Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 6: Estimación Puntual.

Ejercicio 1.

Suponer que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población X, que E (X)= μ y V (x)= σ^2. Sean

$\bar{X}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ *y* $\bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

dos estimadores de μ. ¿Cuál es el mejor estimador de μ? Explicar la elección.

E ($\bar{X}_1$)= E ($\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$)
E ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{n-1}$ E ($\sum_{i=1}^{n-1} X_i$)
E ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)$ por (*)
E ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mu$
E ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{n-1}$ (n - 1) μ
E ($\bar{X}_1$)= μ.

V ($\bar{X}_1$)= V ($\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$)
V ($\bar{X}_1$)= $(\frac{1}{n-1})^2$ V ($\sum_{i=1}^{n-1} X_i$)
V ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} V(X_i)$ por (**)
V ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^2$
V ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{(n-1)^2}$ (n - 1) σ^2
V ($\bar{X}_1$)= $\frac{\sigma^2}{n-1}$.

ECM ($\bar{X}_1$)= $\{E[\bar{X}_1 - E(\bar{X}_1)]\}^2$+ V ($\bar{X}_1$)
ECM ($\bar{X}_1$)= $[E(\bar{X}_1 - \mu)]^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $[E(\bar{X}_1) - E(\mu)]^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $(\mu - \mu)^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $0^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $0 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $\frac{\sigma^2}{n-1}$.

E ($\bar{X}_2$)= E ($\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$)
E ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n} X_i$)
E ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ por (*)

E $(\bar{X}_2)$= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$
E $(\bar{X}_2)$= $\frac{1}{n}$ nμ
E $(\bar{X}_2)$= μ.

V $(\bar{X}_2)$= V $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)$
V $(\bar{X}_2)$= $(\frac{1}{n})^2$ V $(\sum_{i=1}^{n}X_i)$
V $(\bar{X}_2)$= $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$ por (**)
V $(\bar{X}_2)$= $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2$
V $(\bar{X}_2)$= $\frac{1}{n^2}$ nσ^2
V $(\bar{X}_2)$= $\frac{\sigma^2}{n}$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

ECM $(\bar{X}_2)$= $\{E[\bar{X}_2 - E(\bar{X}_2)]\}^2$+ V $(\bar{X}_2)$
ECM $(\bar{X}_2)$= $[E(\bar{X}_2 - \mu)]^2$ + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM $(\bar{X}_2)$= $[E(\bar{X}_2) - E(\mu)]^2$ + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM $(\bar{X}_2)$= $(\mu - \mu)^2$ + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM $(\bar{X}_2)$= 0^2 + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM $(\bar{X}_2)$= 0 + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM $(\bar{X}_2)$= $\frac{\sigma^2}{n-1}$.

ECM $(\bar{X}_1)$= $\frac{\sigma^2}{n-1}$ $<$ ECM $(\bar{X}_2)$= $\frac{\sigma^2}{n}$.

Por lo tanto, el mejor estimador de μ es $\bar{X}_2$, ya que tiene menor error cuadrático medio.

Ejercicio 2.

Sea X_1, X_2, ... , X_7 una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considerar los siguientes estimadores de μ:

$\widehat{\Theta}_1 = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_7}{7}$; $\widehat{\Theta}_2 = \frac{2X_1-X_6+X_4}{2}$; $\widehat{\Theta}_3 = \frac{2X_1-X_7+X_3}{3}$.

(a) *¿Alguno de estos estimadores es insesgado?*

E $(\widehat{\Theta}_1)$= E $(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7}{7})$
E $(\widehat{\Theta}_1)$= $\frac{1}{7}$ E $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7)$
E $(\widehat{\Theta}_1)$= $\frac{1}{7}$ [E (X_1) + E (X_2) + E (X_3) + E (X_4) + E (X_5) + E (X_6) + E (X_7)] por (*)
E $(\widehat{\Theta}_1)$= $\frac{1}{7}$ 7 E (X_1)
E $(\widehat{\Theta}_1)$= μ.

E $(\widehat{\Theta}_2)$= E $(\frac{2X_1-X_6+X_4}{2})$
E $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{2}$ E $(2X_1 - X_6 + X_4)$
E $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{2}$ [E $(2X_1)$ - E (X_6) + E (X_4)] por (*)
E $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{2}$ [2 E (X_1) - μ + μ]
E $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{2}$ $(2\mu - \mu + \mu)$
E $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{2}$ 2μ
E $(\widehat{\Theta}_2)$= μ.

E $(\widehat{\Theta}_3)$= E $(\frac{2X_1-X_7+X_3}{3})$
E $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{3}$ E $(2X_1 - X_7 + X_3)$
E $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{3}$ [E $(2X_1)$ - E (X_7) + E (X_3)] por (*)
E $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{3}$ [2 E (X_1) - μ + μ]
E $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{3}$ $(2\mu - \mu + \mu)$
E $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{2}{3}$ μ.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.

Por lo tanto, $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$ son insesgados.

(b) *Hallar el error cuadrático medio de los estimadores.*

V $(\widehat{\Theta}_1)$= V $(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7}{7})$
V $(\widehat{\Theta}_1)$= $\frac{1}{49}$ V $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7)$

V $(\widehat{\Theta}_1)$= $\frac{1}{49}$ [V (X_1) + V (X_2) + V (X_3) + V (X_4) + V (X_5) + V (X_6) + V (X_7)] por (**)
V $(\widehat{\Theta}_1)$= $\frac{1}{49}$ 7 V (X_1)
V $(\widehat{\Theta}_1)$= $\frac{1}{7}\sigma^2$.

V $(\widehat{\Theta}_2)$= V $(\frac{2X_1-X_6+X_4}{2})$
V $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{4}$ V $(2X_1$ - X_6 + $X_4)$
V $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{4}$ [V $(2X_1)$ + V (X_6) + V (X_4)] por (**)
V $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{4}$ [4 V (X_1) + σ^2 + σ^2]
V $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{4}$ $(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2)$
V $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{1}{4}$ $6\sigma^2$
V $(\widehat{\Theta}_2)$= $\frac{3}{2}\sigma^2$.

V $(\widehat{\Theta}_3)$= V $(\frac{2X_1-X_7+X_3}{3})$
V $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{9}$ V $(2X_1$ + X_7 + $X_3)$
V $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{9}$ [V $(2X_1)$ + V (X_7) + V (X_3)] por (**)
V $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{9}$ [4 V (X_1) + σ^2 + σ^2]
V $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{9}$ $(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2)$
V $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{1}{9}$ $6\sigma^2$
V $(\widehat{\Theta}_3)$= $\frac{2}{3}\sigma^2$.

(**) propiedad de la varianza e independencia.

ECM $(\widehat{\Theta}_1)$= $\{E[\widehat{\Theta}_1 - E(\widehat{\Theta}_1)]\}^2$+ V $(\widehat{\Theta}_1)$
ECM $(\widehat{\Theta}_1)$= $[E(\widehat{\Theta}_1 - \mu)]^2$ + $\frac{1}{7}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_1)$= $[E(\widehat{\Theta}_1) - E(\mu)]^2$ + $\frac{1}{7}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_1)$= $(\mu - \mu)^2$ + $\frac{1}{7}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_1)$= 0^2 + $\frac{1}{7}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_1)$= 0 + $\frac{1}{7}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_1)$= $\frac{1}{7}\sigma^2$.

ECM $(\widehat{\Theta}_2)$= $\{E[\widehat{\Theta}_2 - E(\widehat{\Theta}_2)]\}^2$+ V $(\widehat{\Theta}_2)$
ECM $(\widehat{\Theta}_2)$= $[E(\widehat{\Theta}_2 - \mu)]^2$ + $\frac{3}{2}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_2)$= $[E(\widehat{\Theta}_2) - E(\mu)]^2$ + $\frac{3}{2}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_2)$= $(\mu - \mu)^2$ + $\frac{3}{2}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_2)$= 0^2 + $\frac{3}{2}\sigma^2$
ECM $(\widehat{\Theta}_2)$= 0 + $\frac{3}{2}\sigma^2$

ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{3}{2}\,\sigma^2$.

ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $\{E[\widehat{\Theta}_3 - E(\widehat{\Theta}_3)]\}^2$+ V ($\widehat{\Theta}_3$)
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $[E(\widehat{\Theta}_3 - \mu)]^2 + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $[E(\widehat{\Theta}_3) - E(\mu)]^2 + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $(\frac{2}{3}\mu - \mu)^2 + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $(\frac{-1}{3}\mu)^2 + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}\,\mu + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}\,\mu + \frac{2}{3}\,\sigma^2$.

(c) *¿Cuál estimador es el "mejor"? ¿En qué sentido es mejor?*

ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}\,\sigma^2 <$ ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{3}{2}\,\sigma^2$.
ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}\,\sigma^2 <$ ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}\,\mu + \frac{2}{3}\,\sigma^2$.

El "mejor" estimador es $\widehat{\Theta}_1$, ya que tiene menor error cuadrático medio.

Ejercicio 3.

Sea X_1, X_2, ... , X_n una muestra aleatoria de tamaño n.

(a) *Demostrar que $\bar{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.*

Media poblacional de X_i, i= 1, 2, … , n: μ.
Varianza poblacional de X_i, i= 1, 2, … , n: σ^2.

E ($\bar{X}^2$)= V ($\bar{X}$) + $[E(\bar{X})]^2$
E ($\bar{X}^2$)= V ($\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$) + $[E(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})]^2$
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{1}{n^2}$ V ($\sum_{i=1}^n X_i$) + $[\frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^n X_i)]^2$
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i)$ + $[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)]^2$ por (*)
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2$+ $[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu]^2$
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{1}{n^2}$ n σ^2 + $(\frac{1}{n} n\mu)^2$
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{\sigma^2}{n}$ + μ^2.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.

Por lo tanto, $\bar{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.

(b) *Determinar la magnitud del sesgo de este estimador.*

Sesgo ($\bar{X}^2$)= E ($\bar{X}^2$) - μ^2
Sesgo ($\bar{X}^2$)= $\frac{\sigma^2}{n}$ + μ^2 - μ^2
Sesgo ($\bar{X}^2$)= $\frac{\sigma^2}{n}$.

(c) *¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño de n de la muestra?*

$\lim_{n \to +\infty} Sesgo$ ($\bar{X}^2$)= $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sigma^2}{n}$
$\lim_{n \to +\infty} Sesgo$ ($\bar{X}^2$)= 0.

A medida que aumenta que aumenta el tamaño de n de la muestra, el sesgo tiende a cero.

Ejercicio 4.

El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días, se observan: 2, 5, 3, 3, 7 desconexiones accidentales.

(a) *Obtener el estimador de máxima verosimilitud de λ. ¿El estimador es insesgado? ¿Es consistente?*

L (λ)= $\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}$
L (λ)= $\frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$.

ln L (λ)= ln ($\frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$)
ln L (λ)= ln ($e^{-n\lambda}$) + ln ($\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$) - ln ($\prod_{i=1}^{n} x_i!$)
ln L (λ)= -nλ ln e + $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ln λ - $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$
ln L (λ)= -nλ * 1 + $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ln λ - $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$
ln L (λ)= -nλ + $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ln λ - $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$.

$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda}$= 0
-n + $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}$= 0
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}$= n
$\hat{\lambda}_{EMV}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

E ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= E ($\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$)
E ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n} x_i$)
E ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$ por (*)
E ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda$
E ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ nλ
E ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= λ.

V ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= V ($\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$)
V ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{1}{n^2}$ V ($\sum_{i=1}^{n} x_i$)
V ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(x_i)$ por (**)
V ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \lambda$
V ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{1}{n^2}$ nλ
V ($\hat{\lambda}_{EMV}$)= $\frac{\lambda}{n}$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

$\lim\limits_{n \to +\infty} E(\hat{\lambda}_{EMV})= \lambda$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} V(\hat{\lambda}_{EMV})= 0$.

Por lo tanto, el estimador es insesgado (ya que E $(\hat{\lambda}_{EMV})= \lambda$) y consistente (ya que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(\hat{\lambda}_{EMV})= \lambda$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} V(\hat{\lambda}_{EMV})= 0$).

(b) *Obtener la estimación de λ a partir de la muestra dada.*

$\hat{\lambda}_{EMV}= \frac{2+5+3+3+7}{5}$
$\hat{\lambda}_{EMV}= \frac{20}{5}$
$\hat{\lambda}_{EMV}= 4$.

(c) *Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encontrar la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.*

P $(X \geq 3)$= 1 - P $(X < 3)$
P $(X \geq 3)$= 1 - [P (X= 0) + P (X= 1) + P (X= 2)]
P $(X \geq 3)$= 1 - $(\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!})$
P $(X \geq 3)$= 1 - $(\frac{e^{-\lambda}*1}{1} + \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2})$
P $(X \geq 3)$= 1 - $(e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\lambda + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2})$
P $(X \geq 3)$= 1 - $e^{-\lambda}$ $(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2})$.

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV})$= 1 - $e^{-\hat{\lambda}_{EMV}}$ $(1 + \hat{\lambda}_{EMV} + \frac{\hat{\lambda}^2_{EMV}}{2})$ por propiedad de invarianza
$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV})$= 1 - e^{-4} $(1 + 4 + \frac{4^2}{2})$
$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV})$= 1 - e^{-4} $(1 + 4 + \frac{16}{2})$
$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV})$= 1 - e^{-4} (1 + 4 + 8)
$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV})$= 1 - $13e^{-4}$
$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV})$= 1 - 13 * 0,018
$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV})$= 1 - 0,238
$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV})$= 0,762.

Ejercicio 5.

(a) *Sea* X_1, X_2, ... , X_n *una muestra aleatoria de una v.a. B (1, p). Hallar un estimador de máxima verosimilitud (EMV) de p.*

L (p)= $\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$
L (p)= $p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

ln L (p)= ln $[p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}]$
ln L (p)= ln $(p^{\sum_{i=1}^{n} x_i})$ + ln $(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$
ln L (p)= $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ln p + (n - $\sum_{i=1}^{n} x_i$) ln (1 - p).

$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p}$= 0
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}$ + $\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$ (-1)= 0
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}$ - $\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$= 0
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}$= $\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$
$\frac{1-p}{p}$= $\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
$\frac{1}{p}$ - 1= $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ - 1
$\frac{1}{p}$= $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
$\hat{p}_{EMV}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

(b) *Se selecciona una muestra aleatoria de n chips fabricados por cierta compañía. Sea X= el número entre los n que tienen defectos y p= P (el chip tiene defecto). Se supone que sólo se observa X (el número de chips con defectos).*

(i) *Si n= 100 y x= 5, ¿cuál es la estimación de p?*

$\hat{p}_{EMV}$= $\frac{5}{100}$
$\hat{p}_{EMV}$= 0,05.

Por lo tanto, si n= 100 y x= 5, la estimación de p es 0,05.

(ii) *Si n= 100 y x= 5, ¿cuál es el EMV de la probabilidad* $(1-p)^6$*, de que ninguno de los siguientes 6 chips que se examinen tenga defectos?*

$\hat{P}_{EMV}$= $(1-\hat{p}_{EMV})^6$ por propiedad de invarianza
$\hat{P}_{EMV}$= $(1-0{,}05)^6$
$\hat{P}_{EMV}$= $0{,}95^6$

$\hat{P}_{EMV}$= 0,735.

Por lo tanto, si n= 100 y x= 5, el EMV de la probabilidad $(1-p)^6$ es 0,735.

Ejercicio 6.

Se denota por X la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y se supone que la f.d.p. de X es:

f (x)= $\begin{cases} (2\theta+1)x^{2\theta}, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, c.c. \end{cases}$*, donde* $\theta > \frac{-1}{2}$.

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información: 0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.

(a) *Utilizar el método de los momentos para obtener un estimador de* θ *y, luego, calcular la estimación para esta información.*

$\mu= \int_{-\infty}^{+\infty} x(2\theta+1)x^{2\theta}\, dx$
$\mu= \int_0^1 (2\theta+1)x^{2\theta+1}\, dx$
$\mu= (2\theta + 1) \int_0^1 x^{2\theta+1}\, dx$
$\mu= (2\theta + 1) \frac{x^{2\theta+2}}{2\theta+2} |_0^1$
$\mu= \frac{2\theta+1}{2\theta+2} (1^{2\theta+2} - 0^{2\theta+2})$
$\mu= \frac{2\theta+1}{2\theta+2} (1 - 0)$
$\mu= \frac{2\theta+1}{2\theta+2} * 1$
$\mu= \frac{2\theta+1}{2\theta+2}$.

$M_1= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

$\mu= M_1$
$\frac{2\theta+1}{2\theta+2}= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
$2\theta + 1= (2\theta + 2) \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
$2\theta + 1= 2\theta \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} + 2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
$2\theta - 2\theta \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}= 2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - 1$
$\theta (2 - 2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})= \frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{n}$
$\frac{2n-2\sum_{i=1}^n X_i}{n} \theta= \frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{n}$
$\theta= \frac{\frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{n}}{\frac{2n-2\sum_{i=1}^n X_i}{n}}$
$\hat{\theta}_{MM}= \frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{2(n-\sum_{i=1}^n X_i)}$.

$\hat{\theta}_{MM}= \frac{2*8-10}{2(10-8)}$
$\hat{\theta}_{MM}= \frac{16-10}{2*2}$

$\hat{\theta}_{MM}= \frac{6}{4}$
$\hat{\theta}_{MM}= \frac{3}{2}$
$\hat{\theta}_{MM}=$ 1,5.

(b) *Obtener el EMV de θ y, luego, calcular la estimación para la información dada.*

L (θ)= $\prod_{i=1}^{n}(2\theta+1)\ x_i^{2\theta}$
L (θ)= $(2\theta+1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}$.

ln L (θ)= ln $[(2\theta+1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}]$
ln L (θ)= ln $(2\theta+1)^n$ + ln $(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta})$
ln L (θ)= n ln $(2\theta+1)$ + $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{2\theta}$
ln L (θ)= n ln $(2\theta+1)$ + $2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$.

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}= 0$
$\frac{n}{2\theta+1} * 2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$
$\frac{2n}{2\theta+1}= -2 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$
$2\theta + 1= \frac{2n}{-2\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$
$2\theta + 1= \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$
$2\theta= \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$
$\hat{\theta}_{EMV}= \frac{-n}{2\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - \frac{1}{2}$.

$\hat{\theta}_{EMV}= \frac{-10}{2(-2,43)} - \frac{1}{2}$
$\hat{\theta}_{EMV}= \frac{-10}{-4,86} - \frac{1}{2}$
$\hat{\theta}_{EMV}= 2,06 - \frac{1}{2}$
$\hat{\theta}_{EMV}=$ 1,56.

Ejercicio 7.

Sea X_1, X_2, ... , X_n una muestra aleatoria de una v.a. $\mathcal{N}$ (μ, σ^2).

(a) *Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de los momentos. ¿Los estimadores son insesgados?*

$\mu_1= M_1$
$\hat{\mu}_{EMM}= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

$\sigma^2 + \mu^2= M_2$
$\sigma^2 + \mu^2= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$
$\sigma^2= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \hat{\mu}_{EMM}^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - (\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})^2$.

E ($\hat{\mu}_{EMM}$)= E ($\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$)
E ($\hat{\mu}_{EMM}$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^n X_i$)
E ($\hat{\mu}_{EMM}$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$ por (*)
E ($\hat{\mu}_{EMM}$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu$
E ($\hat{\mu}_{EMM}$)= $\frac{1}{n}$ nμ
E ($\hat{\mu}_{EMM}$)= μ.

E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= E [$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$ - ($\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$)^2]
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= E ($\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$) - E [($\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$)^2] por (*)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^n X_i^2$) - {V ($\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$) + [$E$($\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$)]^2}
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2)$ - [$\frac{1}{n^2}$ V ($\sum_{i=1}^n X_i$) + μ^2] por (*)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2)$ - [$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i)$ + μ^2] por (**)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{1}{n}$ n (σ^2 + μ^2) - ($\frac{1}{n^2}$ nσ^2 + μ^2)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= σ^2 + μ^2 - ($\frac{\sigma^2}{n}$ + μ^2)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= σ^2 + μ^2 - $\frac{\sigma^2}{n}$ - μ^2
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{n-1}{n}$ σ^2.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

Por lo tanto, el estimador EMM de μ es insesgado y el estimador EMM de σ^2 no es insesgado.

(b) *Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de verosimilitud. ¿Los estimadores son insesgados?*

L (μ, σ^2)= $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

L (μ, σ^2)= $(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^n \; e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

L (μ, σ^2)= $\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \; e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}$

L (μ, σ^2)= $(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{-n} \; e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}$

L (μ, σ^2)= $[(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}]^{-n} \; e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}$

L (μ, σ^2)= $(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} \; e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}$.

ln L (μ, σ^2)= ln $[(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} \; e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}]$

ln L (μ, σ^2)= ln $(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}$ + ln $[e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}]$

ln L (μ, σ^2)= $\frac{-n}{2}$ ln $2\pi\sigma^2$ + $[\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2]$ ln e

ln L (μ, σ^2)= $\frac{-n}{2}$ ln $2\pi\sigma^2$ - $\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2$ * 1

ln L (μ, σ^2)= $\frac{-n}{2}$ ln $2\pi\sigma^2$ - $\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2$.

$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu}$= 0

$\frac{-2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)$ (-1)= 0

$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)$= 0

$\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)$= 0 * σ^2

$\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)$= 0

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ - $\sum_{i=1}^{n} \mu$= 0

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ - nμ= 0

nμ= $\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\hat{\mu}_{EMV}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2}$= 0

$\frac{-n}{2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} 2\pi$ - $[\frac{-1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2]$= 0

$\frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2$= 0

$\frac{n}{2\sigma^2}$= $\frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2$

$\frac{2\sigma^4}{2\sigma^2}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}{n}$

$\hat{\sigma}^2_{EMV}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2}{n}$.

E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= E $(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})$

E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E $(\sum_{i=1}^{n} X_i)$

E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ por (*)

E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$
E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ nμ
E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= μ.

E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= E [$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2}{n}$]
E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E [$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2$]
E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E {$\sum_{i=1}^{n}[X_i^2-2X_i\hat{\mu}_{EMV}+\hat{\mu}^2_{EMV}]$}
E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ + $\sum_{i=1}^{n}-2X_i\hat{\mu}_{EMV}$ + $\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}^2_{EMV}$)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - 2$\hat{\mu}_{EMV}$ $\sum_{i=1}^{n}X_i$ + n$\hat{\mu}^2_{EMV}$)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - 2$\hat{\mu}_{EMV}$n$\hat{\mu}_{EMV}$ + n$\hat{\mu}^2_{EMV}$)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - 2n$\hat{\mu}^2_{EMV}$ + n$\hat{\mu}^2_{EMV}$)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - n$\hat{\mu}^2_{EMV}$)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMV}$)= E ($\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$ - $\hat{\mu}^2_{EMV}$)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= E [$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$ - ($\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$)^2]
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= E ($\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$) - E [($\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$)^2] por (*)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$) - {V ($\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$) + [$E(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n})]^2$}
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)$ - [$\frac{1}{n^2}$ V ($\sum_{i=1}^{n}X_i$) + μ^2] por (*)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)$ - [$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$ + μ^2] por (**)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= $\frac{1}{n}$ n (σ^2 + μ^2) - ($\frac{1}{n^2}$ nσ^2 + μ^2)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= σ^2 + μ^2 - ($\frac{\sigma^2}{n}$ + μ^2)
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= σ^2 + μ^2 - $\frac{\sigma^2}{n}$ - μ^2
E ($\hat{\sigma}^2_{EMM}$)= $\frac{n-1}{n}$ σ^2.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

Por lo tanto, el estimador EMV de μ es insesgado y el estimador EMV de σ^2 no es insesgado.

(c) *Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg2): 392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375. Si se supone que la resistencia al corte está normalmente distribuida, estimar la verdadera media de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.*

X_i: "resistencia al corte de la i-ésima soldadura eléctrica", i= 1, 2, … , 10.

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2).

EMM:

$\hat{\mu}_{EMM}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$\hat{\mu}_{EMM}= \frac{3844}{10}$
$\hat{\mu}_{EMM}=$ 384,4.

$\hat{\sigma}_{EMM}^2= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$ - $(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2= \frac{1481190}{10}$ - $(\frac{3844}{10})^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2= 148119 - 384{,}4^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2=$ 148119 - 147763,36
$\hat{\sigma}_{EMM}^2=$ 355,64.

$\hat{\sigma}_{EMM}= \sqrt{\hat{\sigma}_{EMM}^2}$
$\hat{\sigma}_{EMM}= \sqrt{355{,}64}$
$\hat{\sigma}_{EMM}=$ 18,86.

EMV:

$\hat{\mu}_{EMV}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$\hat{\mu}_{EMV}= \frac{3844}{10}$
$\hat{\mu}_{EMV}=$ 384,4.

$\hat{\sigma}_{EMV}^2= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2}{n}$
$\hat{\sigma}_{EMV}^2= \frac{3556{,}4}{10}$
$\hat{\sigma}_{EMV}^2=$ 355,64.

$\hat{\sigma}_{EMV}= \sqrt{\hat{\sigma}_{EMV}^2}$
$\hat{\sigma}_{EMV}= \sqrt{355{,}64}$
$\hat{\sigma}_{EMV}=$ 18,86.

(d) *Estimar la probabilidad de que la resistencia al corte de una soldadura al azar sea menor que 420.*

$\hat{P}_{EMV}$ (X $<$ 420)= P $(\frac{X-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} < \frac{420-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}})$
$\hat{P}_{EMV}$ (X $<$ 420)= P (Z $< \frac{420-384{,}4}{18{,}86}$)
$\hat{P}_{EMV}$ (X $<$ 420)= P (Z $< \frac{35{,}6}{18{,}86}$)
$\hat{P}_{EMV}$ (X $<$ 420)= P (Z $<$ 1,89)
$\hat{P}_{EMV}$ (X $<$ 420)= F (1,89)
$\hat{P}_{EMV}$ (X $<$ 420)= 0,9706.