Matemática 4 - 2024

TP1 - Cálculo en dos o más variables

1. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   (b) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$

   (c) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 - 9}$

   (d) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}$

   (e) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{y^2 - z^2}$

   (f) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   (g) $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$

   (h) $f(x, y) = \log\left(16 - x^2 - 16y^2\right)$

2. Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

   (a) $f(x, y) = \log\left(9 - x^2 - 9y^2\right)$ en $(1, 0); (1, 1); (0, 1); (-1, 1)$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ en $(1, 0); (1, 1); (0, 1); (-1, 1); (2, 2)$

   (c) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ en $(1, 0); (1, 1); (0, 1); (-1, 1)$

3. Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existen:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{(7x^2 - 2y^2)}{x^2 + y^2} + 1\right)$

   (c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(x + y + z)$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^4 + y^4}$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo R^2, redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (e) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

5. Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

   (a) $f(x,y) = 3x^2y + y^3$
   (b) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$
   (c) $f(x,y) = e^{xy} + \sin\left(x^2 + y\right)$
   (d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
   (e) $f(x,y) = x^2 \log(x+y)$
   (f) $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (x + yx_i)]^2$

6. Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   (a) $f(x,y) = xe^{x^2y}$ en $(1, \log(2))$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en $(-4, 3)$

7. Analizar diferenciabilidad en R^2 de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = sen(x^2+y^2)$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x.y^2}{x^2+y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

(e) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

8. Hallar, en caso de que exista, el plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en el punto $(-1,1,f(-1,1))$.
   De ser posible, con ayuda de un software a su elección, muestre las gráficas de la función y el plano tangente.

9. Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x,y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en $(1,0)$ y utilizarla para estimar aproximadamente $f(0.98, 0.05)$.
   Grafique con ayuda de software la función y su aproximación lineal.

10. Calcular los vectores gradientes de las siguientes funciones

    (a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
    (b) $f(x,y,z) = x.y.z$

11. Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos y dirección de los vectores dados:

    (a) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$; $p = (1,2)$ y $\vec{v} = (-1,-2)$
    (b) $f(x,y) = x.y^2$; $p = (1,1)$ y $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -1)$

12. Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto $(1,0)$ de $f(x,y) = x^2 + sen(xy)$ tiene el valor 1.

13. Encontrar la dirección de máximo crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:

    (a) $f(x,y) = xe^y + 3y$; $p = (1,0)$
    (b) $f(x,y) = 4x^2yz^3$; $p = (1,2,1)$

14. Hallar máximos, mínimos y puntos silla de las siguientes funciones. Además calcular el valor de la misma en cada uno esos puntos

    (a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
    (b) $f(x,y) = xy - 2x - y$
    (c) $f(x,y) = xseny$

15. El criterio de las derivadas segundas, ¿permite clasificar los puntos estacionarios de $f(x, y) = x^2 y$?
En caso afirmativo, hallarlos y analizarlos.

16. Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y - 2$

    (a) Hallar el mínimo de la función de dos formas:

        i. Analítica: Calculando los punto estacionarios.

        ii. Numérica: Mediante el método de descenso del gradiente. Utilizar tolerancia de 0.0001, tamaño de paso 0.4 y punto de inicio $x_0 = (10, 2)$.

    (b) ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia del método del gradiente? Realice la búsqueda nuevamente pero con tamaño de paso 0.1 ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia en este caso?

    (c) ¿Qué ocurre si utilizamos el mismo tamaño de paso (0.4) de este punto para hallar el mínimo de la función del punto anterior?

    (d) (Para pensar) A raíz del inciso anterior ¿Siempre se puede elegir el mismo tamaño de paso para cualquier función que estudiemos? ¿Qué ocurre cuando éste parámetro es muy grande o muy pequeño?

Ejercicios Adicionales

- Hallar el dominio de las siguientes funciones:

  1. $f(x,y) = \log\left(4 - x^2 - y^2\right)$
  2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
  3. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}$

- Analizar los siguientes límites:

  1. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{2x^2y^3}{x^2+y^4})$
  2. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{x(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}})$
  3. $lim_{(x,y)\to(0,1)} \quad (\frac{2xy-2x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}})$
  4. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{yx^3-xy^3}{x^2+y^2})$
  5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad \frac{xye^x}{x^2+y^2}$

- Dada la función $f(x,y) = xy.\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$ definir $f(0,0)$ de manera que f sea continua en el origen y demostrarlo.

- Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)+x^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ probar que:

  1. Existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
  2. f no es continua en $(0,0)$.

- Para interpretar intuitivamente el cálculo de las derivadas por definición genere un código similar al que realizó anteriormente que muestre como los límites se van acercando a las derivadas parciales (calculadas por regla) evaluadas en un punto.

- Analizar en qué región del plano las siguientes funciones son diferenciables:

  1. $f(x,y) = 3x^2y + y^3$
  2. $f(x,y) = xy$
  3. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+1}$
  4. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- Hallar, en caso que exista, una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

  1. $f(x,y) = xy$ en $(0,0)$
  2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(1,2)$
  3. $f(x,y) = e^y(x^2 + y^2)$ en $(1,0)$
  4. $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ en $(1,1)$
  5. $f(x,y) = e^x \cos(xy)$ en $(0,0)$

- Encontrar, si existe, la linealización $L(x,y)$ de la función en el punto indicado:

  1. $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2.y^2}$ en $(0,2)$
  2. $f(x,y) = \frac{y}{x+y}$ en $(1,2)$

- Encontrar la dirección de máximo crecimiento de función $f(x,y) = xe^y + y^2$ en el punto $p = (1,1)$

- Para interpretar la idea de derivada direccional (y su cálculo por definición), generar un código que calcule la derivada direccional "'acortando"' la distancia entre los puntos (calcular el límite con t cada vez más chico).

- Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^3$ hallar el mínimo de la función de dos formas:

  1. Hallar el mínimo de la función de dos formas:
     (a) Analítica: Calculando los punto críticos
     (b) Numérica: Mediante el método de descenso del gradiente. Utilizar tolerancia de 0.0001, tamaño de paso 0.1 y punto de inicio $x_0 = -2$.
  2. ¿Cuántas iteraciones son necesarias hasta alcanzar el mínimo con el método del gradiente con inicio en $x_0 = -2$? Realice la búsqueda nuevamente pero con inicio en $x_0 = 0.4$ ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias en este caso? ¿Se alcanzó el mínimo?
  3. (Para pensar) ¿Por qué no se llegó al mismo valor en el segundo caso? ¿Siempre se alcanza el mínimo global de la función que se estudia utilizando el método del descenso del gradiente?

1. Sea $f : D \subset R^2 \to R$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Dar el dominio de f y analizar su continuidad.

   (b) Analizar si f es diferenciable en todo su dominio.

   (c) Hallar, si existe, el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-3, 4, f(-3, 4))$. Dibujar (con ayuda de software) el plano y la función en un mismo gráfico .

2. Sea $g : D \subset R^2 \to R$ dada por: $g(x,y) = e^{x^2}.\,(sen(y) + cos(y))$

   (a) Analizar la diferenciabilidad de g

   (b) Encontrar la aproximación lineal de la función g en $(-1, \frac{\pi}{2})$ y utilizarla para estimar aproximadamente $g(-0.98, 1.55)$. Graficar con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.

   (c) Encontrar la dirección de máximo crecimiento de g en el punto $(2, \pi)$

3. Sea $g : D \subset R^2 \to R$ dada por: $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   - Analizar la diferenciabilidad de g en todo R^2
   - Encontrar, de ser posible, la dirección de máximo crecimiento de g en el punto $(4, 3)$
   - Encontrar, de ser posible, la aproximación lineal de la función g en $(3, -4)$ y utilizarla para estimar aproximadamente $g(2.998, -4.003)$.
     Graficar con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.

Matemática IV – 2024

TP N°2 – Regresión Lineal

1) Suponga que $(x_1.y_1), \dots, (x_n, y_n)$ son pares observados generados por los siguientes modelos y deduzca los estimadores de mínimos cuadrados de β_1 y β_0 .

a) $Y = \beta_1 x + \varepsilon$

b) $Y = \beta_1(ax + c) + \beta_0 + \varepsilon$

2) Una cadena de supermercados financia un estudio sobre los gastos mensuales en alimentos, de familias de 4 miembros. La investigación se limitó a familias con ingresos netos entre \$688.000 y \$820.000, con lo cual se obtuvo la siguiente recta de estimación $\hat{y} = 0{,}85x - 18.000$.

$y =$ gastos ; $x =$ Ingresos

a) Estime los gastos en alimentos en un mes, para una familia de 4 miembros con un ingreso de \$700.000

b) Uno de los directivos de la compañía se preocupa por el hecho de que la ecuación aparentemente indica que para una familia que tiene un ingreso de \$12.000 no gastaría nada en alimentos ¿Cuál sería su respuesta?

3) La empresa META quiere pronosticar el precio de sus acciones en función de los dias en el periodo del 03/09/23 al 30/08/24, pero durante las fechas del 02/02/24 al 24/04/24 implementaron una serie de actualizaciones en sus distintas plataformas que dispararon el precio de sus acciones y querían saber en que porcentaje afectaron dichas actualizaciones al ajuste y a la linealidad.

Utilizando los datos proporcionados en el archivo "META" haga los cálculos necesarios y responda

Sugerencia: Realice dos analisis diferentes y para una de ellas desestimar los datos del periodo de actualización.

4) Los siguientes datos corresponden a los tiempos relativos en segundos que tardaron en ejecutarse seis programas elegidos al azar en el entorno Windows y en DOS :

	Programas					
Windows	2,5	7,1	5	8,5	7	8,1
DOS	2,3	7,1	4	8	6,6	5

a) Realizar el grafico de dispersión de los puntos
b) Si un programa tarda 6 segundos en ejecutarse en Windows, ¿Cuánto tardara en ejecutarse en DOS?
c) Se estima que los tiempos de Windows mejoraran reduciéndose en un 10% en los próximos años, estime la recta de regresión considerando esta mejora. Suponga que los tiempos DOS no se modifican.

5) En la tabla siguiente, se muestran la variable y, rendimiento de un sistema informático, respecto a la variable x, numero de buffer:

x	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25
y	9.6	20.1	29.9	39.1	50.0	9.6	19.4	29.7	40.3	49.9	10.7	21.3	30.7	41.8	51.2

A partir de la tabla anterior, se quiere ajustar la variable y como función de x.

a) Realizar el analisis de regresión de los datos (Estimación de la recta, Test de Hipótesis, Indicadores).
b) Comentar los resultados siguientes:

- Recta de regresión del rendimiento del sistema informático frente al número de buffers e interpretación de los coeficientes.
- Contraste de hipótesis sobre la pendiente de la pendiente de la recta.
- Coeficiente de determinación y correlación lineal.

6) Determine si las siguientes relaciones son posibles o no y justifique su respuesta:

a) $\hat{\sigma}^2 = 0{,}2 \;\; n = 102 \quad R^2 = 0{,}8 \;\; S_{yy} = 100$

b) $\hat{y} = 7x + 4 \quad \bar{x} = 10 \quad \bar{y} = 64 \quad r = -0{,}8$

c) $\hat{\beta}_0 = 10{,}073 \quad \hat{\beta}_1 = -2{,}06 \quad \bar{x} = 8{,}5 \quad \bar{y} = 8{,}325$

7) Indique si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Justifique su respuesta:

a) $SS_R = S_{yy} - \hat{\beta}_0 S_{xy}$

b) El error del intervalo de predicción es $\sqrt{n+1}$ veces mayor que el intervalo confianza para la respuesta media cuando $x^* = \bar{x}$ e igual $(1-\alpha)$.

c) El coeficiente de determinación R^2 indica el grado de relación lineal que existe entre la variable independiente y dependiente.

d) El principio de mínimos cuadrados consiste en minimizar la suma de los residuos al cuadrado considerando la distancia perpendicular entre el valor observado y el estimado.

8) En un departamento de informática, un grupo de investigación dedicado al estudio de las comunicaciones por la red desea conocer la relación entre el tiempo de transmisión de un fichero y la información útil del mismo. Para ello se han hecho algunos experimentos en los que se enviaban paquetes de distintas longitudes (bytes) de información útil y se median los tiempos (en milisegundos) que tardaban desde el momento en que se enviaban hasta que llegaban al servidor. Los resultados del experimento se resumen en los siguientes estadísticos:

$$S_{xx} = 47.990 \;\; \bar{x} = 194 \;\; \hat{\beta}_0 = 27{,}3275$$

$$\sum x_i^2 = 424.350 \quad \sum x_i y_i = 183.760 \sum y_i^2 = 81.715$$

Se pide estudiar la relación entre las variables tiempo (y) y longitud (x) de los ficheros. Para ello, se pide:

a) Obtener la recta de regresión del tiempo en función de la longitud de los ficheros. Interpretar los resultados obtenidos.

b) Indicar el valor que toma el coeficiente de determinación y correlación lineal. Interpretar los resultados.

c) Estudiar la significación del modelo.

d) Obtener el intervalo de confianza, al 95%, para la pendiente de la recta,

e) ¿Cuál será el tiempo de transmisión para un fichero que tiene una longitud 250 bytes?

9) De un analisis de regresión realizada sobre un Dataset, el cual consiste en un pequeño relevamiento del tiempo que demandan las llamadas a servicio técnico de una empresa (x) y la cantidad de unidades de hardware reparadas (y), se sabe que el $\mathrm{IC}(\beta_0) = (-0{,}4348\,;-0{,}4248)$, que la estimación de la pendiente es 12 veces el error que se comete al estimar la verdadera ordenada al origen con $\hat{\beta}_0$ y que la proporción de variación total observada no explicada por el modelo de regresión lineal es tan solo del 2%.

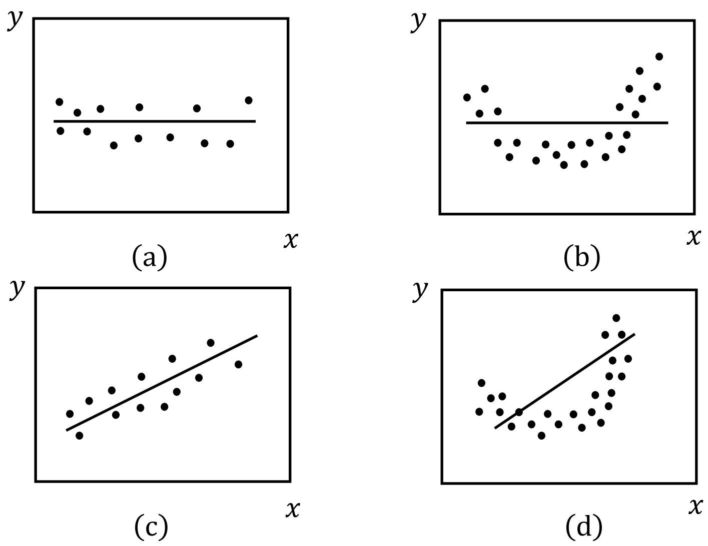
A partir de los datos proporcionados determinar:

a) El error que se comete al estimar la verdadera ordenada al origen con $\hat{\beta}_0$

b) La recta de regresión estimada

c) La bondad del ajuste

10) Observando los siguientes gráficos de regresión y considerando las hipótesis $H_0\colon \beta_1 = 0$ vs $H_1\colon \beta_1 \neq 0$ Indique para cada una, si se acepta o no H_0 y la implicancia de esta.



11) La autoridad aeronáutica argentina realizó un estudio de operaciones de aerolíneas, en 18 compañías, que reveló que la relación entre el número de pilotos empleados y el número de aviones en servicio tenía una pendiente de 4.3. Estudios anteriores indicaban que la pendiente de esta relación era 4.0. Si se calculó que la desviación estándar de la de pendiente de regresión es 0.17, ¿hay razones para creer, a un nivel de significancia de 0.05, que la pendiente verdadera ha cambiado?

12) Un horticultor inventó una escala para medir la frescura de rosas que fueron empacadas y almacenadas durante periodos variables antes de trasplantarlas. La medición y de frescura y el tiempo x en días que la rosa está empacada y almacenada antes de trasplantarla, se dan a continuación.

x	5	5	10	10	15	15	20	20	25	25
y	15,3	16,8	13,6	13,8	9,8	8,7	5,5	4,7	1,8	1,0

a) ¿Hay suficiente evidencia para indicar que la frescura está linealmente relacionada con el tiempo de almacenaje?
b) Estime mediate un intervalo de 98% el descenso de frescura de las rosas por cada día que pasa.
c) Estime mediante un intervalo de 98% la frescura de las rosas cuando no han sido almacenada ni empacada.
d) Estime la medición de frescura media para un tiempo de almacenaje de 14 días con un intervalo de confianza de 95%.

13) Un fabricante de teléfonos celulares está probando dos tipos de baterías para ver cuánto duran con una utilización normal. La siguiente tabla contiene los datos provisionales:

Horas de uso diario	2	1,5	1	0,5
Vida aproximada (meses) Litio	3,1	4,2	5,1	6,3
Vida aproximada (meses) Alcalina	1,3	1,6	1,8	2,2

a) Desarrolle dos ecuaciones de estimación lineales, una para pronosticar la vida del producto basada en el uso diario con las baterías de litio y otra para las baterías alcalinas.

b) ¿Cuál de las dos estimaciones anteriores se ajusta mejor a los datos?

c) Encuentre un intervalo para la estimación del 90% para la vida (en meses) con 1,25 horas de uso diario, para cada tipo de batería. ¿Puede la compañía asegurar algo respecto a qué batería proporciona la vida más larga según estos números?

d) El fabricante considera realizar una batería compuesta por los dos tipos de batería y pide para ello que se estime la ecuación lineal para pronosticar las horas de uso diario basada en el vida aproximada (en meses).

e) Mejora la estimación utilizando los dos tipos de batería juntas que por separado. Explique.

14) Una Empresa de desarrollo de software le pide relacionar sus Ventas en función del número de pedidos de los tipos de software que desarrolla (Sistemas, Educativos y Automatizaciones Empresariales), para atender 10 proyectos en el presente año. En la Tabla representa Y (Ventas miles de S/.) e X (Nº pedidos de sistemas), W (Nº de pedidos de Aplicaciones Educativas) y Z (Nº de pedidos de Automatizaciones empresariales).

y	440	455	470	510	506	480	460	500	490	450
x	50	40	35	45	51	55	53	48	38	44
w	105	140	110	130	125	115	100	103	118	98
z	75	68	70	64	67	72	70	73	69	74

a) Mediante un software a elección estime la ecuación de regresión múltiple para cumplir con el requerimiento de la empresa.
b) La empresa quiere tener indicadores para asegurarse que la ecuación estimada se ajusta bien a los datos y si la relación lineal es la más correcta. ¿Cuáles recomendaría? Calcule las mismas y comente.

15) En la Facultad de Sistemas Informáticos se quiere entender los factores de aprendizaje de los alumnos que cursan la asignatura de PHP, para lo cual se escoge al azar una muestra de 15 alumnos y ellos registran notas promedios en las asignaturas correlativas de Algoritmos, Base de Datos y Programación como se muestran en el siguiente cuadro.

PHP	**Algoritmos**	**Base de Datos**	**Programación**
13	15	15	13
13	14	13	12
13	16	13	14
15	20	14	16
16	18	18	17
15	16	17	15
12	13	15	11
13	16	14	15
13	15	14	13
13	14	13	10
11	12	12	10
14	16	11	14
15	17	16	15
15	19	14	16
15	13	15	10

a) Construir un modelo para determinar la dependencia que exista de aprendizaje reflejada en las notas de la asignatura de PHP, conociendo las notas de las asignaturas Algoritmos, Base de Datos y Programación.
b) Si más el 80% del aprendizaje del Curso de PHP no puede ser explicado mediante las notas obtenidas por las asignaturas de Algoritmos, Base de Datos y Programación, se destinarán más recursos a estas asignaturas para obtener mejores resultados. ¿Cuál es seria su respuesta?

Matemática IV- 2024

TP3 - Números

1. Probar que no hay enteros simultáneamente pares e impares.

2. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   (a) Si $a|1$ entonces $a = 1$ o $a = -1$
   (b) $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$
   (c) $a(a-1)$ es par
   (d) $x|y$ y $y|z$ entonces $x|yz$

3. Si a un número se lo divide por 5, el resto es 3 y si se lo divide por 7, el resto es 4. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 35 ?

4. Sean a y b dos números enteros que tienen restos 4 y 7 respectivamente en la división por 11. Hallar los restos de la división por 11 de $(a + b^2)$

5. Convertir los siguientes números de base 10 a base 8:
   (a) 98
   (b) 44
   (c) 20

6. Calcular el máximo común divisor entre:
   (i) $(16, 24)$ (ii) $(70, 50)$ (iii) $(121, 88)$ (iv) $(-90, 90)$ (v) $(980, 224)$

7. Probar que si a y b son enteros:
   (a) $a + b$ es coprimo con a
   (b) si a es no nulo, $(a, 0) = |a|$
   (c) $(a, b) = 1$ entonces ma+nb=k, con m,n y k enteros.

8. Hallar $mcd(5k + 3, 3k + 2)$, para cualquier k entero

9. Sean $a, b \in Z$ y sea p primo. Demostrar que si $p|ab$ entonces $p|a$ ó $p|b$
   Mostrar que ésto no se cumple si p no es primo.

10. Hallar, si existe, un número entero q tal que $7290q$ es el cubo de un entero.

11. Demostrar que dados a y b en Q tales que $a < b$, existe otro número racional x tal que $a < x < b$.

12. Probar que no existe un número racional cuyo cubo sea igual a 2.

13. Indique la parte real Re(z) y la parte imaginaria Im(z) de los siguientes complejos:

    a) $\sqrt{-49}$ b) $\sqrt{-20}$ c) $\sqrt{-\frac{9}{16}}$ d) $z = -8$ h) $z = 7i$
    f) $z = (3 + i) + (5 - 4i)$ g) $z = 3i - (5 - 2i)$ h) $\frac{1+3i}{3-i}$ i) $\frac{1-i}{(1+i)^2}$

14. La suma de un número complejo y su conjugado es -8 y la suma de sus módulos es 10. De qué números complejos se trata?

15. Hallar, si existe, x real tal que $Re(z) = Im(z)$ siendo $z = \frac{x+2i}{4-3i}$

16. Encontrar, si existe,un valor de k real para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un número real.

17. Calcular las siguientes potencias:
    a) i^{489} b) $-i^{1026}$ c) $(3i)^{168}$

18. Dados los siguientes números complejos, encontrar la forma más adecuada para realizar las operaciones pediddas:

    $z_1 = 3 + 3i$ $z_2 = -1 + i$ $z_3 = 5 + 4i$ $z_4 = 9$ $z_5 = 5i$ $z_6 = -7$
    $z_7 = -4 - 4i$ $z_8 = -8i$ $z_9 = 2 - 2i$ $z_{10} = 3 - 4i$

    a) $z_1 + z_7$ b) $z_5 - z_3$ c) $z_9.z_6$ d) z_8/z_{10} e) $z_3 + z_6$ f) $z_2 - z_6$
    g) $z_3.z_{10}$ h) z_1^3 i) z_9^9 j) z_5^{15} k) z_{10}^3

    l) hallar las raíces cuartas de z_2

    m) hallar las raíces cúbicas de z_4

    n) hallar las raíces séptimas de i

Ejercicios Adicionales

1. Sean a y b dos enteros coprimos, demostrar que :
   (a) $(a, a+1) = 1$
   (b) $a+b$ y ab son coprimos
   (c) $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$

2. Demostrar que : Si $(a, b) = d$; $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|cd$

3. El resto de la división de un número por 7 es 2; si se lo divide por 3, su resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 21?

4. * Intente codificar (en el lenguaje que Ud prefiera) el *algoritmo de Euclides.* Pruebe que funciona con alguno de los ejercicios

5. * Investigue que dice *La criba de Eratóstenes* y trate de escribir un código que realice el procedimiento.

6. Sean u y v números racionales. Probar que:
   (a) $u + v \in Q$ y $u - v \in Q$
   (b) $u.v \in Q$
   (c) Si u es no nulo, $u^{-1} \in Q$

7. Dados $a, b, c, d \in Z$, suponiendo que los denominadores no se anulen y que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ no es cero, probar:
   (a) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
   (b) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
   (c) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

8. Demostrar que si p es primo y $n \in N$, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional

9. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo es 5. De qué números complejos se trata?

10. Demostrar que para cualquier complejo z vale que
    - $z.\overline{z} = |z|^2$
    - $z + \overline{z} = 2Re(z)$
    - $z - \overline{z} = 2Im(z)i$

11. Encontrar el valor de h para que el complejo $\frac{1+3hi}{7+(h-2)i}$ sea un imaginario puro.

12. Realizar las operaciones con los complejos del último ejercicio (antes de los adicionales):

    *) hallar las raíces cúbicas de z_5

    **) hallar las raíces quintas de z_6

    ***) hallar las raíces séptimas de z_8

Matemática IV- 2024

TP4 - Relaciones entre conjuntos

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 0, -1\}$ y $B = \{4, 3, 2, 1\}$. Decide si las siguientes corresponden a relaciones de A en B. Justifica.
   (a) $R = \{(1; 1), (0; 2)\}$
   (b) $R = \{(-1; 1), (1; -1)\}$
   (c) $R = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3)\}$
   (d) $R = \{(4; 1)\}$
   (e) $R = \emptyset$

2. Sea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = Z$ y la relación de A en B que viene definida en la forma: xRy si y sólo si *y es el cuadrado de x.*

   Escribe R por extensión. Define R^{-1} por comprensión y por extensión.

3. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $V = \{vocales\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Decide si las siguientes corresponden a relaciones. Justifica.
   (a) $R = \{(a, a, a); (a, b, c); (b, c, d)\}$ en $A \times A \times A$
   (b) $R = \{(a, a, a); ((c, e, 2); (a, b, 1)\}$ en $A \times V \times B$
   (c) $R = \{(a, b, 1); (e, c, 2) : (i, j, 3)\}$ en $V \times A \times B$
   (d) $R = \{(a, z, 3); ((b, i, 2); (c, x, 1)\}$ en $A \times V \times B$

4. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y la relación R en $A \times A \times A$ definida en la forma: $(x, y, z) \in R$ si y sólo si $x < y \quad \& \quad y < z$, siendo $<$ el "menor" usual entre números reales.
   Escribe R por extensión

5. Para cada una de las siguientes relaciones: dar tres pares que pertenezcan y tres pares que no; indicar si son reflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.
   (a) En el conjunto de los números reales
   - xRy si y sólo si $x \geq 4 \quad \& \quad y \geq 5$.
   - xRy si y sólo si $y \leq x \leq y + 3$.

   (b) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $P(A)$ el conjunto de partes de A
   - en $P(A)$, XRY si y sólo si $X \cap Y = \emptyset$
   - en $P(A)$, XRY si y sólo si $X \subset Y$

6. Determinar si las siguientes relaciones definidas en $A = \{a, b, c, d\}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas:
   - $R_0 = \emptyset$
   - $R_1 = \{(a, a); (a, b); (d, c); (c, d)\}$
   - $R_2 = \{(a, a); (b, b); (a, b); (b, a); (d, d); (c, c)\}$
   - $R_3 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)\}$
   - $R_4 = A \times A$

7. Escribir la matriz y los digrafos asociados a las relaciones anteriores

8. Sea $A = \{a, b, c, d\}$
   (a) Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A
   (b) Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A
   (c) Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A
   (d) Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A
   (e) Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A

9. Demostrar que si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b, entonces aRa y bRb.

10. Sea A un conjunto arbirtario. Sea $R = \Delta_A$ (diagonal de A) . Analizar qué propiedades tiene R.

11. Proponer una relación en el conjunto de los números naturales.
    Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)

12. Proponer una relación en el conjunto de los *alumnos de Informática*.
    Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)

13. Dada una relación binaria R sobre un conjunto A, se define la relación *complemento de R*, $\bar{R}$ por: $a\bar{R}b$ *si y sólo si a no está relacionada con b por R*
    - Dar un ejemplo de una relación R y su complemento
    - Probar que si $R \subset S$ entonces $\bar{S} \subset \bar{R}$

14. Dada R una relación binaria sobre A, probar que:
    (a) R es reflexiva si y sólo si R^{-1} también lo es
    (b) R es simétrica si y sólo si $R^{-1} = R$
    (c) R es simétrica si y sólo si R^{-1} y $\bar{R}$ también lo son
    (d) R es antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} \subset \Delta_A$

15. Se dice que una relación R sobre un conjunto A es *asimétrica* si cada vez que a está relacionado con b no se da que b esté relacionado con a
Dar un ejemplo de una relación asimétrica

16. Probar que dada una relación R sobre un conjunto A, R es asimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$

17. Sean R y S dos relaciones en A. Probar que:
   (a) Si $R \subset S$ entonces $R^{-1} \subset S^{-1}$
   (b) Si R y S son reflexivas entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son
   (c) Si R y S son simétricas entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son

18. Establecer las propiedades de las siguientes relaciones en H el conjunto de los seres humanos:
   (a) Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si *x es hermano de y*
   (b) Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si *x es hijo de y*
   (c) Se dice que una persona a es descendiente de una persona b si es hijo, nieto, bisnieto, etc..
   R es la relación en H definida por xRy si y sólo si *x es descendiente de y*

19. Establecer las propiedades de las siguientes relaciones:
   (a) Sea N el conjunto de los números naturales.
   Sea $\leq$ la relación en N dada por $x \leq y$ si y sólo si *x es menor o igual a y*
   (b) Sea N el conjunto de los números naturales.
   Sea $|$ la relación en N dada por $x|y$ si y sólo si *x divide a y*
   (c) Igual al anterior pero en el conjunto de los enteros.

20. Dado un conjunto de números reales A probar que la relación sobre $A \times A$ dada por $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$ es un orden.
Es total?

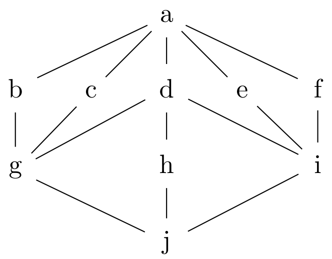
21. Analizar que tipo de orden es el usual en el conjunto de los números rales. ¿qué pasa con los números complejos?¿están ordenados?

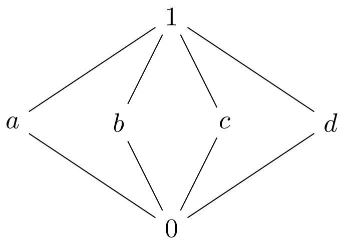
22. Probar que el orden lexicográfico es un orden total

23. Sea $S = \{a, b, c\}$ y sea $A = P(S)$ el conjunto de *partes de S*. Mostrar que A está parcialmente ordenado por el orden $\subset$ (inclusión de conjuntos).
Hallar el diagrama de Hasse.

24. Sea $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ (el conjunto de los divisores de 12). Hallar el diagrama de Hasse de $D_1 2$ con la relación "divide"

25. Describa las parejas ordenadas por las relaciones de cada uno de los siguientes diagramas de Hasse. Determinar, si existen, los elementos máximo, mínimo y cotas inferiores y superiores





26. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Seam $a.b \in A$, entonces $[a] = [b]$ si y sólo si aRb

27. Determinar si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es una partición para el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \}$

- $\{\{4, 5, 6\}; \{1, 8\}; \{2, 3, 7\}\}$
- $\{\{4, 5\}; \{1, 3, 4\}; \{6, 8\}; \{2, 7\}\}$
- $\{\{1, 3, 4\}; \{2, 6\}; \{5, 8\}\}$

28. Considerando el conjunto A de los alumnos que cursan Mate 4, indicar cuáles de las siguientes son particiones de A.

    (a) $P = \{\{\textit{alumnos que aprobaron CADP}\}; \{\textit{alumnos que aprobaron OC}\};$
    $\{\textit{alumnos que no aprobaron ISO ni Redes}\}\}$

    (b) $P = \{\{\textit{alumnos que están cursando Programación Distribuida }\}; \{\textit{alumnos que cursan Sistemas y Organiz}$
    $\{\textit{alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial}\}\}$

29. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.
Mostrar que R es una relación de equivalencia y hallar las clases de equivalencia.
¿ Cuál es la partición que induce R sobre A ?

30. Dados el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y una partición $P = \{\{a, c\}; \{b\}; \{d, e\}\}$.
Escribir por extensión la relación de equivalencia sobre A inducida por P.

31. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$. Mostrar que R es una relación de equivalencia y determinar las clases de equivalencia. ¿ Qué partición de A induce R ?

32. Sea $\sim$ una relación definida en $Z \times (Z0)$ dada por: $(a,b) \sim (c,d)$ si y sólo si $ad = bc$ Probar que es de equivalencia. Hallar la clase de equivalencia del elemento $(1,4)$. Mostrar que puede identificarse cada clase de equivalencia con un número racional (Esta es la forma de construir al conjunto de los racionales como conjunto cociente).

33. Hallar las clases de equivalencia módulo 3 y 5 de los números 387, 25 y 649

34. Hallar las respectivas clases de 13, 6, 11 y -49 *módulo 4*

35. Averiguar si son congruentes módulo 3 entre sí los siguientes pares de números: $(2,1024)$, $(101,512)$, $(1501,1348)$.

36. Analizar para qué valores de m se hacen verdaderas las siguientes congruencias: $5 \equiv_m 4$, $1 \equiv_m 0$, $1197 \equiv_m 286$, $3 \equiv_m -3$

37. Probar que la relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia

38. Probar: todo número es congruente, módulo n, con el resto de su división por n

39. Probar que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.

40. Probar las siguientes propiedades para todo $a,b,c \in Z$:
    (a) $a \equiv_n a$
    (b) $a \equiv_n b \Rightarrow b \equiv_n a$
    (c) $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c \Rightarrow a \equiv_n c$
    (d) $a \equiv_n b \Leftrightarrow a + c \equiv_n b + c$
    (e) $a \equiv_n b \Rightarrow ac \equiv_n bc$
    (f) $a \equiv_n b \Rightarrow (a,n) = (b,n)$
    (g) $a \equiv_n 0 \Leftrightarrow n|a$

Ejercicios Adicionales

1. Para evitar corazones rotos por amores no correspondidos, ¿cómo debería ser la relación ***xRy*** *si y sólo si* ***x ama a y*** definida en el conjunto de los seres humanos?

2. Escribir un código que dado un conjunto y una relación, determinar si la relación cumple con las propiedades de simetría, reflexividad, transitividad y antisimetría

3. Analizar si es un orden parcial la relación sobre los números enteros dada por:

$$aRb \quad \text{si y sólo si} \quad a^2 \leq b^2$$

4. Considerar el conjunto parcialmente ordenado $L = (N, |)$ (los naturales con el orden "divide"). Mostrar L es un reticulado.

5. Dados dos relaciones de orden R y S, analizar si $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son

6. Mostrar que toda Algebra de Boole finita es un reticulado.

7. Sea B un algebra booleana y sea $<$ la relación binaria definida por "$a < b$ si y sólo si $a inf b = a$"
   Demostrar que $<$ es un orden parcial.

8. Sea A el conjunto de las palabras de longitud 8 del alfabeto $\{0, 1\}$. Mostar que la relación R dada por "aRb si y sólo si a tiene el mismo número de 1 que b" es una equivalencia. Encontrar la partición inducida por la relación.

9. Averiguar en qué día de la semana naciste y verificar que es el mismo que cuando cumpliste/cumplas 28 años.
   Mostrar que esto es así para cualquier persona nacida entre el 1 de enero de 1901 y el 31 de diciembre de 2071.

   (Obs: un año normal tiene 365 días, uno bisiesto, 366. Los años bisiestos son aquellos no seculares divisibles por 4. Los años seculares son bisiestos si y sólo si son divisibles por 400.)

10. Averiguar qué día de la semana cayó cuando se aprobó la creación de la Facultad.

Matemática 4 - 2024

TP5 - Estructuras Algebraicas - Teoría de Grupos

1. Determinar cuales de las siguientes operaciones están bien definidas sobre el conjunto A dado. Analizar las propiedades en los casos afirmativos

   (a) $A = N$, $a * b = 3ab$

   (b) $A = Z$, $a * b = \frac{a+b}{3+ab}$

   (c) $A = R$, $x * y = x + y - xy$

   (d) $A = \{0, 1, 2, 3\}$,

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	1	2	0	2
3	2	3	1	1

2. Demostrar que:

   (a) Dado $M = \{m \in N : m > 0\}$, $(M, +)$ es un semigrupo pero no es un monoide

   (b) El conjunto de un solo elemento $M = \{e\}$ con la operación definida por $e * e = e$ es un monoide

   (c) Dado un conjunto no vacío A, el conjunto de las partes de A $P(A)$ con la operación *intersección* de conjuntos es un monoide conmutativo

3. Demostrar que si para una operación asociativa $*$ en A existe un elemento neutro e y un elemento del conjunto, a, tiene inverso entonces éste es único.

4. Sea R una relación de *congruencia* sobre un semigrupo $(S, *)$ demostrar que $(S/R, \circledast)$ (el conjunto cociente y la operación inducida por $*$ sobre las clases de equivalencia) es un semigrupo llamado ***Semigrupo Cociente***

5. Analizar si las siguientes son estructuras de grupo:
   (a) $(Z, +)$, los enteros con la suma usual
   (b) $(Z, \cdot)$, los enteros con el producto usual
   (c) $(R^2, +)$, los pares ordenados de reales con la suma usual
   (d) $(M_{2x2}, +)$ las matrices de 2x2 con la suma usual de matrices
   (e) $(P(A), \cup)$, A cualquier conjunto y $P(A)$ indica el conjunto de partes de A

6. Probar que en todo Grupo el único elemento ***idempotente*** es el neutro

7. Mostrar que en todo grupo vale la *propiedad cancelativa*

8. Sea $(G, *)$ un grupo tal que todo elemento es su propio inverso, probar que G es abeliano

9. Dado un grupo $(G, *)$, probar que G es abeliano si y sólo si para cualquier x,y en G vale que: $(x * y)^2 = x^2 * y^2$

10. Dados los Grupos $(G, *)$ y $(F, \diamondsuit)$ se define en el conjunto $G \times F$ la ley $\bullet$ tal que $(x, y) \bullet (z, t) = (x * z, y \diamondsuit t)$. Probar que $(G \times F, \bullet)$ es Grupo (***Grupo Producto***)

11. Estudiar si son Subgrupos de los grupos indicados:
    (a) Los enteros pares de $(Z, +)$
    (b) Las matrices simétricas de 2x2

12. Demostrar que si H y K son subgrupos de $(G, *)$ entonces $H \cap K$ es un subgrupo de $(G, *)$

13. Sea $(G, *)$ un grupo, sea $a \in G$ y sea H un subgrupo de G. Demostrar que el conjunto $aHa^{+1} = \{a * h * a^{-1} : h \in H\}$ es un subgrupo de G.

14. Probar que todo grupo cíclico es abeliano

15. Sea G un grupo cíclico de orden n, Si m es divisor de n entonces el elemento a^m y sus potencias generan un subgrupo

16. Sea $(G, *)$ un grupo, sea $a \in G$ y sea H un subgrupo de G. Si $a, b \in G$, probar que la relación dada por $a \equiv b$ mod(H) si $a * b^{-1} \in H$ es una relación de equivalencia

Ejercicios Adicionales

1. Determinar si $a * b = mcm[a, b]$ está bien definida en $A = N$, y en caso afirmativo analizar las propiedades

2. Probar que $GL(n, K) = \{A \in K^{n\times n}; det(A) \neq 0, con\ K\ cuerpo\}$ (conjunto de las matrices de orden n invertibles) es un grupo con el producto usual

3. Demostrar que si $(G, *)$ es un grupo abeliano, entonces $(a * b)^n = a^n * b^n$ para todo n entero

4. Dado un grupo $(G, *)$ y sea $a \in G$, se considera el conjunto **normalizador** $N(a) = \{x \in G / \forall a \in G : a * x = x * a\}$. Probar que $N(a)$ es un Subgrupo de G.

Matemática 4- 2024

TP 5 (Continuación) - Aritmética Modular

1. Hallar los resultados de las siguientes operaciones realizadas entre enteros módulo 4 y 5 : $\bar{3}+\bar{1}$; $\bar{5}+\bar{9}$; $\bar{4}0.\bar{3}$; $(\bar{3}+\bar{2}).(\bar{6}.\bar{8})$

2. Construir las tablas de sumar y multiplicar de los enteros módulo 2 y 5

3. Analizar si las siguientes son estructuras de grupo:
   (a) $(Z_4,+)$ enteros módulo 4 con la suma modular
   (b) $(Z_4,.)$ enteros módulo 4 con el producto modular
   (c) $(Z_3,.)$ enteros módulo 3 con el producto modular

4. Sean $A_1=\{\overline{0},\overline{5}\}$ y $A_2=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{8}\}$ subconjuntos de Z_{10}.
   - Probar que A_1 y A_2 son subgrupos de Z_{10}
   - Mostrar que todo elemento de Z_{10} puede escribirse como suma de elementos de A_1 y A_2 (es decir, para todo x de Z_{10}, $x=x_1+x_2$ con $x_1\in A_1$ y $x_2\in A_2$

5. Mostrar que $\overline{3}$ es un generador del grupo cíclico $(Z_8,+)$. Cuál es el orden del subgrupo cíclico generado por $\overline{2}$?

6. Encontrar los generadores del grupo cíclico $(Z_6,+)$.

7. Si reparto en partes iguales m caramelos entre 3 personas, me sobran 2, mientras que si los reparto entre 7, me sobran 4. Sabiendo que m está entre 30 y 70.
   ¿ Cuántos caramelos tengo para repartir? (Usar aritmética modular)

8. Averiguar qué día de la semana cayó 05/11/1968, fecha del natalicio de Ricardo Fort.

9. Mostrar que Z_m para m natural y las operaciones de suma y producto tiene estructura de anillo

10. Dar todos los elementos invertibles de Z_6

11. Sea m un entero impar, probar que $m^2\equiv_4 1$

12. Dar todos los elementos invertibles de Z_6

13. Si $\bar{a}$ es invertible entonces no es *divisor de cero*

14. Probar que $(t, m) = 1$ si y sólo si t es invertible módulo m

15. Si p es primo entonces Z_p es un cuerpo

Ejercicios Adicionales

1. Dado su número de alumno, Leg: $abcde/f$ y sean $m = abcde$ y $k = f + 10$.
   (a) Calcular, si existe el ***inverso modular*** de k en:
      - Z_8 si su f es **impar**,
      - Z_9 si su f es **par**.

   (b) Como debe ser q para que los últimos 3 dígitos de qx91xm coincidan con los últimos 3 dígitos de su número de alumno.

2. Calcular el resto de dividir 7 elevado a la 11 por 12

3. Un grupo de chicos de primer año (aprox 900 alumnos) está armando equipos para jugar al fútbol. Si arman equipos para fútbol 5 me quedan 3 sin equipo, pero si van a usar canchita de 11 ahora me quedan 7 amigos sin equipo ¿puede decir cuantos chicos son? la respuesta es única? (usar aritmética modular)

Matemática 4- 2024

TP 5 (Continuación 2) - Morfismos

1. Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y en caso afirmativo hallar núcleo e imagen.
   (a) $f : G \to F$ dada por $f(x) = 2^x$ y siendo los grupos $G = (R, +)$ los reales con la suma usual, $F = (R_0, \cdot)$ los reales sin el 0 con el producto usual
   (b) $f : G \to F$ dada por $f(x) = -x$ y siendo los grupos $G = (Z, *)$ los enteros con la operación $a*b = a+b+ab$, $F = (Z, \circ)$ los enteros con la operación $a\circ b = a+b-ab$
   (c) $f : (P(A), \cup) \to (P(A), \cap)$ dada por $f(X) = X^c$ (siendo A cualquier conjunto, $P(A)$ indica el conjunto de partes de A y X^c el complemento de un conjunto)

2. Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Demostrar que el núcleo y la imagen de f son subgrupos de G y H respectivamente.

3. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que la función $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano (recordar un ejercicio de grupos abelianos de la primera parte del TP 5)

4. Si H_1, H_2 son dos subgrupos de un grupo conmutativo G, probar que la aplicación $f : H_1 \times H_2 \to G$ dada por $f(a, b) = ab$, es un morfismo de grupos.

5. Si $f : G_1 \to G_2$ es un morfismo de grupos entonces es monomorfismo si y sólo si $Nu(f) = \{e_1\}$.

6. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que la función $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano

7. Sea R una relación de *congruencia* sobre un semigrupo $(S, *)$ y $(S/R,)$ el semigrupo cociente correspondiente.
   Demostrar que la función $f_R : S \longrightarrow S/R$ definida por $f_R(a) = \overline{a}$ es un homomorfismo.

8. Sea z un número complejo. ¿Cuándo será un isomorfismo de grupos la aplicación $f : C \to C$ siendo C el conjunto de los números complejos, dada por $f(x) = z.x$?

9. Probar que hay un isomorfismo entre en grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales R^4 con la suma usual

10. Probar que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a $(Z_m, +)$

Matemática 4 - 2024

TP6 - Espacios Vectoriales - Transformaciones Lineales

1. Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:
   (a) R^3
   (b) Las matrices reales de $2x2$
   (c) Los polinomios de grado menor o igual a 3 ($\mathcal{P}_3$). ¿El conjunto de los polinomios de grado 3, también es un espacio vectorial?

2. Sea V un Espacio Vectorial, demostrar que si $\alpha.v = 0_V$ entonces $\alpha = 0$ o $v = 0_V$ (o ambos son nulos)

3. Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar):
   (a) $S = \{(x, 0) : x \in R\}$
   (b) $S = \{(1, y) : y \in R\}$
   (c) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 0\}$
   (d) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 1\}$
   (e) $S = \{(x, y, z) \in R^3 : z = x - y\}$
   (f) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y + w = 1\}$
   (g) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$
   (h) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in R \right\}$

4. Decidir si los siguientes subconjuntos son generadores de R^3:
   (a) $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)\}$
   (b) $S = \{(1, 0, 1); (1, 1, 1); (0, 0, 1)\}$
   (c) $S = \{(1, 0, 1); (0, 1, 0)\}$

5. Analizar si el siguiente conjunto puede generar el subespacio de las matrices simétricas de 2×2 $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

6. Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1, 0, 1); (1, 1, 0)\}$

7. Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1, 1, 1); (1, -1, 0)\}$

8. Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

   (a) $S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (1,2,3)\}$

   (b) $S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$

   (c) $S = \{(1,0); (0,1); (2,3)\}$

   (d) $S = \{(1,-3); (1,-1)\}$

   (e) $S = \{(0,2,-1); (1,7,1); (1,3,-1); (0,0,0)\}$

   (f) $S = \{(4,1,0,0); (-3,0,1,0); (1,0,0,1)\}$

   (g) $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

   (h) $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

9. Analizar si un conjunto de vectores que contiene al vector nulo puede ser linealmente independiente. Justificar.

10. Si el conjunto de vectores $M = \{u, v, w\}$ de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto $\{u, u+2v, u+2v+3w\}$ es linealmente independiente.

11. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores pueden ser base de R^2.

   (a) $\{(2,-1); (1,3)\}$

   (b) $\{(2,1); (1,1); (3,2)\}$

   (c) $\{(1,-1); (1,0)\}$

   (d) $\{(1,2)); (2,4)\}$

12. Dar las coordenadas de $v = (1,2)$ en los conjuntos que en el ejercicio anterior resultaron ser bases

13. Hallar una base para cada conjunto del ejercicio 3 que sea un subespacios.

14. Analizar si las siguiente aplicaciones entre espacios vectoriales son transformaciones lineales.

    (a) $L : R^2 \to R^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$
    (b) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (x + z, y + z)$
    (c) $L : R^3 \to R^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2, y + 3x, 1)$
    (d) $L : R^{2x2} \to R^{2x2}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$
    (e) $L : R^{2x2} \to R^{2x2}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ y & 1 \end{pmatrix}$
    (f) $L : R^{2x2} \to R^2$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + z, y + w)$
    (g) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (0, 0)$

15. Hallar el núcleo e imagen de cada una de las transformaciones lineales del punto anterior y las dimensiones de cada uno de esos subespacios.

16. Mostrar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

17. (a) Es la aplicación identidad una transformación lineal? en caso de serlo hallar núcleo e imagen.
    (b) Es la aplicación nula una transformación lineal? en caso de serlo hallar núcleo e imagen.

18. Sean $C = C[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a, b]$ en R y $L : C \to R$ definida por $L(f) = \int_a^b f(x)dx$. Mostrar que L es una transformación lineal.

19. Sean $C = C[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a, b]$ en R y sea $D : C \to C$ dado por $D(f) = f'$ (esto es, para cada función $f \in C$ el operador Derivación, D, devuelve la derivada f' de f). Mostrar que D es una transformacion lineal.

20. Demostrar que dada cualquier transformación lineal $L : V \to W$ (con V, W espacios vectoriales), el núcleo y la imagen de L forman un subespacio de V y W respectivamente.

21.
- Hallar $L : R^2 \to R^2$ sabiendo que:
  $L(1,0) = (1,-2)$, $L(0,1) = (1,-1)$
- Hallar $L : R^3 \to R^2$ sabiendo que :
  $L(1,0,0) = (1,0)$, $L(0,1,0) = (-1,-6)$, $L(0,0,1) = (0,4)$
- Hallar $L : R^2 \to R^2$ sabiendo que:
  $L(1,1) = (4,2)$, $L(0,3) = (1,0)$
- Hallar $L : R^3 \to R^3$ sabiendo que :
  $L(1,1,1) = (1,2,3)$, $L(0,1,0) = (1,-1,0)$, $L(-1,-1,1) = (5,4,3)$

22. Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

    (a) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x,y,z) = (z-y, z-x)$ con las bases canónicas de R^3 y R^2.

    (b) $L : R^3 \to R^3$ definida por $L(x,y,z) = (3x+z, y-x, 2z+2y)$ con la base canónica de R^3.

    (c) $L : R^{2x2} \to R^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x+y, z+w)$ con B la base canónica de las matrices de R^{2x2} y $B_1 = \{(1,1); (-1,5)\}$ una base de R^2.

Ejercicios Adicionales

1. Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:
   (a) R^n con n natural.
   (b) Las matrices reales de nxn
   (c) Los polinomios de grado menor o igual a ($\mathcal{P}_3$). ¿El conjunto de los polinomios de grado n, también es un espacio vectorial?

2. Decidir si el siguiente conjunto es un subespacio , en caso afirmativo hallar base y dimensión: $S = \{(x, y) \in R^2 : x = y\}$

   Qué sucede con $S = \{(x, y) \in R^2 : x \geq y\}$??

3. Analizar si forman un subespacio (de las matrices cuadradas) las matrices reales no invertibles de $2x2$ y las matrices reales invertibles de nxn.

4. $S = \{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_3 = 4a_0, a_i \in R\}$ es un subepacio del Espacio de polinomios?

5. Decidir si $S = \{(1, 2, 3); (2, 3, 1); (-4, 1, -1)\}$ genera R^3

6. Defina el subespacio generado por los vectores $\{(1, 1, 1); (2, -1, 3); (-1, 2, 2)\}$

7. Analizar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes:
   (a) $S = \{(5, -3); (1, 2)\}$
   (b) $S = \{(3, 2, 1); (0, 0, 1); (1, 2, 3)\}$

8. Analizar si el conjunto de vectores $\{(0, 2, -1); (1, 1, 1); (1, 3, 0)\}$ es base de R^3.

9. Analizar si $\{x, x^2, x^3\}$ es base de $\{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in R\}$ (los polinomios reales de grado menor o igual a 3)

10. Analizar sin son transformaciones lineales, en caso afirmativo hallar núcleo e imagen.

   (a) $L : R^3 \to R^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2z, y + 3x, -z)$
   (b) $L : \mathcal{P}_3 \to R^4$ definida por $L(p(x)) = (a_3, a_2, a_1, a_0)$
   con $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ y siendo $\mathcal{P}_3$ el espacio de los polinomios de grado 3 (i.e todos los polinomios con grado menor o igual a 3, con las operaciones usuales)
   (c) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (xy, x + y + z)$
   (d) $L : R^3 \to R^3$ definida por $L(x, y, z) = (z, y, 1)$
   (e) $L : R^{2x2} \to R$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x + w$
   (f) $L : R^{2x2} \to R$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = z.y$

11. Dada L una transformación lineal en el espacio vectorial V y $B = \{b_1 .... b_i ... b_n\}$ una base de V. Probar:

   (a) Si $L(b_i) = 0$ para cada elemento b_i de la base B, entonces L es la transformación nula.
   (b) Si $L(b_i) = b_i$ para cada elemento b_i de la base B, entonces L es la transformación identidad.
   (c) Si hay un escalar r tal que $L(b_i) = r.b_i$ para cada vector de la base B, entonces $L(v) = r.v, \forall v \in V$.

12. Hallar $L : R^3 \to R^2$ sabiendo que :
   $L(1, 0, 1) = (1, 0)$, $L(0, 1, 0) = (1, 2)$, $L(-1, 1, 1) = (-1, 3)$

13. Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

   (a) $L : R^4 \to R^3$ definida por $L(x, y, z, w) = (x + y, y + z, z + w)$ con las bases canónicas de R^4 y R^3.
   (b) $L : R^2 \to R^3$ definida por $L(x, y) = (x + y, x - y, 3y)$ con $B_2 = \{(1, 1); (-2, 0)\}$ base de R^2 y la base canónica de R^3.
   (c) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (z, x+y)$ con $B_3 = \{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (0, 2, 1)\}$ base de R^3 y $B_2 = \{(1, 2); (0, 3)\}$ base de R^2.

14. Sea $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ es base de un espacio V. ¿ Podrá el conjunto $\{b_1; b_1 + b_2\}$ ser linealmente independiente? .

15. Dar un conjunto de vectores que genere al subespacio de las matrices triangulares superiores

16. Si el conjunto de vectores $M = \{u, v, w\}$ de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto $\{u, u + 2v, u + 2v + 3w\}$ es linealmente independiente.

17. Analizar si la siguiente aplicación es transformación lineal. En caso afirmativo hallar matriz de representación, núcleo e imagen (con sus respectivas bases y dimensiones). ¿ Qué relación hay entre las dimensiones de estos subespacios?

$$L : R^{2x2} \to R^3 \quad : \quad L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x, y + z, w)$$

18. Hallar $L : R^3 \to R^3$ sabiendo que :
$L(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $L(0, 1, 0) = (1, -1, 0)$, $L(-1, -1, 1) = (4, 5, 6)$