Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 4: Relaciones entre Conjuntos.

Ejercicio 1.

Sean los conjuntos A= {1, 0, -1} y B= {4, 3, 2, 1}. Decidir si las siguientes corresponden a relaciones de A en B. Justificar.

(a) *R= {(1, 1); (0, 2)}.*

R corresponde a una relación de A en B.

(b) *R= {(-1, 1); (1, -1)}.*

R no corresponde a una relación de A en B, ya que el segundo elemento de la segunda tupla -1 ∉ B.

(c) *R= {(-1, 1); (-1, 2); (-1, 3)}.*

R corresponde a una relación de A en B.

(d) *R= {(4, 1)}.*

R no corresponde a una relación de A en B, ya que el primer elemento de la primera tupla 4 ∉ A.

(e) *R= ∅.*

R corresponde a una relación de A en B.

Ejercicio 2.

Sea A= {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, B= $\mathbb{Z}$ *y la relación de A en B que viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x. Escribir R por extensión. Definir* R^{-1} *por comprensión y por extensión.*

R= {(-3, 9); (-2, 4); (-1, 1); (0, 0); (1, 1); (2, 4); (3, 9)}.

R^{-1}= {(y, x): (x, y) ∈ R}.
R^{-1}= {(9, -3); (4, -2); (1, -1); (0, 0); (1, 1); (4, 2); (9, 3)}.

Ejercicio 3.

Sean los conjuntos A= {a, b, c, d, e}, V= {vocales} y B= {1, 2, 3}. Decidir si las siguientes corresponden a relaciones. Justificar.

(a) *R= {(a, a, a); (a, b, c); (b, c, d)} en A x A x A.*

R corresponde a una relación en A x A x A.

(b) *R= {(a, a, a); (c, e, 2); (a, b, 1)} en A x V x B.*

R no corresponde a una relación en A x V x B, ya que el segundo elemento de la tercera tupla b $\notin$ V.

(c) *R= {(a, b, 1); (e, c, 2); (i, j, 3)} en V x A x B.*

R no corresponde a una relación en V x A x B, ya que el segundo elemento de la tercera tupla j $\notin$ A.

(d) *R= {(a, z, 3); (b, i, 2); (c, x, 1)} en A x V x B.*

R no corresponde a una relación en A x V x B, ya que el segundo elemento de la primera tupla z $\notin$ V y el segundo elemento de la tercera tupla x $\notin$ V.

Ejercicio 4.

Sea A= {1, 2, 3} y la relación R en A x A x A definida de la forma: (x, y, z) ∈ R si y sólo si x < y e y < z, siendo < el "menor" usual entre números reales. Escribir R por extensión.

R= {(1, 2, 3)}.

Ejercicio 5.

Para cada una de las siguientes relaciones, dar tres pares que pertenezcan y tres pares que no. Indicar si son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

(a) *En el conjunto de los números reales:*

- *xRy si y sólo si $x \geq 4$ e $y \geq 5$.*

(4, 5), (5, 6), (6, 7) $\in$ R.
(1, 2), (2, 3), (3, 4) $\notin$ R.

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. En particular, $(4, 4) \notin R$.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$. En particular, $(4, 5) \in R$ pero $(5, 4) \notin R$.

R no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces, $x= y$. En particular, $(5, 6) \in R$ y $(6, 5) \in R$ pero $5 \neq 6$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces, $(x, z) \in R$. En particular, si $x \geq 4$, $y \geq 5$ e $y \geq 4$, $z \geq 5$, entonces, $x \geq 4$, $z \geq 5$.

Por lo tanto, R transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica ni antisimétrica.

- *xRy si y sólo si $y \leq x \leq y + 3$.*

(1, 1), (2, 2), (3, 3) $\in$ R.
(4, 0), (5, 1), (6, 2) $\notin$ R.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. En particular, $x \leq x \leq x + 3$.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$. En particular, si $y \leq x \leq y + 3$, entonces, no necesariamente $x \leq y \leq x + 3$ (excepto que $x= y$).

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces, $x= y$. En particular, si $y \leq x \leq y + 3$ y $x \leq y \leq x + 3$, entonces, $x= y$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces, $(x, z) \in R$. En particular, si $y \leq x \leq y + 3$ e $z \leq y \leq z + 3$, entonces, $z \leq x \leq z + 3$.

Por lo tanto, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

(b) *Sean A= {1, 2, 3, 4} y P (A) el conjunto de partes de A:*

- *en P (A), XRY si y sólo si X ∩ Y= ∅.*

P (A)= {∅, {1}; {2}; {3}; {4}; {1, 2}; {1, 3}; {1, 4}; {2, 3}; {2, 4}; {3, 4}; {1, 2, 3}; {1, 2, 4}; {1, 3, 4}; {2, 3, 4}; {1, 2, 3, 4}}.

({1}; {2}), ({2}; {3}), ({3}; {4}) ∈ R.
({1}; {1, 2}), ({2}; {2, 3}), ({3}; {3, 4}) ∉ R.

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo X ∈ P (A), (X, X) ∈ R. En particular, X ∩ X≠ ∅.

R es simétrica porque se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R, entonces, (Y, X) ∈ R. En particular, si X ∩ Y= ∅, entonces, Y ∩ X= ∅.

R no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R y (Y, X) ∈ R, entonces, X= Y. En particular, ({1}, {2}) ∈ R y ({2}, {1}) ∈ R pero {1}≠ {2}.

R no es transitiva porque no se cumple que, para cada X, Y, Z ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R y (Y, Z) ∈ R, entonces, (X, Z) ∈ R. En particular, ({1}, {2}) ∈ R y ({2}, {1, 3}) ∈ R pero ({1}, {1, 3}) ∉ R.

Por lo tanto, R es simétrica, pero no es reflexiva ni antisimétrica ni transitiva.

- *en P (A), XRY si y sólo si X ⊂ Y.*

P (A)= {∅, {1}; {2}; {3}; {4}; {1, 2}; {1, 3}; {1, 4}; {2, 3}; {2, 4}; {3, 4}; {1, 2, 3}; {1, 2, 4}; {1, 3, 4}; {2, 3, 4}; {1, 2, 3, 4}}.

({1}; {1, 2}), ({2}; {2, 3}), ({3}; {3, 4}) ∈ R.
({1}; {2}), ({2}; {3}), ({3}; {4}) ∉ R.

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo X ∈ P (A), (X, X) ∈ R. En particular, X ⊄ X.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R, entonces, (Y, X) ∈ R. En particular, si X ⊂ Y, entonces, Y ⊄ X.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R y (Y, X) ∈ R, entonces, X= Y. En particular, si X ⊂ Y, entonces, Y ⊄ X.

R es transitiva porque se cumple que, para cada X, Y, Z ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R y (Y, Z) ∈ R, entonces, (X, Z) ∈ R. En particular, si X ⊂ Y e Y ⊂ Z, entonces, X ⊂ Z.

Por lo tanto, R es antisimétrica y transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica.

Ejercicio 6.

Determinar si las siguientes relaciones definidas en A= {a, b, c, d} son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas:

(a) $R_0 = \emptyset$.

R_0 no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_0.

R_0 es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_0, entonces, (y, x) ∈ R_0.

R_0 es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_0 y (y, x) ∈ R_0, entonces, x= y.

R_0 es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_0 y (y, z) ∈ R_0, entonces, (x, z) ∈ R_0.

Por lo tanto, R_0 es simétrica, antisimétrica y transitiva, pero no es reflexiva.

(b) R_1= *{(a, a); (a, b); (d, c); (c, d)}.*

R_1 no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_1. En particular, (b, b) ∉ R_1, (c, c) ∉ R_1 y (d, d) ∉ R_1.

R_1 no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_1, entonces, (y, x) ∈ R_1. En particular, (a, b) ∈ R_1 pero (b, a) ∉ R_1.

R_1 no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_1 y (y, x) ∈ R_1, entonces, x= y. En particular, (d, c) ∈ R_1 y (c, d) ∈ R_1 pero d≠ c.

R_1 no es transitiva porque no se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_1 y (y, z) ∈ R_1, entonces, (x, z) ∈ R_1. En particular, (c, d) ∈ R_1 y (d, c) ∈ R_1 pero (c, c) ∉ R_1 y (d, c) ∈ R_1 y (c, d) ∈ R_1 pero (d, d) ∉ R_1.

Por lo tanto, R_1 no es reflexiva ni simétrica ni antisimétrica ni transitiva.

(c) R_2= *{(a, a); (b, b); (a, b); (b, a); (d, d); (c, c)}.*

R_2 es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_2.

R_2 es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_2, entonces, (y, x) ∈ R_2.

R_2 no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_2 y (y, x) ∈ R_2, entonces, x= y. En particular, (a, b) ∈ R_2 y (b, a) ∈ R_2 pero a≠ b.

R_2 es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_2 y (y, z) ∈ R_2, entonces, (x, z) ∈ R_2.

Por lo tanto, R_2 es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica.

(d) R_3= *{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)}.*

R_3 no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_3. En particular, (c, c) ∉ R_3 y (d, d) ∉ R_3.

R_3 es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_3, entonces, (y, x) ∈ R_3.

R_3 no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_3 y (y, x) ∈ R_3, entonces, x= y. En particular, (a, b) ∈ R_3 y (b, a) ∈ R_3 pero a≠ b.

R_3 no es transitiva porque no se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_3 y (y, z) ∈ R_3, entonces, (x, z) ∈ R_3. En particular, (a, b) ∈ R_3 y (b, c) ∈ R_3 pero (a, c) ∉ R_3 y (c, b) ∈ R_3 y (b, c) ∈ R_3 pero (c, c) ∉ R_3.

Por lo tanto, R_3 es simétrica, pero no es ni reflexiva ni antisimétrica ni transitiva.

(e) R_4= *A x A.*

R_4 es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_4.

R_4 es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_4, entonces, (y, x) ∈ R_4.

R_4 no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_4 y (y, x) ∈ R_4, entonces, x= y. En particular, (a, b) ∈ R_4 y (b, a) ∈ R_4 pero a≠ b.

R_4 es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_4 y (y, z) ∈ R_4, entonces, (x, z) ∈ R_4.

Por lo tanto, R_4 es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica.

Ejercicio 7.

Escribir la matriz y los dígrafos asociados a las relaciones anteriores.

(a) $R_0 = \emptyset$.

$$M_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) R_1 = *{(a, a); (a, b); (d, c); (c, d)}.*

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) R_2 = *{(a, a); (b, b); (a, b); (b, a); (d, d); (c, c)}.*

$$M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) R_3 = *{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)}.*

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) R_4 = *A x A.*

$$M_{R_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8.

Sea A= {a, b, c, d}.

(a) *Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A.*

R= {(a, a)}.

(b) *Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A.*

R= {(a, b); (b, a)}.

(c) *Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A.*

R= {(a, b); (b, c)}.

(d) *Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A.*

R= {(a, b)}.

(e) *Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A.*

R= {(a, b)}.

Ejercicio 9.

Demostrar que, si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b, entonces, aRa y bRb.

aRb $\Longrightarrow$ bRa (por simétrica)
aRb $\wedge$ bRa $\Longrightarrow$ aRa (por transitiva).
bRa $\wedge$ aRb $\Longrightarrow$ bRb (por transitiva).

Ejercicio 10.

Sea A un conjunto arbitrario. Sea R= Δ_A (diagonal de A). Analizar qué propiedades tiene R.

R= Δ_A
R= {(x, x) | x ∈ A}.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R.

R es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R.

Por lo tanto, R es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

Ejercicio 11.

Proponer una relación en el conjunto de los números naturales. Mostrar qué propiedades tiene (reflexividad, simetría, antisimetría, transitividad).

A= $\mathbb{N}$.

xRy si y sólo $x \leq y$, con x, y $\in$ A.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x $\in$ A, (x, x) $\in$ R. En particular, $x \leq x$.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R, entonces, (y, x) $\in$ R. En particular, si $x \leq y$, entonces, no necesariamente $y \leq x$ (excepto que x= y).

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R y (y, x) $\in$ R, entonces, x= y. En particular, si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces, x= y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z $\in$ A, si (x, y) $\in$ R y (y, z) $\in$ R, entonces, (x, z) $\in$ R. En particular, si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces, $x \leq z$.

Por lo tanto, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

Ejercicio 12.

Proponer una relación en el conjunto de los alumnos de informática. Mostrar qué propiedades tiene (reflexividad, simetría, antisimetría, transitividad).

A= conjunto de los alumnos de informática.

xRy si y sólo si el apellido de x está antes, en orden alfabético, que el de y.

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. En particular, no es posible que un apellido esté antes, en orden alfabético, que sí mismo.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$. En particular, si el apellido de x está antes que el de y, entonces, el de y no está antes que el de x.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces, $x= y$. En particular, si el apellido de x está antes que el de y y el de y está antes que el de x, entonces, el apellido de x es el mismo que el de y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces, $(x, z) \in R$. En particular, si el apellido de x está antes que el de y y el apellido de y está antes que el de z, entonces, el apellido de x está antes que el de z.

Por lo tanto, R es antisimétrica y transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica.

Ejercicio 13.

Dada una relación binaria R sobre un conjunto A, se define la relación complemento de R, $\bar{R}$, por: a$\bar{R}$b si y sólo si a no está relacionada con b por R.

(a) *Dar un ejemplo de una relación R y su complemento.*

A= {1, 2, 3}.
R= {(1, 1); (2, 2); (3, 3)}.
$\bar{R}$= {(1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 2)}.

(b) *Probar que, si R ⊂ S, entonces, $\bar{S} \subset \bar{R}$.*

Para todo (a, b) ∈ R:

Si (a, b) ∈ R, (a, b) ∈ S ⟺ Si (a, b) ∉ S, (a, b) ∉ R.
Si (a, b) ∈ R, (a, b) ∈ S ⟺ Si (a, b) ∈ $\bar{S}$, (a, b) ∈ $\bar{R}$.

Ejercicio 14.

Dada R una relación binaria sobre A, probar que:

(a) *R es reflexiva si y sólo si R^{-1} también lo es.*

Si R es reflexiva, entonces, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R, lo que implica que (x, x) ∈ R^{-1}, ya que el par (x, x) es su propio inverso. Por lo tanto, R^{-1} es reflexiva, ya que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R^{-1}.

Si R^{-1} es reflexiva, entonces, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R^{-1}, lo que implica que (x, x) ∈ R, ya que el par (x, x) es su propio inverso. Por lo tanto, R es reflexiva, ya que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R.

Por lo tanto, queda demostrado que R es reflexiva si y sólo si R^{-1} también lo es.

(b) *R es simétrica si y sólo si R^{-1}= R.*

Si R es simétrica, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R, lo que implica que, si (y, x) ∈ R^{-1}, entonces, (x, y) ∈ R^{-1}. Por lo tanto, R^{-1}= R.

Si R^{-1}= R, entonces, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. Por lo tanto, R es simétrica.

Por lo tanto, queda demostrado que R es simétrica si y sólo si R^{-1}= R.

(c) *R es simétrica si y sólo si R^{-1} y $\bar{R}$ también lo son.*

Si R es simétrica, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R, lo que implica, por un lado, que, si (y, x) ∈ R^{-1}, entonces, (x, y) ∈ R^{-1}; y, por otro lado, que, si (y, x) ∉ R (∈ $\bar{R}$), entonces, (x, y) ∉ R (∈ $\bar{R}$). Por lo tanto, R^{-1} y $\bar{R}$ son simétricas.

Si R^{-1} y $\bar{R}$ son simétricas, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R^{-1}, entonces, (y, x) ∈ R^{-1} y, si (x, y) ∈ $\bar{R}$, entonces, (y, x) ∈ $\bar{R}$, respectivamente, lo que implica que, si (y, x) ∈ R, entonces, (x, y) ∈ R. Por lo tanto, R es simétrica.

Por lo tanto, queda demostrado que R es simétrica si y sólo si R^{-1} y $\bar{R}$ también lo son.

(d) *R es antisimétrica si y sólo si R ∩ R^{-1} ⊂ Δ_A.*

Si R es antisimétrica, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y, lo que implica que, en R ∩ R^{-1}, no existen pares (x, y) con x≠ y. Por lo tanto, R ∩ R^{-1} ⊂ Δ_A.

Si R ∩ $R^{-1} \subset \Delta_A$, entonces, para cada (x, y) ∈ R ∩ R^{-1}, x= y, lo que implica que, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. Por lo tanto, R es antisimétrica.

Por lo tanto, queda demostrado que R es antisimétrica si y sólo si R ∩ $R^{-1} \subset \Delta_A$.

Ejercicio 15.

Se dice que una relación R sobre un conjunto A es asimétrica si, cada vez que a está relacionado con b, no se da que b esté relacionado con a. Dar un ejemplo de una relación asimétrica.

$A = \mathbb{N}$.
aRb si y sólo si $a < b$.

Si $(a, b) \in R$, $a < b$ y, por lo tanto, $b \not< a$, es decir, $(b, a) \notin R$.

Ejercicio 16.

Probar que, dada una relación R sobre un conjunto A, R es asimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

Si R es asimétrica, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R ($\notin R^{-1}$), entonces, (y, x) ∉ R ($\in R^{-1}$), lo que implica que, en R y R^{-1}, no existen pares (x, y) comunes. Por lo tanto, $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

Si $R \cap R^{-1} = \emptyset$, entonces, en R y R^{-1}, no existen pares (x, y) comunes, lo que implica que, si (x, y) ∈ R ($\notin R^{-1}$), entonces, (y, x) ∉ R ($\in R^{-1}$). Por lo tanto, R es asimétrica.

Por lo tanto, queda demostrado que R es asimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

Ejercicio 17.

Sean R y S dos relaciones en A. Probar que:

(a) *Si* $R \subset S$*, entonces,* $R^{-1} \subset S^{-1}$.

Si R ⊂ S, entonces, para cada (a, b) ∈ R, (a, b) ∈ S, lo que implica que, para cada (b, a) ∈ R^{-1}, (b, a) ∈ S^{-1}. Por lo tanto, $R^{-1} \subset S^{-1}$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si R ⊂ S, entonces, $R^{-1} \subset S^{-1}$.

(b) *Si R y S son reflexivas, entonces, R ∪ S y R ∩ S también lo son.*

Si R y S son reflexivas, entonces, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R y (x, x) ∈ S, lo que implica que (x, x) ∈ R ∪ S y (x, x) ∈ R ∩ S. Por lo tanto, R ∪ S y R ∩ S son reflexivas.

Por lo tanto, queda demostrado que, si R y S son reflexivas, entonces, R ∪ S y R ∩ S también lo son.

(c) *Si R y S son simétricas, entonces, R ∪ S y R ∩ S también lo son.*

Si R y S son simétricas, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R y, si (x, y) ∈ S, entonces, (y, x) ∈ S, respectivamente, lo que implica, por un lado, que, si (x, y) ∈ R ∪ S, entonces, (y, x) ∈ R ∪ S; y, por otro lado, que, si (x, y) ∈ R ∩ S, entonces, (y, x) ∈ R ∩ S. Por lo tanto, R ∪ S y R ∩ S son simétricas.

Por lo tanto, queda demostrado que, si R y S son simétricas, entonces, R ∪ S y R ∩ S también lo son.

Ejercicio 18.

Establecer las propiedades de las siguientes relaciones en H (conjunto de los seres humanos):

(a) *Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hermano de y.*

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ H, (x, x) ∈ R. En particular, x no puede ser hermano de x.

R es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x es hermano de y, entonces, y es hermano de x.

R no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. En particular, x es hermano de y e y es hermano de x pero x≠ y.

R no es transitiva porque no se cumple que, para cada x, y, z ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R. En particular, si x es hermano de y e y es hermano de z, no necesariamente x es hermano de z.

Por lo tanto, R es simétrica, pero no es reflexiva ni antisimétrica ni transitiva.

(b) *Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hijo de y.*

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ H, (x, x) ∈ R. En particular, x no puede ser hijo de x.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x es hijo de y, entonces, y no es hijo de x.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. En particular, si x es hijo de y, entonces, y no es hijo de x.

R no es transitiva porque no se cumple que, para cada x, y, z ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R. En particular, si x es hijo de y e y es hijo de z, entonces, x no es hijo de z.

Por lo tanto, R es antisimétrica, pero no es reflexiva ni simétrica ni transitiva.

(c) *Se dice que una persona a es descendiente de una persona b si es hijo, nieto, bisnieto, etc. R es la relación en H definida por xRy si y sólo si x es descendiente de y.*

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ H, (x, x) ∈ R. En particular, x no puede ser descendiente de x.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x es descendiente de y, entonces, y no es descendiente de x.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. En particular, si x es descendiente de y, entonces, y no es descendiente de x.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R. En particular, si x es descendiente de y e y es descendiente de z, entonces, x es descendiente de z.

Por lo tanto, R es antisimétrica y transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica.

Ejercicio 19.

Establecer las propiedades de las siguientes relaciones:

(a) *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Sea $\leq$ la relación en $\mathbb{N}$ dada por $x \leq y$ si y sólo si x es menor o igual a y.*

R es reflexiva porque se cumple que, para todo $x \in \mathbb{N}$, $(x, x) \in R$. En particular, $x \leq x$.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$. En particular, si $x \leq y$, entonces, no necesariamente $y \leq x$ (excepto que $x= y$).

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces, $x= y$. En particular, si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces, $x= y$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada $x, y, z \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces, $(x, z) \in R$. En particular, si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces, $x \leq z$.

Por lo tanto, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

(b) *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Sea $|$ la relación en $\mathbb{N}$ dada por $x|y$ si y sólo si x divide a y.*

R es reflexiva porque se cumple que, para todo $x \in \mathbb{N}$, $(x, x) \in R$. En particular, $x|x$.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$. En particular, si $x|y$, entonces, $y \nmid x$.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces, $x= y$. En particular, si $x|y$ e $y|x$, entonces, $x= y$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada $x, y, z \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces, $(x, z) \in R$. En particular, si $x|y$ e $y|z$, entonces, $x|z$.

Por lo tanto, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

(c) *Igual al anterior, pero en el conjunto de los números enteros.*

R es reflexiva porque se cumple que, para todo $x \in \mathbb{Z}$, $(x, x) \in R$. En particular, $x|x$.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada $x, y \in \mathbb{Z}$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$. En particular, si $x|y$, entonces, $y \nmid x$.

R no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y $\in \mathbb{Z}$, si (x, y) $\in$ R y (y, x) $\in$ R, entonces, x= y. En particular, si x|y e y|x, entonces, no necesariamente x= y (puede ser que x= -y).

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z $\in \mathbb{Z}$, si (x, y) $\in$ R y (y, z) $\in$ R, entonces, (x, z) $\in$ R. En particular, si x|y e y|z, entonces, x|z.

Por lo tanto, R es reflexiva y transitiva, pero no es simétrica ni antisimétrica.

Ejercicio 20.

Dado un conjunto de números reales A, probar que la relación sobre A x A dada por (a, b)R(c, d) si y sólo si a ≤ c y b ≤ d es un orden. ¿Es total?

R es reflexiva porque se cumple que, para todo (a, b) ∈ A x A, ((a, b); (a, b)) ∈ R. En particular, x ≤ x e y ≤ y.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada (a, b), (c, d) ∈ A x A, si ((a, b); (c, d)) ∈ R y ((c, d); (a, b)) ∈ R, entonces, a= c y b= d. En particular, si a ≤ c, b ≤ d y c ≤ a, d ≤ b, entonces, a=c y b= d.

R es transitiva porque se cumple que, para cada (a, b), (c, d), (e, f) ∈ A x A, si ((a, b); (c, d)) ∈ R y ((c, d); (e, f)) ∈ R, entonces, ((a, b); (e, f)) ∈ R. En particular, si a ≤ c, b ≤ d y c ≤ e, d ≤ f, entonces, a ≤ e, b ≤ f.

R no es un orden total porque no se cumple que, para cada (a, b) y (c, d) ∈ A x A, se tiene que ((a, b); (c, d)) ∈ R o ((c, d); (a, b)) ∈ R. En particular, si (a, b)= (1, 2) y (c, d)= (2, 1), entonces, a=1 ≤ c=2, b=2 ≰ d=1 y c=2 ≰ a=1, d=1 ≤ b=2.

Por lo tanto, la relación sobre A x A dada es un orden parcial, ya que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es un orden total, ya que no todos los pares de elementos del conjunto son comparables.

Ejercicio 21.

Analizar qué tipo de orden es el usual en el conjunto de los números reales. ¿Qué pasa con los números complejos? ¿Están ordenados?

El tipo de orden que es usual en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es $\leq$, que es un orden total, ya que todos los elementos del conjunto son comparables.

En cambio, el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ no tiene un orden total compatible con su estructura algebraica, ya que no existe una manera de comparar todos los elementos de este conjunto de manera que se mantengan las propiedades del orden.

Ejercicio 22.

Probar que el orden lexicográfico es un orden total.

Dado un conjunto A que está totalmente ordenado por la relación $\leq$, el orden lexicográfico en el producto cartesiano A x A, se define de la siguiente manera:

Para (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in$ A x A, se dice que:

$(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$

si y sólo si

$a_1 < a_2$ o
$a_1 = a_2$ y $b_1 \leq b_2$.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo $(a_1, b_1) \in$ A x A, $((a_1, b_1); (a_1, b_1)) \in$ R. En particular, $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_1, b_1)$.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in$ A x A, si $((a_1, b_1); (a_2, b_2)) \in$ R y $((a_2, b_2); (a_1, b_1)) \in$ R, entonces, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. En particular, si $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ y $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_1, b_1)$, entonces, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada (a_1, b_1), (a_2, b_2), $(a_3, b_3) \in$ A x A, si $((a_1, b_1); (a_2, b_2)) \in$ R y $((a_2, b_2); (a_3, b_3)) \in$ R, entonces, $((a_1, b_1); (a_3, b_3)) \in$ R. En particular, si $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ y $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_3, b_3)$, entonces, $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_3, b_3)$.

R es un orden total porque se cumple que, para cada (a_1, b_1) y $(a_2, b_2) \in$ A x A, se tiene que $((a_1, b_1); (a_2, b_2)) \in$ R o $((a_2, b_2); (a_1, b_1)) \in$ R. En particular, si $a_1 < a_2$, entonces, $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$; o, si $a_2 < a_1$, entonces, $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_1, b_1)$; o, si $a_1 = a_2$, la relación lexicográfica se reduce a la comparación de b_1 y b_2 y, dado que $\leq$ es un orden total en A, $b_1 \leq b_2$ o $b_2 \leq b_1$.

Por lo tanto, el orden lexicográfico es un orden total.

Ejercicio 23.

Sea S= {a, b, c} y sea A= P (S) el conjunto de partes de S. Mostrar que A está parcialmente ordenado por el orden ⊆ (inclusión de conjuntos). Hallar el diagrama de Hasse.

S= {a, b, c}.

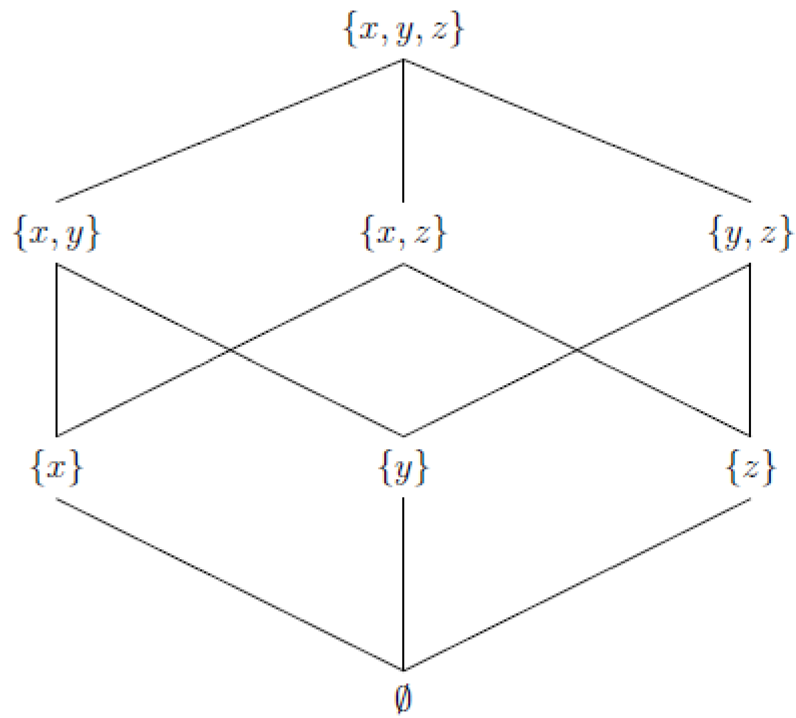
A= P (S)
A= {∅; {a}; {b}; {c}; {a, b}; {a, c}; {b, c}; {a, b, c}}.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo X ∈ A, (X, X) ∈ R. En particular, X ⊆ X.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada X, Y ∈ A, si (X, Y) ∈ R y (Y, X) ∈ R, entonces, X= Y. En particular, si X ⊆ Y e Y ⊆ X, entonces, X= Y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada X, Y, Z ∈ A, si (X, Y) ∈ R y (Y, Z) ∈ R, entonces, (X, Z) ∈ R. En particular, si X ⊆ Y e Y ⊆ Z, entonces, X ⊆ Z.

Por lo tanto, A está parcialmente ordenado por el orden ⊆.



Ejercicio 24.

Sea D_{12}= {1, 2, 3, 4, 6, 12} (el conjunto de los divisores de 12). Hallar el diagrama de Hasse de D_{12} con la relación "divide".

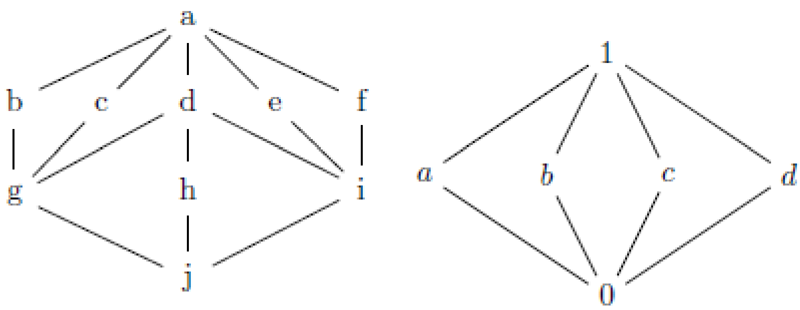
Las relaciones de división entre los elementos de D_{12} son:

- 1 divide a 2, 3, 4, 6, 12.
- 2 divide a 4, 6, 12.
- 3 divide a 6, 12.
- 4 divide a 12.
- 6 divide a 12
- 12 divide a 12.

```
     12
    /   \
  4       6
    \    /  \
       2     3
          \/
          1
```

Ejercicio 25.

Describir las parejas ordenadas por las relaciones de cada uno de los siguientes diagramas de Hasse. Determinar, si existen, los elementos máximo, mínimo y cotas inferiores y superiores.



R_1= {(a, b); (a, c); (a, d); (a, e); (a, f); (b, g); (c, g); (d, g); (d, h); (d, i); (e, i); (f, i); (g, j); (h, j); (i, j); (a, g); (a, h); (a, i); (a, j); (b, j); (c, j); (d, j); (e, j); (f, j)}.
$Máximo_1$= a.
$Mínimo_1$= j.
$Cotas\ inferiores_1$: j es cota inferior de a, b, c, d, e, f, g, h, i; g es cota inferior de a, b, c, d; h es cota inferior de a, d; i es cota inferior de a, d, e, f; b, c, d, e, f son cotas inferiores de a.
$Cotas\ superiores_1$: a es cota superior de b, c, d, e, f, g, h, i, j; b es cota superior de g, j; c es cota superior de g, j; d es cota superior de g, h, i, j; e es cota superior de i, j; f es cota superior de i, j; g, h, i son cotas superiores de j.

R_2= {(1, a); (1, b); (1, c); (1, d); (a, 0); (b, 0); (c, 0); (d, 0); (1, 0)}.
$Máximo_2$= 1.
$Mínimo_2$= 0.
$Cotas\ inferiores_2$: 0 es cota inferior de 1, a, b, c, d; a, b, c, d son cotas inferiores de 1.
$Cotas\ superiores_2$: 1 es cota superior de a, b, c, d, 0; a, b, c, d son cotas superiores de 0.

Ejercicio 26.

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Sean a, b ∈ A, entonces, [a]= [b] si y sólo si aRb.

Si [a]= [b], entonces, a ∈ [a] (por relación de equivalencia - reflexividad) y a ∈ [b] (por [a]= [b]), lo que implica que aRb.

Si aRb, entonces, todos los elementos que estén relacionados con a también lo están con b y viceversa (por relación de equivalencia - transitividad), lo que implica que [a]= [b].

Por lo tanto, queda demostrado que [a]= [b] si y sólo si aRb.

Ejercicio 27.

Determinar si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es una partición para el conjunto A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

(a) *{{4, 5, 6}; {1, 8}; {2, 3, 7}}.*

Esta colección de conjuntos es una partición para el conjunto A, ya que se cumple que no hay conjuntos vacíos, la unión de todos los conjuntos es A y los conjuntos son disjuntos (no tienen elementos en común).

(b) *{{4, 5}; {1, 3, 4}; {6, 8}; {2, 7}}.*

Esta colección de conjuntos no es una partición para el conjunto A, ya que no se cumple que todos los conjuntos son disjuntos (el elemento 4 se encuentra en {4, 5} y en {1, 3, 4}).

(c) *{{1, 3, 4}; {2, 6}; {5, 8}}.*

Esta colección de conjuntos no es una partición para el conjunto A, ya que no se cumple que cada elemento de A esté incluído en algún conjunto (el elemento 7 no está incluído en ningún conjunto).

Ejercicio 28.

Considerando el conjunto A de los alumnos que cursan Mate 4, indicar cuáles de las siguientes son particiones de A.

(a) *P= {{alumnos que aprobaron CADP}; {alumnos que aprobaron OC}; {alumnos que no aprobaron ISO ni Redes}}.*

P no es una partición de A, ya que no se cumple que todos los subconjuntos son disjuntos.

(b) *P= {{alumnos que están cursando Programación Distribuida}; {alumnos que cursan Sistemas y Organización}; {alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial}}.*

P no es una partición de A, ya que no se cumple que todos los subconjuntos son disjuntos y que cada elemento de A esté incluído en algún conjunto.

Ejercicio 29.

Sean A= {1, 2, 3, 4} y R= {(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4)}. Mostrar que R es una relación de equivalencia y hallar las clases de equivalencia. ¿Cuál es la partición que induce R sobre A?

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R.

R es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R.

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Las clases de equivalencia son:

[1]= {x ∈ A | 1Rx}= {1, 2}.
[2]= {x ∈ A | 2Rx}= {1, 2}.
[3]= {x ∈ A | 3Rx}= {3, 4}.
[4]= {x ∈ A | 4Rx}= {3, 4}.

La partición que induce R sobre A es {{1, 2}; {3, 4}}, donde cada subconjunto es una clase de equivalencia.

Ejercicio 30.

Dado el conjunto A= {a, b, c, d, e} y una partición P= {{a, c}; {b}; {d, e}}. Escribir, por extensión, la relación de equivalencia sobre A inducida por P.

[a]= {x ∈ A | aRx}= {a, c}.
[b]= {x ∈ A | bRx}= {b}.
[c]= {x ∈ A | cRx}= {a, c}.
[d]= {x ∈ A | dRx}= {d, e}.
[d]= {x ∈ A | eRx}= {d, e}.

La relación de equivalencia sobre A inducida por P se expresa como el conjunto de pares ordenados donde xRy si y sólo si x e y pertenecen a la misma clase de equivalencia:

R= {(a, a); (a, c); (c, a); (c, c); (b, b); (d, d); (d, e); (e, d); (e, e)}.

Ejercicio 31.

Sean A= {1, 2, 3, 4, 5, 6} y R= {(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (4, 5); (5, 4); (5, 5); (6, 6)}. Mostrar que R es una relación de equivalencia y determinar las clases de equivalencia. ¿Qué partición de A induce R?

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R.

R es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R.

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Las clases de equivalencia son:

[1]= {x ∈ A | 1Rx}= {1, 2}.
[2]= {x ∈ A | 2Rx}= {1, 2}.
[3]= {x ∈ A | 3Rx}= {3}.
[4]= {x ∈ A | 4Rx}= {4, 5}.
[5]= {x ∈ A | 5Rx}= {4, 5}.
[6]= {x ∈ A | 6Rx}= {6}.

La partición de A que induce R es {{1, 2}; {3}; {4, 5}; {6}}, donde cada subconjunto es una clase de equivalencia.

Ejercicio 32.

Sea ∼ una relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ dada por: (a, b) ∼ (c, d) si y sólo si ad= bc. Probar que es de equivalencia. Hallar la clase de equivalencia del elemento (1, 4). Mostrar que puede identificarse cada clase de equivalencia con un número racional. (Ésta es la forma de construir al conjunto de los racionales como conjunto cociente).

∼ es reflexiva porque se cumple que, para todo (a, b) ∈ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$, ((a, b); (a, b)) ∈ ∼. En particular, ab= ba.

∼ es simétrica porque se cumple que, para cada (a, b), (c, d) ∈ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$, si ((a, b); (c, d)) ∈ ∼, entonces, ((c, d); (a, b)) ∈ ∼. En particular, si ad= bc, entonces, cb= da.

∼ es transitiva porque se cumple que, para cada (a, b), (c, d), (e, f) ∈ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$, si ((a, b); (c, d)) ∈ ∼ y ((c, d); (e, f)) ∈ ∼, entonces, ((a, b); (e, f)) ∈ ∼. En particular, si ad= bc y cf= de, entonces, adcf= bcde ⟺ af= be.

Por lo tanto, queda demostrado que ∼ es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

La clase de equivalencia del elemento (1, 4) es:

[(1, 4)]= {(c, d) ∈ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ | (1, 4) ∼ (c, d)}
[(1, 4)]= {(c, d) ∈ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ | 1d= 4c}
[(1, 4)]= {(c, d) ∈ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ | d= 4c}
[(1, 4)]= {(c, 4c) | c ∈ $\mathbb{Z}$}.

Se puede identificar cada clase de equivalencia [(a, b)] con el número racional $\frac{a}{b}$, ya que, si (a, b) ∼ (c, d), entonces, ad= bc, lo que implica que $\frac{a}{b}= \frac{c}{d}$. De esta manera, cada clase de equivalencia [(a, b)] puede ser representada por un único número racional $\frac{a}{b}$, lo que permite construir al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ como el conjunto cociente ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$) / ∼.

Ejercicio 33.

Hallar las clases de equivalencia módulo 3 y 5 de los números:

(a) *387.*

$387 \equiv 0 \pmod{3}$.

$[387]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod{3}\}$
$[387]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3n + 0, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[387]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3n, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[387]_3 = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$.

$387 \equiv 2 \pmod{5}$.

$[387]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 \pmod{5}\}$
$[387]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n + 2, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[387]_5 = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$.

(b) *25.*

$25 \equiv 1 \pmod{3}$.

$[25]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod{3}\}$
$[25]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3n + 1, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[25]_3 = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$.

$25 \equiv 0 \pmod{5}$.

$[25]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod{5}\}$
$[25]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n + 0, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[25]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[25]_5 = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$.

(c) *649.*

$649 \equiv 1 \pmod{3}$.

$[649]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod{3}\}$
$[649]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3n + 1, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[649]_3 = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$.

$649 \equiv 4 \pmod{5}$.

$[649]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 4 \pmod{5}\}$

$[649]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n + 4, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[649]_5 = \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$.

Ejercicio 34.

Hallar las respectivas clases módulo 4 de:

(a) *13.*

$13 \equiv 1 \pmod 4$.

$[13]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod 4\}$
$[13]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n + 1, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[13]_4 = \{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$.

(b) *6.*

$6 \equiv 2 \pmod 4$.

$[6]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 \pmod 4\}$
$[6]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n + 2, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[6]_4 = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$.

(c) *11.*

$11 \equiv 3 \pmod 4$.

$[11]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \pmod 4\}$
$[11]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n + 3, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[11]_4 = \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$.

(d) *-49.*

$-49 \equiv 3 \pmod 4$.

$[-49]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \pmod 4\}$
$[-49]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n - 1, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[-49]_4 = \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$.

Ejercicio 35.

Averiguar si son congruentes módulo 3 entre sí los siguientes pares de números:

(a) *(2, 1024).*

2 - 1024= 3k
-1022= 3k
k= $\frac{-1022}{3}$
k= 340,$\widehat{6}$ $\notin \mathbb{Z}$.

$3 \nmid (2-1024) \Leftrightarrow 2 \not\equiv_3 1024$.

Por lo tanto, 2 y 1024 no son congruentes.

(b) *(101, 512).*

101 - 512= 3k
-411= 3k
k= $\frac{-411}{3}$
k= -137 $\in \mathbb{Z}$.

$3 | (101-512) \Leftrightarrow 101 \equiv_3 512$.

Por lo tanto, 101 y 512 son congruentes.

(c) *(1501, 1348).*

1501 - 1348= 3k
153= 3k
k= $\frac{153}{3}$
k= 51 $\in \mathbb{Z}$.

$3 | (1501-1348) \Leftrightarrow 1501 \equiv_3 1348$.

Por lo tanto, 1501 y 1348 son congruentes.

Ejercicio 36.

Analizar para qué valores de m se hacen verdaderas las siguientes congruencias:

(a) *5*$\equiv_m$ *4.*

5 - 4= km, con k, m ∈ ℤ
1= km
m= $\frac{1}{k}$.

m= 1.

(b) *1*$\equiv_m$ *0.*

1 - 0= km, con k, m ∈ ℤ
1= km
m= $\frac{1}{k}$.

m= 1.

(c) *1197*$\equiv_m$ *286.*

1197 - 286= km, con k, m ∈ ℤ
911= km
m= $\frac{911}{k}$.

m_1= 911 (con k= 1 ∈ ℤ).
m_2= 1 (con k= 911 ∈ ℤ).

(d) *3*$\equiv_m$ *-3.*

3 - (-3)= km, con k, m ∈ ℤ
3 + 3= km
6= km
m= $\frac{6}{k}$.

m_1= 6 (con k= 1 ∈ ℤ).
m_2= 3 (con k= 2 ∈ ℤ).
m_3= 2 (con k= 3 ∈ ℤ).
m_4= 1 (con k= 6 ∈ ℤ).

Ejercicio 37.

Probar que la relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia.

$\equiv_m$ es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ ℤ, (x, x) ∈ $\equiv_m$. En particular, m|(x-x), ya que x - x= km ⟺ 0= km (con k= 0 ∈ ℤ).

$\equiv_m$ es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ ℤ, si (x, y) ∈ $\equiv_m$, entonces, (y, x) ∈ $\equiv_m$. En particular, si m|(x-y), entonces, x - y= km ⟺ -(x - y)= -km ⟺ y - x= -km (con -k ∈ ℤ) y, por lo tanto, m|(y-x).

$\equiv_m$ es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ ℤ, si (x, y) ∈ $\equiv_m$ y (y, z) ∈ $\equiv_m$, entonces, (x, z) ∈ $\equiv_m$. En particular, si m|(x-y) y m|(y-z), entonces, x - y= k_1m e y - z= k_2m ⟹ x - y + y - z= k_1m + k_2m ⟺ x - z= (k_1 + k_2) m ⟺ x - z= km (con k= (k_1 + k_2) ∈ ℤ) y, por lo tanto, m|(x-z).

Por lo tanto, queda demostrado que $\equiv_m$ es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejercicio 38.

Probar que todo número entero es congruente, módulo n, con el resto de su división por n.

a= kn + r, con k, n, r $\in \mathbb{Z}$ y $0 \leq$ r $< |n|$
a - r= kn.

m|(a-r) $\Leftrightarrow$ a$\equiv_n$ r.

Por lo tanto, queda demostrado que todo número entero es congruente, módulo n, con el resto de su división por n.

Ejercicio 39.

Probar que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.

Por un lado, se supone que x e y son dos números enteros congruentes módulo m:

x= k_1m + r_1, con k_1, m, $r_1 \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r_1 < |m|$.
y= k_2m + r_2, con k_2, m, $r_2 \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r_2 < |m|$.

m|(x-y) $\Leftrightarrow$ x$\equiv_m$ y.

x - y= km
(k_1m + r_1) - (k_2m + r_2)= km
k_1m + r_1 - k_2m - r_2= km
(k_1 - k_2) m + (r_1 - r_2)= km
(k_1 - k_2) m + 0= km
(k_1 - k_2) m= km, con k$\equiv$ (k_1 - k_2) $\in \mathbb{Z}$.

Entonces, si dos números enteros son congruentes módulo m, entonces, los respectivos restos de su división por m son iguales.

Por otro lado, se supone que r_1= r_2= r:

x= k_1m + r, con k_1, m, r $\in \mathbb{Z}$ y $0 \leq$ r $< |m|$.
y= k_2m + r, con k_2, m, r $\in \mathbb{Z}$ y $0 \leq$ r $< |m|$.

x - y= (k_1m + r) - (k_2m + r)
x - y= k_1m + r - k_2m - r
x - y= (k_1 - k_2) m
x - y= km, con k$\equiv$ (k_1 - k_2) $\in \mathbb{Z}$.

m|(x-y) $\Leftrightarrow$ x$\equiv_m$ y.

Entonces, si los respectivos restos de la división de dos números enteros por m son iguales, entonces, estos dos números enteros son congruentes módulo m.

Por lo tanto, queda demostrado que dos números enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.

Ejercicio 40.

Probar las siguientes propiedades para todo a, b, c ∈ ℤ:

(a) $a \equiv_n a$.

a - a= kn, con k, n ∈ ℤ
0= kn, con k= 0 ∈ ℤ.

Por lo tanto, queda demostrado que $a \equiv_n a$.

(b) $a \equiv_n b \Longrightarrow b \equiv_n a$.

a - b= kn, con k, n ∈ ℤ
-(a - b)= -kn
b - a= -kn, con -k ∈ ℤ.

n|(b-a) ⟺ $b \equiv_n a$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si $a \equiv_n b$, entonces, $b \equiv_n a$.

(c) $a \equiv_n b$ *y* $b \equiv_n c \Longrightarrow a \equiv_n c$.

a - b= k_1n, con k_1, n ∈ ℤ.
b - c= k_2n, con k_2, n ∈ ℤ.

a - b + b - c= k_1n + k_2n
a - c= (k_1 + k_2) n
a - c= kn, con k≡ (k_1 + k_2) ∈ ℤ.

n|(a-c) ⟺ $a \equiv_n c$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c$, entonces, $a \equiv_n c$.

(d) $a \equiv_n b \Leftrightarrow a + c \equiv_n b + c$.

Si $a \equiv_n b$, entonces, a - b= kn ⟺ a - b + c - c= kn ⟺ (a - c) - (b - c)= kn. Por lo tanto, $a + c \equiv_n b + c$.

Si $a + c \equiv_n b + c$, entonces, (a + c) - (b + c)= kn ⟺ a + c - b - c= kn ⟺ a - b= kn. Por lo tanto, $a \equiv_n b$.

Por lo tanto, queda demostrado que $a \equiv_n b \Leftrightarrow a + c \equiv_n b + c$.

(e) *$a \equiv_n b \Longrightarrow ac \equiv_n bc$.*

a - b= kn, con k, n ∈ $\mathbb{Z}$
(a - b) c= knc
ac - bc= ln, con l≡ kc ∈ $\mathbb{Z}$.

n|(ac-bc) ⟺ ac$\equiv_n$ bc.

Por lo tanto, queda demostrado que, si a$\equiv_n$ b, entonces, ac$\equiv_n$ bc.

(f) *$a \equiv_n b \Longrightarrow (a, n) = (b, n)$.*

Si a$\equiv_n$ b, entonces:

a - b= kn, con k, n ∈ $\mathbb{Z}$.
a= b + kn.
b= a - kn.

Por un lado, se supone d= (a, n) y, por definición, esto significa que d es el mayor entero que divide tanto a como n:

d|a y d|n.

Dado a, se tiene:

d | (b + kn).

Dado que d|a y d|n, se tiene que:

d|b.

Por otro lado, se supone e= (b, n) y, por definición, esto significa que e es el mayor entero que divide tanto b como n:

e|b y e|n.

Dado b, se tiene:

e | (a - kn).

Dado que e|b y e|n, se tiene que:

e|a.

En conclusión, se tiene que d $\geq$ e (dado que e divide a a) y e $\geq$ d (dado que d divide a b), por lo que d= e $\Leftrightarrow$ (a, n)= (b, n).

Por lo tanto, queda demostrado que, si a$\equiv_n$ b, entonces, (a, n)= (b, n).

(g) $a \equiv_n 0 \Leftrightarrow n|a$.

Si a$\equiv_n$ 0, entonces, a - 0= kn, con k, n $\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ a= kn. Por lo tanto, n|a.

Si n|a, entonces, a= kn, , con k, n $\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ a - 0= kn. Por lo tanto, a$\equiv_n$ 0.

Por lo tanto, queda demostrado que a$\equiv_n$ 0 si y sólo si n|a.