Trabajo Práctico N° 6:
Estimación Puntual.

Ejercicio 1.

Suponer que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población X, que $E(X) = \mu$ y $V(x) = \sigma^2$. Sean

$\bar{X}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ *y* $\bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

dos estimadores de μ. ¿Cuál es el mejor estimador de μ? Explicar la elección.

$E(\bar{X}_1) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)$

$E(\bar{X}_1) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)$

$E(\bar{X}_1) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)$ por (*)

$E(\bar{X}_1) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mu$

$E(\bar{X}_1) = \frac{1}{n-1} (n-1) \mu$

$E(\bar{X}_1) = \mu.$

$V(\bar{X}_1) = V\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)$

$V(\bar{X}_1) = \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 V\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)$

$V(\bar{X}_1) = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} V(X_i)$ por (**)

$V(\bar{X}_1) = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^2$

$V(\bar{X}_1) = \frac{1}{(n-1)^2} (n-1) \sigma^2$

$V(\bar{X}_1) = \frac{\sigma^2}{n-1}.$

$ECM(\bar{X}_1) = \{E[\bar{X}_1 - E(\bar{X}_1)]\}^2 + V(\bar{X}_1)$

$ECM(\bar{X}_1) = [E(\bar{X}_1 - \mu)]^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$

$ECM(\bar{X}_1) = [E(\bar{X}_1) - E(\mu)]^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$

$ECM(\bar{X}_1) = (\mu - \mu)^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$

$ECM(\bar{X}_1) = 0^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$

$ECM(\bar{X}_1) = 0 + \frac{\sigma^2}{n-1}$

$ECM(\bar{X}_1) = \frac{\sigma^2}{n-1}.$

$E(\bar{X}_2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$E(\bar{X}_2) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$E(\bar{X}_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ por (*)

$E(\bar{X}_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu$

$E(\bar{X}_2) = \frac{1}{n} n\mu$

$E(\bar{X}_2) = \mu$.

$V(\bar{X}_2) = V(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i)$

$V(\bar{X}_2) = (\frac{1}{n})^2 V(\sum_{i=1}^{n} X_i)$

$V(\bar{X}_2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ por (**)

$V(\bar{X}_2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2$

$V(\bar{X}_2) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2$

$V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

$ECM(\bar{X}_2) = \{E[\bar{X}_2 - E(\bar{X}_2)]\}^2 + V(\bar{X}_2)$

$ECM(\bar{X}_2) = [E(\bar{X}_2 - \mu)]^2 + \frac{\sigma^2}{n}$

$ECM(\bar{X}_2) = [E(\bar{X}_2) - E(\mu)]^2 + \frac{\sigma^2}{n}$

$ECM(\bar{X}_2) = (\mu - \mu)^2 + \frac{\sigma^2}{n}$

$ECM(\bar{X}_2) = 0^2 + \frac{\sigma^2}{n}$

$ECM(\bar{X}_2) = 0 + \frac{\sigma^2}{n}$

$ECM(\bar{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n-1}$.

$ECM(\bar{X}_1) = \frac{\sigma^2}{n-1} < ECM(\bar{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Por lo tanto, el mejor estimador de μ es $\bar{X}_2$, ya que tiene menor error cuadrático medio.

Ejercicio 2.

Sea X_1, X_2, ... , X_7 una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considerar los siguientes estimadores de μ:

$\widehat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_7}{7}$; $\widehat{\Theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$; $\widehat{\Theta}_3 = \frac{2X_1 - X_7 + X_3}{3}$.

(a) *¿Alguno de estos estimadores es insesgado?*

$E(\widehat{\Theta}_1) = E(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7}{7})$

$E(\widehat{\Theta}_1) = \frac{1}{7} E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7)$

$E(\widehat{\Theta}_1) = \frac{1}{7} [E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) + E(X_6) + E(X_7)]$ por (*)

$E(\widehat{\Theta}_1) = \frac{1}{7} 7 E(X_1)$

$E(\widehat{\Theta}_1) = \mu$.

$E(\widehat{\Theta}_2) = E(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2})$

$E(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{2} E(2X_1 - X_6 + X_4)$

$E(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{2} [E(2X_1) - E(X_6) + E(X_4)]$ por (*)

$E(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{2} [2 E(X_1) - \mu + \mu]$

$E(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{2} (2\mu - \mu + \mu)$

$E(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{2} 2\mu$

$E(\widehat{\Theta}_2) = \mu$.

$E(\widehat{\Theta}_3) = E(\frac{2X_1 - X_7 + X_3}{3})$

$E(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{3} E(2X_1 - X_7 + X_3)$

$E(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{3} [E(2X_1) - E(X_7) + E(X_3)]$ por (*)

$E(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{3} [2 E(X_1) - \mu + \mu]$

$E(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{3} (2\mu - \mu + \mu)$

$E(\widehat{\Theta}_3) = \frac{2}{3} \mu$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.

Por lo tanto, $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$ son insesgados.

(b) *Hallar el error cuadrático medio de los estimadores.*

$V(\widehat{\Theta}_1) = V(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7}{7})$

$V(\widehat{\Theta}_1) = \frac{1}{49} V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7)$

$V(\widehat{\Theta}_1) = \frac{1}{49}[V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) + V(X_5) + V(X_6) + V(X_7)]$ por (**)

$V(\widehat{\Theta}_1) = \frac{1}{49} 7 V(X_1)$

$V(\widehat{\Theta}_1) = \frac{1}{7}\sigma^2.$

$V(\widehat{\Theta}_2) = V(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2})$

$V(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{4} V(2X_1 - X_6 + X_4)$

$V(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{4}[V(2X_1) + V(X_6) + V(X_4)]$ por (**)

$V(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{4}[4 V(X_1) + \sigma^2 + \sigma^2]$

$V(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2)$

$V(\widehat{\Theta}_2) = \frac{1}{4} 6\sigma^2$

$V(\widehat{\Theta}_2) = \frac{3}{2}\sigma^2.$

$V(\widehat{\Theta}_3) = V(\frac{2X_1 - X_7 + X_3}{3})$

$V(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{9} V(2X_1 + X_7 + X_3)$

$V(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{9}[V(2X_1) + V(X_7) + V(X_3)]$ por (**)

$V(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{9}[4 V(X_1) + \sigma^2 + \sigma^2]$

$V(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{9}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2)$

$V(\widehat{\Theta}_3) = \frac{1}{9} 6\sigma^2$

$V(\widehat{\Theta}_3) = \frac{2}{3}\sigma^2.$

(**) propiedad de la varianza e independencia.

$ECM(\widehat{\Theta}_1) = \{E[\widehat{\Theta}_1 - E(\widehat{\Theta}_1)]\}^2 + V(\widehat{\Theta}_1)$

$ECM(\widehat{\Theta}_1) = [E(\widehat{\Theta}_1 - \mu)]^2 + \frac{1}{7}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_1) = [E(\widehat{\Theta}_1) - E(\mu)]^2 + \frac{1}{7}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_1) = (\mu - \mu)^2 + \frac{1}{7}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_1) = 0^2 + \frac{1}{7}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_1) = 0 + \frac{1}{7}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_1) = \frac{1}{7}\sigma^2.$

$ECM(\widehat{\Theta}_2) = \{E[\widehat{\Theta}_2 - E(\widehat{\Theta}_2)]\}^2 + V(\widehat{\Theta}_2)$

$ECM(\widehat{\Theta}_2) = [E(\widehat{\Theta}_2 - \mu)]^2 + \frac{3}{2}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_2) = [E(\widehat{\Theta}_2) - E(\mu)]^2 + \frac{3}{2}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_2) = (\mu - \mu)^2 + \frac{3}{2}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_2) = 0^2 + \frac{3}{2}\sigma^2$

$ECM(\widehat{\Theta}_2) = 0 + \frac{3}{2}\sigma^2$

ECM $(\widehat{\Theta}_2)= \frac{3}{2}\sigma^2$.

ECM $(\widehat{\Theta}_3)= \{E[\widehat{\Theta}_3 - E(\widehat{\Theta}_3)]\}^2 + V(\widehat{\Theta}_3)$

ECM $(\widehat{\Theta}_3)= [E(\widehat{\Theta}_3 - \mu)]^2 + \frac{2}{3}\sigma^2$

ECM $(\widehat{\Theta}_3)= [E(\widehat{\Theta}_3) - E(\mu)]^2 + \frac{2}{3}\sigma^2$

ECM $(\widehat{\Theta}_3)= (\frac{2}{3}\mu - \mu)^2 + \frac{2}{3}\sigma^2$

ECM $(\widehat{\Theta}_3)= (\frac{-1}{3}\mu)^2 + \frac{2}{3}\sigma^2$

ECM $(\widehat{\Theta}_3)= \frac{1}{9}\mu + \frac{2}{3}\sigma^2$

ECM $(\widehat{\Theta}_3)= \frac{1}{9}\mu + \frac{2}{3}\sigma^2$.

(c) *¿Cuál estimador es el "mejor"? ¿En qué sentido es mejor?*

ECM $(\widehat{\Theta}_1)= \frac{1}{7}\sigma^2 < $ ECM $(\widehat{\Theta}_2)= \frac{3}{2}\sigma^2$.

ECM $(\widehat{\Theta}_1)= \frac{1}{7}\sigma^2 < $ ECM $(\widehat{\Theta}_3)= \frac{1}{9}\mu + \frac{2}{3}\sigma^2$.

El "mejor" estimador es $\widehat{\Theta}_1$, ya que tiene menor error cuadrático medio.

Ejercicio 3.

Sea X_1, X_2, … , X_n una muestra aleatoria de tamaño n.

(a) *Demostrar que $\bar{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.*

Media poblacional de X_i, i= 1, 2, … , n: μ.
Varianza poblacional de X_i, i= 1, 2, … , n: σ^2.

$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2$

$E(\bar{X}^2) = V(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}) + [E(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})]^2$

$E(\bar{X}^2) = \frac{1}{n^2} V(\sum_{i=1}^n X_i) + [\frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^n X_i)]^2$

$E(\bar{X}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) + [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)]^2$ por (*)

$E(\bar{X}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 + [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu]^2$

$E(\bar{X}^2) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 + (\frac{1}{n} n\mu)^2$

$E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.

Por lo tanto, $\bar{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.

(b) *Determinar la magnitud del sesgo de este estimador.*

Sesgo $(\bar{X}^2) = E(\bar{X}^2) - \mu^2$

Sesgo $(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \mu^2$

Sesgo $(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

(c) *¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño de n de la muestra?*

$\lim_{n \to +\infty} Sesgo(\bar{X}^2) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sigma^2}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} Sesgo(\bar{X}^2) = 0$.

A medida que aumenta que aumenta el tamaño de n de la muestra, el sesgo tiende a cero.

Ejercicio 4.

El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días, se observan: 2, 5, 3, 3, 7 desconexiones accidentales.

(a) *Obtener el estimador de máxima verosimilitud de λ. ¿El estimador es insesgado? ¿Es consistente?*

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}$

$L(\lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$.

$\ln L(\lambda) = \ln\left(\frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\right)$

$\ln L(\lambda) = \ln(e^{-n\lambda}) + \ln(\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}) - \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!)$

$\ln L(\lambda) = -n\lambda \ln e + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$

$\ln L(\lambda) = -n\lambda * 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$

$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$.

$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$

$-n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = n$

$\hat{\lambda}_{EMV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

$E(\hat{\lambda}_{EMV}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$

$E(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$E(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$ por (*)

$E(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda$

$E(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{1}{n} n\lambda$

$E(\hat{\lambda}_{EMV}) = \lambda$.

$V(\hat{\lambda}_{EMV}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$

$V(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$V(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(x_i)$ por (**)

$V(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \lambda$

$V(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{1}{n^2} n\lambda$

$V(\hat{\lambda}_{EMV}) = \frac{\lambda}{n}$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

$$\lim_{n \to +\infty} E(\hat{\lambda}_{EMV}) = \lambda.$$

$$\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\lambda}_{EMV}) = 0.$$

Por lo tanto, el estimador es insesgado (ya que E $(\hat{\lambda}_{EMV}) = \lambda$) y consistente (ya que $\lim_{n \to +\infty} E(\hat{\lambda}_{EMV}) = \lambda$ y $\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\lambda}_{EMV}) = 0$).

(b) *Obtener la estimación de λ a partir de la muestra dada.*

$$\hat{\lambda}_{EMV} = \frac{2+5+3+3+7}{5}$$
$$\hat{\lambda}_{EMV} = \frac{20}{5}$$
$$\hat{\lambda}_{EMV} = 4.$$

(c) *Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encontrar la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.*

P $(X \geq 3) = 1 - $ P $(X < 3)$

P $(X \geq 3) = 1 - [$P $(X= 0) + $ P $(X= 1) + $ P $(X= 2)]$

P $(X \geq 3) = 1 - (\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!})$

P $(X \geq 3) = 1 - (\frac{e^{-\lambda}*1}{1} + \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2})$

P $(X \geq 3) = 1 - (e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\lambda + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2})$

P $(X \geq 3) = 1 - e^{-\lambda} (1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}).$

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV}) = 1 - e^{-\hat{\lambda}_{EMV}} (1 + \hat{\lambda}_{EMV} + \frac{\hat{\lambda}_{EMV}^2}{2})$ $\qquad$ por propiedad de invarianza

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV}) = 1 - e^{-4} (1 + 4 + \frac{4^2}{2})$

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV}) = 1 - e^{-4} (1 + 4 + \frac{16}{2})$

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV}) = 1 - e^{-4} (1 + 4 + 8)$

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV}) = 1 - 13e^{-4}$

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV}) = 1 - 13 * 0,018$

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV}) = 1 - 0,238$

$\hat{P}_{EMV}$ $(X \geq 3 \mid \hat{\lambda}_{EMV}) = 0,762.$

Ejercicio 5.

(a) *Sea X_1, X_2, ... , X_n una muestra aleatoria de una v.a. B (1, p). Hallar un estimador de máxima verosimilitud (EMV) de p.*

L (p)= $\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$
L (p)= $p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

ln L (p)= $\ln [p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}]$
ln L (p)= $\ln (p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}) + \ln (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$
ln L (p)= $\sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ln (1 - p)$.

$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p}= 0$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} + \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} (-1)= 0$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}= 0$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}= \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$

$\frac{1-p}{p}= \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\frac{1}{p} - 1= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1$

$\frac{1}{p}= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\hat{p}_{EMV}= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

(b) *Se selecciona una muestra aleatoria de n chips fabricados por cierta compañía. Sea X= el número entre los n que tienen defectos y p= P (el chip tiene defecto). Se supone que sólo se observa X (el número de chips con defectos).*

(i) *Si n= 100 y x= 5, ¿cuál es la estimación de p?*

$\hat{p}_{EMV}= \frac{5}{100}$
$\hat{p}_{EMV}= 0{,}05$.

Por lo tanto, si n= 100 y x= 5, la estimación de p es 0,05.

(ii) *Si n= 100 y x= 5, ¿cuál es el EMV de la probabilidad $(1-p)^6$, de que ninguno de los siguientes 6 chips que se examinen tenga defectos?*

$\hat{P}_{EMV}= (1-\hat{p}_{EMV})^6$ por propiedad de invarianza
$\hat{P}_{EMV}= (1-0{,}05)^6$
$\hat{P}_{EMV}= 0{,}95^6$

$\hat{P}_{EMV} = 0,735$.

Por lo tanto, si n= 100 y x= 5, el EMV de la probabilidad $(1 - p)^6$ es 0,735.

Ejercicio 6.

Se denota por X la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y se supone que la f.d.p. de X es:

$$f(x) = \begin{cases} (2\theta + 1)x^{2\theta}, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, c.c. \end{cases}, \text{ donde } \theta > \frac{-1}{2}.$$

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información: 0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.

(a) _Utilizar el método de los momentos para obtener un estimador de θ y, luego, calcular la estimación para esta información._

$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x(2\theta + 1)x^{2\theta} \, dx$

$\mu = \int_{0}^{1} (2\theta + 1)x^{2\theta+1} \, dx$

$\mu = (2\theta + 1) \int_{0}^{1} x^{2\theta+1} \, dx$

$\mu = (2\theta + 1) \frac{x^{2\theta+2}}{2\theta+2} |_0^1$

$\mu = \frac{2\theta+1}{2\theta+2} (1^{2\theta+2} - 0^{2\theta+2})$

$\mu = \frac{2\theta+1}{2\theta+2} (1 - 0)$

$\mu = \frac{2\theta+1}{2\theta+2} * 1$

$\mu = \frac{2\theta+1}{2\theta+2}.$

$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$

$\mu = M_1$

$\frac{2\theta+1}{2\theta+2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

$2\theta + 1 = (2\theta + 2) \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

$2\theta + 1 = 2\theta \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} + 2 \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

$2\theta - 2\theta \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = 2 \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - 1$

$\theta (2 - 2 \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}) = \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{n}$

$\frac{2n - 2\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \theta = \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{n}$

$\theta = \frac{\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{n}}{\frac{2n - 2\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}$

$\hat{\theta}_{MM} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{2(n - \sum_{i=1}^{n} X_i)}.$

$\hat{\theta}_{MM} = \frac{2*8 - 10}{2(10-8)}$

$\hat{\theta}_{MM} = \frac{16 - 10}{2*2}$

$\hat{\theta}_{MM} = \frac{6}{4}$

$\hat{\theta}_{MM} = \frac{3}{2}$

$\hat{\theta}_{MM} = 1,5.$

(b) *Obtener el EMV de θ y, luego, calcular la estimación para la información dada.*

L $(\theta) = \prod_{i=1}^{n}(2\theta + 1)\, x_i^{2\theta}$

L $(\theta) = (2\theta + 1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}.$

ln L $(\theta) = \ln\left[(2\theta + 1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}\right]$

ln L $(\theta) = \ln(2\theta + 1)^n + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}\right)$

ln L $(\theta) = n\ln(2\theta + 1) + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{2\theta}$

ln L $(\theta) = n\ln(2\theta + 1) + 2\theta \sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$

$\frac{n}{2\theta + 1} * 2 + 2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$

$\frac{2n}{2\theta + 1} = -2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$2\theta + 1 = \frac{2n}{-2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

$2\theta + 1 = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

$2\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} - 1$

$\hat{\theta}_{EMV} = \frac{-n}{2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} - \frac{1}{2}.$

$\hat{\theta}_{EMV} = \frac{-10}{2(-2,43)} - \frac{1}{2}$

$\hat{\theta}_{EMV} = \frac{-10}{-4,86} - \frac{1}{2}$

$\hat{\theta}_{EMV} = 2,06 - \frac{1}{2}$

$\hat{\theta}_{EMV} = 1,56.$

Ejercicio 7.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) *Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de los momentos. ¿Los estimadores son insesgados?*

$\mu_1 = M_1$
$\hat{\mu}_{EMM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

$\sigma^2 + \mu^2 = M_2$
$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$
$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \hat{\mu}_{EMM}^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2$.

$E(\hat{\mu}_{EMM}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$
$E(\hat{\mu}_{EMM}) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$
$E(\hat{\mu}_{EMM}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ por (*)
$E(\hat{\mu}_{EMM}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu$
$E(\hat{\mu}_{EMM}) = \frac{1}{n} n\mu$
$E(\hat{\mu}_{EMM}) = \mu$.

$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2\right]$
$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}\right) - E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2\right]$ por (*)
$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \left\{V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) + \left[E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)\right]^2\right\}$
$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \left[\frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mu^2\right]$ por (*)
$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\sigma^2 + \mu^2) - \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \mu^2\right]$ por (**)
$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = \frac{1}{n} n (\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{1}{n^2} n\sigma^2 + \mu^2\right)$
$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = \sigma^2 + \mu^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)$
$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2$
$E(\hat{\sigma}_{EMM}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

Por lo tanto, el estimador EMM de μ es insesgado y el estimador EMM de σ^2 no es insesgado.

(b) *Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de verosimilitud. ¿Los estimadores son insesgados?*

$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$L(\mu, \sigma^2) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^n e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$

$L(\mu, \sigma^2) = (\sqrt{2\pi\sigma^2})^{-n} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$

$L(\mu, \sigma^2) = [(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}]^{-n} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$

$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$.

$\ln L(\mu, \sigma^2) = \ln [(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}]$

$\ln L(\mu, \sigma^2) = \ln (2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} + \ln [e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}]$

$\ln L(\mu, \sigma^2) = \frac{-n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 + [\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2] \ln e$

$\ln L(\mu, \sigma^2) = \frac{-n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 * 1$

$\ln L(\mu, \sigma^2) = \frac{-n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = 0$

$\frac{-2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(-1) = 0$

$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0 * \sigma^2$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0$

$\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu = 0$

$\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu = 0$

$n\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\hat{\mu}_{EMV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0$

$\frac{-n}{2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} 2\pi - [\frac{-1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2] = 0$

$\frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = 0$

$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

$\frac{2\sigma^4}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$

$\hat{\sigma}^2_{EMV} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2}{n}$.

$E(\hat{\mu}_{EMV}) = E(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})$

$E(\hat{\mu}_{EMV}) = \frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^{n} X_i)$

$E(\hat{\mu}_{EMV}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ \hfill por (*)

$E\left(\hat{\mu}_{EMV}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$

$E\left(\hat{\mu}_{EMV}\right) = \frac{1}{n}n\mu$

$E\left(\hat{\mu}_{EMV}\right) = \mu.$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2}{n}\right]$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2\right]$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = \frac{1}{n}E\left\{\sum_{i=1}^{n}[X_i^2 - 2X_i\hat{\mu}_{EMV} + \hat{\mu}_{EMV}^2]\right\}$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + \sum_{i=1}^{n}-2X_i\hat{\mu}_{EMV} + \sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}_{EMV}^2\right)$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\hat{\mu}_{EMV}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\hat{\mu}_{EMV}^2\right)$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\hat{\mu}_{EMV}n\hat{\mu}_{EMV} + n\hat{\mu}_{EMV}^2\right)$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\hat{\mu}_{EMV}^2 + n\hat{\mu}_{EMV}^2\right)$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\hat{\mu}_{EMV}^2\right)$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMV}^2\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n} - \hat{\mu}_{EMV}^2\right)$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)^2\right]$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\right) - E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)^2\right]$ por (*)

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) - \left\{V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right) + \left[E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)\right]^2\right\}$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - \left[\frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) + \mu^2\right]$ por (*)

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - \left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i) + \mu^2\right]$ por (**)

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = \frac{1}{n}n(\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{1}{n^2}n\sigma^2 + \mu^2\right)$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = \sigma^2 + \mu^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2$

$E\left(\hat{\sigma}_{EMM}^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

Por lo tanto, el estimador EMV de μ es insesgado y el estimador EMV de σ^2 no es insesgado.

(c) *Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg2): 392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375. Si se supone que la resistencia al corte está normalmente distribuida, estimar la verdadera media de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.*

X_i: "resistencia al corte de la i-ésima soldadura eléctrica", i= 1, 2, … , 10.

$X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right).$

EMM:

$\hat{\mu}_{EMM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

$\hat{\mu}_{EMM} = \frac{3844}{10}$

$\hat{\mu}_{EMM} = 384,4.$

$\hat{\sigma}^2_{EMM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - (\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})^2$

$\hat{\sigma}^2_{EMM} = \frac{1481190}{10} - (\frac{3844}{10})^2$

$\hat{\sigma}^2_{EMM} = 148119 - 384,4^2$

$\hat{\sigma}^2_{EMM} = 148119 - 147763,36$

$\hat{\sigma}^2_{EMM} = 355,64.$

$\hat{\sigma}_{EMM} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{EMM}}$

$\hat{\sigma}_{EMM} = \sqrt{355,64}$

$\hat{\sigma}_{EMM} = 18,86.$

EMV:

$\hat{\mu}_{EMV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

$\hat{\mu}_{EMV} = \frac{3844}{10}$

$\hat{\mu}_{EMV} = 384,4.$

$\hat{\sigma}^2_{EMV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu}_{EMV})^2}{n}$

$\hat{\sigma}^2_{EMV} = \frac{3556,4}{10}$

$\hat{\sigma}^2_{EMV} = 355,64.$

$\hat{\sigma}_{EMV} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{EMV}}$

$\hat{\sigma}_{EMV} = \sqrt{355,64}$

$\hat{\sigma}_{EMV} = 18,86.$

(d) *Estimar la probabilidad de que la resistencia al corte de una soldadura al azar sea menor que 420.*

$\hat{P}_{EMV} (X < 420) = P (\frac{X - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} < \frac{420 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}})$

$\hat{P}_{EMV} (X < 420) = P (Z < \frac{420 - 384,4}{18,86})$

$\hat{P}_{EMV} (X < 420) = P (Z < \frac{35,6}{18,86})$

$\hat{P}_{EMV} (X < 420) = P (Z < 1,89)$

$\hat{P}_{EMV} (X < 420) = F (1,89)$

$\hat{P}_{EMV} (X < 420) = 0,9706.$