

Trabajo Práctico N° 3: **Álgebra de Boole.**

Ejercicio 1.

En \mathbb{R} , se define la operación $\$$ como $a\$b = a - b + ab$. Analizar si la operación es cerrada y conmutativa en \mathbb{R} .

Cerrada:

Dado que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene estructura de Anillo, entonces, $a\$b \in \mathbb{R}$.

Conmutativa:

$$a\$b = a - b + ab$$

\neq

$$b\$a = b - a + ba.$$

Por lo tanto, la operación es cerrada, pero no es conmutativa.

Ejercicio 2.

Analizar si $(\mathbb{N}, .)$ es un grupo conmutativo.

Para que $(\mathbb{N}, .)$ sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en \mathbb{N} :

Cerrada:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da un número natural:

Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $ab \in \mathbb{N}$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $(ab)c = a(bc)$.

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número natural tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en \mathbb{N} tal que:

$$a * 1 = 1 * a = a.$$

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número natural no existe otro, único, que sumado a él dé como resultado el elemento neutro.

Conmutativa:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $ab = ba$.

Por lo tanto, $(\mathbb{N}, .)$ no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

Ejercicio 3.

Sea H un conjunto y $(P(H), \cap)$ el conjunto de Partes de H con la operación intersección. Analizar si $(P(H), \cap)$ es un grupo conmutativo.

Para que $(P(H), \cap)$ sea un grupo conmutativo, la operación \cap debe cumplir las siguientes propiedades en $P(H)$:

Cerrada:

Para cualquier par de elementos de $P(H)$, el resultado de realizar su intersección es un elemento de $P(H)$:

Si $A, B \in P(H)$, entonces, $A \cap B \in P(H)$.

Asociativa:

Para cualquier terna de elementos de $P(H)$, el resultado de realizar su intersección da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $A, B, C \in P(H)$, entonces, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Existencia de elemento neutro:

Existe un único elemento de $P(H)$ tal que realizando su intersección con cualquier otro da como resultado el mismo elemento. El elemento neutro es H , ya que existe H en $P(H)$ tal que:

$A \cap H = H \cap A = A$.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo elemento de $P(H)$ no existe otro, único, que realizando la intersección con él dé como resultado el elemento neutro.

Conmutativa:

Para cualquier par de elementos de $P(H)$, el resultado de realizar su intersección da lo mismo en cualquier orden:

Si $A, B \in P(H)$, entonces, $A \cap B = B \cap A$.

Por lo tanto, $(P(H), \cap)$ no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

Ejercicio 4.

Demostrar que $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo. Indicar por qué (\mathbb{R}, \cdot) no es un grupo.

Para que $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en $\mathbb{R} - \{0\}$:

Cerrada:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da un número real distinto de cero:

Si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces, $ab \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números reales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces, $(ab)c = a(bc)$.

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número real distinto de cero tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en $\mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

$$a * 1 = 1 * a = a.$$

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número real distinto de cero existe otro, único, que multiplicado a él da como resultado el elemento neutro:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ entonces, } a \frac{1}{a} = \frac{1}{a} a = 1.$$

Conmutativa:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ entonces, } ab = ba.$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo. Por otra parte, (\mathbb{R}, \cdot) no es un grupo porque no se cumple la propiedad de existencia de elemento opuesto (no existe elemento opuesto para el 0).

Ejercicio 5.

Sea $E = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x \text{ es par}\}$. Demostrar que $(E, +, \cdot)$ es un anillo.

Para que $(E, +, \cdot)$ sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en E :

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da un número entero par:

Si $a, b \in E$, entonces, $a + b \in E$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in E$, entonces, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en E tal que:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si $a \in E$, entonces, $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Conmutativa:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si $a, b \in E$, entonces, $a + b = b + a$.

Para que $(E, +, \cdot)$ sea un anillo, por otro lado, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en E :

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da un número entero par:

Si $a, b \in E$, entonces, $ab \in E$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in E$, entonces, $(ab)c = a(bc)$.

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros pares, es posible distribuir la multiplicación respecto a la suma:

Si $a, b, c \in E$, entonces, $a(b + c) = ab + ac$ y $(b + c)a = ba + ca$.

Por lo tanto, $(E, +, \cdot)$ es un anillo.

Ejercicio 6.

Sea \otimes , la operación definida sobre los números enteros como $a \otimes b = 2ab$. Demostrar que $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ es un anillo.

Para que $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en \mathbb{Z} :

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces, $a + b \in \mathbb{Z}$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en \mathbb{Z} tal que:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces, $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Conmutativa:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces, $a + b = b + a$.

Para que $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ sea un anillo, por otro lado, la operación \otimes debe cumplir las siguientes propiedades en \mathbb{Z} :

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de realizar la operación \otimes da un número entero:

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces, $a \otimes b \in \mathbb{Z}$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de realizar la operación \otimes da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

$$\begin{aligned} \text{Si } a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ entonces, } & (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \\ & 2ab \otimes c = a \otimes (2bc) \\ & 2 * 2ab * c = 2a * (2bc) \\ & 4abc = 4abc. \end{aligned}$$

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros, es posible distribuir la operación \otimes respecto a la suma:

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces,

$$\begin{aligned} a \otimes (b + c) &= a \otimes b + a \otimes c \\ 2a(b + c) &= 2ab + 2ac \\ 2ab + 2ac &= 2ab + 2ac \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (b + c) \otimes a &= b \otimes a + c \otimes a \\ 2(b + c)a &= 2ba + 2ca \\ 2ba + 2ca &= 2ba + 2ca. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ es un anillo.

Ejercicio 7.

En el conjunto P de los números pares se definen dos operaciones, una de ellas es la suma usual y la otra ($\#$) está definida en la forma: si $x, y \in P$, $x \# y = \frac{xy}{2}$. Demostrar que $(P, +, \#)$ tiene estructura de anillo.

Para que $(P, +, \#)$ sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en P :

Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si $a, b \in P$, entonces, $a + b \in P$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in P$, entonces, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en P tal que:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si $a \in P$, entonces, $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Conmutativa:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si $a, b \in P$, entonces, $a + b = b + a$.

Para que $(P, +, \#)$ sea un anillo, por otro lado, la operación $\#$ debe cumplir las siguientes propiedades en P :

Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de realizar la operación # da un número entero:

Si $a, b \in P$, entonces, $a \# b \in P$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de realizar la operación # da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in P$, entonces, $(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$

$$\begin{aligned} \frac{ab}{2} \# c &= a \# \frac{bc}{2} \\ \frac{\frac{ab}{2} * c}{2} &= \frac{a * \frac{bc}{2}}{2} \\ \frac{\frac{2}{2} abc}{4} &= \frac{\frac{2}{2} abc}{4} \end{aligned}$$

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números pares, es posible distribuir la operación # respecto a la suma:

Si $a, b, c \in P$, entonces,

$a \# (b + c) = a \# b + a \# c$

$$\begin{aligned} \frac{a(b+c)}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \\ \frac{ab+ac}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \\ \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \end{aligned}$$

y

$(b + c) \# a = b \# a + c \# a$

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)a}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} \\ \frac{ba+ca}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} \\ \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(P, +, \#)$ tiene estructura de anillo.

Ejercicio 8.

Sean A, B, C elementos de un álgebra de Boole $G = (F, +, \cdot, ', 0, 1)$, indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, señalando los axiomas usados:

(a) $A + (AC) = (A + A)(A + C)$.

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B4) de distributividad de la suma con respecto a la multiplicación.

(b) $AB + 0 = AB$.

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(c) $CB1 = CB$.

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B6) de existencia de elemento neutro (1) de la multiplicación.

(d) $(AB)' + AB = 0$.

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B7), $(AB)' + AB = 1$.

(e) $CA(CA)' + B = B$.

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B8) y (B5), $CA(CA)' = 0$ y $0 + B = B$.

(f) $CA + 0 = 0$.

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(g) $(AB)' + AB + CC' = 1$.

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B7) y (B8), $(AB)' + AB = 1$, $CC' = 0$, $1 + 0 = 1$.

Ejercicio 9.

Sea $H = \{a, b, c, d, e\}$ y sean $\Pi = (P(H), \cup, \cap, \complement, \emptyset, H)$ el álgebra de Boole de partes de H . Los siguientes conjuntos son elementos de $P(H)$: $\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}$. Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.

		$\{b, c, d, e\}$
$\{b, c, d\}$		$\{b, d, e\}$
$\{b, c\}$	$\{b, d\}$	$\{c, d\}$
$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$
		$\{e\}$

Ejercicio 10.

Sea W el conjunto formado por las clases de 3 letras proposicionales $[p]$, $[q]$, $[r]$ y sus conjunciones, disyunciones y negaciones. Sea $\Lambda = (W, \vee, \wedge, \sim, \perp, \top)$ del álgebra de Boole del cálculo proposicional. Las siguientes proposiciones son elementos de W : $[p \wedge q]$, $[q \wedge r]$, $[p]$, $[q]$, $[r]$, $[q \vee r]$. Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.

$$\begin{array}{c} [q \vee r] \\ [p] [q] [r] \\ [p \wedge q] [q \wedge r] \end{array}$$

Ejercicio 11.

Sean $B = \mathbb{Z}$, $+$ la suma usual de enteros, \cdot el producto usual de enteros y, para cada $a \in \mathbb{Z}$, se define $a' = -a$. ¿Es $H = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ un álgebra booleana?

Para que $H = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ sea un álgebra booleana, se deben cumplir las siguientes propiedades en B . Sean $x, y, z \in B$:

- | | |
|----------------------------------|------------|
| (B1) $x + y = y + x$. | Se cumple. |
| (B2) $xy = yx$. | Se cumple. |
| (B3) $x(y + z) = xy + xz$. | Se cumple. |
| (B4) $x + yz = (x + y)(x + z)$. | Se cumple. |
| (B5) $x + 0 = x$. | Se cumple. |
| (B6) $x1 = x$. | Se cumple. |
| (B7) $x + x' = 1$. | Se cumple. |
| (B8) $xx' = 0$. | Se cumple. |

Por lo tanto, $H = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ es un álgebra booleana.

Ejercicio 12.

Demostrar que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces, $1' = 0$ y $0' = 1$.

Por el axioma (B7), se cumple que:

$$0 + 0' = 1 \text{ y} \\ 1 + 1' = 1.$$

Además, por el axioma (B5), se cumple que:

$$0' = 1 \text{ y} \\ 1' = 0.$$

Por lo tanto, queda demostrado que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces, $1' = 0$ y $0' = 1$.

Ejercicio 13.

(a) Probar la Ley de De Morgan: $(xy)' = x' + y'$.

Teniendo en cuenta que el complemento es único, se debe tener que:

$$(i) (xy) + (x' + y') = 1 \text{ y}$$

$$(ii) (xy) (x' + y') = 0.$$

Si esto se cumple, quiere decir que $(x' + y')$ es el complemento de (xy) .

(i)

$$\begin{aligned} (xy) + (x' + y') &= [(x' + y') + x] [(x' + y') + y] && \text{por axioma (B4)} \\ (xy) + (x' + y') &= [(x' + x) + y'] [(y' + y) + x'] && \text{por axioma (B1) y asociatividad} \\ (xy) + (x' + y') &= (1 + y') (1 + x') && \text{por axioma (B7)} \\ (xy) + (x' + y') &= 1 * 1 && \text{por ley de acotación} \\ (xy) + (x' + y') &= 1. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (xy) (x' + y') &= [x' (xy)] [y' (xy)] && \text{por axioma (B5)} \\ (xy) (x' + y') &= [(x'x) y] [(y'y) x] && \text{por axioma (B2) y asociatividad} \\ (xy) (x' + y') &= (0 * y) (0 * x) && \text{por axioma (B8)} \\ (xy) (x' + y') &= 0 * 0 && \text{por ley de acotación} \\ (xy) (x' + y') &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado la Ley de De Morgan $(xy)' = x' + y'$, ya que $(x' + y')$ es el complemento de (xy) .

(b) Expresar las Leyes de De Morgan en los conjuntos y en el cálculo proposicional, con los símbolos y operaciones que corresponden en cada caso.

Leyes de De Morgan en teoría de conjuntos:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Leyes de De Morgan en teoría de lógica proposicional:

$$\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

$$\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q.$$

Ejercicio 14.

Si x, y, z, w son variables de un Álgebra de Boole, simplificar (hasta su mínima expresión) las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas:

(a) $x + xy + x(x + y)$.

$x + xy + x(x + y) = x + xy + xx + xy$	por axioma (B5)
$x + xy + x(x + y) = x + xy + x + xy$	por ley de idempotencia
$x + xy + x(x + y) = x(1 + y) + x(1 + y)$	por axiomas (B6) y (B3)
$x + xy + x(x + y) = x * 1 + x * 1$	por ley de acotación
$x + xy + x(x + y) = x + x$	por axioma (B6)
$x + xy + x(x + y) = x$.	por ley de idempotencia

(b) $x' + [(xx')']$.

$x' + [(xx')'] = x' + (x' + x)$	por Ley de De Morgan
$x' + [(xx')'] = x' + 1$	por (B7)
$x' + [(xx')'] = x'$.	por ley de acotación

(c) $x(y + x')'$.

$x(y + x')' = x(y'x)$	por Ley de De Morgan
$x(y + x')' = xxy'$	por asociatividad
$x(y + x')' = xy'$.	por ley de idempotencia

(d) $[x(y'y)] + [y(x + x')]$.

$[x(y'y)] + [y(x + x')] = (x * 0) + (y * 1)$	por axiomas (B8) y (B7)
$[x(y'y)] + [y(x + x')] = 0 + y$	por ley de acotación y axioma (B6)
$[x(y'y)] + [y(x + x')] = y$.	por axioma (B5).

(e) $y'xy + y'x + ywx' + yww$.

$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'yx + y'x + ywx' + yw$ idempotencia	por asociatividad y ley de
$y'xy + y'x + ywx' + yww = 0 * x + y'x + ywx' + yw$	por axioma (B8)
$y'xy + y'x + ywx' + yww = 0 + y'x + ywx' + yw$	por ley de acotación
$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + ywx' + yw$	
$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + yw(x' + 1)$	por axiomas (B6) y (B3)
$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + yw * 1$	por ley de acotación

$$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + yw.$$

por axioma (B6)

$$(f) [(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'].$$

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = [(x'y') + z'] [z' + (x'yz)]$$

por Leyes de De Morgan e involución

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = (z' + x'y') (z' + x'yz)$$

por axioma (B1)

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + (x'y') (x'yz)$$

por axioma (B4)

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + [(x'x') (y'y) z]$$

por axioma (B2)

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + (x' * 0 * z)$$

por ley de idempotencia y por axioma (B8)

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + 0$$

por ley de acotación

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z'.$$

por axioma (B5)

Ejercicio 15.

Si x, y, z son variables de un Álgebra de Boole, demostrar que:

(a) $x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = z + xy.$

$$\begin{aligned} x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' &= x'z(y' + y) + xy'z + xy(z + z') \\ x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' &= x'z * 1 + xy'z + xy * 1 \\ x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' &= x'z + xy'z + xy \\ x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' &= z(x' + xy') + xy. \end{aligned}$$

(b) $x + (y + 0)' + y'z = x + y'.$

$$\begin{aligned} x + (y + 0)' + y'z &= x + y' + y'z \\ x + (y + 0)' + y'z &= x + y'(1 + z) \\ x + (y + 0)' + y'z &= x + y' * 1 \\ x + (y + 0)' + y'z &= x + y'. \end{aligned}$$

(c) $x + y' + (xy + 0)' = 1.$

$$\begin{aligned} x + y' + (xy + 0)' &= x + y' + (xy + 0)' \\ x + y' + (xy + 0)' &= x + y' + (xy)' \\ x + y' + (xy + 0)' &= x + y' + x' + y' \\ x + y' + (xy + 0)' &= (x + x') + (y' + y') \\ x + y' + (xy + 0)' &= 1 + y' \\ x + y' + (xy + 0)' &= 1. \end{aligned}$$

(d) $x + (y + 1)' + xy = x.$

$$\begin{aligned} x + (y + 1)' + xy &= x + y' * 0 + xy \\ x + (y + 1)' + xy &= x + 0 + xy \\ x + (y + 1)' + xy &= x + xy \\ x + (y + 1)' + xy &= x(1 + y) \\ x + (y + 1)' + xy &= x * 1 \\ x + (y + 1)' + xy &= x. \end{aligned}$$

(e) $[(zx)'zx]' + xy + xy' = 1.$

$$\begin{aligned} [(zx)'zx]' + xy + xy' &= [(zx) + (zx)'] + x(y + y') \\ [(zx)'zx]' + xy + xy' &= [(zx) + (z' + x')] + x * 1 \\ [(zx)'zx]' + xy + xy' &= zx + (z' + x') + x \end{aligned}$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = (z' + x') + x(1 + z)$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = (z' + x') + x * 1$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = (z' + x') + x$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = z' + (x' + x)$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = z' + 1$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = 1.$$

$$(f) x[(y' + x)' + (y' + y)'] = 0.$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = x(yx' + yy')$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = x(yx' + 0)$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = xy'x'$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = xx'y$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = 0 * y$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = 0.$$

Ejercicio 16.

(a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	F (A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F(A, B, C) = A'B'C' + AB'C' + ABC'$$

(b) Simplificar la expresión hallada.

$$F(A, B, C) = A'B'C' + AB'C' + ABC'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + AB' + AB) C'$$

$$F(A, B, C) = [(A' + A) B' + AB] C'$$

$$F(A, B, C) = (1 * B' + AB) C'$$

$$F(A, B, C) = (B' + AB) C'$$

$$F(A, B, C) = [A'B' + A(B' + B)] C'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + A * 1) C'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + A) C'$$

Ejercicio 17.

(a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	D	F (A, B, C, D)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$F(A, B, C, D) = A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + ABC'D + ABCD$.

(b) Simplificar la expresión hallada.

$F(A, B, C, D) = A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + ABC'D + ABCD$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' (C' + C) + A'BC' (D' + D) + A'BC (D' + D) + ABD (C' + C)$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' * 1 + A'BC' * 1 + A'BC * 1 + ABD * 1$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'BC' + A'BC + ABD$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B (C' + C) + ABD$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B * 1 + ABD$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B + ABD$

$F(A, B, C, D) = A' (B'D' + B) + ABD$.

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + B (A' + AD)$.

Ejercicio 18.

Sea $f: B_1 \rightarrow B_2$ un isomorfismo de álgebras booleanas. Si se llama 0_1 y 0_2 al 0 de B_1 y B_2 , respectivamente, y 1_1 y 1_2 al 1 de B_1 y B_2 , respectivamente, demostrar que $f(0_1) = 0_2$ y $f(1_1) = 1_2$.

Para cualquier elemento b de B_1 , $b + 0_1 = b$. Como f es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que $f(b + 0_1) = f(b) + f(0_1)$. Pero, debido a que 0_2 es el elemento identidad aditivo en B_2 , $f(b + 0_1) = f(b) + 0_2 = f(b)$, lo que implica que $f(0_1) = 0_2$. Por lo tanto, queda demostrado que $f(0_1) = 0_2$.

Para cualquier elemento b de B_1 , $b * 1_1 = b$. Como f es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que $f(b * 1_1) = f(b) * f(1_1)$. Pero, debido a que 1_2 es el elemento identidad multiplicativo en B_2 , $f(b * 1_1) = f(b) * 1_2 = f(b)$, lo que implica que $f(1_1) = 1_2$. Por lo tanto, queda demostrado que $f(1_1) = 1_2$.

Ejercicio 19.

(a) Hallar un isomorfismo entre $\Omega = \{B^2, \vee, \wedge, ', (0, 0), (1, 1)\}$ y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.

Para encontrar un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva f que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto $A = \{a, b\}$ y se considera el álgebra de Boole de partes de A , denotada por $P(A)$. Entonces, se tiene:

- B^2 representa el conjunto de subconjuntos de A , es decir, $B^2 = P(A)$.
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto A se corresponde con su complemento relativo en A , es decir, $A' = \{x \in A: x \notin A\}$.
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función $f: \Omega \rightarrow P(A)$ como sigue:

- Para cada par ordenado $(0, 0)$ en B^2 , f lo mapea al conjunto vacío \emptyset en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(1, 1)$ en B^2 , f lo mapea al conjunto A en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(0, 1)$ en B^2 , f lo mapea al conjunto $\{b\}$ en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(1, 0)$ en B^2 , f lo mapea al conjunto $\{a\}$ en $P(A)$.

Se puede verificar que f es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función f es inyectiva porque cada par ordenado en Ω se mapea a un único subconjunto en $P(A)$ y f es suryectiva porque todo subconjunto de A se puede representar como un par ordenado en Ω .
- La función f preserva la disyunción, ya que $f((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) = f((1, 1))$ si y sólo si $(x_1, y_1) = (1, 1)$ o $(x_2, y_2) = (1, 1)$, lo que implica que $f((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) = A$ si y sólo si $f((x_1, y_1)) = A$ o $f((x_2, y_2)) = A$.
- La función f preserva la conjunción, ya que $f((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) = f((1, 1))$ si y sólo si $(x_1, y_1) = (1, 1)$ y $(x_2, y_2) = (1, 1)$, lo que implica que $f((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) = A$ si y sólo si $f((x_1, y_1)) = A$ y $f((x_2, y_2)) = A$.
- La función f preserva el complemento, ya que $f((x, y)') = f((1, 1))$ si y sólo si $(x, y)' = (1, 1)$, lo que implica que $f((x, y)') = A$ si y sólo si $f((x, y)) = \emptyset$.
- La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, entonces $f((x_1, y_1)) \subseteq f((x_2, y_2))$.

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de A ($P(A)$).

Diagrama de Hasse de Ω :

(1, 1)
 (1, 0) (0, 1)
 (0, 0)

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

A
 {a} {b}
 \emptyset

(b) Hallar un isomorfismo entre $\Omega = \{B^3, \vee, \wedge, ', (0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.

Para encontrar un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva f que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto $A = \{a, b, c\}$ y se considera el álgebra de Boole de partes de A , denotada por $P(A)$. Entonces, se tiene:

- B^3 representa el conjunto de subconjuntos de A , es decir, $B^3 = P(A)$.
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto A se corresponde con su complemento relativo en A , es decir, $A' = \{x \in A: x \notin A\}$.
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función $f: \Omega \rightarrow P(A)$ como sigue:

- Para cada par ordenado $(0, 0, 0)$ en B^3 , f lo mapea al conjunto vacío \emptyset en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(1, 1, 1)$ en B^3 , f lo mapea al conjunto A en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(0, 0, 1)$ en B^3 , f lo mapea al conjunto $\{c\}$ en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(0, 1, 0)$ en B^3 , f lo mapea al conjunto $\{b\}$ en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(1, 0, 0)$ en B^3 , f lo mapea al conjunto $\{a\}$ en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(0, 1, 1)$ en B^3 , f lo mapea al conjunto $\{b, c\}$ en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(1, 0, 1)$ en B^3 , f lo mapea al conjunto $\{a, c\}$ en $P(A)$.
- Para cada par ordenado $(1, 1, 0)$ en B^3 , f lo mapea al conjunto $\{a, b\}$ en $P(A)$.

Se puede verificar que f es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función f es inyectiva porque cada par ordenado en Ω se mapea a un único subconjunto en $P(A)$ y f es suryectiva porque todo subconjunto de A se puede representar como un par ordenado en Ω .

- La función f preserva la disyunción, ya que $f((x_1, y_1, z_1) \vee (x_2, y_2, z_2)) = f((1, 1, 1))$ si y sólo si $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$ o $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1)$, lo que implica que $f((x_1, y_1, z_1) \vee (x_2, y_2, z_2)) = A$ si y sólo si $f((x_1, y_1, z_1)) = A$ o $f((x_2, y_2, z_2)) = A$.
- La función f preserva la conjunción, ya que $f((x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2)) = f((1, 1, 1))$ si y sólo si $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$ y $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1)$, lo que implica que $f((x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2)) = A$ si y sólo si $f((x_1, y_1, z_1)) = A$ y $f((x_2, y_2, z_2)) = A$.
- La función f preserva el complemento, ya que $f((x, y, z)') = f((1, 1, 1))$ si y sólo si $(x, y, z)' = (1, 1, 1)$, lo que implica que $f((x, y, z)') = A$ si y sólo si $f((x, y, z)) = \emptyset$.
- La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si $(x_1, y_1, z_1) \leq (x_2, y_2, z_2)$, entonces $f((x_1, y_1, z_1)) \subseteq f((x_2, y_2, z_2))$.

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de A ($\mathcal{P}(A)$).

Diagrama de Hasse de Ω :

$$\begin{array}{c} (1, 1, 1) \\ (1, 1, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (0, 1, 1) \\ (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1) \\ (0, 0, 0) \end{array}$$

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

$$\begin{array}{c} A \\ \{a, b\} \quad \{a, c\} \quad \{b, c\} \\ \{a\} \quad \{b\} \quad \{c\} \\ \emptyset \end{array}$$