Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 3: Continuidad de una Función.

Ejercicio 1.

Determinar si las siguientes funciones son continuas en los valores indicados. Clasificar las discontinuidades, si las hay. Representar, gráficamente, cada función y verificar la conclusión obtenida.

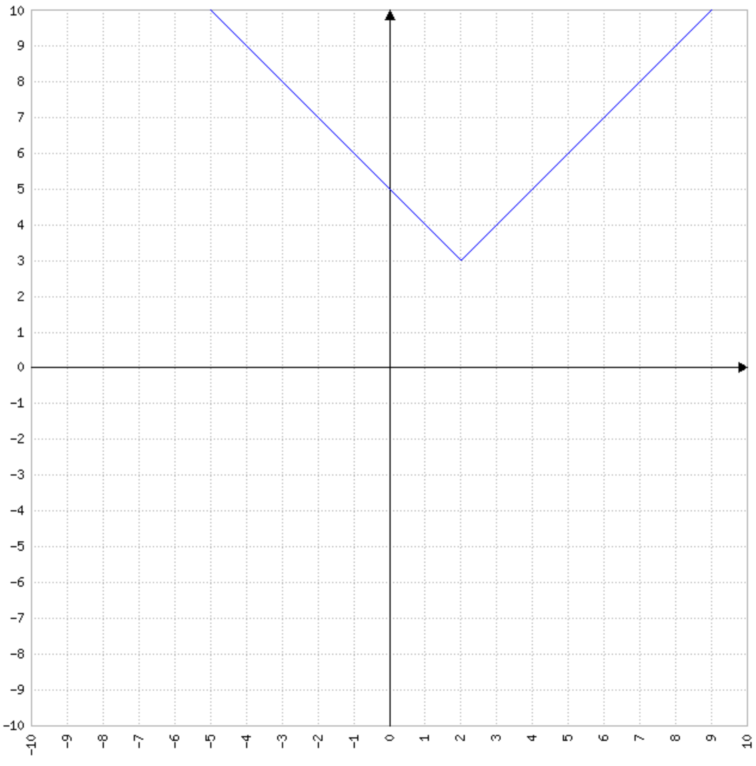
(a) *f (x)=* $|x-2|$ *+ 3 en x= 2.*

f (2)= $|2-2|$ + 3
f (2)= $|0|$ + 3
f (2)= 0 + 3
f (2)= 3.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} |x-2|+3$
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -(x-2)+3$
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -x+2+3$
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -x+5$= -2 + 5= 3.

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} |x-2|+3$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x-2+3$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x+1$= 2 + 1= 3.

Por lo tanto, ya que f (2)= $\lim_{x \to 2} f(x)$= 3, f (x) es continua en x= 2.



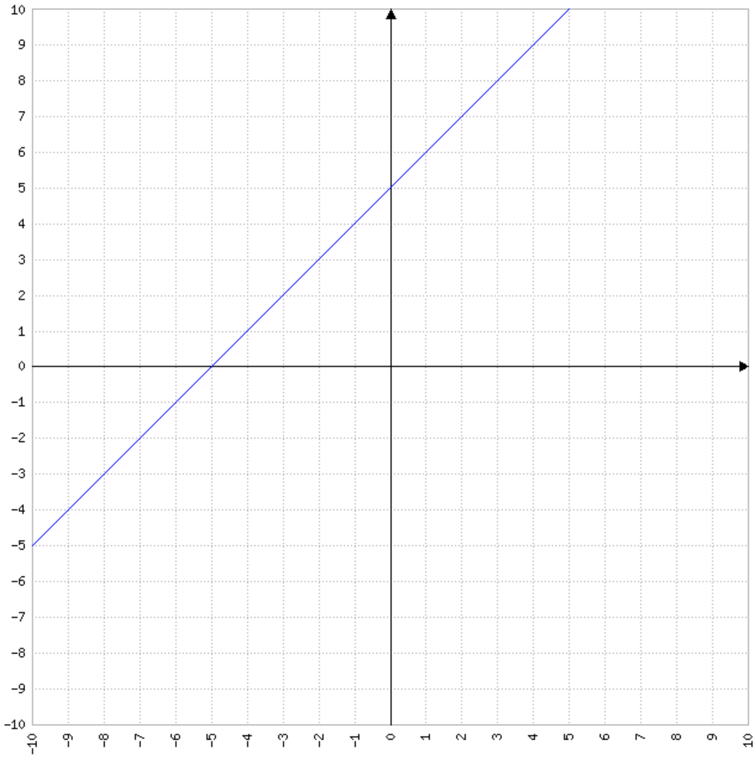
(b) $g\ (x)= \frac{x^2-25}{x-5}$ *en x= 5.*

x= 5 $\notin Dom_g$.

$\lim_{x \longrightarrow 5^-} g\ (x)= \lim_{x \longrightarrow 5^-} \frac{x^2-25}{x-5}= \frac{5^2-25}{5-5}= \frac{25-25}{0}= (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \longrightarrow 5^-} g\ (x)= \lim_{x \longrightarrow 5^-} \frac{(x-5)^2}{x-5}$
$\lim_{x \longrightarrow 5^-} g\ (x)= \lim_{x \longrightarrow 5^-} x-5$= 5 - 5= 0.

$\lim_{x \longrightarrow 5^+} g\ (x)= \lim_{x \longrightarrow 5^+} \frac{x^2-25}{x-5}= \frac{5^2-25}{5-5}= \frac{25-25}{0}= (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \longrightarrow 5^+} g\ (x)= \lim_{x \longrightarrow 5^+} \frac{(x-5)^2}{x-5}$
$\lim_{x \longrightarrow 5^+} g\ (x)= \lim_{x \longrightarrow 5^+} x-5$= 5 - 5= 0.

Por lo tanto, ya que x= 5 $\notin Dom_g$ y, entonces, $\nexists$ g (5), pero $\lim_{x \longrightarrow 5} g\ (x)$= 0, g (x) es discontinua evitable en x= 5.



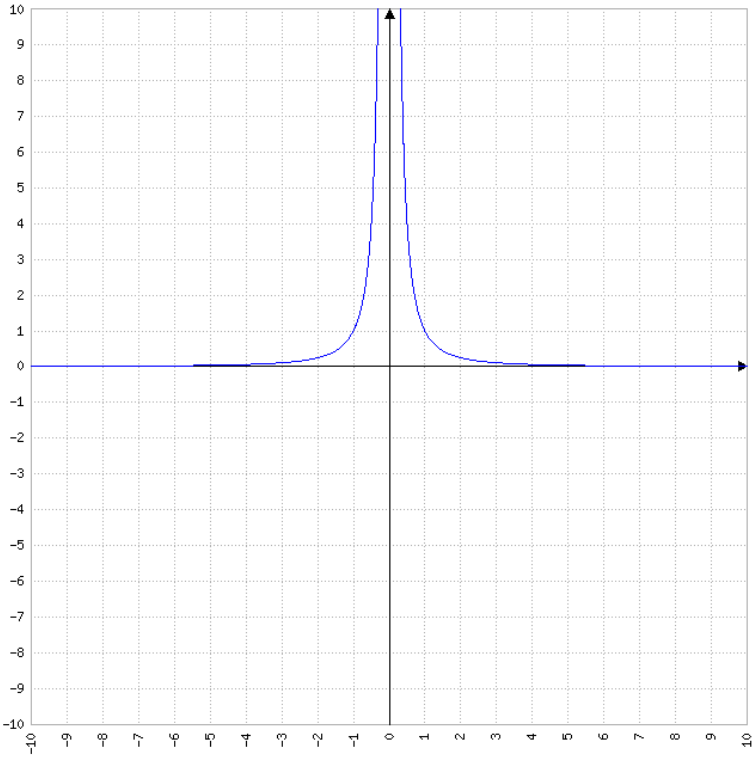
(c) *h (x)=* $\begin{cases} \frac{1}{x^2}, si\ x \neq 0 \\ 0, si\ x = 0 \end{cases}$ *en x= 0.*

h (0)= 0.

$\lim_{x \to 0^-} h\ (x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty.$

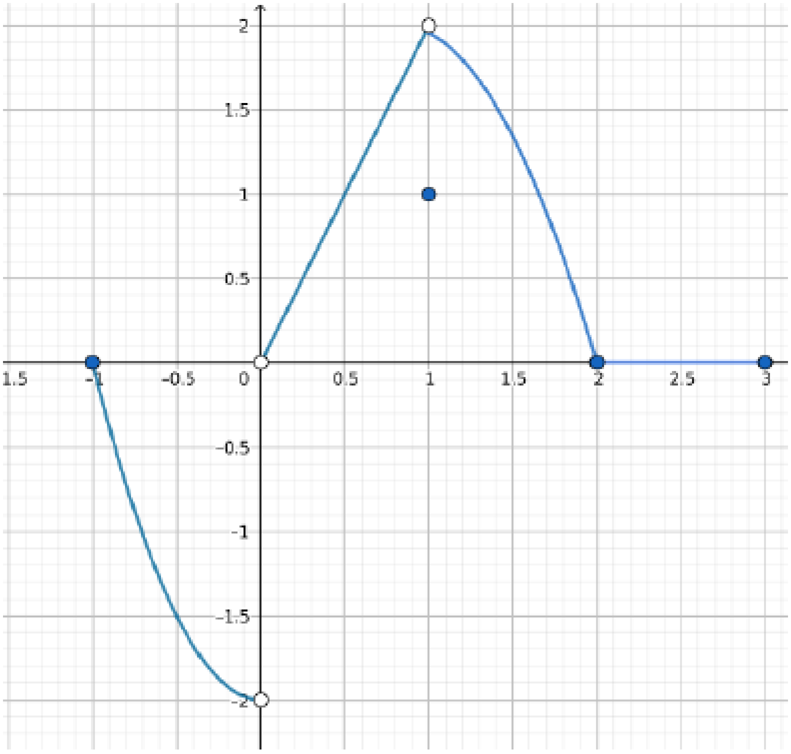
$\lim_{x \to 0^+} h\ (x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty.$

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to 0^-} h\ (x) = \lim_{x \to 0^+} h\ (x) = +\infty$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 0} h\ (x)$, h (x) es discontinua inevitable en x= 0.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ejercicio 2.

A partir de la siguiente gráfica de f (x):



Responder:

(a) *¿Existe f (-1)?*

Sí, f (-1)= 0.

(b) *¿Existe* $\lim_{x \to -1^+} f(x)$*?*

Sí, $\lim_{x \to -1^+} f(x)$= 0.

(c) *¿ f (-1)=* $\lim_{x \to -1^+} f(x)$*?*

Sí, f (-1)= $\lim_{x \to -1^+} f(x)$= 0.

(d) *¿Existe f (0)?*

No, ∄ f (0).

(e) *¿Existe* $\lim_{x \to 0} f(x)$*?*

No, ∄ $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(f) *¿f es continua en x= 0?*

No, f no es continua en x= 0.

(g) *¿Existe f (1)?*

Sí, f (1)= 1.

(h) *¿ Existe* $\lim_{x \to 1} f(x)$*?*

Sí, $\lim_{x \to 1} f(x)$= 2.

(i) *¿f es continua en x= 1?*

No, f no es continua en x= 1.

(j) *¿f es continua en x= 2?*

Sí, f es continua en x= 2.

(k) *¿f es continua en x= 3?*

Sí, f es continua en x= 3.

Ejercicio 3.

Dada la siguiente función, decidir si es continua en x= -1 y en x= 1:

$f(x)=\begin{cases} -2x+1, si\ x \leq -1 \\ 1, si -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, si\ x > 1 \end{cases}$.

f (-1)= -2 (-1) + 1
f (-1)= 2 + 1
f (-1)= 3.

$\lim_{x \to -1^-} f(x)= \lim_{x \to -1^-} -2x + 1$= -2 (-1) + 1= 2 + 1= 3.

$\lim_{x \to -1^+} f(x)= \lim_{x \to -1^+} 1$= 1.

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to -1^-} f(x)= \lim_{x \to -1^+} f(x)$ y, por lo tanto, $\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$, f (x) es discontinua inevitable en x= -1.

f (1)= 1.

$\lim_{x \to 1^-} f(x)= \lim_{x \to 1^-} 1$= 1.

$\lim_{x \to 1^+} f(x)= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x}= \frac{1}{1}$= 1.

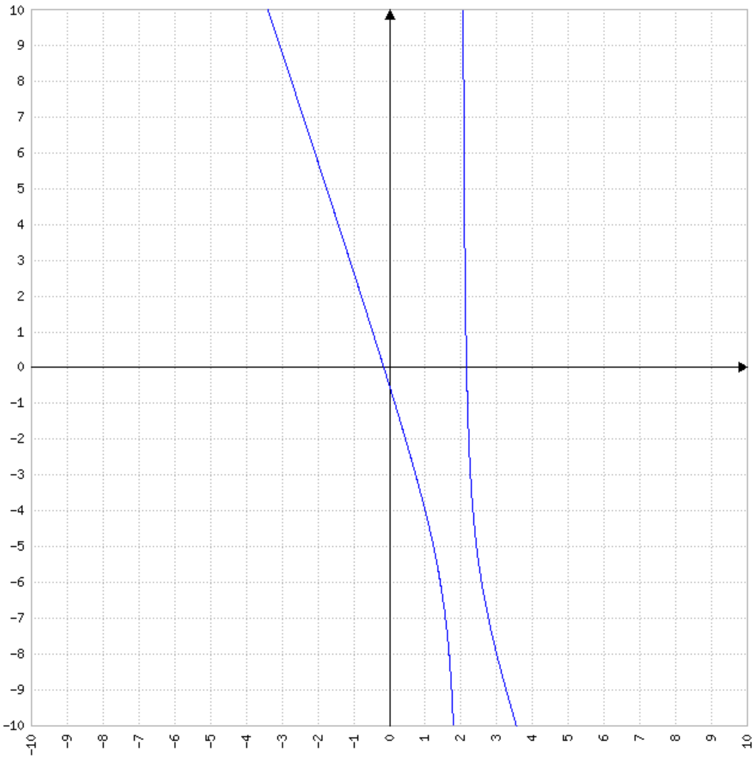
Por lo tanto, ya que f (1)= $\lim_{x \to 1} f(x)$= 1, f (x) es continua en x= 1.

Ejercicio 4.

Decidir en qué conjuntos son continuas las siguientes funciones:

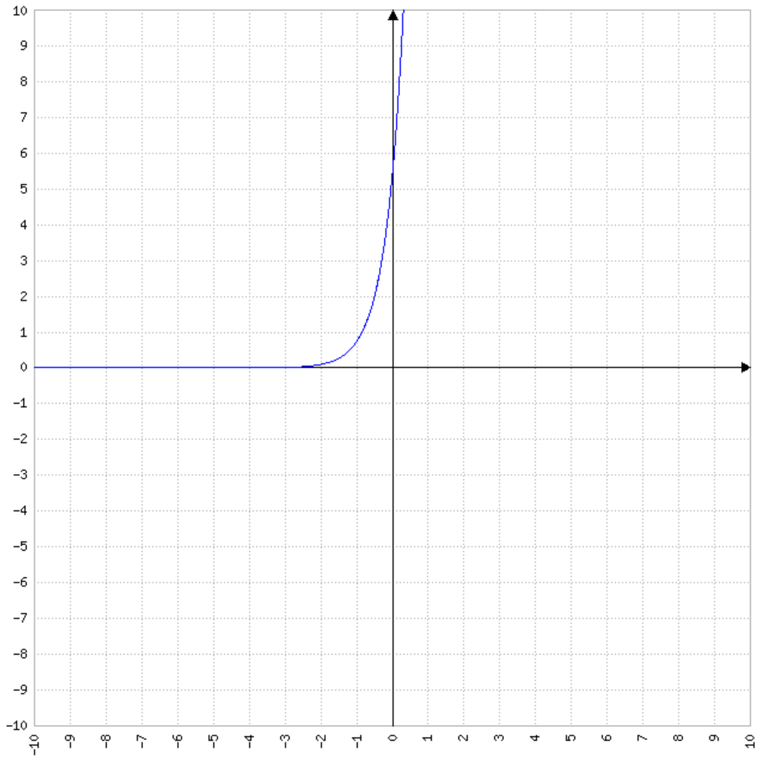
(a) *f (x)=* $\frac{1}{x-2}$ *- 3x.*

f (x) es continua en $\mathbb{R}$ - {2}.



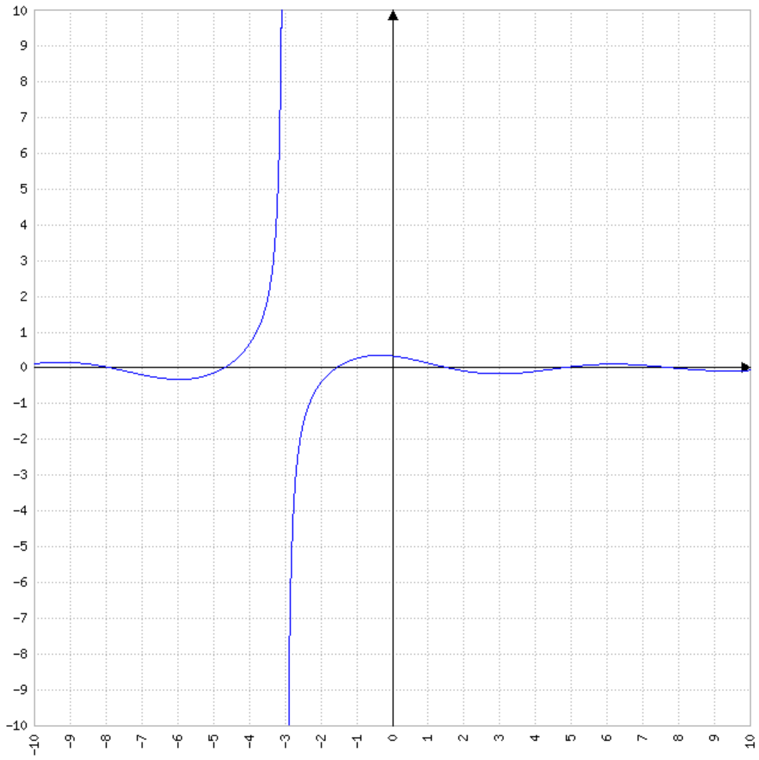
(b) *g (x)=* $2e^{2x+1}$.

g (x) es continua en $\mathbb{R}$.



(c) $h(x) = \frac{\cos x}{x+3}$.

h (x) es continua en ℝ - {-3}.



Ejercicio 5.

Para qué valor de k, g (x) resulta continua en $\mathbb{R}$.

g (x)= $\begin{cases} -x, si\ x > -2 \\ kx^2, si\ x \leq -2 \end{cases}$.

f (-2)= k $(-2)^2$
f (-2)= 4k.

$\lim_{x \to -2^-} g\ (x)$= $\lim_{x \to -2^-} kx^2$= k $(-2)^2$= 4k.

$\lim_{x \to -2^+} g\ (x)$= $\lim_{x \to -2^+} -x$= -(-2)= 2.

$\lim_{x \to -2^-} g\ (x)$= $\lim_{x \to -2^+} g\ (x)$
4k= 2
k= $\frac{2}{4}$
k= $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, para k= $\frac{1}{2}$, g (x) resulta continua en $\mathbb{R}$, ya que g (-2)= $\lim_{x \to -2} g\ (x)$= 2 y, por lo tanto, g (x) es continua en x= -2 y, además, g (x) es continua a la izquierda y a la derecha de x= -2 (ya que toda función polinómica es continua en $\mathbb{R}$).

Ejercicio 6.

Decidir si la siguiente función es continua en [-2, 5]:

$h\ (x) = \begin{cases} x^2 - 3, si\ x \geq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3}, si\ x < 3 \end{cases}.$

h (3)= 3^2 - 3
h (3)= 9 - 3
h (3)= 6.

$\lim_{x \to 3^-} h\ (x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{0} = (\frac{0}{0}).$
$\lim_{x \to 3^-} h\ (x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$
$\lim_{x \to 3^-} h\ (x) = \lim_{x \to 3^-} x + 3$= 3 + 3= 6.

$\lim_{x \to 3^+} h\ (x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 3$= 3^2 - 3= 9 - 3= 6.

h (-2)= $\frac{(-2)^2-9}{-2-3}$
h (-2)= $\frac{4-9}{-5}$
h (-2)= $\frac{-5}{-5}$
h (-2)= 1.

$\lim_{x \to -2^+} h\ (x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(-2)^2-9}{-2-3} = \frac{4-9}{-5} = \frac{-5}{-5}$= 1.

h (5)= 5^2 - 3
h (5)= 25 - 3
h (5)= 22.

$\lim_{x \to 5^-} h\ (x) = \lim_{x \to 5^-} x^2 - 3$= 5^2 - 3= 25 - 3= 22.

Por lo tanto, ya que h (x) es continua en todos los puntos interiores (-2, 5), continua por la derecha en x= -2 y continua por la izquierda en x= 5, h (x) es continua en [-2, 5].