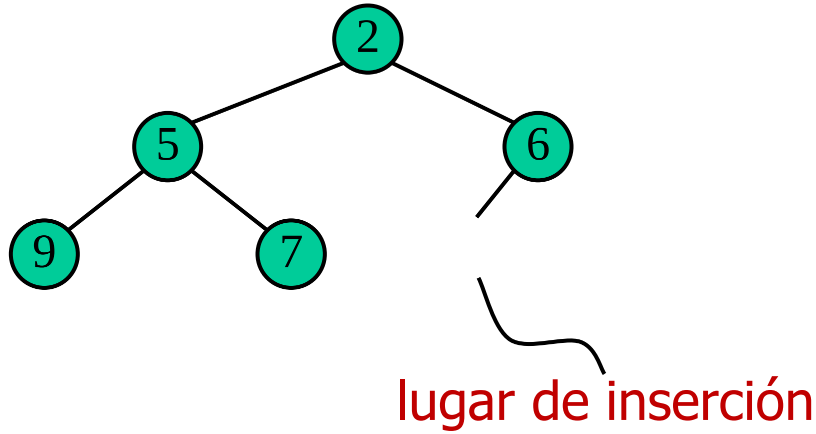
- *Un arreglo que contiene los datos*
- *Un valor que me indica el número de elementos almacenados*

Ventaja:

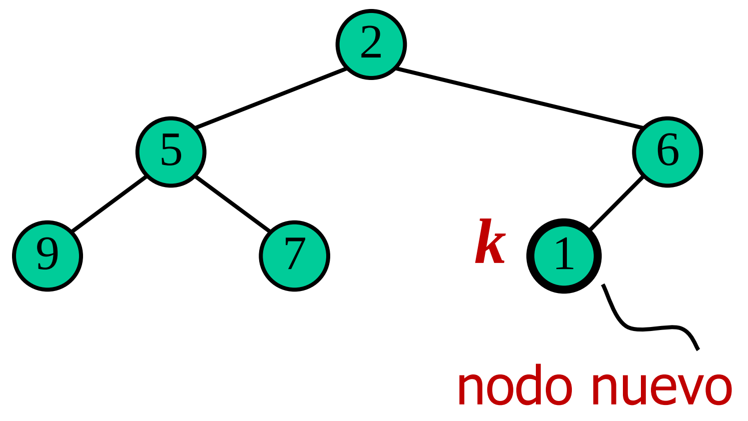
- ✓ No se necesita usar punteros
- ✓ Fácil implementación de las operaciones

Operación: Insert

- El dato se inserta como último ítem en la heap
  - La propiedad de la heap puede ser violada
- Se debe hacer un filtrado hacia arriba para restaurar la propiedad de orden

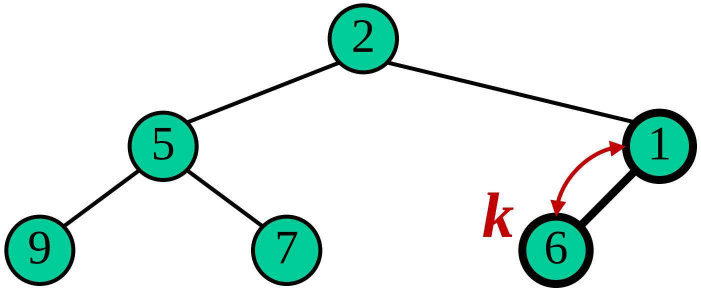


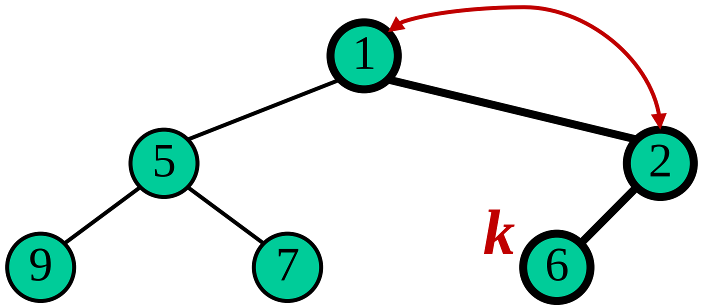
Inserto el 1



Insert: Filtrado hacia arriba (Percolate Up)

- El filtrado hacia arriba restaura la propiedad de orden intercambiando ***k*** a lo largo del camino hacia arriba desde el lugar de inserción
- El filtrado termina cuando la clave ***k*** alcanza la raíz o un nodo cuyo padre tiene una clave menor
- Ya que el algoritmo recorre la altura de la heap, tiene *O(log n)* intercambios





Operación: insert (Versión 1)

Filtrado hacia arriba
o Percolate_up

```
insert (Heap h, Comparable x)  {

        h.tamaño  =  h.tamaño + 1;
        n  =  h.tamaño;

        while ( n / 2 > 0 & h.dato[n/2]  > x ) {
            h.dato[n]  = h.dato[n/2];
            n = n/2;
            }
        h.dato[n] = x;   // ubicación correcta de "x"

}  // end del insert
```

Operación: percolate_up

```
percolate_up (Heap h, Integer i)  {

        temp = h.dato[i];
        while (i/2 > 0 & h.dato[i/2] > temp ) {
              h.dato[i] = h.dato[i/2];
              i = i/2;
              }
        h.dato[ i ] = temp;   //  ubicación correcta del elemento a filtrar

}  // end del percolate_up
```

Operación: insert (Versión 2)

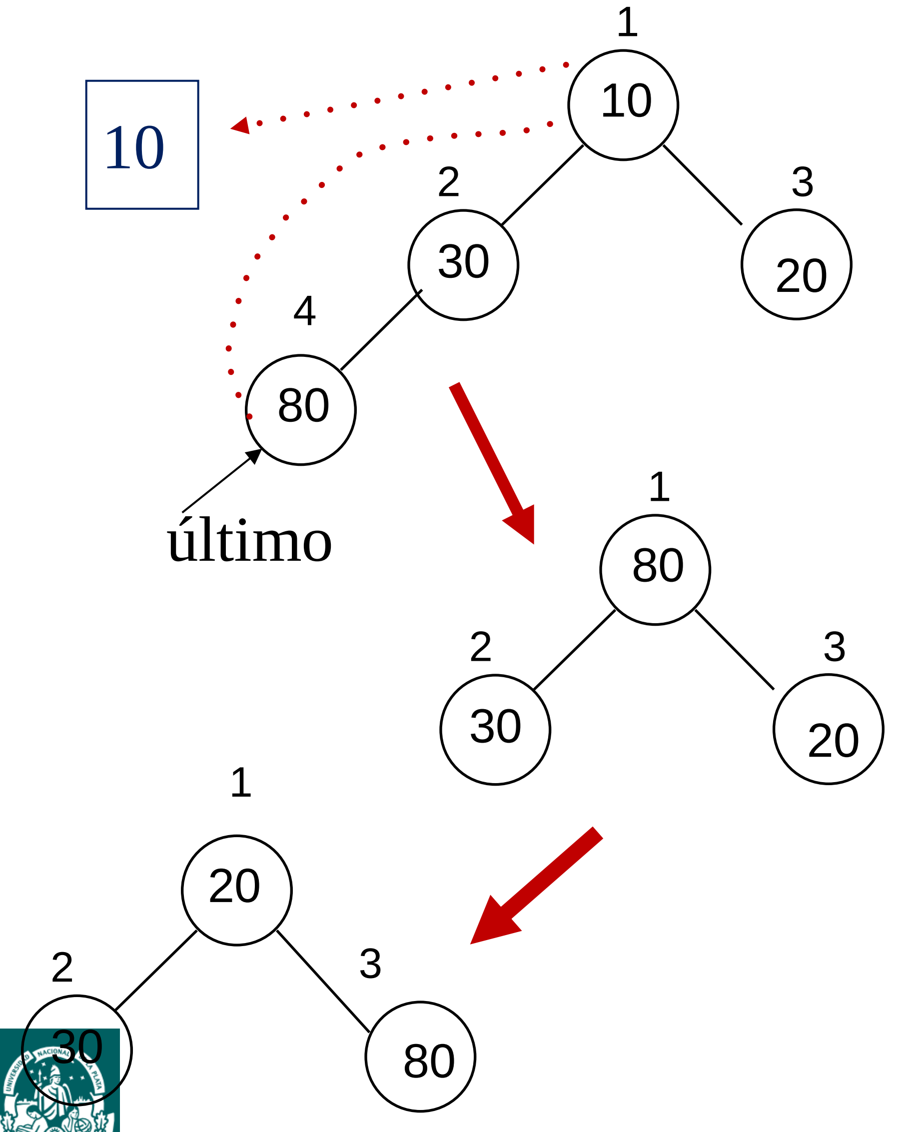
```
insert (Heap h, Comparable x)  {

        h.tamaño =  h.tamaño + 1;
        h.dato[h.tamaño] = x;
        percolate_up ( h , h.tamaño )

}  // end del insert
```

Operación: DeleteMin

- Guardo el dato de la raíz

- Elimino el último elemento y lo almaceno en la raíz

- Se debe hacer un filtrado hacia abajo para restaurar la propiedad de orden



DeleteMin: Filtrado hacia abajo (Percolate Down)

- Es similar al filtrado hacia arriba
- El filtrado hacia abajo restaura la propiedad de orden intercambiando el dato de la raíz hacia abajo a lo largo del camino que contiene los hijos mínimos
- El filtrado termina cuando se encuentra el lugar correcto dónde insertarlo
- Ya que el algoritmo recorre la altura de la heap, tiene *O(log n)* operaciones de intercambio.

Operación: delete_min (Versión 1)

```
delete_min ( Heap h, Comparable e)  {
 if (not esVacía(h) ) {
             e := h.dato[1];
             candidato := h.dato[ h.tamaño ];
             h.tamaño :=  h.tamaño  - 1;
             p := 1;
             stop_perc := false;
             while ( 2* p <= h.tamaño )  and ( not stop_perc) {
                  h_min := 2 * p;   // buscar el hijo con clave menor
                  if h_min <> h.tamaño   //como existe el hijo derecho comparo a ambos
                        if ( h.dato[h_min +1] < h.dato[h_min] )
                                                              h_min := h_min + 1
                  if  candidato  > h.dato [h_min] { //  percolate_down
                                                              h.dato [p] := h.dato[ h_min ];
                                                              p := h_min;
                                                           }
                  else    stop_perc := true;
             }
      h.dato[p] := candidato;
 }
}  // end del delete_min
```

Filtrado hacia abajo o Percolate_down

Operación: percolate_down

```
percolate_down ( Heap h, int p) {

        candidato := h.dato[ p ]
        stop_perc := false;
        while (  2* p <= h.tamaño )  and ( not stop_perc) {
                h_min := 2 * p;   //  buscar el hijo con clave menor
                if h_min <> h.tamaño   then
                if ( h.dato[h_min +1] < h.dato[h_min] )
                                                h_min := h_min + 1
                if  candidato  > h.dato [h_min] { // percolate_down
                                              h.dato [p] := h.dato[ h_min ]
                                              p := h_min;
                                              }
                else   stop_perc := true;
         }    // end  { while }
        h.dato[p] := candidato;
}     // end {percolate_down }
```

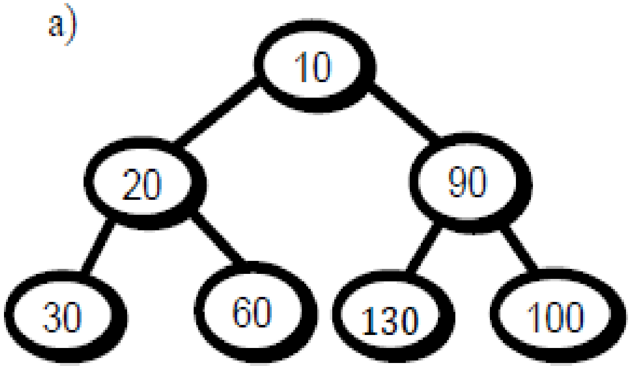
Operación: delete_min (Versión 2)

```
delete_min ( Heap h; Comparable e) {

  if (h.tamaño > 0  )    { //  la heap no está vacía
          e := h.dato[1] ;
          h.dato[1] := h.dato[h.tamaño] ;
          h.tamaño :=  h.tamaño - 1;
          percolate_down ( h ; 1);

  }
}   // end del delete_min
```

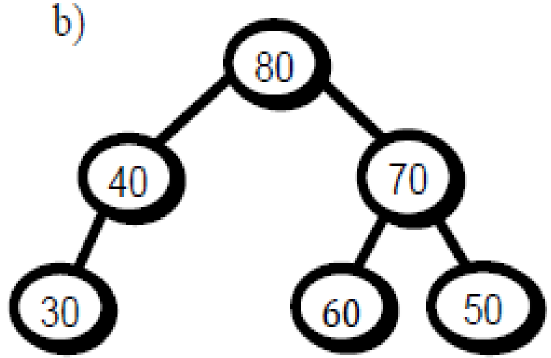
Ejercitación

1.- Indique para cada uno de los siguientes árboles binarios si son un árbol parcialmente ordenado. En caso negativo, explique por qué.

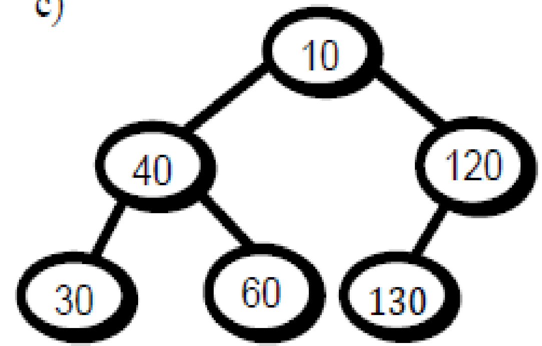
a)



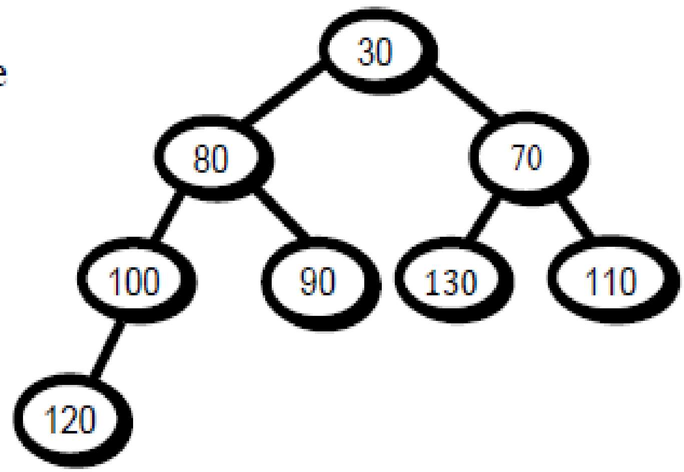
b)



c)



2.- ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al almacenamiento lineal del siguiente árbol parcialmente ordenado o Heap binaria?



a) 30,70, 80 90,100, 110,120, 130
b) 30,80, 70,100, 90,130, 110, 120
c) 30,80, 100,120, 90,70, 130, 110
d) 120, 100, 90, 80, 130, 110, 70, 30

3.- Inserte los valores 60,75 y 10 a la heap anterior. Dibuje la heap resultante después de cada operación.

Otras operaciones

- DecreaseKey(x, Δ, H)
  - Decrementa la clave que está en la posición x de la heap H, en una cantidad Δ
- IncreaseKey(x, Δ, H)
  - Incrementa la clave que está en la posición x de la heap H, en una cantidad Δ
- DeleteKey(x)
  - Elimina la clave que está en la posición x
  - Puede realizarse:
    → **DecreaseKey(x,∞, H)**
    → **DeleteMin(H)**