

# Algoritmos y Estructuras de Datos

## Cursada 2025

### Ejercitación de Árboles Binarios, de Expresión y Generales

1.- Dado un árbol binario T cuyo recorrido postorden es A G F E B J I H C D y su recorrido inorden es A B G E F D J H I C ¿cuántos son los descendientes del nodo "C"?

- (a) 2                      (b) 1                      (c) 3                      (d) ninguna de las anteriores

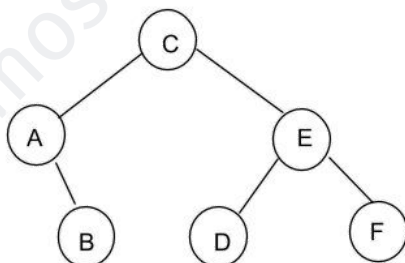
2.- Defina árbol binario completo y árbol binario lleno. Ejemplifique. ¿Es verdad que todo árbol binario completo es lleno? ¿Y viceversa?

3.- Suponga que para un árbol binario T con N nodos ( $N > 1$ ), el último nodo en postorden es el mismo que el último nodo en inorden, ¿qué se puede concluir?

- (a) El subárbol izquierdo de T es vacío  
(b) El subárbol derecho de T es vacío  
(c) Ningún nodo en el árbol tiene dos hijos  
(d) Hay a lo sumo 3 nodos en el árbol

4.- Se han estudiado los distintos recorridos de un árbol binario. Abajo se muestra un código que combina dos de ellos. ¿Cuál es el resultado si se llama con la raíz del árbol de la figura?

```
public void traverse(ArbolBinario<T> a) {  
    if (!a.esVacio()) {  
        System.out.print(a.getDato());  
        if (a.tieneHijoIzquierdo())  
            traverse(a.getHijoIzquierdo());  
        if (a.tieneHijoDerecho())  
            traverse(a.getHijoDerecho());  
        System.out.print(a.getDato());  
    }  
}
```

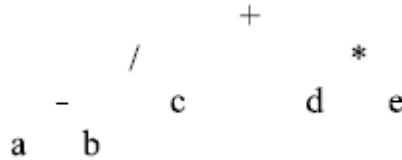


5.- Evalúe la siguiente expresión postfija y determine cuál es el resultado.

6 5 \* 7 3 - 4 8 + \* +

- (a) 78                      (b) 66                      (c) 34                      (d) 44

6.- Elija la expresión algebraica almacenada en el siguiente árbol:



- (a)  $((a - b / c) + d * e)$   
 (b)  $((a - b) / (c + d)) + d * e$   
 (c)  $((a - b / c) + (d * e))$   
 (d)  $((a - b) / c) + (d * e)$

7.- ¿Cuál es el número mínimo de nodos en un árbol binario completo de altura

4?

- (a) 10                      (b) 15                      (c) 12                      (d) 31                      (e) 16

8.- Construya el árbol de expresión correspondiente a la siguiente expresión postfija.

6 5 \* 7 3 - 4 8 \* + +

9.- Construya el árbol de expresión correspondiente a la siguiente expresión

infija.  $(A + (B * C)) * (D - E)$

10.- Construya el árbol de expresión correspondiente a la siguiente expresión prefija

$++ae / * - bcd f$

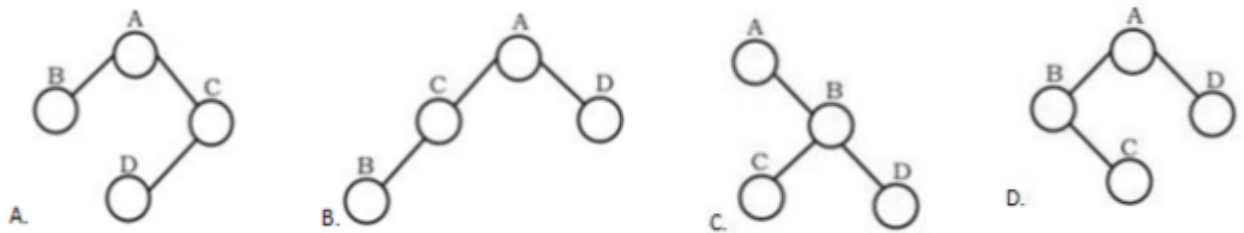
¿Cuál es la profundidad del nodo d?

- (a) 1                      (b) 2                      (c) 3                      (d) 4

11.- Obtenga la expresión prefija de la siguiente expresión postfija:

A B C \* D - E F / G / - \*

12.- ¿Cuál de los siguientes árboles binarios tiene su recorrido inorden BCAD y preorden ABCD?

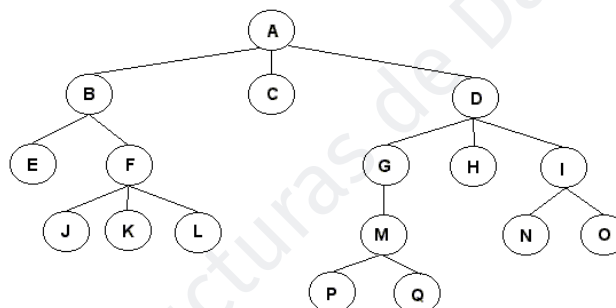


13.- Reconstruya el árbol binario T cuyo recorrido **preorden** es 2 5 3 9 7 1 6 4 8 y su recorrido **inorden** es 9 3 7 5 1 2 6 8 4.

14.- En un árbol binario lleno, si hay **L** hojas, entonces el número total de nodos **N** es:

- a)  $N = 2 * L$
- b)  $N = L + 1$
- c)  $N = L - 1$
- d)  $N = 2 * L - 1$

15.- La siguiente figura muestra un árbol general:



(a) Complete los blancos de las sentencias con la terminología vista en clase.

- i. .... es la raíz del árbol.
- ii. .... es padre de B, C y D.
- iii. .... y .... son hermanos, puesto que ambos son hijos de B.
- iv. .... y .... son las hojas del árbol.
- v. El camino desde A a J es único, lo conforman los nodos ..... y es de largo .....
- vi. .... es ancestro de P, y por lo tanto .... es descendiente de D.
- vii. L no es descendiente de C, puesto que no existe ..... desde C a L.
- viii. La profundidad/nivel de C es ....., de F es ..... y de ..... es 4.
- ix. La altura de C es ....., de ..... es 1 y de D es .....
- x. La altura del árbol es 4 (largo del camino entre la ..... y .....).

(b) Aplique los recorridos:

- i. en profundidad
  - a) preorden
  - b) inorden
  - c) postorden
- ii. por niveles

16.- ¿Cuál es el número mínimo y máximo de nodos de un árbol general completo de altura  $h$  y grado  $k$ ?

17.- El recorrido inorden en un árbol general visita:

- a) Primero la mitad de los subárboles hijos, luego la raíz y luego los restantes subárboles hijos
- b) Primero la raíz y luego los subárboles hijos
- c) Primero los subárboles hijos y luego la raíz
- d) Primero el subárbol hijo más izquierdo, luego la raíz y luego los restantes subárboles

18.- En un árbol general, la profundidad de un nodo  $n_1$  es.....

- a) La longitud del único camino que existe entre la raíz y el nodo  $n_1$
- b) La longitud del camino más largo que existe entre el nodo  $n_1$  y una hoja
- c) La cantidad de nodos hijos del nodo  $n_1$
- d) Ninguna de las otras opciones

19.- Un árbol general lleno de grado 4, tiene 21 nodos.

- a) ¿Cuál es la altura del árbol?
- b) Desarrolle el proceso realizado para obtener la respuesta anterior

20.- ¿Cuál es la cantidad mínima de nodos en un árbol general completo de grado 3 y altura 4?

- a) 40
- b) 41
- c) 121
- d) 122

21.- Si un árbol general lleno de grado 5 tiene 125 hojas.

- a) ¿Cuál es la cantidad de nodos internos del árbol?
- b) Desarrolle el proceso realizado para obtener la respuesta anterior.

22.- ¿Cuál es la cantidad de nodos en un árbol general COMPLETO de grado 4 y altura 3?

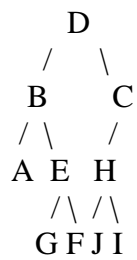
- a) entre 16 y 21
- b) entre 22 y 85
- c) entre 22 y 64
- d) entre 16 y 64

## Ejercitación Teórica N° 1: **Árboles Binarios, de Expresión y Generales.**

### Ejercicio 1.

Dado un árbol binario  $T$  cuyo recorrido postorden es  $A G F E B J I H C D$  y su recorrido inorden es  $A B G E F D J H I C$ . ¿Cuántos son los descendientes del nodo “C”?

- (a) 2.                      (b) 1.                      **(c) 3.**                      (d) ninguna de las anteriores.



## **Ejercicio 2.**

*Definir árbol binario completo y árbol binario lleno. Ejemplificar. ¿Es verdad que todo árbol binario completo es lleno? ¿Y viceversa?*

Árbol binario lleno: Dado un árbol binario  $T$  de altura  $h$ , se dice que  $T$  es lleno si cada nodo interno tiene grado 2 y todas las hojas están en el mismo nivel.

Árbol binario completo: Dado un árbol binario  $T$  de altura  $h$ , se dice que  $T$  es completo si es lleno de altura  $h-1$  y el nivel  $h$  se completa de izquierda a derecha.

No, no es verdad que todo árbol binario completo es lleno, pero sí es cierto que todo árbol binario lleno es completo.

### **Ejercicio 3.**

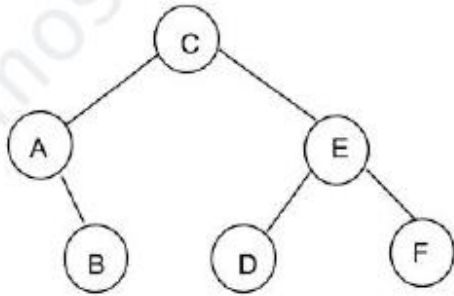
*Suponer que, para un árbol binario  $T$  con  $N$  nodos ( $N > 1$ ), el último nodo en postorden es el mismo que el último nodo en inorden, ¿qué se puede concluir?*

- (a) *El subárbol izquierdo de  $T$  es vacío.*
- (b) *El subárbol derecho de  $T$  es vacío.*
- (c) *Ningún nodo en el árbol tiene dos hijos.*
- (d) *Hay a lo sumo 3 nodos en el árbol.*

**Ejercicio 4.**

Se han estudiado los distintos recorridos de un árbol binario. Abajo se muestra un código que combina dos de ellos. ¿Cuál es el resultado si se llama con la raíz del árbol de la figura?

```
public void traverse(ArbolBinario<T> a) {  
    if (!a.esVacio()) {  
        System.out.print(a.getDato());  
        if (a.tieneHijoIzquierdo())  
            traverse(a.getHijoIzquierdo());  
        if (a.tieneHijoDerecho())  
            traverse(a.getHijoDerecho());  
        System.out.print(a.getDato());  
    }  
}
```



El resultado, si se llama con la raíz del árbol de la figura, es C A B B A E D D F F E C.



**Ejercicio 5.**

*Evaluar la siguiente expresión postfija y determinar cuál es el resultado: 6 5 \* 7 3 - 4 8 + \* +.*

- (a) 78.            (b) 66.            (c) 34.            (d) 44.

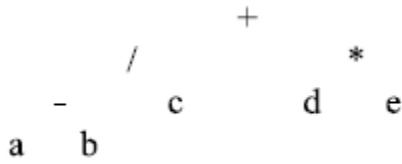
$$(6 * 5) + (7 - 3) * (4 + 8) = 30 + 4 * 12$$

$$(6 * 5) + (7 - 3) * (4 + 8) = 30 + 48$$

$$(6 * 5) + (7 - 3) * (4 + 8) = 78.$$

**Ejercicio 6.**

Elegir la expresión algebraica almacenada en el siguiente árbol:



- (a)  $((a - b / c) + d * e)$ .
- (b)  $((a - b) / (c + d)) + d * e$ .
- (c)  $((a - b / c) + (d * e))$ .
- (d)  $((a - b) / c) + (d * e)$ .

**Ejercicio 7.**

*¿Cuál es el número mínimo de nodos de un árbol binario completo de altura 4?*

- (a) 10.      (b) 15.      (c) 12.      (d) 31.      (e) 16.

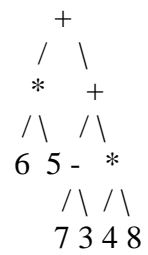
$h = 4$ .

$$2^h = 2^4$$

$$2^h = 16.$$

**Ejercicio 8.**

Construir el árbol de expresión correspondiente a la siguiente expresión postfija: 6 5 \* 7 3 - 4 8 \* + +.



**Ejercicio 9.**

Construir el árbol de expresión correspondiente a la siguiente expresión infija:  $(A + (B * C)) * (D - E)$ .

```
      *
     / \
    +   -
   /\  /\
  A * D E
   /\
  B C
```

**Ejercicio 10.**

Construir el árbol de expresión correspondiente a la siguiente expresión prefija:  $++ a e / * - b c d f$ . ¿Cuál es la profundidad del nodo  $d$ ?

- (a) 1.            (b) 2.            (c) 3.            (d) 4.

```
      +
     / \
    +   /
   /\  /\
  a e * f
     /\
    - d
   /\
  b c
```

### **Ejercicio 11.**

Obtener la expresión prefija de la siguiente expresión postfija:  $A B C * D - E F / G / - *$ .

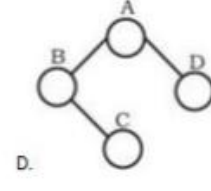
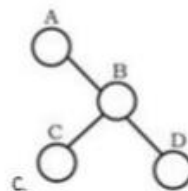
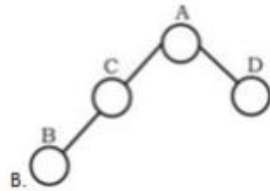
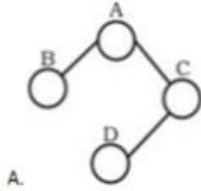
```

      *
    / \
   A  -
    / \
   -  /
  / \ / \
 * D / G
 / \ / \
B C E F
    
```

Expresión prefija:  $* A - - * B C D // E F G$ .

**Ejercicio 12.**

¿Cuál de los siguientes árboles binarios tiene un recorrido inorden BCAD y preorden ABCD?



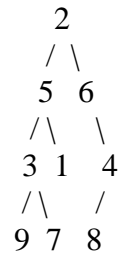
- (a) inorden BADC - preorden ABCD.
- (b) inorden BCAD - preorden ACBD.
- (c) inorden ACBD - preorden ABCD.
- (d) inorden BCAD - preorden ABCD.

De estos árboles binarios, el que tiene un recorrido inorden BCAD y preorden ABCD es el (d).



**Ejercicio 13.**

Reconstruir el árbol binario  $T$  cuyo recorrido preorden es 2 5 3 9 7 1 6 4 8 y su recorrido inorden es 9 3 7 5 1 2 6 8 4.



**Ejercicio 14.**

*En un árbol binario lleno, si hay  $L$  hojas, entonces, el número total de nodos  $N$  es:*

(a)  $N = 2L$ .

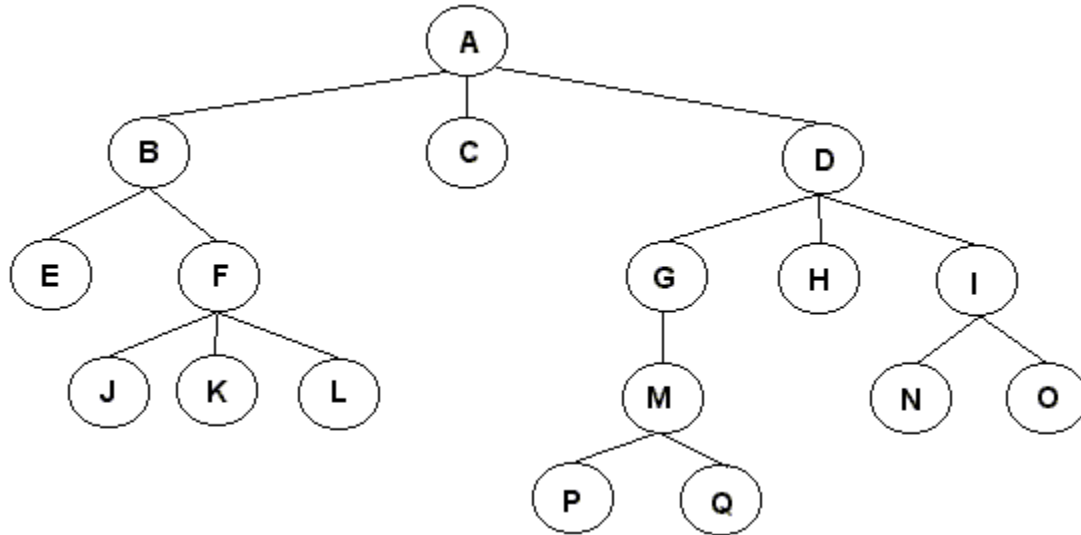
(b)  $N = L + 1$ .

(c)  $N = L - 1$ .

(d)  $N = 2L - 1$ .

**Ejercicio 15.**

La siguiente figura muestra un árbol general:



(a) Completar los blancos de las sentencias con la terminología vista en clase.

- (i) *A es la raíz del árbol.*
- (ii) *A es padre de B, C y D.*
- (iii) *E y F son hermanos, puesto que ambos son hijos de B.*
- (iv) *E, J, K, L, C, P, Q, H, N y O son las hojas del árbol.*
- (v) *El camino desde A a J es único, lo conforman los nodos A, B, F, J y es de largo 3.*
- (vi) *M es ancestro de P y, por lo tanto, M es descendiente de D.*
- (vii) *L no es descendiente de C, puesto que no existe **un camino** desde C a L.*
- (viii) *La profundidad/nivel de C es 1, de F es 2 y de P y Q es 4.*
- (ix) *La altura de C es 0, de F, M e I es 1 y de D es 3.*
- (x) *La altura del árbol es 4 (largo del camino entre la raíz y la hoja más lejana).*

(b) Aplicar los recorridos en profundidad (preorden, inorden, postorden) y por niveles.

Preorden: ABEFJKLCDGMPQHINO.

Inorden: EBJFKLACPMQGDHNIO.

Postorden: EJKLFBCPQMGHNOIDA.

Por niveles: ABCDEFGHIJKLMNOPQ.

**Ejercicio 16.**

*¿Cuál es el número mínimo y máximo de nodos de un árbol general completo de altura  $h$  y grado  $k$ ?*

El número mínimo y máximo de nodos de un árbol general completo de altura  $h$  y grado  $k$  es  $\frac{k^h + k - 2}{k - 1}$  y  $\frac{k^{h+1} - 1}{k - 1}$ , respectivamente.

### **Ejercicio 17.**

*El recorrido inorden en un árbol general visita:*

- (a) *Primero la mitad de los subárboles hijos, luego la raíz y luego los restantes subárboles hijos.*
- (b) *Primero la raíz y luego los subárboles hijos.*
- (c) *Primero los subárboles hijos y luego la raíz.*
- (d) *Primero el subárbol hijo más izquierdo, luego la raíz y luego los restantes subárboles hijos.*

### **Ejercicio 18.**

*En un árbol general, la profundidad de un nodo  $n1$  es:*

- (a)** *La longitud del único camino que existe entre la raíz y el nodo  $n1$ .*
- (b)** *La longitud del camino más largo que existe entre el nodo  $n1$  y una hoja.*
- (c)** *La cantidad de nodos hijos del nodo  $n1$ .*
- (d)** *Ninguna de las otras opciones.*

**Ejercicio 19.**

*Un árbol general lleno de grado 4 tiene 21 nodos.*

**(a)** *¿Cuál es la altura del árbol?*

La altura del árbol es 2.

**(b)** *Desarrollar el proceso realizado para obtener la respuesta anterior.*

$k = 4$ .

$$\frac{k^{h+1}-1}{k-1} = 21$$

$$\frac{4^{h+1}-1}{4-1} = 21$$

$$\frac{4^{h+1}-1}{3} = 21$$

$$4^{h+1} - 1 = 21 * 3$$

$$4^{h+1} - 1 = 63$$

$$4^{h+1} = 63 + 1$$

$$4^{h+1} = 64$$

$$\log_4 4^{h+1} = \log_4 64$$

$$(h+1) \log_4 4 = 3$$

$$(h+1) * 1 = 3$$

$$h+1 = 3$$

$$h = 3 - 1$$

$$h = 2.$$

**Ejercicio 20.**

¿Cuál es la cantidad mínima de nodos en un árbol general completo de grado 3 y altura 4?

- (a) 40.      **(b) 41.**      (c) 121.      (d) 122.

$k=3$ ;  $h=4$ .

$$\begin{aligned}\frac{k^h+k-2}{k-1} &= \frac{3^4+3-2}{3-1} \\ \frac{k^h+k-2}{k-1} &= \frac{81+3-2}{2} \\ \frac{k^h+k-2}{k-1} &= \frac{82}{2} \\ \frac{k^h+k-2}{k-1} &= 41.\end{aligned}$$



**Ejercicio 21.**

*Un árbol general lleno de grado 5 tiene 125 hojas.*

**(a)** *¿Cuál es la cantidad de nodos internos del árbol?*

La cantidad de nodos internos del árbol es 31.

**(b)** *Desarrollar el proceso realizado para obtener la respuesta anterior.*

$k = 5$ .

$$k^h = 125$$

$$5^h = 125$$

$$\log_5 5^h = \log_5 125$$

$$h \log_5 5 = 3$$

$$h * 1 = 3$$

$$h = 3.$$

$$\text{Nodos internos} = \frac{k^{h+1} - 1}{k - 1} - k^h$$

$$\text{Nodos internos} = \frac{5^{3+1} - 1}{5 - 1} - 5^3$$

$$\text{Nodos internos} = \frac{5^4 - 1}{4} - 125$$

$$\text{Nodos internos} = \frac{625 - 1}{4} - 125$$

$$\text{Nodos internos} = \frac{624}{4} - 125$$

$$\text{Nodos internos} = 156 - 125$$

$$\text{Nodos internos} = 31.$$

**Ejercicio 22.**

¿Cuál es la cantidad de nodos en un árbol general completo de grado 4 y altura 3?

(a) entre 16 y 21.      (b) entre 22 y 85.      (c) entre 22 y 64.      (d) entre 16 y 64.

$k=4$ ;  $h=3$ .

$$\frac{k^{h+k-2}}{k-1} = \frac{4^{3+4-2}}{4-1}$$

$$\frac{k^{h+k-2}}{k-1} = \frac{64+4-2}{3}$$

$$\frac{k^{h+k-2}}{k-1} = \frac{66}{3}$$

$$\frac{k^{h+k-2}}{k-1} = 22.$$

$$\frac{k^{h+1}-1}{k-1} = \frac{4^{3+1}-1}{4-1}$$

$$\frac{k^{h+1}-1}{k-1} = \frac{4^4-1}{3}$$

$$\frac{k^{h+1}-1}{k-1} = \frac{256-1}{3}$$

$$\frac{k^{h+1}-1}{k-1} = \frac{255}{3}$$

$$\frac{k^{h+1}-1}{k-1} = 85.$$

# Algoritmos y Estructuras de Datos

## Cursada 2025

### Ejercitación sobre Colas de Prioridades - Heap

#### Ejercicio 1

A partir de una heap inicialmente vacía, inserte de a uno los siguientes valores:

6, 4, 15, 2, 10, 11, 8, 1, 13, 7, 9, 12, 5, 3, 14

#### Ejercicio 2

- a) ¿Cuántos elementos hay, al menos, en una heap de altura  $h$ ?
- b) ¿Dónde se encuentra ubicado el elemento mínimo en una max-heap?
- c) ¿El siguiente arreglo es una max-heap : [23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12] ?

#### Ejercicio 3

Dados los siguientes árboles, indique si representan una heap. Justifique su respuesta.



#### Ejercicio 4

Dibuje todas las min-heaps posibles para este conjunto de claves: {A, B, C, D, E}

#### Ejercicio 5

A partir de una min-heap inicialmente vacía, dibuje la evolución del estado de la heap al ejecutar las siguientes operaciones:

Insert(5), Insert(4), Insert(7), Insert(1), DeleteMin(), Insert(3), Insert(6), DeleteMin(), DeleteMin(), Insert(8), DeleteMin(), Insert(2), DeleteMin(), DeleteMin()

#### Ejercicio 6

Aplique el algoritmo *BuildHeap*, para construir una min-heap en **tiempo lineal**, con los siguientes valores

{150, 80, 40, 10, 70, 110, 30, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 20, 90}

#### Ejercicio 7

Aplique el algoritmo *HeapSort*, para ordenar descendentemente los siguientes elementos:

{15, 18, 40, 1, 7, 10, 33, 2, 140, 500, 11, 12, 13, 90}

Muestre paso a paso la ejecución del algoritmo sobre los datos.

### Ejercicio 8

Construir una max-heap binaria con los siguientes datos:

{5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4}

- a) Insertándolos de a uno
- b) Usando el algoritmo BuildHeap

### Ejercicio 9

Suponga que una heap que representa una cola de prioridades está almacenada en el arreglo A (se comienza de la posición A[1]). Si insertamos la clave 16, ¿en qué posición quedará?

i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A[i]:	11	21	27	37	36	34	32	43	44	42	51	62

- (a) A[2]                      (b) A[3]                      (c) A[6]                      (d) A[7]                      (e) A[12]

### Ejercicio 10

Suponga que una heap que representa una cola de prioridades está almacenada en el arreglo A (se comienza de la posición A[1]). Si aplica un delete-min, ¿en qué posición quedará la clave 62?

i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A[i]:	11	21	27	37	36	34	32	43	44	42	51	62

- (a) A[1]                      (b) A[2]                      (c) A[10]                      (d) A[11]                      (e) A[12]

### Ejercicio 11

- a) Ordenar en forma creciente los datos del ejercicio anterior, usando el algoritmo HeapSort.
- b) ¿Cuáles serían los pasos a seguir si se quiere ordenar en forma decreciente?

### Ejercicio 12

¿Cuáles de los siguientes arreglos representan una max-heap, min-heap o ninguna de las dos?

- arreglo 1: 0 1 2 0 4 5 6 7 8 9
- arreglo 2: 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
- arreglo 3: 5 5 5 6 6 6 6 7 7 1
- arreglo 4: 9 3 9 2 1 6 7 1 2 1
- arreglo 5: 8 7 6 1 2 3 4 2 1 2

### Ejercicio 13

Un arreglo de 7 enteros se ordena ascendentemente usando el algoritmo *HeapSort*. Luego de la fase inicial del algoritmo (la construcción de la heap), ¿cuál de los siguientes es un posible orden del arreglo?

- (a) 85 78 45 51 53 47 49
- (b) 85 49 78 45 47 51 53
- (c) 85 78 49 45 47 51 53
- (d) 45 85 78 53 51 49 47
- (e) 85 51 78 53 49 47 45

#### Ejercicio 14

En una Heap, ¿para un elemento que está en la posición  $i$ , su hijo derecho está en la posición.....?

- (a)  $\lfloor i/2 \rfloor$
- (b)  $2*i$
- (c)  $2*i + 1$
- (d) Ninguna de las anteriores

#### Ejercicio 15

¿Siempre se puede decir que un árbol binario lleno es una Heap?

- (a) Sí
- (b) No

#### Ejercicio 16

La operación que agrega un elemento a la heap que tiene  $n$  elementos, en el peor caso es de .....

- (a)  $O(n)$
- (b)  $O(n \log n)$
- (c)  $O(\log n)$
- (d) Ninguna de las otras opciones

#### Ejercicio 17

Se construyó una Máx-Heap con las siguientes claves: 13, 21, 87, 30, 25, 22, 18. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al resultado de realizar la construcción insertando las claves **una a una**?

- (a) 87, 30, 25, 22, 21, 18, 13
- (b) 87, 30, 22, 21, 25, 13, 18
- (c) 87, 30, 25, 13, 22, 18, 21
- (d) 87, 30, 22, 13, 25, 21, 18

#### Ejercicio 18

Se construyó una Máx-Heap con las siguientes claves: 13, 21, 87, 30, 25, 22, 18. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al resultado de realizar la construcción aplicando el algoritmo **Build-Heap**?

- (a) 87, 30, 25, 22, 21, 18, 13
- (b) 87, 30, 22, 21, 25, 13, 18
- (c) 87, 30, 25, 13, 22, 18, 21
- (d) 87, 30, 22, 13, 25, 21, 18

#### Ejercicio 19

El algoritmo HeapSort consta de dos etapas:

1. Se construye una heap y
2. Se realizan los intercambios necesarios para dejar ordenados los datos. Asuma que la heap ya está construida y es la siguiente:

58 38 53 23 28 40 35 18

¿Cómo quedan los datos en el arreglo después de ejecutar sólo 2 pasos de la segunda etapa del Heapsort?

- (a) 40 38 23 28 35 18 53 58
- (b) 53 38 40 23 28 18 35 58
- (c) 40 38 23 35 28 18 53 58
- (d) 40 38 35 23 28 18 53 58

#### Ejercicio 20

Dada la Min-Heap 3, 8, 5, 15, 10, 7, 19, 28, 16, 25, 12. ¿En qué **posición** está ubicado el hijo derecho de la clave 15?

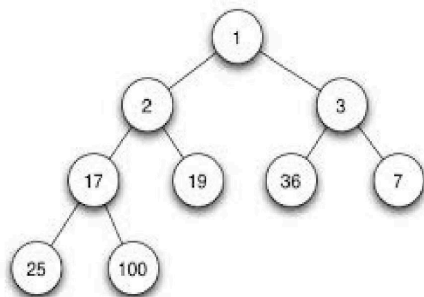
- (a) 7
- (b) 8
- (c) 9
- (d) 10

#### Ejercicio 21

Construya una min-heap con las siguientes claves: 15, 25, 23, 13, 18, 2, 19, 20, 17 insertándolas una a una. Indique en qué posiciones quedaron ubicadas las claves: **2, 18 y 25**.

#### Ejercicio 22

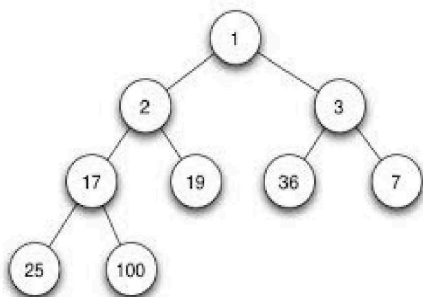
Luego de insertar la clave **15** en la siguiente min-heap, ¿cuántas de las claves que ya estaban en la heap han mantenido su lugar (es decir, ocupan en la min-heap resultante la misma posición que ocupaban antes de la inserción)?



- a) Ninguna
- b) Seis
- c) Ocho
- d) Nueve

#### Ejercicio 23

Luego de una operación de borrado del mínimo en la siguiente min-heap, ¿cuántas claves han cambiado de lugar (es decir, ocupan en la min-heap resultante un lugar diferente al que ocupaban en la min-heap antes del borrado) ? (No contar la clave borrada, ya que no pertenece más a la heap)



- a) Ninguno
- b) Dos
- c) Tres
- d) Cuatro

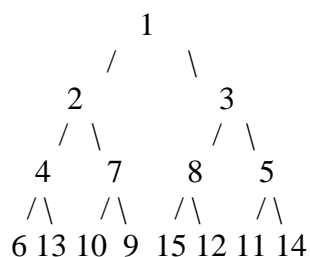
## **Ejercitación Teórica N° 2:** **Cola de Prioridades - Heap.**

### **Ejercicio 1.**

A partir de una heap inicialmente vacía, insertar, de a uno, los siguientes valores: 6, 4, 15, 2, 10, 11, 8, 1, 13, 7, 9, 12, 5, 3, 14.

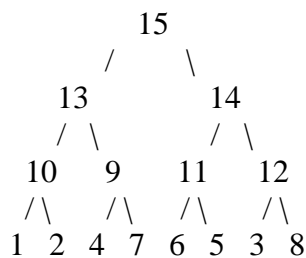
[6] - *Insert(6)*  
 [6, 4] - *Insert(4)*  
 [4, 6]  
 [4, 6, 15] - *Insert(15)*  
 [4, 6, 15, 2] - *Insert(2)*  
 [4, 2, 15, 6]  
 [2, 4, 15, 6]  
 [2, 4, 15, 6, 10] - *Insert(10)*  
 [2, 4, 15, 6, 10, 11] - *Insert(11)*  
 [2, 4, 11, 6, 10, 15]  
 [2, 4, 11, 6, 10, 15, 8] - *Insert(8)*  
 [2, 4, 8, 6, 10, 15, 11]  
 [2, 4, 8, 6, 10, 15, 11, 1] - *Insert(1)*  
 [2, 4, 8, 1, 10, 15, 11, 6]  
 [2, 1, 8, 4, 10, 15, 11, 6]  
 [1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6]  
 [1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6, 13] - *Insert(13)*  
 [1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6, 13, 7] - *Insert(7)*  
 [1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10]  
 [1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10, 9] - *Insert(9)*  
 [1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10, 9, 12] - *Insert(12)*  
 [1, 2, 8, 4, 7, 12, 11, 6, 13, 10, 9, 15]  
 [1, 2, 8, 4, 7, 12, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 5] - *Insert(5)*  
 [1, 2, 8, 4, 7, 5, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12]  
 [1, 2, 5, 4, 7, 8, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12]  
 [1, 2, 5, 4, 7, 8, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 3] - *Insert(3)*  
 [1, 2, 5, 4, 7, 8, 3, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11]  
 [1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11]  
 [1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11, 14] - *Insert(14)*

*Min-Heap:* [1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11, 14].



[6] - *Insert*(6)  
 [6, 4] - *Insert*(4)  
 [6, 4, 15] - *Insert*(15)  
 [15, 4, 6]  
 [15, 4, 6, 2] - *Insert*(2)  
 [15, 4, 6, 2, 10] - *Insert*(10)  
 [15, 10, 6, 2, 4]  
 [15, 10, 6, 2, 4, 11] - *Insert*(11)  
 [15, 10, 11, 2, 4, 6]  
 [15, 10, 11, 2, 4, 6, 8] - *Insert*(8)  
 [15, 10, 11, 2, 4, 6, 8, 1] - *Insert*(1)  
 [15, 10, 11, 2, 4, 6, 8, 1, 13] - *Insert*(13)  
 [15, 10, 11, 13, 4, 6, 8, 1, 2]  
 [15, 13, 11, 10, 4, 6, 8, 1, 2]  
 [15, 13, 11, 10, 4, 6, 8, 1, 2, 7] - *Insert*(7)  
 [15, 13, 11, 10, 7, 6, 8, 1, 2, 4]  
 [15, 13, 11, 10, 7, 6, 8, 1, 2, 4, 9] - *Insert*(9)  
 [15, 13, 11, 10, 9, 6, 8, 1, 2, 4, 7]  
 [15, 13, 11, 10, 9, 6, 8, 1, 2, 4, 7, 12] - *Insert*(12)  
 [15, 13, 11, 10, 9, 12, 8, 1, 2, 4, 7, 6]  
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6]  
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5] - *Insert*(5)  
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3] - *Insert*(3)  
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 14] - *Insert*(14)  
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 14, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8]  
 [15, 13, 14, 10, 9, 11, 12, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8].

*Max-Heap*: [15, 13, 14, 10, 9, 11, 12, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8].



6, 4, 15, 2, 10, 11, 8, 1, 13, 7, 9, 12, 5, 3, 14

La raíz está almacenada en la posición 1. Para un elemento que está en la posición  $i$ , se tiene:

- El hijo izquierdo está en la posición  $2i$ .
- El hijo derecho está en la posición  $2i + 1$ .
- El padre está en la posición  $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ .



## **Ejercicio 2.**

(a) *¿Cuántos elementos hay, al menos, en una heap de altura  $h$ ?*

En una *heap* de altura  $h$ , hay, al menos,  $2^h$  elementos.

(b) *¿Dónde se encuentra ubicado el elemento mínimo en una max-heap?*

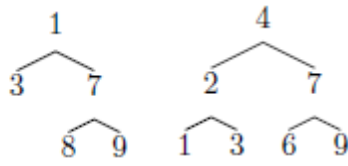
El elemento mínimo en una *max-heap* se encuentra ubicado en alguna de las hojas.

(c) *¿El siguiente arreglo es una max-heap: [23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12]?*

No, este arreglo no es una *max-heap*, ya que el nodo con valor 6 es padre del nodo con valor 7, no cumpliendo con que cada nodo sea mayor o igual que sus hijos.

**Ejercicio 3.**

Dados los siguientes árboles, indicar si representan una *heap*. Justificar la respuesta.



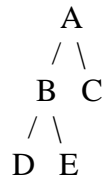
El primer árbol no es una *heap*, ya que no es un árbol binario completo.

El segundo árbol no es una *heap*, ya que, si bien es completo, cada nodo no es menor o igual (o mayor o igual) que sus hijos.

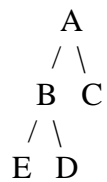
**Ejercicio 4.**

*Dibujar todas las min-heaps posibles para este conjunto de claves: {A, B, C, D, E}.*

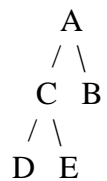
Opción 1:



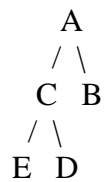
Opción 2:



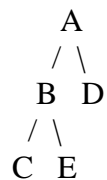
Opción 3:



Opción 4:



Opción 5:



Opción 6:



/ \  
E C

Opción 7:

A  
 / \  
B E  
 / \  
C D

Opción 8:

A  
 / \  
B E  
 / \  
D C

**Ejercicio 5.**

A partir de una min-heap inicialmente vacía, dibujar la evolución del estado de la heap al ejecutar las siguientes operaciones:

*Insert(5), Insert(4), Insert(7), Insert(1), DeleteMin(), Insert(3), Insert(6), DeleteMin(), DeleteMin(), Insert(8), DeleteMin(), Insert(2), DeleteMin(), DeleteMin().*

Insert(5):

5

Insert(4):

5  
/  
4

4  
/  
5

Insert(7):

4  
/ \  
5 7

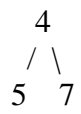
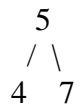
Insert(1):

4  
/ \  
5 7  
/  
1

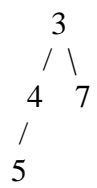
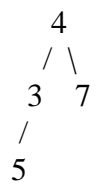
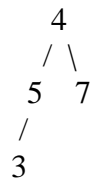
4  
/ \  
1 7  
/  
5

1  
/ \  
4 7  
/  
5

DeleteMin():



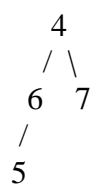
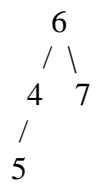
Insert(3):

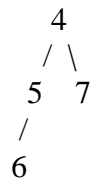


Insert(6):

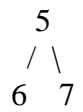
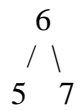


DeleteMin():

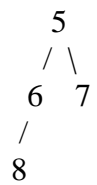




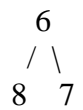
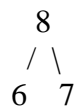
DeleteMin():



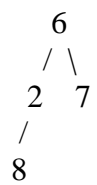
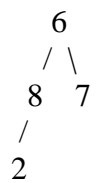
Insert(8):



DeleteMin():



Insert(2):



2

```

    / \
   6  7
  /
 8

```

DeleteMin():

```

    8
   / \
  6  7

```

```

    6
   / \
  8  7

```

DeleteMin():

```

    7
   /
  8

```



**Ejercicio 6.**

Aplicar el algoritmo *BuildHeap* para construir una *min-heap* en tiempo lineal, con los siguientes valores: {150, 80, 40, 10, 70, 110, 30, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 20, 90}.

Se parte de:

[150, 80, 40, 10, 70, 110, 30, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 20, 90].

Se empieza en la posición  $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 7$  del arreglo, el 30, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 70, 110, 20, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 110, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 70, 100, 20, 120, 140, 60, 50, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 70, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 50, 100, 20, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 10, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 50, 100, 20, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 40, y se filtra:

[150, 80, 20, 10, 50, 100, 40, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90]

[150, 80, 20, 10, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 80, y se filtra:

[150, 10, 20, 80, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90].

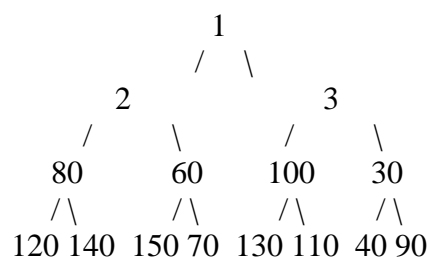
Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 150, y se filtra:

[10, 150, 20, 80, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90]

[10, 50, 20, 80, 150, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90]

[10, 50, 20, 80, 60, 100, 30, 120, 140, 150, 70, 130, 110, 40, 90].

*Min-Heap*: [10, 50, 20, 80, 60, 100, 30, 120, 140, 150, 70, 130, 110, 40, 90].



**Ejercicio 7.**

*Aplicar el algoritmo HeapSort para ordenar, descendentemente, los siguientes elementos: {15, 18, 40, 1, 7, 10, 33, 2, 140, 500, 11, 12, 13, 90}. Mostrar, paso a paso, la ejecución del algoritmo sobre los datos.*

Se parte de:

*Min-Heap:* [1, 2, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13, 90].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 90:

[90, 2, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]  
[2, 90, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]  
[2, 7, 10, 90, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]  
[2, 7, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40, 13 | 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 13:

[13, 7, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1]  
[7, 13, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1]  
[7, 11, 10, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 40:

[40, 11, 10, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1]  
[10, 11, 40, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1]  
[10, 11, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 15:

[15, 11, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1]  
[11, 15, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1]  
[11, 13, 12, 18, 15, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 13, 12, 18, 15, 40, 33, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1]  
[12, 13, 500, 18, 15, 40, 33, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1]  
[12, 13, 33, 18, 15, 40, 500, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 13, 33, 18, 15, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[13, 140, 33, 18, 15, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[13, 15, 33, 18, 140, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 90:

[90, 15, 33, 18, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[15, 90, 33, 18, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[15, 18, 33, 90, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 18, 33, 90, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[18, 500, 33, 90, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[18, 90, 33, 500, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 40:

[40, 90, 33, 500, 140 | 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[33, 90, 40, 500, 140 | 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 90, 40, 500 | 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[40, 90, 140, 500 | 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 90, 140 | 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]  
[90, 500, 140 | 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 500 | 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño:

[500 | 140, 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Arreglo ordenado descendentemente:

[500, 140, 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

**Ejercicio 8.**

Construir una max-heap con los siguientes datos: {5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4}.

(a) Insertándolos de a uno.

[5] - *Insert*(5)  
 [5, 8] - *Insert*(8)  
 [8, 5]  
 [8, 5, 12] - *Insert*(12)  
 [12, 5, 8]  
 [12, 5, 8, 9] - *Insert*(9)  
 [12, 9, 8, 5]  
 [12, 9, 8, 5, 7] - *Insert*(7)  
 [12, 9, 8, 5, 7, 10] - *Insert*(10)  
 [12, 9, 10, 5, 7, 8]  
 [12, 9, 10, 5, 7, 8, 21] - *Insert*(21)  
 [12, 9, 21, 5, 7, 8, 10]  
 [21, 9, 12, 5, 7, 8, 10]  
 [21, 9, 12, 5, 7, 8, 10, 6] - *Insert*(6)  
 [21, 9, 12, 6, 7, 8, 10, 5]  
 [21, 9, 12, 6, 7, 8, 10, 5, 14] - *Insert*(14)  
 [21, 9, 12, 14, 7, 8, 10, 5, 6]  
 [21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6]  
 [21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6, 4] - *Insert*(4)

Max-Heap: [21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6, 4].

(b) Usando el algoritmo BuildHeap.

Se parte de:

[5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4].

Se empieza en la posición  $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 5$  del arreglo, el 7, y se filtra:

[5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 9, y se filtra:

[5, 8, 12, 14, 7, 10, 21, 6, 9, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 12, y se filtra:

[5, 8, 21, 14, 7, 10, 12, 6, 9, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 8, y se filtra:

[5, 14, 21, 8, 7, 10, 12, 6, 9, 4]  
[5, 14, 21, 9, 7, 10, 12, 6, 8, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 5, y se filtra:

[21, 14, 5, 9, 7, 10, 12, 6, 8, 4]  
[21, 14, 12, 9, 7, 10, 5, 6, 8, 4].

*Max-Heap*: [21, 14, 12, 9, 7, 10, 5, 6, 8, 4].

**Ejercicio 9.**

Suponer que una heap que representa una cola de prioridades está almacenada en el arreglo  $A$  (se comienza de la posición  $A[1]$ ). Si se inserta la clave 16, ¿en qué posición quedará?

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A[i]$	11	21	27	37	36	34	32	43	44	42	51	62

- (a)  $A[2]$ .      (b)  $A[3]$ .      (c)  $A[6]$ .      (d)  $A[7]$ .      (e)  $A[12]$ .

[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62]

[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 16] - *Insert(16)*

[11, 21, 27, 37, 36, 16, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 34]

[11, 21, 16, 37, 36, 27, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 34].

**Ejercicio 10.**

Suponer que una heap que representa una cola de prioridades está almacenada en el arreglo  $A$  (se comienza de la posición  $A[1]$ ). Si se aplica un delete-min, ¿en qué posición quedará la clave 62?

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A[i]$	11	21	27	37	36	34	32	43	44	42	51	62

- (a)  $A[1]$ .      (b)  $A[2]$ .      (c)  $A[10]$ .      (d)  $A[11]$ .      (e)  $A[12]$ .

[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62]  
[62, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51] - DeleteMin()  
[21, 62, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51]  
[21, 36, 27, 37, 62, 34, 32, 43, 44, 42, 51]  
[21, 36, 27, 37, 42, 34, 32, 43, 44, 62, 51].

**Ejercicio 11.**

(a) Ordenar, en forma creciente, los datos del ejercicio anterior, usando el algoritmo *HeapSort*.

Se parte de:

*Max-Heap*: [62, 51, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21, 11].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 51, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]  
[51, 11, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]  
[51, 44, 42, 11, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]  
[51, 44, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27, 21 | 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 44, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]  
[44, 21, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]  
[44, 43, 42, 37, 21, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]  
[44, 43, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36, 21 | 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 43, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]  
[43, 21, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]  
[43, 37, 42, 21, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]  
[43, 37, 42, 36, 27, 32, 34, 11, 21 | 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 37, 42, 36, 27, 32, 34, 11 | 43, 44, 51, 62]  
[42, 37, 21, 36, 27, 32, 34, 11 | 43, 44, 51, 62]  
[42, 37, 34, 36, 27, 32, 21, 11 | 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 37, 34, 36, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62]  
[37, 11, 34, 36, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62]  
[37, 36, 34, 11, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 36, 34, 11, 27, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62]  
[36, 21, 34, 11, 27, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62]  
[36, 27, 34, 11, 21, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 32:



[32, 27, 34, 11, 21 | 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]  
[34, 27, 32, 11, 21 | 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 27, 32, 11 | 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]  
[32, 27, 21, 11 | 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 27, 21 | 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]  
[27, 11, 21 | 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 11 | 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño:

[11 | 21, 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Arreglo ordenado ascendentemente:

[11, 21, 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

**(b)** *¿Cuáles serían los pasos a seguir si se quiere ordenar en forma decreciente?*

Los pasos a seguir si se quiere ordenar en forma decreciente sería partir de una *Min-Heap*, intercambiar el primer con el último elemento del arreglo, decrementar el tamaño de éste y filtrar correspondientemente en cada caso.

### **Ejercicio 12.**

*¿Cuáles de los siguientes arreglos representan una max-heap, min-heap o ninguna de las dos?*

**(a)** *arreglo 1: 0 1 2 0 4 5 6 7 8 9.*

Ninguna de las dos.

**(b)** *arreglo 2: 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0.*

*Max-Heap.*

**(c)** *arreglo 3: 5 5 5 6 6 6 6 7 7 1.*

Ninguna de las dos.

**(d)** *arreglo 4: 9 3 9 2 1 6 7 1 2 1.*

*Max-Heap.*

**(e)** *arreglo 5: 8 7 6 1 2 3 4 2 1 2.*

Ninguna de las dos.

**Ejercicio 13.**

*Un arreglo de 7 enteros se ordena ascendentemente usando el algoritmo HeapSort. Luego de la fase inicial del algoritmo (la construcción de la heap), ¿cuál de los siguientes es un posible orden del arreglo?*

- (a) 85 78 45 51 53 47 49.
- (b) 85 49 78 45 47 51 53.
- (c) 85 78 49 45 47 51 53.
- (d) 45 85 78 53 51 49 47.
- (e) 85 51 78 53 49 47 45.

**Ejercicio 14.**

*En una Heap, ¿para un elemento que está en la posición  $i$ , su hijo derecho está en la posición ...?*

- (a)  $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ .
- (b)  $2i$ .
- (c)  $2i + 1$ .
- (d) Ninguna de las anteriores.

### **Ejercicio 15.**

*¿Siempre se puede decir que un árbol binario lleno es una Heap?*

(a) *Sí.*

(b) *No.*

**Ejercicio 16.**

*La operación que agrega un elemento a la heap que tiene  $n$  elementos, en el peor caso, es de ...*

- (a)  $O(n)$ .      (b)  $O(n \log n)$ .      (c)  $O(\log n)$ .      (d) Ninguna de las anteriores.

**Ejercicio 17.**

Se construyó una Max-Heap con las siguientes claves: 13, 21, 87, 30, 25, 22, 18. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al resultado de realizar la construcción insertando las claves una a una?

- (a) 87, 30, 25, 22, 21, 18, 13.
- (b) 87, 30, 22, 21, 25, 13, 18.
- (c) 87, 30, 25, 13, 22, 18, 21.
- (d) 87, 30, 22, 13, 25, 21, 18.

[13] - *Insert(13)*

[13, 21] - *Insert(21)*

[21, 13]

[21, 13, 87] - *Insert(87)*

[87, 13, 21]

[87, 13, 21, 30] - *Insert(30)*

[87, 30, 21, 13]

[87, 30, 21, 13, 25] - *Insert(25)*

[87, 30, 21, 13, 25, 22] - *Insert(22)*

[87, 30, 22, 13, 25, 21]

[87, 30, 22, 13, 25, 21, 18] - *Insert(18)*

Max-Heap: [87, 30, 22, 13, 25, 21, 18].

**Ejercicio 18.**

Se construyó una Max-Heap con las siguientes claves: 13, 21, 87, 30, 25, 22, 18. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al resultado de realizar la construcción aplicando el algoritmo Build-Heap?

- (a) 87, 30, 25, 22, 21, 18, 13.
- (b) 87, 30, 22, 21, 25, 13, 18.
- (c) 87, 30, 25, 13, 22, 18, 21.
- (d) 87, 30, 22, 13, 25, 21, 18.

Se parte de:

[13, 21, 87, 30, 25, 22, 18].

Se empieza en la posición  $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 3$  del arreglo, el 87, y se filtra:

[13, 21, 87, 30, 25, 22, 18].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 21, y se filtra:

[13, 30, 87, 21, 25, 22, 18].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 13, y se filtra:

[87, 30, 13, 21, 25, 22, 18]  
[87, 30, 22, 21, 25, 13, 18].

Max-Heap: [87, 30, 22, 21, 25, 13, 18].



**Ejercicio 19.**

*El algoritmo HeapSort consta de dos etapas:*

- (1) Se construye una heap y*
- (2) Se realizan los intercambios necesarios para dejar ordenados los datos.*

*Asumir que la heap ya está construida y es la siguiente: 58 38 53 23 28 40 35 18.*

*¿Cómo quedan los datos en el arreglo después de ejecutar sólo 2 pasos de la segunda etapa del HeapSort?*

- (a)** 40 38 23 28 35 18 53 58.
- (b)** 53 38 40 23 28 18 35 58.
- (c)** 40 38 23 35 28 18 53 58.
- (d)** 40 38 35 23 28 18 53 58.

Se parte de:

*Max-Heap:* [58, 38, 53, 23, 28, 40, 35, 18].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 18:

[18, 38, 53, 23, 28, 40, 35 | 58]  
[53, 38, 18, 23, 28, 40, 35 | 58]  
[53, 38, 40, 23, 28, 18, 35 | 58].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 35:

[35, 38, 40, 23, 28, 18, 35 | 53, 58]  
[40, 38, 35, 23, 28, 18 | 53, 58].

**Ejercicio 20.**

*Dada la Min-Heap 3, 8, 5, 15, 10, 7, 19, 28, 16, 25, 12. ¿En qué posición está ubicado el hijo derecho de la clave 15?*

- (a) 7.
- (b) 8.
- (c) 9.
- (d) 10.

$$2i + 1 = 2 * 4 + 1$$

$$2i + 1 = 8 + 1$$

$$2i + 1 = 9.$$

**Ejercicio 21.**

Construir una min-heap con las siguientes claves: 15, 25, 23, 13, 18, 2, 19, 20, 17, insertándose una a una. Indicar en qué posiciones quedaron ubicadas las claves: 2, 18 y 25.

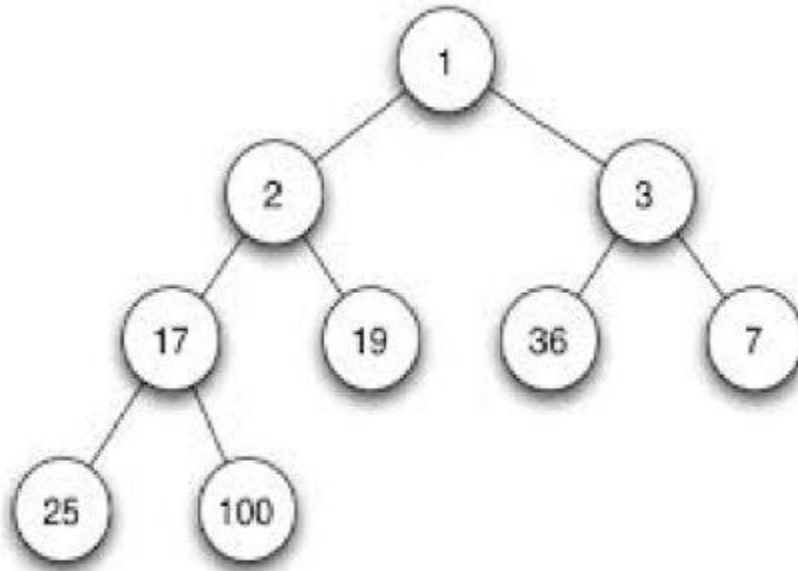
[15] - *Insert(15)*  
[15, 25] - *Insert(25)*  
[15, 25, 23] - *Insert(23)*  
[15, 25, 23, 13] - *Insert(13)*  
[13, 15, 23, 25]  
[13, 15, 23, 25, 18] - *Insert(18)*  
[13, 15, 23, 25, 18, 2] - *Insert(2)*  
[13, 15, 2, 25, 18, 23]  
[2, 15, 13, 25, 18, 23]  
[2, 15, 13, 25, 18, 23, 19] - *Insert(19)*  
[2, 15, 13, 25, 18, 23, 19, 20] - *Insert(20)*  
[2, 15, 13, 20, 18, 23, 19, 25]  
[2, 15, 13, 20, 18, 23, 19, 25, 17] - *Insert(17)*  
[2, 15, 13, 17, 18, 23, 19, 25, 20].

*Min-Heap:* [2, 15, 13, 17, 18, 23, 19, 25, 20].

Las claves 2, 18 y 25 quedaron ubicadas en las posiciones 1, 5 y 8, respectivamente.

**Ejercicio 22.**

Luego de insertar la clave 15 en la siguiente min-heap, ¿cuántas de las claves que ya estaban en la heap han mantenido su lugar (es decir, ocupan en la min-heap resultante la misma posición que ocupaban antes de la inserción)?



- (a) Ninguna.
- (b) Seis.
- (c) Ocho.
- (d) Nueve.

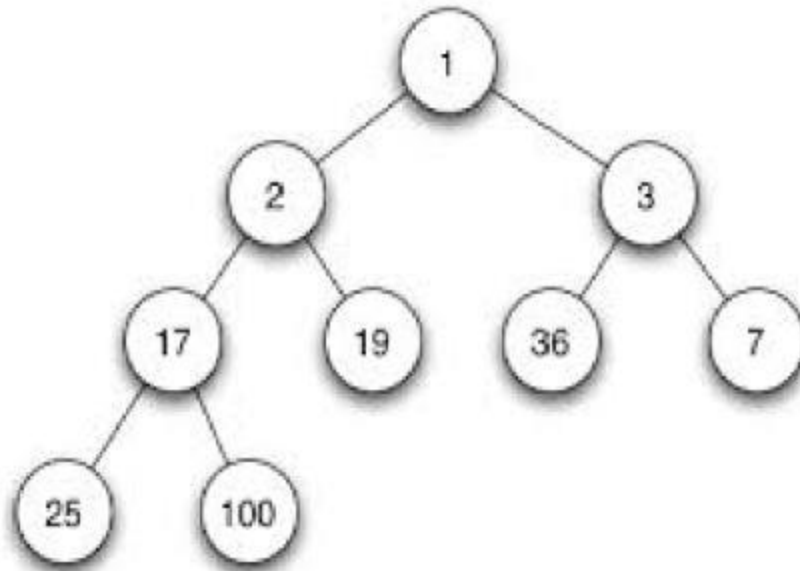
[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100]

[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100, 15] - Insert(15)

[1, 2, 3, 17, 15, 36, 7, 25, 100, 19].

**Ejercicio 23.**

Luego de una operación de borrado del mínimo en la siguiente min-heap, ¿cuántas claves han cambiado de lugar (es decir, ocupan en la min-heap resultante un lugar diferente al que ocupaban en la min-heap antes del borrado) ? (No contar la clave borrada, ya que no pertenece más a la heap).



- (a) Ninguna.
- (b) Dos.
- (c) Tres.
- (d) Cuatro.

[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100]  
[100, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25] - DeleteMin()  
[2, 100, 3, 17, 19, 36, 7, 25]  
[2, 17, 3, 100, 19, 36, 7, 25]  
[2, 17, 3, 25, 19, 36, 7, 100].



## Práctica 1

### Estructuras de control y estructuras de datos básicas en Java. Recursión

**Nota:**

- Cree un proyecto llamado "AYED" para guardar todas las clases que implemente durante la cursada.
- Implemente cada ejercicio en un paquete que contenga los números del TP y del ejercicio. Ejemplo tp1.ejercicio3
- Para resolver esta práctica haremos uso de las estructuras de datos array y "listas" provistas por Java: [ArrayList](#) y [LinkedList](#).

1. Escriba tres **métodos de clase (static)** que reciban por parámetro dos números enteros (tipo **int**) a y b e impriman todos los números enteros comprendidos entre a; b (inclusive), uno por cada línea en la salida estándar. Para ello, dentro de una nueva clase escriba un método por cada uno de los siguientes incisos:
  - a. Que realice lo pedido con un **for**.
  - b. Que realice lo pedido con un **while**.
  - c. Que realice lo pedido **sin utilizar estructuras de control iterativas** (*for, while, do while*).

Por último, escriba en el método de clase **main** el llamado a cada uno de los métodos creados, con valores de ejemplo. En su computadora, **ejecute el programa** y verifique que se cumple con lo pedido.

2. Escriba un método de clase que dado un número **n** devuelva un nuevo arreglo de tamaño **n** con los **n** primeros múltiplos enteros de **n** mayores o iguales que 1.

Ejemplo:  $f(5) = [5; 10; 15; 20; 25]$ ;  $f(k) = \{n*k \text{ donde } k : 1..k\}$

Agregue al programa la posibilidad de probar con distintos valores de **n** ingresandolos por teclado, mediante el uso de *System.in*. La clase **Scanner** permite leer de forma sencilla valores de entrada.

**Ayuda:** Como ejemplo de uso, para contar la cantidad de números leídos hasta el primer 42 se puede hacer:

```
import java.util.Scanner;

public class Contador {

    public static int contar42 ( ) {
        Scanner s = new Scanner(System.in) ;
        int cantidad = 1 ;
        while (s.nextInt() != 42) {
            cantidad++;
        }
        return cantidad;
    }
}
```



## Algoritmos y Estructuras de Datos

### 3. Creación de instancias mediante el uso del operador **new**

- a. Cree una clase llamada **Estudiante** con los atributos especificados abajo y sus correspondientes métodos *getters* y *setters* (*haga uso de las facilidades que brinda eclipse*)
  - nombre
  - apellido
  - comision
  - email
  - direccion
- b. Cree una clase llamada **Profesor** con los atributos especificados abajo y sus correspondientes métodos *getters* y *setters* (*haga uso de las facilidades que brinda eclipse*)
  - nombre
  - apellido
  - email
  - catedra
  - facultad
- c. Agregue un método de instancia llamado **tusDatos()** en la clase **Estudiante** y en la clase **Profesor**, que retorne un **String** con los datos de los atributos de las mismas. Para acceder a los valores de los atributos **utilice los getters previamente definidos**.
- d. Escriba una clase llamada **Test** con el método **main**, el cual cree un arreglo con **2** objetos **Estudiante**, otro arreglo con **3** objetos **Profesor**, y luego recorra ambos arreglos imprimiendo los valores obtenidos mediante el método **tusDatos()**. Recuerde asignar los valores de los atributos de los objetos **Estudiante** y **Profesor** invocando los respectivos métodos *setters*.
- e. Agregue dos breakpoints, uno en la línea donde itera sobre los estudiantes y otro en la línea donde itera sobre los profesores
- f. Ejecute la clase **Test** en modo debug y avance **paso a paso** visualizando si el estudiante o el profesor recuperado es lo esperado.

### 4. Pasaje de parámetros en Java

- a. Sin ejecutar el programa en su computadora, sólo analizándolo, indique qué imprime el siguiente código.

```
public class SwapValores {
    public static void swap1 (int x, int y) {
        if (x < y) {
            int tmp = x ;
            x = y ;
            y = tmp;
        }
    }

    public static void swap2 (Integer x, Integer y) {
        if (x < y) {
            int tmp = x ;
            x = y ;
            y = tmp;
        }
    }
}
```



## Algoritmos y Estructuras de Datos

```
public static void main(String[] args) {  
    int a = 1, b = 2;  
    Integer c = 3, d = 4;  
    swap1(a,b);  
    swap2(c,d);  
    System.out.println("a=" + a + " b=" + b) ;  
    System.out.println("c=" + c + " d=" + d) ;  
}  
}
```

- b. Ejecute el ejercicio en su computadora, y compare su resultado con lo esperado en el inciso anterior.
  - c. Inserte un breakpoint en las líneas donde se indica: `y = tmp` y ejecute en modo debug ¿los valores que adoptan las variables `x`, `y` coinciden con los valores impresos por consola?
5. Dado un arreglo de valores tipo **entero** se desea calcular el valor máximo, mínimo, y promedio en un único método. Escriba tres métodos de clase, donde respectivamente:
- a. Devuelva lo pedido por el mecanismo de retorno de un método en Java (`"return"`).
  - b. Devuelva lo pedido interactuando con algún parámetro (el parámetro no puede ser de tipo arreglo).
  - c. Devuelva lo pedido sin usar parámetros ni la sentencia `"return"`.
6. Análisis de las estructuras de listas provistas por la API de Java.
- a. ¿En qué casos `ArrayList` ofrece un mejor rendimiento que `LinkedList`?
  - b. ¿Cuándo `LinkedList` puede ser más eficiente que `ArrayList`?
  - c. ¿Qué diferencia encuentra en el uso de la memoria en `ArrayList` y `LinkedList`?
  - d. ¿En qué casos sería preferible usar un `ArrayList` o un `LinkedList`?
7. Uso de las estructuras de listas provistas por la API de Java. Para resolver este punto cree el paquete **tp1.ejercicio7**
- a. Escriba una clase llamada `TestArrayList` cuyo método `main` recibe una secuencia de números, los agrega a una lista de tipo `ArrayList`, y luego de haber agregado todos los números a la lista, imprime el contenido de la misma iterando sobre cada elemento.
  - b. Si en lugar de usar un `ArrayList` en el inciso anterior hubiera usado un `LinkedList` ¿Qué diferencia encuentra respecto de la implementación? Justifique
  - c. ¿Existen otras alternativas para recorrer los elementos de la lista del punto 7a.?
  - d. Escriba un método que realice las siguientes acciones:
    - cree una lista que contenga 3 estudiantes
    - genere una nueva lista que sea una copia de la lista del inciso i
    - imprima el contenido de la lista original y el contenido de la nueva lista
    - modifique algún dato de los estudiantes
    - vuelva a imprimir el contenido de la lista original y el contenido de la nueva lista. ¿Qué conclusiones obtiene a partir de lo realizado?
    - ¿Cuántas formas de copiar una lista existen? ¿Qué diferencias existen entre ellas?
  - e. A la lista del punto 7d, agregue un nuevo estudiante. Antes de agregar, verifique que el estudiante no estaba incluido en la lista.
  - f. Escriba un método que devuelva verdadero o falso si la secuencia almacenada en la lista es o no capicúa:  

```
public boolean esCapicua(ArrayList<Integer> lista)
```

Ejemplo:





## Algoritmos y Estructuras de Datos

- El método devuelve verdadero si la secuencia ingresada es: 2 5 2
- El método devuelve falso si la secuencia ingresada es: 4 5 6 3 4

- g. Considere que se aplica la siguiente función de forma recursiva. A partir de un número  $n$  positivo se obtiene una sucesión que termina en 1:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por ejemplo, para  $n = 6$ , se obtiene la siguiente sucesión:

$$f(6) = 6/2 = 3$$

$$f(3) = 3*3 + 1 = 10$$

$$f(10) = 10/2 = 5$$

....

Es decir, la sucesión 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Para cualquier  $n$  con el que se arranque siempre se llegará al 1.

- Escriba un programa recursivo que, a partir de un número  $n$ , devuelva una lista con cada miembro de la sucesión.

```
public class EjercicioSucesion {  
  
    public List<Integer> calcularSucesion (int n) {  
  
        //código  
  
    }  
  
}
```

- h. Implemente un método recursivo que invierta el orden de los elementos en un ArrayList.

```
public void invertirArrayList(ArrayList<Integer> lista)
```

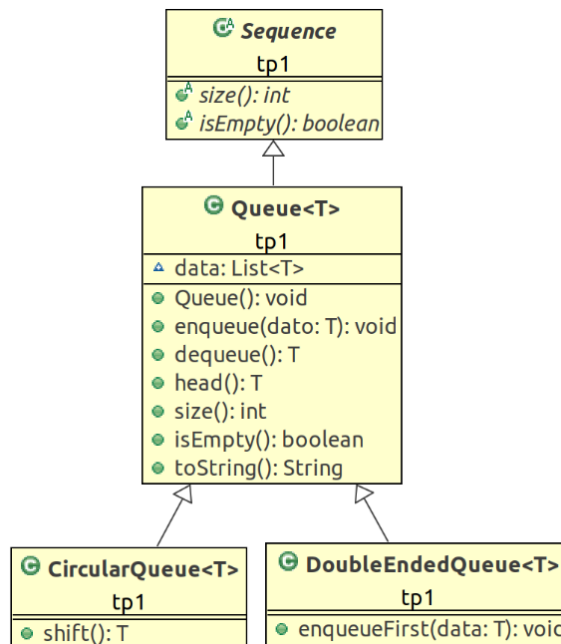
- i. Implemente un método recursivo que calcule la suma de los elementos en un LinkedList.

```
public int sumarLinkedList(LinkedList<Integer> lista)
```

- j. Implemente el método "combinarOrdenado" que reciba 2 listas de números **ordenados** y devuelva una nueva lista también ordenada conteniendo los elementos de las 2 listas.

```
public ArrayList<Integer> combinarOrdenado(ArrayList<Integer> lista1,  
ArrayList<Integer> lista2);
```

8. El objetivo de este punto es ejercitar el uso de la API de listas de Java y aplicar conceptos de la programación orientada a objetos. Sean las siguientes especificaciones de cola, cola circular y cola con 2 extremos disponibles, vistas en la explicación teórica:



a. Implemente en JAVA la clase **Queue** de acuerdo con la especificación dada en el diagrama de clases. Defina esta clase dentro del paquete **tp1.ejercicio8**.

- **Queue()** Constructor de la clase
- **enqueue(dato: T): void** Inserta el elemento al final de la cola
- **dequeue(): T** Elimina el elemento del frente de la cola y lo retorna. Si la cola está vacía se produce un error.
- **head(): T** Retorna el elemento del frente de la cola. Si la cola está vacía se produce un error.
- **isEmpty(): boolean** Retorna verdadero si la cola no tiene elementos y falso en caso contrario
- **size(): int** Retorna la cantidad de elementos de la cola.
- **toString(): String** Retorna los elementos de la cola en un String

b. Implemente en JAVA las clase **CircularQueue** de acuerdo con la especificación dada en el diagrama de clases. Defina esta clase dentro del paquete **tp1.ejercicio8**.

- **shift(): T** Permite rotar los elementos, haciéndolo circular. Retorna el elemento encolado.

c. Implemente en JAVA la clase **DoubleEndedQueue** de acuerdo con la especificación dada en el diagrama de clases. Defina esta clase dentro del paquete **tp1.ejercicio8**.

- **enqueueFirst(): void** Permite encolar al inicio.

9. Considere un *string* de caracteres *S*, el cual comprende únicamente los caracteres: (, ), [, ], {, }, . Decimos que *S* está balanceado si tiene alguna de las siguientes formas:

*S* = "" *S* es el *string* de longitud cero.

*S* = "(T)"

*S* = "[T]"

*S* = "{T}"

*S* = "TU"



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA

## Algoritmos y Estructuras de Datos

Donde ambos T y U son *strings* balanceados. Por ejemplo, "{ ( ) [ ( ) ] }" está balanceado, pero "( [ ) ]" no lo está.

- Indique qué estructura de datos utilizará para resolver este problema y cómo la utilizará.
- Implemente una clase llamada **tp1.ejercicio9.TestBalanceo**, cuyo objetivo es determinar si un String dado está balanceado. El String a verificar es un parámetro de entrada (no es un dato predefinido).

Para los ejercicios 10 y 11, solo es necesario responder las preguntas. No es necesario realizar ninguna implementación.

10. Considere el siguiente problema: Se quiere modelar la cola de atención en un banco. A medida que la gente llega al banco toma un ticket para ser atendido, sin embargo, de acuerdo a la LEY 14564 de la Provincia de Buenos Aires, se establece la obligatoriedad de otorgar prioridad de atención a mujeres embarazadas, a personas con necesidades especiales o movilidad reducida y a personas mayores de setenta (70) años. De acuerdo a las estructuras de datos vistas en esta práctica, ¿qué estructura de datos sugeriría para el modelado de la cola del banco?
11. Considere el siguiente problema: Se quiere modelar el transporte público de la ciudad de La Plata, lo cual involucra las líneas de colectivos y sus respectivas paradas. Cada línea de colectivos tiene asignado un conjunto de paradas donde se detiene de manera repetida durante un mismo día. De acuerdo a las estructuras de datos vistas en esta práctica, ¿qué estructura de datos sugeriría para el modelado de las paradas de una línea de colectivos?

## **Trabajo Práctico N° 1:** **Estructuras de Control y Estructuras de Datos Básicas en** **Java. Recursión.**

### **Ejercicio 1.**

*Escribir tres métodos de clase (static) que reciban por parámetro dos números enteros (tipo int) a y b e impriman todos los números enteros comprendidos entre a; b (inclusive), uno por cada línea en la salida estándar. Para ello, dentro de una nueva clase, escribir un método por cada uno de los siguientes incisos:*

- *Que realice lo pedido con un for.*
- *Que realice lo pedido con un while.*
- *Que realice lo pedido sin utilizar estructuras de control iterativas (for, while, do while).*

*Por último, escribir, en el método de clase main, el llamado a cada uno de los métodos creados, con valores de ejemplo. En la computadora, ejecutar el programa y verificar que se cumple con lo pedido.*

## **Ejercicio 2.**

*Escribir un método de clase que, dado un número  $n$ , devuelva un nuevo arreglo de tamaño  $n$  con los  $n$  primeros múltiplos enteros de  $n$  mayores o iguales que 1. Ejemplo:  $f(5) = [5; 10; 15; 20; 25]$ ;  $f(k) = \{n*k, \text{ donde } k: 1...k\}$ . Agregar al programa la posibilidad de probar con distintos valores de  $n$  ingresándolos por teclado, mediante el uso de `System.in`. La clase `Scanner` permite leer, de forma sencilla, valores de entrada.*

**Ejercicio 3.**

*Creación de instancias mediante el uso del operador new.*

**(a)** *Crear una clase llamada Estudiante con los atributos especificados abajo y sus correspondientes métodos getters y setters (hacer uso de las facilidades que brinda eclipse).*

- *nombre*
- *apellido*
- *comision*
- *email*
- *direccion*

**(b)** *Crear una clase llamada Profesor con los atributos especificados abajo y sus correspondientes métodos getters y setters (hacer uso de las facilidades que brinda eclipse).*

- *nombre*
- *apellido*
- *email*
- *catedra*
- *facultad*

**(c)** *Agregar un método de instancia llamado tusDatos() en la clase Estudiante y en la clase Profesor, que retorne un String con los datos de los atributos de las mismas. Para acceder a los valores de los atributos, utilizar los getters previamente definidos.*

**(d)** *Escribir una clase llamada Test con el método main, el cual cree un arreglo con 2 objetos Estudiante, otro arreglo con 3 objetos Profesor, y, luego, recorrer ambos arreglos imprimiendo los valores obtenidos mediante el método tusDatos(). Recordar asignar los valores de los atributos de los objetos Estudiante y Profesor invocando los respectivos métodos setters.*

**(e)** *Agregar dos breakpoints, uno en la línea donde itera sobre los estudiantes y otro en la línea donde itera sobre los profesores.*

**(f)** *Ejecutar la clase Test en modo debug y avanzar paso a paso visualizando si el estudiante o el profesor recuperado es lo esperado.*

### **Ejercicio 4.**

*Pasaje de parámetros en Java.*

*(a) Sin ejecutar el programa en la computadora, sólo analizándolo, indicar qué imprime el siguiente código.*

*(b) Ejecutar el ejercicio en la computadora y comparar el resultado con lo esperado en el inciso anterior.*

*(c) Insertar un breakpoint en las líneas donde se indica:  $y = tmp$  y ejecutar en modo debug. ¿Los valores que adoptan las variables  $x$ ,  $y$  coinciden con los valores impresos por consola?*

### **Ejercicio 5.**

*Dado un arreglo de valores tipo entero, se desea calcular el valor máximo, mínimo y promedio en un único método. Escribir tres métodos de clase, donde respectivamente:*

- (a) Devolver lo pedido por el mecanismo de retorno de un método en Java (“return”).*
- (b) Devolver lo pedido interactuando con algún parámetro (el parámetro no puede ser de tipo arreglo).*
- (c) Devolver lo pedido sin usar parámetros ni la sentencia “return”.*



## **Ejercicio 6.**

*Análisis de las estructuras de listas provistas por la API de Java.*

(a) *¿En qué casos ArrayList ofrece un mejor rendimiento que LinkedList?*

- Frecuentes accesos aleatorios a los elementos: *ArrayList* usa un *array* dinámico internamente, por lo que acceder a un elemento por índice es  $O(1)$ , mientras que, en *LinkedList*, es  $O(n)$  porque debe recorrer los nodos secuencialmente.
- Pocas inserciones/eliminaciones al inicio o medio de la lista: Si bien *LinkedList* es más eficiente en la eliminación/inserción en estos casos, si estas operaciones no son muy frecuentes, en general, *ArrayList* sigue siendo más rápido debido a su menor sobrecarga en memoria.
- Poco uso de memoria adicional: *ArrayList* almacena sólo los elementos, mientras que *LinkedList* usa referencias adicionales para enlazar nodos.
- Frecuentes operaciones de iteración: La iteración sobre un *ArrayList* es más rápida debido a la contigüidad de la memoria y la mejor localización en caché.

(b) *¿Cuándo LinkedList puede ser más eficiente que ArrayList?*

- Pocos accesos aleatorios a los elementos: Como *LinkedList* no tiene acceso directo a los elementos, sólo es útil si no se necesita acceder frecuentemente por índices.
- Frecuentes inserciones/eliminaciones al inicio o medio de la lista: *LinkedList* tiene  $O(1)$  en inserciones/eliminaciones en estos casos, mientras que *ArrayList* tiene  $O(n)$  debido al desplazamiento de elementos.
- Uso de *Iterator* para eliminaciones: Al eliminar elementos con un *Iterator*, *LinkedList* tiene un mejor rendimiento, ya que la eliminación es  $O(1)$ , mientras que, en *ArrayList*, es  $O(n)$  por el desplazamiento.

(c) *¿Qué diferencia se encuentra en el uso de la memoria en ArrayList y LinkedList?*

- *ArrayList*: Usa menos memoria porque sólo almacena los elementos en un *array* contiguo, sin punteros adicionales.
- *LinkedList*: Usa más memoria porque cada nodo almacena el dato junto con dos referencias adicionales (*next* y *prev*), lo que aumenta el consumo de memoria significativamente.

(d) *¿En qué casos sería preferible usar un ArrayList o un LinkedList?*

Sería preferible usar un *ArrayList* cuando:

- Se requiere acceso rápido a los elementos por índice.

- Se realizan pocas inserciones/eliminaciones al inicio o medio de la lista.
- Se realizan recorridos de la lista frecuentemente.
- Se prioriza la eficiencia en el uso de memoria.

Sería preferible usar *LinkedList* cuando:

- No se requiere acceso rápido a los elementos por índice.
- Se realizan muchas inserciones/eliminaciones al inicio o medio de la lista.
- Se quiere usar *Iterator* para modificar la lista mientras se recorre.
- No se realizan recorridos de la lista frecuentemente.

En la mayoría de los casos, *ArrayList* es preferible debido a su menor consumo de memoria y mejor rendimiento general, excepto en escenarios con muchas modificaciones al inicio de la lista.

**Ejercicio 7.**

Uso de las estructuras de listas provistas por la API de Java. Para resolver este ejercicio, crear el paquete `tp1.ejercicio7`.

(a) Escribir una clase llamada `TestArrayList` cuyo método `main` recibe una secuencia de números, los agrega a una lista de tipo `ArrayList` y, luego de haber agregado todos los números a la lista, imprime el contenido de la misma iterando sobre cada elemento.

(b) Si en lugar de usar un `ArrayList` en el inciso anterior se hubiera usado un `LinkedList`, ¿qué diferencia se encuentra respecto de la implementación? Justificar.

Si en lugar de usar un `ArrayList` en el inciso anterior se hubiera usado un `LinkedList`, el acceso a los números sería muy ineficiente, ya que hay que recorrer la lista, no es directo.

(c) ¿Existen otras alternativas para recorrer los elementos de la lista del inciso (a)?

Sí, existen otras alternativas para recorrer los elementos de la lista del inciso (a).

(d) Escribir un método que realice las siguientes acciones:

- Crear una lista que contenga 3 estudiantes.
- Generar una nueva lista que sea una copia de la lista anterior.
- Imprimir el contenido de la lista original y el contenido de la nueva lista.
- Modificar algún dato de los estudiantes.
- Volver a imprimir el contenido de la lista original y el contenido de la nueva lista.
- ¿Qué conclusiones se obtiene a partir de lo realizado?
- ¿Cuántas formas de copiar una lista existen? ¿Qué diferencias existen entre ellas?

(e) A la lista del inciso (d), agregar un nuevo estudiante. Antes de agregar, verificar que el estudiante no estaba incluido en la lista.

(f) Escribir un método que devuelva verdadero o falso si la secuencia almacenada en la lista es o no capicúa: `public boolean esCapicua(ArrayList<Integer> lista)`.

(g) Considerar que se aplica la siguiente función de forma recursiva. A partir de un número  $n$  positivo se obtiene una sucesión que termina en 1:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Escribir un programa recursivo que, a partir de un número  $n$ , devuelva una lista con cada miembro de la sucesión.

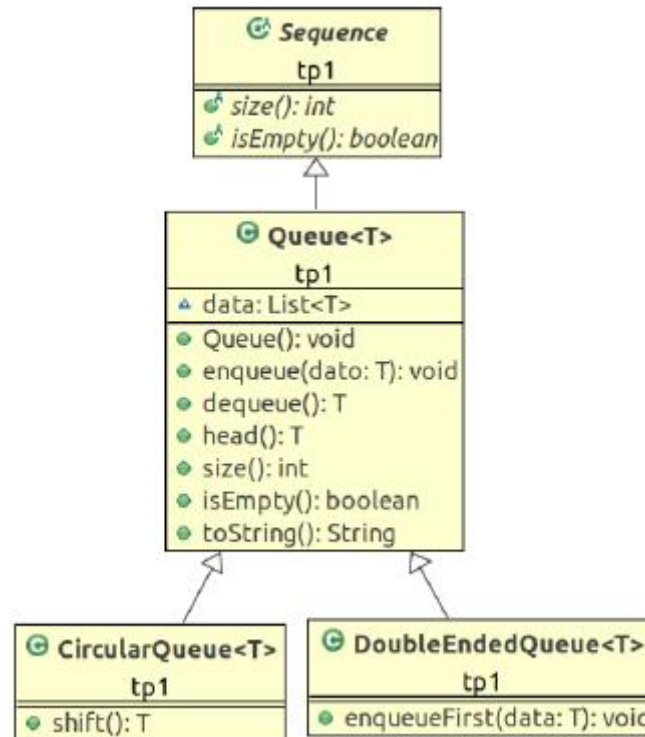
(h) Implementar un método recursivo que invierta el orden de los elementos en un `ArrayList`: `public void invertirArrayList(ArrayList<Integer> lista)`.

(i) Implementar un método recursivo que calcule la suma de los elementos en un `LinkedList`: `public int sumarLinkedList(LinkedList<Integer> lista)`.

(j) Implementar el método “combinarOrdenado” que reciba 2 listas de números ordenados y devuelva una nueva lista también ordenada conteniendo los elementos de las 2 listas: `public ArrayList<Integer> combinarOrdenado(ArrayList<Integer> lista1, ArrayList<Integer> lista2)`.

**Ejercicio 8.**

El objetivo de este punto es ejercitar el uso de la API de listas de Java y aplicar conceptos de la programación orientada a objetos. Sean las siguientes especificaciones de cola, cola circular y cola con 2 extremos disponibles, vistas en la explicación teórica:



(a) Implementar en JAVA la clase `Queue` de acuerdo con la especificación dada en el diagrama de clases. Definir esta clase dentro del paquete `tp1.ejercicio8`.

- `Queue()`: Constructor de la clase.
- `enqueue(data: T)`: Inserta el elemento al final de la cola.
- `dequeue()`: `T` Elimina el elemento del frente de la cola y lo retorna. Si la cola está vacía, se produce un error..
- `head()`: `T` Retorna el elemento del frente de la cola. Si la cola está vacía, se produce un error.
- `isEmpty()`: `boolean` Retorna verdadero si la cola no tiene elementos y falso en caso contrario.
- `size()`: `int` Retorna la cantidad de elementos de la cola.
- `toString()`: `String` Retorna los elementos de la cola en un `String`.

(b) Implementar en JAVA la clase `CircularQueue` de acuerdo con la especificación dada en el diagrama de clases. Definir esta clase dentro del paquete `tp1.ejercicio8`.

- `shift()`: `T` Permite rotar los elementos, haciéndolo circular. Retorna el elemento encolado.

(c) Implementar en JAVA la clase `DoubleEndedQueue` de acuerdo con la especificación dada en el diagrama de clases. Definir esta clase dentro del paquete `tp1.ejercicio8`.

- *enqueueFirst(): void* Permite encolar al inicio.

**Ejercicio 9.**

Considerar un string de caracteres  $S$ , el cual comprende, únicamente, los caracteres: (, ), [, ], {, }. Se dice que  $S$  está balanceado si tiene alguna de las siguientes formas:

- $S = ""$   $S$  es el string de longitud cero.
- $S = "(T)"$ .
- $S = "[T]"$ .
- $S = "\{T\}"$ .
- $S = "TU"$ .

Donde ambos  $T$  y  $U$  son strings balanceados. Por ejemplo,  $\{"()[()]\}"$  está balanceado, pero  $\{()[]\}"$  no lo está.

**(a)** Indicar qué estructura de datos se utilizará para resolver este problema y cómo se utilizará.

Se utilizará la estructura de datos "*Stack*". Por cada signo de apertura, se hará un *PUSH* y, por cada signo de cierre, se hará un *POP*, verificando que sean del mismo tipo (el abrir y cerrar de signo). Si la pila queda vacía, significa que el *String* está balanceado. Además, se tendrán dos listas enlazadas, una con los caracteres de apertura y otra con los caracteres de cierre, para ir viendo si el caracter actual corresponde con alguno de esos seis caracteres y, dependiendo de eso, se realizará la operación correspondiente (*push* o *pop*).

**(b)** Implementar una clase llamada `tp1.ejercicio9.TestBalanceo`, cuyo objetivo es determinar si un *String* dado está balanceado. El *String* a verificar es un parámetro de entrada (no es un dato predefinido).

**Ejercicio 10.**

*Considerar el siguiente problema: Se quiere modelar la cola de atención en un banco. A medida que la gente llega al banco, toma un ticket para ser atendido, sin embargo, de acuerdo a la LEY 14.564 de la Provincia de Buenos Aires, se establece la obligatoriedad de otorgar prioridad de atención a mujeres embarazadas, a personas con necesidades especiales o movilidad reducida y a personas mayores de setenta (70) años. De acuerdo a las estructuras de datos vistas en esta práctica, ¿qué estructura de datos se sugeriría para el modelado de la cola del banco?*

Para el modelado de la cola del banco, la estructura de datos que se sugeriría es “DoubleEndedQueue”, es decir, una cola de doble extremo, ya que esta estructura permite agregar tanto al principio como al final de la cola, con lo cual las personas con orden de prioridad serán puestas al principio de la cola, mientras que las personas que no tengan este orden serán puestas al final de la cola.



**Ejercicio 11.**

*Considerar el siguiente problema: Se quiere modelar el transporte público de la ciudad de La Plata, lo cual involucra las líneas de colectivos y sus respectivas paradas. Cada línea de colectivos, tiene asignado un conjunto de paradas donde se detiene de manera repetida durante un mismo día. De acuerdo a las estructuras de datos vistas en esta práctica, ¿qué estructura de datos se sugeriría para el modelado de las paradas de una línea de colectivos?*

Para el modelado de las paradas de una línea de colectivos, la estructura de datos que se sugeriría es “CircularQueue”, es decir, una cola circular, ya que esta estructura permite que, cuando un colectivo llega a la última parada, automáticamente, vuelve a la primera, sin necesidad de reiniciar la estructura.



## Práctica 2 Árboles Binarios

Implemente cada ejercicio en un paquete que contenga los números del TP y del ejercicio. Ejemplo tp2.ejercicio3 (dentro del proyecto llamado "AYED").

BinaryTree<T>
data: T
leftChild: BinaryTree<T>
rightChild: BinaryTree<T>
BinaryTree(): void
BinaryTree(T): void
getData(): T
setData(T): void
getLeftChild(): BinaryTree<T>
getRightChild(): BinaryTree<T>
addLeftChild(BinaryTree<T> child): void
addRightChild(BinaryTree<T> child): void
removeLeftChild(): void
removeRightChild(): void
isEmpty(): boolean
isLeaf(): boolean
hasLeftChild(): boolean
hasRightChild(): boolean
toString(): String
contarHojas(): int
espejo(): BinaryTree<T>
entreNiveles(int, int): void

### Ejercicio 1

Considere la siguiente especificación de la clase Java **BinaryTree**(con la representación hijo izquierdo e hijo derecho).

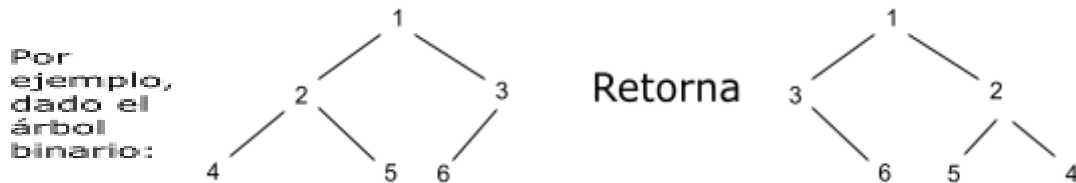
- El constructor **BinaryTree(T data)** inicializa un árbol con el dato pasado como parámetro y ambos hijos nulos.
- Los métodos **getLeftChild():BinaryTree<T>** y **getRightChild():BinaryTree<T>**, retornan los hijos izquierdo y derecho respectivamente del árbol. Si no tiene el hijo tira error.
- El método **addLeftChild(BinaryTree<T> child)** y **addRightChild(BinaryTree<T> child)** agrega un hijo como hijo izquierdo o derecho del árbol.
- El método **removeLeftChild()** y **removeRightChild()**, eliminan el hijo correspondiente.
- El método **isEmpty()** indica si el árbol está vacío y el método **isLeaf()** indica si no tiene hijos.
- El método **hasLeftChild()** y **hasRightChild()** devuelve un booleano indicando si tiene dicho hijo el árbol receptor del mensaje.

a) Analice la implementación en JAVA de la clase **BinaryTree** brindada por la cátedra.

## Ejercicio 2

Agregue a la clase **BinaryTree** los siguientes métodos:

- contarHojas():int** Devuelve la cantidad de árbol/subárbol hojas del árbol receptor.
- espejo(): BinaryTree<T>** Devuelve el árbol binario espejo del árbol receptor.



- entreNiveles(int n, m)** Imprime el recorrido por niveles de los elementos del árbol receptor entre los niveles n y m (ambos inclusive). ( $0 \leq n < m \leq \text{altura del árbol}$ )

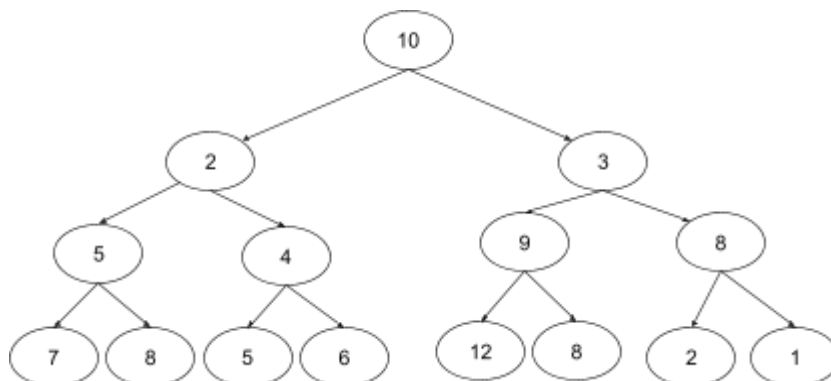
## Ejercicio 3

Defina una clase Java denominada **ContadorArbol** cuya función principal es proveer métodos de validación sobre árboles binarios de enteros. Para ello la clase tiene como variable de instancia un **BinaryTree<Integer>**. Implemente en dicha clase un método denominado **numerosPares()** que devuelve en una estructura adecuada (sin ningún criterio de orden) todos los elementos pares del árbol (divisibles por 2).

- Implemente el método realizando un recorrido InOrden.
- Implemente el método realizando un recorrido PostOrden.

## Ejercicio 4

Una red binaria es una red que posee una topología de árbol binario lleno. Por ejemplo:





Los nodos que conforman una red binaria llena tiene la particularidad de que todos ellos conocen cuál es su retardo de reenvío. El retardo de reenvío se define como el período comprendido entre que un nodo recibe un mensaje y lo reenvía a sus dos hijos.

Su tarea es calcular el mayor retardo posible, en el camino que realiza un mensaje desde la raíz hasta llegar a las hojas en una red binaria llena. En el ejemplo, debería retornar  $10+3+9+12=34$  (Si hay más de un máximo retorne el último valor hallado).

Nota: asuma que cada nodo tiene el dato de retardo de reenvío expresado en cantidad de segundos.

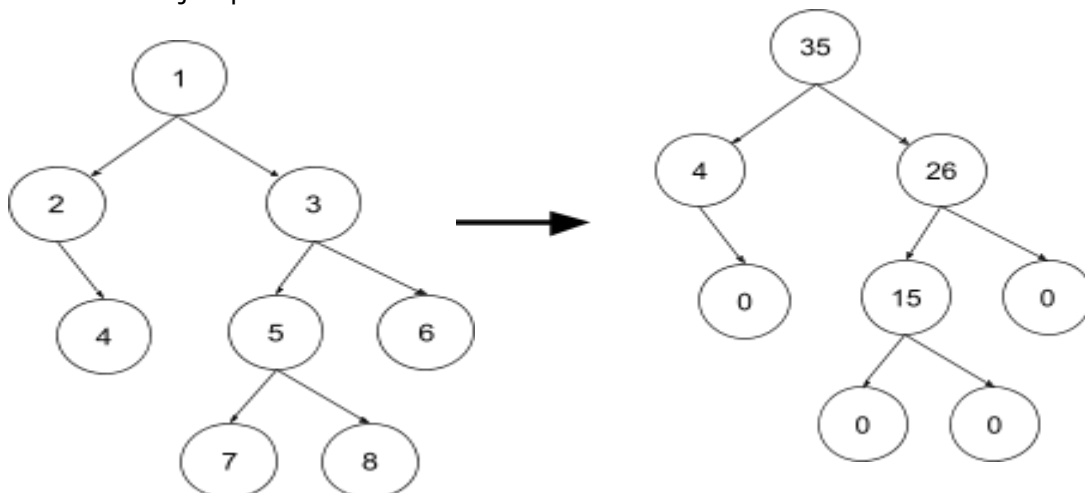
- Indique qué estrategia (recorrido en profundidad o por niveles) utilizará para resolver el problema.
- Cree una clase Java llamada **RedBinariaLlena** donde implementará lo solicitado en el método **retardoReenvio():int**

### Ejercicio 5

Implemente una clase Java llamada **ProfundidadDeArbolBinario** que tiene como variable de instancia un árbol binario de números enteros y un método de instancia **sumaElementosProfundidad (int p):int** el cuál devuelve la suma de todos los nodos del árbol que se encuentren a la profundidad pasada como argumento.

### Ejercicio 6

Cree una clase Java llamada **Transformacion** que tenga como variable de instancia un árbol binario de números enteros y un método de instancia **suma (): BinaryTree<Integer>** el cuál devuelve el árbol en el que se reemplazó el valor de cada nodo por la suma de todos los elementos presentes en su subárbol izquierdo y derecho. Asuma que los valores de los subárboles vacíos son ceros. Por ejemplo:



¿Su solución recorre una única vez cada subárbol? En el caso que no, ¿Puede mejorarla para que sí lo haga?



Los siguientes ejercicios fueron tomados en parciales, en los últimos años. Tenga en cuenta que:

1. No puede agregar más variables de instancia ni de clase a la clase **ParcialArboles**.
2. Debe respetar la clase y la firma del método indicado.
3. Puede definir todos los métodos y variables locales que considere necesarios.
4. Todo método que no esté definido en la sinopsis de clases debe ser implementado.
5. Debe recorrer la estructura solo 1 vez para resolverlo.
6. Si corresponde, complete en la firma del método el tipo de datos indicado con signo de "?".

## Ejercicio 7

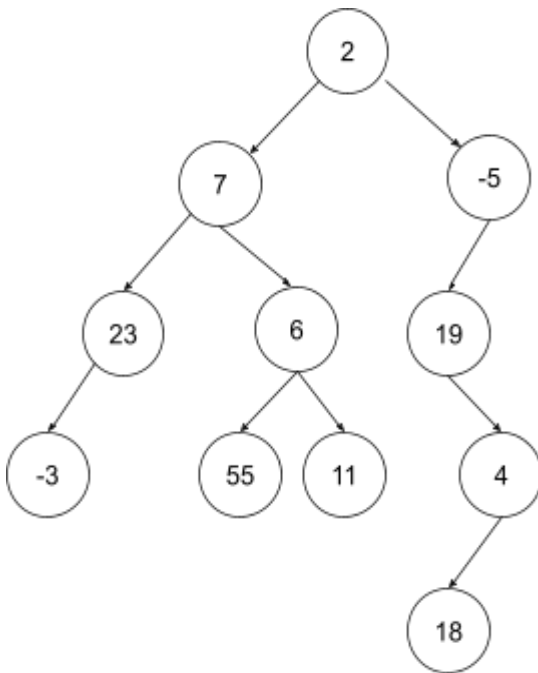
Escribir en una clase **ParcialArboles** que contenga UNA ÚNICA variable de instancia de tipo **BinaryTree** de valores enteros **NO** repetidos y el método público con la siguiente firma:

```
public boolean isLeftTree (int num)
```

El método devuelve **true** si el subárbol cuya raíz es "num", tiene en su subárbol izquierdo una cantidad mayor estricta de árboles con un **único hijo** que en su subárbol derecho. Y **false** en caso contrario. Consideraciones:

- Si "num" no se encuentra en el árbol, devuelve false.
- Si el árbol con raíz "num" no cuenta con una de sus ramas, considere que en esa rama hay -1 árboles con único hijo.

Por ejemplo, con un árbol como se muestra en la siguiente imagen:



Si num = 7 devuelve **true** ya que en su rama izquierda hay 1 árbol con un único hijo (el árbol con raíz 23) y en la rama derecha hay 0.  $(1 > 0) \rightarrow \text{true}$

Si num = 2 devuelve **false**, ya que en su rama izquierda hay 1 árbol con único hijo (árbol con raíz 23) y en la rama derecha hay 3 (árboles con raíces -5, 19 y 4).  $(1 > 3) \rightarrow \text{false}$

Si num = -5 devuelve **true**, ya que en su rama izquierda hay 2 árboles con único hijo (árboles con raíces 19 y 4) y al no tener rama derecha, tiene -1 árboles con un único hijo.  $(2 > -1) \rightarrow \text{true}$

Si num = 19 debería devolver **false**, ya que al no tener rama izquierda tiene -1 árboles con un único hijo y en su rama derecha hay 1 árbol con único hijo.  $(-1 > 1) \rightarrow \text{false}$

Si num = -3 debería devolver **false**, ya que al no tener rama izquierda tiene -1 árboles con un único hijo y lo mismo sucede con su rama derecha.  $(-1 > -1) \rightarrow \text{false}$

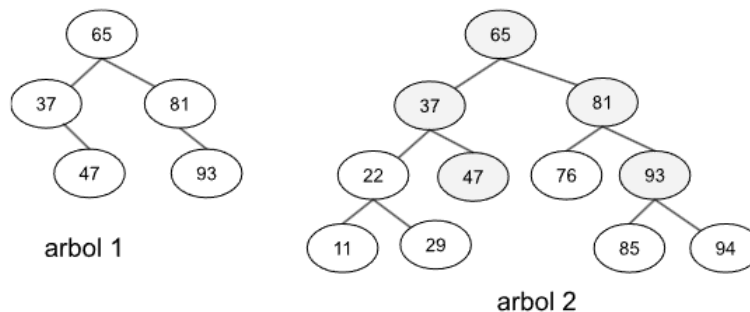
## Ejercicio 8

Escribir en una clase **ParcialArboles** el método público con la siguiente firma:

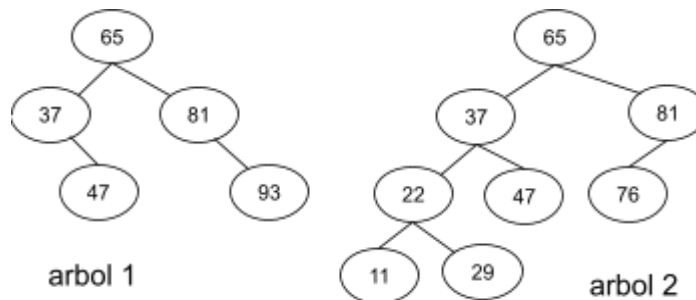
```
public boolean esPrefijo(BinaryTree<Integer> arbol1, BinaryTree<Integer> arbol2)
```

El método devuelve true si arbol1 es **prefijo** de arbol2, false en caso contrario.

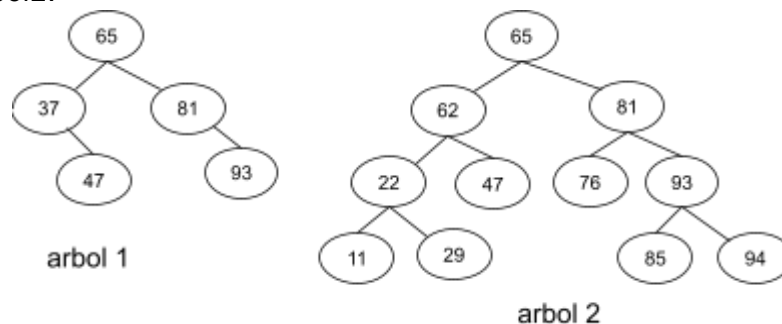
Se dice que un árbol binario arbol1 **es prefijo** de otro árbol binario arbol2, cuando arbol1 coincide con la parte inicial del árbol arbol2 **tanto en el contenido de los elementos como en su estructura**. Por ejemplo, en la siguiente imagen: arbol1 **ES** prefijo de arbol2.



En esta otra, arbol1 **NO** es prefijo de arbol2 (el subárbol con raíz 93 no está en el árbol2)



En la siguiente, no coincide el contenido. El subárbol con raíz 37 figura con raíz 62, entonces arbol1 **NO** es prefijo de arbol2.



## Ejercicio 9

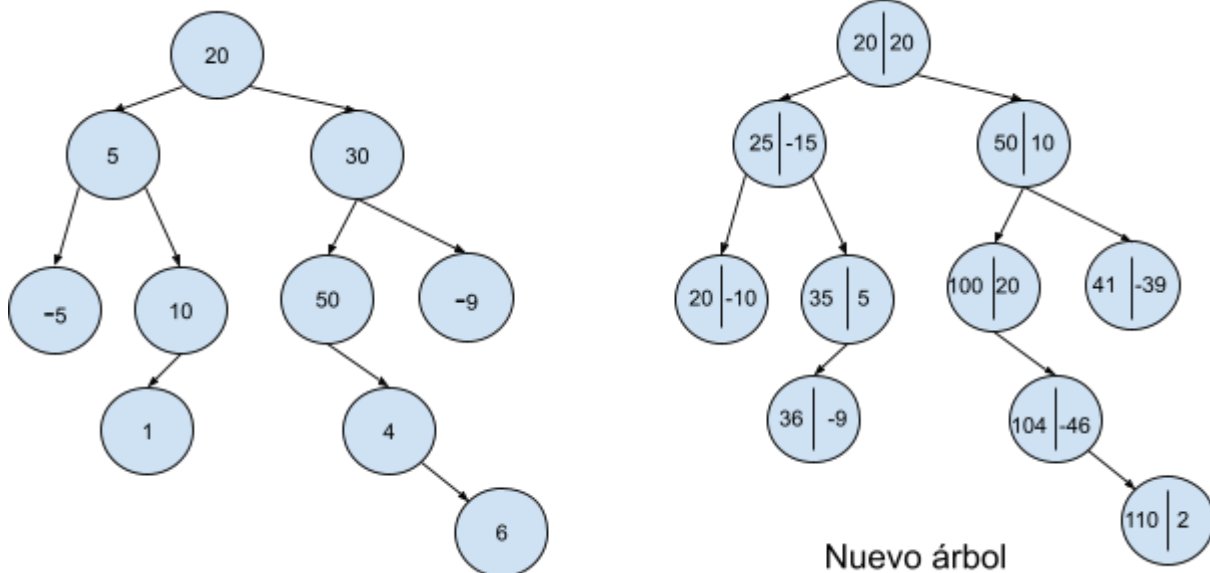
Escribir en una clase **ParcialArboles** el método público con la siguiente firma:

```
public BinaryTree<?> sumAndDif(BinaryTree<Integer> arbol)
```

El método recibe un árbol binario de enteros y devuelve un **nuevo árbol** que contenga en cada nodo dos tipos de información:

- La suma de los números a lo largo del camino desde la raíz hasta el nodo actual.
- La diferencia entre el número almacenado en el nodo original y el número almacenado en el nodo padre.

**Ejemplo:**



Nota: En el nodo raíz considere que el valor del nodo padre es 0.

## Trabajo Práctico N° 2: Árboles Binarios.

### Ejercicio 1.

Considerar la siguiente especificación de la clase Java *BinaryTree* (con la representación hijo izquierdo e hijo derecho):

 <b>BinaryTree&lt;T&gt;</b>
<div> <div> <div>□</div> <div>data: T</div> </div> <div> <div>□</div> <div>leftChild: BinaryTree&lt;T&gt;</div> </div> <div> <div>□</div> <div>rightChild: BinaryTree&lt;T&gt;</div> </div> </div>
<div> <div>●</div> <div>BinaryTree(): void</div> </div> <div> <div>●</div> <div>BinaryTree(T): void</div> </div> <div> <div>●</div> <div>getdata(): T</div> </div> <div> <div>●</div> <div>setdata(T): void</div> </div> <div> <div>●</div> <div>getLeftChild(): BinaryTree&lt;T&gt;</div> </div> <div> <div>●</div> <div>getRightChild(): BinaryTree&lt;T&gt;</div> </div> <div> <div>●</div> <div>addLeftChild(BinaryTree&lt;T&gt;): void</div> </div> <div> <div>●</div> <div>addRightChild(BinaryTree&lt;T&gt;): void</div> </div> <div> <div>●</div> <div>removeLeftChild(): void</div> </div> <div> <div>●</div> <div>removeRightChild(): void</div> </div> <div> <div>●</div> <div>isEmpty(): boolean</div> </div> <div> <div>●</div> <div>isLeaf(): boolean</div> </div> <div> <div>●</div> <div>hasLeftChild(): boolean</div> </div> <div> <div>●</div> <div>hasRightChild(): boolean</div> </div> <div> <div>●</div> <div>toString(): String</div> </div> <div> <div>●</div> <div>contarHojas(): int</div> </div> <div> <div>●</div> <div>espejo(): BinaryTree&lt;T&gt;</div> </div> <div> <div>●</div> <div>entreNiveles(int, int): void</div> </div>

- El constructor *BinaryTree(T data)* inicializa un árbol con el dato pasado como parámetro y ambos hijos nulos.
- Los métodos *getLeftChild(): BinaryTree<T>* y *getRightChild(): BinaryTree<T>* retornan los hijos izquierdo y derecho, respectivamente, del árbol. Si no tiene el hijo, tira error.
- El método *addLeftChild(BinaryTree<T> child)* y *addRightChild(BinaryTree<T> child)* agrega un hijo como hijo izquierdo o derecho del árbol.
- El método *removeLeftChild()* y *removeRightChild()* eliminan el hijo correspondiente.
- El método *isEmpty()* indica si el árbol está vacío y el método *isLeaf()* indica si no tiene hijos.
- El método *hasLeftChild()* y *hasRightChild()* devuelve un booleano indicando si tiene dicho hijo el árbol receptor del mensaje.

Analizar la implementación en JAVA de la clase *BinaryTree* brindada por la cátedra.





## **Ejercicio 2.**

*Agregar, a la clase `BinaryTree`, los siguientes métodos:*

- (a) `contarHojas(): int` Devuelve la cantidad de árbol/subárbol hojas del árbol receptor.*
- (b) `espejo(): BinaryTree<T>` Devuelve el árbol binario espejo del árbol receptor.*
- (c) `entreNiveles(int n, m)` Imprime el recorrido por niveles de los elementos del árbol receptor entre los niveles  $n$  y  $m$  (ambos inclusive). ( $0 \leq n < m \leq \text{altura del árbol}$ ).*

**Ejercicio 3.**

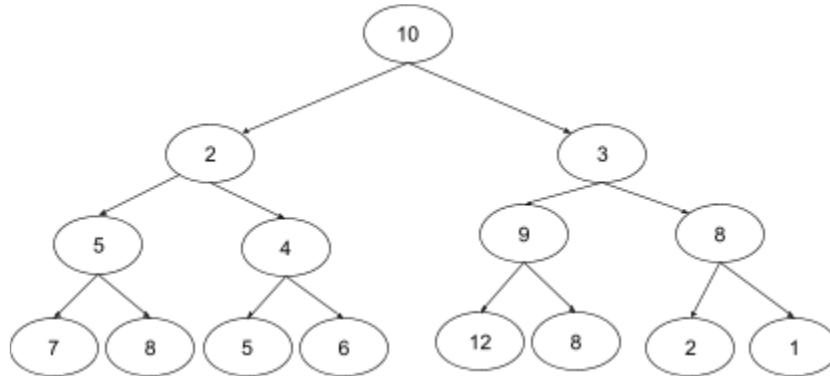
*Definir una clase Java denominada ContadorArbol cuya función principal es proveer métodos de validación sobre árboles binarios de enteros. Para ello, la clase tiene como variable de instancia un BinaryTree<Integer>. Implementar, en dicha clase, un método denominado numerosPares() que devuelve, en una estructura adecuada (sin ningún criterio de orden), todos los elementos pares del árbol (divisibles por 2).*

**(a)** *Implementar el método realizando un recorrido InOrden.*

**(b)** *Implementar el método realizando un recorrido PostOrden.*

**Ejercicio 4.**

Una red binaria es una red que posee una topología de árbol binario lleno. Por ejemplo:



Los nodos que conforman una red binaria llena tienen la particularidad de que todos ellos conocen cuál es su retardo de reenvío. El retardo de reenvío se define como el período comprendido entre que un nodo recibe un mensaje y lo reenvía a sus dos hijos.

La tarea es calcular el mayor retardo posible, en el camino que realiza un mensaje desde la raíz hasta llegar a las hojas en una red binaria llena. En el ejemplo, se debería retornar  $10 + 3 + 9 + 12 = 34$  (si hay más de un máximo, retornar el último valor hallado).

NOTA: Asumir que cada nodo tiene el dato de retardo de reenvío expresado en cantidad de segundos.

(a) Indicar qué estrategia (recorrido en profundidad o por niveles) se utilizará para resolver el problema.

Para resolver el problema, se utilizará un recorrido en profundidad.

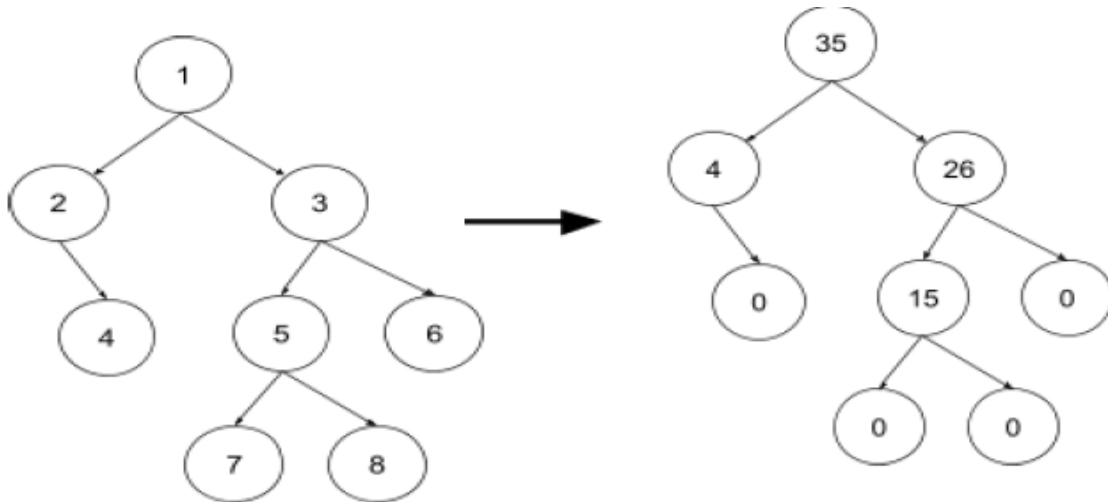
(b) Crear una clase Java llamada *RedBinariaLlena* donde se implementará lo solicitado en el método *retardoReenvio(): int*.

### **Ejercicio 5.**

*Implementar una clase Java llamada ProfundidadDeArbolBinario que tiene, como variable de instancia, un árbol binario de números enteros y un método de instancia sumaElementosProfundidad(int p): int, el cuál devuelve la suma de todos los nodos del árbol que se encuentren a la profundidad pasada como argumento.*

**Ejercicio 6.**

Crear una clase Java llamada *Transformacion* que tenga como variable de instancia un árbol binario de números enteros y un método de instancia *suma()*: *BinaryTree<Integer>*, el cual devuelve el árbol en el que se reemplazó el valor de cada nodo por la suma de todos los elementos presentes en su subárbol izquierdo y derecho. Asumir que los valores de los subárboles vacíos son ceros. Por ejemplo:



¿La solución recorre una única vez cada subárbol? En el caso que no, ¿se puede mejorar para que sí lo haga?

**Ejercicio 7.**

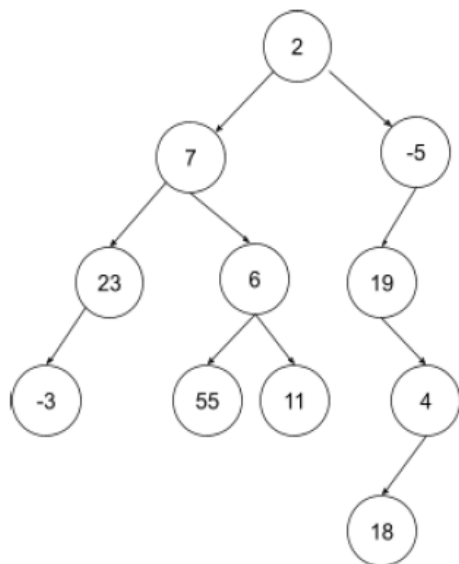
Escribir una clase *ParcialArboles* que contenga UNA ÚNICA variable de instancia de tipo *BinaryTree* de valores enteros NO repetidos y el método público con la siguiente firma:

`public boolean isLeftTree(int num).`

El método devuelve `true` si el subárbol cuya raíz es “num” tiene, en su subárbol izquierdo, una cantidad mayor estricta de árboles con un único hijo que en su subárbol derecho. Y `false` en caso contrario. Consideraciones:

- Si “num” no se encuentra en el árbol, devuelve `false`.
- Si el árbol con raíz “num” no cuenta con una de sus ramas, considerar que, en esa rama, hay -1 árboles con único hijo.

Por ejemplo, con un árbol como se muestra en la siguiente imagen:



Si `num = 7` devuelve **true** ya que en su rama izquierda hay 1 árbol con un único hijo (el árbol con raíz 23) y en la rama derecha hay 0.  $(1 > 0) \rightarrow \text{true}$

Si `num = 2` devuelve **false**, ya que en su rama izquierda hay 1 árbol con único hijo (árbol con raíz 23) y en la rama derecha hay 3 (árboles con raíces -5, 19 y 4).  $(1 > 3) \rightarrow \text{false}$

Si `num = -5` devuelve **true**, ya que en su rama izquierda hay 2 árboles con único hijo (árboles con raíces 19 y 4) y al no tener rama derecha, tiene -1 árboles con un único hijo.  $(2 > -1) \rightarrow \text{true}$

Si `num = 19` debería devolver **false**, ya que al no tener rama izquierda tiene -1 árboles con un único hijo y en su rama derecha hay 1 árbol con único hijo.  $(-1 > 1) \rightarrow \text{false}$

Si `num = -3` debería devolver **false**, ya que al no tener rama izquierda tiene -1 árboles con un único hijo y lo mismo sucede con su rama derecha.  $(-1 > -1) \rightarrow \text{false}$

**Ejercicio 8.**

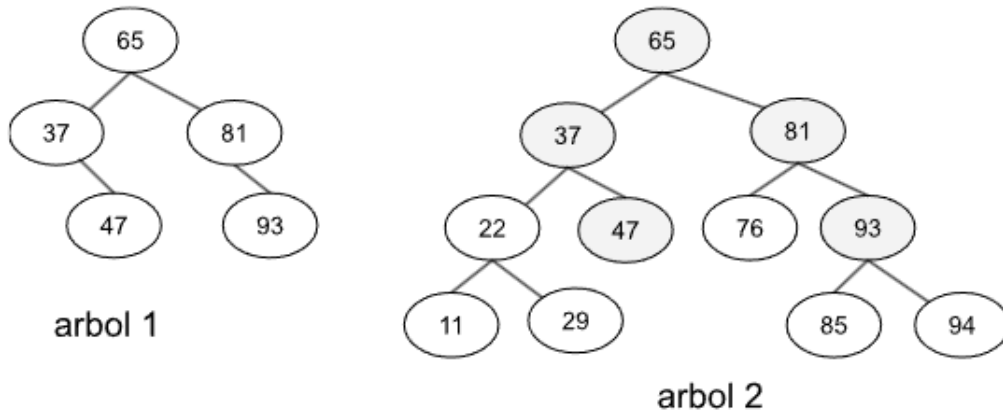
Escribir, en una clase *ParcialArboles*, el método público con la siguiente firma:

`public boolean esPrefijo(BinaryTree<Integer> arbol1, BinaryTree<Integer> arbol2).`

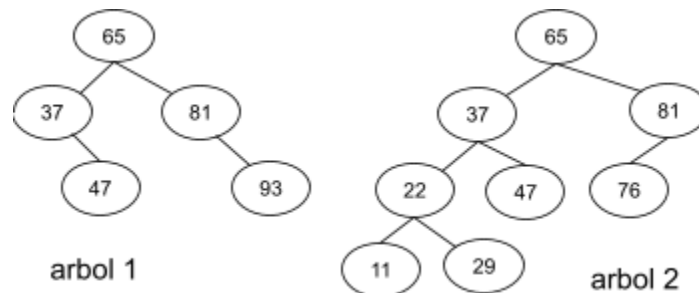
El método devuelve `true` si *arbol1* es prefijo de *arbol2*, `false` en caso contrario.

Se dice que un árbol binario *arbol1* es prefijo de otro árbol binario *arbol2* cuando *arbol1* coincide con la parte inicial del árbol *arbol2* tanto en el contenido de los elementos como en su estructura.

Por ejemplo, en la siguiente imagen, *arbol1* ES prefijo de *arbol2*.

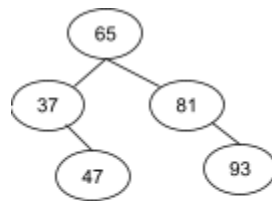


En esta otra, *arbol1* NO es prefijo de *arbol2* (el subárbol con raíz 93 no está en el árbol2).

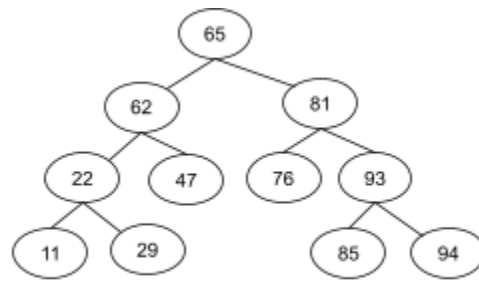


En la siguiente, no coincide el contenido. El subárbol con raíz 37 figura con raíz 62, entonces, *arbol1* NO es prefijo de *arbol2*.





arbol 1



arbol 2

**Ejercicio 9.**

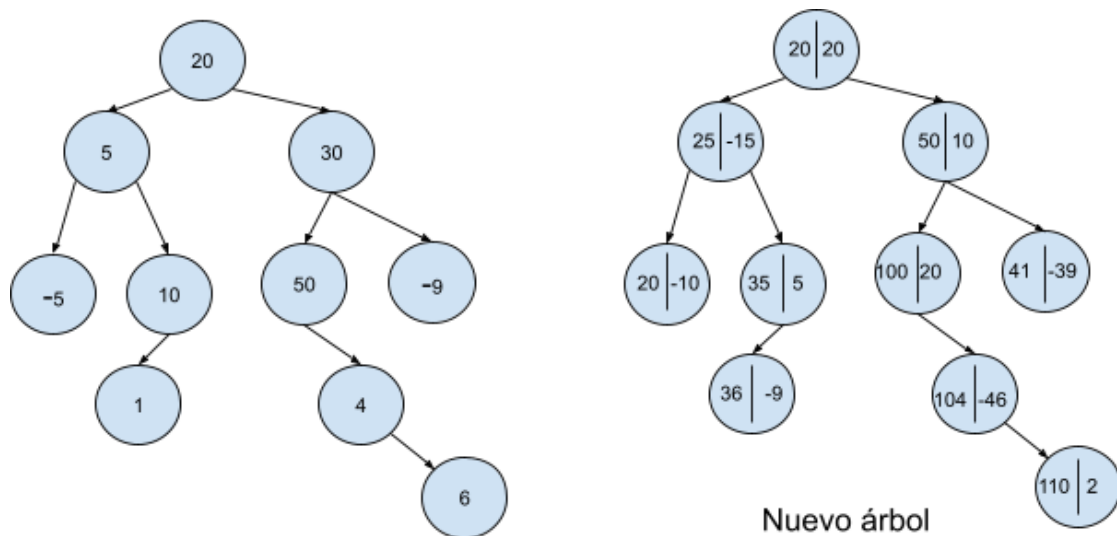
Escribir, en una clase *ParcialArboles*, el método público con la siguiente firma:

```
public BinaryTree<?> sumAndDif(BinaryTree<Integer> arbol).
```

El método recibe un árbol binario de enteros y devuelve un nuevo árbol que contiene, en cada nodo, dos tipos de información:

- La suma de los números a lo largo del camino desde la raíz hasta el nodo actual.
- La diferencia entre el número almacenado en el nodo original y el número almacenado en el nodo padre.

Ejemplo:



NOTA: En el nodo raíz, considerar que el valor del nodo padre es 0.



## Práctica 3 Árboles Generales

Implemente cada ejercicio en un paquete que contenga los números del TP y del ejercicio. Ejemplo tp3.ejercicio3 (dentro del proyecto llamado "AYED").

GeneralTree<T>
data: T
children: List<GeneralTree<T>>
GeneralTree(): void
GeneralTree(T): void
GeneralTree(T, List<GeneralTree<T>>): void
getData(): T
setData(T): void
getChildren(): List<GeneralTree<T>>
setChildren(List<GeneralTree<T>>): void
addChild(GeneralTree<T>): void
isLeaf(): boolean
hasChildren(): boolean
isEmpty(): boolean
removeChild(GeneralTree<T>): void
altura(): int
nivel(T): int
ancho(): int

### Ejercicio 1

Considere la siguiente especificación de la clase **GeneralTree** (con la representación de **Lista de Hijos**)

El constructor **GeneralTree(T data)** inicializa un árbol que tiene como raíz un nodo y este nodo tiene el dato pasado como parámetro y una lista vacía.

El constructor **GeneralTree (T data, List<GeneralTree <T>> children)** inicializa un árbol que tiene como raíz a un nodo y este nodo tiene el dato pasado como parámetro y como hijos children.

El método **getData():T** retorna el dato almacenado en la raíz del árbol.

El método **getChildren():List<GeneralTree <T>>**, retorna la lista de hijos de la raíz del árbol.

El método **addChild(GeneralTree <T> child)** agrega un hijo al final de la lista de hijos del árbol

El método **removeChild(GeneralTree <T> child)** elimina del árbol el hijo pasado como parámetro.

El método **hasChildren()** devuelve verdadero si la lista de hijos del árbol no es null y tampoco es vacía

El método **isEmpty()** devuelve verdadero si el dato del árbol es null y además no tiene hijos.

Los métodos **altura()**, **nivel(T)** y **ancho()** se resolverán en el ejercicio 3.

Analice la implementación en JAVA de la clase **GeneralTree** brindada por la cátedra.



## Ejercicio 2

a) Implemente en la clase **RecorridosAG** los siguientes métodos:

**public List<Integer> numerosImparesMayoresQuePreOrden (GeneralTree <Integer> a, Integer n)**

Método que retorna una lista con los elementos impares del árbol "a" que sean mayores al valor "n" pasados como parámetros, recorrido en preorden.

**public List<Integer> numerosImparesMayoresQueInOrden (GeneralTree <Integer> a, Integer n)**

Método que retorna una lista con los elementos impares del árbol "a" que sean mayores al valor "n" pasados como parámetros, recorrido en inorden.

**public List<Integer> numerosImparesMayoresQuePostOrden (GeneralTree <Integer> a, Integer n)**

Método que retorna una lista con los elementos impares del árbol "a" que sean mayores al valor "n" pasados como parámetros, recorrido en postorden.

**public List<Integer> numerosImparesMayoresQuePorNiveles (GeneralTree <Integer> a, Integer n)**

Método que retorna una lista con los elementos impares del árbol "a" que sean mayores al valor "n" pasados como parámetros, recorrido por niveles.

b) Si ahora tuviera que implementar estos métodos en la clase **GeneralTree<T>**, ¿qué modificaciones haría tanto en la firma como en la implementación de los mismos?

## Ejercicio 3

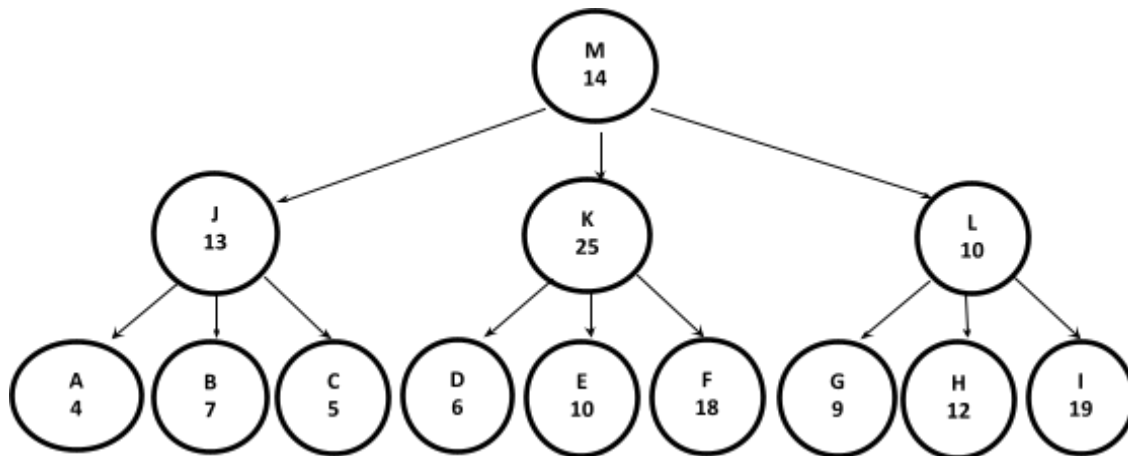
Implemente en la clase **GeneralTree** los siguientes métodos

- a) **public int altura(): int** devuelve la altura del árbol, es decir, la longitud del camino más largo desde el nodo raíz hasta una hoja.
- b) **public int nivel(T dato)** devuelve la profundidad o nivel del dato en el árbol. El nivel de un nodo es la longitud del único camino de la raíz al nodo.
- c) **public int ancho(): int** la amplitud (ancho) de un árbol se define como la cantidad de nodos que se encuentran en el nivel que posee la mayor cantidad de nodos.



#### Ejercicio 4

El esquema de comunicación de una empresa está organizado en una estructura jerárquica, en donde cada nodo envía el mensaje a sus descendientes. Cada nodo posee el tiempo que tarda en transmitir el mensaje.



Se debe devolver **el mayor promedio** entre todos los valores promedios de los niveles.

Para el ejemplo presentado, el promedio del nivel 0 es 14, el del nivel 1 es 16 y el del nivel 2 es 10. Por lo tanto, debe devolver 16.

- Indique y justifique qué tipo de recorrido utilizará para resolver el problema.
- Implementar en una clase **AnalizadorArbol**, el método con la siguiente firma:

**public double devolverMaximoPromedio (GeneralTree<AreaEmpresa>arbol)**

Donde **AreaEmpresa** es una clase que representa a un área de la empresa mencionada y que contiene la identificación de la misma representada con un **String** y una tardanza de transmisión de mensajes interna representada con **int**.

#### Ejercicio 5

Se dice que un nodo n es ancestro de un nodo m si existe un camino desde n a m. Implemente un método en la clase **GeneralTree** con la siguiente firma:

**public boolean esAncestro(T a, T b):** devuelve true si el valor "a" es ancestro del valor "b".



## Ejercicio 6

Sea una red de agua potable, la cual comienza en un caño maestro y la misma se va dividiendo sucesivamente hasta llegar a cada una de las casas.

Por el caño maestro ingresan "x" cantidad de litros y en la medida que el caño se divide, de acuerdo con las bifurcaciones que pueda tener, el caudal se divide en partes iguales en cada una de ellas. Es decir, si un caño maestro recibe 1000 litros y tiene por ejemplo 4 bifurcaciones se divide en 4 partes iguales, donde cada división tendrá un caudal de 250 litros.

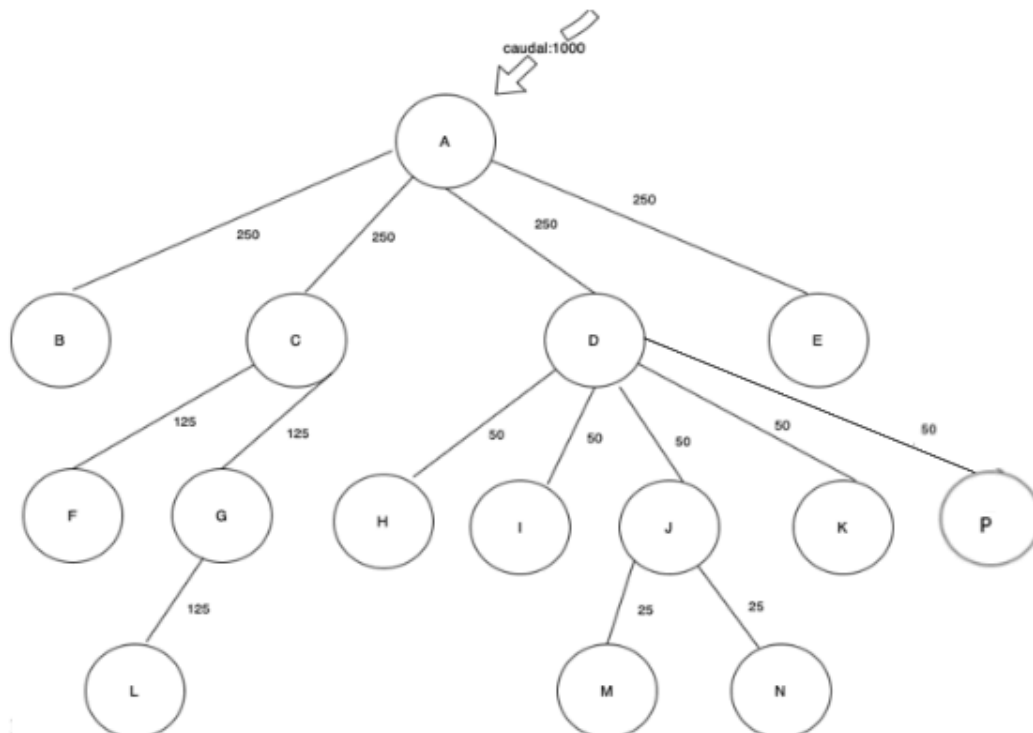
Luego, si una de esas divisiones se vuelve a dividir, por ej. en 5 partes, cada una tendrá un caudal de 50 litros y así sucesivamente hasta llegar a un lugar sin bifurcaciones.

Se debe implementar una clase **RedDeAguaPotable** que contenga el método con la siguiente firma:

**public double minimoCaudal(double caudal)**

que calcule el caudal de cada nodo y determine cuál es el caudal mínimo que recibe una casa. Asuma que la estructura de caños de la red está representada por una variable de instancia de la clase RedAguaPotable y que es un **GeneralTree<Character>**.

Extendiendo el ejemplo en el siguiente gráfico, al llamar al método minimoCaudal con un valor de 1000.0 debería retornar 25.0



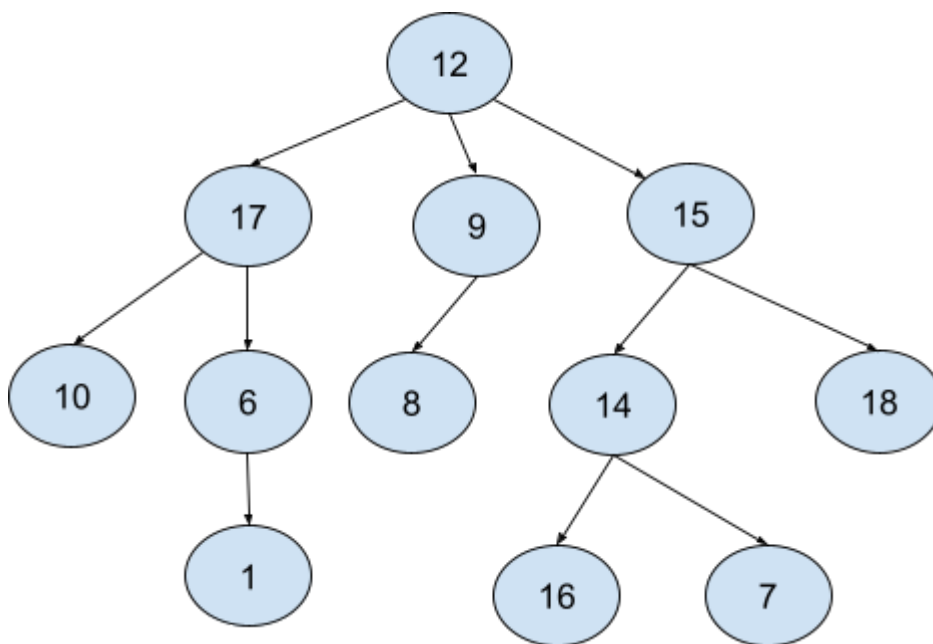


## Ejercicio 7

Dada una clase **Caminos** que contiene una variable de instancia de tipo **GeneralTree** de números enteros, implemente un método que retorne el camino a la hoja más lejana. **En el caso de haber más de un camino máximo retorne el primero** que encuentre.

El método debe tener la siguiente firma: **public List<Integer> caminoAHojaMasLejana ()**

Por ejemplo, para el siguiente árbol, la lista a retornar sería: 12, 17, 6, 1 de longitud 3  
(Los caminos 12, 15, 14, 16 y 12, 15, 14, 7 son también máximos, pero se pide el primero).



## Ejercicio 8

Retomando el ejercicio **abeto navideño** visto en teoría, cree una clase **Navidad** que cuenta con una variable de instancia **GeneralTree** que representa al abeto (ya creado) e implemente el método con la firma: **public String esAbetoNavidenio()**



Los siguientes ejercicios fueron tomados en parciales, en los últimos años. Tenga en cuenta que:

1. No puede agregar más variables de instancia ni de clase a la clase **ParcialArboles**.
2. Debe respetar la clase y la firma del método indicado.
3. Puede definir todos los métodos y variables locales que considere necesarios.
4. Todo método que no esté definido en la sinopsis de clases debe ser implementado.
5. Debe recorrer la estructura solo 1 vez para resolverlo.
6. Si corresponde, complete en la firma del método el tipo de datos indicado con signo de "?".

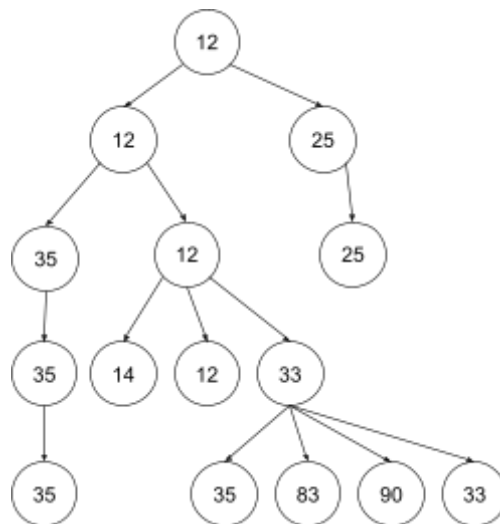
## Ejercicio 9

Implemente en la clase **ParcialArboles** el método:

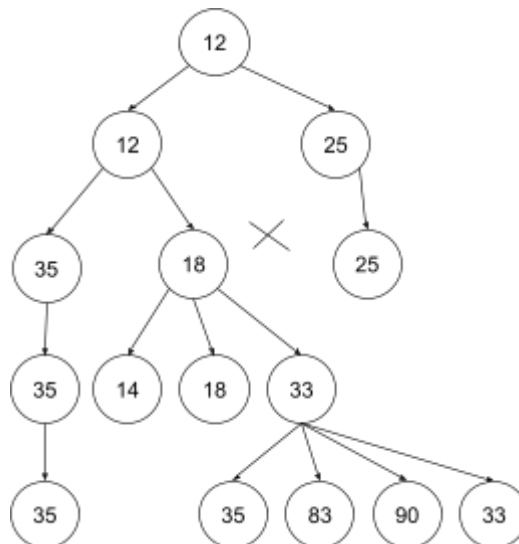
**public static boolean esDeSeleccion (GeneralTree<Integer> arbol)**

que devuelve true si el árbol recibido por parámetro es de selección, falso sino lo es.

Un árbol general es de selección si cada nodo tiene en su raíz el valor del menor de sus hijos. Por ejemplo, para el siguiente árbol se debería retornar: **true**



Para este otro árbol se debería retornar **false** (el árbol con raíz 18 tiene un hijo con valor mínimo 14 )







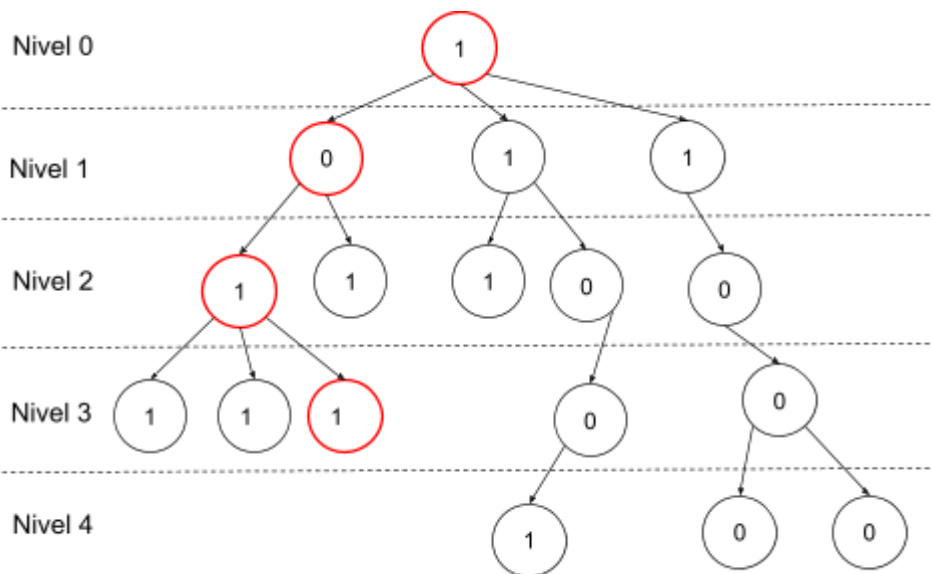
## Ejercicio 10

Implemente la clase **ParcialArboles**, y el método:

```
public static List<Integer> resolver(GeneralTree<Integer> arbol)
```

que recibe un árbol general de valores enteros, que solo pueden ser 0 o 1 y devuelve una lista con los valores que componen el “**camino filtrado de valor máximo**”, se llama “filtrado” porque sólo se agregan al camino los valores iguales a 1 (los 0 no se agregan), mientras que es “de valor máximo” porque se obtiene de realizar el siguiente cálculo: es la suma de los valores de los nodos multiplicados por su nivel. De haber más de uno, **devolver el primero que se encuentre**.

Por ejemplo, para el árbol general que aparece en el gráfico, el resultado de la invocación al método **resolver** debería devolver una lista con los valores: 1, 1, 1, y **NO** 1, 0, 1, 1 dado que filtramos el valor 0. Con esa configuración se obtiene el mayor valor según el cálculo:  $1*0 + 0*1 + 1*2 + 1*3$  (El camino  $1*0+1*1+0*2+0*3+1*4$  también da 5, pero no es el primero)



Nota: No puede generar la lista resultado con 0 / 1 y en un segundo recorrido eliminar los elementos con valor 0



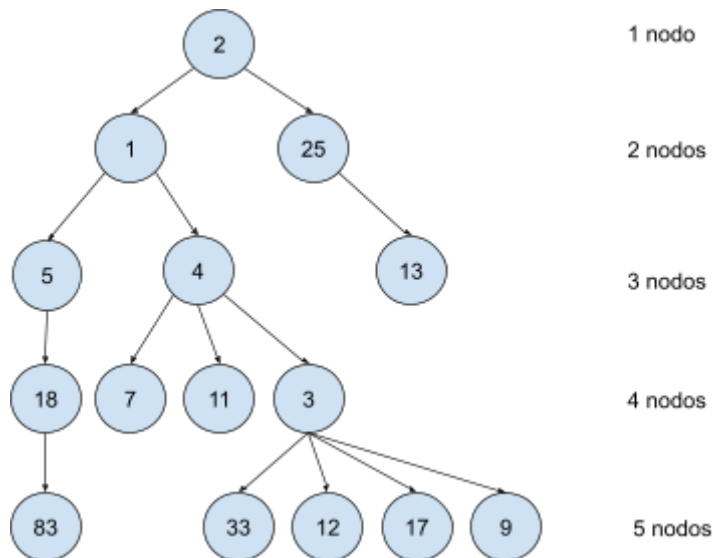
## Ejercicio 11

Implemente en la clase **ParcialArboles** el método:

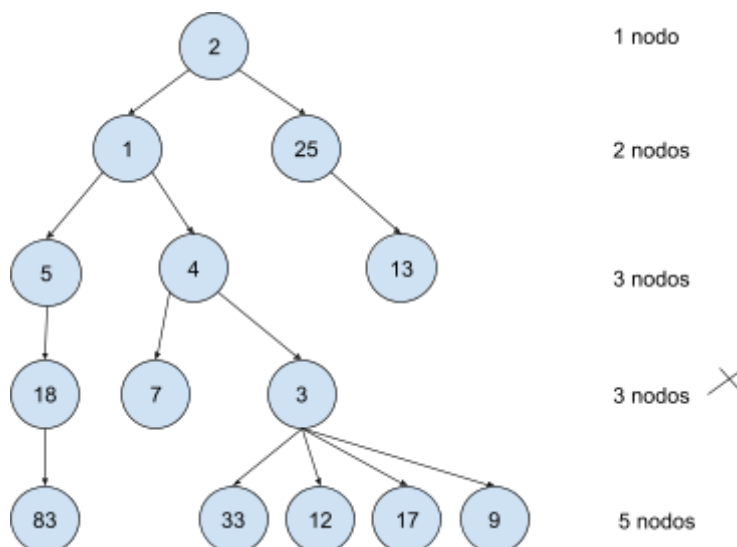
**public static boolean resolver(GeneralTree<Integer> arbol)** que devuelve true si el árbol es creciente, falso sino lo es.

Un árbol general **es creciente** si para cada nivel del árbol la cantidad de nodos que hay en ese nivel es exactamente igual a la cantidad de nodos del nivel anterior + 1.

Por ejemplo, para el siguiente árbol, se debería retornar **true**



Para este otro árbol se debería retornar **false** (Ya que en el nivel 3 debería haber 4 nodos y no 3)



## Trabajo Práctico N° 3: **Árboles Generales.**

### Ejercicio 1.

Considerar la siguiente especificación de la clase *GeneralTree* (con la representación de Lista de Hijos).

GeneralTree<T>
<div> <div>data: T</div> <div>children: List&lt;GeneralTree&lt;T&gt;&gt;</div> </div>
<div> <div>GeneralTree(): void</div> <div>GeneralTree(T): void</div> <div>GeneralTree(T, List&lt;GeneralTree&lt;T&gt;&gt;): void</div> <div>getData(): T</div> <div>setData(T): void</div> <div>getChildren(): List&lt;GeneralTree&lt;T&gt;&gt;</div> <div>setChildren(List&lt;GeneralTree&lt;T&gt;&gt;): void</div> <div>addChild(GeneralTree&lt;T&gt;): void</div> <div>isLeaf(): boolean</div> <div>hasChildren(): boolean</div> <div>isEmpty(): boolean</div> <div>removeChild(GeneralTree&lt;T&gt;): void</div> <div>altura(): int</div> <div>nivel(T): int</div> <div>ancho(): int</div> </div>

- El constructor *GeneralTree(T data)* inicializa un árbol que tiene como raíz un nodo y este nodo tiene el dato pasado como parámetro y una lista vacía.
- El constructor *GeneralTree(T data, List<GeneralTree <T>> children)* inicializa un árbol que tiene como raíz a un nodo y este nodo tiene el dato pasado como parámetro y como hijos *children*.
- El método *getData(): T* retorna el dato almacenado en la raíz del árbol.
- El método *getChildren(): List<GeneralTree <T>>* retorna la lista de hijos de la raíz del árbol.
- El método *addChild(GeneralTree <T> child)* agrega un hijo al final de la lista de hijos del árbol.
- El método *hasChildren()* devuelve verdadero si la lista de hijos del árbol no es null y tampoco es vacía.
- El método *isEmpty()* devuelve verdadero si el dato del árbol es null y, además, no tiene hijos.
- El método *removeChild(GeneralTree <T> child)* elimina del árbol el hijo pasado como parámetro.
- Los métodos *altura()*, *nivel(T)* y *ancho()* se resolverán en el Ejercicio 3.

Analizar la implementación en JAVA de la clase *GeneralTree* brindada por la cátedra.



**Ejercicio 2.**

(a) Implementar, en la clase *RecorridosAG*, los siguientes métodos:

- *public* *List<Integer>*  
*numerosImparesMayoresQuePreOrden(GeneralTree<Integer> a, Integer n)*  
*Método que retorna una lista con los elementos impares del árbol “a” que sean mayores al valor “n” pasados como parámetros, recorrido en preorden.*
- *public* *List<Integer>*  
*numerosImparesMayoresQueInOrden(GeneralTree<Integer> a, Integer n)*  
*Método que retorna una lista con los elementos impares del árbol “a” que sean mayores al valor “n” pasados como parámetros, recorrido en inorden.*
- *public* *List<Integer>*  
*numerosImparesMayoresQuePostOrden(GeneralTree<Integer> a, Integer n)*  
*Método que retorna una lista con los elementos impares del árbol “a” que sean mayores al valor “n” pasados como parámetros, recorrido en postorden.*
- *public* *List<Integer>*  
*numerosImparesMayoresQuePorNiveles(GeneralTree<Integer> a, Integer n)*  
*Método que retorna una lista con los elementos impares del árbol “a” que sean mayores al valor “n” pasados como parámetros, recorrido por niveles.*

(b) Si, ahora, se tuviera que implementar estos métodos en la clase *GeneralTree<T>*, ¿qué modificaciones se harían tanto en la firma como en la implementación de los mismos?

### **Ejercicio 3.**

*Implementar, en la clase GeneralTree, los siguientes métodos:*

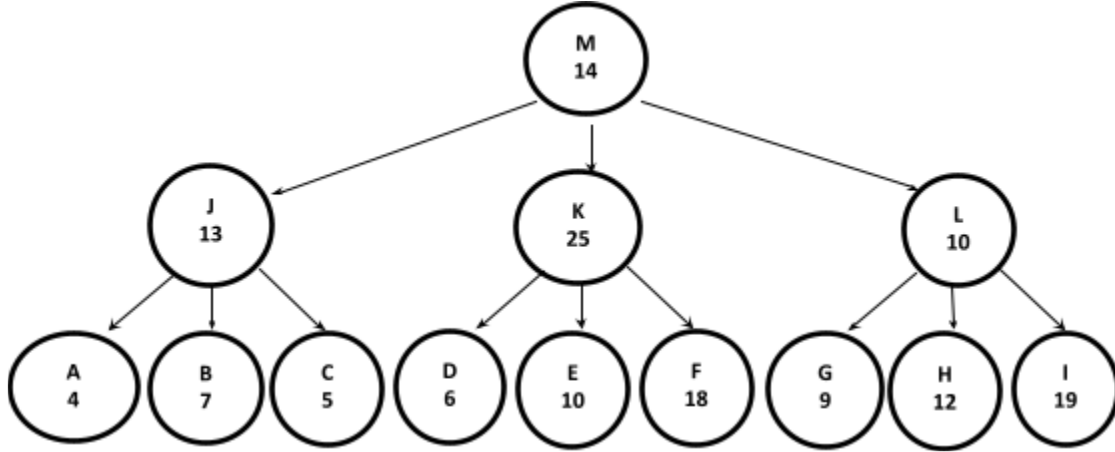
**(a)** *public int altura(): Devuelve la altura del árbol, es decir, la longitud del camino más largo desde el nodo raíz hasta una hoja.*

**(b)** *public int nivel(T dato): Devuelve la profundidad o nivel del dato en el árbol. El nivel de un nodo es la longitud del único camino de la raíz al nodo.*

**(c)** *public int ancho(): Devuelve la amplitud (ancho) de un árbol, que se define como la cantidad de nodos que se encuentran en el nivel que posee la mayor cantidad de nodos.*

**Ejercicio 4.**

El esquema de comunicación de una empresa está organizado en una estructura jerárquica, en donde cada nodo envía el mensaje a sus descendientes. Cada nodo posee el tiempo que tarda en transmitir el mensaje.



Se debe devolver el mayor promedio entre todos los valores promedios de los niveles. Para el ejemplo presentado, el promedio del nivel 0 es 14, el del nivel 1 es 16 y el del nivel 2 es 10. Por lo tanto, debe devolver 16.

(a) Indicar y justificar qué tipo de recorrido se utilizará para resolver el problema.

El tipo de recorrido que se utilizará para resolver el problema será por niveles.

(b) Implementar, en una clase *AnalizadorArbol*, el método con la siguiente firma:

```
public double devolverMaximoPromedio(GeneralTree<AreaEmpresa> arbol),
```

donde *AreaEmpresa* es una clase que representa a un área de la empresa mencionada y que contiene la identificación de la misma representada con un *String* y una tardanza de transmisión de mensajes interna representada con *int*.

### **Ejercicio 5.**

*Se dice que un nodo  $n$  es ancestro de un nodo  $m$  si existe un camino desde  $n$  a  $m$ . Implementar un método en la clase `GeneralTree` con la siguiente firma:*

*`public boolean esAncestro(T a, T b)`: Devuelve `true` si el valor “ $a$ ” es ancestro del valor “ $b$ ”.*



## Ejercicio 6.

Sea una red de agua potable, la cual comienza en un caño maestro y la misma se va dividiendo, sucesivamente, hasta llegar a cada una de las casas. Por el caño maestro, ingresan “x” cantidad de litros y, en la medida que el caño se divide de acuerdo con las bifurcaciones que pueda tener, el caudal se divide en partes iguales en cada una de ellas. Es decir, si un caño maestro recibe 1000 litros y tiene, por ejemplo, 4 bifurcaciones, se divide en 4 partes iguales, donde cada división tendrá un caudal de 250 litros. Luego, si una de esas divisiones se vuelve a dividir, por ejemplo, en 5 partes, cada una tendrá un caudal de 50 litros y así sucesivamente hasta llegar a un lugar sin bifurcaciones.

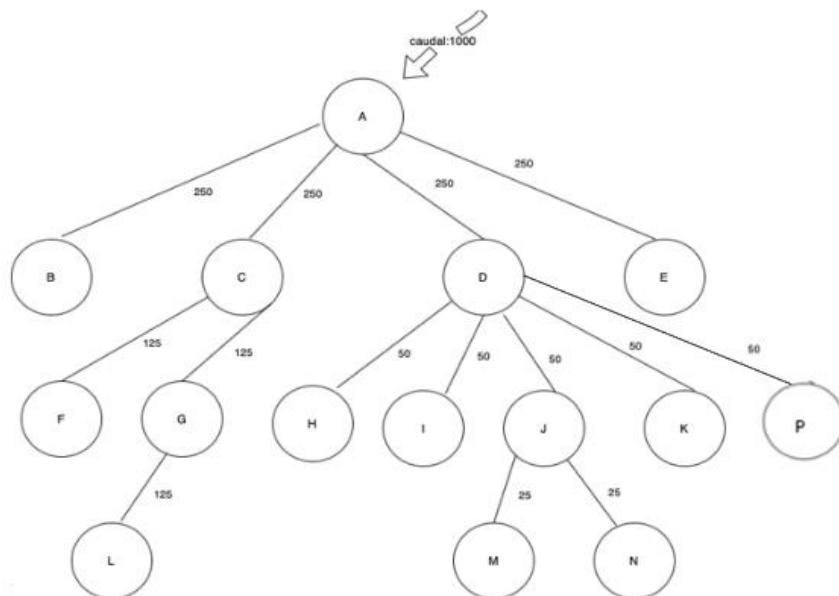
Se debe implementar una clase *RedDeAguaPotable* que contenga el método con la siguiente firma:

*public double minimoCaudal(double caudal),*

que calcule el caudal de cada nodo y determine cuál es el caudal mínimo que recibe una casa.

Asumir que la estructura de caños de la red está representada por una variable de instancia de la clase *RedAguaPotable* y que es un *GeneralTree<Character>*.

Extendiendo el ejemplo en el siguiente gráfico, al llamar al método *minimoCaudal* con un valor de 1000.0, debería retornar 25.0.

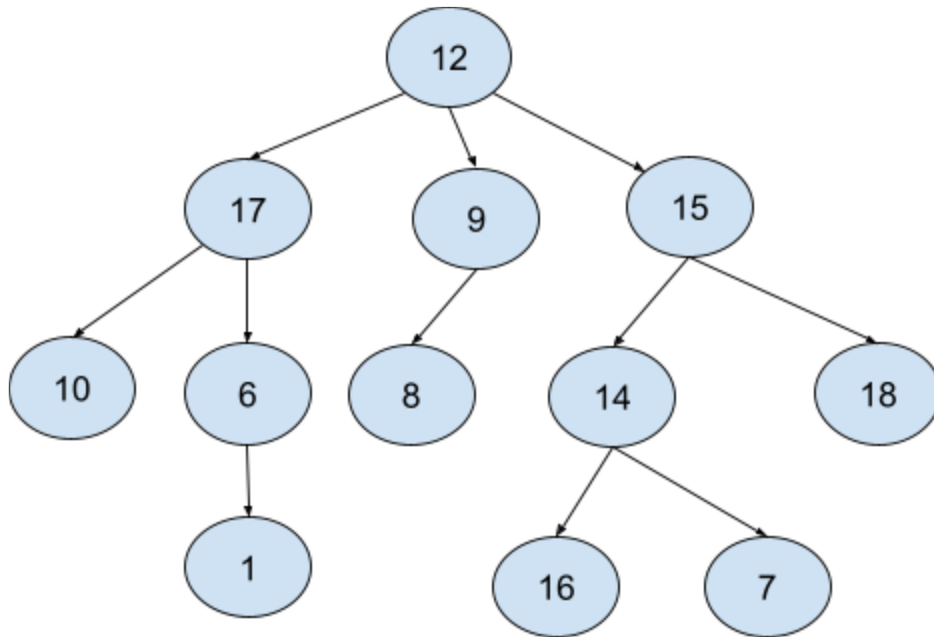


**Ejercicio 7.**

Dada una clase *Caminos* que contiene una variable de instancia de tipo *GeneralTree* de números enteros, implementar un método que retorne el camino a la hoja más lejana. En el caso de haber más de un camino máximo, retornar el primero que se encuentre. El método debe tener la siguiente firma:

```
public List<Integer> caminoAHojaMasLejana().
```

Por ejemplo, para el siguiente árbol, la lista a retornar sería: 12, 17, 6, 1 de longitud 3 (los caminos 12, 15, 14, 16 y 12, 15, 14, 7 son también máximos, pero se pide el primero).



### **Ejercicio 8.**

*Retomando el ejercicio abeto navideño visto en teoría, crear una clase Navidad que cuenta con una variable de instancia GeneralTree que representa al abeto (ya creado) e implementar el método con la firma: public String esAbetoNavidenio().*

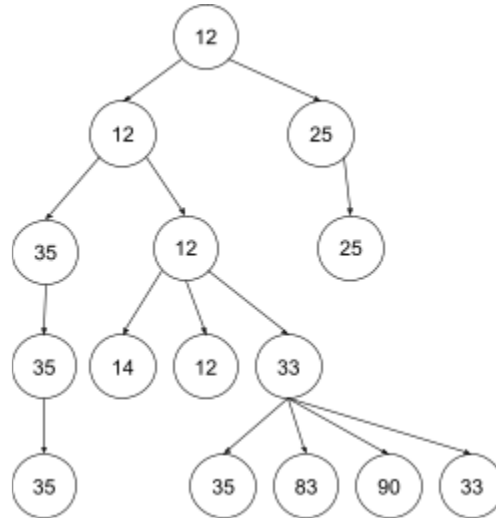
**Ejercicio 9.**

Implementar, en la clase *ParcialArboles*, el método:

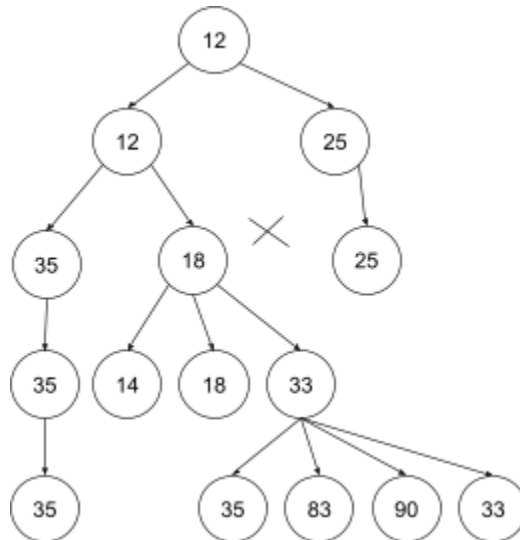
`public static boolean esDeSeleccion(GeneralTree<Integer> arbol),`

que devuelve `true` si el árbol recibido por parámetro es de selección, falso sino lo es.

Un árbol general es de selección si cada nodo tiene, en su raíz, el valor del menor de sus hijos. Por ejemplo, para el siguiente árbol, se debería retornar `true`.



Para este otro árbol, se debería retornar `false` (el árbol con raíz 18 tiene un hijo con valor mínimo 14).



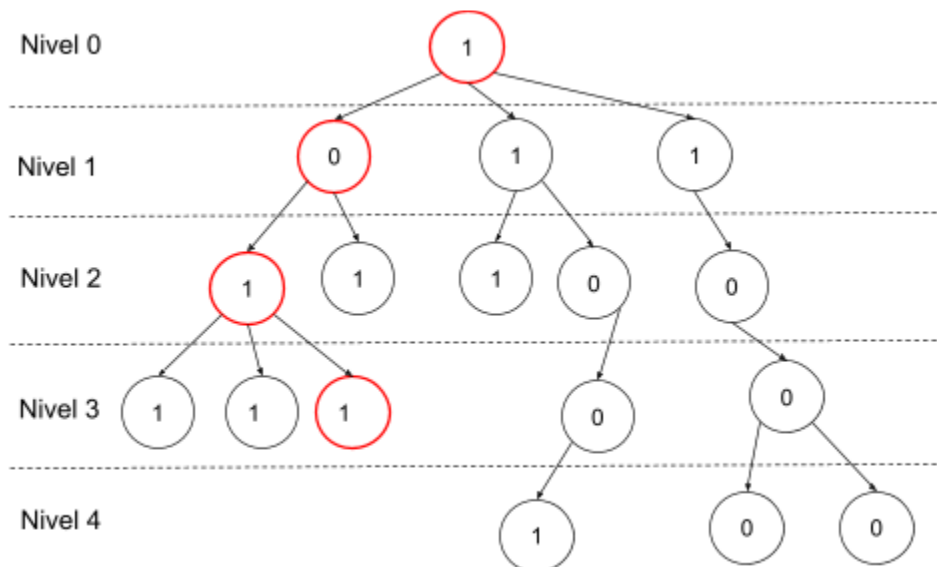
**Ejercicio 10.**

Implementar la clase *ParcialArboles* y el método:

```
public static List<Integer> resolver(GeneralTree<Integer> arbol),
```

que recibe un árbol general de valores enteros, que sólo pueden ser 0 o 1, y devuelve una lista con los valores que componen el “camino filtrado de valor máximo”. Se llama “filtrado” porque sólo se agregan al camino los valores iguales a 1 (los 0 no se agregan), mientras que es “de valor máximo” porque se obtiene de realizar el siguiente cálculo: es la suma de los valores de los nodos multiplicados por su nivel. De haber más de uno, devolver el primero que se encuentre.

Por ejemplo, para el árbol general que aparece en el gráfico, el resultado de la invocación al método *resolver* debería devolver una lista con los valores 1, 1, 1, y NO 1, 0, 1, 1, dado que se filtró el valor 0. Con esa configuración, se obtiene el mayor valor según el cálculo:  $1*0 + 0*1 + 1*2 + 1*3$  (el camino  $1*0 + 1*1 + 0*2 + 0*3 + 1*4$  también da 5, pero no es el primero).



NOTA: No se puede generar la lista resultado con 0/1 y, en un segundo recorrido, eliminar los elementos con valor 0.

**Ejercicio 11.**

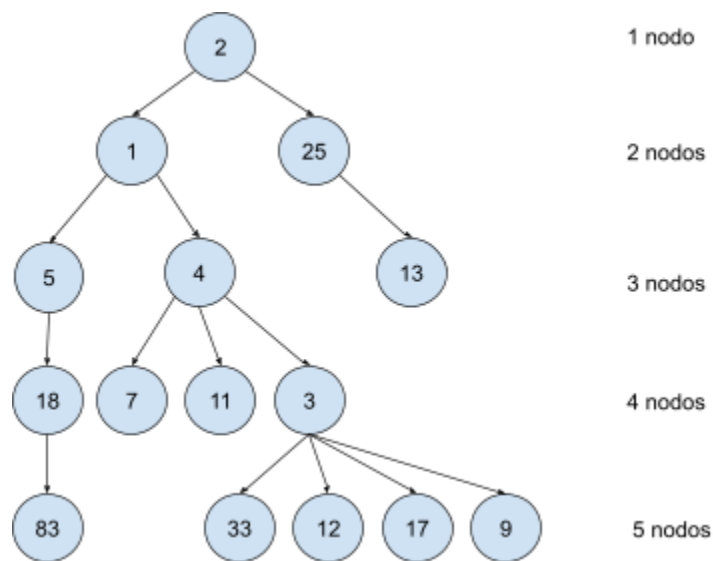
Implementar, en la clase *ParcialArboles*, el método:

`public static boolean resolver(GeneralTree<Integer> arbol),`

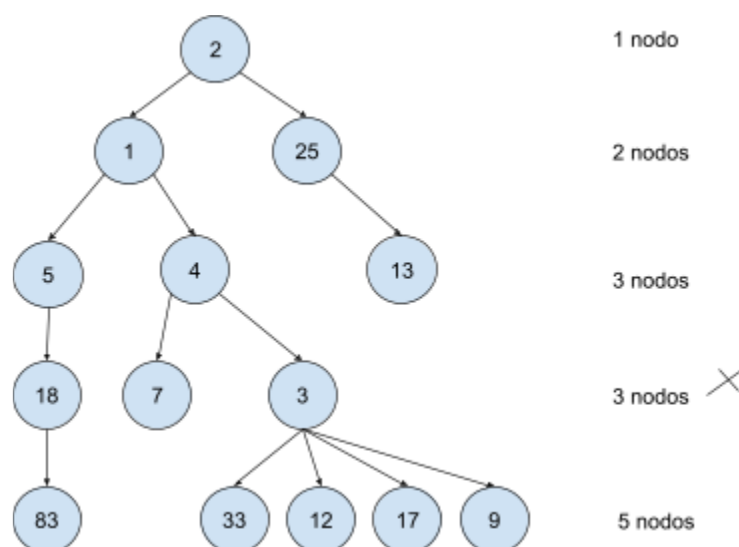
que devuelve `true` si el árbol es creciente, falso sino lo es.

Un árbol general es creciente si, para cada nivel del árbol, la cantidad de nodos que hay en ese nivel es, exactamente, igual a la cantidad de nodos del nivel anterior + 1.

Por ejemplo, para el siguiente árbol, se debería retornar `true`.



Para este otro árbol, se debería retornar `false` (ya que, en el nivel 3, debería haber 4 nodos y no 3).





**Práctica 4**  
**Tiempos de Ejecución**

**Ejercicio 1**

Debido a un error en la actualización de sus sistemas, el banco AyED perdió la información del estado de todas sus cuentas. Afortunadamente logran recuperar un backup del día anterior y utilizando las transacciones registradas en las últimas 24hrs podrán reconstruir los saldos. Hay poco tiempo que perder, el sistema bancario debe volver a operar lo antes posible.

Las transacciones se encuentran agrupadas en consultas, una consulta cuenta con un valor y un rango de cuentas consecutivas a las que hay que aplicar este cambio, por ejemplo la consulta (333..688 = 120) implica sumar \$120 a todas las cuentas entre la número 333 y la número 688 (inclusive). Entonces, la recuperación de los datos consiste en aplicar todas las consultas sobre el estado de las cuentas recuperadas en el backup del día anterior.

El equipo de desarrollo se pone manos a la obra y llega a una solución rápidamente (Algoritmo **procesarMovimientos**). Toman cada consulta y recorren el rango de cuentas aplicando el valor correspondiente, como muestra el siguiente algoritmo.

```
Consultas.comenzar()
While(!consultas.fin()){
    Consulta = consultas.proximo();
    for(i = consulta.desde; i < consulta.hasta; i++){
        cuenta[i] = cuenta[i] + consulta.valor;
    }
}
```

Escriben la solución en pocos minutos y ponen en marcha el proceso de recuperación. Enseguida se dan cuenta que el proceso va a tardar muchas horas en finalizar, son muchas cuentas y muchos movimientos, la solución aunque simple es ineficiente. Luego de discutir varias ideas llegan a una solución (Algoritmo **procesarMovimientosOptimizado**) que logra procesar toda la información en pocos segundos. Ambos algoritmos se encuentran en el archivo Ejercicio 1 - rsq\_tn\_ayed.zip del material adicional.

a.- Para que usted pueda experimentar el tiempo que demora cada uno de los dos algoritmos en forma empírica, usted debe ejecutar cada uno de ellos, con distintas cantidades de elementos y completar la tabla. Luego haga la gráfica para comparar los tiempos de ambos algoritmos. Tenga en cuenta que el algoritmo posee dos constantes CANTIDAD\_CUENTAS y CANTIDAD\_CONSULTAS, sin embargo, por simplicidad, ambas toman el mismo valor. Sólo necesita modificar CANTIDAD\_CUENTAS .

Nº Cuentas (y consultas)	procesarMovimientos	procesarMovimientosOptimizado
1.000		
10.000		
25.000		
50.000		
100.000		



UNLP. Facultad de Informática.

## Algoritmos y Estructuras de Datos Cursada 2025

b.- ¿Por qué **procesarMovimientos** es tan ineficiente? Tenga en cuenta que pueden existir millones de movimientos diarios que abarquen gran parte de las cuentas bancarias.

c.- ¿En qué se diferencia **procesarMovimientosOptimizado**? Observe las operaciones que se realizan para cada consulta.

Aunque los dos algoritmos se encuentran explicados en los comentarios, no es necesario entender su funcionamiento para contestar las preguntas.

### Ejercicio 2

La clase `BuscadorEnArrayOrdenado` del material adicional (Ejercicio 2 - Tiempo.zip) resuelve el problema de buscar un elemento dentro de un array ordenado. El mismo problema, lo resuelve de dos maneras diferentes: búsqueda **lineal** y búsqueda **dicotómica**.

Se define la variable `cantidadElementos`, la cual se va modificando para determinar una escala (por ejemplo de a 100.000 o 1.000.000, dependiendo de la capacidad de cada equipo). Realice una tabla con el tiempo que tardan en ejecutarse ambos algoritmos, para los distintos valores de la variable. Por ejemplo:

N	Lineal	Dicotómica
100.000		
200.000		
300.000		
400.000		
500.000		
600.000		

### Ejercicio 3

En la documentación de la clase `ArrayList` que se encuentra en el siguiente link <https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/ArrayList.html>

Se encuentran las siguientes afirmaciones

- "The size, isEmpty, get, set, iterator, and listIterator operations run in constant time."
- "All of the other operations run in linear time (roughly speaking)"

Explique con sus palabras por qué cree que algunas operaciones se ejecutan en tiempo constante y otras en tiempo lineal.





UNLP. Facultad de Informática.

## Algoritmos y Estructuras de Datos Cursada 2025

### Ejercicio 4

Determinar si las siguientes sentencias son verdaderas o falsas, justificando la respuesta utilizando notación Big-Oh.

- $3^n$  es de  $O(2^n)$
- $n + \log_2(n)$  es de  $O(n)$
- $n^{1/2} + 10^{20}$  es de  $O(n^{1/2})$
- $\begin{cases} 3n+17, n < 100 \\ 317, n \geq 100 \end{cases}$  tiene orden lineal
- Mostrar que  $p(n) = 3n^5 + 8n^4 + 2n + 1$  es  $O(n^5)$
- Si  $p(n)$  es un polinomio de grado  $k$ , entonces  $p(n)$  es  $O(n^k)$ .

### Ejercicio 5

Se necesita generar una permutación random de los  $n$  primeros números enteros. Por ejemplo  $[4,3,1,0,2]$  es una permutación legal, pero  $[0,4,1,2,4]$  no lo es, porque un número está duplicado (el 4) y otro no está (el 3). Presentamos tres algoritmos para solucionar este problema. Asumimos la existencia de un generador de números random,  $\text{ran\_int}(i,j)$  el cual genera en tiempo constante, enteros entre  $i$  y  $j$  inclusive con igual probabilidad (esto significa que puede retornar el mismo valor más de una vez). También suponemos el mensaje  $\text{swap}()$  que intercambia dos datos entre sí.

```
public class EjercicioPermutaciones {
    private static Random rand = new Random();

    public static int[] randomUno(int n) {
        int i, x = 0, k;
        int[] a = new int[n];
        for (i = 0; i < n; i++) {
            boolean seguirBuscando = true;
            while (seguirBuscando) {
                x = ran_int(0, n - 1);
                seguirBuscando = false;
                for (k = 0; k < i && !seguirBuscando; k++)
                    if (x == a[k])
                        seguirBuscando = true;
            }
            a[i] = x;
        }
        return a;
    }

    public static int[] randomDos(int n) {
        int i, x;
        int[] a = new int[n];
        boolean[] used = new boolean[n];
        for (i = 0; i < n; i++) used[i] = false;
        for (i = 0; i < n; i++) {
            x = ran_int(0, n - 1);
            while (used[x]) x = ran_int(0, n - 1);
            a[i] = x;
            used[x] = true;
        }
        return a;
    }
}
```



## Algoritmos y Estructuras de Datos Cursada 2025

```
public static int[] randomTres(int n) {
    int i;
    int[] a = new int[n];
    for (i = 0; i < n; i++) a[i] = i;
    for (i = 1; i < n; i++) swap(a, i, ran_int(0, i - 1));
    return a;
}

private static void swap(int[] a, int i, int j) {
    int aux;
    aux = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = aux;
}

/** Genera en tiempo constante, enteros entre i y j con igual probabilidad.
 */
private static int ran_int(int a, int b) {
    if (b < a || a < 0 || b < 0) throw new IllegalArgumentException("Parametros
invalidos");
    return a + (rand.nextInt(b - a + 1));
}

public static void main(String[] args) {
    System.out.println(Arrays.toString(randomUno(1000)));
    System.out.println(Arrays.toString(randomDos(1000)));
    System.out.println(Arrays.toString(randomTres(1000)));
}
}
```

- Analizar si todos los algoritmos terminan o alguno puede quedar en loop infinito.
- Describa con palabras la cantidad de operaciones que realizan.

### Ejercicio 6

a.- Supongamos que tenemos un algoritmo de  $O(\log^2 n)$  y disponemos de 1 hora de uso de CPU. En esa hora, la CPU puede ejecutar el algoritmo con una entrada de tamaño  $n = 1024$  como máximo. ¿Cuál sería el mayor tamaño de entrada que podría ejecutar nuestro algoritmo si disponemos de 4 horas de CPU?

b.- Considerando que un algoritmo requiere  $T(n)$  operaciones para resolver un problema y la computadora procesa 10.000 operaciones por segundo. Si  $T(n) = n^2$ , determine el tiempo en segundos requerido por el algoritmo para resolver un problema de tamaño  $n = 2.000$ .



## Ejercicio 7

Para cada uno de los siguientes fragmentos de código, calcule, intuitivamente, el orden del tiempo de ejecución.

<pre>for(int i = 0; i &lt; n; i++)     sum++;</pre>	<pre>for(int i = 0; i &lt; n; i+=2)     sum++;</pre>
<pre>for(int i = 0; i &lt; n; i++)     for(int j = 0; j &lt; n; j++)         sum++;</pre>	<pre>for(int i = 0; i &lt; n + 100; ++i) {     for(int j = 0; j &lt; i * n; ++j){         sum = sum + j;     }     for(int k = 0; k &lt; n + n + n; ++k){         c[k] = c[k] + sum;     } }</pre>
<pre>for(int i = 0; i &lt; n; i++)     for(int j = 0; j &lt; n; j++)         sum++;  for(int i = 0; i &lt; n; i++)     sum++;</pre>	<pre>int i, j; int x = 1; for (i = 0; i &lt;= n<sup>2</sup>; i=i+2)     for (j = n; j &gt;= 1; j-= n/4)         x++;</pre>

## Ejercicio 8

Para cada uno de los algoritmos presentados calcule el  $T(n)$ .

- Expresar en función de  $n$  el tiempo de ejecución.
- Establecer el orden de dicha función usando notación Big-Oh.

```
1. int c = 1;
   while ( c < n ) {
       algo_de_O(1);
       c = 2 * c;
   }
```

```
2. int c = n;
   while ( c > 1 ) {
       algo_de_O(1);
       c = c / 2;
   }
```

```
3. public static void calcular(int n) {
    int i, j, r = 0;
    for ( i = 1; i < n; i= i+2)
        for (j = 1; j <= i; j++ )
            r = r + 1;
    return r;
}
```



## Ejercicio 9

- Expresar la función del tiempo de ejecución de cada uno de los siguientes algoritmos, resuélvala y calcule el orden.
- Compare el tiempo de ejecución del método 'rec2' con el del método 'rec1'.
- Implemente un algoritmo más eficiente que el del método 'rec3'. (es decir, que el  $T(n)$  sea menor).

```
static public int rec2(int n){
    if (n <= 1)
        return 1;
    else
        return (2 * rec2(n-1));
}

static public int rec1(int n){
    if (n <= 1)
        return 1;
    else
        return (rec1(n-1) + rec1(n-1));
}

static public int rec3(int n){
    if (n == 0)
        return 0;
    else {
        if (n == 1)
            return 1;
        else
            return (rec3(n-2) * rec3(n-2));
    }
}

static public int potencia_iter(int x, int n){
    int potencia;
    if (n == 0)
        potencia = 1;
    else {
        if (n == 1)
            potencia = x;
        else{
            potencia = x;
            for (int i = 2 ; i <= n ; i++) {
                potencia *= x ;
            }
        }
    }
    return potencia;
}
```



```
static public int potencia_rec( int x, int n){
    if( n == 0 )
        return 1;
    else{
        if( n == 1)
            return x;
        else{
            if ( (n % 2 ) == 0)
                return potencia_rec (x * x, n / 2 );
            else
                return potencia_rec (x * x, n / 2) * x;
        }
    }
}
```

### Ejercicio 10

- a.- Resolver las siguientes recurrencias
- b.- Calcular el  $O(n)$  justificar usando la definición de Big-Oh

1.

$$T(n) = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ T(n-1) + n, & n \geq 2 \end{cases}$$

2.

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}, & n \geq 2 \end{cases}$$

2.

$$T(n) = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ T(n-1) + \frac{n}{2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

3.

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2, & n \geq 2 \end{cases}$$

### Ejercicio 11

Calcule el tiempo de ejecución de los métodos `buscarLineal` y `buscarDicotomica` de la clase `BuscadorEnArrayOrdenado`. Compare el tiempo con los valores obtenidos empíricamente en el ejercicio 2.

### Ejercicio 12

Calcule el tiempo de ejecución de `procesarMovimientos` y `procesarMovimientosOptimizado` del ejercicio 1. Compare el tiempo con los valores obtenidos empíricamente.



UNLP. Facultad de Informática.

## Algoritmos y Estructuras de Datos Cursada 2025

### Ejercicio 13

Resuelva las recurrencias y calcule el orden. Para cada recurrencia se muestra a modo de ejemplo el código correspondiente.

<pre>int recursivo(int n){ if (n &lt;= 1)     return 1; else     return (recursivo (n-1)); }</pre> $T(n) = \begin{cases} 1, n \leq 1 \\ T(n-1) + c, n \geq 2 \end{cases}$	<pre>int recursivo(int n){ if (n == 1)     return 1; else     return (recursivo (n/2)); }</pre> $T(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ T(n/2) + c, n \geq 2 \end{cases}$
<pre>int recur (int n){ if (n == 1)     return 1; else     return (recur(n/2)+recur(n/2)); }</pre> $T(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 2T(n/2) + c, n \geq 2 \end{cases}$	<pre>int recursivo(int n){ if (n &lt;= 5)     return 1; else     return (recursivo (n-5)); }</pre> $T(n) = \begin{cases} 1, n \leq 5 \\ T(n-5) + c, n \geq 6 \end{cases}$
<pre>int recur (int n){ if (n == 1)     return 1; else     return (recur(n-1)+recur(n-1)); }</pre> $T(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 2T(n-1) + c, n \geq 2 \end{cases}$	<pre>int recursivo(int n){ if (n &lt;= 7)     return 1; else     return (recursivo (n/8)); }</pre> $T(n) = \begin{cases} 1, n \leq 7 \\ T(n/8) + c, n \geq 8 \end{cases}$

### Ejercicio 14

Considere el siguiente fragmento de código:

```
int count = 0; int n = a.length;
for (int i = 1; i <= n; i = i*2) {
    for (int j = 0; j < n; j+=n/2) {
        a[j]++;
    }
}
```

Este algoritmo se ejecuta en una computadora que procesa 1.000 operaciones por segundo. Determine el tiempo aproximado que requerirá el algoritmo para resolver un problema de tamaño  $n=4096$ .

## **Trabajo Práctico N° 4:** **Tiempos de Ejecución.**

### **Ejercicio 1.**

## **Ejercicio 2.**



**Ejercicio 3.**

**Ejercicio 4.**

**Ejercicio 5.**

**Ejercicio 6.**

**Ejercicio 7.**

**Ejercicio 8.**

**Ejercicio 9.**

**Ejercicio 10.**



**Ejercicio 11.**

**Ejercicio 12.**

**Ejercicio 13.**

**Ejercicio 14.**

## **Trabajo Práctico N° 5:**

.

### **Ejercicio 1.**