

## **Trabajo Práctico N° 3:** **Álgebra de Boole.**

### **Ejercicio 1.**

*En  $\mathbb{R}$ , se define la operación  $\$$  como  $a\$b = a - b + ab$ . Analizar si la operación es cerrada y conmutativa en  $\mathbb{R}$ .*

Cerrada:

Dado que  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  tiene estructura de Anillo, entonces,  $a\$b \in \mathbb{R}$ .

Conmutativa:

$$a\$b = a - b + ab$$

$\neq$

$$b\$a = b - a + ba.$$

Por lo tanto, la operación es cerrada, pero no es conmutativa.

## **Ejercicio 2.**

*Analizar si  $(\mathbb{N}, \cdot)$  es un grupo conmutativo.*

Para que  $(\mathbb{N}, \cdot)$  sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en  $\mathbb{N}$ :

### Cerrada:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da un número natural:

Si  $a, b \in \mathbb{N}$ , entonces,  $ab \in \mathbb{N}$ .

### Asociativa:

Para cualquier terna de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , entonces,  $(ab)c = a(bc)$ .

### Existencia de elemento neutro:

Existe un único número natural tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en  $\mathbb{N}$  tal que:

$$a * 1 = 1 * a = a.$$

### Existencia de elemento opuesto:

Para todo número natural no existe otro, único, que sumado a él dé como resultado el elemento neutro.

### Conmutativa:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in \mathbb{N}$ , entonces,  $ab = ba$ .

Por lo tanto,  $(\mathbb{N}, \cdot)$  no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

**Ejercicio 3.**

Sea  $H$  un conjunto y  $(P(H), \cap)$  el conjunto de Partes de  $H$  con la operación intersección. Analizar si  $(P(H), \cap)$  es un grupo conmutativo.

Para que  $(P(H), \cap)$  sea un grupo conmutativo, la operación  $\cap$  debe cumplir las siguientes propiedades en  $P(H)$ :

**Cerrada:**

Para cualquier par de elementos de  $P(H)$ , el resultado de realizar su intersección es un elemento de  $P(H)$ :

Si  $A, B \in P(H)$ , entonces,  $A \cap B \in P(H)$ .

**Asociativa:**

Para cualquier terna de elementos de  $P(H)$ , el resultado de realizar su intersección da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $A, B, C \in P(H)$ , entonces,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

**Existencia de elemento neutro:**

Existe un único elemento de  $P(H)$  tal que realizando su intersección con cualquier otro da como resultado el mismo elemento. El elemento neutro es  $H$ , ya que existe  $H$  en  $P(H)$  tal que:

$A \cap H = H \cap A = A$ .

**Existencia de elemento opuesto:**

Para todo elemento de  $P(H)$  no existe otro, único, que realizando la intersección con él dé como resultado el elemento neutro.

**Conmutativa:**

Para cualquier par de elementos de  $P(H)$ , el resultado de realizar su intersección da lo mismo en cualquier orden:

Si  $A, B \in P(H)$ , entonces,  $A \cap B = B \cap A$ .

Por lo tanto,  $(P(H), \cap)$  no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

**Ejercicio 4.**

*Demostrar que  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  es un grupo conmutativo. Indicar por qué  $(\mathbb{R}, \cdot)$  no es un grupo.*

Para que  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en  $\mathbb{R} - \{0\}$ :

**Cerrada:**

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da un número real distinto de cero:

Si  $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces,  $ab \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

**Asociativa:**

Para cualquier terna de números reales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces,  $(ab)c = a(bc)$ .

**Existencia de elemento neutro:**

Existe un único número real distinto de cero tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en  $\mathbb{R} - \{0\}$  tal que:

$$a * 1 = 1 * a = a.$$

**Existencia de elemento opuesto:**

Para todo número real distinto de cero existe otro, único, que multiplicado a él da como resultado el elemento neutro:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ entonces, } a \frac{1}{a} = \frac{1}{a} a = 1.$$

**Conmutativa:**

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ entonces, } ab = ba.$$

Por lo tanto,  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  es un grupo conmutativo. Por otra parte,  $(\mathbb{R}, \cdot)$  no es un grupo porque no se cumple la propiedad de existencia de elemento opuesto (no existe elemento opuesto para el 0).

**Ejercicio 5.**

Sea  $E = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x \text{ es par}\}$ . Demostrar que  $(E, +, \cdot)$  es un anillo.

Para que  $(E, +, \cdot)$  sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en  $E$ :

**Cerrada:**

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da un número entero par:

Si  $a, b \in E$ , entonces,  $a + b \in E$ .

**Asociativa:**

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in E$ , entonces,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

**Existencia de elemento neutro:**

Existe un único número entero par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en  $E$  tal que:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

**Existencia de elemento opuesto:**

Para todo número entero par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si  $a \in E$ , entonces,  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

**Conmutativa:**

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in E$ , entonces,  $a + b = b + a$ .

Para que  $(E, +, \cdot)$  sea un anillo, por otro lado, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en  $E$ :

**Cerrada:**

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da un número entero par:

Si  $a, b \in E$ , entonces,  $ab \in E$ .

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in E$ , entonces,  $(ab)c = a(bc)$ .

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros pares, es posible distribuir la multiplicación respecto a la suma:

Si  $a, b, c \in E$ , entonces,  $a(b + c) = ab + ac$  y  $(b + c)a = ba + ca$ .

Por lo tanto,  $(E, +, \cdot)$  es un anillo.

**Ejercicio 6.**

Sea  $\otimes$ , la operación definida sobre los números enteros como  $a \otimes b = 2ab$ . Demostrar que  $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$  es un anillo.

Para que  $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$  sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en  $\mathbb{Z}$ :

**Cerrada:**

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a + b \in \mathbb{Z}$ .

**Asociativa:**

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

**Existencia de elemento neutro:**

Existe un único número entero tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en  $\mathbb{Z}$  tal que:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

**Existencia de elemento opuesto:**

Para todo número entero existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si  $a \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

**Conmutativa:**

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a + b = b + a$ .

Para que  $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$  sea un anillo, por otro lado, la operación  $\otimes$  debe cumplir las siguientes propiedades en  $\mathbb{Z}$ :

**Cerrada:**

Para cualquier par de números enteros, el resultado de realizar la operación  $\otimes$  da un número entero:

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a \otimes b \in \mathbb{Z}$ .

#### Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de realizar la operación  $\otimes$  da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

$$\begin{aligned} \text{Si } a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ entonces, } & (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \\ & 2ab \otimes c = a \otimes (2bc) \\ & 2 * 2ab * c = 2a * (2bc) \\ & 4abc = 4abc. \end{aligned}$$

#### Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros, es posible distribuir la operación  $\otimes$  respecto a la suma:

Si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , entonces,

$$\begin{aligned} a \otimes (b + c) &= a \otimes b + a \otimes c \\ 2a(b + c) &= 2ab + 2ac \\ 2ab + 2ac &= 2ab + 2ac \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (b + c) \otimes a &= b \otimes a + c \otimes a \\ 2(b + c)a &= 2ba + 2ca \\ 2ba + 2ca &= 2ba + 2ca. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$  es un anillo.



**Ejercicio 7.**

En el conjunto  $P$  de los números pares se definen dos operaciones, una de ellas es la suma usual y la otra ( $\#$ ) está definida en la forma: si  $x, y \in P$ ,  $x \# y = \frac{xy}{2}$ . Demostrar que  $(P, +, \#)$  tiene estructura de anillo.

Para que  $(P, +, \#)$  sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en  $P$ :

Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si  $a, b \in P$ , entonces,  $a + b \in P$ .

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in P$ , entonces,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en  $P$  tal que:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si  $a \in P$ , entonces,  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

Conmutativa:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in P$ , entonces,  $a + b = b + a$ .

Para que  $(P, +, \#)$  sea un anillo, por otro lado, la operación  $\#$  debe cumplir las siguientes propiedades en  $P$ :

Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de realizar la operación # da un número entero:

Si  $a, b \in P$ , entonces,  $a \# b \in P$ .

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de realizar la operación # da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in P$ , entonces,  $(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$

$$\begin{aligned} \frac{ab}{2} \# c &= a \# \frac{bc}{2} \\ \frac{\frac{ab}{2} * c}{2} &= \frac{a * \frac{bc}{2}}{2} \\ \frac{\frac{2}{2} abc}{4} &= \frac{\frac{2}{2} abc}{4} \end{aligned}$$

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números pares, es posible distribuir la operación # respecto a la suma:

Si  $a, b, c \in P$ , entonces,

$a \# (b + c) = a \# b + a \# c$

$$\begin{aligned} \frac{a(b+c)}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \\ \frac{ab+ac}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \\ \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \end{aligned}$$

y

$(b + c) \# a = b \# a + c \# a$

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)a}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} \\ \frac{ba+ca}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} \\ \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(P, +, \#)$  tiene estructura de anillo.

**Ejercicio 8.**

Sean  $A, B, C$  elementos de un álgebra de Boole  $G = (F, +, \cdot, ', 0, 1)$ , indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, señalando los axiomas usados:

(a)  $A + (AC) = (A + A)(A + C)$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B4) de distributividad de la suma con respecto a la multiplicación.

(b)  $AB + 0 = AB$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(c)  $CB1 = CB$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B6) de existencia de elemento neutro (1) de la multiplicación.

(d)  $(AB)' + AB = 0$ .

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B7),  $(AB)' + AB = 1$ .

(e)  $CA(CA)' + B = B$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B8) y (B5),  $CA(CA)' = 0$  y  $0 + B = B$ .

(f)  $CA + 0 = 0$ .

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(g)  $(AB)' + AB + CC' = 1$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B7) y (B8),  $(AB)' + AB = 1$ ,  $CC' = 0$ ,  $1 + 0 = 1$ .

**Ejercicio 9.**

Sea  $H = \{a, b, c, d, e\}$  y sean  $\Pi = (P(H), \cup, \cap, \complement, \emptyset, H)$  el álgebra de Boole de partes de  $H$ . Los siguientes conjuntos son elementos de  $P(H)$ :  $\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}$ . Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.

		$\{b, c, d, e\}$
$\{b, c, d\}$		$\{b, d, e\}$
$\{b, c\}$	$\{b, d\}$	$\{c, d\}$
$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$
		$\{e\}$

**Ejercicio 10.**

Sea  $W$  el conjunto formado por las clases de 3 letras proposicionales  $[p]$ ,  $[q]$ ,  $[r]$  y sus conjunciones, disyunciones y negaciones. Sea  $\Lambda = (W, \vee, \wedge, \sim, \perp, \top)$  del álgebra de Boole del cálculo proposicional. Las siguientes proposiciones son elementos de  $W$ :  $[p \wedge q]$ ,  $[q \wedge r]$ ,  $[p]$ ,  $[q]$ ,  $[r]$ ,  $[q \vee r]$ . Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.

$$\begin{array}{c} [q \vee r] \\ [p] [q] [r] \\ [p \wedge q] [q \wedge r] \end{array}$$

**Ejercicio 11.**

Sean  $B = \mathbb{Z}$ ,  $+$  la suma usual de enteros,  $\cdot$  el producto usual de enteros y, para cada  $a \in \mathbb{Z}$ , se define  $a' = -a$ . ¿Es  $H = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$  un álgebra booleana?

Para que  $H = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$  sea un álgebra booleana, se deben cumplir las siguientes propiedades en  $B$ . Sean  $x, y, z \in B$ :

- |                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| (B1) $x + y = y + x$ .           | Se cumple. |
| (B2) $xy = yx$ .                 | Se cumple. |
| (B3) $x(y + z) = xy + xz$ .      | Se cumple. |
| (B4) $x + yz = (x + y)(x + z)$ . | Se cumple. |
| (B5) $x + 0 = x$ .               | Se cumple. |
| (B6) $x1 = x$ .                  | Se cumple. |
| (B7) $x + x' = 1$ .              | Se cumple. |
| (B8) $xx' = 0$ .                 | Se cumple. |

Por lo tanto,  $H = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$  es un álgebra booleana.

**Ejercicio 12.**

*Demostrar que, si  $0$  y  $1$  son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces,  $1' = 0$  y  $0' = 1$ .*

Por el axioma (B7), se cumple que:

$$0 + 0' = 1 \text{ y} \\ 1 + 1' = 1.$$

Además, por el axioma (B5), se cumple que:

$$0' = 1 \text{ y} \\ 1' = 0.$$

Por lo tanto, queda demostrado que, si  $0$  y  $1$  son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces,  $1' = 0$  y  $0' = 1$ .

**Ejercicio 13.**

(a) Probar la Ley de De Morgan:  $(xy)' = x' + y'$ .

Teniendo en cuenta que el complemento es único, se debe tener que:

$$(i) (xy) + (x' + y') = 1 \text{ y}$$

$$(ii) (xy) (x' + y') = 0.$$

Si esto se cumple, quiere decir que  $(x' + y')$  es el complemento de  $(xy)$ .

(i)

$$(xy) + (x' + y') = [(x' + y') + x] [(x' + y') + y]$$

por axioma (B4)

$$(xy) + (x' + y') = [(x' + x) + y'] [(y' + y) + x']$$

por axioma (B1) y asociatividad

$$(xy) + (x' + y') = (1 + y') (1 + x')$$

por axioma (B7)

$$(xy) + (x' + y') = 1 * 1$$

por ley de acotación

$$(xy) + (x' + y') = 1.$$

(ii)

$$(xy) (x' + y') = [x' (xy)] [y' (xy)]$$

por axioma (B5)

$$(xy) (x' + y') = [(x'x) y] [(y'y) x]$$

por axioma (B2) y asociatividad

$$(xy) (x' + y') = (0 * y) (0 * x)$$

por axioma (B8)

$$(xy) (x' + y') = 0 * 0$$

por ley de acotación

$$(xy) (x' + y') = 0.$$

Por lo tanto, queda demostrado la Ley de De Morgan  $(xy)' = x' + y'$ , ya que  $(x' + y')$  es el complemento de  $(xy)$ .

(b) Expresar las Leyes de De Morgan en los conjuntos y en el cálculo proposicional, con los símbolos y operaciones que corresponden en cada caso.

Leyes de De Morgan en teoría de conjuntos:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Leyes de De Morgan en teoría de lógica proposicional:

$$\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

$$\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q.$$



**Ejercicio 14.**

Si  $x, y, z, w$  son variables de un Álgebra de Boole, simplificar (hasta su mínima expresión) las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas:

(a)  $x + xy + x(x + y)$ .

$x + xy + x(x + y) = x + xy + xx + xy$	por axioma (B5)
$x + xy + x(x + y) = x + xy + x + xy$	por ley de idempotencia
$x + xy + x(x + y) = x(1 + y) + x(1 + y)$	por axiomas (B6) y (B3)
$x + xy + x(x + y) = x * 1 + x * 1$	por ley de acotación
$x + xy + x(x + y) = x + x$	por axioma (B6)
$x + xy + x(x + y) = x$ .	por ley de idempotencia

(b)  $x' + [(xx')']$ .

$x' + [(xx')'] = x' + (x' + x)$	por Ley de De Morgan
$x' + [(xx')'] = x' + 1$	por (B7)
$x' + [(xx')'] = x'$ .	por ley de acotación

(c)  $x(y + x')'$ .

$x(y + x')' = x(y'x)$	por Ley de De Morgan
$x(y + x')' = xxy'$	por asociatividad
$x(y + x')' = xy'$ .	por ley de idempotencia

(d)  $[x(y'y)] + [y(x + x')]$ .

$[x(y'y)] + [y(x + x')] = (x * 0) + (y * 1)$	por axiomas (B8) y (B7)
$[x(y'y)] + [y(x + x')] = 0 + y$	por ley de acotación y axioma (B6)
$[x(y'y)] + [y(x + x')] = y$ .	por axioma (B5).

(e)  $y'xy + y'x + ywx' + yww$ .

$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'yx + y'x + ywx' + yw$ idempotencia	por asociatividad y ley de
$y'xy + y'x + ywx' + yww = 0 * x + y'x + ywx' + yw$	por axioma (B8)
$y'xy + y'x + ywx' + yww = 0 + y'x + ywx' + yw$	por ley de acotación
$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + ywx' + yw$	
$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + yw(x' + 1)$	por axiomas (B6) y (B3)
$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + yw * 1$	por ley de acotación

$$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + yw.$$

por axioma (B6)

$$(f) [(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'].$$

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = [(x'y') + z'] [z' + (x'yz)]$$

por Leyes de De Morgan e involución

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = (z' + x'y') (z' + x'yz)$$

por axioma (B1)

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + (x'y') (x'yz)$$

por axioma (B4)

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + [(x'x') (y'y) z]$$

por axioma (B2)

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + (x' * 0 * z)$$

por ley de idempotencia y por axioma (B8)

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + 0$$

por ley de acotación

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z'.$$

por axioma (B5)

**Ejercicio 15.**

Si  $x, y, z$  son variables de un Álgebra de Boole, demostrar que:

(a)  $x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = z + xy.$

$$\begin{aligned} x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' &= x'z(y' + y) + xy'z + xy(z + z') \\ x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' &= x'z * 1 + xy'z + xy * 1 \\ x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' &= x'z + xy'z + xy \\ x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' &= z(x' + xy') + xy. \end{aligned}$$

(b)  $x + (y + 0)' + y'z = x + y'.$

$$\begin{aligned} x + (y + 0)' + y'z &= x + y' + y'z \\ x + (y + 0)' + y'z &= x + y'(1 + z) \\ x + (y + 0)' + y'z &= x + y' * 1 \\ x + (y + 0)' + y'z &= x + y'. \end{aligned}$$

(c)  $x + y' + (xy + 0)' = 1.$

$$\begin{aligned} x + y' + (xy + 0)' &= x + y' + (xy + 0)' \\ x + y' + (xy + 0)' &= x + y' + (xy)' \\ x + y' + (xy + 0)' &= x + y' + x' + y' \\ x + y' + (xy + 0)' &= (x + x') + (y' + y') \\ x + y' + (xy + 0)' &= 1 + y' \\ x + y' + (xy + 0)' &= 1. \end{aligned}$$

(d)  $x + (y + 1)' + xy = x.$

$$\begin{aligned} x + (y + 1)' + xy &= x + y' * 0 + xy \\ x + (y + 1)' + xy &= x + 0 + xy \\ x + (y + 1)' + xy &= x + xy \\ x + (y + 1)' + xy &= x(1 + y) \\ x + (y + 1)' + xy &= x * 1 \\ x + (y + 1)' + xy &= x. \end{aligned}$$

(e)  $[(zx)'zx]' + xy + xy' = 1.$

$$\begin{aligned} [(zx)'zx]' + xy + xy' &= [(zx) + (zx)'] + x(y + y') \\ [(zx)'zx]' + xy + xy' &= [(zx) + (z' + x')] + x * 1 \\ [(zx)'zx]' + xy + xy' &= zx + (z' + x') + x \end{aligned}$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = (z' + x') + x(1 + z)$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = (z' + x') + x * 1$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = (z' + x') + x$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = z' + (x' + x)$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = z' + 1$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = 1.$$

$$(f) x[(y' + x)' + (y' + y)'] = 0.$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = x(yx' + yy')$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = x(yx' + 0)$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = xy'x'$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = xx'y$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = 0 * y$$

$$x[(y' + x)' + (y' + y)'] = 0.$$

**Ejercicio 16.**

(a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	F (A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F(A, B, C) = A'B'C' + AB'C' + ABC'$$

(b) Simplificar la expresión hallada.

$$F(A, B, C) = A'B'C' + AB'C' + ABC'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + AB' + AB) C'$$

$$F(A, B, C) = [(A' + A) B' + AB] C'$$

$$F(A, B, C) = (1 * B' + AB) C'$$

$$F(A, B, C) = (B' + AB) C'$$

$$F(A, B, C) = [A'B' + A(B' + B)] C'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + A * 1) C'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + A) C'$$

**Ejercicio 17.**

(a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	D	F (A, B, C, D)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$F(A, B, C, D) = A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + ABC'D + ABCD$ .

(b) Simplificar la expresión hallada.

$F(A, B, C, D) = A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + ABC'D + ABCD$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' (C' + C) + A'BC' (D' + D) + A'BC (D' + D) + ABD (C' + C)$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' * 1 + A'BC' * 1 + A'BC * 1 + ABD * 1$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'BC' + A'BC + ABD$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B (C' + C) + ABD$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B * 1 + ABD$

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B + ABD$

$F(A, B, C, D) = A' (B'D' + B) + ABD$ .

$F(A, B, C, D) = A'B'D' + B (A' + AD)$ .

**Ejercicio 18.**

Sea  $f: B_1 \rightarrow B_2$  un isomorfismo de álgebras booleanas. Si se llama  $0_1$  y  $0_2$  al 0 de  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente, y  $1_1$  y  $1_2$  al 1 de  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente, demostrar que  $f(0_1) = 0_2$  y  $f(1_1) = 1_2$ .

Para cualquier elemento  $b$  de  $B_1$ ,  $b + 0_1 = b$ . Como  $f$  es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que  $f(b + 0_1) = f(b) + f(0_1)$ . Pero, debido a que  $0_2$  es el elemento identidad aditivo en  $B_2$ ,  $f(b + 0_1) = f(b) + 0_2 = f(b)$ , lo que implica que  $f(0_1) = 0_2$ . Por lo tanto, queda demostrado que  $f(0_1) = 0_2$ .

Para cualquier elemento  $b$  de  $B_1$ ,  $b * 1_1 = b$ . Como  $f$  es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que  $f(b * 1_1) = f(b) * f(1_1)$ . Pero, debido a que  $1_2$  es el elemento identidad multiplicativo en  $B_2$ ,  $f(b * 1_1) = f(b) * 1_2 = f(b)$ , lo que implica que  $f(1_1) = 1_2$ . Por lo tanto, queda demostrado que  $f(1_1) = 1_2$ .

**Ejercicio 19.**

(a) Hallar un isomorfismo entre  $\Omega = \{B^2, \vee, \wedge, ', (0, 0), (1, 1)\}$  y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.

Para encontrar un isomorfismo entre  $\Omega$  y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva  $f$  que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto  $A = \{a, b\}$  y se considera el álgebra de Boole de partes de  $A$ , denotada por  $P(A)$ . Entonces, se tiene:

- $B^2$  representa el conjunto de subconjuntos de  $A$ , es decir,  $B^2 = P(A)$ .
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto  $A$  se corresponde con su complemento relativo en  $A$ , es decir,  $A' = \{x \in A: x \notin A\}$ .
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función  $f: \Omega \rightarrow P(A)$  como sigue:

- Para cada par ordenado  $(0, 0)$  en  $B^2$ ,  $f$  lo mapea al conjunto vacío  $\emptyset$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 1)$  en  $B^2$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $A$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(0, 1)$  en  $B^2$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{b\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 0)$  en  $B^2$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{a\}$  en  $P(A)$ .

Se puede verificar que  $f$  es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función  $f$  es inyectiva porque cada par ordenado en  $\Omega$  se mapea a un único subconjunto en  $P(A)$  y  $f$  es suryectiva porque todo subconjunto de  $A$  se puede representar como un par ordenado en  $\Omega$ .
- La función  $f$  preserva la disyunción, ya que  $f((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) = f((1, 1))$  si y sólo si  $(x_1, y_1) = (1, 1)$  o  $(x_2, y_2) = (1, 1)$ , lo que implica que  $f((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) = A$  si y sólo si  $f((x_1, y_1)) = A$  o  $f((x_2, y_2)) = A$ .
- La función  $f$  preserva la conjunción, ya que  $f((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) = f((1, 1))$  si y sólo si  $(x_1, y_1) = (1, 1)$  y  $(x_2, y_2) = (1, 1)$ , lo que implica que  $f((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) = A$  si y sólo si  $f((x_1, y_1)) = A$  y  $f((x_2, y_2)) = A$ .
- La función  $f$  preserva el complemento, ya que  $f((x, y)') = f((1, 1))$  si y sólo si  $(x, y)' = (1, 1)$ , lo que implica que  $f((x, y)') = A$  si y sólo si  $f((x, y)) = \emptyset$ .
- La función  $f$  preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ , entonces  $f((x_1, y_1)) \subseteq f((x_2, y_2))$ .

Por lo tanto,  $f$  es un isomorfismo entre  $\Omega$  y el álgebra de Boole de partes de  $A$  ( $P(A)$ ).

Diagrama de Hasse de  $\Omega$ :



(1, 1)  
 (1, 0) (0, 1)  
 (0, 0)

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

A  
 {a} {b}  
 $\emptyset$

**(b)** Hallar un isomorfismo entre  $\Omega = \{B^3, \vee, \wedge, ', (0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$  y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.

Para encontrar un isomorfismo entre  $\Omega$  y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva  $f$  que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto  $A = \{a, b, c\}$  y se considera el álgebra de Boole de partes de  $A$ , denotada por  $P(A)$ . Entonces, se tiene:

- $B^3$  representa el conjunto de subconjuntos de  $A$ , es decir,  $B^3 = P(A)$ .
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto  $A$  se corresponde con su complemento relativo en  $A$ , es decir,  $A' = \{x \in A: x \notin A\}$ .
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función  $f: \Omega \rightarrow P(A)$  como sigue:

- Para cada par ordenado  $(0, 0, 0)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto vacío  $\emptyset$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 1, 1)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $A$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(0, 0, 1)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{c\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(0, 1, 0)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{b\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 0, 0)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{a\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(0, 1, 1)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{b, c\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 0, 1)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{a, c\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 1, 0)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{a, b\}$  en  $P(A)$ .

Se puede verificar que  $f$  es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función  $f$  es inyectiva porque cada par ordenado en  $\Omega$  se mapea a un único subconjunto en  $P(A)$  y  $f$  es suryectiva porque todo subconjunto de  $A$  se puede representar como un par ordenado en  $\Omega$ .

- La función  $f$  preserva la disyunción, ya que  $f((x_1, y_1, z_1) \vee (x_2, y_2, z_2)) = f((1, 1, 1))$  si y sólo si  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$  o  $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1)$ , lo que implica que  $f((x_1, y_1, z_1) \vee (x_2, y_2, z_2)) = A$  si y sólo si  $f((x_1, y_1, z_1)) = A$  o  $f((x_2, y_2, z_2)) = A$ .
- La función  $f$  preserva la conjunción, ya que  $f((x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2)) = f((1, 1, 1))$  si y sólo si  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$  y  $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1)$ , lo que implica que  $f((x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2)) = A$  si y sólo si  $f((x_1, y_1, z_1)) = A$  y  $f((x_2, y_2, z_2)) = A$ .
- La función  $f$  preserva el complemento, ya que  $f((x, y, z)') = f((1, 1, 1))$  si y sólo si  $(x, y, z)' = (1, 1, 1)$ , lo que implica que  $f((x, y, z)') = A$  si y sólo si  $f((x, y, z)) = \emptyset$ .
- La función  $f$  preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si  $(x_1, y_1, z_1) \leq (x_2, y_2, z_2)$ , entonces  $f((x_1, y_1, z_1)) \subseteq f((x_2, y_2, z_2))$ .

Por lo tanto,  $f$  es un isomorfismo entre  $\Omega$  y el álgebra de Boole de partes de  $A$  ( $\mathcal{P}(A)$ ).

Diagrama de Hasse de  $\Omega$ :

$$\begin{array}{c} (1, 1, 1) \\ (1, 1, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (0, 1, 1) \\ (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1) \\ (0, 0, 0) \end{array}$$

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

$$\begin{array}{c} A \\ \{a, b\} \quad \{a, c\} \quad \{b, c\} \\ \{a\} \quad \{b\} \quad \{c\} \\ \emptyset \end{array}$$