Números

La ***Teoría de Números*** *es una rama de las matemáticas que se ocupa de estudiar a los números enteros. Nosotros vamos a hacer un recorrido por todos los conjuntos numéricos pero haciendo especial hincapié en los enteros.*
. El gran matemático G.H. Hardy usó la Teoría de Números como un ejemplo de una rama de las matemáticas bella pero impráctica. Sin embargo, a finales del siglo XX *esta teoría ha adquirido gran importancia en los sistemas criptográficos, usados para la seguridad en las comunicaciones*

La historia de los números arranca con los naturales, los que utilizamos para contar ($\{1; 2; 3; ....\}$).

Los números negativos, las fracciones, los irracionales tuvieron que ser "creados", (*descubiertos*) y la motivación fue responder preguntas que no tenían respuesta.

Con los números naturales podemos enumerar objetos, contar monedas y sumar vacas o cabras. Sumar cantidades enteras sencillas nos da una cantidad entera (positiva).
Al igual que la suma la operación de multiplicación genera cantidades enteras, es decir otro número natural.

Sin embargo, restar o dividir puede traer problemas. Si hacemos 6 dividido 2 obtenemos el entero positivo 3, pero si dividimos 2 por 6 tendremos $\frac{1}{3}$ que no es un entero, es la tercera parte de un entero, es una **fracción** .

Desde siempre hubo preguntas acerca de los números naturales (o enteros positivos) que no podrían resolverse sin las fracciones, fue necesario "agregarlas".

Esta misma necesidad de resolver problemas sin respuestas en los números naturales llevó a los hindúes a "inventar", *descubrir* los números negativos. Mientras que restando 2 al 6 obtengo el 4, restando 6 al 2 obtengo un elemento que no es un número natural. La solución estaba más allá de los naturales.

Se dice que es "impensable" para los matemáticos no poder *responder* ***todas*** *las preguntas.* Esto es lo que llamamos COMPLETUD.

Para responder algunas de esas preguntas sin respuesta, para alcanzar esa completud es que los griegos incorporaron los números irracionales.
Ellos sabían que $\sqrt{2}$ (la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1) era aproximadamente $\frac{7}{5}$ pero nunca pudieron encontrarla fracción exacta ya que no existe. Descubrieron un número que no podía representarse como una fracción pero era un número necesario para contestar una pregunta *¿Cuál es la raíz cuadrada de 2?*.
La necesidad de completud hizo que se adicionaran nuevos números.

Y cuando los matemáticos creyeron que ya habían descubierto todos los números del universo, cuando pensaron que los podían ubicar en la una recta infinita con el centro en 0 y que se había por fin logrado la completud tan ansiada, surgieron nuevas preguntas que los números (reales) no podían responder: ¿Cúal es la raíz cuadrada de -1?
La solución del matemático e ingeniero italiano Raffaele Bombelli fue inventar un nuevo número que simplemente se definía como la respuesta a esa pregunta. La raíz cuadrada de -1 es i un nuevo número llamado *imaginario.*

Pitágoras, el que todos conocemos por su famoso teorema[1] *(asociado a él por ser quien lo demostró aunque ya era usado por chinos y babilonios desde mil años antes), se dio cuenta que los números están en todas partes, desde la armonía de la música hasta en las órbitas de los planetas, y esto lo llevó a decir:* ***"todo es número".***

[1]En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

1 Los números enteros

Un número **entero** es cualquier elemento del conjunto formado por los números naturales (*vamos a considerar ya conocido el conjunto de los números naturales* $0, 1, 2, 3....$ *(denotado por* N*), usados habitualmente para contar, enumerar, etc.*), sus opuestos (versiones negativas de los naturales) y el cero (*No se sabe si el 0 se originó en China o India pero fue en la última donde se comenzó a aceptar como un número adecuado. Aunque siempre se tuvo la idea, el concepto de no tener nada, el concepto de cero es relativamente nuevo, podíamos contar pero antes del siglo VII el cero no existía*).

Estos son:

- Los naturales (o enteros positivos): $+1, +2, +3, +4, +5...$
- El cero, que no es ni positivo ni negativo.
- Los enteros negativos: $-1, -2, -3, -4, -5...$

El conjunto de los enteros se designa por Z.

$Z = \{.... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Una característica de los números enteros es que están *ordenados*. Este orden se define como:

- Dados dos enteros de signos distintos, a y $-b$, el negativo es menor que el positivo: $-b < a$
- Dados dos enteros con el mismo signo, el menor de los dos números es:
  - El de menor valor absoluto, si el signo común es $+$
  - El de mayor valor absoluto, si el signo común es $-$.
  - El cero, 0, es menor que todos los positivos y mayor que todos los negativos.

1.1 Operaciones con números enteros

Los números enteros pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, siguiendo el modelo de los naturales añadiendo unas normas para el uso del signo.

1. La **suma** de números enteros es cerrada, es decir, la suma de dos números enteros da como resultado otro número entero.

   Además cumple las siguientes propiedades:

   - *Propiedad asociativa*: Dados tres números enteros a, b y c, las sumas $(a+b)+c$ y $a+(b+c)$ son iguales.
   - *Propiedad conmutativa*: Dados dos números enteros a y b, las sumas $a+b$ y $b+a$ son iguales.
   - *Elemento neutro*: Todos los números enteros a quedan inalterados al sumarles 0: $a+0=a$. para todo a entero.
   - *Ley de Monotonía de la suma*: Dados tres números enteros a, b y c,vale que si $a \leq b$ entonces $a+c \leq b+c$.

2. La **resta** de dos enteros $a-b$ se realiza sumando el opuesto del entero que quiero restar, es decir: $a+(-b)$

3. La **multiplicación** de números enteros da como resultado un número entero, es decir, la multiplicación es una operación cerrada en Z. Además se cumplen las siguientes propiedades:

   - *Propiedad asociativa*: Dados tres enteros a, b y c, los productos $(a.b).c$ y $a.(b.c)$ son iguales.
   - *Propiedad conmutativa*: Dados dos números enteros a y b, los productos $a.b$ y $b.a$ son iguales.

- *Elemento neutro*: Existe un número entero especial 1 tal que todos los números enteros a quedan inalterados al multiplicarlos por él, $a.1 = 1.a = a$ para cualquier a entero.

- *Ley de Monotonía del producto*: Dados números enteros a, b,vale que si $a \leq b$ entonces $a.c \leq b.c$ si c es positivo y $a.c \geq b.c$ si c es un número negativo .

Propiedad distributiva:

Dados tres números enteros a, b y c, el producto $a.(b+c)$ y la suma de productos $(a.b)+(a.c)$ son idénticos.

Es decir, $a(b+c) = ab + ac$

1.2 Divisibilidad en Z

La **división** de enteros tiene características especiales que ahora estudiaremos con algo más de detalle:

Se dice que está *parcialmente definida* ya que no siempre es posible efectuarla entre dos enteros cualesquiera (a diferencia de lo que veremos pasa con los racionales, reales y complejos que siempre se pueden dividir con la sólo excepción de que el divisor sea diferente d 0). O también podríamos decir que no es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$ ya que cuando divido un entero por otro el resultado obtenido puede no ser un entero.

Comenzamos estudiando la división entera o exacta, esto es preguntarse cuantas veces un número está *contenido* en otro.

Definición 1.1. *Dados dos números enteros a y b, con b no nulo. Se dice que b* ***divide*** *a a , y se escribe $b|a$, si existe un entero c tal que*

$$a = b.c$$

En este caso se dice que b es un divisor de a, a es divisible por b ó que a es múltiplo de b

Propiedades básicas:

Dados a, b, c enteros cualesquiera, valen las siguientes propiedades:

- $a|a$
- $1|a$
- $a|0$
- $a|b$ entonces $a|-b$, $-a|b$ y $-a|-b$
- $a|b$ entonces $a|bc$
- $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$

- $a|b$ y $a|c$ entonces $a|b+c$

Demostraremos algunas de estas propiedades a modo de ejemplo (el resto de las demostraciones quedan como ejercicio para el lector)

- $a|a$

  Queremos ver que cualquier entero a se divide a si mismo, es decir, por la definición, queremos ver que existe algún entero c tal que $a = a.c$, y como vemos ese entero c existe y es 1, $a = a.1$. Luego, a divide a a

- $a|0$

  Ahora probemos que cualquier entero divide a 0. De esta forma vemos que el 0 (el neutro para la suma de enteros) tiene infinitos divisores (pero él mismo no divide a ningún entero!! por qué? demuéstrelo!) Como antes, queremos ver si existe ese entero c tal que $0 = a.c$ para cualquier entero a, pero ese entero c es el mismo 0!! ya que $0 = a.0$ para todo a, y de esta forma $a|0$.

- $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$

  Sabiendo que $a|b$ y que $b|c$ tenemos que probar que $a|c$, o sea, que existe un entero k tal que $c = a.k$. Por hipótesis sabemos que existe un entero h tal que $b = a.h$ y un entero t tal que $c = b.t$, luego $c = b.t = (a.h).t$ y como el producto de enteros es cerrado y asociativo vale que $c = b.t = (a.h).t = a.(h.t) = a.k$ con $k = h.t$ en Z, y por lo tanto a divide a c (valiendo la propiedad transitiva de la división de enteros).

- $a|b$ y $a|c$ entonces $a|b+c$

  Vamos a suponer que $a|b$ y $a|c$ entonces existen enteros B y C tales que $b = a.B$ y $c = a.C$, luego $b+c = a.B+a.C = a.(B+C)$ y como vale la propiedad distributiva (aqui la usamos sacando factor común a) y la suma es cerrada en Z existe $k = B + C$ entero tal que $b + c = a.k$ y probamos que $a|b + c$.

1.2.1 Algoritmo de la División

Dados $a, b \in Z$ con $b \neq 0$, cuando no existe el entero c que haga valer la igualdad $a = bc$, se trata de realizar la división *inexacta* entre a y b.

Es decir que se trata de aproximar *de la mejor manera posible* a a por un múltiplo de b. La diferencia entre a y dicho número es lo que llamamos *resto* de la división; que será nulo en el caso que a sea múltiplo de b.

Teorema 1.2. *Dados $a, b \in Z$ con $b \neq 0$,* existen *y son* únicos *c (cociente) y r (resto) enteros tales que*

$$a = bc + r \qquad con \qquad 0 \leq r < |b|$$

Ejemplo 1.3. *Dados* $95, 7 \in Z$, existen *y son* únicos $c = 13$ *(cociente) y* $r = 4$ *(resto) enteros tales que*

$$95 = 13.7 + 4 \qquad con \qquad 0 \leq 4 < 7$$

Ejemplo 1.4. *Sea a y b dos números enteros que tienen restos 4 y 7 respectivamente en la división por 11. Hallar el resto de la división por 11 de $2a + b$*

Por el algoritmo de la división y los datos que nos dan podemos saber que $a = 11A + 4$ y $b = 11B + 7$, y queremos ver cual es el resto de la división de $2a + b$, o sea, queremos encontrar r de $2a + b = 11Q + r$.

$$2a + b = 2(11A + 4) + (11B + 7) = 2.11A + 8 + 11B + 7 = 22A + 11B + 15$$
$$= 11(2A) + 11B + 11 + 4 = 11(2A + B + 1) + 4$$

Luego, el resto es 4

Aplicación al Cambio de base

En el sistema posicional decimal, cada entero positivo se representa a partir de los diez dígitos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

El siguiente teorema muestra como se pueden representar los enteros positivos en distintas bases:

Teorema 1.5. *Sea b un entero mayor a 1. Entonces para todo entero positivo a, existe un entero no negativo k, y enteros $0 \leq a_j < b$ con $j = 1, 2, ...k$ tales que $a = a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + a_{k-2}b^{k-2} + ... + a_1 b + a_0$ con $a_k \neq 0$, Además esta representación es única.*

En la expresión $a = a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + a_{k-2}b^{k-2} + ... + a_1 b + a_0$, $0 \leq a_j < b$ con $j = 1, 2, ...k$, el número b es llamado **base** de la representación. Si la base no se especifica se sobreentiende que es igual a 10

Se acomtumbra a escribir $a = (a_k a_{k-1} a_{k-2} ..... + a_1 a_0)_b$

Ejemplo 1.6. *Escribir* 37 *en base* 5.

- $37 = 5.\boldsymbol{7} + 2$
- $7 = 5.\boldsymbol{1} + 2,$
- $1 = 5.\boldsymbol{0} + 1$

Luego, $37 = (122)_5$

1.2.2 Enteros Primos

Definición 1.7. *Un número entero $p \neq 1$ se dice* ***primo*** *si sus únicos divisores son los triviales (ésto es el propio número, su opuesto, 1 y -1). Caso contrario se dice que el número es* ***compuesto***

Ejemplo:

$2, 3, 5, 7, ...$ son primos

$4, 6, 8, 9....$ son compuestos.

La teoría de los números primos es una de las (pocas) áreas de la matemática pura que tiene una aplicación en el mundo real, la criptografía.

Pero estos números también aparecen en el mundo natural. Existen 14 especies de cigarra periódicas cuyo ciclo vital tiene duraciones de números primos para evitar a depredadores

Criba de Eratóstenes

La Criba de Eratóstenes es un método algorítmico para encontrar y /o enumerar los primos (positivos) menores que un natural fijo dado.

Partimos de una lista de números que van de 2 hasta el número dado y vamos eliminando los números compuestos (los múltiplos de los primos).

Eliminamos de la lista los múltiplos de 2.

Luego tomamos el primer número después del 2 que no fue eliminado (el 3) y eliminamos de la lista sus múltiplos, y así sucesivamente.

El proceso termina cuando el cuadrado del mayor número primo (uno que ya sabemos que es primo o confirmamos que es primo) es menor que el número natural que teníamos fijo (el del final de la lista).

Los números que no fueron eliminados y permanecen en la lista son los primos.

Algunas propiedades importantes relativas que no demostraremos:

- Hay infinitos números primos
- Si m es un entero compuesto, entonces existe un primo p tal que p divide a m

Con esta propiedad que dice que todo entero compuesto es divisible por un número primo concluimos que todo número compuesto se puede descomponer en factores primos, y esta factorización es única, salvo quizás el orden.
Esto es un elemento central en muchas demostraciones.[2]

Teorema 1.8. Teorema Fundamental de la Aritmética
Todo número entero distinto de $0, 1, -1$ es producto finito de números primos y esa factorización es única salvo el orden.

1.2.3 Máximo Común Divisor

Se define el **Máximo Común Divisor (MCD)** de dos o más números enteros al mayor número entero que los divide sin dejar resto.

Teorema 1.9. Máximo Común Divisor
Dados $a, b \in Z$ no simultáneamente nulos, existe un único entero $d > 0$ que satisface:

- $d|a$ *y* $d|b$
- *Si existe D tal que $D|a$ y $D|b$ entonces $D|d$*

Este entero d es el denominado ***máximo común divisor entre a y b*** *y se lo denota (a, b) ó $m.c.d(a, b)$*

[2] La descomposición única en factores primos fue descubierta (y demostrada para todos los números enteros distintos de 0,1 y -1) por Euclides en el siglo IV a.C. quien la describió en el libro IX de sus *Elementos*

Ejemplos 1.10. *Encontar el máximo común divisor entre* 8 *y* 64*, y entre* 45 *y* 60*.*

- *Como el* 8 *es un divisor de* 64 *(y obviamente de él mismo) el m.c.d*$(8, 64)$ *será* 8*.*
- *Claramente vemos que* 45 *y* 60 *no se dividen mutuamente, tenemos que buscar dividores comunes y entre ellos tomar el menor. Podríamos listar todos los divisores de cada número y de allí elegirlo, o podemos descomponer cada entero en producto de primos y buscar los factores en común.*

$45 = 15.3 = 5.3.3 = 5.3^2$

$60 = 20.3 = 4.5.3 = 2.2.5.3 = 2^2.5.3$

Vemos que $5.3 = 15$ *es el mayor factor en común, y por lo tanto será el m.c.d*

Ejemplo 1.11. *Hay que organizar equipos para realizar una actividad de determinada materia. En curso está compuesto por dos comisiones, la ComA y ComB.*
Cada grupo debe estar formado por el mismo número de personas para evitar que un grupo tenga más ventaja que otro. Además, no se pueden mezclar alumnos de las dos clases.

Sabiendo que en la comA hay 60 alumnos y en la comB, 45, ¿cuántos alumnos tienen que ir en cada grupo para que en ninguno haya más personas que en otro?

El problema nos está pidiendo realmente cuál es el número máximo de personas que pueden ir en un equipo sin que haya uno con más personas, es decir, sin que sobre ningún compañero. "Sin que sobre" *significa que la división debe ser exacta (resto 0).*
Por tanto, como tenemos que calcular el número ***máximo*** *de personas, buscamos el* ***máximo común divisor*** *entre 45 y 60 (cantidades de alumnos de cada comisión)*

Algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides es un método antiguo y eficiente para calcular el *mcd*. Fue originalmente descrito por Euclides en su obra Elementos. El algoritmo extendido es una ligera modificación que permite expresar al *mcd* como una combinación lineal.

Dados $a, b \in Z$, supongamos $a \geq b$ con $b \neq 0$.

Por el algoritmo de la división existen c_1 y r_1 tales que $a = c_1 b + r_1$ con $0 \leq r_1 < b$.

Si $r_1 = 0$, $(a, b) = (b, r_1) = (b, 0) = b$

Si $r_1 \neq 0$, podemos decir que existen c_2 y r_2 tales que $b = c_2 r_1 + r_2$ con $0 \leq r_2 < r_1$. Si r_2 es cero, ya está, el mcd es r_1, si no es cero repetimos el proceso. Y así sucesivamente.

Concluímos: $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = ... = (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0) = r_n$ siendo r_n el último resto no nulo

Ejemplos 1.12.

- $(60, 45) = (45, 15) = (15, 0) = 15$
- $(86, 22) = (22, 20) = (20, 2) = (2, 0) = 2$

Una propiedad muy útil es la llamada *Identidad de Bézout* que veremos sin su demostración

Proposición 1.13. *Dados $a, b \in Z$ y d su m.c.d, existen enteros m y n tales que*

$$d = ma + nb$$

Ejemplo 1.14. *Usemos la Identidad de Bézout para probar el siguiente resultado: Si $(a, b) = d$; $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|cd$*

Queremos probar que ab divide a cd siendo d el máximo común divisor entre a y b y sabiendo que a c lo dividen tanto a como b.

Como $a|c$ existe, por definición de división, un entero A tal que $c = aA$, y como $b|c$ existe un entero B tal que $c = bB$.

Por otro lado, por ser $d = (a, b)$ y la Identidad de Bézout, existen enteros m y n tales que $d = ma + nb$.

Luego, $cd = c(ma + nb) = cma + cnb = mac + nbc = mabB + nbaA = ab(mB + nA)$ *ya que el producto de enteros es cerrado, conmutativo y asociativo.*

De esta forma vemos que existe un entero $k = mB + nA$ *tal que* $cd = ab.k$ *y por lo tanto* $ab|cd$

A continuación veremos un ejemplo en el cual, obteniendo el MCD entre dos números, podremos calcular la descomposición de este máximo común divisor como combinación lineal de los números que divide, es decir, la *Identidad de Bézout.* Al proceso con el que obtendremos esta forma de expresar el MCD se la denomina "**subir por los restos**":

Ejemplo 1.15. *Queremos hallar* $mcd(120, 50)$*:*

Comenzamos dividiendo 120 *por* 50*:*

$$120 = 50.2 + 20 \qquad (1)$$

Como el resto es 20*, tenemos que* $(120, 50) = (50, 20)$*. Ahora dividimos* 50 *por* 20*:*

$$50 = 20.2 + 10 \qquad (2)$$

Como el resto es 10*, tenemos que* $(50, 20) = (20, 10)$*. Dividimos* 20 *por* 10*:*

$$20 = 10.2 + 0$$

Como el resto es 0*, tenemos que 10 es el MCD entre* 120 *y* 50*. Observar que obtuvimos*

$$(120, 50) = (50, 20) = (20, 10) = (10, 0) = 10$$

Por otro lado veamos como podemos escribir al MCD de la forma

$$10 = m.120 + n.50, \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

Veamos que si despejamos el 10 de la ecuación (2) obtenemos

$$10 = 50 - 20.2 \qquad (3)$$

Luego, despejando el 20 de la ecuación (1)

$$20 = 120 - 50.2 \qquad (4)$$

Finalmente, reemplazando (4) en (3):

$$\begin{aligned} 10 &= 50 - (120 - 50.2).2 \\ 10 &= 50 - 120.2 + 50.4 \\ 10 &= 120.\underbrace{(-2)}_{m} + 50.\underbrace{(5)}_{n} \end{aligned}$$

Es decir, llegamos a la expresión, $10 = 120.m + 50.n$ *siendo* $m, n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.16. *Si* $(a, b) = 1$ *se dice que* a *y* b *son* ***coprimos***

Ejemplo 1.17. *Sean* a *y* b *dos enteros coprimos, demostrar que* $a + b$ *y* a *son coprimos.*

Una forma de probar que dos enteros son coprimos es suponer que no lo son. Supongamos que existe d *un entero tal que* $d = (a + b, a)$*, por definición de m.c.d este entero divide a* $a + b$ *y divide a* a.

Fácilmente se puede probar que si $d|a + b$ *y* $d|a$ *entonces* d *debe dividir a* b*. Luego,* $d|a$ *y* $d|b$ *y por lo tanto* $d|(a, b)$ *por definición de m.c.d. Pero entonces* $d|1$ *y no hay no le queda otra opción que ser* $d = 1$.

Observación 1.18. *Si* p *es primo, entonces el* (a, p) *para cualquier* $a \in Z$ *será el propio* p *o son coprimos.*

Esto vale ya que al ser p primo el único factor en común que puede tener con otro entero es él mismo, en ese caso lo divide y el $m.c.d$ es el primo p. Caso contrario, no tienen factores en común y el $m.c.d$ es 1, es decir, son coprimos.

Proposición 1.19. *Sea d el máximo común divisor entre los enteros a y b, entonces existen A y B números enteros tales que $a = d.A$ y $b = d.B$ y $(A, B) = 1$*

<u>*Demostración*</u>*: Queremos probar que A y B son coprimos. Supongamos que no lo son, es decir, existe $D = (A, B)$*

D divide a A, entonces existe un entero k tal que $A = Dk$, luego $a = d.A = d.Dk$ y por lo tanto $dD|a$.

De la misma forma podemos ver que dD divide a b.

De esta forma probamos que dD divide a a y b, entonces dD divide al (a, b), $dD|d$ (por definición de mcd), pero esto es una (ya que $dD > d$) excepto cuando $D = 1$

1.2.4 Mínimo Común Múltiplo

El Mínimo Común Múltiplo (abreviado $m.c.m$) de dos o más números naturales es el menor número natural distinto de cero que es múltiplo común de todos ellos (o el ínfimo del conjunto de los múltiplos comunes).

Teorema 1.20 (Mínimo Común Múltiplo)**.** *Dados $a, b \in Z$, existe un único entero m que satisface:*

- *$a|m$ y $b|m$*
- *Si existe M tal que $a|M$ y $b|M$ entonces $m|M$*

Este entero m se denomina ***mínimo común múltiplo entre a y b*** *y se lo denota $[a, b]$ ó $mcm[a, b]$*

Observación 1.21. *Se puede demostrar que* $|a.b| = (a,b)[a,b]$*, luego* $[a,b] = \frac{|a.b|}{(a,b)}$

Ejemplo 1.22. **Sé la envidia de tus amigos con tus conocimientos del mínimo común múltiplo**

Un grupo de amigos están organizando la juntada del finde y quieren comprar cerveza. Deciden comprar los packs de 6 de tal manera que todos tengan el mismo número de cervezas. Con el m.c.m. pueden calcular cuantos packs comprar , teniendo en cuenta el número de cervezas que se incluyen en cada uno y el número de amigos que sean.

Por ejemplo, cada pack trae 6 y son 15 amigos.

El m.c.m. [6, 15] = 30, es decir 30 cervezas son necesarias

Por tanto, 30 cervezas : 6 cervezas por pack = 5 packs hay que pedir.

2 Números Reales

Volviendo a la idea de la introducción es que llegamos a los números reales, un conjunto de números que se dice **completo** (aunque luego veremos que *tampoco alcanzó* para responder todas las preguntas). Se fueron descubriendo, "construyendo" conjuntos númericos para resolver los problemas abiertos, "completar" los espacios vacíos.

Dijo Leopold Kronecker, matemático y lógico del siglo XIX, *"Dios hizo los números enteros; todo lo demás es obra del hombre"*

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales incluye tanto a los números racionales como a los irracionales (que estudiaremos en lo que sigue)

Los números reales pueden ser descritos y construidos de varias formas, algunas simples aunque carentes del rigor necesario para los propósitos formales de matemáticas y otras más complejas pero con el rigor necesario para el trabajo matemático formal.

Con los números reales pueden realizarse todo tipo de operaciones básicas (suma, resta, producto, división y además potencias y raíces) con diversas excepciones importantes:

1. No existen raíces de orden par (cuadradas, cuartas, sextas, etc.) de números negativos en números reales

2. La división por cero no está definida (pues cero no posee inverso multiplicativo)

3. No se puede hallar el logaritmo de un número real negativo, cualquiera sea la base de logaritmos

El conjunto de los números reales junto con la suma y el producto usual, dotado del orden habitual que es compatible con estas operaciones, tiene estructura de **cuerpo**.

2.1 Números Racionales

La idea de número racional como relación entre dos enteros fue utilizada por los pitagóricos en el siglo VI a. de C. Antes, los babilonios y los egipcios utilizaron algunas fracciones, las que tenían como numerador 1.

Se cree que el origen está vinculado al pan. En el antiguo Egipto necesitaban repartir el pan entre la gente, como había más personas que panes recurrieron a las fracciones, pero estas fracciones eran de la forma $\frac{1}{n}$, siendo n un número natural.

Después fueron los hindúes, quienes formalizaron las reglas para ejecutar las operaciones entre números fraccionarios.
En Occidente tuvieron que pasar muchos siglos hasta que los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indo arábigo. Sin embargo, no fue hasta el Siglo XIII cuando Leonardo de Pisa (Fibonacci) introdujo el concepto de números quebrados o números "ruptus", empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

Definición 2.1. *Un **número racional** es todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros (o más precisamente, un entero y un natural positivo, o sea, podemos considerar que el denominador nunca es negativo)*
Es decir, una fracción común $\frac{a}{b}$ con numerador a y denominador b distinto de cero.

El término **racional** alude a una fracción o parte de un todo.

El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$ (o bien Q) que deriva de *cociente* (Quotient en varios idiomas europeos).

Estrictamente, un **número racional** es el conjunto de todas las *fracciones equivalentes* a una dada; de todas ellas, se toma como representante canónico de dicho número racional a la *fracción irreducible.*

Observación 2.2. *Este conjunto de números incluye a los números enteros.*

Cualquier entero n *se puede expresar como el número racional* $\frac{n}{1}$ *debido a eso se escribe frecuentemente* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

También se dice que $\mathbb{Z}$ *está contenido en* $\mathbb{Q}$ *pero técnicamente los racionales contienen un subanillo isomorfo al anillo de los números enteros.*

2.1.1 Artimética de los Números Racionales

- **Equivalencia entre fracciones**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } \quad ad = bc$$

- **Orden de los números racionales**

  Cuando ambos denominadores son positivos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$*si y sólo si* $\quad ad < bc$

  Si alguno de los denominadores es negativo, las fracciones deben convertirse en otras equivalentes con denominadores positivos, siguiendo las ecuaciones: $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad y \quad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$

- **Operaciones entre Números Racionales**

  1. **Suma**:

     Se define la suma o adición de dos racionales a la operación que a todo par de números racionales le hace corresponder otro racional de la siguiente forma:

     $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

     Como el producto y la suma de enteros son operaciones cerradas el resultado de la suma de fracciones devuelve otra fracción (cociente de dos enteros), por lo tanto la operación de adición está bien definida y es cerrada.

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales, observemos que dado que el producto y la suma de enteros son conmutativas vale que:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Y por lo tanto, la suma de racionales es conmutativa. De manera similar se puede probar que la suma es asociativa.

Concluimos que la suma es cerrada, asociativa y conmutativa.

El elemento **neutro** para la suma de racionales es el mismo neutro que para la suma de enteros, el 0.

2. **Resta**:

   El inverso aditivo u opuesto existe y está dado por: $-(\frac{a}{b})=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$

   La operación que a todo par de racionales le hace corresponder su diferencia se llama **resta** o *diferencia* y se la considera operación *inversa* de la suma $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+(-\frac{c}{d})$

3. **Multiplicación**:

   La multiplicación o producto de dos números racionales está dado por:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Por la defínción anterior del producto en $\mathbb{Q}$ y por ser el producto de enteros cerrado en $\mathbb{Z}$ queda claro que la multiplicación de racionales es una operación cerrada.

Veamos que el producto es asociativo: Sean $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ números racionales.
Por definición de producto y recordando que el producto de enteros es asociativo vale:

$$\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}=\left(\frac{ac}{bd}\right).\frac{e}{f}=\frac{(ac)e}{(bd)f}=\frac{a(ce)}{b(df)}=\frac{a}{b}.\left(\frac{ce}{df}\right)=\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$$

Mostrando que el producto de racionales es asociativo. De igual forma se puede mostrar facilmente que el producto es conmutativo.

La multiplicación de racionales es cerrada, asociativa y conmutativa.

El elemento **neutro** para el producto de racionales es el mismo neutro que para el producto de enteros, el 1.

4. **División**:

   Inversos:

   El inverso multiplicativo existe en los números racionales y está dado por: $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ con $a \neq 0$

   Se define la división o *cociente* de dos racionales r entre s distinto de 0, al producto de r por el inverso de s, esto es:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$$

   Observemos que como decimos que los racionales son no nulos a y c (los numeradores) son distintos de 0, *por lo tanto no tendremos problemas al dividir o buscar inversos*

2.1.2 Densidad de los racionales

Los números racionales cumplen la propiedad arquimediana o de *densidad*, esto es, para cualquier par de números racionales existe otro número racional situado entre ellos, propiedad que no está presente en los números naturales ni en los números enteros.

Una forma de mostrar que $\mathbb{Q}$ es denso es tomar dos números racionales y encontrar otro racional entre ellos.

Sean x e y en $\mathbb{Q}$. Supongamos que $x < y$, entonces $2x = x + x < x + y$ (y de la misma forma $x + y < y + y = 2y$)

Luego, $2x < x + y < 2y$, y diviendo todo por 2 nos queda $x < \frac{x+y}{2} < y$

el número $z = \frac{x+y}{2}$ es el racional que existe entre x e y.

2.2 Números Irracionales

Euclides abordó el tema de la irracionalidad en el décimo volumen de *Los Elementos*, su meta era demostrar que podría existir un número que no era posible escribir como fracción.
No demostró la existencia de un irracional,en su lugar examinó un número ($\sqrt{2}$)y a través de *reductio ad absurdum* probó que no puede ser escrito como una fracción, un racional.

A los enteros y racionales ahora debemos agregarles los irracionales.

Un tipo de número "abstracto" . El número que equivale a *la raíz de 2* (el número que multiplicado por si mismo da 2) sólo puede ser expresado por el "símbolo" $\sqrt{2}$, no puede ser escrito como una fracción ni siquiera como un decimal; sólo podríamos tener una aproximación.

Definición 2.3. *Un **número irracional** es un número que no puede ser expresado como cociente de dos enteros, es decir que no puede ser una fracción $\frac{m}{n}$ donde m y n sean enteros (con n diferente de cero)*

Ejemplo 2.4. $\sqrt{5}$ *es un número irracional.*

Supongamos que no se cumple la afirmación, es decir, $\sqrt{5}$ *es un número racional.*

Entonces puede representarse como el cociente de dos números enteros, o sea existen m, n en $\mathbb{Z}$ *tal que* $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ *(n no puede ser* 0*). Para facilitar las cuentas vamos a suponer que m y n no tienen factores en común, es decir, son coprimos (será un fracción irreducible).*

Luego, si elevamos al cuadrado $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ *y operamos vamos a obtener:*

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 5 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow n^2 5 = m^2$$

Cuando definimos los enteros de la fracción que igualamos a $\sqrt{5}$ *pusimos* $n \neq 0$*. Obviamente m no puede ser* 0 *(ya que si no llegaríamos a un absurdo,* $\sqrt{5} = 0$ *)*

Observemos que tampoco m *y* n *pueden ser iguales a* 1 *o* -1*.*

Si $m = 1$, $\sqrt{5} = \frac{1}{n}$ *o equivalentemente,* $5 = \frac{1}{n^2}$ *que es igual a* $n^2 5 = 1$*, lo cual es un absurdo ya que* 5 *no divide a 1.*

Pasa lo mismo si $m = -1$*.*

Si ahora suponemos que $n = 1$ *(o de la misma forma* $n = -1$*) obtenemos que* $\sqrt{5} = \frac{m}{1}$ *o lo que es lo mismo* $5 = m^2$*.*

Como m *no es* 0*, ni* 1 *o* -1*, podemos aplicar el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA),* m *será producto finito de primos, por lo tanto:*

$$5 = m^2 = \left(p_1^{h_1} \ldots . p_i^{h_i}\right)^2 = \left(p_1^{2h_1} \ldots . p_i^{2h_i}\right)$$

Luego, el número primo 5 *aparece una vez del lado izquierdo de la igualdad y una cantidad par de veces (que puede ser ninguna, cero veces) del lado derecho. Lo cual es un absurdo.*

Ahora si, como m *y* n *son números enteros (diferentes de* 1, -1 *y* 0*), por el TFA , son producto finito de números primos (y esa factorización es única salvo el orden)*

$$\left(q_1^{s_1} \ldots . q_r^{s_r}\right)^2 5 = \left(p_1^{t_1} \ldots . p_k^{t_k}\right)^2$$

$$\left(q_1^{2s_1} \ldots . q_r^{2s_r}\right) 5 = \left(p_1^{2t_1} \ldots . p_k^{2t_k}\right)$$

Cada primo aparece una cantidad par de veces en cada uno de los lados de la igualdad, salvo el número primo 5 *que aparece una cantidad impar* $(2s_i + 1)$ *de veces en el lado izquierdo (que puede ser una sola vez) y una cantidad par* $(2t_j)$ *de veces en la lado derecho (que puede ser* 0 *veces), Absurdo!!.*

Por lo tanto, no existen enteros tales que $\sqrt{5}$ *sea cociente de ambos.*

$\sqrt{5}$ *es un número irracional.*

2.2.1 Números Irracionales - Propiedades

Estas son algunas propiedades importantes de los números irracionales

- La suma y la diferencia de un número racional y de un número irracional es un número irracional
- El producto de un racional diferente de cero por un irracional es un número irracional
- El cociente entre un racional no nulo y un irracional, es un número irracional
- El inverso de un número irracional es número irracional

Observación 2.5. *La suma y el producto de irracionales no son operaciones cerradas.*

Pensemos por ejemplo en el producto de $\sqrt{5}$ *por si mismo, o si al número irracional* π *le restamos la "parte" decimal de* π*, queda* 3 *que es un número entero.*

3 Números Complejos

Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$x^2 - 9 = 0$$

no es difícil encontrar que los números 3 y -3 satisfacen nuestra ecuación, o sea son soluciones.

Ahora pensemos en otra ecuación,

$$x^2 + 9 = 0$$

Ya sea por despeje directo o usando la fórmula de resolución de la ecuación de cuadrática vemos que esta nueva ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales. Llegamos a una raíz cuadrada de un número negativo y sabemos que eso no puede pasar *(recordar la regla de los signos)*

Pero este tipo de ecuaciones y otras similares que no tienen solución en $\mathbb{R}$ aparecen a menudo en las ciencias y la ingeniería, y lo vienen haciendo desde hace mucho!!

Ya en el siglo I a.c hay referencias a raíces cuadradas de números negativos en el trabajo de matemáticos griegos como Herón de Alejandría.
Luego, se hicieron patentes en el siglo XVI cuando matemáticos italianos como Tartaglia o Cardano buscaban fórmulas que dieran raíces exactas de polinomios de grado 2 y 3.
Décadas más tarde, el ingeniero hidráulico Bombelli le dio sentido a las ecuaciones de Cardano aunque su trabajo fue ignorado en su momento.
Siglos más tarde, René Descartes bautizó a estos "nuevos números" como imaginarios (también eran llamados imaginables o falsos, porque solo existían en la imaginación) y sostuvo que toda ecuación debía tener tantas raíces como indica su grado, aunque algunas de ellas podrían no ser reales. Leonhard Euler llamó unidad imaginaria a $\sqrt{-1}$ y para representarla utilizó el símbolo i.

Los números complejos constituyen una extensión de los números reales , que permite obtener todas las raíces de cualquier polinomio.

Los números complejos son además utilizados en la representación de funciones trigonométricas y por ende, de funciones periódicas.

3.1 Definición - Forma binómica

Definimos al número i (unidad imaginaria) como aquel número que satisface la siguiente igualdad:

$$i^2 = -1$$

Esto nos permite ampliar al conjunto de los números reales y por lo tanto escribiremos a un **número complejo** z de la siguiente forma:

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Esta manera de introducir a los números complejos es a través de lo que llamamos *forma binómica del número complejo*

Luego el conjunto de números complejos, al que denotaremos como $\mathbb{C}$, se define por comprensión de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

Observemos que si tenemos $b = 0$ "recuperamos" a los números reales

*Si $a = 0$ decimos que el número complejo es un **imaginario puro***

Definición 3.1. *Dado un número complejo $z = a + ib$, se definen la parte real y la parte imaginaria de z como:*

$$Re(z) = a \qquad\qquad Im(z) = b$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$

Definición 3.2. *Dos números complejos son **iguales** si lo son las partes reales e imaginarias respectivamente.*
Es decir, dados dos números complejos z_1 y z_2, vale la igualdad si :

$$Re(z_1) = Re(z_2) \qquad y \qquad Im(z_1) = Im(z_2)$$

Definición 3.3. *El conjugado de un número complejo $z = a + ib$ se lo denota como $\bar{z}$ ó z^* y se lo define como:*

$$\bar{z} = a - ib$$

Observamos que $\overline{(\bar{z})} = z$

3.2 Operaciones Aritméticas entre Números Complejos

- **Suma de Complejos**

Definición 3.4. *Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, se define la **suma** de estos dos números como:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

Ejemplo 3.5. *Sean $z_1 = 1 + i2$ y $z_2 = 3 - i4$ entonces,*

$$z_1 + z_2 = (1 + i2) + (3 - i4) = (1 + 3) + i(2 - 4) = 4 - i2$$

Observación 3.6. *Como sumamos "parte real con parte real" y "parte imaginario con parte imaginaria", todos números reales, podemos asegurar que la suma es cerrada, devuelve un número complejo y además será asoaciativa y conmutativa.*

*También observamos que el **neutro** para la suma de complejos es el número $0 = 0 + i0$*

- **Opuesto y Resta de Complejos**

Definición 3.7. *Dado un número complejo* $z = a + ib$ *se define el* ***opuesto*** *de* z *y se lo denota como* $-z$ *al complejo* $-z = -a - ib$.

(Observemos que $z + (-z) = 0$ que como dijimos antes es el neutro para la suma)

Esto nos permite definir la operación **resta** entre dos complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ como sigue:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - i\,(a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1) + (-a_2 - ib_2)$$

Es decir, no es más que sumarle a z_1 el opuesto de z_2.

Ejemplo 3.8. *Sean* $z_1 = 1 + i3$ *y* $z_2 = 2 - i5$,

$$z_1 - z_2 = (1 + i3) - (2 - i5) = (1 + i3) + (-2 + i5) = -1 + i8$$

- **Producto de Complejos**

Definición 3.9. *Dados dos números complejos* $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$, *se define el producto de estos dos números como:*

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a_1 + ib_1)\,.\,(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + ib_1ib_2 \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 - b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.10. *Sean* $z_1 = 2 + i3$ *y* $z_2 = 4 - i5$ *entonces,*

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (2 + i3)\,.\,(4 - i5) = 2.4 + 2(-i5) + i3.4 + i3.(-i5) \\ &= 8 - i10 + i12 - i^2 15 = 8 - i10 + i12 + 15 \\ &= (8 + 15) + i(-10 + 12) = 23 + i2 \end{aligned}$$

Observación 3.11. *De la definición de este producto vemos que es cerrado, asociativo y conmutativo.*

Observemos, además, que el ***neutro*** *para el producto de complejos es el número* $1 = 1 + i0$

- **Inverso y Cociente de Complejos**

Definición 3.12. *Dado el número complejo* $z = a + ib \neq 0 + i0$*, se define el inverso de* z *y se lo denota como* z^{-1} *al siguiente número:*

$$z^{-1} = \frac{1.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{a - ib}{(a + ib).(a - ib)}$$

Ejemplo 3.13. *Queremos calcular el inverso del complejo* $z = 2 + i3$ *(y obviamente queremos que ese inverso sea un número complejo, o sea, que tenga una parte real y una parte imaginaria mulpliticada por* i*) entonces,*

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{2 - i3}{(2 + i3).(2 - i3)} = \frac{2 - i3}{((2.2 + 3.3) + i(2.(-3) + 3.2))} \\ &= \frac{2 - i3}{13} = \frac{2}{13} - i\frac{3}{13} \end{aligned}$$

Definición 3.14. *Dados dos números complejos* $z_1 = a_1 + \imath b_1$ *y* $z_2 = a_2 + \imath b_2 \neq 0 + \imath 0$*, se define el cociente de estos dos números y se lo denota como* $\frac{z_1}{z_2}$*, al producto de* z_1 *con el inverso de* z_2 *es decir:*

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1.z_2^{-1} = \frac{(a_1 + \imath b_1) \,.\, (a_2 - \imath b_2)}{(a_2 + \imath b_2)\,(a_2 - \imath b_2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + \imath(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15. *Por ejemplo si* $z_1 = 1 + i$ *y* $z_2 = 3 + i4$ *entonces,*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1} = \frac{(1 + i) \,.\, (3 - i4)}{(3 + i4)\,(3 - i4)} = \frac{7 - i}{25} = \frac{7}{25} - i\frac{1}{25}$$

- **Potencias de Complejos**

Potencias del número i

Sabemos que $i^2 = -1$, ahora nos preguntamos ¿cuánto vale i^n?

Observamos que:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 i = -1.i \\ i^4 &= i^2 i^2 = -1. -1 = 1 \end{aligned}$$

Esto nos permite inferir que $i^m = i^r$ siendo $m = 4q + r; 0 \leq r < 4$ ya que

$$i^m = i^{4q+r} = i^{4q} i^r = \left(i^4\right)^q i^r = 1^q i^r = 1.i^r = i^r$$

Ejemplo 3.16. *Calculemos las potencias* 173 *y* 1354 *de* i*.*

$$\begin{aligned} i^{173} &= i^{4\cdot 43+1} = i^{4\cdot 43} i^1 = \left(i^4\right)^{43} i = 1^{43} i = i \\ i^{1354} &= i^{4\cdot 338+2} = i^2 \end{aligned}$$

Con esta misma idea podemos calcular potencias de cualquier imaginario puro:

$$(ai)^m = a^m.i^r \, siendo \quad m = 4q + r; 0 \leq r < 4$$

Ejemplo 3.17.

$$(2i)^{15} = 2^{15}i^{15} = (4096)i^3 = (4096)(-i) = -4096i$$

Ahora tratemos de calcular $(a + ib)^2$, usemos la regla del binomio

$$(a + ib)^2 = a^2 + 2.a.bi + (bi)^2 = a^2 + 2abi + (-b^2) = (a^2 - b^2) + i2ab$$

Si queremos calcular $(a + ib)^3$ o alguna potencia superior , debemos multiplicar al anterior o recordar el desarrollo del binomio de Newton.

No “parece” algo muy práctico, más adelante veremos otra manera de calcular potencias.

3.3 Plano Complejo - Diferentes representaciones

3.3.1 Representación en par ordenado

Geométricamente, un número complejo puede representarse como un punto en el plano, como un *par ordenado.*

Un número complejo z sería un par ordenado (a, b) donde a es la parte real y b la parte imaginaria de mi complejo.

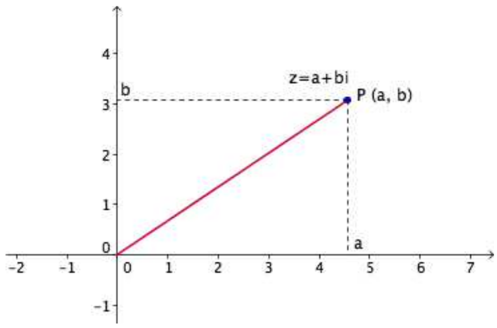
Se pueden definir en esta forma de manera natural la igualdad entre complejos como la igualdad entre pares ordenados (esto es, la primera coordinado del primer par debe ser igual a la primera coordenada del segundo par, y la segunda coordenada del primer par será igual a la segunda coordenada del segundo par); la suma de complejos y el producto por un escalar (por un real), siempre coordenada a coordenada.

Las operaciones de producto y cociente no son ya tan intuitivas.

La unidad imaginaria, nuestro i, se representará por el par $(0, 1)$.

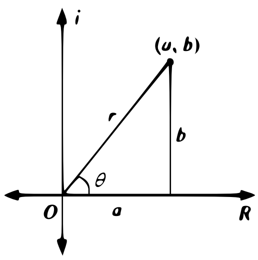
Esta forma de representación es la que muchos eligen para introducir el conjunto de los números complejos.

El concepto de número complejo extiende así la recta real a un espacio bidimensional, el llamado **Plano Complejo**.



3.3.2 Módulo y Argumento

De la representación en el plano complejo de un número z se puede ver que hay asociado a cada número complejo un número real que es su *distancia* al origen y llamaremos **módulo** del complejo y al que denotaremos como $|z|$, y un *ángulo* θ, que es el que forma el segmento de recta $|z|$ con el eje real positivo, al que llamaremos **argumento** de z y se definen de la siguiente forma:



Definición 3.18.

$$\textit{módulo de } z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\textit{argumento de } z = \theta = \arctan(b/a)$$

Observemos que hay infinitos ángulos equivalentes a θ (es decir, ángulos que satisfacen que su tangente es igual a $\frac{b}{a}$) por eso tenemos que elegir el rango para que no haya confusión. Nosotros en este curso vamos a pedir que $0 \leq \theta < 2\pi$

En términos de estos valores diremos que dos complejos z y w son **iguales** si :

$$módulo\ de\ z = |z| = |w| = módulo\ de\ w$$

$$\theta = argumento\ de\ z = argumento\ de\ w = \alpha + 2k\pi$$

Observando el gráfico y recordando propiedades y defininciones trigonométricas

$$\cos(\theta) = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{|z|}$$
$$\sin(\theta) = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{|z|}$$

se puede expresar la parte real y la parte imaginaria de cada complejo en forma binómica $z = a + ib$ como:

$$Re(z) = a = |z|\cos(\theta)$$

$$Im(z) = b = |z|\sin(\theta)$$

Y a partir de esto obtener nuevas representaciones.

- **Forma Trigonométrica**

$$z = a + ib = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta) = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

- **Forma Exponencial**

  Usando la formula de Euler

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha);$$

  y la forma trigonométrica de un número complejo, obtenemos una forma cómoda de escribir a un número complejo z que se conoce como forma exponencial del complejo y se la define como:

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}$$

- **Forma Polar**

  La muy usada forma polar toma los elementos básicos, módulo y argumento. Es muy sencilla y práctica pero no es muy intuitiva para realizar operaciones.

$$z = |z|_\theta$$

3.3.3 Operaciones en forma exponencial

La forma polar, trigonométrica o exponencial de un complejo resulta muy conveniente para el producto y cociente, y por ende para las potencias (que ya vimos eran tediosas para la forma binómicas).

Aqui trabajaremos solamente con la forma exponencial pero en las otras formas se opera de manera similar.

- **Producto y cociente de complejos en forma exponencial**

  Dados dos números complejos escritos en su forma exponencial, $z_1 = |z_1|e^{i\alpha_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\alpha_2}$, podemos escribir el producto y el cociente de dos número complejos de manera simple como:

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\alpha_1}|z_2|e^{i\alpha_2} = |z_1||z_2|e^{i\alpha_1}e^{i\alpha_2} = |z_1||z_2|e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\alpha_1}}{|z_2|e^{i\alpha_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}$$

Ejemplo 3.19. *1. Calcular el producto de* $z_1 = |\sqrt{8}|e^{i\frac{5}{4}\pi}$ *y* $z_2 = |2|e^{i\frac{3}{2}\pi}$

$$z_1.z_2 = \left(|\sqrt{8}|e^{i\frac{5}{4}\pi}\right).\left(|2|e^{i\frac{3}{2}\pi}\right) = \sqrt{8}.2e^{i\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi\right)} = \sqrt{2.4}2e^{i\left(\frac{11}{4}\pi\right)} = |\sqrt{2}.2.2|e^{i\frac{8+3}{4}\pi} = |4\sqrt{2}|e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Recordemos que el argumento no puede ser mayor a 2π

2. Calcular el cociente entre $z_1 = |\sqrt{2}|e^{i\frac{\pi}{4}}$ *y* $z_2 = |4|e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{4e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2^3}}e^{i\left(-\frac{1}{12}\right)\pi} = \frac{1}{\sqrt{2^3}}e^{i\frac{23}{12}\pi}$$

observemos que el argumento no puede ser menor que 0

- **Potencias de un número Complejo**

Notamos que al escribir un número complejo en su forma exponencial resulta fácil calcular el producto o el cociente de dos números complejos, de manera similar ocurre con la forma trigonom'etrica o polar (aunque hay que recordar reglas y propiedades), esto nos permite definir la potencia n de un número complejo de manera muy simple.

Sea $z = |z|e^{i\alpha}$, n un número natural,

$$z^n = \underbrace{z.\ldots.z.\ldots.z}_{n} = \underbrace{|z|e^{i\alpha}.\ldots.|z|e^{i\alpha}}_{n} = \left(\underbrace{|z|.\ldots.|z|}_{n}\right)\left(\underbrace{e^{i\alpha}.\ldots.e^{i\alpha}}_{n}\right) = |z|^n e^{i(\alpha+\cdots+\alpha)} = |z|^n e^{in\alpha}$$

Luego,

$$z^n = \left(|z|e^{i\alpha}\right)^n = |z|^n e^{in\alpha}$$

Ejemplo 3.20. *Calcular* $(2+2i)^{15}$

Primero pasemos nuestro complejo $z = 2+2i$ *a la forma exponencial, calculando módulo y argumento:*

$$|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

El argumento de z*, llamemoslo* α*, podemos obtenerlo con calculando el arcotangente de* $\frac{2}{2}$ *o graficando nuestro complejo en el plano y "viendo" que el ángulo formado es de* 45 *o* $\frac{\pi}{4}$

Ahora, $2+2i = z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ *y la potencia* 15 *quedará :* $z^{15} = \left(2\sqrt{2}\right)^{15}\left(e^{i15\frac{\pi}{4}}\right) = 2^{22}\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$

- **Raíces n-ésimas de un complejo**

Definición 3.21. *Dado un número complejo* $z = |z|e^{i\alpha}$*, se define a las* ***raíces n-ésimas de z*** *(y se las denota como* $z^{1/n}$*), como los números complejos* w *que satisfacen la siguiente ecuación* $w^n = z$*.*

Observemos que dos complejos en forma exponencial son iguales si sus módulos coinciden y sus argumentos son iguales más algún múltiplo de 2π.

Luego, dado $z = |z|e^{i\alpha}$ y $n \in \mathbb{N}$ las raíces n-ésimas de z, las $w = |w|e^{i\varphi}$ tales que $w^n = z$, cumplen que :

$$|z|e^{i\alpha} = z = w^n = \left(|w|e^{i\varphi}\right)^n = |w|^n e^{in\varphi}$$

Entonces

$$|z| = |w|^n \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$$
$$n\varphi = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \varphi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{N}$$

Observación 3.22. *Supongamos que* $k > n$*, podemos fijar* $k = n + r$ *con* $0 < r < n$ *y*

$\varphi_k = \frac{\alpha+2k\pi}{n} = \frac{\alpha+2(n+r)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{(2n+2r)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{(2n)\pi+(2r)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{(2r)\pi}{n} + \frac{(2n)\pi}{n} = \frac{\alpha+(2r)\pi}{n} + 2\pi = \varphi_r$

Como $r < n$ *obtenemos una raíz "repetida"*

Entonces $w = |w|e^{\phi}$ donde $|w| = \sqrt[n]{|z|} = |z|^{1/n}$ y $\varphi = \frac{\alpha+2k\pi}{n}; 0 \leq k < n$, es decir :

Definición 3.23. *Las raíces n-ésimas de z están dadas por la siguiente expresión:*

$$w_k = |z|^{1/n} e^{\frac{\alpha+2k\pi}{n}}; 0 \leq k < n$$

Ejemplo 3.24. *Calcular las raíces cuartas de $2+2i$*

Ya habíamos obtenido la forma exponencial de este complejo, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Como habla de raíces cuartas entendemos que $n = 4$, entonces.

$$|w| = \sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2^3}$$

$$\varphi_k = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}; \quad 0 \leq k \leq 3$$

Entonces,

$$\varphi_0 = \frac{\frac{\pi}{4} + 2.0\pi}{4} = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$
$$\varphi_1 = \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4} = \frac{\frac{9\pi}{4}}{4} = \frac{9\pi}{16}$$
$$\varphi_2 = \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4} = \frac{\frac{17\pi}{4}}{4} = \frac{17\pi}{16}$$
$$\varphi_3 = \frac{\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4} = \frac{\frac{25\pi}{4}}{4} = \frac{25\pi}{16}$$

Por lo tanto, las raíces cuartas serán:

$$w_0 = \sqrt[8]{2^3}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2^3}e^{i\frac{9\pi}{16}}$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2^3}e^{i\frac{17\pi}{16}}$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2^3}e^{i\frac{25\pi}{16}}$$