Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 7: Intervalos de Confianza.

Ejercicio 1.

Un proceso novedoso para elaborar gasolina ecológica toma biomasa en la forma de sacarosa y la convierte en gasolina usando reacciones catalíticas. En un paso en un proceso de la planta piloto, un ingeniero químico mide la salida de cadenas de carbono de longitud tres. Nueve corridas con el mismo catalizador dieron los rendimientos (en galones): 0.62, 2.64, 1.85, 1.68, 1.09, 1.67, 0.73, 1.04, 0.68. Suponer que el rendimiento tiene una distribución normal.

(a) *¿Qué puede afirmar el ingeniero químico con 95% de confianza acerca del error máximo, si usa la media muestral para estimar el verdadero rendimiento medio?*

Modelización:

X_i: "rendimiento (en galones) de un catalizador en la i-ésima corrida", i= 1, 2, … , 9.

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i= 1, 2, … , 9.

Error máximo:

$\bar{X}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$\bar{X}= \frac{12}{9}$
$\bar{X}= \frac{4}{3}$
$\bar{X}= 1,\hat{3}$.

$S^2= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$
$S^2= \frac{3,6528}{9-1}$
$S^2= \frac{3,6528}{8}$
$S^2= 0,4566$.

S= $\sqrt{S^2}$
S= $\sqrt{0,4566}$
S= 0,6757.

$\frac{L}{2}= t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$
$\frac{L}{2}= 2,306 \frac{0,6757}{\sqrt{9}}$
$\frac{L}{2}= 2,306 \frac{0,6757}{3}$
$\frac{L}{2}= 2,306 * 0,2252$
$\frac{L}{2}= 0,5194$.

Por lo tanto, lo que puede afirmar el ingeniero químico con 95% de confianza acerca del error máximo, si usa la media muestral para estimar el verdadero rendimiento medio, es que este error es igual a 0,5194.

(b) *Obtener un intervalo de confianza del 95% para el verdadero rendimiento medio del proceso de la planta piloto.*

<u>Modelización:</u>

$\bar{X}$: “rendimiento (en galones) promedio de un catalizador de una muestra de n corridas”.

$\bar{X} \sim \mathcal{N}\ (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

<u>Pivote:</u>

T= $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$.

<u>Intervalo de confianza:</u>

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq$ T $\leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α
P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α
P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}$ - $\mu \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α
P ($-\bar{X}$ - $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X}$ + $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α
P ($\bar{X}$ - $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}$ + $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α.

$IC_{\mu}^{95\%}$= [1,$\hat{3}$ - $t_{0,025,8}\ \frac{0,6757}{\sqrt{9}}$; 1,$\hat{3}$ + $t_{0,025,8}\ \frac{0,6757}{\sqrt{9}}$]
$IC_{\mu}^{95\%}$= [1,$\hat{3}$ - 2,306 $\frac{0,6757}{3}$; 1,$\hat{3}$ + 2,306 $\frac{0,6757}{3}$]
$IC_{\mu}^{95\%}$= [1,$\hat{3}$ - 2,306 * 0,2252; 1,$\hat{3}$ + 2,306 * 0,2252]
$IC_{\mu}^{95\%}$= [1,$\hat{3}$ - 0,5194; 1,$\hat{3}$ + 0,5194]
$IC_{\mu}^{95\%}$= [-0,8139; 1,8527].

Juan Menduiña

Ejercicio 2.

Se calculan tres intervalos de confianza para la media de la fuerza de corte (en ksi) de pernos de anclaje de un tipo dado, todos de la misma muestra. Los intervalos son: (4.01, 6.02); (4.20, 5.83) y (3.57, 6.46). Los niveles de los intervalos son 90%, 95% y 99%. ¿Qué intervalo tiene cada nivel? Justificar.

- El intervalo (4,01; 6,02) tiene el nivel de confianza de 95%.
- El intervalo (4,20; 5,83) tiene el nivel de confianza de 90%.
- El intervalo (3,57; 6,46) tiene el nivel de confianza de 99%.

La justificación se basa en la relación directa entre el nivel de confianza y la amplitud del intervalo de confianza. Cuanto mayor es el nivel de confianza, mayor es el intervalo necesario para cubrir el parámetro con la certeza deseada.

Ejercicio 3.

En una muestra aleatoria de 100 baterías producidas por cierto método, el promedio del tiempo de vida fue de 150 horas y la desviación estándar de 25 horas.

(a) *Determinar un intervalo de confianza de 95% para la media del tiempo de vida de las baterías producidas por este método.*

Modelización:

X_i: "tiempo de vida (en horas) de la i-ésima batería", i= 1, 2, … , 100.
$\bar{X}$: "tiempo de vida (en horas) promedio de una batería de una muestra de n baterías".

$\bar{X} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (μ, $\frac{\sigma^2}{n}$), por TCL.

Pivote:

Z= $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL.

Intervalo de confianza:

P (-$z_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ Z $\leq z_{\frac{\alpha}{2}}$)$\cong$ 1 - α
P (-$z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$)$\cong$ 1 - α
P (-$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}$ - $\mu \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$)$\cong$ 1 - α
P (-$\bar{X}$ - $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq$ -$\mu \leq$ -$\bar{X}$ + $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$)$\cong$ 1 - α
P ($\bar{X}$ - $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}$ + $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$)$\cong$ 1 - α.

$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [150 - $z_{0,025} \frac{25}{\sqrt{100}}$; 150 + $z_{0,025} \frac{25}{\sqrt{100}}$]
$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [150 - 1,96 $\frac{25}{10}$; 150 + 1,96 $\frac{25}{10}$]
$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [150 - 1,96 * 2,5; 150 + 1,96 * 2,5]
$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [150 - 4,9; 150 + 4,9]
$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [145,1; 154,9].

(b) *Un ingeniero afirma que la media del tiempo de vida está entre 147 y 153 horas. ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?*

$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{L}{2}$
$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{25}{\sqrt{100}} = \frac{153-147}{2}$
$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{25}{10} = \frac{6}{2}$

$2,5 z_{\frac{\alpha}{2}} = 3$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{2,5}$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,2$.

P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= P (Z $<$ 1,2) - P (Z $\leq$ -1,2)
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= P (Z $<$ 1,2) - [1 - P (Z $\leq$ 1,2)]
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= P (Z $<$ 1,2) - 1 + P (Z $\leq$ 1,2)
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= 2 P (Z $\leq$ 1,2) - 1
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= 2 F (1,2) - 1
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)$\cong$ 2 * 0,8849 - 1
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)$\cong$ 1,7698 - 1
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)$\cong$ 0,7698.

$IC_{\mu}^{\cong 76,98\%}$= [147, 153].

Por lo tanto, esta afirmación se puede hacer con, aproximadamente, 76,98% de confianza.

Ejercicio 4.

Las siguientes mediciones se registraron para el tiempo de secado, en horas, de cierta marca de pintura látex: 3.4, 2.5, 4.8, 2.9, 3.6, 2.8, 3.3, 5.6, 3.7, 2.8, 4.4, 4.0, 5.2, 3.0, 4.8. Suponiendo que las mediciones representan una muestra aleatoria de una población normal, encontrar un intervalo de confianza de nivel 99% para la media de los tiempos de secado.

Modelización:

X_i: "tiempo de secado (en horas) de cierta marca de pintura látex en la i-ésima medición", i= 1, 2, … , 15.
$\bar{X}$: "tiempo de secado (en horas) promedio de cierta marca de pintura látex de una muestra de n mediciones".

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i= 1, 2, … , 15.
$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Pivote:

T= $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$.

Intervalo de confianza:

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq$ T $\leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α
P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α
P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α
P ($-\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α
P ($\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α.

$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\widehat{6}$ - $t_{0{,}005,14} \frac{0{,}942\widehat{6}}{\sqrt{15}}$; 3,78$\widehat{6}$ + $t_{0{,}005,14} \frac{0{,}942\widehat{6}}{\sqrt{15}}$]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\widehat{6}$ - 2,977 $\frac{0{,}942\widehat{6}}{\sqrt{15}}$; 3,78$\widehat{6}$ + 2,977 $\frac{0{,}942\widehat{6}}{\sqrt{15}}$]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\widehat{6}$ - 2,977 $\frac{0{,}942\widehat{6}}{3{,}873}$; 3,78$\widehat{6}$ + 2,977 $\frac{0{,}942\widehat{6}}{3{,}873}$]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\widehat{6}$ - 2,977 * 0,2434; 3,78$\widehat{6}$ + 2,977 * 0,2434]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\widehat{6}$ - 0,7246; 3,78$\widehat{6}$ + 0,7246]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,0621; 4,5113].

Ejercicio 5.

Se prueban dos fórmulas diferentes de un combustible oxigenado para motor en cuanto al octanaje. La varianza del octanaje para la fórmula 1 es σ_1^2= 1,5, mientras que para la fórmula 2 es σ_2^2= 1,2. Se prueban dos muestras aleatorias de tamaño n_1= 15 y n_2= 20. Los octanajes promedio observados son $\bar{X}_1$= 89,6 y $\bar{X}_2$= 92,5. Suponer que las muestras provienen de poblaciones normales.

(a) *Construir un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en el octanaje promedio.*

Modelización:

$X_{1,i}$: "octanaje de un combustible oxigenado para el i-ésimo motor para la fórmula 1", i= 1, 2, … , 15.
$X_{2,i}$: "octanaje de un combustible oxigenado para el i-ésimo motor para la fórmula 2", i= 1, 2, … , 20.
$\bar{X}_1$: "octanaje promedio de un combustible oxigenado para motor para la fórmula 1 de una muestra de n motores".
$\bar{X}_2$: "octanaje promedio de un combustible oxigenado para motor para la fórmula 2 de una muestra de n motores".

$X_{1,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_1, σ_1^2), i= 1, 2, … , 15.
$X_{2,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_2, σ_2^2), i= 1, 2, … , 20.
$\bar{X}_1 \sim \mathcal{N}$ (μ_1, $\frac{\sigma_1^2}{n_1}$).
$\bar{X}_2 \sim \mathcal{N}$ (μ_2, $\frac{\sigma_2^2}{n_2}$).
$\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2 \sim \mathcal{N}$ (μ_1 - μ_2, $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$)

Pivote:

$$Z= \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N} (0, 1).$$

Intervalo de confianza:

$$P (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}})= 1 - \alpha$$
$$P (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}})= 1 - \alpha$$
$$P (-z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})= 1 - \alpha$$
$$P (-(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq -(\mu_1 - \mu_2) \leq -(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})= 1 - \alpha$$

P $((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}) = 1 - \alpha$.

$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [(89,6 - 92,5) - $z_{0,025} \sqrt{\frac{1,5}{15} + \frac{1,2}{20}}$; (89,6 - 92,5) + $z_{0,025} \sqrt{\frac{1,5}{15} + \frac{1,2}{20}}$]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-2,9 - 1,96 $\sqrt{0,1 + 0,06}$; -2,9 + 1,96 $\sqrt{0,1 + 0,06}$]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-2,9 - 1,96 $\sqrt{0,16}$; -2,9 + 1,96 $\sqrt{0,16}$]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-2,9 - 1,96 * 0,4; -2,9 + 1,96 * 0,4]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-2,9 - 0,784; -2,9 + 0,784]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-3,684; -2,116].

(b) *Si se toma $n_1 = n_2$, ¿qué tamaño de muestra se necesitaría para que la longitud del intervalo se reduzca a la mitad del encontrado en (a)?*

L= $2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
L= 2 * 1,96 $\sqrt{\frac{1,5}{15} + \frac{1,2}{20}}$
L= 2 * 1,96 $\sqrt{0,1 + 0,06}$
L= 2 * 1,96 $\sqrt{0,16}$
L= 2 * 1,96 * 0,4
L= 1,568.

l= $\frac{L}{2}$
l= $\frac{1,568}{2}$
l= 0,784.

$2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \leq$ l
$2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}} \leq$ l
$2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sqrt{n}} \leq$ l
$\sqrt{n} \geq \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{l}$
n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{l})^2$.

n $\geq (\frac{2*1,96\sqrt{1,5+1,2}}{0,784})^2$
n $\geq (\frac{2*1,96\sqrt{2,7}}{0,784})^2$
n $\geq (\frac{2*1,96*1,643}{0,784})^2$
n $\geq (\frac{6,441}{0,784})^2$

$n \geq 8{,}216^2$
$n \geq 67{,}5$.

Por lo tanto, si se toma $n_1 = n_2$, el tamaño de muestra que se necesitaría para que la longitud del intervalo se reduzca a la mitad del encontrado en (a) es 68.

Ejercicio 6.

Se comparan las resistencias de dos clases de hilo. Cincuenta piezas de cada clase de hilo se prueban bajo condiciones similares. La marca A tiene una resistencia a la tensión promedio de 78,3 kg con una desviación estándar de 5,6 kg; en tanto que la marca B tiene una resistencia a la tensión promedio de 87,2 kg con una desviación estándar de 6,3 kg. Construir un intervalo de confianza de 95% para la diferencia de las medias poblacionales.

Modelización

$X_{A,i}$: "resistencia a la tensión (en kg.) de la i-ésima pieza de hilo de la marca A", i= 1, 2, … , 50.
$X_{B,i}$: "resistencia a la tensión (en kg.) de la i-ésima pieza de hilo de la marca B", i= 1, 2, … , 50.
$\bar{X}_A$: "resistencia a la tensión (en kg.) promedio de una pieza de hilo de la marca A de una muestra de n piezas de hilo".
$\bar{X}_B$: "resistencia a la tensión (en kg.) promedio de una pieza de hilo de la marca B de una muestra de n piezas de hilo".

$\bar{X}_A \sim^{aprox} \mathcal{N}$ $(\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{n_A})$, por TCL.

$\bar{X}_B \sim^{aprox} \mathcal{N}$ $(\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{n_B})$, por TCL.

$\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B \sim^{aprox} \mathcal{N}$ $(\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B})$, por TCL.

Pivote:

$$Z= \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (0, 1), \text{ por TCL.}$$

Intervalo de confianza:

$$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \cong 1 - \alpha$$

$$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \cong 1 - \alpha$$

$$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}) \cong 1 - \alpha$$

$$P\ (-(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq -(\mu_A - \mu_B) \leq -(\bar{X}_A - \bar{X}_B) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}) \cong 1 - \alpha$$

$$P\ ((\bar{X}_A - \bar{X}_B) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}) \cong 1 - \alpha.$$

$$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%} = [(78,3 - 87,2) - z_{0,025} \sqrt{\frac{5,6^2}{50}+\frac{6,3^2}{50}}; (78,3 - 87,2) + z_{0,025} \sqrt{\frac{5,6^2}{50}+\frac{6,3^2}{50}}]$$

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 1,96 $\sqrt{\frac{31,6}{50}+\frac{39,69}{50}}$; -8,9 + 1,96 $\sqrt{\frac{31,6}{50}+\frac{39,69}{50}}$]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 1,96 $\sqrt{\frac{71,29}{50}}$; -8,9 + 1,96 $\sqrt{\frac{71,29}{50}}$]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 1,96 $\sqrt{1,4258}$; -8,9 + 1,96 $\sqrt{1,4258}$]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 1,96 * 1,1941; -8,9 + 1,96 * 1,1941]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 2,34; -8,9 + 2,34]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-11,24; -6,56].

Ejercicio 7.

Una determinada empresa de material fungible puede adquirir los cartuchos de tóner de impresora de dos proveedores distintos. Con el fin de determinar a qué proveedor comprar se toma una muestra de tamaño 12 de cada uno de los proveedores obteniendo los siguientes resultados (número de hojas impresas):

- *Proveedor A: $\bar{X}_A$= 5459, S_A^2= 33703.*
- *Proveedor B: $\bar{X}_B$= 5162, S_B^2= 199928.*

Si se supone que las poblaciones son normales con varianzas iguales construir un intervalo de confianza de nivel 95% para la diferencia entre el número medio de hojas que imprime el cartucho de cada proveedor.

Modelización:

$X_{A,i}$: "número de hojas impresas del proveedor A en la i-ésima observación", i= 1, 2, … , 12.
$X_{B,i}$: "número de hojas impresas del proveedor B en la i-ésima observación", i= 1, 2, … , 12.
$\bar{X}_A$: "número de hojas impresas promedio del proveedor A de una muestra de n observaciones".
$\bar{X}_B$: "número de hojas impresas promedio del proveedor B de una muestra de n observaciones".

$X_{A,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_A, σ_A^2= σ^2), i= 1, 2, … , 12.
$X_{B,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_B, σ_B^2= σ^2), i= 1, 2, … , 12.
$\bar{X}_A \sim \mathcal{N}$ (μ_A, $\frac{\sigma_A^2}{n_A}$= $\frac{\sigma^2}{n_A}$).
$\bar{X}_B \sim \mathcal{N}$ (μ_B, $\frac{\sigma_B^2}{n_B}$= $\frac{\sigma^2}{n_B}$).
$\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B \sim \mathcal{N}$ (μ_A - μ_B, $\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}$= $\frac{\sigma^2}{n_A} + \frac{\sigma^2}{n_B}$).

Pivote:

$$T= \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A+n_B-2},$$

donde:

$$S_p^2= \frac{(n_A-1)S_A^2+(n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2}$$
$$S_p^2= \frac{(12-1)*33703+(12-1)*199928}{12+12-2}$$
$$S_p^2= \frac{11*33703+11*199928}{22}$$
$$S_p^2= \frac{11(33703+199928)}{22}$$
$$S_p^2= \frac{33703+199928}{2}$$

$S_p^2 = \frac{233631}{2}$
$S_p^2 = 116815,5.$

$S_p = \sqrt{S_p^2}$
$S_p = \sqrt{116815,5}$
$S_p = 341,783.$

<u>Intervalo de confianza:</u>

P $(-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2} \leq T \leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}) = 1 - \alpha$
P $(-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2} \leq \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}) = 1 - \alpha$
P $(-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B) \leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha$
P $(-(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq -(\mu_A - \mu_B) \leq -(\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha$
P $((\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha.$

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [(5459 - 5162) - t_{0,025,22} * 341,783 \sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}; (5459 - 5162) + t_{0,025,22} * 341,783 \sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [297 - 2,074 * 341,783 \sqrt{\frac{1}{6}}; 297 + 2,074 * 341,783 \sqrt{\frac{1}{6}}]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [297 - 2,074 * 341,783 * 0,408; 297 + 2,074 * 341,783 * 0,408]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [297 - 289,39; 297 + 289,39]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [7,61; 586,39].$

Ejercicio 8.

Dos empresas competidoras (A y B) en un mismo sector han puesto en marcha, casi simultáneamente, páginas de internet para la venta electrónica. Se han elegido al azar ocho clientes que han visitado la página A y, de manera independiente, otros ocho que han visitado la B y se ha medido el tiempo (en minutos) de la duración de la visita de cada cliente. Los resultados fueron los siguientes:

- *Página A: 2.3, 3.5, 4.2, 3.2, 4.4, 2.1, 1.6, 5.3.*
- *Página B: 1.3, 2.3, 4.4, 3.7, 2.8, 6.5, 3.6, 4.5.*

Suponer que los datos provienen de poblaciones normales. Construir un intervalo de confianza de nivel 99% para la diferencia entre los tiempos medios.

Modelización:

$X_{A,i}$: "tiempo (en minutos) de la duración de la visita del i-ésimo cliente en la página A", i= 1, 2, … , 8.
$X_{B,i}$: "tiempo (en minutos) de la duración de la visita del i-ésimo cliente en la página B", i= 1, 2, … , 8.
$\bar{X}_A$: "tiempo (en minutos) promedio de la duración de la visita de un cliente en la página A de una muestra de n clientes".
$\bar{X}_B$: "tiempo (en minutos) promedio de la duración de la visita de un cliente en la página B de una muestra de n clientes".

$X_{A,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_A, σ_A^2), i= 1, 2, … , 8.
$X_{B,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_B, σ_B^2), i= 1, 2, … , 8.
$\bar{X}_A \sim \mathcal{N}$ $(\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{n_A})$.
$\bar{X}_B \sim \mathcal{N}$ $(\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{n_B})$.
$\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B \sim \mathcal{N}$ $(\mu_A$ - $\mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B})$.

Pivote:

T= $\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}} \sim^{aprox} t_v$, por v aproximado al entero más próximo,

donde:

$\bar{X}_A$= 3,325; S_A^2= 1,628; n_A= 8.
$\bar{X}_B$= 3,6375; S_B^2= 2,497; n_B= 8.

v= $\frac{(\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B})^2}{\frac{(\frac{S_A^2}{n_A})^2}{n_A-1}+\frac{(\frac{S_B^2}{n_B})^2}{n_B-1}}$

v= $\frac{(\frac{1,628}{8}+\frac{2,497}{8})^2}{\frac{(\frac{1,628}{8})^2}{8-1}+\frac{(\frac{2,497}{8})^2}{8-1}}$

v= $\frac{(0,2035+0,3121)^2}{\frac{0,2035^2}{7}+\frac{0,3121^2}{7}}$

v= $\frac{0,5156^2}{\frac{0,0414}{7}+\frac{0,0974}{7}}$

v= $\frac{0,2658}{\frac{0,1388}{7}}$

v= $\frac{0,2658}{0,0198}$

v= 13,4049.

Intervalo de confianza:

P (-$t_{\frac{\alpha}{2},v}$ $\leq$ T $\leq$ $t_{\frac{\alpha}{2},v}$)$\cong$ 1 - α

P (-$t_{\frac{\alpha}{2},v}$ $\leq \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},v}$)$\cong$ 1 - α

P (-$t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}} \leq (\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B)$ - $(\mu_A$ - $\mu_B) \leq t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}$)$\cong$ 1 - α

P (-($\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B$) - $t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}} \leq$ -(μ_A - μ_B) $\leq$ -($\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B$) + $t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}$)$\cong$ 1 - α

P (($\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B$) - $t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}} \leq \mu_A$ - $\mu_B \leq$ ($\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B$) + $t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}$)$\cong$ 1 - α.

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [(3,325 - 3,6375) - $t_{0,005,13} \sqrt{\frac{1,628}{8}+\frac{2,497}{8}}$; (3,325 - 3,6375) + $t_{0,005,13} \sqrt{\frac{1,628}{8}+\frac{2,497}{8}}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-0,3125 - 3,012 $\sqrt{\frac{4,125}{8}}$; -0,3125 + 3,012 $\sqrt{\frac{4,125}{8}}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-0,3125 - 3,012 $\sqrt{0,515625}$; -0,3125 + 3,012 $\sqrt{0,515625}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-0,3125 - 3,012 * 0,718; -0,3125 + 3,012 * 0,718]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-0,3125 - 2,163; -0,3125 + 2,163]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-2,4753; 1,8503].

Ejercicio 9.

Una muestra de 10 camiones diesel fue operada tanto caliente como fría para calcular la diferencia en el ahorro de combustible. Los resultados, en millas/galón, se presentan en la tabla siguiente:

Camión	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
caliente	*4,56*	*4,46*	*6,49*	*5,37*	*6,25*	*5,90*	*4,12*	*3,85*	*4,15*	*4,69*
frío	*4,26*	*4,08*	*5,83*	*4,96*	*5,87*	*5,32*	*3,92*	*3,69*	*3,74*	*4,19*

Determinar un intervalo de confianza de 98% para la diferencia en la media del millaje entre motores calientes y fríos. Asumir que la muestra de las diferencias entre motores calientes y fríos es aproximadamente normal.

Modelización:

$X_{c,i}$: "ahorro de combustible (en millas/galón) del i-ésimo camión diesel operado en caliente", i= 1, 2, … , 10.
$X_{f,i}$: "ahorro de combustible (en millas/galón) del i-ésimo camión diesel operado en frío", i= 1, 2, … , 10.
X_{Di}: "diferencia de ahorro de combustible (en millas/galón) del i-ésimo camión diesel operado en caliente versus operado en frío", i= 1, 2, … , 10.
$\bar{X}_D$: "diferencia de ahorro de combustible (en millas/galón) promedio de un camión diesel operado en caliente versus operado en frío de una muestra de n camiones diesel".

$X_{Di} \sim \mathcal{N}$ (μ_D, σ_D^2).
$\bar{X}_D \sim \mathcal{N}$ $(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n})$.

Pivote:

T= $\frac{\bar{X}_D-\mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$,

donde:

Camión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
caliente	4,56	4,46	6,49	5,37	6,25	5,90	4,12	3,85	4,15	4,69
frío	4,26	4,08	5,83	4,96	5,87	5,32	3,92	3,69	3,74	4,19
diferencia	0,3	0,38	0,66	0,41	0,38	0,58	0,2	0,16	0,41	0,5

$\bar{X}_D$= 0,398; S_D= 0,1558.

Intervalo de confianza:

P $(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \mathrm{T} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1})$= 1 - α
P $(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{\bar{X}_D-\mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1})$= 1 - α

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_D$ - $\mu_D \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$)= 1 - α

P ($-\bar{X}_D$ - $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq -\mu_D \leq -\bar{X}_D + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$)= 1 - α

P ($\bar{X}_D$ - $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{X}_D + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$)= 1 - α.

$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,398 - $t_{0,01,9} \frac{0,1558}{\sqrt{10}}$; 0,398 + $t_{0,01,9} \frac{0,1558}{\sqrt{10}}$]

$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,398 - 2,821 $\frac{0,1558}{3,1623}$; 0,398 + 2,821 $\frac{0,1558}{3,1623}$]

$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,398 - 2,821 * 0,0493; 0,398 + 2,821 * 0,0493]

$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,398 - 0,139; 0,398 + 0,139]

$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,259; 0,537].

Ejercicio 10.

Para los datos del Ejercicio 4:

(a) *Construir un intervalo de confianza de 99% para la varianza del tiempo de secado real.*

Modelización:

X_i: "tiempo de secado (en horas) de cierta marca de pintura látex en la i-ésima medición", i= 1, 2, … , 15.

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2), i= 1, 2, … , 15.

Pivote:

X= $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Intervalo de confianza para σ^2:

P ($\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq$ X $\leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α

P ($\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α

P ($\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2}$)= 1 - α

P ($\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$)= 1 - α.

$IC_{\sigma^2}^{99\%}$= [$\frac{(15-1)*0,9426^2}{\chi^2_{0,005,14}}$; $\frac{(15-1)*0,9426^2}{\chi^2_{0,995,14}}$]

$IC_{\sigma^2}^{99\%}$= [$\frac{14*0,8885}{31,3}$; $\frac{14*0,8885}{4,07}$]

$IC_{\sigma^2}^{99\%}$= [$\frac{12,439}{31,3}$; $\frac{12,439}{4,07}$]

$IC_{\sigma^2}^{99\%}$= [0,397; 3,056].

(b) *Construir un intervalo de confianza de 99% para la desviación estándar del tiempo de secado real.*

Intervalo de confianza para σ:

P ($\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}$)= 1 - α.

$IC_{\sigma}^{99\%}$= [$\sqrt{0,397}$; $\sqrt{3,056}$]

$IC_{\sigma}^{99\%}$= [0,63; 1,748].

Ejercicio 11.

Para los datos del Ejercicio 8, hallar un intervalo de confianza de nivel de 95% para el cociente de las varianzas de los tiempos de visita.

Modelización:

$X_{A,i}$: "tiempo (en minutos) de la duración de la visita del i-ésimo cliente en la página A", i= 1, 2, … , 8.
$X_{B,i}$: "tiempo (en minutos) de la duración de la visita del i-ésimo cliente en la página B", i= 1, 2, … , 8.

$X_{A,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_A, σ_A^2), i= 1, 2, … , 8.
$X_{B,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_B, σ_B^2), i= 1, 2, … , 8.

Pivote:

$$F= \frac{\frac{S_B^2}{\sigma_B^2}}{\frac{S_A^2}{\sigma_A^2}} \sim f_{n_B-1,n_A-1}.$$

Intervalo de confianza:

$$P\ (f_{1-\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1} \leq F \leq f_{\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1})= 1 - \alpha$$
$$P\ (f_{1-\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1} \leq \frac{\frac{S_B^2}{\sigma_B^2}}{\frac{S_A^2}{\sigma_A^2}} \leq f_{\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1})= 1 - \alpha$$
$$P\ (f_{1-\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1} \frac{S_A^2}{S_B^2} \leq \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \leq f_{\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1} \frac{S_A^2}{S_B^2})= 1 - \alpha.$$

$$IC_{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}^{95\%}= [f_{0,975,7,7} \frac{1,628}{2,497}; f_{0,025,7,7} \frac{1,628}{2,497}]$$
$$IC_{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}^{95\%}= [0,2 * 0,652; 4,99 * 0,652]$$
$$IC_{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}^{95\%}= [0,13; 3,253].$$

Ejercicio 12.

Un fabricante de calculadoras electrónicas está interesado en estimar la fracción de unidades defectuosas que se producen. Una muestra aleatoria de 800 calculadoras incluye 18 defectuosas. Calcular un intervalo de confianza de nivel 99% para la verdadera fracción de unidades defectuosas.

Modelización:

X_i: "i-ésima calculadora electrónica producida defectuosa (1 si defectuosa, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , 800.
$\hat{P}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$: "proporción de calculadoras electrónicas producidas defectuosas de una muestra de n calculadoras electrónicas producidas".

$X_i \sim$ B (1, p), i= 1, 2, … , 800.
$\hat{P} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p, $\frac{p(1-p)}{n}$), por TCL.

Pivote:

Z= $\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL,

donde:

$\hat{P}= \frac{18}{800}$
$\hat{P}$= 0,0225.

Intervalo de confianza:

P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ Z $\leq z_{\frac{\alpha}{2}}$)$\cong$ 1 - α
P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$)$\cong$ 1 - α
P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq \hat{P}$ - p $\leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$)$\cong$ 1 - α
P ($-\hat{P}$ - $z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq$ -p $\leq -\hat{P}$ + $z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$)$\cong$ 1 - α
P ($\hat{P}$ - $z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq$ p $\leq \hat{P}$ + $z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$)$\cong$ 1 - α.

$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - $z_{0,005} \sqrt{\frac{0,0225(1-0,0225)}{800}}$; 0,0225 + $z_{0,005} \sqrt{\frac{0,0225(1-0,0225)}{800}}$]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 2,575 $\sqrt{\frac{0,0225*0,9775}{800}}$; 0,0225 + 2,575 $\sqrt{\frac{0,0225*0,9775}{800}}$]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 2,575 $\sqrt{\frac{0,02199375}{800}}$; 0,0225 + 2,575 $\sqrt{\frac{0,02199375}{800}}$]

$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 2,575 $\sqrt{0,0000274921875}$; 0,0225 + 2,575 $\sqrt{0,0000274921875}$]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 2,575 * 0,0052; 0,0225 + 2,575 * 0,0052]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 0,0135; 0,0225 + 0,0135]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,009; 0,99].

Ejercicio 13.

(a) *Suponer que se quiere estimar qué porcentaje de todos los conductores excede el límite de velocidad de 80 km/h en cierto tramo del camino. ¿Qué tan grande debe ser la muestra para tener, al menos, 99% de confianza de que el error de su estimación es, a lo sumo, de 3,5%?*

X_i: "i-ésimo conductor que excede el límite de velocidad de 80 km/h (1 si excede, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , n.
$\hat{P}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$: "proporción de conductores que exceden el límite de velocidad de 80 km/h de una muestra de n conductores".

$X_i \sim$ B (1, p), i= 1, 2, … , n.
$\hat{P} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p, $\frac{p(1-p)}{n}$), por TCL.

$2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq$ l
$2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{\sqrt{n}} \leq$ l
$\sqrt{n} \geq \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{l}$
n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{l})^2$
n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2\ \hat{P}$ (1 - $\hat{P}$)
n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$ 0,5 (1 - 0,5)
n $\geq$ 4 $(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$ 0,5 * 0,5
n $\geq$ 4 $(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$ 0,25
n $\geq (\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$.

n $\geq (\frac{2,575}{2*0,035})^2$
n $\geq (\frac{2,575}{0,07})^2$
n $\geq 36,79^2$
n $\geq$ 1353,19.

Por lo tanto, la muestra, para tener, al menos, 99% de confianza de que el error de su estimación es, a lo sumo, de 3,5% debe ser mayor o igual a 1354.

(b) *¿Cómo se vería afectado el tamaño de la muestra requerida, si se sabe que el porcentaje a estimar es, a lo sumo, de 40%?*

$2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq$ l

$2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{\sqrt{n}} \leq$ l

$\sqrt{n} \geq \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{l}$

n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{l})^2$

n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$ $\hat{P}$ (1 - $\hat{P}$).

n $\geq (\frac{2{,}575}{2*0{,}035})^2$ 0,4 (1 - 0,4)

n $\geq 36{,}79^2$ * 0,4 * 0,6

n ≥ 1353,19 * 0,4 * 0,6

n ≥ 324,77.

Por lo tamaño, si se sabe que el porcentaje a estimar es, a lo sumo, de 40%, el tamaño de la muestra requerida debe ser mayor o igual a 325.

Ejercicio 14.

En una prueba del efecto de la humedad en conexiones eléctricas, se probaron 100 conexiones eléctricas bajo condiciones húmedas y 150 en condiciones secas. Veinte de las primeras fallaron y sólo diez de las segundas no pasaron la prueba. Determinar un intervalo de confianza de 90% para la diferencia entre las proporciones de las conexiones que fallaron, húmedas y secas.

Modelización:

$X_{1,i}$: "i-ésima conexión eléctrica fallida bajo condiciones húmedas (1 si fallida, 0 c.c.)", i= 1, 2, … 100.
$X_{2,i}$: "i-ésima conexión eléctrica fallida bajo condiciones secas (1 si fallida, 0 c.c.)", i= 1, 2, … 150.
$\hat{P}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}}{n_1}$: "proporción de conexiones eléctricas fallidas bajo condiciones húmedas en una muestra de n conexiones eléctricas".
$\hat{P}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}}{n_2}$: "proporción de conexiones eléctricas fallidas bajo condiciones secas en una muestra de n conexiones eléctricas".

$X_{1,i} \sim$ B (1, p_1), i= 1, 2, … 100.
$X_{2,i} \sim$ B (1, p_2), i= 1, 2, … 150.
$\hat{P}_1 \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_1, $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}$), por TCL.
$\hat{P}_2 \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_2, $\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$), por TCL.
$\hat{P}_1$ - $\hat{P}_2 \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_1 - p_2, $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}$ + $\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$), por TCL.

Pivote:

Z= $\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL,

donde:

$\hat{P}_1 = \frac{20}{100}$
$\hat{P}_1$= 0,2.

$\hat{P}_2 = \frac{10}{150}$
$\hat{P}_2$= 0,0$\hat{6}$.

Intervalo de confianza:

P (-$z_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ Z $\leq z_{\frac{\alpha}{2}}$)$\cong$ 1 - α
P (-$z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$)$\cong$ 1 - α

P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$) $\cong$ 1 - α

P ($-(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \leq -(p_1 - p_2) \leq -(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$) $\cong$ 1 - α

P ($(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \leq p_1 - p_2 \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$) $\cong$ 1 - α.

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [(0,2 - 0,0$\hat{6}$) - $z_{0,05}$ $\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{100}+\frac{0,0\hat{6}(1-0,0\hat{6})}{150}}$; (0,2 - 0,0$\hat{6}$) + $z_{0,05}$ $\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{100}+\frac{0,0\hat{6}(1-0,0\hat{6})}{150}}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 $\sqrt{\frac{0,2*0,8}{100}+\frac{0,0\hat{6}*0,9\hat{3}}{150}}$; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 $\sqrt{\frac{0,2*0,8}{100}+\frac{0,0\hat{6}*0,9\hat{3}}{150}}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 $\sqrt{\frac{0,16}{100}+\frac{0,06\hat{2}}{150}}$; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 $\sqrt{\frac{0,16}{100}+\frac{0,06\hat{2}}{150}}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 $\sqrt{0,016+0,0004148}$; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 $\sqrt{0,016+0,0004148}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 $\sqrt{0,0164148}$; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 $\sqrt{0,0164148}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 * 0,1281; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 * 0,1281]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 0,2108; 0,1$\hat{3}$ + 0,2108]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [-0,077; 0,344].