

Tiempo de Ejecución. Demostración del orden de ejecución.

17 de mayo de 2017

1. Ejemplo 1

Se quiere demostrar lo siguiente:

$$T(n) = 5n + 3n^2 + 2n^2 \log_2(n) \le O(n^2 \log_2(n))$$

Por lo que se deben encontrar una constante c>0 y n_0 tales que:

$$5n + 3n^2 + 2n^2 \log_2(n) \le cn^2 \log_2(n)$$
, para todo $n \ge n_0$

Una de las maneras más simples, es analizar término a término que se cumpla la desigualdad y luego juntar los resultados al final.

1.1. Análisis del primer término

$$5n \le c_1 n^2 \log_2(n)$$

Es posible ver que $n^2 \log_2(n)$ crece más rápido que n. Como se puede deducir a partir de la figura 1, $n^2 \log_2(n)$ crece un poco más que n^2 , y ésta última crece más rápido que n.

Ordenadas en forma creciente	Nombre
1	Constante
log n	Logaritmo
n	Lineal
n log n	n Log n
n ²	Cuadrática
n^3	Cúbica
c ⁿ c>1	Exponencial

Figura 1: Crecimiento de funciones

Entonces:

$$n \le n^2 \log_2(n) \tag{1}$$

Si se multiplica por 5 a ambos miembros,



UNLP. Facultad de Informática Algoritmos y Estructuras de Datos

$$5n \le 5n^2 \log_2(n) \tag{2}$$

En el lado izquierdo se obtiene el primer término de T(n), y del lado derecho, se encuentra un valor para c_1 . Si $c_1 = 5$ es posible acotar la función. Notar que si se hubiera elegido $c_1 = 20$ también se cumple la desigualdad, ya que $5n \le 20n \le 20n^2 \log_2(n)$.

1.1.1. Hallar para que n_0 se cumple la desigualdad

Se tiene que

$$5n \le 5n^2 \log_2(n)$$

Entonces si n=1

$$5(1) \le 5(1)^2 \log_2(1)$$
$$5 \le 5(0)$$
$$5 \le 0$$

no es cierta la desigualdad. La misma vale a partir de $n_0 = 2$.

Esto también se puede deducir de la siguiente manera. Cómo el objetivo es hallar un c_1 que acote el término, se puede despejar el valor de c_1 de la desigualdad:

$$5n \le c_1 n^2 \log_2(n)$$

$$\frac{5n}{n^2 \log_2(n)} \le c_1$$

El denominador no puede ser 0, y esto pasa con n = 1, porque $\log_2(1) = 0$. Como interesa que $c_1 > 0$, el primer valor de n que hace cumplir esta condición es $n_0 = 2$, ya que $\log_2(2) = 1$ y todo el cociente queda positivo.

Observación: Si en el denominador hubiera contenido $\log_4(n)$, ocurre lo mismo que en el ejemplo anterior porque $\log_4(1) = 0$, y como interesa que c > 0, esto es válido a partir de $n_0 = 4$, ya que $\log_4(4) = 1$, notar que el valor de n es el mismo que la base del logaritmo.

Retomando el ejercicio...

$$5n \le c_1 n^2 \log_2(n) \tag{3}$$

Por lo que el primer término se puede acotar con $c_1 = 5$ con $n_0 = 2$

1.2. Análisis del segundo término

$$3n^2 \le c_2 n^2 \log_2(n)$$

Se realiza un análisis similar al del primer término:

$$n^2 \le n^2 \log_2(n)$$

Se multiplica por 3 a ambos miembros

$$3n^2 \le 3n^2 \log_2(n)$$

con que $c_2 = 3$ alcanza, y esto vale para $n \ge 2$.

Si se eligiera $n_0=1$ no se cumpliría, ya que la desigualdad quedaría $3\leq 0$ y esto es falso.



UNLP. Facultad de Informática Algoritmos y Estructuras de Datos

1.3. Análisis del tercer término

$$2n^2 \log_2(n) \le c_3 n^2 \log_2(n)$$

$$n^2 \log_2(n) \le n^2 \log_2(n)$$

 $2n^2 \log_2(n) \le 2n^2 \log_2(n)$

con que $c_3 = 2$ ya alcanza, y esto vale para $n \ge 1$.

1.4. Obtención de c y n_0 para todo el T(n)

Para hallar el c y n_0 que permita acotar la función T(n), es necesario juntar los resultados parciales obtenidos. Para ello, se deben sumar cada una de las desigualdades. Se suma todo lo del lado izquierdo por un lado, y todo lo del lado derecho por el otro:

$$5n + 3n^2 + 2n^2 \log_2(n) \le c_1 n^2 \log_2(n) + c_2 n^2 \log_2(n) + c_3 n^2 \log_2(n)$$

$$T(n) \le (c_1 + c_2 + c_3) n^2 \log_2(n)$$

$$T(n) \le (5 + 3 + 2) n^2 \log_2(n)$$

$$T(n) \le (10) n^2 \log_2(n)$$

$$T(n) \le c n^2 \log_2(n)$$

Es decir que la constante c se obtiene de sumar cada una de las c_i para cada término i. Luego se elige el n_0 más restrictivo, es decir, el n_0 que cumpla para cada uno de los términos, en este caso, $n \ge 2$. Por lo tanto:

$$T(n) \leq O(n^2 \log_2(n))$$
, con $c = 10$ para todo $n \geq n_0$, con $n_0 = 2$.

Nota: Siempre poner el c y el n_0 final para el que se cumple el T(n), no alcanza con mostrarlo término a término.

2. Ejemplo 2

Se quiere demostrar lo siguiente:

$$T(n) = 5k_1n\log_2(n) + k_2n^2 \le cn^2$$

En este caso, no se conocen los valores de cada una de las constantes, por lo que c no tendrá un valor concreto.

2.1. Análisis del primer término

$$5k_1n\log_2(n) \le c_1n^2$$

Teniendo en cuenta el orden de crecimiento de las funciones

$$n \log_2(n) \le n^2$$

Se multiplica por $5k_1$ a ambos miembros

$$5k_1n\log_2(n) < 5k_1n^2$$

con que $c_1 = 5k_1$ ya alcanza para que valga la desigualdad, y esto vale para $n \ge 1$.



UNLP. Facultad de Informática Algoritmos y Estructuras de Datos

2.2. Análisis del segundo término

$$k_2 n^2 \le c_2 n^2$$

Teniendo en cuenta el orden de crecimiento de las funciones

$$n^2 \le n^2$$
$$k_2 n^2 \le k_2 n^2$$

con que $c_2=k_2$ ya alcanza, y esto vale para $n\geq 1.$

2.3. Obtención de c y n_0 para todo el T(n)

$$5k_1 n \log_2(n) + k_2 n^2 \le c_1 n^2 + c_2 n^2$$

$$5k_1 n \log_2(n) + k_2 n^2 \le (c_1 + c_2) n^2$$

$$5k_1 n \log_2(n) + k_2 n^2 \le (5k_1 + k_2) n^2$$

Es decir que la constante c debe valer $5k_1+k_2$. Esta desigualdad vale pare el n_0 más restrictivo que se obtuvo, es decir: $n_0=1$. Por lo tanto:

$$T(n) \leq O(n^2)$$
, con $c = 5k_1 + k_2$ para todo $n \geq n_0$, con $n_0 = 1$.