Juan Menduiña

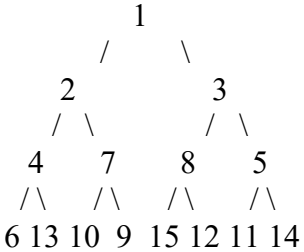
Ejercitación Teórica N° 2:
Cola de Prioridades - Heap.

Ejercicio 1.

A partir de una heap inicialmente vacía, insertar, de a uno, los siguientes valores: 6, 4, 15, 2, 10, 11, 8, 1, 13, 7, 9, 12, 5, 3, 14.

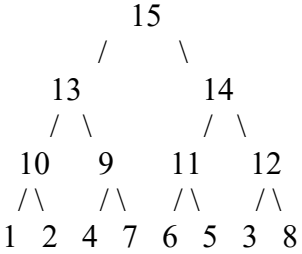
[6] - *Insert(6)*
[6, 4] - *Insert(4)*
[4, 6]
[4, 6, 15] - *Insert(15)*
[4, 6, 15, 2] - *Insert(2)*
[4, 2, 15, 6]
[2, 4, 15, 6]
[2, 4, 15, 6, 10] - *Insert(10)*
[2, 4, 15, 6, 10, 11] - *Insert(11)*
[2, 4, 11, 6, 10, 15]
[2, 4, 11, 6, 10, 15, 8] - *Insert(8)*
[2, 4, 8, 6, 10, 15, 11]
[2, 4, 8, 6, 10, 15, 11, 1] - *Insert(1)*
[2, 4, 8, 1, 10, 15, 11, 6]
[2, 1, 8, 4, 10, 15, 11, 6]
[1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6]
[1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6, 13] - *Insert(13)*
[1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6, 13, 7] - *Insert(7)*
[1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10]
[1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10, 9] - *Insert(9)*
[1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10, 9, 12] - *Insert(12)*
[1, 2, 8, 4, 7, 12, 11, 6, 13, 10, 9, 15]
[1, 2, 8, 4, 7, 12, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 5] - *Insert(5)*
[1, 2, 8, 4, 7, 5, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12]
[1, 2, 5, 4, 7, 8, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12]
[1, 2, 5, 4, 7, 8, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 3] - *Insert(3)*
[1, 2, 5, 4, 7, 8, 3, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11]
[1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11]
[1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11, 14] - *Insert(14)*

Min-Heap: [1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11, 14].



[6] - *Insert(6)*
[6, 4] - *Insert(4)*
[6, 4, 15] - *Insert(15)*
[15, 4, 6]
[15, 4, 6, 2] - *Insert(2)*
[15, 4, 6, 2, 10] - *Insert(10)*
[15, 10, 6, 2, 4]
[15, 10, 6, 2, 4, 11] - *Insert(11)*
[15, 10, 11, 2, 4, 6]
[15, 10, 11, 2, 4, 6, 8] - *Insert(8)*
[15, 10, 11, 2, 4, 6, 8, 1] - *Insert(1)*
[15, 10, 11, 2, 4, 6, 8, 1, 13] - *Insert(13)*
[15, 10, 11, 13, 4, 6, 8, 1, 2]
[15, 13, 11, 10, 4, 6, 8, 1, 2]
[15, 13, 11, 10, 4, 6, 8, 1, 2, 7] - *Insert(7)*
[15, 13, 11, 10, 7, 6, 8, 1, 2, 4]
[15, 13, 11, 10, 7, 6, 8, 1, 2, 4, 9] - *Insert(9)*
[15, 13, 11, 10, 9, 6, 8, 1, 2, 4, 7]
[15, 13, 11, 10, 9, 6, 8, 1, 2, 4, 7, 12] - *Insert(12)*
[15, 13, 11, 10, 9, 12, 8, 1, 2, 4, 7, 6]
[15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6]
[15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5] - *Insert(5)*
[15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3] - *Insert(3)*
[15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 14] - *Insert(14)*
[15, 13, 12, 10, 9, 11, 14, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8]
[15, 13, 14, 10, 9, 11, 12, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8].

Max-Heap: [15, 13, 14, 10, 9, 11, 12, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8].



6, 4, 15, 2, 10, 11, 8, 1, 13, 7, 9, 12, 5, 3, 14

La raíz está almacenada en la posición 1. Para un elemento que está en la posición i, se tiene:

- El hijo izquierdo está en la posición 2i.
- El hijo derecho está en la posición 2i + 1.
- El padre está en la posición $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.

Ejercicio 2.

(a) *¿Cuántos elementos hay, al menos, en una heap de altura h?*

En una *heap* de altura h, hay, al menos, 2^h elementos.

(b) *¿Dónde se encuentra ubicado el elemento mínimo en una max-heap?*

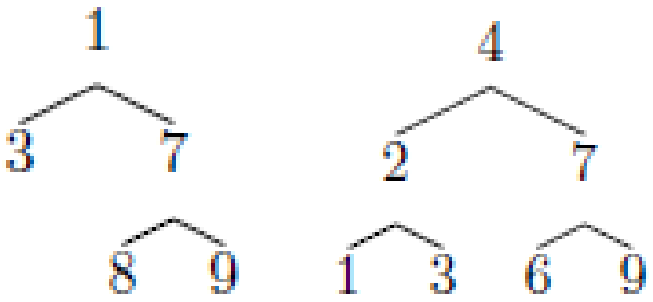
El elemento mínimo en una *max-heap* se encuentra ubicado en alguna de las hojas.

(c) *¿El siguiente arreglo es una max-heap: [23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12]?*

No, este arreglo no es una *max-heap*, ya que el nodo con valor 6 es padre del nodo con valor 7, no cumpliendo con que cada nodo sea mayor o igual que sus hijos.

Ejercicio 3.

Dados los siguientes árboles, indicar si representan una heap. Justificar la respuesta.



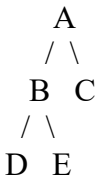
El primer árbol no es una *heap*, ya que no es un árbol binario completo.

El segundo árbol no es una *heap*, ya que, si bien es completo, cada nodo no es menor o igual (o mayor o igual) que sus hijos.

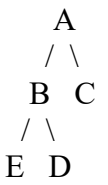
Ejercicio 4.

Dibujar todas las min-heaps posibles para este conjunto de claves: {A, B, C, D, E}.

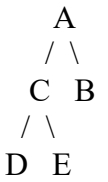
Opción 1:



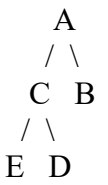
Opción 2:



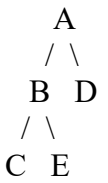
Opción 3:



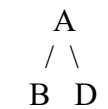
Opción 4:



Opción 5:



Opción 6:



Opción 7:

Opción 8:

Ejercicio 5.

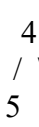
A partir de una min-heap inicialmente vacía, dibujar la evolución del estado de la heap al ejecutar las siguientes operaciones:

Insert(5), Insert(4), Insert(7), Insert(1), DeleteMin(), Insert(3), Insert(6), DeleteMin(), DeleteMin(), Insert(8), DeleteMin(), Insert(2), DeleteMin(), DeleteMin().

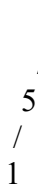
Insert(5):

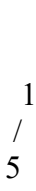
Insert(4):

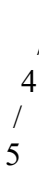
Insert(7):



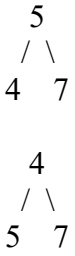
Insert(1):



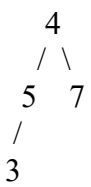


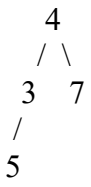


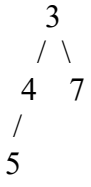
DeleteMin():



Insert(3):

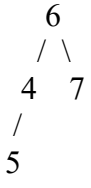


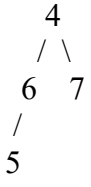


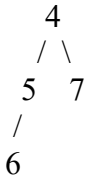


Insert(6):

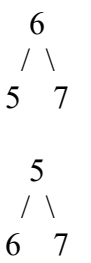
DeleteMin():



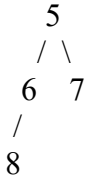




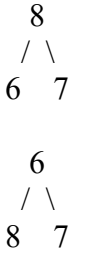
DeleteMin():



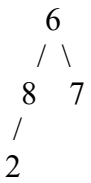
Insert(8):

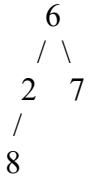


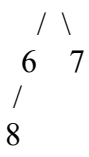
DeleteMin():



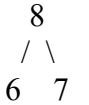
Insert(2):

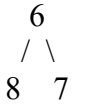






DeleteMin():





DeleteMin():

Ejercicio 6.

Aplicar el algoritmo BuildHeap para construir una min-heap en tiempo lineal, con los siguientes valores: {150, 80, 40, 10, 70, 110, 30, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 20, 90}.

Se parte de:

[150, 80, 40, 10, 70, 110, 30, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 20, 90].

Se empieza en la posición i= $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$= 7 del arreglo, el 30, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 70, 110, 20, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 110, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 70, 100, 20, 120, 140, 60, 50, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 70, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 50, 100, 20, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 10, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 50, 100, 20, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 40, y se filtra:

[150, 80, 20, 10, 50, 100, 40, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90]
[150, 80, 20, 10, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90].

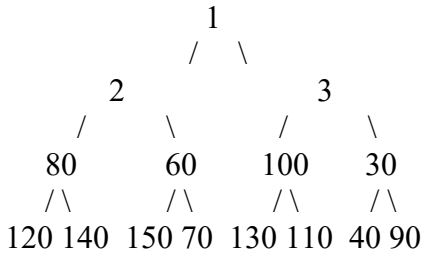
Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 80, y se filtra:

[150, 10, 20, 80, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 150, y se filtra:

[10, 150, 20, 80, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90]
[10, 50, 20, 80, 150, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90]
[10, 50, 20, 80, 60, 100, 30, 120, 140, 150, 70, 130, 110, 40, 90].

Min-Heap: [10, 50, 20, 80, 60, 100, 30, 120, 140, 150, 70, 130, 110, 40, 90].



Ejercicio 7.

Aplicar el algoritmo HeapSort para ordenar, descendentemente, los siguientes elementos: {15, 18, 40, 1, 7, 10, 33, 2, 140, 500, 11, 12, 13, 90}. Mostrar, paso a paso, la ejecución del algoritmo sobre los datos.

Se parte de:

Min-Heap: [1, 2, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13, 90].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 90:

[90, 2, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]
[2, 90, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]
[2, 7, 10, 90, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]
[2, 7, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40, 13 | 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 13:

[13, 7, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1]
[7, 13, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1]
[7, 11, 10, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 40:

[40, 11, 10, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1]
[10, 11, 40, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1]
[10, 11, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 15:

[15, 11, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1]
[11, 15, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1]
[11, 13, 12, 18, 15, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 13, 12, 18, 15, 40, 33, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1]
[12, 13, 500, 18, 15, 40, 33, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1]
[12, 13, 33, 18, 15, 40, 500, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 13, 33, 18, 15, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[13, 140, 33, 18, 15, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[13, 15, 33, 18, 140, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 90:

[90, 15, 33, 18, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[15, 90, 33, 18, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[15, 18, 33, 90, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 18, 33, 90, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[18, 500, 33, 90, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[18, 90, 33, 500, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 40:

[40, 90, 33, 500, 140 | 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[33, 90, 40, 500, 140 | 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 90, 40, 500 | 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[40, 90, 140, 500 | 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 90, 140 | 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[90, 500, 140 | 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 500 | 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño:

[500 | 140, 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Arreglo ordenado descendentemente:

[500, 140, 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Ejercicio 8.

Construir una max-heap con los siguientes datos: {5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4}.

(a) *Insertándolos de a uno.*

[5] - *Insert(5)*
[5, 8] - *Insert(8)*
[8, 5]
[8, 5, 12] - *Insert(12)*
[12, 5, 8]
[12, 5, 8, 9] - *Insert(9)*
[12, 9, 8, 5]
[12, 9, 8, 5, 7] - *Insert(7)*
[12, 9, 8, 5, 7, 10] - *Insert(10)*
[12, 9, 10, 5, 7, 8]
[12, 9, 10, 5, 7, 8, 21] - *Insert(21)*
[12, 9, 21, 5, 7, 8, 10]
[21, 9, 12, 5, 7, 8, 10]
[21, 9, 12, 5, 7, 8, 10, 6] - *Insert(6)*
[21, 9, 12, 6, 7, 8, 10, 5]
[21, 9, 12, 6, 7, 8, 10, 5, 14] - *Insert(14)*
[21, 9, 12, 14, 7, 8, 10, 5, 6]
[21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6]
[21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6, 4] - *Insert(4)*

Max-Heap: [21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6, 4].

(b) *Usando el algoritmo BuildHeap.*

Se parte de:

[5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4].

Se empieza en la posición i= $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$= 5 del arreglo, el 7, y se filtra:

[5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 9, y se filtra:

[5, 8, 12, 14, 7, 10, 21, 6, 9, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 12, y se filtra:

[5, 8, 21, 14, 7, 10, 12, 6, 9, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 8, y se filtra:

[5, 14, 21, 8, 7, 10, 12, 6, 9, 4]
[5, 14, 21, 9, 7, 10, 12, 6, 8, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 5, y se filtra:

[21, 14, 5, 9, 7, 10, 12, 6, 8, 4]
[21, 14, 12, 9, 7, 10, 5, 6, 8, 4].

Max-Heap: [21, 14, 12, 9, 7, 10, 5, 6, 8, 4].

Ejercicio 9.

Suponer que una heap que representa una cola de prioridades está almacenada en el arreglo A (se comienza de la posición A[1]). Si se inserta la clave 16, ¿en qué posición quedará?

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
A[i]	*11*	*21*	*27*	*37*	*36*	*34*	*32*	*43*	*44*	*42*	*51*	*62*

(a) *A[2].* **(b)** *A[3].* **(c)** *A[6].* **(d)** *A[7].* **(e)** *A[12].*

[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62]
[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 16] - *Insert(16)*
[11, 21, 27, 37, 36, 16, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 34]
[11, 21, 16, 37, 36, 27, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 34].

Ejercicio 10.

Suponer que una heap que representa una cola de prioridades está almacenada en el arreglo A (se comienza de la posición A[1]). Si se aplica un delete-min, ¿en qué posición quedará la clave 62?

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
A[i]	*11*	*21*	*27*	*37*	*36*	*34*	*32*	*43*	*44*	*42*	*51*	*62*

(a) *A[1].* **(b)** *A[2].* **(c)** *A[10].* **(d)** *A[11].* **(e)** *A[12].*

[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62]
[62, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51] - *DeleteMin()*
[21, 62, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51]
[21, 36, 27, 37, 62, 34, 32, 43, 44, 42, 51]
[21, 36, 27, 37, 42, 34, 32, 43, 44, 62, 51].

Ejercicio 11.

(a) *Ordenar, en forma creciente, los datos del ejercicio anterior, usando el algoritmo HeapSort.*

Se parte de:

Max-Heap: [62, 51, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21, 11].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 51, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]
[51, 11, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]
[51, 44, 42, 11, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]
[51, 44, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27, 21 | 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 44, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]
[44, 21, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]
[44, 43, 42, 37, 21, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]
[44, 43, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36, 21 | 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 43, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]
[43, 21, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]
[43, 37, 42, 21, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]
[43, 37, 42, 36, 27, 32, 34, 11, 21 | 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 37, 42, 36, 27, 32, 34, 11 | 43, 44, 51, 62]
[42, 37, 21, 36, 27, 32, 34, 11 | 43, 44, 51, 62]
[42, 37, 34, 36, 27, 32, 21, 11 | 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 37, 34, 36, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62]
[37, 11, 34, 36, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62]
[37, 36, 34, 11, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 36, 34, 11, 27, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[36, 21, 34, 11, 27, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[36, 27, 34, 11, 21, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 32:

[32, 27, 34, 11, 21 | 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[34, 27, 32, 11, 21 | 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 27, 32, 11 | 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[32, 27, 21, 11 | 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 27, 21 | 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[27, 11, 21 | 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 11 | 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño:

[11 | 21, 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Arreglo ordenado ascendentemente:

[11, 21, 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

(b) *¿Cuáles serían los pasos a seguir si se quiere ordenar en forma decreciente?*

Los pasos a seguir si se quiere ordenar en forma decreciente sería partir de una *Min-Heap*, intercambiar el primer con el último elemento del arreglo, decrementar el tamaño de éste y filtrar correspondientemente en cada caso.

Ejercicio 12.

¿Cuáles de los siguientes arreglos representan una max-heap, min-heap o ninguna de las dos?

(a) *arreglo 1: 0 1 2 0 4 5 6 7 8 9.*

Ninguna de las dos.

(b) *arreglo 2: 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0.*

Max-Heap.

(c) *arreglo 3: 5 5 5 6 6 6 6 7 7 1.*

Ninguna de las dos.

(d) *arreglo 4: 9 3 9 2 1 6 7 1 2 1.*

Max-Heap.

(e) *arreglo 5: 8 7 6 1 2 3 4 2 1 2.*

Ninguna de las dos.

Ejercicio 13.

Un arreglo de 7 enteros se ordena ascendentemente usando el algoritmo HeapSort. Luego de la fase inicial del algoritmo (la construcción de la heap), ¿cuál de los siguientes es un posible orden del arreglo?

(a) *85 78 45 51 53 47 49.*
(b) *85 49 78 45 47 51 53.*
(c) *85 78 49 45 47 51 53.*
(d) *45 85 78 53 51 49 47.*
(e) *85 51 78 53 49 47 45.*

Ejercicio 14.

En una Heap, ¿para un elemento que está en la posición i, su hijo derecho está en la posición ...?

(a) $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
(b) *2i.*
(c) *2i + 1.*
(d) *Ninguna de las anteriores.*

Ejercicio 15.

¿Siempre se puede decir que un árbol binario lleno es una Heap?

(a) *Sí.* **(b)** *No.*

Ejercicio 16.

La operación que agrega un elemento a la heap que tiene n elementos, en el peor caso, es de ...

(a) *O(n).* **(b)** *O(n log n).* **(c)** *O(log n).* **(d)** *Ninguna de las anteriores.*

Ejercicio 17.

Se construyó una Max-Heap con las siguientes claves: 13, 21, 87, 30, 25, 22, 18. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al resultado de realizar la construcción insertando las claves una a una?

(a) *87, 30, 25, 22, 21, 18, 13.*
(b) *87, 30, 22, 21, 25, 13, 18.*
(c) *87, 30, 25, 13, 22, 18, 21.*
(d) *87, 30, 22, 13, 25, 21, 18.*

[13] - *Insert(13)*
[13, 21] - *Insert(21)*
[21, 13]
[21, 13, 87] - *Insert(87)*
[87, 13, 21]
[87, 13, 21, 30] - *Insert(30)*
[87, 30, 21, 13]
[87, 30, 21, 13, 25] - *Insert(25)*
[87, 30, 21, 13, 25, 22] - *Insert(22)*
[87, 30, 22, 13, 25, 21]
[87, 30, 22, 13, 25, 21, 18] - *Insert(18)*

Max-Heap: [87, 30, 22, 13, 25, 21, 18].

Ejercicio 18.

Se construyó una Max-Heap con las siguientes claves: 13, 21, 87, 30, 25, 22, 18. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al resultado de realizar la construcción aplicando el algoritmo Build-Heap?

(a) *87, 30, 25, 22, 21, 18, 13.*
(b) *87, 30, 22, 21, 25, 13, 18.*
(c) *87, 30, 25, 13, 22, 18, 21.*
(d) *87, 30, 22, 13, 25, 21, 18.*

Se parte de:

[13, 21, 87, 30, 25, 22, 18].

Se empieza en la posición i= $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$= 3 del arreglo, el 87, y se filtra:

[13, 21, 87, 30, 25, 22, 18].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 21, y se filtra:

[13, 30, 87, 21, 25, 22, 18].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 13, y se filtra:

[87, 30, 13, 21, 25, 22, 18]
[87, 30, 22, 21, 25, 13, 18].

Max-Heap: [87, 30, 22, 21, 25, 13, 18].

Ejercicio 19.

El algoritmo HeapSort consta de dos etapas:

(1) Se construye una heap y
(2) Se realizan los intercambios necesarios para dejar ordenados los datos.

Asumir que la heap ya está construida y es la siguiente: 58 38 53 23 28 40 35 18.

¿Cómo quedan los datos en el arreglo después de ejecutar sólo 2 pasos de la segunda etapa del HeapSort?

(a) *40 38 23 28 35 18 53 58.*
(b) *53 38 40 23 28 18 35 58.*
(c) *40 38 23 35 28 18 53 58.*
(d) *40 38 35 23 28 18 53 58.*

Se parte de:

Max-Heap: [58, 38, 53, 23, 28, 40, 35, 18].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 18:

[18, 38, 53, 23, 28, 40, 35 | 58]
[53, 38, 18, 23, 28, 40, 35 | 58]
[53, 38, 40, 23, 28, 18, 35 | 58].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 35:

[35, 38, 40, 23, 28, 18, 35 | 53, 58]
[40, 38, 35, 23, 28, 18 | 53, 58].

Ejercicio 20.

Dada la Min-Heap 3, 8, 5, 15, 10, 7, 19, 28, 16, 25, 12. ¿En qué posición está ubicado el hijo derecho de la clave 15?

(a) *7.*
(b) *8.*
(c) *9.*
(d) *10.*

2i + 1= 2 * 4 + 1
2i + 1= 8 + 1
2i + 1= 9.

Ejercicio 21.

Construir una min-heap con las siguientes claves: 15, 25, 23, 13, 18, 2, 19, 20, 17, insertándose una a una. Indicar en qué posiciones quedaron ubicadas las claves: 2, 18 y 25.

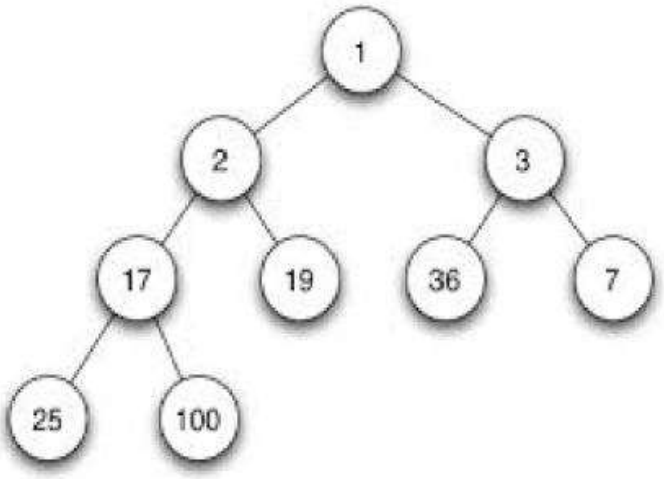
[15] - *Insert(15)*
[15, 25] - *Insert(25)*
[15, 25, 23] - *Insert(23)*
[15, 25, 23, 13] - *Insert(13)*
[13, 15, 23, 25]
[13, 15, 23, 25, 18] - *Insert(18)*
[13, 15, 23, 25, 18, 2] - *Insert(2)*
[13, 15, 2, 25, 18, 23]
[2, 15, 13, 25, 18, 23]
[2, 15, 13, 25, 18, 23, 19] - *Insert(19)*
[2, 15, 13, 25, 18, 23, 19, 20] - *Insert(20)*
[2, 15, 13, 20, 18, 23, 19, 25]
[2, 15, 13, 20, 18, 23, 19, 25, 17] - *Insert(17)*
[2, 15, 13, 17, 18, 23, 19, 25, 20].

Min-Heap: [2, 15, 13, 17, 18, 23, 19, 25, 20].

Las claves 2, 18 y 25 quedaron ubicadas en las posiciones 1, 5 y 8, respectivamente.

Ejercicio 22.

Luego de insertar la clave 15 en la siguiente min-heap, ¿cuántas de las claves que ya estaban en la heap han mantenido su lugar (es decir, ocupan en la min-heap resultante la misma posición que ocupaban antes de la inserción)?

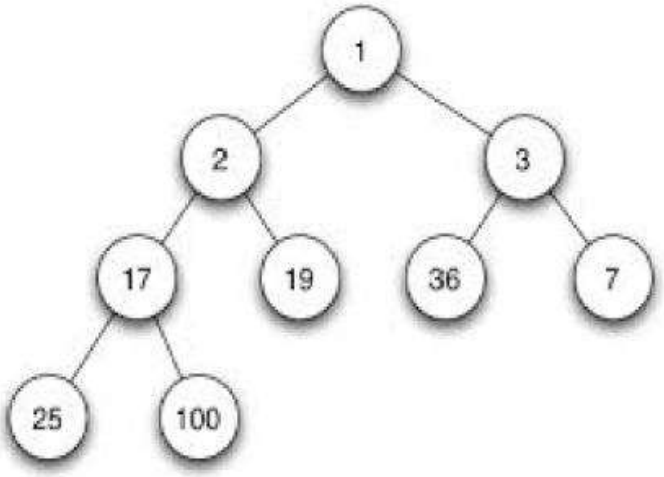


(a) *Ninguna.*
(b) *Seis.*
(c) *Ocho.*
(d) *Nueve.*

[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100]
[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100, 15] - *Insert(15)*
[1, 2, 3, 17, 15, 36, 7, 25, 100, 19].

Ejercicio 23.

Luego de una operación de borrado del mínimo en la siguiente min-heap, ¿cuántas claves han cambiado de lugar (es decir, ocupan en la min-heap resultante un lugar diferente al que ocupaban en la min-heap antes del borrado) ? (No contar la clave borrada, ya que no pertenece más a la heap).



(a) *Ninguna.*
(b) *Dos.*
(c) *Tres.*
(d) *Cuatro.*

[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100]
[100, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25] - *DeleteMin()*
[2, 100, 3, 17, 19, 36, 7, 25]
[2, 17, 3, 100, 19, 36, 7, 25]
[2, 17, 3, 25, 19, 36, 7, 100].