

Relaciones entre conjuntos

Una relación es una estructura discreta utilizada en matemáticas para representar las relaciones entre elementos de dos o más conjuntos.

En este apunte definiremos las relaciones n -arias pero estudiaremos con más detalle las relaciones binarias (de éstas pueden extenderse varias nociones a las primeras).

Además veremos algunas propiedades de las relaciones binarias y dos tipos especiales de ellas que más tarde nos servirán para estudiar algunas aplicaciones.

Definición 0.1. Una relación n -aria sobre A_1, \dots, A_n es un subconjunto del producto cartesiano $A_1 \times \dots \times A_n$

Si R es una relación n -aria sobre A_1, \dots, A_n se llama **i -ésima proyección** Π_i a la aplicación de R en A_i que a cada n -upla de R le asigna su i -ésima coordenada.

Ejemplo 0.2. Como todo conjunto, las relaciones están dadas por extensión, dando todos las tuplas que la componen, o por comprensión dando la propiedad que la caracteriza.

- $R = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a < b < c\}$ es una relación 3-aria (o ternaria) definida en el conjunto de los números reales

- Supongamos los siguientes conjuntos:

$$A = \{\text{alumnos de mate 4}\} = \{\text{Ana, Pedro, Juan, Lucía, Felipe,}\}$$

$D = \{\text{docentes de mate 4}\} = \{\text{Antonio, Diego, Eli, Mari, Franco}\}$

$E = \{\text{evaluaciones de mate 4}\} = \{\text{parcial1, parcial2, parcial3, parcial4, ...}\}$

$N = \{\text{notas}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Podemos definir una relación 4-aria (o cuaternaria) sobre los conjuntos anteriores donde cada tupla muestre a los alumnos con la nota que alcanzó en determinado examen y el docente que corrigió.

$R = \{(Ana, \text{parcial1}, 9, Antonio); (Juan, \text{parcial2}, 8, Eli); (Lucia, \text{parcial1}, Mari, 10); \dots$
 $\dots (Felipe, \text{parcial2}, Diego, 7); (Felipe, \text{parcial3}, 8, Eli); \dots\} \subset A \times E \times N \times D$

Una aplicación de las relaciones n-arias es el análisis de las bases de datos (específicamente las bases de datos relacionales).

Existe una analogía entre *Relación* (conjunto matemático) y *Tabla* .

Los conceptos básicos de una base de datos relacional son:

- **Tablas:** son las relaciones (que representan las bases de datos).
- **Registros:** son las n-tuplas
- **Campos:** son las entradas de las n-tuplas (elementos de los conjuntos).
- **Atributos:** son las columnas de cada tabla

1 Relaciones Binarias

Las relaciones 2-arias se llaman también **binarias**, entonces:

Dados dos conjuntos no vacíos A y B , una relación binaria definida entre los mismos es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, caracterizado por alguna propiedad común a sus elementos

$$R = \{(x, y) / (x, y) \in A \times B\} \subset A \times B$$

Muchas veces cuando $(x, y) \in R$ escribiremos xRy y diremos que x está relacionado por R con y .

Ejemplos 1.1. 1. Si $A = \{x/x \text{ es vocal}\}$ y $B = \{\text{brisa, sol, mar, nube}\}$

y la relación en $A \times B$ viene definida por: xRy si y sólo si x es letra de y .

Entonces, la relación definida por extensión quedaría:

$$R = \{(i, \text{brisa}); (a, \text{brisa}); (a, \text{mar}); (o, \text{sol}); (u, \text{nube}); (e, \text{nube})\}$$

2. Si $A = \{\text{enteros pares entre } -4 \text{ y } 10 \text{ inclusive}\}$, $B = \mathbb{Z}$ y la relación viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x

Entonces, la relación definida por extensión quedaría:

$$R = \{(-4, 16); (-2, 4); (0, 0); (2, 4); (4, 16); (6, 36); (8, 64); (10, 100)\}$$

- **Dominio e Imagen de una Relación**

Sea R una relación de A en B .

Se llama **dominio** de R al conjunto de elementos x de A tales que $(x, y) \in R$

$$Dom_R = \{x \in A : (x, y) \in R\}$$

Se llama **imagen** de R al conjunto de elementos y de B tales que $(x, y) \in R$

$$Im_R = \{y \in B : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo 1.2. Dados los conjuntos $A = \{a, e, i\}$ y $B = \{sol, nube, cielo\}$ y la relación R en $A \times B$ definida por: xRy si y sólo si x es letra de y , esto es: $R = \{(e, nube), (i, cielo)\}$

Luego,

$$Dom(R) = \{e, i\} \subset A$$

$$Im(R) = \{nube, cielo\} \subset B$$

- **Relación Inversa**

Sea R una relación de A en B . Se llama **relación inversa** de R al subconjunto de $B \times A$ definido por

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo 1.3. Sean $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-27, -16, -8, -2, -1, 0, 1, 2, 8, 16, 27\}$, y sea R de A en B definida por : xRy si y sólo si x es el cubo de y ; dada por extensión por:

$$R = \{(-8, -2); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (8, 2); (27, 3)\}$$

$$\text{Entonces, } R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} = \{(-2, -8); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (2, 8); (3, 27)\}$$

es decir, $yR^{-1}x$ si y sólo si y es la raíz cúbica de x

- **Composición**

Dadas las relaciones R en $A \times B$ y S en $B \times C$ se puede construir la relación composición

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subset A \times C$$

Ejemplo 1.4. Sean los siguientes subconjuntos de enteros: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $C = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Sea R de A en B definida por : xRy si y sólo si x es el opuesto de y , y escrita por extensión: $R = \{(-2, 2); (-1, 1); (0, 0); (1, -1); (2, -2)\}$

Sea S de B en C definida por : xRy si y sólo si y es el doble de x , y escrita por extensión: $S = \{(-2, -4); (-1, -2); (0, 0); (1, 2); (2, 4)\}$

Ahora busquemos la relación compuesta. Observemos que podremos encontrar SoR de A en C pero no RoS .

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} = \{(-2, 4); (-1, 2); (0, 0); (1, -2); (2, -4)\}$$

Ejemplo 1.5. Sean A un conjunto de alumnos, B un banco de preguntas de un formulario y $C = \{10, 15, 20, 30\}$.

Sea R de A en B dada por: aRb si y sólo si a contestó correctamente la pregunta b y sea S la relación de B en C : bSc si y sólo si c es el puntaje asignado a la pregunta b

Entonces la relación compuesta RS está definida de la siguiente forma:

$a SoR b$ si y sólo si a contestó correctamente una pregunta con puntaje asignado c

La matriz de una relación

Es posible representar una relación entre dos conjuntos finitos con una matriz.

Sea R una relación entre $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, la matriz de representación M_R de la relación está dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_i, b_j) \in R \\ 0 & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ejemplos 1.6. • Sea $R = \{(1, r); (2, s); (3, r)\}$ una relación entre $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$
Entonces la matriz de la relación será:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos considerar que existe una relación R entre algún conjunto $A = \{a, b, c\}$ y otro conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $R = \{(a, 1); (a, 4); (b, 2); (b, 3); (c, 1); (c, 3)\}$

2 Relaciones Binarias en un conjunto

Si una relación R es tal que $R \subseteq A \times A$, se dice que está definida en el conjunto A (o que R es una relación sobre A)

En este tipo de relaciones se pueden definir las siguientes propiedades:

- **Reflexividad:** R será *reflexiva* si para todo $x \in A$ vale que xRx
- **Simetría:** R será *simétrica* si para todo x, y en A vale que xRy implica yRx
- **Antisimetría:** R será *antisimétrica* si para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
- **Transitividad:** R será *transitiva* si para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz

Obs: Vemos que las propiedades están definidas por un condicional entonces para probarlas debemos mirar bien que *si se cumple que el antecedente es Verdadero tiene que ser Verdadero también el consecuente para que todo el condicional sea Verdadero*, es decir los únicos casos **falsos** son los de antecedente Verdadero y consecuente Falso. Recordemos que de igual manera, *antecedente Falso hace que el condicional sea Verdadero, no importa cual sea el valor de verdad del consecuente*, entonces si no encontramos un par no tenemos que buscar su inverso u otro para componer para probar simetría, antisimetría o transnitividad.

Ejemplos 2.1. 1. Sea $A = \{a, b, c\}$

- $R = \{(a, b); (a, a); (b, b)\}$ es transitiva pero no simétrica ni reflexiva. También es antisimétrica.

Como no todos los elementos de A están relacionados consigo mismo R no puede ser reflexiva. Tampoco es simétrica porque vemos que tenemos el par (a, b) pero no está el (b, a) . Como todos los pares que se pueden componer tienen en el mismo conjunto R su par compuesto decimos que es transitiva. Cada par que tiene su inverso cumple que su primer coordenada es igual a la segunda.

- $R = \{(a, a); (b, b); (c, c)\}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva

Esta relación es bastante trivial, es la Identidad de A que ya antes mencionamos (Δ_A). Se ve fácilmente que cumple con todas las propiedades (claramente todos los elementos se relacionan consigo mismo; como la primer coordenada es igual a la segunda en todos los casos, tenemos el par inverso, y por lo tanto será simétrica. La transitividad y antisimetría se da al no cumplirse (o cumplirse de manera trivial al relacionar cada par con él mismo) la conjunción del antecedente.

- $R = \{(a, b); (b, c); (a, c); (c, b); (a, a); (b, b); (c, c)\}$ es reflexiva, transitiva pero no es simétrica ni antisimétrica.

Como para cada elemento $x \in A$ encontramos el par (x, x) entonces es reflexiva. Si miramos cada par que puede componerse vemos que está también el compuesto (por ejemplo, (a, b) y (b, c) se pueden componer y nos da (a, c) que está; lo mismo con (a, c) y (c, b) que da (a, b) , o (b, c) y (c, b) que devuelven (c, c) y (b, b) que están en R).

Vemos que no es simétrica ya que tenemos al par (a, b) pero no a su inverso el par (b, a) (no importa que otros pares tengan a su inverso, tiene que darse para todos).

Tampoco es antisimétrica ya que está el par (b, c) y el par (c, b) pero $b \neq c$.

Éste es un ejemplo de una relación que no es ni simétrica ni antisimétrica, mostrando que una propiedad no es “opuesta” a la otra.

2. La relación $x \leq y$ en el conjunto de los números naturales es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Obviamente no es simétrica.

Observemos que si el “menor” es estricto la relación no sería reflexiva ni antisimétrica.

3. En el conjunto de las rectas del plano, la relación L es paralela a M es reflexiva, simétrica y transitiva (podemos pensarlo geométricamente o recordar que dos rectas del plano son paralelas si tienen igual pendiente).

4. La relación de “ X es correlativa con Y ”, entre las materias de un plan de estudio (de una carrera en particular), es transitiva

2.1 Relaciones de Orden

Definición 2.2. Una relación binaria R definida sobre un conjunto A es un **preorden** en A si es reflexiva y transitiva.

Y es una **relación de orden** (ó un **orden** sobre A) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Muchas veces diremos que la relación ordena S y la notaremos por \leq (no confundir este símbolo con el orden de los números reales, el orden de los reales es un ejemplo más de orden).

Obs: Si bien nosotros diremos que una relación con estas propiedades es un orden muchas veces vamos a encontrar que a este tipo de relaciones se las denomina **orden parcial**. Un orden parcial refiere a una relación donde hay elementos que no son comparables.

Si cada par de elementos en un conjunto es comparable diremos que el orden es **total o lineal**.

Con esto se pretende formalizar la idea intuitiva de orden de un conjunto.

Ejemplos 2.3. Varios conjuntos con los que estamos familiarizados o estudiamos antes en este apunte son conjuntos ordenados:

- Dado \mathbb{R} , el conjunto de los números reales, y su orden usual, se puede ver fácilmente que se cumplen las tres propiedades para que sea un conjunto ordenado.
- La relación sobre un conjunto A llamada **relación Identidad** y denotada por Δ_A es una relación de orden.
- Dado un conjunto S , sea $P(S)$ el conjunto de “Partes de S ”, o sea, el conjunto de todos los subconjuntos de S .

La inclusión de conjuntos \subseteq en $P(S)$ es una relación de orden (todo subconjunto de S está contenido o es igual a si mismo, entonces tenemos la reflexividad. Si vale la doble inclusión entre conjuntos entonces los dos conjuntos son iguales y la relación es antisimétrica. Es fácil ver que también vale la propiedad transitiva de la inclusión entre subconjuntos.

Si pensamos en la inclusión estricta entonces la relación sería un preorden.

- Sea $B = \{B, \wedge, \vee, ', o, 1\}$ un algebra de Boole y sea x la relación dada por $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge b = a$ es un orden en B .
- Dado el conjunto de todos los alumnos de la facultad podemos ordenarlo por el número de legajo de cada alumno.
- Sea A un conjunto de personas y sea R la relación sobre A dada por aRb si y sólo si la estatura de a es menor a la estatura de b
 R es un preorden y sería un orden sólo si entre todas las personas de A no hay personas con la misma estatura.

Ejemplo 2.4. La divisibilidad es una relación de orden en \mathbb{N}

Recordemos que a **divide** a b , y se escribe $a|b$ si existe un entero c tal que $b = ac$. Ahora probemos que esta relación entre números naturales cumple las tres propiedades necesarias para ser una relación de orden.

- para todo $n \in \mathbb{N}$, $n|n$ ya que existe 1 tal que $n = n \cdot 1$; por lo tanto la relación es reflexiva.
- para todo par $n, m \in \mathbb{N}$, si $n|m$ y $m|n$ entonces $n = m$ ya que $n|m$ implica que existe k tal que $m = nk$; por otro lado, si $m|n$ existe h tal que $n = mh$. Luego, $n = mh = (nk)h = n(kh)$ y como son todos números naturales $kh = 1$ y $n = m$. De esta manera probamos que la relación es antisimétrica.
- dados tres números naturales cualesquiera, n, m, r tales que $n|m$ y $m|r$, entonces probaremos que $n|r$ para demostrar que la relación es transitiva.

Como $n|m$ existe k tal que $m = nk$ y como $m|r$ existe h tal que $r = mh$;

luego, $r = mh = (nk)h = n(hk)$ entonces existe un natural $t = hk$ tal que $r = nt$ y por lo tanto $n|r$ como queríamos probar.

Observemos que si en lugar del conjunto \mathbb{N} de los números naturales tomamos el conjunto de los enteros, \mathbb{Z} , no se cumplirá la propiedad de antisimetría
 (ya que $n|-n$ y $-n|n$ PERO $n \neq -n$).

La divisibilidad en \mathbb{Z} no es un orden (es un preorden)

Observemos que mientras en algunos de los ejemplos anteriores todos los elementos están relacionados (dados dos números reales cualesquiera x e y , siempre se da que : $x \leq y$, $x = y$ ó $y \leq x$, todas las personas pueden compararse por su altura, etc), en otros ejemplos hay elementos que no están relacionados (podemos encontrar subconjuntos E y H de S que tengan intersección vacía o que tengan elementos en común pero no se dé ninguna de las dos inclusiones $E \not\subset H$ y $H \not\subset E$. Hay naturales m y n tales que no se cumple $m|n$ ni $n|m$).

Esta diferencia define nuevos tipos de conjuntos ordenados:

Definición 2.5. Dado un conjunto ordenado (A, R) se dice que dos elementos a, b del conjunto son **comparables** si se verifica que aRb ó bRa , en caso contrario se dice que son **incomparables**.

Si todos los elementos de A son comparables dos a dos entonces se dice que A está **totalmente ordenado** y que R es un **orden total** en A . Si existen elementos incomparables se dirá que R es un **orden parcial** en A .

Sabemos que los números reales están ordenados por su orden usual \leq , es igual con los naturales, enteros y racionales (con el mismo orden usual). Además vimos que los naturales y los enteros pueden ser ordenados (o parcialmente ordenados) por la relación *divide*. Pero, ¿qué pasa con los números complejos? hay alguna forma de ordenarlos?

Si pensamos a los complejos como pares ordenados y definimos una relación entre pares (*serían pares de pares...*) podríamos ver que tipo de orden hay entre ellos.

No sólo podemos pensar en el producto de dos relaciones si no de n relaciones:

Definición 2.6. Sean $(A_1, R_1), (A_2, R_2) \dots (A_n, R_n)$ una familia de conjuntos ordenados.

- Se llama relación **orden producto** (estándar) a la relación $R \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ definida por: $(x_1, x_2, \dots, x_n)R(y_1, y_2, \dots, y_n)$ si y sólo si $x_1R_1y_1, x_2R_2y_2 \dots x_nR_ny_n$ para todo $i = 1 \dots n$
- Se llama relación **producto lexicográfico** a la relación $L \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ definida por: $(x_1, x_2, \dots, x_n)L(y_1, y_2, \dots, y_n)$ si y sólo si $x_i = y_i$ para todo $i = 1 \dots n$, ó $x_jR_jy_j$ siendo j el primer índice tal que $x_j \neq y_j$

2.1.1 Conjuntos Ordenados

Un conjunto A junto con un orden (parcial/total) R es un **conjunto ordenado**. (*conjunto parcialmente/totalmente ordenado*).

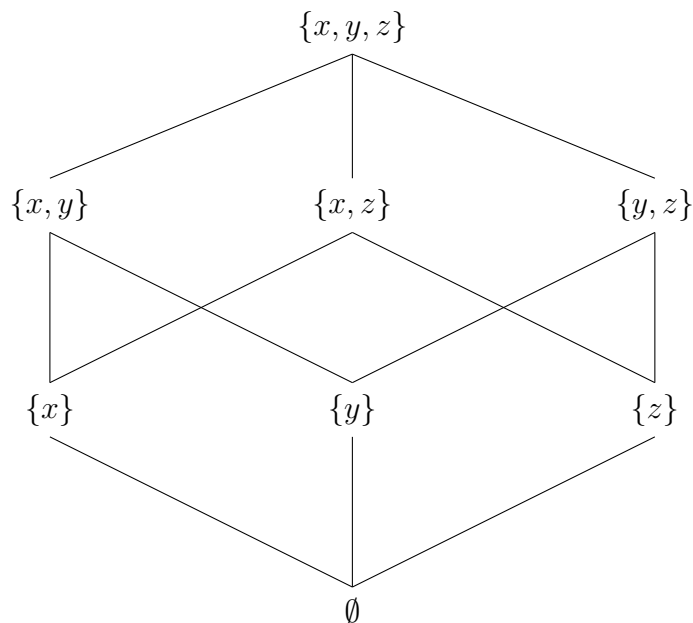
Generalmente se dice que R ordena al conjunto A y se denota (A, R) .

Diagramas de Hasse

Un diagrama de Hasse es una *versión simplificada* de un digrafo. Es una herramienta muy útil ya que describe completamente el orden asociado.

Ejemplo 2.7. Antes vimos que la inclusión de conjuntos \subseteq en $P(S)$ es una relación de orden para un conjunto S y su conjunto de “Partes de S ”, $P(S)$, o sea, el conjunto de todos los subconjuntos de S .

Veamos el diagrama de Hasse para un ejemplo particular de $S = \{x, y, z\}$.



2.1.2 Elementos extremos de conjuntos (parcialmente) ordenados

Algunos elementos de un conjunto ordenado tienen especial importancia para muchas propiedades y aplicaciones de los conjuntos ordenados.

Definición 2.8. Sea $(A, <)$ un conjunto ordenado cualquiera.

Diremos que un elemento $a \in A$ es un **elemento máximo de A** si $x < a$ para todo $x \in A$. De manera dual, un elemento $a \in A$ es un **elemento mínimo de A** si $a < x$ para todo $x \in A$.

Definición 2.9. Sean $(A, <)$ un conjunto ordenado cualquiera y B un subconjunto de A .

- Un elemento $a \in A$ es una **cota superior de B** si $b < a$ para todo $b \in B$
- Un elemento $a \in A$ es una **cota inferior de B** si $a < b$ para todo $b \in B$.
- Un elemento $a \in A$ se llama **supremo** de B (mínima cota superior de B) si a es cota superior de B y $a < c$ para toda c cota superior de B
- Un elemento $a \in A$ se llama **ínfimo** de B (máxima cota inferior de B) si a es cota inferior de B y $c < a$ para toda c cota inferior de B

Definición 2.10. Un **reticulado** es un conjunto ordenado $(L, <)$ tal que cada subconjunto $\{a, b\}$ de dos elementos tiene supremo e ínfimo.

2.2 Relaciones de Equivalencia

Definición 2.11. Diremos que una relación R definida sobre un conjunto A reflexiva, simétrica y transitiva es una **relación de equivalencia** (ó que es un equivalencia en A)

Muchas veces notaremos a una relación de equivalencia R por \sim , \approx ó \equiv

La idea de equivalencia sobre un conjunto permite establecer una relación entre los elementos del conjunto que comparten cierta característica o propiedad. Esto permitirá reagrupar dichos elementos.

Ejemplos 2.12. • La igualdad matemática (ya sean conjuntos numéricos o conjuntos en general) es trivialmente una relación de equivalencia.

- La relación sobre un conjunto A llamada **relación Identidad** y denotada por Δ_A es una relación de equivalencia.
- Pensemos en los ángulos (esto ya lo usamos cuando trabajamos con los argumentos de los números complejos en forma trigonométrica, polar o exponencial!!).

Decimos que $\alpha \sim \beta$ si y sólo si existe un entero k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$

Claramente la relación es reflexiva ya que para $k = 0$ todo ángulo está relacionado con sí mismo.

Supongamos que $\alpha \sim \beta$ entonces existe k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$, luego $\beta = \alpha - 2k\pi = \alpha + 2(-k)\pi$, y por lo tanto $\beta \sim \alpha$ mostrando que la relación es simétrica.

Por último probemos que \sim es transitiva. Si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \delta$ entonces veremos que $\alpha \sim \delta$

$\alpha \sim \beta$ entonces existe k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$

$\beta \sim \delta$ entonces existe h tal que $\beta = \delta + 2h\pi$

por lo tanto, $\alpha = \beta + 2k\pi = (\delta + 2h\pi) + 2k\pi = \delta + 2(h+k)\pi$ con $h+k$ entero, obteniendo que $\alpha \sim \delta$

- Antes vimos que en el conjunto de las rectas del plano, la relación L es paralela a M es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto esta relación es una Equivalencia.
- Sea A el conjunto de los alumnos de Mate 4, y sea R la relación definida por \mathbf{aRb} si y sólo si el apellido de \mathbf{a} comienza con la misma letra que el apellido de \mathbf{b}
- Sea E un conjunto de conjuntos.

La relación $X \sim Y$ si y sólo si existe una biyección de X en Y es una equivalencia en E . A esta relación se la llama de **coordinabilidad**, y los conjuntos X e Y se dicen **coordinables**. (puede que recuerden (o estudien más adelante) esta relación en otras materias de la carrera)

Clases de Equivalencia, Conjunto Cociente y Particiones

Definición 2.13. Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $a \in A$ se denominará **clase de equivalencia de a por R** y se denotará \bar{a} (ó $R(a)$) al conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a por R . Es decir, $\bar{a} = \{x \in A : xRa\}$

Cualquier elemento de \bar{a} se llama **representante** de la clase, y en particular, como la relación es reflexiva se da que $a \in \bar{a}$, luego a es representante de la clase \bar{a} para todo $a \in A$.

Ejemplos 2.14. • La relación de equivalencia L es paralela a M en el conjunto de las rectas del plano, podemos tomar como representante de cada **clase** a la recta que pasa por el origen

- Cuando se trabaja con números racionales sabemos que una propiedad que tienen las fracciones es la siguiente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ac = bd$, entonces por lo general uno toma o “se queda” con la fracción irreducible que la cumpla.

Esa fracción irreducible será la representante de la clase bajo la relación de equivalencia dada por esa propiedad característica.

- En el ejemplo de equivalencia entre ángulos podemos tomar como representante de cada clase a los ángulos dentro del intervalo $[0, 2\pi)$ (como hacíamos con los argumentos de los complejos).

Definición 2.15. Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de elementos del conjunto A respecto de la relación R se lo llamará **conjunto cociente de A respecto de la relación R** y se lo denotará: $A/R = \{\bar{a} : a \in A\}$

Definición 2.16. Una **partición** de un conjunto A es un conjunto de partes no vacías de A , disjuntas dos a dos y tales que su unión coincide con A .

Esto es, dado A un conjunto, y $P = \{A_i\}$ con $i \in I$ (una familia de subconjuntos de A). Se dice que P es una partición de A si y sólo si se verifican:

- Si $A_i \in P$ entonces $A_i \neq \emptyset$
- Si $A_i, A_j \in P$ entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Es decir, una división de un conjunto no vacío en “partes” separadas y no vacías representadas mediante una colección o familia de subconjuntos de dicho conjunto que lo recubren.

Notación: Si bien estamos usando la P para referirnos a las particiones, en general una partición suele anotarse con la letra π

Ejemplos 2.17. • El conjunto de los números naturales puede ser “particionado” en pares e impares

- El conjunto de alumnos de mate4 puede dividirse en los que aprobaron la entrega 1, los que deben reentregarla y los que no lo hicieron.

Sea P una partición de un conjunto A .

Definiremos sobre A la siguiente relación R : aRb si y sólo si existe $X \in P$ tal que $a, b \in X$

Claramente R es reflexiva ya que al ser P una partición de A todo elemento del conjunto pertenece a algún subconjunto de la familia P .

Es inmediata la simetría de R (si existe $X \in P$ tal que $a, b \in X$, existirá (ese mismo) X tal que $b, a \in X$).

Sólo falta comprobar la transitividad de R para poder afirmar que es una relación de equivalencia: queremos probar que si dados $a, b, c \in A$ tales que aRb y bRc entonces aRc .

Si aRb y bRc entonces existen $X, Y \in P$ tales que $a, b \in X$ y $b, c \in Y$, luego $b \in X \cap Y$ pero como $X, Y \in P$ pero como P es una partición sus elementos tienen intersección vacía, con lo cual o no existe b o $X = Y$ y por lo tanto $a, c \in Y = X$ y aRc .

La relación R definida de esta forma es llamada **equivalencia asociada a la partición P**

Ejemplo 2.18. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $P = \{\{a\}; \{b, e\}; \{c, d, f\}\}$ una partición de A .

La relación asociada a la partición está dada por

$$R = \{(a, a); (b, b); (e, e); (b, e); (e, b); (c, c); (d, d); (f, f); (c, d); (d, c); (c, f); (f, c); (d, f); (f, d)\}$$

y claramente vemos que es de equivalencia.

Ahora veamos unos resultados que nos muestran una propiedad dual para las relaciones de equivalencias y las particiones.

Lema 2.19. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A , entonces para todos par a, b de elementos de A vale que $\bar{a} = \bar{b}$ si y sólo si aRb

Supongamos que $\bar{a} = \bar{b}$, como R es reflexiva aRa entonces $a \in \bar{a} = \bar{b}$, luego $a \in \bar{b}$ y aRb . Ahora suponemos que aRb y probaremos que las clases son iguales: Sea $z \in \bar{a}$, entonces zRa pero como R es de equivalencia, por transitividad y la hipótesis general aRb tenemos que zRb , luego $\bar{a} \subset \bar{b}$. De la misma manera podemos ver que vale la otra inclusión y por lo tanto, $\bar{a} = \bar{b}$.

Teorema 2.20. Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A , el conjunto cociente A/R es una partición de A .

Demostración: Queremos mostrar que A/R (el conjunto de todas las clases de equivalencia por R) particiona a A

Veamos que cumple con la definición, o sea que es un conjunto de partes no vacías de A disjuntas dos a dos y que su unión es A

Como R es reflexiva, para todo $a \in A$ vale que aRa y por lo tanto $\bar{a} = R(a)$ es no vacío. Supongamos que existe $x \in R(a) \cap R(b)$, luego xRa y xRb . Como R es simétrica y transitiva (por ser de equivalencia) aRb pero esto significa que las clases son iguales. Entonces todas las partes o son iguales o son disjuntas

Por definición todas las clases de equivalencia por R sobre A son subconjuntos de A y por la tanto la unión de todas ellas está incluida en A .

Como todo elemento $a \in A$ pertenece a su propia clase $\bar{a} = R(a)$ (por ser R reflexiva), vemos que todo elemento de A es un elemento en la unión de todas las clases.

Ejemplo 2.21. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2); (4, 1); (1, 4)\}$ una relación de equivalencia en A

El conjunto cociente $A/R = \{\{1, 2, 4\}; \{3\}\}$ es una partición de A

2.2.1 Relación de Congruencia

En su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada en el año 1801, **Gauss** introdujo el concepto de congruencia.

Definición 2.22. *Dados los enteros a , b y m , se dice que a es congruente con b módulo m y se escribe $a \equiv b \pmod{m}$ (ó $a \equiv_m b$ ó $a \equiv b \pmod{m}$) si y sólo si $m|a - b$, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = k.m$*

Ejemplo 2.23. $4 \equiv 10 \pmod{3}$ pues $3|4 - 10$, ya que existe -2 tal que $4 - 10 = -6 = -2 \cdot 3$

Proposición 2.24. *La relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia*

Demotración: Para mostrar que la congruencia es una relación de equivalencia tenemos que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Tenemos: a es congruente con b módulo m , ó $a \equiv_m b$ si y sólo si $m|a - b$, entonces,

- \equiv_m es reflexiva ya que para a entero vale que $m|a - a$ pues $a - a = 0.m$
- \equiv_m es simétrica.

Supongamos que $a \equiv_m b$, entonces m divide a $a - b$ y existe k entero tal que $a - b = k.m$, luego existe $-k$ tal que $b - a = -(a - b) = -(k.m) = (-k).m$ y por lo tanto $m|b - a$ y $b \equiv_m a$

- \equiv_m es transitiva: esto es, si $a \equiv_m b$ y $b \equiv_m c$ entonces $a \equiv_m c$

Supongamos que $a \equiv_m b$ entonces $m|a - b$, existe k entero tal que $a - b = km$,

por otro lado $b \equiv_m c$ entonces $m|b - c$, existe h entero tal que $b - c = hm$,

luego $a - c = a + (-b + b) - c = (a - b) + (b - c) = km + hm = (k + h)m$, y existe un entero $t = k + h$ tal que $a - c = tm$ y así m divide a $a - c$ y de esa forma tenemos que $a \equiv_m c$ como queríamos probar.

Por ser la congruencia una relación de equivalencia en \mathbb{Z} , determina una partición del conjunto de los números enteros en *clases de equivalencia* que se denominan *clases de congruencia módulo m* .

La clase de congruencia módulo m de un número x será el conjunto $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} : y \equiv_m x\}$

Esto nos permite agrupar a los enteros en familias disjuntas de manera que dos números son congruentes módulo m si y sólo si están en la misma clase de equivalencia.

Esta partición de \mathbb{Z} inducida por la congruencia módulo m es lo que nos determina el conjunto cociente $\mathbb{Z}/m = \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\equiv_m$ que estaremos estudiando.

Observación 2.25. *Dos números enteros pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si son congruentes módulo m .*

Supongamos que a y b pertenecen a la “clase del x ”, entonces $a \equiv_m x$ y $b \equiv_m x$. Como la congruencia es una relación simétrica y transitiva tenemos que $a \equiv_m b$.

Por otro lado, si $a \equiv_m b$ es claro que ambos pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Proposición 2.26. *Todo entero es **congruente módulo m** con su **resto** en la división por m*

Demostración:

Supongamos que $x \equiv_m y$, sabemos que esto equivale a decir que existe k entero tal que $x - y = km$, entonces podemos escribir $x = km + y$.

Como antes dijimos que dos enteros son congruentes si pertenecen a la misma clase podemos con ésto describir las clases de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \{y : y \equiv_m x\} = \{y : x = km + y\} = \{y : y = x + k'm\} = \{y : y = x, y = x + 1, y = x + 2, \dots\}$$

Ejemplos 2.27. 1. *Sabemos que $x \equiv_3 y$ si y sólo si $x - y = k \cdot 3$.*

Ahora tomemos por ejemplo al 2, como $y \equiv_3 2$ es lo mismo que $y - 2 = k \cdot 3$ entonces vale $y = k \cdot 3 + 2$ (todos los puntos de “esa recta”)

$$\bar{2} = \{y \in \mathbb{Z} : y \equiv_3 2\} = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

2. *Veamos la congruencia módulo 2, esto es $x \equiv_2 y$ si y sólo si $x - y = 2 \cdot m$*

Tomemos al 1, Como $1 \equiv y(2)$ es lo mismo que $y - 1 = k \cdot 2$ entonces vale $y = k \cdot 2 + 1$

$$\bar{1} = \{y \in Z : 1 \equiv_2 y\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

$$\bar{0} = \{y \in Z : 0 \equiv_2 y\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Luego, $Z/\equiv_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

“Partimos” el conjunto de los números enteros en dos clases, la del $\bar{0}$ y la del $\bar{1}$, es decir, los números que tienen resto 0 cuando se los divide por 2, o resto 1.

Esto es, **los números pares y los impares.**

Proposición 2.28. *Dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos en su división por m son iguales.*

Demostración:

Supongamos que x y y son dos enteros congruentes módulo m y probemos que tienen el mismo resto en la división por m .

Por el algoritmo de la división, existen (y son únicos) cociente y resto enteros tales que :

$$x = k_1m + r_1 \text{ con } 0 \leq r_1 < m$$

$$y = k_2m + r_2 \text{ con } 0 \leq r_2 < m \quad (\text{Observemos que } |r_1 - r_2| < m)$$

$$\text{Luego, } x - y = (k_1m + r_1) - (k_2m + r_2) = (k_1m - k_2m) + (r_1 - r_2) = (k_1 - k_2)m + (r_1 - r_2)$$

Y como $x \equiv_m y$, existe un entero k tal que $x - y = km$, concluimos que debe ser $r_1 - r_2 = 0$ y por lo tanto $r_1 = r_2$.

Ahora supongamos que los restos en la división por m coinciden y veremos que $x \equiv_m y$.

Otra vez usando el algoritmo de la división existen k_1, k_2, r enteros tales que :

$$x = k_1m + r$$

$$y = k_2m + r$$

$$\text{Así, } x - y = (k_1m + r) - (k_2m + r) = (k_1m - k_2m) + (r - r) = (k_1 - k_2)m = km$$

mostrando que $m|x - y$ y por lo tanto, $x \equiv_m y$.

Ejemplo 2.29. Sea $m = 5$, vemos que $7 \equiv_5 42$ ya que ambos tienen resto 2 en la división por 5 (de hecho ambos son congruentes con 2)

Todo entero es congruente con su resto en la división por m , $x \equiv_m r$, ya que por el algoritmo de la división para cualquier entero x existe y es único el resto r en la división por m

También sabemos que dos enteros congruentes pertenecen a la misma clase de equivalencia, y por lo tanto las clases serán iguales, $\bar{x} = \bar{r}$.

Por las propiedades y características de la división entera, tenemos que hay m posibles restos en la división por m . Estos son, $0, \dots, m - 1$.

De esta forma vemos que habrá m clases de equivalencia o congruencia.

Teorema 2.30. Sea $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\equiv_m$, el conjunto cociente, tiene m clases de equivalencias.