Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 6: Espacios Vectoriales - Transformaciones Lineales.

Ejercicio 1.

Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:

(a) $\mathbb{R}^3$.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ $\mathbb{R}^3$, u + v ∈ $\mathbb{R}^3$. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3), v= (v_1, v_2, v_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i, v_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3, u + v= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)= $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$, por lo que u + v ∈ $\mathbb{R}^3$.

Conmutatividad de la suma: Para cada u, v ∈ $\mathbb{R}^3$, u + v= v + u. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3), v= (v_1, v_2, v_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i, v_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
u + v= v + u ⟺
$(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)= (v_1, v_2, v_3) + (u_1, u_2, u_3)$ ⟺
$(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3)$.

Asociatividad de la suma: Para cada u, v, w ∈ $\mathbb{R}^3$, (u + v) + w= u + (v + w). En particular, para u= (u_1, u_2, u_3), v= (v_1, v_2, v_3), w= (w_1, w_2, w_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i, v_i, w_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
(u + v) + w= u + (v + w) ⟺
$((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) + (w_1, w_2, w_3)= (u_1, u_2, u_3) + ((v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3))$ ⟺
$(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3)= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$ ⟺
$(u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, u_3 + v_3 + w_3)= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.

Elemento neutro de la suma: Existe un elemento e ∈ $\mathbb{R}^3$ tal que, para todo u ∈ $\mathbb{R}^3$, se cumple que u + e= e + u= u. En particular, $0_{\mathbb{R}^3}$= (0, 0, 0) es el elemento neutro ∈ $\mathbb{R}^3$, ya que, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
u + $0_{\mathbb{R}^3}$= $0_{\mathbb{R}^3}$ + u= u ⟺
(u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0)= (0, 0, 0) + (u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3) ⟺
$(u_1 + 0, u_2 + 0, u_3 + 0)= (0 + u_1, 0 + u_2, 0 + u_3)= (u_1, u_2, u_3)$ ⟺
$(u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3)$.

Elementos opuestos de la suma: Un elemento u ∈ $\mathbb{R}^3$ tiene inverso si existe u´ ∈ $\mathbb{R}^3$ tal que u + u´= u´ + u= e. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3, su inverso es u´= $(-u_1, -u_2, -u_3)$ ∈ $\mathbb{R}^3$, por lo que existe inverso para todo u ∈ $\mathbb{R}^3$.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ $\mathbb{R}^3$ y k ∈ $\mathbb{R}$, ku ∈ $\mathbb{R}^3$. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3, ku= k (u_1, u_2, u_3)= (ku_1, ku_2, ku_3), por lo que ku ∈ $\mathbb{R}^3$.

Distributividad escalar respecto a la suma de vectores: Para todo u, v ∈ $\mathbb{R}^3$ y k ∈ ℝ, k (u + v)= ku + kv. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3), v= (v_1, v_2, v_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i, v_i ∈ ℝ, i= 1, 2, 3,
k (u + v)= ku + kv ⟺
k $((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3))$= k (u_1, u_2, u_3) + k (v_1, v_2, v_3) ⟺
k $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$= (k$u_1$, k$u_2$, k$u_3$) + (k$v_1$, k$v_2$, k$v_3$) ⟺
(k $(u_1 + v_1)$, k $(u_2 + v_2)$, k $(u_3 + v_3)$)= (ku_1 + kv_1, ku_2 + v_2, ku_3 + v_3) ⟺
(k $(u_1 + v_1)$, k $(u_2 + v_2)$, k $(u_3 + v_3)$)= (k $(u_1 + v_1)$, k $(u_2 + v_2)$, k $(u_3 + v_3)$).

Distributividad escalar respecto a la suma de escalares: Para todo k_1, k_2 ∈ ℝ y u ∈ $\mathbb{R}^3$, $(k_1 + k_2)$ u= k_1u + k_2u. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ ℝ, i= 1, 2, 3,
$(k_1 + k_2)$ u= k_1u + k_2u ⟺
$(k_1 + k_2)$ (u_1, u_2, u_3)= k_1 (u_1, u_2, u_3) + k_2 (u_1, u_2, u_3) ⟺
$((k_1 + k_2)\, u_1, (k_1 + k_2)\, u_2, (k_1 + k_2)\, u_3)$= (k_1u_1, k_1u_2, k_1u_3) + (k_2u_1, k_2u_2, k_2u_3) ⟺
$((k_1 + k_2)\, u_1, (k_1 + k_2)\, u_2, (k_1 + k_2)\, u_3)$= $(k_1u_1 + k_2u_1, k_1u_2 + k_2u_2, k_1u_3 + k_2u_3)$ ⟺
$((k_1 + k_2)\, u_1, (k_1 + k_2)\, u_2, (k_1 + k_2)\, u_3)$= $((k_1 + k_2)\, u_1, (k_1 + k_2)\, u_2, (k_1 + k_2)\, u_3)$.

Asociatividad del producto por escalar: Para todo k_1, k_2 ∈ ℝ y u ∈ $\mathbb{R}^3$, (k_1k_2) u= k_1 (k_2u). En particular, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ ℝ, i= 1, 2, 3,
(k_1k_2) u= k_1 (k_2u) ⟺
(k_1k_2) (u_1, u_2, u_3)= k_1 $(k_2\, (u_1, u_2, u_3))$ ⟺
$((k_1k_2)\, u_1, (k_1k_2)\, u_2, (k_1k_2)\, u_3)$= k_1 (k_2u_1, k_2u_2, k_2u_3) ⟺
$(k_1k_2u_1, k_1k_2u_2, k_1k_2u_3)$= $(k_1k_2u_1, k_1k_2u_2, k_1k_2u_3)$.

Elemento neutro del producto por escalar: Existe un elemento e ∈ ℝ tal que, para todo u ∈ $\mathbb{R}^3$, se cumple que ue= eu= u. En particular, 1 es el elemento neutro ∈ ℝ, ya que, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ ℝ, i= 1, 2, 3,
u * 1= 1 * u= u ⟺
(u_1, u_2, u_3) * 1= 1 * (u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3) ⟺
$(u_1 * 1, u_2 * 1, u_3 * 1)$= $(1 * u_1, 1 * u_2, 1 * u_3)$= (u_1, u_2, u_3) ⟺
(u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3).

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondiente al espacio.

(b) *Las matrices reales de 2x2.*

Cerradura bajo la suma: Para cada A, B ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, A + B ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij} ∈ ℝ, i, j= 1, 2, A + B= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$, por lo que A + B ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$.

Conmutatividad de la suma: Para cada A, B ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, A + B= B + A. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij} ∈ ℝ, i, j= 1, 2,
A + B= B + A ⟺

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix}$.

<u>Asociatividad de la suma:</u> Para cada A, B, C $\in \mathbb{R}^{2x2}$, (A + B) + C= A + (B + C). En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij}, $c_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
(A + B) + C= A + (B + C) $\Leftrightarrow$
$(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}) \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{pmatrix}$.

<u>Elemento neutro de la suma:</u> Existe un elemento E $\in \mathbb{R}^{2x2}$ tal que, para todo A $\in \mathbb{R}^{2x2}$, se cumple que A + E= E + A= A. En particular, $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro $\in \mathbb{R}^{2x2}$, ya que, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
A + $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$= $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$ + A= A $\Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

<u>Elementos opuestos de la suma:</u> Un elemento A $\in \mathbb{R}^{2x2}$ tiene inverso si existe A´ $\in \mathbb{R}^{2x2}$ tal que A + A´= A´ + A= E. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, su inverso es A´= $\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, por lo que existe inverso para todo A $\in \mathbb{R}^{2x2}$.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo A $\in \mathbb{R}^{2x2}$ y k $\in \mathbb{R}$, kA $\in \mathbb{R}^{2x2}$. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, kA= k $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$, por lo que kA $\in \mathbb{R}^{2x2}$.

<u>Distributividad escalar respecto a la suma de vectores:</u> Para todo A, B $\in \mathbb{R}^{2x2}$ y k $\in \mathbb{R}$, k (A + B)= kA + kB. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, $b_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
k (A + B)= kA + kB $\Leftrightarrow$
k $(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix})$= k $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ + k $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
k $\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} ka_{11}+kb_{11} & ka_{12}+kb_{12} \\ ka_{21}+kb_{21} & ka_{22}+kb_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}$.

<u>Distributividad escalar respecto a la suma de escalares:</u> Para todo k_1, k_2 ∈ ℝ y A ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, (k_1 + k_2) A= k_1A + k_2A. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij} ∈ ℝ, i, j= 1, 2,
(k_1 + k_2) A= k_1A + k_2A ⟺
(k_1 + k_2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$= k_1 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ + k_2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ⟺
$\begin{pmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ k_1a_{21} & k_1a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2a_{11} & k_2a_{12} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} k_1a_{11}+k_2a_{11} & k_1a_{12}+k_2a_{12} \\ k_1a_{21}+k_2a_{21} & k_1a_{22}+k_2a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{pmatrix}$.

<u>Asociatividad del producto por escalar:</u> Para todo k_1, k_2 ∈ ℝ y A ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, (k_1k_2) A= k_1 (k_2A). En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij} ∈ ℝ, i, j= 1, 2,
(k_1k_2) A= k_1 (k_2A) ⟺
(k_1k_2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$= k_1 (k_2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$) ⟺
$\begin{pmatrix} k_1k_2a_{11} & k_1k_2a_{12} \\ k_1k_2a_{21} & k_1k_2a_{22} \end{pmatrix}= k_1 \begin{pmatrix} k_2a_{11} & k_2a_{12} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} k_1k_2a_{11} & k_1k_2a_{12} \\ k_1k_2a_{21} & k_1k_2a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} k_1k_2a_{11} & k_1k_2a_{12} \\ k_1k_2a_{21} & k_1k_2a_{22} \end{pmatrix}$.

<u>Elemento neutro del producto por escalar:</u> Existe un elemento e ∈ ℝ tal que, para todo A ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, se cumple que Ae= eA= A. En particular, 1 es el elemento neutro ∈ ℝ, ya que, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij} ∈ ℝ, i, j= 1, 2,
A * 1= 1 * A= A ⟺
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * 1= 1 * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}*1 & a_{12}*1 \\ a_{21}*1 & a_{22}*1 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} 1*a_{11} & 1*a_{12} \\ 1*a_{21} & 1*a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto de las matrices reales de 2x2 es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondiente al espacio.

(c) *Los polinomios de grado menor o igual a 3 ($\mathcal{P}_3$). ¿El conjunto de los polinomios de grado 3 también es un espacio vectorial?*

<u>Cerradura bajo la suma:</u> Para cada p (x), q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$, p (x) + q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$. En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, q (x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i, b_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3, p (x) + q (x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0= (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0), por lo que p (x) + q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$.

<u>Conmutatividad de la suma:</u> Para cada p (x), q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$, p (x) + q (x)= q (x) + p (x). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, q (x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i, b_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3,
p (x) + q (x)= q (x) + p (x) ⟺
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ⟺
(a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)= (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0).

<u>Asociatividad de la suma:</u> Para cada p (x), q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$, (p (x) + q (x)) + r (x)= p (x) + (q (x) + r (x)). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, q (x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0, r (x)= c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i, b_i, c_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3,
(p (x) + q (x)) + r (x)= p (x) + (q (x) + r (x)) ⟺
(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0) ⟺
(a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + (b_3 + c_3) x^3 + (b_2 + c_2) x^2 + (b_1 + c_1) x + (b_0 + c_0) ⟺
(a_3 + b_3 + c_3) x^3 + (a_2 + b_2 + c_2) x^2 + (a_1 + b_1 + c_1) x + (a_0 + b_0 + c_0)= (a_3 + b_3 + c_3) x^3 + (a_2 + b_2 + c_2) x^2 + (a_1 + b_1 + c_1) x + (a_0 + b_0 + c_0).

<u>Elemento neutro de la suma:</u> Existe un elemento e (x) ∈ $\mathcal{P}_3$ tal que, para todo p (x) ∈ $\mathbb{R}^3$, se cumple que p (x) + e (x)= e (x) + p (x)= p (x). En particular, 0 (x)= 0 es el elemento neutro ∈ $\mathcal{P}_3$, ya que, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3,
p (x) + 0 (x)= 0 (x) + p (x)= p (x) ⟺
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + 0= 0 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ⟺
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.

<u>Elementos opuestos de la suma:</u> Un elemento p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$ tiene inverso si existe p (x)´ ∈ $\mathcal{P}_3$ tal que p (x) + p (x)´= p (x)´ + p (x)= 0 (x). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3, su inverso es p (x)´= -a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, por lo que existe inverso para todo p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$ y k ∈ ℝ, k p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$. En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3, k p (x)= k (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)= ka_3x^3 + ka_2x^2 + ka_1x + ka_0, por lo que k p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$.

<u>Distributividad escalar respecto a la suma de vectores:</u> Para cada p (x), q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$ y k ∈ ℝ, k (p (x) + q (x))= k p (x) + k q (x). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, q (x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i, b_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3,
k (p (x) + q (x))= k p (x) + k q (x) ⟺
k (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)= k (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + k (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) ⟺

k [$(a_3$ + $b_3)$ x^3 + $(a_2$ + $b_2)$ x^2 + $(a_1$ + $b_1)$ x + $(a_0$ + $b_0)$]= ka_3x^3 + ka_2x^2 + ka_1x + ka_0 + kb_3x^3 + kb_2x^2 + kb_1x + kb_0 $\Leftrightarrow$
k $(a_3$ + $b_3)$ x^3 + k $(a_2$ + $b_2)$ x^2 + k $(a_1$ + $b_1)$ x + k $(a_0$ + $b_0)$= (ka_3 + kb_3) x^3 + (ka_2 + kb_2) x^2 + (ka_1 + kb_1) x + (ka_0 + kb_0) $\Leftrightarrow$
k $(a_3$ + $b_3)$ x^3 + k $(a_2$ + $b_2)$ x^2 + k $(a_1$ + $b_1)$ x + k $(a_0$ + $b_0)$= k $(a_3$ + $b_3)$ x^3 + k $(a_2$ + $b_2)$ x^2 + k $(a_1$ + $b_1)$ x + k $(a_0$ + $b_0)$.

<u>Distributividad escalar respecto a la suma de escalares:</u> Para todo k_1, k_2 $\in \mathbb{R}$ y p (x) $\in$ $\mathcal{P}_3$, $(k_1$ + $k_2)$ p (x)= k_1 p (x) + k_2 p (x). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 $\in \mathcal{P}_3$, con cualesquiera $a_i \in \mathbb{R}$, i= 0, 1, 2, 3,
$(k_1$ + $k_2)$ p (x)= k_1 p (x) + k_2 p (x) $\Leftrightarrow$
$(k_1$ + $k_2)$ $(a_3x^3$ + a_2x^2 + a_1x + $a_0)$= k_1 $(a_3x^3$ + a_2x^2 + a_1x + $a_0)$ + k_2 $(a_3x^3$ + a_2x^2 + a_1x + $a_0)$ $\Leftrightarrow$
$(k_1$ + $k_2)$ a_3x^3 + $(k_1$ + $k_2)$ a_2x^2 + $(k_1$ + $k_2)$ a_1x + $(k_1$ + $k_2)$ a_0= $k_1a_3x^3$ + $k_1a_2x^2$ + k_1a_1x + k_1a_0 + $k_2a_3x^3$ + $k_2a_2x^2$ + k_2a_1x + k_2a_0 $\Leftrightarrow$
$(k_1$ + $k_2)$ a_3x^3 + $(k_1$ + $k_2)$ a_2x^2 + $(k_1$ + $k_2)$ a_1x + $(k_1$ + $k_2)$ a_0= $(k_1$ + $k_2)$ a_3x^3 + $(k_1$ + $k_2)$ a_2x^2 + $(k_1$ + $k_2)$ a_1x + $(k_1$ + $k_2)$ a_0.

<u>Asociatividad del producto por escalar:</u> Para todo k_1, k_2 $\in \mathbb{R}$ y p (x) $\in \mathcal{P}_3$, (k_1k_2) p (x)= k_1 $(k_2$ p (x)). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 $\in \mathcal{P}_3$, con cualesquiera $a_i \in \mathbb{R}$, i= 0, 1, 2, 3,
(k_1k_2) p (x)= k_1 $(k_2$ p (x)) $\Leftrightarrow$
(k_1k_2) $(a_3x^3$ + a_2x^2 + a_1x + $a_0)$= k_1 [k_2 $(a_3x^3$ + a_2x^2 + a_1x + $a_0)$] $\Leftrightarrow$
$k_1k_2a_3x^3$ + $k_1k_2a_2x^2$ + $k_1k_2a_1$x + $k_1k_2a_0$= k_1 $(k_2a_3x^3$ + $k_2a_2x^2$ + k_2a_1x + $k_2a_0)$ $\Leftrightarrow$
$k_1k_2a_3x^3$ + $k_1k_2a_2x^2$ + $k_1k_2a_1$x + $k_1k_2a_0$= $k_1k_2a_3x^3$ + $k_1k_2a_2x^2$ + $k_1k_2a_1$x + $k_1k_2a_0$.

<u>Elemento neutro del producto por escalar:</u> Existe un elemento e $\in \mathbb{R}$ tal que, para todo p (x) $\in \mathcal{P}_3$, se cumple que p (x) e= e p (x)= p (x). En particular, 1 es el elemento neutro $\in$ $\mathbb{R}$, ya que, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 $\in \mathcal{P}_3$, con cualesquiera $a_i \in \mathbb{R}$, i= 0, 1, 2, 3,
p (x) * 1= 1 * p (x)= p (x) $\Leftrightarrow$
$(a_3x^3$ + a_2x^2 + a_1x + $a_0)$ * 1= 1 * $(a_3x^3$ + a_2x^2 + a_1x + $a_0)$= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 $\Leftrightarrow$
a_3x^3 * 1 + a_2x^2 * 1 + a_1x * 1 + a_0 * 1= 1 * a_3x^3 + 1 * a_2x^2 + 1 * a_1x + 1 * a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 $\Leftrightarrow$
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3 ($\mathcal{P}_3$) es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondiente al espacio.

El conjunto de los polinomios de grado 3 no es un espacio vectorial, ya que no es cerrado bajo la suma y, además, no tiene elemento neutro de la suma.

Juan Menduiña

Ejercicio 2.

Sea V un Espacio Vectorial, demostrar que, si αv= 0_V, entonces, α= 0 o v= 0_V (o ambos son nulos).

Se sabe que αv= 0_V, donde $\alpha \in$ K es un escalar en un cuerpo, v ∈ V es un vector en el espacio vectorial V y 0_V es el vector nulo en V.

Se quiere probar que, si αv= 0_V, entonces, α= 0 o v= 0_V (o ambos).

Se supone, por contradicción, que $\alpha \neq 0$ y v$\neq 0_V$.

Si $\alpha \neq 0$, por la propiedad de los cuerpos, α tiene un inverso multiplicativo $\alpha^{-1} \in$ K tal que $\alpha\alpha^{-1}$= 1.

Pre-multiplicando a ambos lados de αv= 0_V por α^{-1}, se tiene:

α^{-1} (αv)= $\alpha^{-1}0_V$
α^{-1} (αv)= 0_V.

Usando la propiedad asociativa del producto por escalar, se tiene:

($\alpha^{-1}\alpha$) v= 0_V.

Usando que α^{-1} es el inverso de α, se tiene:

1v= 0_V
v= 0_V.

Lo cual contradice la suposición de que v$\neq 0_V$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si αv= 0_V, entonces, α= 0 o v= 0_V (o ambos).

Ejercicio 3.

Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar):

(a) *S= {(x, 0): x ∈ ℝ}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0). En particular, con x= 0 ∈ ℝ, (x, 0) ∈ S, por lo que $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0) ∈ S y, entonces, S≠ ∅.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∈ S. En particular, para u= (x_1, 0) ∈ S y v= (x_2, 0) ∈ S, u + v= (x_1, 0) + (x_2, 0)= (x_1 + x_2, 0 + 0)= (x_1 + x_2, 0), con x_1 + x_2 ∈ ℝ, por lo que u + v ∈ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ S y k ∈ ℝ, ku ∈ S. En particular, para u= (x, 0) ∈ S, ku= k (x, 0)= (kx, 0), con kx ∈ ℝ, por lo que ku ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(b) *S= {(1, y): y ∈ ℝ}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0). En particular, con y= 0 ∈ ℝ, (1, y) ∈ S, pero 1≠ 0, por lo que $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0) ∉ S.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∉ S. En particular, para u= (1, y_1) ∈ S y v= (1, y_2) ∈ S, u + v= (1, y_1) + (1, y_2)= (1 + 1, y_1 + y_2)= (2, y_1 + y_2), con 2≠ 1, por lo que u + v ∉ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ S y k ∈ ℝ, ku ∉ S. En particular, para u= (1, y) ∈ S, ku= k (1, y)= (k, ky)≠ (1, y) (excepto si k= 1), por lo que ku ∉ S.

Por lo tanto, S no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que no satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(c) *S= {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: x + y= 0}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0). En particular, con x= 0, y= 0 ∈ ℝ, (x, y) ∈ S, ya que x + y= 0 + 0= 0, por lo que $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0) ∈ S y, entonces, S≠ ∅.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∈ S. En particular, para u= (x_1, y_1) ∈ S y v= (x_2, y_2) ∈ S, u + v= (x_1, y_1) + (x_2, y_2)= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), con (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)= 0 + 0= 0, por lo que u + v ∈ S.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo u ∈ S y k ∈ $\mathbb{R}$, ku ∈ S. En particular, para u= (x, y) ∈ S, ku= k (x, y)= (kx, ky), con kx + ky= k (x + y)= k * 0= 0, por lo que ku ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(d) *S= {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: x + y= 1}.*

<u>Elemento neutro:</u> El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0). En particular, con x= 0, y= 0 ∈ $\mathbb{R}$, (x, y) ∉ S, ya que x + y= 0 + 0= 0≠ 1, por lo que $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0) ∉ S.

<u>Cerradura bajo la suma:</u> Para cada u, v ∈ S, u + v ∉ S. En particular, para u= (x_1, y_1) ∈ S y v= (x_2, y_2) ∈ S, u + v= $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$= $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, con $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$= $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$= 1 + 1= 2≠ 1, por lo que u + v ∉ S.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo u ∈ S y k ∈ $\mathbb{R}$, ku ∉ S. En particular, para u= (x, y) ∈ S, ku= k (x, y)= (kx, ky), con kx + ky= k (x + y)= k * 1= k≠ 1 (excepto si k= 1), por lo que ku ∉ S.

Por lo tanto, S no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que no satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(e) *S= {(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$: z= x - y}.*

<u>Elemento neutro:</u> El elemento neutro en $\mathbb{R}^3$ es $0_{\mathbb{R}^3}$= (0, 0, 0). En particular, con x= 0, y= 0, z= 0 ∈ $\mathbb{R}$, (x, y, z) ∈ S, ya que z= x - y ⟺ 0= 0 - 0 ⟺ 0= 0, por lo que $0_{\mathbb{R}^3}$= (0, 0, 0) ∈ S y, entonces, S≠ ∅.

<u>Cerradura bajo la suma:</u> Para cada u, v ∈ S, u + v ∈ S. En particular, para u= (x_1, y_1, z_1) ∈ S y v= (x_2, y_2, z_2) ∈ S, u + v= $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$= $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, con $z_1 + z_2$= $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$= $(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$, por lo que u + v ∈ S.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo u ∈ S y k ∈ $\mathbb{R}$, ku ∈ S. En particular, para u= (x, y, z) ∈ S, ku= k (x, y, z)= (kx, ky, kz), con kz= kx - ky ⟺ kz= k (x - y) ⟺ z= x - y, por lo que ku ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(f) *S= {(x, y, z, w) ∈ $\mathbb{R}^4$: x + y + w= 1}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^4$ es $0_{\mathbb{R}^4}$= (0, 0, 0, 0). En particular, con x= 0, y= 0, z= 0, w= 0 ∈ ℝ, (x, y, z, w) ∉ S, ya que x + y + w= 0 + 0 + 0= 0≠ 1, por lo que $0_{\mathbb{R}^4}$= (0, 0, 0, 0) ∉ S.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∉ S. En particular, para u= (x_1, y_1, z_1, w_1) ∈ S y v= (x_2, y_2, z_2, w_2) ∈ S, u + v= (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)= $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$, con $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (w_1 + w_2)$= $(x_1 + y_1 + w_1) + (x_2 + y_2 + w_2)$= 1 + 1= 2≠ 1, por lo que u + v ∉ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ S y k ∈ ℝ, ku ∉ S. En particular, para u= (x, y, z, w) ∈ S, ku= k (x, y, z, w)= (kx, ky, kz, kw), con kx + ky + kw= k (x + y + w)= k * 1= k≠ 1 (excepto si k= 1), por lo que ku ∉ S.

Por lo tanto, S no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que no satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(g) *S= {(x, y, z, w) ∈ $\mathbb{R}^4$: x + y - w= 0, z + 3y= 0}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^4$ es $0_{\mathbb{R}^4}$= (0, 0, 0, 0). En particular, con x= 0, y= 0, z= 0, w= 0 ∈ ℝ, (x, y, z, w) ∈ S, ya que x + y - w= 0 + 0 - 0= 0 y z + 3y= 0 + 3 * 0= 0 + 0= 0, por lo que $0_{\mathbb{R}^4}$= (0, 0, 0, 0) ∈ S.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∈ S. En particular, para u= (x_1, y_1, z_1, w_1) ∈ S y v= (x_2, y_2, z_2, w_2) ∈ S, u + v= (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)= $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$, con $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (w_1 + w_2)$= $(x_1 + y_1 - w_1) + (x_2 + y_2 - w_2)$= 0 + 0= 0 y $(z_1 + z_2) + 3\,(y_1 + y_2)$= $(z_1 + 3y_1) + (z_2 + 3y_2)$= 0 + 0= 0, por lo que u + v ∈ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ S y k ∈ ℝ, ku ∈ S. En particular, para u= (x, y, z, w) ∈ S, ku= k (x, y, z, w)= (kx, ky, kz, kw), con kx + ky - kw= k (x + y - w)= k * 0= 0 y kz + 3ky= k (z + 3y)= k * 0= 0, por lo que ku ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(h) *S= {$\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$: a, b, c ∈ ℝ}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^{2x2}$ es $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En particular, con a= b= c= 0 ∈ ℝ, $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$ ∈ S, por lo que $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∈ S.

Cerradura bajo la suma: Para cada A, B ∈ S, A + B ∈ S. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix}$ ∈ S y B= $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$ ∈ S, con a_i, b_i, c_i ∈ ℝ, i= 1, 2, A + B= $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$, con a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 ∈ ℝ, por lo que A + B ∈ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo A ∈ S y k ∈ ℝ, kA ∈ S. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$ ∈ S, kA= k $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} ka & kb \\ ka & kc \end{pmatrix}$, con ka, kb, kc ∈ ℝ, por lo que kA ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

Ejercicio 4.

Decidir si los siguientes subconjuntos son generadores de $\mathbb{R}^3$.

(a) *S= {(1, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)}.*

(x, y, z)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (0, 1, 0) + α_3 (0, 0, 1) + α_4 (1, 2, 3)
(x, y, z)= (α_1, 0, α_1) + (0, α_2, 0) + (0, 0, α_3) + (α_4, 2α_4, 3α_4)
(x, y, z)= (α_1 + α_4, α_2 + 2α_4, α_1 + α_3 + 3α_4).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_4 \\ y = \alpha_2 + 2\alpha_4 \\ z = \alpha_1 + \alpha_3 + 4\alpha_4 \end{cases}.$$

α_1= x - α_4.

α_2= y - 2α_4.

z= x - α_4 + α_3 + 3α_4
z= x + α_3 + 2α_4
α_3= z - x - 2α_4.

Por lo tanto, el subconjunto S es generador de $\mathbb{R}^3$, ya que existen soluciones de α_1, α_2, α_3 en términos de x, y, z, lo cual implica que cualquier vector (x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores en S. Sin embargo, S contiene un vector redundante porque hay más vectores que la dimensión del espacio (y, por ende, el parámetro α_4 es libre).

(b) *S= {(1, 0, 1); (1, 1, 1); (0, 0, 1)}.*

(x, y, z)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (1, 1, 1) + α_3 (0, 0, 1)
(x, y, z)= (α_1, 0, α_1) + (α_2, α_2, α_2) + (0, 0, α_3)
(x, y, z)= (α_1 + α_2, α_2, α_1 + α_2 + α_3).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_2 \\ z = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}.$$

α_2= y.

x= α_1 + y
α_1= x - y.

z= x - y + y + α_3
z= x + α_3
α_3= z - x.

Por lo tanto, el subconjunto S es generador de $\mathbb{R}^3$, ya que existen soluciones de α_1, α_2, α_3 en términos de x, y, z, lo cual implica que cualquier vector (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores en S.

(c) *S= {(1, 0, 1); (0, 1, 0)}.*

(x, y, z)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (0, 1, 0)
(x, y, z)= (α_1, 0, α_1) + (0, α_2, 0)
(x, y, z)= (α_1, α_2, α_1).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2. \\ z = \alpha_1 \end{cases}$$

α_1= x= z.
α_2= y.

Por lo tanto, el subconjunto S no es generador de $\mathbb{R}^3$, ya que los vectores generados por S están contenidos en un subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por x= z, lo cual implica que no todo vector (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores en S.

Ejercicio 5.

Analizar si el siguiente conjunto puede generar el subespacio de las matrices simétricas de 2x2: S= {$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}.

M_{2x2}^{s}= {A ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$: A= $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, a, b, c ∈ $\mathbb{R}$}.

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} a = \alpha_1 \\ b = \alpha_2 \\ b = \alpha_2 \\ c = \alpha_3 \end{cases}$.

α_1= a.
α_2= b.
α_3= c.

Por lo tanto, el conjunto S puede generar el subespacio de las matrices simétricas de 2x2, ya que existen soluciones de α_1, α_2, α_3 en términos de a, b, c, lo cual implica que cualquier matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$ se puede expresar como combinación lineal de las matrices en S.
.

Ejercicio 6.

Dar el subespacio generado por los vectores {(1, 0, 1); (1, 1, 0)}.

(x, y, z)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (1, 1, 0)
(x, y, z)= (α_1, 0, α_1) + (α_2, α_2, 0)
(x, y, z)= (α_1 + α_2, α_2, α_1).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_2 \\ z = \alpha_1 \end{cases}.$$

α_1= z.
α_2= y.
x= z + y.

Por lo tanto, el subespacio generado por los vectores {(1, 0, 1); (1, 1, 0)} es:

{(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$: x= y + z}.

Ejercicio 7.

Dar el subespacio generado por los vectores {(1, 1, 1); (1, -1, 0)}.

(x, y, z)= α_1 (1, 1, 1) + α_2 (1, -1, 0)
(x, y, z)= (α_1, α_1, α_1) + (α_2, -α_2, 0)
(x, y, z)= (α_1 + α_2, α_1 - α_2, α_1).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_1 - \alpha_2. \\ z = \alpha_1 \end{cases}$$

α_1= z.

x= z + α_2
α_2= x - z.

y= z - (x - z)
y= z - x + z
y= 2z - x.

Por lo tanto, el subespacio generado por los vectores {(1, 1, 1); (1, -1, 0)} es:

{(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$: y= 2z - x}.

Ejercicio 8.

Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

(a) *S= {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)}.*

(0, 0, 0)= α_1 (1, 0, 0) + α_2 (0, 1, 0) + α_3 (0, 0, 1) + α_4 (1, 2, 3)
(0, 0, 0)= (α_1, 0, 0) + (0, α_2, 0) + (0, 0, α_3) + (α_4, $2\alpha_4$, $3\alpha_4$)
(0, 0, 0)= (α_1 + α_4, α_2 + $2\alpha_4$, α_3 + $3\alpha_4$).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_4 \\ 0 = \alpha_2 + 2\alpha_4. \\ 0 = \alpha_3 + 4\alpha_4 \end{cases}$$

α_1= -α_4.
α_2= -2α_4.
α_3= -4α_4.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S no son linealmente independientes, ya que existen escalares α_1, α_2, α_3, α_4 no todos nulos tales que la combinación lineal de estos vectores es igual a 0.

(b) *S= {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)}.*

(0, 0, 0)= α_1 (1, 0, 0) + α_2 (0, 1, 0) + α_3 (0, 0, 1)
(0, 0, 0)= (α_1, 0, 0) + (0, α_2, 0) + (0, 0, α_3)
(0, 0, 0)= (α_1, α_2, α_3).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_2. \\ 0 = \alpha_3 \end{cases}$$

α_1= 0.
α_2= 0.
α_3= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

(c) *S= {(1, 0); (0, 1); (2, 3)}.*

(0, 0)= α_1 (1, 0) + α_2 (0, 1) + α_3 (2, 3)
(0, 0)= (α_1, 0) + (0, α_2) + ($2\alpha_3$, $3\alpha_3$)
(0, 0)= (α_1 + $2\alpha_3$, α_2 + $3\alpha_3$).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ 0 = \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases}.$$

α_1= -2α_3.
α_2= -3α_3.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S no son linealmente independientes, ya que existen escalares α_1, α_2, α_3 no todos nulos tales que la combinación lineal de estos vectores es igual a 0.

(d) *S= {(1, -3); (1, -1)}.*

(0, 0)= α_1 (1, -3) + α_2 (1, -1)
(0, 0)= (α_1, -3α_1) + (α_2, -α_2)
(0, 0)= (α_1 + α_2, -3α_1 - α_2).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = -3\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}.$$

α_1= -α_2.

0= -3 (-α_2) - α_2
0= 3α_2 - α_2
0= 2α_2
α_2= $\frac{0}{2}$
α_2= 0.

α_1= -0
α_1= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2 son iguales a 0.

(e) *S= {(0, 2, -1); (1, 7, 1); (1, 3, -1); (0, 0, 0)}.*

(0, 0, 0)= α_1 (0, 2, -1) + α_2 (1, 7, 1) + α_3 (1, 3, -1) + α_4 (0, 0, 0)
(0, 0, 0)= (0, 2α_1, -α_1) + (α_2, 7α_2, α_2) + (α_3, 3α_3, -α_3) + (0, 0, 0)
(0, 0, 0)= (α_2 + α_3, 2α_1 + 7α_2 + 3α_3, -α_1 + α_2 - α_3).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = 2\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3. \\ 0 = -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}$$

α_2= -α_3.

0= $2\alpha_1$ + 7 (-α_3) + $3\alpha_3$
0= $2\alpha_1$ - $7\alpha_3$ + $3\alpha_3$
0= $2\alpha_1$ - $4\alpha_3$
$2\alpha_1$= $4\alpha_3$
α_1= $\frac{4}{2}$ α_3
α_1= $2\alpha_3$.

0= -$2\alpha_3$ + (-α_3) - α_3
0= -$2\alpha_3$ - α_3 - α_3
0= -$4\alpha_3$
α_3= $\frac{0}{-4}$
α_3= 0.

α_2= -0
α_2= 0.

α_1= 2 * 0
α_1= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

(f) *S= {(4, 1, 0, 0); (-3, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)}.*

(0, 0, 0, 0)= α_1 (4, 1, 0, 0) + α_2 (-3, 0, 1, 0) + α_3 (1, 0, 0, 1)
(0, 0, 0, 0)= ($4\alpha_1$, α_1, 0, 0) + (-$3\alpha_2$, 0, α_2, 0) + (α_3, 0, 0, α_3)
(0, 0, 0, 0)= ($4\alpha_1$ - $3\alpha_2$ + α_3, α_1, α_2, α_3).

$$\begin{cases} 0 = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_2 \\ 0 = \alpha_3 \end{cases}.$$

α_1= 0.
α_2= 0.
α_3= 0.

0= 4 * 0 - 3 * 0 + 0
0= 0 - 0 + 0
0= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

(g) $S= \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ 0 = 2\alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$.

α_1= 0.

$2\alpha_2$= 0
$\alpha_2= \frac{0}{2}$
α_2= 0.

0= 0 + 0
0= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2 son iguales a 0.

(h) $S= \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases}$.

α_1= 0.

0= 0 + α_2
α_2= 0.

$0 = 0 + \alpha_3$
$\alpha_3 = 0$.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

Ejercicio 9.

Analizar si un conjunto de vectores que contiene al vector nulo puede ser linealmente independiente. Justificar.

Un conjunto de vectores que contiene al vector nulo no puede ser linealmente independiente, ya que, para que un conjunto de vectores sea linealmente independiente, la única combinación lineal que produzca el vector nulo debe ser la trivial (es decir, todos los coeficientes de la combinación lineal iguales a cero) y, en este caso, el vector nulo puede formar una combinación lineal trivial con cualquier valor de su coeficiente.

Juan Menduiña

Ejercicio 10.

Si el conjunto de vectores M= {u, v, w} de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto {u, u + 2v, u + 2v + 3w} es linealmente independiente.

0= α_1u + α_2 (u + 2v) + α_3 (u + 2v + 3w)
0= α_1u + α_2u + $\alpha_2$2v + α_3u + $\alpha_3$2v + $\alpha_3$3w
0= (α_1 + α_2 + α_3) u + 2 (α_2 + α_3) v + 3α_3w.

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = 2(\alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 = 3\alpha_3 \end{cases}.$$

3α_3= 0
α_3= $\frac{0}{3}$
α_3= 0.

0= 2 (α_2 + 0)
0= 2α_2
α_2= $\frac{0}{2}$
α_2= 0.

0= α_1 + 0 + 0
α_1= 0.

Por lo tanto, si el conjunto de vectores M= {u, v, w} de V es linealmente independiente, el conjunto {u, u + 2v, u + 2v + 3w} es linealmente independiente, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

Ejercicio 11.

Analizar si los siguientes conjuntos de vectores pueden ser base de $\mathbb{R}^2$:

(a) *{(2, -1); (1, 3)}.*

(0, 0)= α_1 (2, -1) + α_2 (1, 3)
(0, 0)= ($2\alpha_1$, -α_1) + (α_2, $3\alpha_2$)
(0, 0)= ($2\alpha_1$ + α_2, -α_1 + $3\alpha_2$).

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = -\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}.$$

α_2= -$2\alpha_1$.

0= -α_1 + 3 (-$2\alpha_1$)
0= -α_1 - $6\alpha_1$
0= -$7\alpha_1$
α_1= $\frac{0}{-7}$
α_1= 0.

α_2= -2 * 0
α_2= 0.

Por lo tanto, este conjunto de vectores es base de $\mathbb{R}^2$, ya que son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^2$ (cualquier conjunto de 2 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$ genera todo $\mathbb{R}^2$).

(b) *{(2, 1); (1, 1); (3, 2)}.*

(0, 0)= α_1 (2, 1) + α_2 (1, 1) + α_3 (3, 2)
(0, 0)= ($2\alpha_1$, α_1) + (α_2, α_2) + ($3\alpha_3$, $2\alpha_3$)
(0, 0)= ($2\alpha_1$ + α_2 + $3\alpha_3$, α_1 + α_2 + $2\alpha_3$).

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{cases}.$$

α_2= -$2\alpha_1$ - $3\alpha_3$.

0= α_1 + (-$2\alpha_1$ - $3\alpha_3$) + $2\alpha_3$
0= α_1 - $2\alpha_1$ - $3\alpha_3$ + $2\alpha_3$
0= -α_1 - α_3
α_1= -α_3.

α_2= -2 (-α_3) - $3\alpha_3$
α_2= $2\alpha_3$ - $3\alpha_3$

α_2= -α_3.

Por lo tanto, este conjunto de vectores no es base de $\mathbb{R}^2$, ya que no son linealmente independientes.

(c) *{(1, -1); (1, 0)}.*

(0, 0)= α_1 (1, -1) + α_2 (1, 0)
(0, 0)= (α_1, -α_1) + (α_2, 0)
(0, 0)= (α_1 + α_2, -α_1).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \quad 0 = -\alpha_1 \end{cases}.$$

α_1= $\frac{0}{-1}$
α_1= 0.

0= 0 + α_2
α_2= 0.

Por lo tanto, este conjunto de vectores es base de $\mathbb{R}^2$, ya que son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^2$ (cualquier conjunto de 2 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$ genera todo $\mathbb{R}^2$).

(d) *{(1, 2); (2, 4)}.*

(0, 0)= α_1 (1, 2) + α_2 (2, 4)
(0, 0)= (α_1, 2α_1) + (2α_2, 4α_2)
(0, 0)= (α_1 + 2α_2, 2α_1 + 4α_2).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 0 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases}.$$

α_1= -2α_2.

2α_1= -4α_2
α_1= $\frac{-4}{2}$ α_2
α_1= -2α_2.

Por lo tanto, este conjunto de vectores no es base de $\mathbb{R}^2$, ya que no son linealmente independientes y no generan $\mathbb{R}^2$ (todo conjunto de 2 vectores linealmente dependientes no genera $\mathbb{R}^2$).

Ejercicio 12.

Dar las coordenadas de v= (1, 2) en los conjuntos que en el ejercicio anterior resultaron ser bases.

(a) *{(2, -1); (1, 3)}.*

(1, 2)= α_1 (2, -1) + α_2 (1, 3)
(1, 2)= ($2\alpha_1$, -α_1) + (α_2, $3\alpha_2$)
(1, 2)= ($2\alpha_1$ + α_2, -α_1 + $3\alpha_2$).

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2 = -\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}.$$

α_2= 1 - $2\alpha_1$.

2= -α_1 + 3 (1 - $2\alpha_1$)
2= -α_1 + 3 - $6\alpha_1$
2= -$7\alpha_1$ + 3
$7\alpha_1$= 3 - 2
$7\alpha_1$= 1
α_1= $\frac{1}{7}$.

α_2= 1 - 2 $\frac{1}{7}$
α_2= 1 - $\frac{2}{7}$
α_2= $\frac{5}{7}$.

Por lo tanto, las coordenadas de v= (1, 2) son ($\frac{1}{7}$, $\frac{5}{7}$).

(c) *{(1, -1); (1, 0)}.*

(1, 2)= α_1 (1, -1) + α_2 (1, 0)
(1, 2)= (α_1, -α_1) + (α_2, 0)
(1, 2)= (α_1 + α_2, -α_1).

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2 = -\alpha_1 \end{cases}.$$

-α_1= 2
α_1= $\frac{2}{-1}$
α_1= -2.

1= -2 + α_2
α_2= 1 + 2

α_2= 3.

Por lo tanto, las coordenadas de v= (1, 2) son (-2, 3).

Ejercicio 13.

Hallar una base para cada conjunto del Ejercicio 3 que sea un subespacio.

(a) *S= {(x, 0): x ∈ ℝ}.*

Los vectores en S tienen la forma (x, 0), donde x ∈ ℝ, lo cual indica que todos los vectores de S son escalares de (1, 0), por lo que S es un subespacio unidimensional generado por el vector (1, 0). Por un lado, este vector es no nulo, por lo que es linealmente independiente y, por otro lado, genera S. Por lo tanto, una base para S es {(1, 0)}.

(c) *S= {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: x + y= 0}.*

Los vectores en S tienen la forma (x, -x), donde x ∈ ℝ, lo cual indica que todos los vectores de S son escalares de (1, -1), por lo que S es un subespacio unidimensional generado por este vector. Por un lado, este vector es no nulo, por lo que es linealmente independiente y, por otro lado, genera S. Por lo tanto, una base para S es {(1, -1)}.

(e) *S= {(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$: z= x - y}.*

Los vectores en S tienen la forma (x, y, x - y), donde x, y ∈ ℝ, lo cual indica que todos los vectores de S son una combinación lineal de los vectores (1, 0, 1) y (0, 1, -1), por lo que S es un subespacio bidimensional generado por estos vectores. Por un lado, estos vectores son linealmente independientes y, por otro lado, generan S. Por lo tanto, una base para S es {(1, 0, 1); (0, 1, -1)}.

(g) *S= {(x, y, z, w) ∈ $\mathbb{R}^4$: x + y - w= 0, z + 3y= 0}.*

Los vectores en S tienen la forma (x, y, -3y, x + y), donde x, y ∈ ℝ, lo cual indica que todos los vectores de S son una combinación lineal de los vectores (1, 0, 0, 1) y (0, 1, -3, 1), por lo que S es un subespacio bidimensional generado por estos vectores. Por un lado, estos vectores son linealmente independientes y, por otro lado, generan S. Por lo tanto, una base para S es {(1, 0, 0, 1); (0, 1, -3, 1)}.

(h) *S= {$\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$: a, b, c ∈ ℝ}.*

Los vectores en S tienen la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$, donde a, b, c ∈ ℝ, lo cual indica que todas las matrices de S son una combinación lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que S es un espacio tridimensional generado por estas matrices. Por un lado, estas matrices son linealmente independientes y, por otro lado, generan S. Por lo tanto, una base para S es $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

Ejercicio 14.

Analizar si las siguientes aplicaciones entre espacios vectoriales son transformaciones lineales:

(a) *L:* $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por L (x, y)= (x, y, x + y).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^2$, se tiene:

L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 (x_1, y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $((\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 (x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 (x_1 + y_1)) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2, \alpha_2 (x_2 + y_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $\alpha_1 (x_1, y_1, x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2, x_2 + y_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L $(x_1, y_1) + \alpha_2$ L (x_2, y_2)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L $(v_1) + \alpha_2$ L (v_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

(b) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (x + z, y + z).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 (x_1, y_1, z_1) + \alpha_2 (x_2, y_2, z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $((\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 z_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2, \alpha_2 z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 (x_1 + z_1) + \alpha_2 (x_2 + z_2), \alpha_1 (y_1 + z_1) + \alpha_2 (y_2 + z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 (x_1 + z_1), \alpha_1 (y_1 + z_1)) + (\alpha_2 (x_2 + z_2), \alpha_2 (y_2 + z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $\alpha_1 (x_1 + z_1, y_1 + z_1) + \alpha_2 (x_2 + z_2, y_2 + z_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L $(x_1, y_1, z_1) + \alpha_2$ L (x_2, y_2, z_2)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L $(v_1) + \alpha_2$ L (v_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

(c) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por L (x, y, z)= (x - 2, y + 3x, 1).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 (x_1, y_1, z_1) + \alpha_2 (x_2, y_2, z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $((\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 z_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2, \alpha_2 z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$

L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= ($\alpha_1 x_1$ + $\alpha_2 x_2$ - 2, $\alpha_1 y_1$ + $\alpha_2 y_2$ + 3 ($\alpha_1 x_1$ + $\alpha_2 x_2$), 1)
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= ($\alpha_1 x_1$ + $\alpha_2 x_2$ - 2, $\alpha_1 y_1$ + $\alpha_2 y_2$ + 3$\alpha_1 x_1$ + 3$\alpha_2 x_2$, 1)
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= ($\alpha_1 x_1$ + $\alpha_2 x_2$ - 2, α_1 (y_1 + 3x_1) + α_2 (y_2 + 3x_2), 1)
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= ($\alpha_1 x_1$ - 2, α_1 (y_1 + 3x_1), 1) + ($\alpha_2 x_2$, α_1 (y_1 + 3x_1), 0).

Por lo tanto, L no es una transformación lineal.

(d) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2x2}$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$.

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{2x2}$, se tiene:

L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L (α_1 $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ + α_2 $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$)
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L ($\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & \alpha_1 y_1 \\ \alpha_1 z_1 & \alpha_1 w_1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & \alpha_2 y_2 \\ \alpha_2 z_2 & \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$)
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= $\begin{pmatrix} \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & -(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= $\begin{pmatrix} \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & -\alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= $\begin{pmatrix} \alpha_1 z_1 & -\alpha_1 x_1 \\ \alpha_1 y_1 & -\alpha_1 w_1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} \alpha_2 z_2 & -\alpha_2 x_2 \\ \alpha_2 y_2 & -\alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= α_1 $\begin{pmatrix} z_1 & -x_1 \\ y_1 & -w_1 \end{pmatrix}$ + α_2 $\begin{pmatrix} z_2 & -x_2 \\ y_2 & -w_2 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= α_1 L $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ + α_2 L $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= α_1 L (A_1) + α_2 L (A_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

(e) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2x2}$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} x & -x \\ y & 1 \end{pmatrix}$.

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{2x2}$, se tiene:

L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L (α_1 $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ + α_2 $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$)
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L ($\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & \alpha_1 y_1 \\ \alpha_1 z_1 & \alpha_1 w_1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & \alpha_2 y_2 \\ \alpha_2 z_2 & \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$)
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & 1 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & 1 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & -\alpha_1 x_1 \\ \alpha_1 y_1 & 1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & -\alpha_2 x_2 \\ \alpha_2 y_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, L no es una transformación lineal.

(f) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$*= (x + z, y + w).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{2x2}$, se tiene:

L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L (α_1 $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ + α_2 $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$)
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L ($\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & \alpha_1 y_1 \\ \alpha_1 z_1 & \alpha_1 w_1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & \alpha_2 y_2 \\ \alpha_2 z_2 & \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$)
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= L $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= ($\alpha_1 x_1$ + $\alpha_2 x_2$ + $\alpha_1 z_1$ + $\alpha_2 z_2$, $\alpha_1 y_1$ + $\alpha_2 y_2$ + $\alpha_1 w_1$ + $\alpha_2 w_2$)
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= (α_1 (x_1 + z_1) + α_2 (x_2 + z_2), α_1 (y_1 + w_1) + α_2 (y_2 + w_2))
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= (α_1 (x_1 + z_1), α_1 (y_1 + w_1)) + (α_2 (x_2 + z_2), α_2 (y_2 + w_2))
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= α_1 (x_1 + z_1, y_1 + w_1) + α_2 (x_2 + z_2, y_2 + w_2)
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= α_1 L $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ + α_2 L $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$
L ($\alpha_1 A_1$ + $\alpha_2 A_2$)= α_1 L (A_1) + α_2 L (A_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

(g) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (0, 0).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= L (α_1 (x_1, y_1, z_1) + α_2 (x_2, y_2, z_2))
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= L (($\alpha_1 x_1$, $\alpha_1 y_1$, $\alpha_1 z_1$) + ($\alpha_2 x_2$, $\alpha_2 y_2$, $\alpha_2 z_2$))
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= L ($\alpha_1 x_1$ + $\alpha_2 x_2$, $\alpha_1 y_1$ + $\alpha_2 y_2$, $\alpha_1 z_1$ + $\alpha_2 z_2$)
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= (0, 0)
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= (0, 0) + (0, 0)
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= α_1 (0, 0) + α_2 (0, 0)
L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= α_1 L (v_1) + α_2 L (v_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

Ejercicio 15.

Hallar el núcleo e imagen de cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior y las dimensiones de cada uno de esos subespacios.

(a) *L:* $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por L (x, y)= (x, y, x + y).*

Núcleo:

L (x, y)= (0, 0, 0)
(x, y, x + y)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

x= 0.
y= 0.

0 + 0= 0
0= 0.

Nu(L)= {(0, 0)}.

dim (Nu(L))= 0.

Imagen:

Im(L)= span{L (1, 0), L (0, 1)}
Im(L)= span{(1, 0, 1 + 0), (0, 1, 0 + 1)}
Im(L)= span{(1, 0, 1), (0, 1, 1)}
Im(L)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (0, 1, 1), con α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$
Im(L)= $\mathbb{R}^2$.

dim (Im(L))= 2.

(b) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (x + z, y + z).*

Núcleo:

L (x, y, z)= (0, 0)
(x + z, y + z)= (0, 0).

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

z= -x.

y + (-x)= 0
y - x= 0
y= x.

Nu(L)= span{(1, 1, -1)}
Nu(L)= α_1 (1, 1, -1), con $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

dim (Nu(L))= 1.

<u>Imagen:</u>

Im(L)= span{L (1, 0, 0), L (0, 1, 0), L (0, 0, 1)}
Im(L)= span{(1 + 0, 0 + 0), (0 + 0, 1 + 0), (0 + 1, 0 + 1)}
Im(L)= span{(1, 0), (0, 1), (1, 1)}
Im(L)= span{(1, 0), (0, 1)}
Im(L)= α_1 (1, 0) + α_2 (0, 1), con α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$
Im(L)= $\mathbb{R}^2$.

dim (Im(L))= 2.

(d) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2x2}$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$.

<u>Núcleo:</u>

L $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} z = 0 \\ -x = 0 \\ y = 0 \\ -w = 0 \end{cases}.$$

x= 0; y= 0; z= 0; w= 0.

Nu(L)= $\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

dim (Nu(L))= 0.

<u>Imagen:</u>

Im(L)= span{L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}
Im(L)= span{$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$}

Im(L)= $\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ + $\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ + $\alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ + $\alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$
Im(L)= $\mathbb{R}^{2x2}$.

dim (Im(L))= 4.

(f) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$*= (x + z, y + w).*

Núcleo:

L $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$= (0, 0)
(x + z, y + w)= (0, 0).

$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$.

z= -x.
w= -y.

Nu(L)= $\{\begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}$: x, y $\in \mathbb{R}\}$.

dim (Nu(L))= 2.

Imagen:

Im(L)= span{L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}
Im(L)= span{(1 + 0, 0 + 0), (0 + 0, 1 + 0), (0 + 1, 0 + 0), (0 + 0, 0 + 1)}
Im(L)= span{(1, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 1)}
Im(L)= span{(1, 0), (0, 1)}
Im(L)= α_1 (1, 0) + α_2 (0, 1), con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Im(L)= $\mathbb{R}^2$.

dim (Im(L))= 2.

(g) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (0, 0).*

Núcleo:

L (x, y, z)= (0, 0)
(0, 0)= (0, 0).

Nu(L)= $\mathbb{R}^3$.

dim (Nu(L))= 3.

Imagen:

Im(L)= {(0, 0)}.

dim (Im(L))= 0.

Ejercicio 16.

Mostrar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

Sean L: V ⟶ W una transformación lineal de V en W y M: W ⟶ U una transformación lineal de W en U.

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in$ V, se tiene:

(M ∘ L) ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= M (L ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$))
(M ∘ L) ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= M (α_1 L (v_1) + α_2 L (v_2)) por L transformación lineal
(M ∘ L) ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= α_1 M (L (v_1)) + α_2 M (L (v_2)) por M transformación lineal
(M ∘ L) ($\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$)= α_1 (M ∘ L) (v_1) + α_2 (M ∘ L) (v_2).

Por lo tanto, la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

Ejercicio 17.

(a) *¿Es la aplicación identidad una transformación lineal? En caso de serlo, hallar núcleo e imagen.*

$\forall$ v $\in$ V, I: V $\longrightarrow$ V definida por I (v)= v.

Para todo α_1, α_2 $\in$ $\mathbb{R}$ y v_1, v_2 $\in$ V, se tiene:

I $(\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2)$= $\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2$
I $(\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2)$= I $(\alpha_1 v_1)$ + I $(\alpha_2 v_2)$
I $(\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2)$= α_1 I (v_1) + α_2 I (v_2).

Por lo tanto, la aplicación identidad es una transformación lineal.

Nu(I)= {v $\in$ V: I (v)= 0_V}
Nu(I)= $\{0_V\}$.

Im(I)= {w $\in$ V: $\exists$ v $\in$ V, I (v)= w}
Im(I)= V.

(b) *¿Es la aplicación nula una transformación lineal? En caso de serlo, hallar núcleo e imagen.*

$\forall$ v $\in$ V, N: V $\longrightarrow$ V definida por N (v)= 0_V.

Para todo α_1, α_2 $\in$ $\mathbb{R}$ y v_1, v_2 $\in$ V, se tiene:

N $(\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2)$= 0_V
N $(\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2)$= 0_V + 0_V
N $(\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2)$= $\alpha_1 0_V$ + $\alpha_2 0_V$
N $(\alpha_1 v_1$ + $\alpha_2 v_2)$= α_1 N (v_1) + α_2 N (v_2).

Por lo tanto, la aplicación nula es una transformación lineal.

Nu(N)= {v $\in$ V: N (v)= 0_V}
Nu(N)= {V}.

Im(N)= {w $\in$ V: $\exists$ v $\in$ V, N (v)= w}
Im(N)= $\{0_V\}$.

Ejercicio 18.

Sean C= C [a, b] el espacio vectorial de las funciones continuas de [a, b] en $\mathbb{R}$ *y L: C* $\longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por L (f)=* $\int_a^b f\ (x)\ dx$*. Mostrar que L es una transformación lineal.*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y f_1, $f_2 \in$ C, se tiene:

L $(\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2)$= $\int_a^b \alpha_1 f_1\ (x) + \alpha_2 f_2\ (x)\ dx$
L $(\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2)$= $\int_a^b \alpha_1 f_1\ (x)\ dx$ + $\int_a^b \alpha_2 f_2\ (x)\ dx$
L $(\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2)$= $\alpha_1 \int_a^b f_1\ (x)\ dx$ + $\alpha_2 \int_a^b f_2\ (x)\ dx$
L $(\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2)$= α_1 L (f_1) + α_2 L (f_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

Ejercicio 19.

Sean C= C [a, b] el espacio vectorial de las funciones continuas de [a, b] en ℝ y D: C ⟶ C dado por D (f)= f´ (esto es, para cada función f ∈ C, el operador derivación, D, devuelve la derivada f´ de f). Mostrar que D es una transformación lineal.

Para todo α_1, α_2 ∈ ℝ y f_1, f_2 ∈ C, se tiene:

D ($\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2$)= ($\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2$)'
D ($\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2$)= ($\alpha_1 f_1$)´ + ($\alpha_2 f_2$)´
D ($\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2$)= $\alpha_1 f_1'$ + $\alpha_2 f_2'$
D ($\alpha_1 f_1$ + $\alpha_2 f_2$)= α_1 D (f_1) + α_2 D (f_2).

Por lo tanto, D es una transformación lineal.

Ejercicio 20.

Demostrar que, dada cualquier transformación lineal L: V ⟶ W (con V, W espacios vectoriales), el núcleo y la imagen de L forman un subespacio de V y W, respectivamente.

Nu(L)= {v ∈ V: L (v)= 0_W}.

Elemento neutro: El elemento neutro en V es 0_V. En particular, con v= 0_V ∈ V, L (0_V)= 0_W, por lo que 0_V ∈ Nu(L) y, entonces, Nu(L)≠ ∅.

Cerradura bajo la suma: Para cada v_1, v_2 ∈ Nu(L), v_1 + v_2 ∈ Nu(L). En particular, L (v_1 + v_2)= L (v_1) + L (v_2)= 0_W + 0_W= 0_W, por lo que v_1 + v_2 ∈ Nu(L).

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo v ∈ Nu(L) y k ∈ ℝ, kv ∈ Nu(L). En particular, L (kv)= k L (v)= k0_W= 0_W, por lo que kv ∈ Nu(L).

Por lo tanto, Nu(L) es un subespacio de V, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

Im(L)= {w ∈ W: ∃ v ∈ V, L (v)= w}.

Elemento neutro: El elemento neutro en W es 0_W. En particular, con v= 0_V ∈ V, L (0_V)= 0_W, por lo que 0_W ∈ Im(L) y, entonces, Im(L)≠ ∅.

Cerradura bajo la suma: Para cada w_1, w_2 ∈ Im(L), w_1 + w_2 ∈ Im(L). En particular, w_1 + w_2= L (v_1) + L (v_2)= L (v_1 + v_2), con v_1 + v_2 ∈ V, por lo que w_1 + w_2 ∈ Im(L).

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo w ∈ Im(L) y k ∈ ℝ, kw ∈ Im(L). En particular, kw= k L (v)= L (kv), con kv ∈ V, por lo que kw ∈ Im(L).

Por lo tanto, Im(L) es un subespacio de W, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

Ejercicio 21.

(a) *Hallar L: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que: L (1, 0)= (1, -2), L (0, 1)= (1, -1).*

(x, y)= x (1, 0) + y (0, 1).

L (x, y)= L (x (1, 0) + y (0, 1))
L (x, y)= L (x (1, 0)) + L (y (0, 1))
L (x, y)= x L (1, 0) + y L (0, 1)
L (x, y)= x (1, -2) + y (1, -1)
L (x, y)= (x, -2x) + (y, -y)
L (x, y)= (x + y, -2x - y).

(b) *Hallar L: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que: L (1, 0, 0)= (1, 0), L (0, 1, 0)= (-1, 6), L (0, 0, 1)= (0, 4).*

(x, y, z)= x (1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z (0, 0, 1).

L (x, y, z)= L (x (1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z (0, 0, 1))
L (x, y, z)= L (x (1, 0, 0)) + L (y (0, 1, 0)) + L (z (0, 0, 1))
L (x, y, z)= x L (1, 0, 0) + y L (0, 1, 0) + z L (0, 0, 1)
L (x, y, z)= x (1, 0) + y (-1, 6) + z (0, 4)
L (x, y, z)= (x, 0) + (-y, 6y) + (0, 4z)
L (x, y, z)= (x - y, 6y + 4z).

(c) *Hallar L: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que: L (1, 1)= (4, 2), L (0, 3)= (1, 0).*

(x, y)= α_1 (1, 1) + α_2 (0, 3)
(x, y)= (α_1, α_1) + (0, 3α_2)
(x, y)= (α_1, α_1 + 3α_2).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}.$$

α_1= x.

y= x + 3α_2
3α_2= y - x
α_2= $\frac{y-x}{3}$.

(x, y)= x (1, 1) + $\frac{y-x}{3}$ (0, 3).

L (x, y)= L (x (1, 1) + $\frac{y-x}{3}$ (0, 3))
L (x, y)= L (x (1, 1)) + L ($\frac{y-x}{3}$ (0, 3))

L (x, y)= x L (1, 1) + $\frac{y-x}{3}$ L (0, 3)
L (x, y)= x (4, 2) + $\frac{y-x}{3}$ (1, 0)
L (x, y)= (4x, 2x) + ($\frac{y-x}{3}$, 0)
L (x, y)= ($\frac{11x+y}{3}$, 2x).

(d) *Hallar L: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sabiendo que: L (1, 1, 1)= (1, 2, 3), L (0, 1, 0)= (1, -1, 0), L (-1, -1, 1)= (5, 4, 3).*

(x, y, z)= α_1 (1, 1, 1) + α_2 (0, 1, 0) + α_3 (-1, -1, 1)
(x, y, z)= (α_1, α_1, α_1) + (0, α_2, 0) + (-α_3, -α_3, α_3)
(x, y, z)= (α_1 - α_3, α_1 + α_2 - α_3, α_1 + α_3).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_3 \\ y = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3. \\ z = \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases}$$

α_1= x + α_3.

y= x + α_3 + α_2 - α_3
y= x + α_2
α_2= y - x.

z= x + α_3 + α_3
z= x + 2α_3
2α_3= z - x
α_3= $\frac{z-x}{2}$.

α_1= x + $\frac{z-x}{2}$
α_1= $\frac{x+z}{2}$.

(x, y, z)= $\frac{x+z}{2}$ (1, 1, 1) + (y - x) (0, 1, 0) + $\frac{z-x}{2}$ (-1, -1, 1).

L (x, y, z)= L ($\frac{x+z}{2}$ (1, 1, 1) + (y - x) (0, 1, 0) + $\frac{z-x}{2}$ (-1, -1, 1))
L (x, y, z)= L ($\frac{x+z}{2}$ (1, 1, 1)) + L ((y - x) (0, 1, 0)) + L ($\frac{z-x}{2}$ (-1, -1, 1))
L (x, y, z)= $\frac{x+z}{2}$ L (1, 1, 1) + (y - x) L (0, 1, 0) + $\frac{z-x}{2}$ L (-1, -1, 1)
L (x, y, z)= $\frac{x+z}{2}$ (1, 2, 3) + (y - x) (1, -1, 0) + $\frac{z-x}{2}$ (5, 4, 3)
L (x, y, z)= ($\frac{1}{2}$ (x + z), x + z, $\frac{3}{2}$ (x + z)) + (y - x, x - y, 0) + ($\frac{5}{2}$ (z - x), 2 (z - x), $\frac{3}{2}$ (z - x))
L (x, y, z)= ($\frac{1}{2}$ (x + z) + (y - x) + $\frac{5}{2}$ (z - x), x + z + (x - y) + 2 (z - x), $\frac{3}{2}$ (x + z) + $\frac{3}{2}$ (z - x))
L (x, y, z)= ($\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{2}$ z + y - x + $\frac{5}{2}$ z - $\frac{5}{2}$ x, x + z + x - y + 2z - 2x, $\frac{3}{2}$ x + $\frac{3}{2}$ z + $\frac{3}{2}$ z - $\frac{3}{2}$ x)
L (x, y, z)= (-3x + y + 3z, 3z - y, 3z).

Ejercicio 22.

Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

(a) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (z - y, z - x) con las bases canónicas de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\mathbb{R}^2$.

L (1, 0, 0)= (0 - 0, 0 - 1)
L (1, 0, 0)= (0, -1)
L (1, 0, 0)= 0 (1, 0) + -1 (0, 1).

L (0, 1, 0)= (0 - 1, 0 - 0)
L (0, 1, 0)= (-1, 0)
L (0, 1, 0)= -1 (1, 0) + 0 (0, 1).

L (0, 0, 1)= (1 - 0, 1 - 0)
L (0, 0, 1)= (1, 1)
L (0, 0, 1)= 1 (1, 0) + 1 (0, 1).

$[L]_{B_{\mathbb{R}^3}B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por L (x, y, z)= (3x + z, y - x, 2z + 2y) con la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

L (1, 0, 0)= (3 * 1 + 0, 0 - 1, 2 * 0 + 2 * 0)
L (1, 0, 0)= (3 + 0, -1, 0 + 0)
L (1, 0, 0)= (3, -1, 0)
L (1, 0, 0)= 3 (1, 0, 0) + -1 (0, 1, 0) + 0 (0, 0, 1).

L (0, 1, 0)= (3 * 0 + 0, 1 - 0, 2 * 0 + 2 * 1)
L (0, 1, 0)= (0 + 0, 1, 0 + 2)
L (0, 1, 0)= (0, 1, 2)
L (0, 1, 0)= 0 (1, 0, 0) + 1 (0, 1, 0) + 2 (0, 0, 1).

L (0, 0, 1)= (3 * 0 + 1, 0 - 0, 2 * 1 + 2 * 0)
L (0, 0, 1)= (0 + 1, 0, 2 + 0)
L (0, 0, 1)= (1, 0, 2)
L (0, 1, 0)= 1 (1, 0, 0) + 0 (0, 1, 0) + 2 (0, 0, 1).

$[L]_{B_{\mathbb{R}^3}B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$*= (x + y, z + w) con B la base canónica de las matrices de* $\mathbb{R}^{2x2}$ *y* B_1*= {(1, 1); (-1, 5)} una base de* $\mathbb{R}^2$*.*

L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= (1 + 0, 0 + 0)
L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= (1, 0).

L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= (0 + 1, 0 + 0)
L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= (1, 0).

L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$= (0 + 0, 1 + 0)
L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$= (0, 1).

L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= (0 + 0, 0 + 1)
L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= (0, 1).

(1, 0)= α_1 (1, 1) + α_2 (-1, 5)
(1, 0)= (α_1, α_1) + (-α_2, 5α_2)
(1, 0)= (α_1 - α_2, α_1 + 5α_2).

$\begin{cases} 1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases}$.

5α_2= -α_1
α_2= $\frac{-1}{5}$ α_1.

1= α_1 - ($\frac{-1}{5}$ α_1)
1= α_1 + $\frac{1}{5}$ α_1
1= $\frac{6}{5}$ α_1
α_1= $\frac{1}{\frac{6}{5}}$
α_1= $\frac{5}{6}$.

α_2= $\frac{-1}{5}$ $\frac{5}{6}$
α_2= $\frac{-1}{6}$.

L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= $\frac{5}{6}$ (1, 1) + ($\frac{-1}{6}$) (-1, 5).
L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= $\frac{5}{6}$ (1, 1) + ($\frac{-1}{6}$) (-1, 5).

(0, 1)= α_1 (1, 1) + α_2 (-1, 5)
(0, 1)= (α_1, α_1) + (-α_2, 5α_2)
(0, 1)= (α_1 - α_2, α_1 + 5α_2).

$\begin{cases} 0 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases}$.

α_2= α_1.

1= α_1 + 5α_1
1= 6α_1
α_1= $\frac{1}{6}$.

α_2= $\frac{1}{6}$.

L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$= $\frac{1}{6}$ (1, 1) + $\frac{1}{6}$ (-1, 5).
L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\frac{1}{6}$ (1, 1) + $\frac{1}{6}$ (-1, 5).

$[L]_{B_{\mathbb{R}^{2x2}} B_1}$= $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.