Morfismos de grupos

Definición 0.1. *Dados dos grupos* $(G_1, *)$ *y* $(G_2, \otimes)$ *se dirá que una función* $f : G_1 \to G_2$ *es un* ***morfismo de grupos*** *si y sólo si "respeta" las operaciones, en la siguiente forma:*

$$f(a * b) = f(a) \otimes f(b) \text{ para todo } a, b \in G_1$$

(esto es: cuando se opera en G_1*, las correspondientes imágenes resultan operadas en* G_2 *).*

Un morfismo que es además inyectivo recibe el nombre de ***monomorfismo***.
Un morfismo sobreyectivo se denomina ***epimorfismo*** y si es biyectivo, ***isomorfismo***

Ejemplo 0.2. *Sean los grupos* $(G_1, *) = (R, +)$ *y* $(G_2, \otimes) = (R^+, \cdot)$ *(los reales con la suma convencional y los reales no nulos con el producto usual).*
La función exponencial $f(x) = e^x$ *es un morfismo de grupos, ya que para cualquier par de reales* x, y *se cumple que* $f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$

El "respeto" por las operaciones que se menciona en la definión determina que se verifiquen las siguientes correspondencias entre elementos neutros e inversos:

Proposición 0.3. *Sean los grupos* $(G_1, *)$ *y* $(G_2, \otimes)$ *y* $f : G_1 \to G_2$ *un morfimos entre ellos, entonces* $f(e_1) = e_2$ *(siendo* e_1 *y* e_2 *los neutros respectivos a cada grupo).*
Además para cualquier $a \in G_1$, $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

Cualquiera sea $a \in G_1$ *vale que* $a * e_1 = a$*, aplicando el morfismo tenemos que* $f(a) \otimes f(e_1) = f(a * e_1) = f(a)$ *, claramente* $f(e_2)$ *actúa como un neutro para* G_2*, entonces por unicidad del neutro* $f(e_1) = e_2$

Por otro lado, para cualquier elemento $a \in G_1$*, sabemos que existe el inverso en el grupo y se cumple que* $a * a^{-1} = e_1$*, aplicando el morfismo* $f(a) \otimes f(a^{-1}) = f(a * a^{-1}) = f(e_1) = e_2$*, se ve que* $f(a^{-1})$ *"juega" de inverso de* $f(a)$ *en* G_2*, pero como el inverso en un grupo es único,* $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

Definición 0.4. *Sean los grupos* $(G_1, *)$ *y* $(G_2, \otimes)$ *y* $f : G_1 \to G_2$ *un morfimos entre ellos.*

Se denomina ***núcleo*** *del morfismo* f *al conjunto* $Nu(f) = \{a \in G_1 : f(a) = e_2\}$ *es decir al subconjunto del dominio formado por todos los elementos cuya imagen esel neutro del codominio.*

Se denomina ***imagen*** *del morfismo* f *al conjunto* $Im(f) = \{b \in G_2 : \exists a \in G_1, f(a) = b\}$

Ejemplo 0.5. *Recordando el ejemplo anterior de la función exponencial, es fácil ver que el único elemento del núcleo en ese caso es el neutro del dominio (ya que el único real tal que* $e^x = 1$ *es el* 0*). Por otro lado, como el codominio eran los reales positivos basta tomar logaritmo para ver que la imagen es todo el conjunto.*

Proposición 0.6. *Sean los grupos* $(G_1, *)$ *y* $(G_2, \otimes)$.
Si $f : G_1 \to G_2$ *un morfismo de grupos entonces es* $Nu(f)$ *e* $Im(f)$ *son subgrupos de* G_1 *y* G_2 *respectivamente*

Veamos el caso del núcleo (queda como ejercicio la demostración para la imagen)

Obviamente $Nu(f)$ es un subconjunto del grupo G_1, usemmos la proposición anteriormente probada para mostrar que es un subgrupo.
Como siempre vale que $f(e_1) = e_2$, el neutro de G_1 pertenece al núcleo.
Sólo nos queda mostrar que dados $a, b \in Nu(f)$ el operado $a * b^{-1}$ quedará en $Nu(f)$
(es decir, $f(a * b^{-1}) = e_2$)
Como $a, b \in Nu(f)$ entonces $f(a) = e_2 = f(b)$. Ahora, como f es morfimo,
$f(a * b^{-1}) = f(a) \otimes f(b^{-1}) = f(a) \otimes (f(b))^{-1} = e_2 \otimes (e_2)^{-1} = e_2 \otimes e_2 = e_2$