Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 3:
Álgebra de Boole.

Ejercicio 1.

En $\mathbb{R}$, se define la operación \$ como a\$b= a - b + ab. Analizar si la operación es cerrada y conmutativa en $\mathbb{R}$.

Cerrada:

Dado que ($\mathbb{R}$, +, .) tiene estructura de Anillo, entonces, a\$b $\in \mathbb{R}$.

Conmutativa:

a\$b= a - b + ab
$\neq$
b\$a= b - a + ba.

Por lo tanto, la operación es cerrada, pero no es conmutativa.

Ejercicio 2.

Analizar si (ℕ, .) es un grupo conmutativo.

Para que (ℕ, .) sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en ℕ:

Cerrada:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da un número natural:

Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $ab \in \mathbb{N}$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $(ab)\, c= a\, (bc)$.

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número natural tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en ℕ tal que:

$a * 1= 1 * a= a$.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número natural no existe otro, único, que sumado a él dé como resultado el elemento neutro.

Conmutativa:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $ab= ba$.

Por lo tanto, (ℕ, .) no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

Ejercicio 3.

Sea H un conjunto y (P (H), ∩) el conjunto de Partes de H con la operación intersección. Analizar si (P (H), ∩) es un grupo conmutativo.

Para que (P (H), ∩) sea un grupo conmutativo, la operación ∩ debe cumplir las siguientes propiedades en P (H):

Cerrada:

Para cualquier par de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección es un elemento de P (H):

Si A, B ∈ P (H), entonces, A ∩ B ∈ P (H).

Asociativa:

Para cualquier terna de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si A, B, C ∈ P (H), entonces, (A ∩ B) ∩ C= A ∩ (B ∩ C).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único elemento de P (H) tal que realizando su intersección con cualquier otro da como resultado el mismo elemento. El elemento neutro es H, ya que existe H en P (H) tal que:

A ∩ H= H ∩ A= A.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo elemento de P (H) no existe otro, único, que realizando la intersección con él dé como resultado el elemento neutro.

Conmutativa:

Para cualquier par de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección da lo mismo en cualquier orden:

Si A, B ∈ P (H), entonces, A ∩ B= B ∩ A.

Por lo tanto, (P (H), ∩) no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

Ejercicio 4.

Demostrar que (ℝ - {0}, .) es un grupo conmutativo. Indicar por qué (ℝ, .) no es un grupo.

Para que (ℝ - {0}, .) sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en ℝ - {0}:

Cerrada:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da un número real distinto de cero:

Si a, b ∈ ℝ - {0}, entonces, ab ∈ ℝ - {0}.

Asociativa:

Para cualquier terna de números reales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ ℝ - {0}, entonces, (ab) c= a (bc).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número real distinto de cero tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en ℝ - {0} tal que:

a * 1= 1 * a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número real distinto de cero existe otro, único, que multiplicado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a ∈ ℝ - {0}, entonces, a $\frac{1}{a}$= $\frac{1}{a}$ a= 1.

Conmutativa:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b ∈ ℝ - {0}, entonces, ab= ba.

Por lo tanto, (ℝ - {0}, .) es un grupo conmutativo. Por otra parte, (ℝ, .) no es un grupo porque no se cumple la propiedad de existencia de elemento opuesto (no existe elemento opuesto para el 0).

Ejercicio 5.

Sea E= {x: x ∈ ℤ ∧ x es par}. Demostrar que (E, +, .) es un anillo.

Para que (E, +, .) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en E:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da un número entero par:

Si a, b ∈ E, entonces, a + b ∈ E.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ E, entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en E tal que:

a + 0= 0 + a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a ∈ E, entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

Conmutativa:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b ∈ E, entonces, a + b= b + a.

Para que (E, +, .) sea un anillo, por otro lado, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en E:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da un número entero par:

Si a, b ∈ E, entonces, ab ∈ E.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ E, entonces, (ab) c= a (bc).

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros pares, es posible distribuir la multiplicación respecto a la suma:

Si a, b, c ∈ E, entonces, a (b + c)= ab + ac y (b + c) a= ba + ca.

Por lo tanto, (E, +, .) es un anillo.

Ejercicio 6.

Sea ⊗, la operación definida sobre los números enteros como a ⊗ b= 2ab. Demostrar que (ℤ, +, ⊗) es un anillo.

Para que (ℤ, +, ⊗) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en ℤ:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si a, b ∈ ℤ, entonces, a + b ∈ ℤ.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ ℤ, entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en ℤ tal que:

a + 0= 0 + a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a ∈ ℤ, entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

Conmutativa:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b ∈ ℤ, entonces, a + b= b + a.

Para que (ℤ, +, ⊗) sea un anillo, por otro lado, la operación ⊗ debe cumplir las siguientes propiedades en ℤ:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de realizar la operación ⊗ da un número entero:

Si a, b $\in \mathbb{Z}$, entonces, a $\otimes$ b $\in \mathbb{Z}$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de realizar la operación $\otimes$ da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c $\in \mathbb{Z}$, entonces,

$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
$2ab \otimes c = a \otimes (2bc)$
$2 * 2ab * c = 2a * (2bc)$
$4abc = 4abc$.

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros, es posible distribuir la operación $\otimes$ respecto a la suma:

Si a, b, c $\in \mathbb{Z}$, entonces,

$a \otimes (b + c) = a \otimes b + a \otimes c$
$2a (b + c) = 2ab + 2ac$
$2ab + 2ac = 2ab + 2ac$

y

$(b + c) \otimes a = b \otimes a + c \otimes a$
$2 (b + c) a = 2ba + 2ca$
$2ba + 2ca = 2ba + 2ca$.

Por lo tanto, $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ es un anillo.

Ejercicio 7.

En el conjunto P de los números pares se definen dos operaciones, una de ellas es la suma usual y la otra (#) está definida en la forma: si x, y $\in$ P, x # y= $\frac{xy}{2}$. Demostrar que (P, +, #) tiene estructura de anillo.

Para que (P, +, #) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en P:

Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si a, b $\in$ P, entonces, a + b $\in$ P.

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c $\in$ P, entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en P tal que:

a + 0= 0 + a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a $\in$ P, entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

Conmutativa:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b $\in$ P, entonces, a + b= b + a.

Para que (P, +, #) sea un anillo, por otro lado, la operación # debe cumplir las siguientes propiedades en P:

Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de realizar la operación # da un número entero:

Si a, b ∈ P, entonces, a # b ∈ P.

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de realizar la operación # da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ P, entonces, (a # b) # c= a # (b # c)

$\frac{ab}{2}$ # c= a # $\frac{bc}{2}$

$\frac{\frac{ab}{2} * c}{2} = \frac{a * \frac{bc}{2}}{2}$

$\frac{abc}{4} = \frac{abc}{4}$.

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números pares, es posible distribuir la operación # respecto a la suma:

Si a, b, c ∈ P, entonces,

a # (b + c)= a # b + a # c

$\frac{a(b+c)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2}$

$\frac{ab+ac}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2}$

$\frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2}$

y

(b + c) # a= b # a + c # a

$\frac{(b+c)a}{2} = \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2}$

$\frac{ba+ca}{2} = \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2}$

$\frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} = \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2}$.

Por lo tanto, (P, +, #) tiene estructura de anillo.

Ejercicio 8.

Sean A, B, C elementos de un álgebra de Boole G= (F, +, ., ‘, 0, 1), indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, señalando los axiomas usados:

(a) *A + (AC)= (A + A) (A + C).*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B4) de distributividad de la suma con respecto a la multiplicación.

(b) *AB + 0= AB.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(c) *CB1= CB.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B6) de existencia de elemento neutro (1) de la multiplicación.

(d) *(AB)´ + AB= 0.*

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B7), (AB)’ + AB= 1.

(e) *CA(CA)’ + B= B.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B8) y (B5), CA(CA)’= 0 y 0 + B= B.

(f) *CA + 0= 0.*

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(g) *(AB)’ + AB + CC’= 1.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B7) y (B8), (AB)’ + AB= 1, CC’= 0, 1 + 0= 1.

Ejercicio 9.

Sea H= {a, b, c, d, e} y sean Π*= (P (H),* ∪*,* ∩*,* ^{c}*,* ∅*, H) el álgebra de Boole de partes de H. Los siguientes conjuntos son elementos de P (H): {b}, {c}, {d}, {b, c}, {c, d}, {b, d}, {b, c, d}, {b, d, e}, {b, c, d, e}. Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.*

		{b, c, d, e}
{b, c, d}		{b, d, e}
{b, c} {b, d} {c, d}		
{b} {c} {d}		{e}

Juan Menduiña

Ejercicio 10.

Sea W el conjunto formado por las clases de 3 letras proposicionales [p], [q], [r] y sus conjunciones, disyunciones y negaciones. Sea Λ*= (W,* $\vee$*,* $\wedge$*,* $\sim$*,* $\perp$*,* $\top$*) del álgebra de Boole del cálculo proposicional. Las siguientes proposiciones son elementos de W: [p* $\wedge$ *q], [q* $\wedge$ *r], [p], [q], [r], [q* $\vee$ *r]. Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.*

[q ∨ r]
[p] [q] [r]
[p ∧ q] [q ∧ r]

Ejercicio 11.

Sean B= ℤ, + la suma usual de enteros, . el producto usual de enteros y, para cada a ∈ ℤ, se define a'= -a. ¿Es H= (B, +, ., ', 0, 1) un álgebra booleana?

Para que H= (B, +, ., ', 0, 1) sea un álgebra booleana, se deben cumplir las siguientes propiedades en B. Sean x, y, z ∈ B:

(B1) $x + y= y + x$.	Se cumple.
(B2) $xy= yx$.	Se cumple.
(B3) $x (y + z)= xy + xz$.	Se cumple.
(B4) $x + yz= (x + y) (x + z)$.	Se cumple.
(B5) $x + 0= x$.	Se cumple.
(B6) $x1= x$.	Se cumple.
(B7) $x + x'= 1$.	Se cumple.
(B8) $xx'= 0$.	Se cumple.

Por lo tanto, H= (B, +, ., ', 0, 1) es un álgebra booleana.

Ejercicio 12.

Demostrar que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces, 1'= 0 y 0'= 1.

Por el axioma (B7), se cumple que:

$0 + 0' = 1$ y
$1 + 1' = 1$.

Además, por el axioma (B5), se cumple que:

$0' = 1$ y
$1' = 0$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces, $1' = 0$ y $0' = 1$.

Ejercicio 13.

(a) *Probar la Ley de De Morgan: (xy)'= x' + y'.*

Teniendo en cuenta que el complemento es único, se debe tener que:

(i) (xy) + (x' + y')= 1 y
(ii) (xy) (x' + y')= 0.

Si esto se cumple, quiere decir que (x' + y') es el complemento de (xy).

(i)

(xy) + (x' + y')= [(x'+ y') + x] [(x' + y') + y]	por axioma (B4)
(xy) + (x' + y')= [(x' + x) + y'] [(y' + y) + x']	por axioma (B1) y asociatividad
(xy) + (x' + y')= (1 + y') (1 + x')	por axioma (B7)
(xy) + (x' + y')= 1 * 1	por ley de acotación
(xy) + (x' + y')= 1.	

(ii)

(xy) (x' + y')= [x' (xy)] [y' (xy)]	por axioma (B5)
(xy) (x' + y')= [(x'x) y] [(y'y) x]	por axioma (B2) y asociatividad
(xy) (x' + y')= (0 * y) (0 * x)	por axioma (B8)
(xy) (x' + y')= 0 * 0	por ley de acotación
(xy) (x' + y')= 0.	

Por lo tanto, queda demostrado la Ley de De Morgan (xy)'= x' + y', ya que (x' + y') es el complemento de (xy).

(b) *Expresar las Leyes de De Morgan en los conjuntos y en el cálculo proposicional, con los símbolos y operaciones que corresponden en cada caso.*

Leyes de De Morgan en teoría de conjuntos:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Leyes de De Morgan en teoría de lógica proposicional:

$\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.
$\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

Ejercicio 14.

Si x, y, z, w son variables de un Álgebra de Boole, simplificar (hasta su mínima expresión) las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas:

(a) $x + xy + x (x + y)$.

$x + xy + x (x + y)= x + xy + xx + xy$	por axioma (B5)
$x + xy + x (x + y)= x + xy + x + xy$	por ley de idempotencia
$x + xy + x (x + y)= x (1 + y) + x (1 + y)$	por axiomas (B6) y (B3)
$x + xy + x (x + y)= x * 1 + x * 1$	por ley de acotación
$x + xy + x (x + y)= x + x$	por axioma (B6)
$x + xy + x (x + y)= x$.	por ley de idempotencia

(b) $x' + [(xx')']$.

$x' + [(xx')']= x' + (x' + x)$	por Ley de De Morgan
$x' + [(xx')']= x' + 1$	por (B7)
$x' + [(xx')']= x'$.	por ley de acotación

(c) $x (y + x')'$.

$x (y + x')'= x (y'x)$	por Ley de De Morgan
$x (y + x')'= xxy'$	por asociatividad
$x (y + x')'= xy'$.	por ley de idempotencia

(d) $[x (y'y)] + [y (x + x')]$.

$[x (y'y)] + [y (x + x')]= (x * 0) + (y * 1)$	por axiomas (B8) y (B7)
$[x (y'y)] + [y (x + x')]= 0 + y$	por ley de acotación y axioma (B6)
$[x (y'y)] + [y (x + x')]= y$.	por axioma (B5).

(e) $y'xy + y'x + ywx' + yww$.

$y'xy + y'x + ywx' + yww= y'yx + y'x + ywx' + yw$	por asociatividad y ley de idempotencia
$y'xy + y'x + ywx' + yww= 0 * x + y'x + ywx' + yw$	por axioma (B8)
$y'xy + y'x + ywx' + yww= 0 + y'x + ywx' + yw$	por ley de acotación
$y'xy + y'x + ywx' + yww= y'x + ywx' + yw$	
$y'xy + y'x + ywx' + yww= y'x + yw (x' + 1)$	por axiomas (B6) y (B3)
$y'xy + y'x + ywx' + yww= y'x + yw * 1$	por ley de acotación

y’xy + y’x + ywx’ + yww= y’x + yw. por axioma (B6)

(f) *[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’].*

[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= [(x’y’) + z’] [z’ + (x’yz)] por Leyes de De Morgan e involución
[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= (z’ + x’y’) (z’ + x’yz) por axioma (B1)
[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’ + (x’y’) (x’yz) por axioma (B4)
[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’ + [(x’x’) (y’y) z] por axioma (B2)
[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’ + (x’ * 0 * z) por ley de idempotencia y por axioma (B8)
[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’ + 0 por ley de acotación
[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’. por axioma (B5)

Ejercicio 15.

Si x, y, z son variables de un Álgebra de Boole, demostrar que:

(a) *x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz'= z + xy.*

x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz'= x'z (y' + y) + xy'z + xy (z + z')
x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz'= x'z * 1 + xy'z + xy * 1
x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz'= x'z + xy'z + xy
x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz'= z (x' + xy') + xy.

(b) *x + (y + 0)' + y'z= x + y'.*

x + (y + 0)' + y'z= x + y' + y'z
x + (y + 0)' + y'z= x + y' (1 + z)
x + (y + 0)' + y'z= x + y' * 1
x + (y + 0)' + y'z= x + y'.

(c) *x + y' + (xy + 0)'= 1.*

x + y' + (xy + 0)'= x + y' + (xy + 0)'
x + y' + (xy + 0)'= x + y' + (xy)'
x + y' + (xy + 0)'= x + y' + x' + y'
x + y' + (xy + 0)'= (x + x') + (y' + y')
x + y' + (xy + 0)'= 1 + y'
x + y' + (xy + 0)'= 1.

(d) *x + (y + 1)' + xy= x.*

x + (y + 1)' + xy= x + y' * 0 + xy
x + (y + 1)' + xy= x + 0 + xy
x + (y + 1)' + xy= x + xy
x + (y + 1)' + xy= x (1 + y)
x + (y + 1)' + xy= x * 1
x + (y + 1)' + xy= x.

(e) *[(zx)' zx]' + xy + xy'= 1.*

[(zx)' zx]' + xy + xy'= [(zx) + (zx)'] + x (y + y')
[(zx)' zx]' + xy + xy'= [(zx) + (z' + x')] + x * 1
[(zx)' zx]' + xy + xy'= zx + (z' + x') + x

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x (1 + z)
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x * 1
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= z’ + (x’ + x)
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= z’ + 1
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= 1.

(f) *x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0.*

x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= x (yx’ + yy’)
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= x (yx’ + 0)
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= xy’x’
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= xx’y
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0 * y
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0.

Ejercicio 16.

(a) *Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:*

A	B	C	F (A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

F (A, B, C)= A'B'C' + AB'C' + ABC'.

(b) *Simplificar la expresión hallada.*

F (A, B, C)= A'B'C' + AB'C' + ABC'
F (A, B, C)= (A'B' + AB' + AB) C'

F (A, B, C)= [(A' + A) B' + AB] C'
F (A, B, C)= (1 * B' + AB) C'
F (A, B, C)= (B' + AB) C'.

F (A, B, C)= [A'B' + A (B' + B)] C'
F (A, B, C)= (A'B' + A * 1) C'
F (A, B, C)= (A'B' + A) C'.

Ejercicio 17.

(a) *Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:*

A	B	C	D	F (A, B, C, D)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

F (A, B, C, D)= A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + ABC'D + ABCD.

(b) *Simplificar la expresión hallada.*

F (A, B, C, D)= A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + ABC'D + ABCD
F (A, B, C, D)= A'B'D' (C' + C) + A'BC' (D' + D) + A'BC (D' + D) + ABD (C' + C)
F (A, B, C, D)= A'B'D' * 1 + A'BC' * 1 + A'BC * 1 + ABD * 1
F (A, B, C, D)= A'B'D' + A'BC' + A'BC + ABD
F (A, B, C, D)= A'B'D' + A'B (C' + C) + ABD
F (A, B, C, D)= A'B'D' + A'B * 1 + ABD
F (A, B, C, D)= A'B'D' + A'B + ABD

F (A, B, C, D)= A' (B'D' + B) + ABD.

F (A, B, C, D)= A'B'D' + B (A' + AD).

Ejercicio 18.

Sea f: $B_1 \longrightarrow B_2$ un isomorfismo de álgebras booleanas. Si se llama 0_1 y 0_2 al 0 de B_1 y B_2, respectivamente, y 1_1 y 1_2 al 1 de B_1 y B_2, respectivamente, demostrar que f (0_1)= 0_2 y f (1_1)= 1_2.

Para cualquier elemento b de B_1, b + 0_1= b. Como f es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que f (b + 0_1)= f (b) + f (0_1). Pero, debido a que 0_2 es el elemento identidad aditivo en B_2, f (b + 0_1)= f (b) + 0_2= f (b), lo que implica que f (0_1)= 0_2. Por lo tanto, queda demostrado que f (0_1)= 0_2.

Para cualquier elemento b de B_1, b * 1_1= b. Como f es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que f (b * 1_1)= f (b) * f (1_1). Pero, debido a que 1_2 es el elemento identidad multiplicativo en B_2, f (b * 1_1)= f (b) * 1_2= f (b), lo que implica que f (1_1)= 1_2. Por lo tanto, queda demostrado que f (1_1)= 1_2.

Ejercicio 19.

(a) *Hallar un isomorfismo entre Ω= {B^2, ∨, ∧, ‘, (0, 0), (1, 1)} y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.*

Para encontrar un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva f que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto A= {a, b} y se considera el álgebra de Boole de partes de A, denotada por P (A). Entonces, se tiene:

- B^2 representa el conjunto de subconjuntos de A, es decir, B^2= P (A).
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto A se corresponde con su complemento relativo en A, es decir, A’= {x ∈ A: x ∉ A}.
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función f: Ω ⟶ P (A) como sigue:

- Para cada par ordenado (0, 0) en B^2, f lo mapea al conjunto vacío ∅ en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 1) en B^2, f lo mapea al conjunto A en P (A).
- Para cada par ordenado (0, 1) en B^2, f lo mapea al conjunto {b} en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 0) en B^2, f lo mapea al conjunto {a} en P (A).

Se puede verificar que f es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función f es inyectiva porque cada par ordenado en Ω se mapea a un único subconjunto en P (A) y f es suryectiva porque todo subconjunto de A se puede representar como un par ordenado en Ω.
- La función f preserva la disyunción, ya que f ((x_1, y_1) ∨ (x_2, y_2))= f ((1, 1)) si y sólo si (x_1, y_1)= (1, 1) o (x_2, y_2)= (1, 1), lo que implica que f ((x_1, y_1) ∨ (x_2, y_2))= A si y sólo si f ((x_1, y_1))= A o f ((x_2, y_2))= A.
- La función f preserva la conjunción, ya que f ((x_1, y_1) ∧ (x_2, y_2))= f ((1, 1)) si y sólo si (x_1, y_1)= (1, 1) y (x_2, y_2)= (1, 1), lo que implica que f ((x_1, y_1) ∧ (x_2, y_2))= A si y sólo si f ((x_1, y_1))= A y f ((x_2, y_2))= A.
- La función f preserva el complemento, ya que f ((x, y)’)= f ((1, 1)) si y sólo si (x, y)’= (1, 1), lo que implica que f ((x, y)’)= A si y sólo si f ((x, y))= ∅.
- La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si (x_1, y_1) ≤ (x_2, y_2), entonces f ((x_1, y_1)) ⊆ f ((x_2, y_2)).

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de A (P (A)).

Diagrama de Hasse de Ω:

(1, 1)
(1, 0) (0, 1)
(0, 0)

<u>Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:</u>

A
{a} {b}
∅

(b) *Hallar un isomorfismo entre Ω= {B^3, ∨, ∧, ', (0, 0, 0), (1, 1, 1)} y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.*

Para encontrar un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva f que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto A= {a, b, c} y se considera el álgebra de Boole de partes de A, denotada por P (A). Entonces, se tiene:

- B^3 representa el conjunto de subconjuntos de A, es decir, B^3= P (A).
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto A se corresponde con su complemento relativo en A, es decir, A'= {x ∈ A: x ∉ A}.
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función f: Ω ⟶ P (A) como sigue:

- Para cada par ordenado (0, 0, 0) en B^3, f lo mapea al conjunto vacío ∅ en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 1, 1) en B^3, f lo mapea al conjunto A en P (A).
- Para cada par ordenado (0, 0, 1) en B^3, f lo mapea al conjunto {c} en P (A).
- Para cada par ordenado (0, 1, 0) en B^3, f lo mapea al conjunto {b} en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 0, 0) en B^3, f lo mapea al conjunto {a} en P (A).
- Para cada par ordenado (0, 1, 1) en B^3, f lo mapea al conjunto {b, c} en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 0, 1) en B^3, f lo mapea al conjunto {a, c} en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 1, 0) en B^3, f lo mapea al conjunto {a, b} en P (A).

Se puede verificar que f es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función f es inyectiva porque cada par ordenado en Ω se mapea a un único subconjunto en P (A) y f es suryectiva porque todo subconjunto de A se puede representar como un par ordenado en Ω.

- La función f preserva la disyunción, ya que f ((x_1, y_1, z_1) ∨ (x_2, y_2, z_2))= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (x_1, y_1, z_1)= (1, 1, 1) o (x_2, y_2, z_2)= (1, 1, 1), lo que implica que f ((x_1, y_1, z_1) ∨ (x_2, y_2, z_2))= A si y sólo si f ((x_1, y_1, z_1))= A o f ((x_2, y_2, z_2))= A.
- La función f preserva la conjunción, ya que f ((x_1, y_1, z_1) ∧ (x_2, y_2, z_2))= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (x_1, y_1, z_1)= (1, 1, 1) y (x_2, y_2, z_2)= (1, 1, 1), lo que implica que f ((x_1, y_1, z_1) ∧ (x_2, y_2, z_2))= A si y sólo si f ((x_1, y_1, z_1))= A y f ((x_2, y_2, z_2))= A.
- La función f preserva el complemento, ya que f ((x, y, z)')= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (x, y, z)'= (1, 1, 1), lo que implica que f ((x, y, z)')= A si y sólo si f ((x, y, z))= ∅.
- La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si (x_1, y_1, z_1) ≤ (x_2, y_2, z_2), entonces f ((x_1, y_1, z_1)) ⊆ f ((x_2, y_2, z_2)).

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de A (P (A)).

Diagrama de Hasse de Ω:

(1, 1, 1)
(1, 1, 0) (1, 0, 1) (0, 1, 1)
(1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1)
(0, 0, 0)

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

A
{a, b} {a, c} {b, c}
{a} {b} {c}
∅