

Trabajo Práctico N° 3: **Continuidad de una Función.**

Ejercicio 1.

Determinar si las siguientes funciones son continuas en los valores indicados. Clasificar las discontinuidades, si las hay. Representar, gráficamente, cada función y verificar la conclusión obtenida.

(a) $f(x) = |x - 2| + 3$ en $x = 2$.

$$f(2) = |2 - 2| + 3$$

$$f(2) = |0| + 3$$

$$f(2) = 0 + 3$$

$$f(2) = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 2| + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x - 2) + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 + 3$$

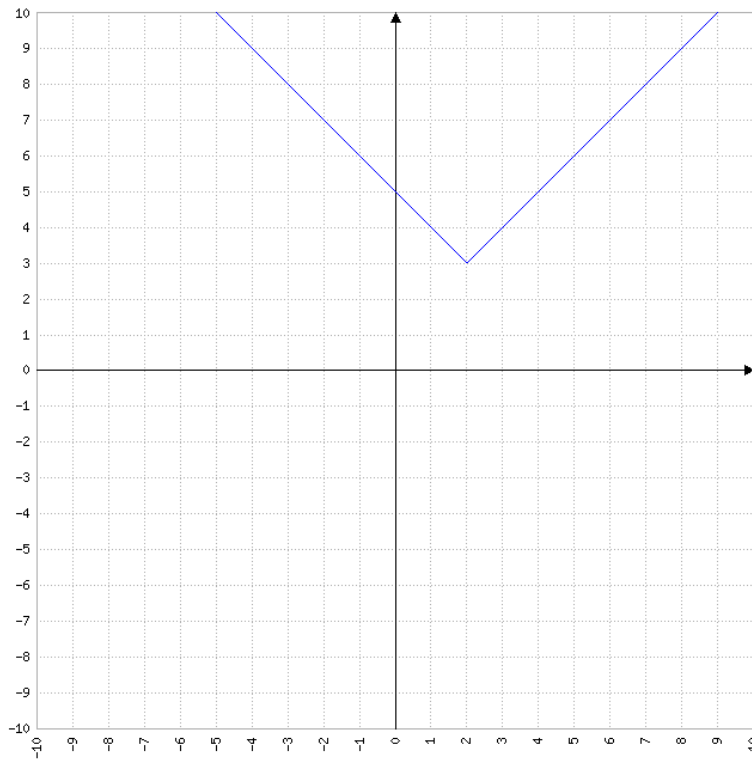
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 5 = -2 + 5 = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 2| + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Por lo tanto, ya que $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, $f(x)$ es continua en $x = 2$.



(b) $g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ en $x = 5$.

$x = 5 \notin \text{Dom}_g$.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{5^2 - 25}{5 - 5} = \frac{25 - 25}{0} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x-5)^2}{x-5}$$

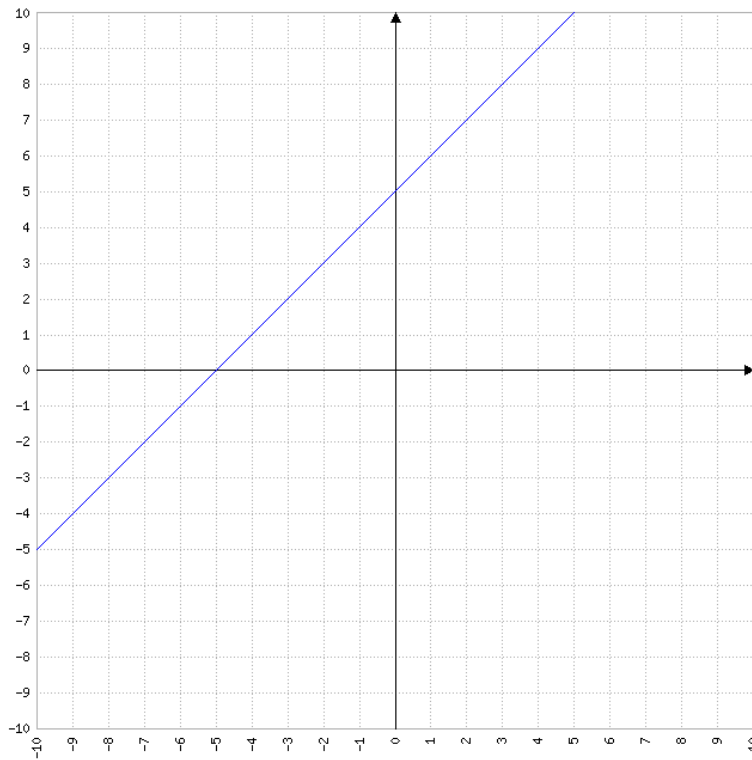
$$\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} x - 5 = 5 - 5 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{5^2 - 25}{5 - 5} = \frac{25 - 25}{0} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)^2}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} x - 5 = 5 - 5 = 0.$$

Por lo tanto, ya que $x = 5 \notin \text{Dom}_g$ y, entonces, $\nexists g(5)$, pero $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 0$, $g(x)$ es discontinua evitable en $x = 5$.



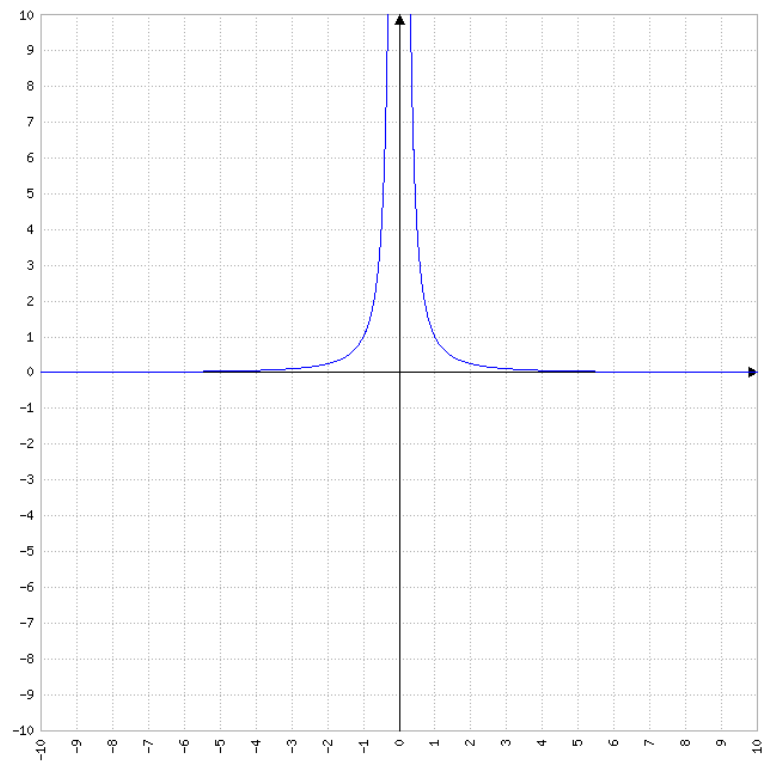
$$(c) h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ en } x=0.$$

$$h(0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

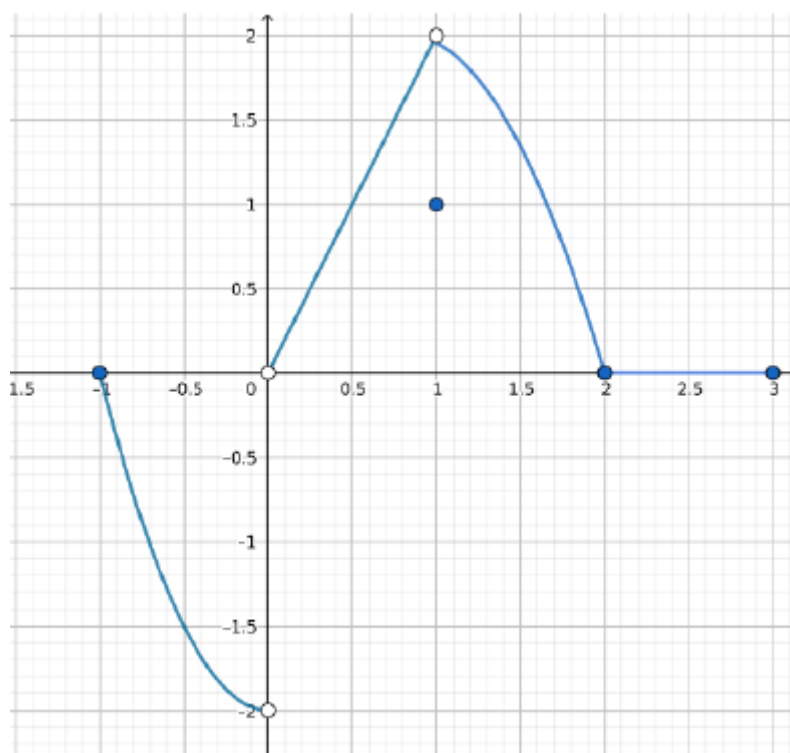
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, $h(x)$ es discontinua inevitable en $x=0$.



Ejercicio 2.

A partir de la siguiente gráfica de $f(x)$:



Responder:

(a) ¿Existe $f(-1)$?

Sí, $f(-1) = 0$.

(b) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$?

Sí, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$.

(c) ¿ $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$?

Sí, $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$.

(d) ¿Existe $f(0)$?

No, $\nexists f(0)$.

(e) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

No, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(f) ¿f es continua en $x = 0$?

No, f no es continua en $x = 0$.

(g) ¿Existe $f(1)$?

Sí, $f(1) = 1$.

(h) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

Sí, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

(i) ¿f es continua en $x = 1$?

No, f no es continua en $x = 1$.

(j) ¿f es continua en $x = 2$?

Sí, f es continua en $x = 2$.

(k) ¿f es continua en $x = 3$?

Sí, f es continua en $x = 3$.

Ejercicio 3.

Dada la siguiente función, decidir si es continua en $x = -1$ y en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{si } x \leq -1 \\ 1, & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

$$f(-1) = -2(-1) + 1$$

$$f(-1) = 2 + 1$$

$$f(-1) = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -2x + 1 = -2(-1) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1.$$

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ y, por lo tanto, $\nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $f(x)$ es discontinua inevitable en $x = -1$.

$$f(1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

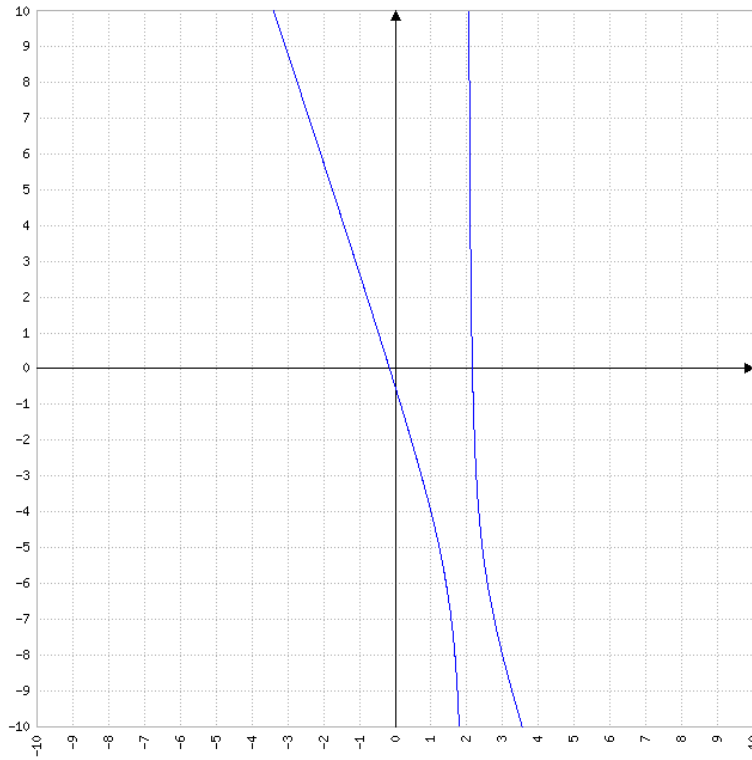
Por lo tanto, ya que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Ejercicio 4.

Decidir en qué conjuntos son continuas las siguientes funciones:

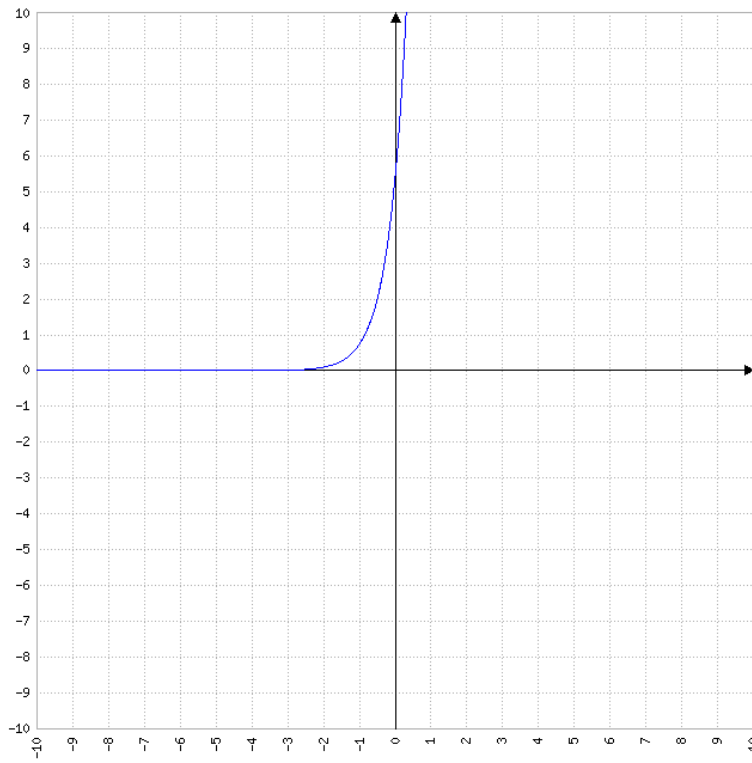
(a) $f(x) = \frac{1}{x-2} - 3x$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.



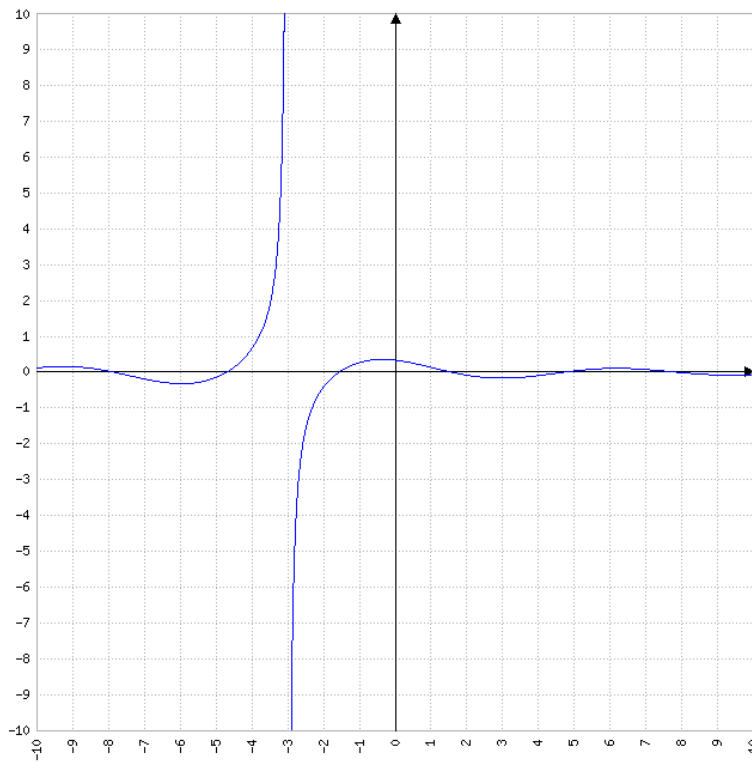
(b) $g(x) = 2e^{2x+1}$.

$g(x)$ es continua en \mathbb{R} .



(c) $h(x) = \frac{\cos x}{x+3}$.

$h(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$.



Ejercicio 5.

Para qué valor de k , $g(x)$ resulta continua en \mathbb{R} .

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x > -2 \\ kx^2, & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

$$f(-2) = k(-2)^2$$

$$f(-2) = 4k.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} kx^2 = k(-2)^2 = 4k.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} -x = -(-2) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$$

$$4k = 2$$

$$k = \frac{2}{4}$$

$$k = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, para $k = \frac{1}{2}$, $g(x)$ resulta continua en \mathbb{R} , ya que $g(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 2$ y, por lo tanto, $g(x)$ es continua en $x = -2$ y, además, $g(x)$ es continua a la izquierda y a la derecha de $x = -2$ (ya que toda función polinómica es continua en \mathbb{R}).

Ejercicio 6.

Decidir si la siguiente función es continua en $[-2, 5]$:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{si } x \geq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{si } x < 3 \end{cases}.$$

$$h(3) = 3^2 - 3$$

$$h(3) = 9 - 3$$

$$h(3) = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{9 - 9}{0} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x + 3 = 3 + 3 = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6.$$

$$h(-2) = \frac{(-2)^2 - 9}{-2 - 3}$$

$$h(-2) = \frac{4 - 9}{-5}$$

$$h(-2) = \frac{-5}{-5}$$

$$h(-2) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(-2)^2 - 9}{-2 - 3} = \frac{4 - 9}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

$$h(5) = 5^2 - 3$$

$$h(5) = 25 - 3$$

$$h(5) = 22.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} x^2 - 3 = 5^2 - 3 = 25 - 3 = 22.$$

Por lo tanto, ya que $h(x)$ es continua en todos los puntos interiores $(-2, 5)$, continua por la derecha en $x = -2$ y continua por la izquierda en $x = 5$, $h(x)$ es continua en $[-2, 5]$.