Juan Menduiña

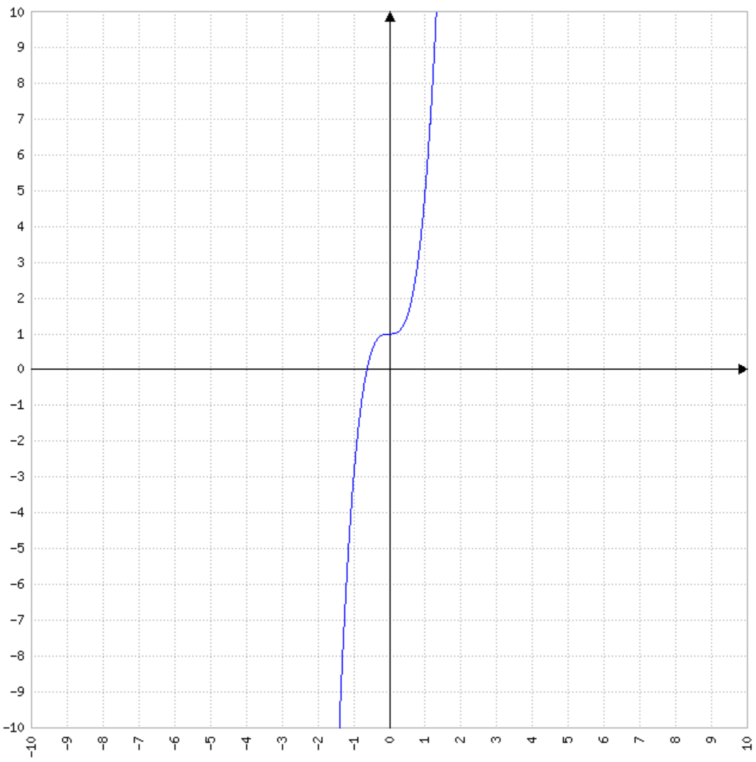
Trabajo Práctico N° 7:
Ejercicios de Repaso.

Ejercicio 1.

Para cada una de las siguientes funciones:

i. Determinar el dominio de la función.
ii. Estudiar la continuidad: indicar el conjunto donde la función es continua, señalar y clasificar sus discontinuidades si las hay.
iii. Estudiar la existencia de asíntotas verticales y horizontales.
iv. Determinar el conjunto donde es derivable.

(a) $f(x) = 4x^3 + 1$.



(i) Dominio:

$Dom_f = \mathbb{R}$.

(ii) Continuidad:

Al ser una función polinómica, f (x) es continua en todo su dominio. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R}$.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} f\ (x) = \pm\infty$, $\forall$ a $\in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to +\infty} f\ (x) = \lim_{x \to +\infty} 4x^3 + 1 = +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f\ (x) = \lim_{x \to -\infty} 4x^3 + 1 =$ -∞.

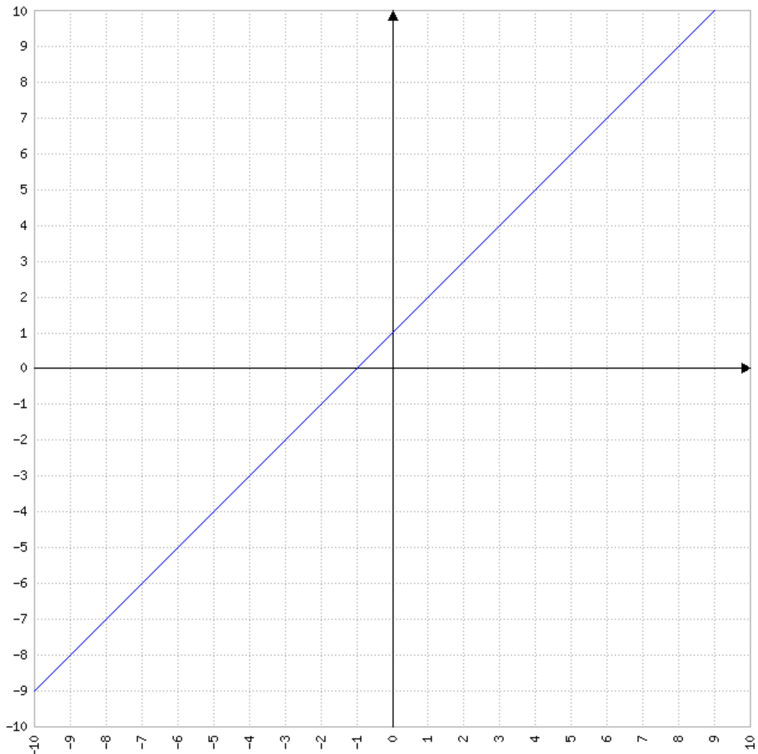
Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(iv) <u>Derivabilidad:</u>

$\exists$ f´ $(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$.

(b) *f (x)=* $\frac{x^2-1}{x-1}$.



(i) <u>Dominio:</u>

x - 1= 0
x= 1.

$Dom_f = \mathbb{R}$ - {1}.

(ii) Continuidad:

f (x) es discontinua evitable en x= 1, ya que $\lim_{x \to 1^-} f(x)$= $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ y, entonces, ∃ $\lim_{x \to 1} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ - {1}.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 1^-} f(x)$= $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$= $\lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$= $\lim_{x \to 1^-} x+1$= 1 + 1= 2.

$\lim_{x \to 1^+} f(x)$= $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$= $\lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$= $\lim_{x \to 1^+} x+1$= 1 + 1= 2.

Por lo tanto, f (x) no tiene una asíntota vertical en x= 0.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$= $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x-1}$= -∞.

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$= $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x-1}$= +∞.

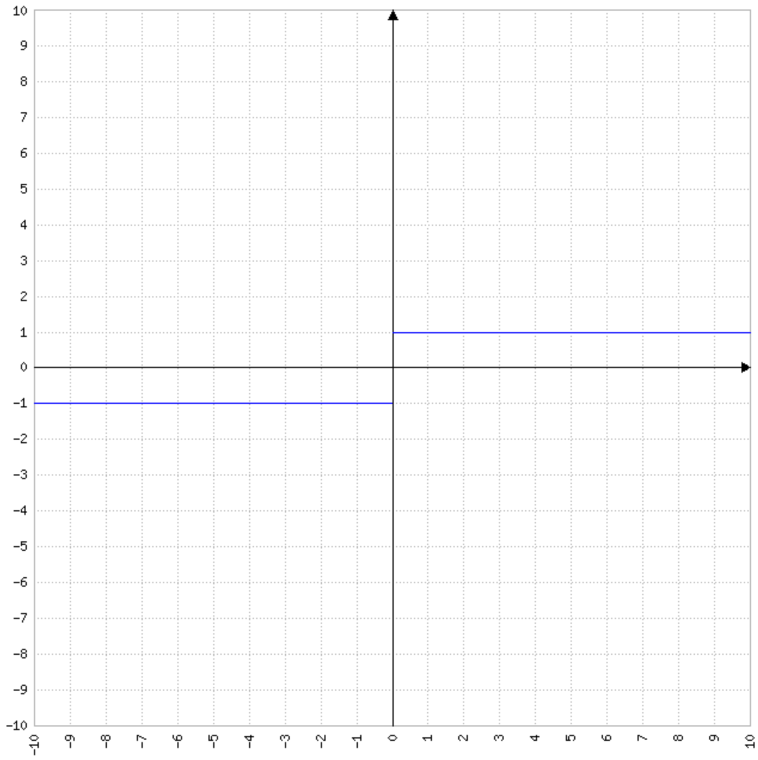
Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(iv) Derivabilidad:

∃ f′ (x_0)= $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ∀ x_0 ∈ ℝ - {1}.

Por lo tanto, f (x) es derivable en ℝ - {1}.

(c) *f (x)*= $\frac{x}{|x|}$.



(i) Dominio:

$|x|$= 0
x= 0.

Dom_f= $\mathbb{R}$ - {0}.

(ii) Continuidad:

f (x) es discontinua inevitable en x= 0, ya que $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists$ $\lim_{x \to 0} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R}$ - {0}.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$

Por lo tanto, f (x) no tiene una asíntota vertical en x= 0.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|} = -1.$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{|x|} = 1.$

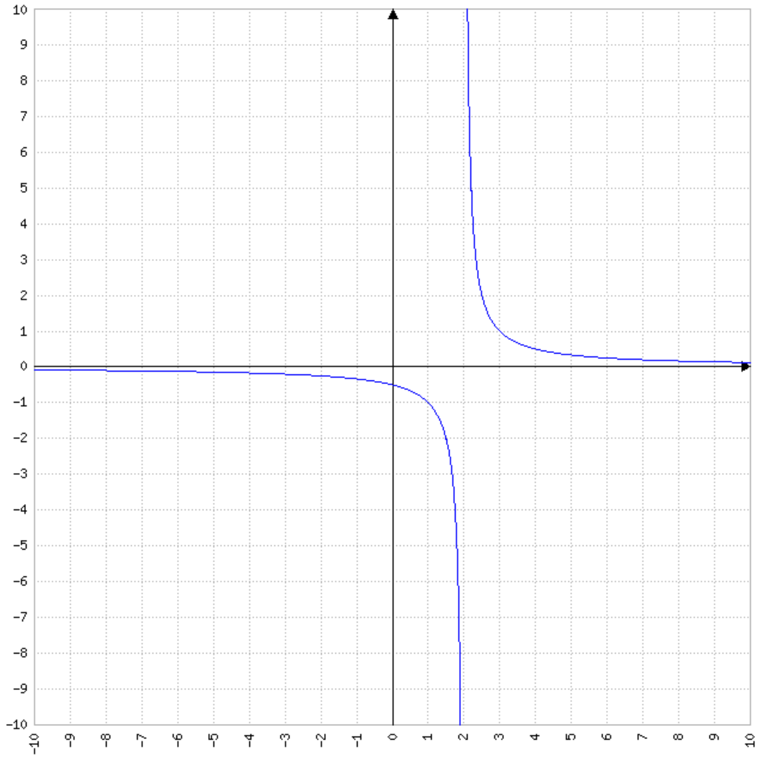
Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(iv) Derivabilidad:

$\exists$ f´ (x_0)= $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$ - {0}.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$ - {0}.

(d) *f (x)*= $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$.



(i) Dominio:

x^2 - 3x + 2= 0.

x_1, x_2= $\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1*2}}{2*1}$

x_1, x_2= $\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$

x_1, x_2= $\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}$

x_1, x_2= $\frac{3\pm 1}{2}$

x_1= $\frac{3+1}{2}$= $\frac{4}{2}$= 2.

x_2= $\frac{3-1}{2}$= $\frac{2}{2}$= 1.

Dom_f= $\mathbb{R}$ - {1, 2}.

(ii) Continuidad:

f (x) es discontinua evitable en x= 1, ya que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ y, entonces, $\exists \lim_{x \to 1} f(x)$. f (x) es discontinua inevitable en x= 2, ya que $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R}$ - {2}.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1.$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1.$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = -\infty.$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = +\infty.$

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en x= 2.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0.$

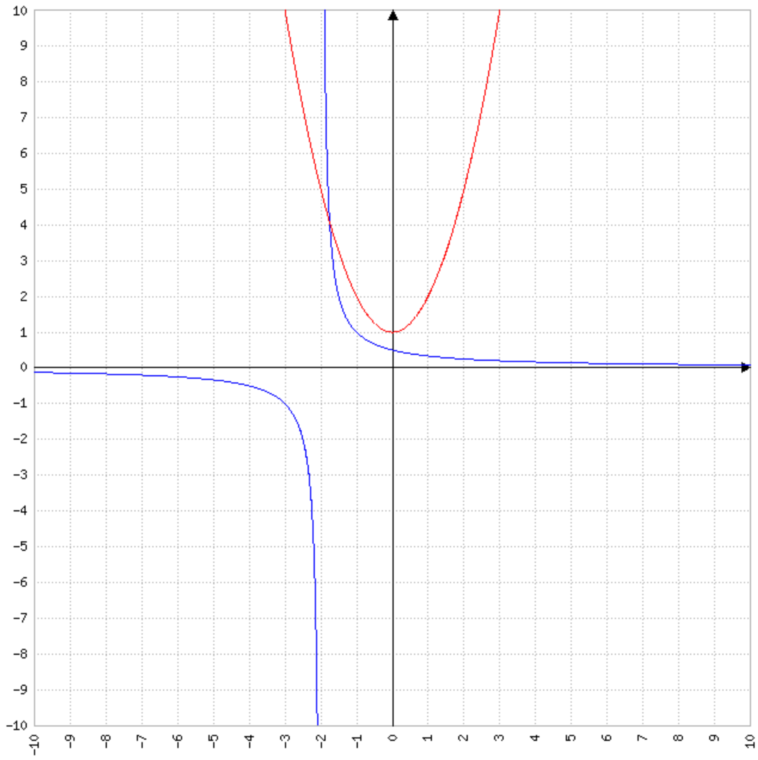
Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota horizontal en y= 0.

(iv) Derivabilidad:

$\exists$ f´ $(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ - {1, 2}.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$ - {1, 2}.

(e) *f (x)=* $\begin{cases} \frac{1}{x+2}, si\ x \geq -1 \\ x^2+1, si\ x < -1 \end{cases}$.



(i) Dominio:

Dom_f= ℝ.

(ii) Continuidad:

f (x) es discontinua inevitable en x= -1, ya que $\lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ - {-1}.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, ∀ a ∈ ℝ.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota horizontal en y= 0.

(iv) Derivabilidad:

$\exists$ f´ $(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ∀ x_0 ∈ ℝ - {-1}.

Por lo tanto, f (x) es derivable en ℝ - {-1}.

(f) $f(x)= \begin{cases} \frac{x}{e^x}, si\ x \geq 0 \\ x^2, si\ x < 0 \end{cases}$.

(i) <u>Dominio:</u>

Dom_f= ℝ.

(ii) <u>Continuidad:</u>

f (x) es continua en x= 0, ya que $\lim_{x \to 0^-} f(x)= \lim_{x \to 0^+} f(x)$ y, entonces, $\exists \lim_{x \to 0} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ.

(iii) <u>Asíntotas verticales y horizontales:</u>

$\nexists \lim_{x \to a} f(x)= \pm\infty$, ∀ a ∈ ℝ.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)= \lim_{x \to -\infty} x^2= +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x)= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}= 0$.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota horizontal en y= 0.

(iv) Derivabilidad:

$\exists$ f´ (x_0)= $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.

Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$.

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{3^2-3-6}{3-3} = \frac{9-3-6}{0} = (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ (*)
$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \to 3} x+2 = 3 + 2 = 5$.

(*) $x_1, x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1(-6)}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{1 \pm 5}{2}$
$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$.
$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$.

(b) $\lim_{x \to 2} (2-x)^2 \, sen \frac{2}{2-x}$.

$\lim_{x \to 2} (2-x)^2 \, sen \frac{2}{2-x} = (2-2)^2 \text{ sen } \frac{2}{2-2} = 0^2 \text{ sen } \frac{2}{0} = 0 * \text{sen } \frac{2}{0} = 0$.

(c) $\lim_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$.

$\lim_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \frac{4*4-4^2}{2-\sqrt{4}} = \frac{16-16}{2-2} = (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \to 4} \frac{4-2x}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}$
$\lim_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \to 4} -8\sqrt{x} + 4\sqrt{x^3} = -8 \sqrt{4} + 4 \sqrt{4^3} = -8 * 2 + 4 \sqrt{64} = -16 + 4 * 8 = -16 + 32 =$ 16.

(d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^4}{3x^3}$.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^4}{3x^3} = -\infty$.

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = (\frac{\infty}{\infty})$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = \frac{x^2(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2-\frac{1}{x})}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = \frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{5+0+0}{2-0} = \frac{5}{2}$.

(h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^6+1}{2x^4-x^2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^6+1}{2x^4-x^2} = +\infty$.

Ejercicio 3.

Calcular las derivadas de las siguientes funciones utilizando reglas de derivación.

(a) *a (x)= tan 2πx.*

a (x)= $\frac{sen\ 2\pi x}{\cos 2\pi x}$.

a´ (x)= $\frac{\cos 2\pi x * \cos 2\pi x - sen\ 2\pi x(-sen\ 2\pi x)}{(\cos 2\pi x)^2}$
a´ (x)= $\frac{(\cos 2\pi x)^2 + (sen\ 2\pi x)^2}{(\cos 2\pi x)^2}$
a´ (x)= $\frac{2\pi}{(\cos 2\pi x)^2}$
a´ (x)= $(\sec 2\pi x)^2$.

(b) *b (x)=* e^{x^2+1}.

b´ (c)= $e^{x^2+1} * 2$x
b´ (c)= 2xe^{x^2+1}.

(c) *c (x)=* $\frac{3x}{2x+10}$.

c´ (x)= $\frac{3(2x+10) - 3x*2}{(2x+10)^2}$
c´ (x)= $\frac{6x+30-6x}{(2x+1)^2}$
c´ (x)= $\frac{30}{(2x+10)^2}$.

(d) *d (x)= ln (*x^2 *+ 1).*

d´ (x)= $\frac{1}{x^2+1}$ 2x
d´ (x)= $\frac{2x}{x^2+1}$.

(e) *e (x)= cos 2x sen x.*

e´ (x)= -sen 2x * 2 sen x + cos 2x cos x
e´ (x)= -2sen 2x sen x + cos 2x cos x.

(f) *f (x)=* $\sqrt{1+x^4}$ *- 1.*

f´ (x)= $\frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}\, 4x^3$

f´ (x)= $\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$.

(g) *g (x)=* $\frac{e^{2x}}{x-1}$.

g´ (x)= $\frac{e^{2x}*2(x-1)-e^{2x}*1}{(x-1)^2}$

g´ (x)= $\frac{2xe^{2x}-2e^{2x}-e^{2x}}{(x-1)^2}$

g´ (x)= $\frac{2xe^{2x}-3e^{2x}}{(x-1)^2}$

g´ (x)= $\frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}$.

(h) *h (x)=* $\frac{\ln x+2}{sen\, x}$.

h´ (x)= $\frac{\frac{1}{x+2} sen\, x - \ln(x+2)\cos x}{(sen\, x)^2}$.

Ejercicio 4.

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes de las siguientes funciones en los puntos indicados.

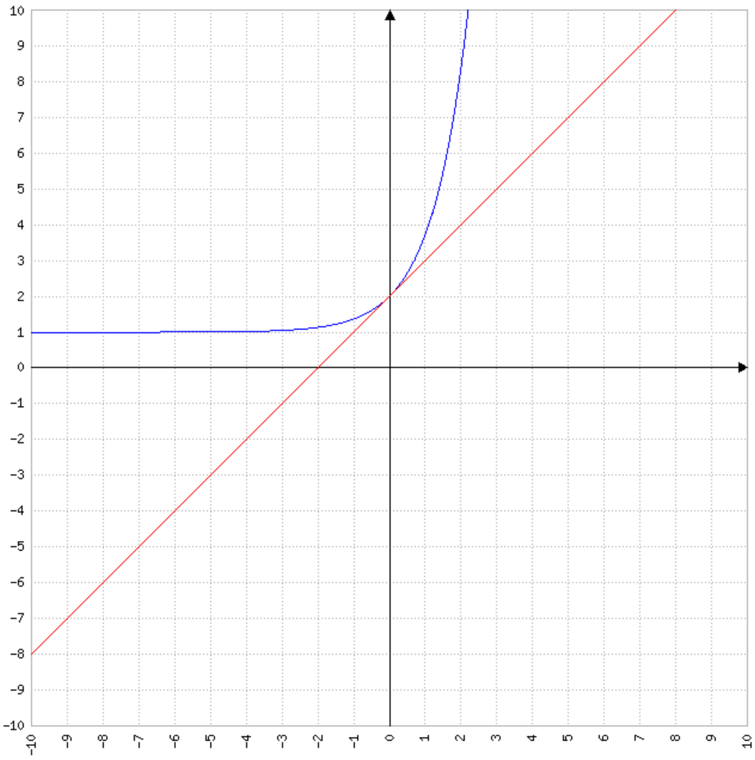
(a) *f (x)=* e^x *+ 1 en x= 0.*

f´ (x)= e^x.

f (0)= e^0 + 1
f (0)= 1 + 1
f (0)= 2.

f´ (0)= e^0
f´ (0)= 1.

y - 2= 1 (x - 0)
y - 2= 1x
y - 2= x
y= x + 2.



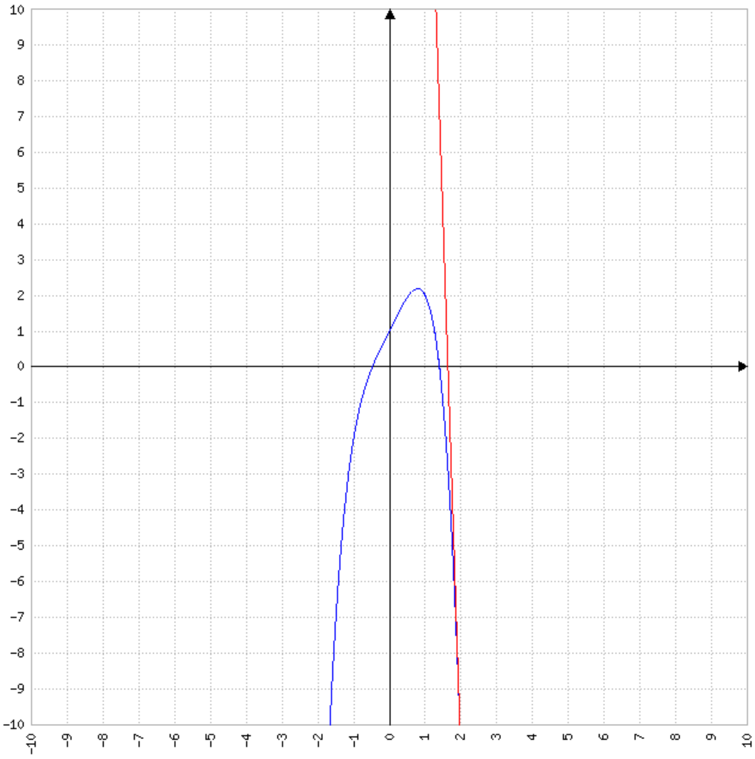
(b) *g (x)= -*x^4 *+ 2x + 1 en x= 2.*

g´ (x)= -4x^3 + 2.

g (2)= -2^4 + 2 * 2 + 1
g (2)= -16 + 4 + 1
g (2)= -11.

g´ (2)= -4 * 2^3 + 2
g´ (2)= -4 * 8 + 2
g´ (2)= -32 + 2
g´ (2)= -30.

y - (-11)= -30 (x - 2)
y + 11= -30x + 60
y= -30x + 60 - 11
y= -30x + 49.



(c) *h (x)= 2 ln (x^2 + 2) en x= 1.*

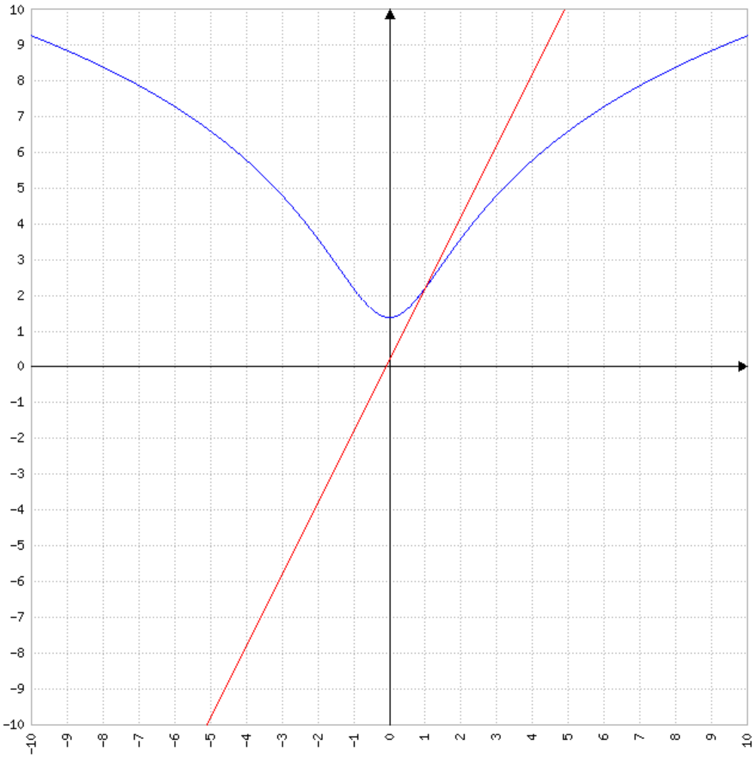
h´ (x)= 2 $\frac{1}{x^2+1}$ * 2x
h´ (x)= $\frac{4x}{x^2+1}$.

h (1)= 2 ln (1^2 + 2)
h (1)= 2 ln (1 + 2)
h (1)= 2 ln 3.

h´ (1)= $\frac{4*1}{1^2+1}$
h´ (1)= $\frac{4}{1+1}$

h´ (1)= $\frac{4}{2}$
h´ (1)= 2.

y - 2 ln 3= 2 (x - 1)
y - 2 ln 3= 2x - 2
y= 2x - 2 + 2 ln 3
y= 2x + 2 (ln 3 - 1).



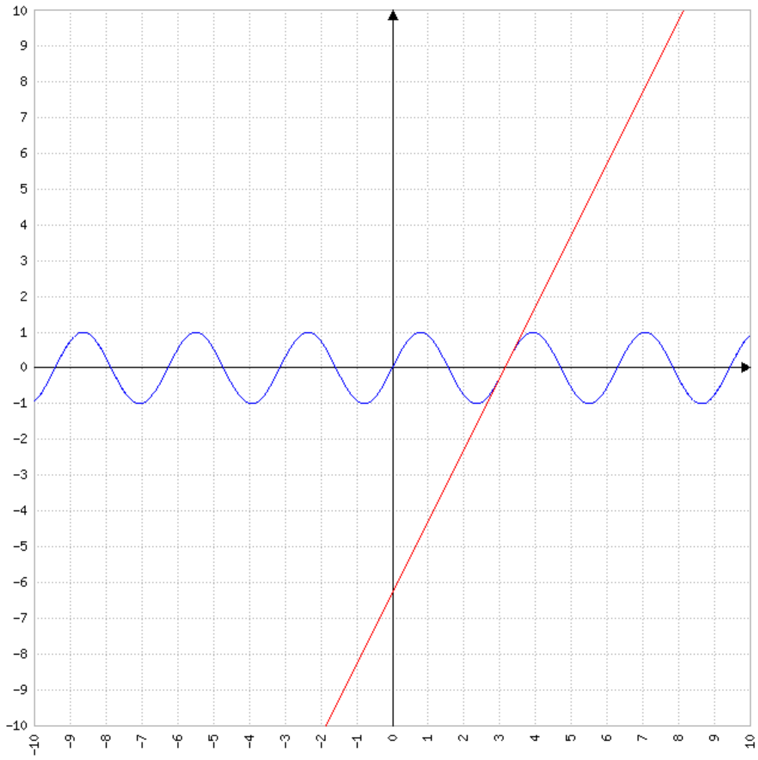
(d) *i (x)= sen 2x en x= π.*

i´ (x)= cos 2x * 2
i´ (x)= 2 cos 2x.

i (π)= sen 2π
i (π)= 0.

i´ (π)= 2 cos 2π
i´ (π)= 2 * 1
i´ (π)= 2.

y - 0= 2 (x - π)
y= 2x - 2π.



(e) $j\ (x)= \frac{x^2+x-2}{x}$ *en* $x= 1$.

$j'\ (x)= \frac{(2x+1)x-(x^2+x-2)*1}{x^2}$

$j'\ (x)= \frac{2x^2+x-x^2-x+2}{x^2}$

$j'\ (x)= \frac{x^2+2}{x^2}$.

$j\ (1)= \frac{1^2+1-2}{1}$

$j\ (1)= \frac{1+1-2}{1}$

$j\ (1)= \frac{0}{1}$

$j\ (1)= 0$.

$j'\ (1)= \frac{1^2+2}{1^2}$

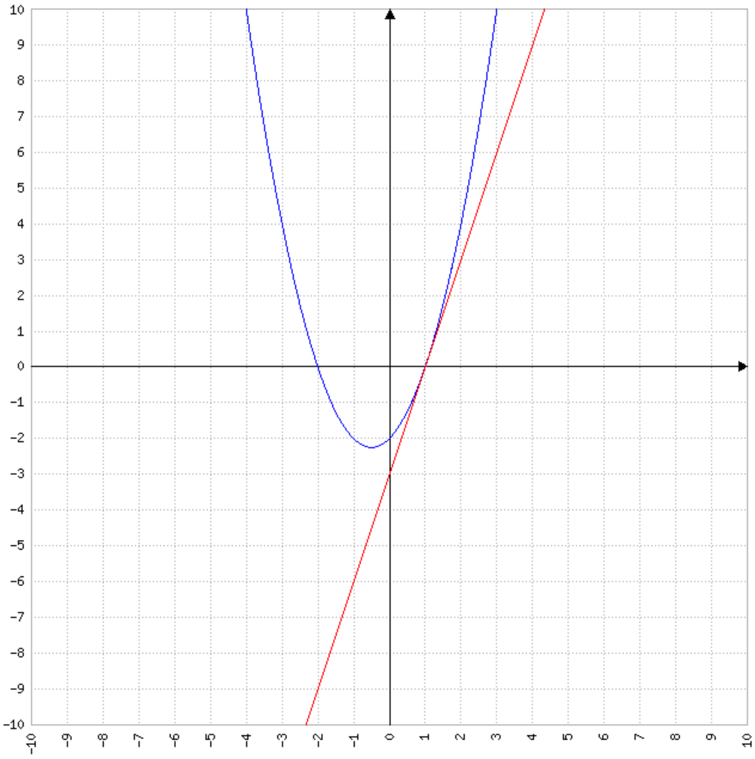
$j'\ (1)= \frac{1+2}{1}$

$j'\ (1)= \frac{3}{1}$

$j'\ (1)= 3$.

$y - 0= 3\ (x - 1)$

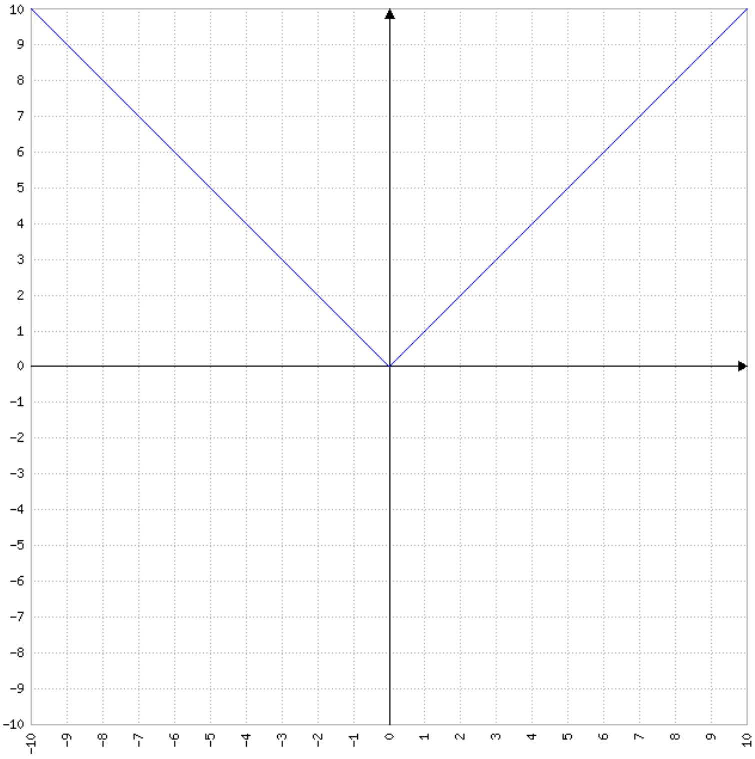
$y= 3x - 3$.



Ejercicio 5.

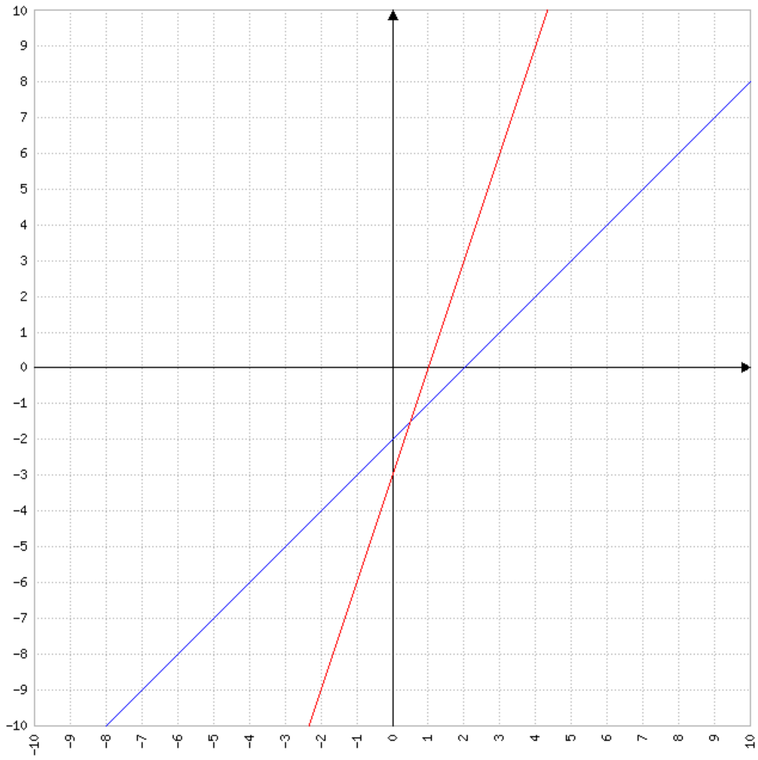
Graficar las siguientes funciones a trozos. ¿Para qué valores de x las funciones no son derivables?

(a) *a (x)=* $|x|$.



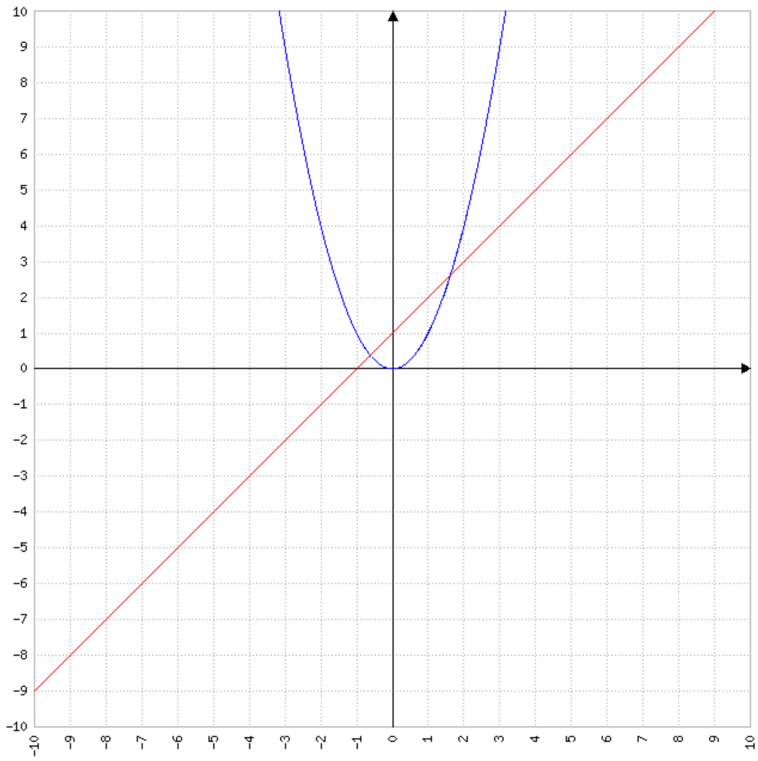
La función a (x) no es derivable para x= 0.

(b) *b (x)=* $\begin{cases} x-2, si\ x \leq 2 \\ 3x-3, si\ x > 2 \end{cases}$.



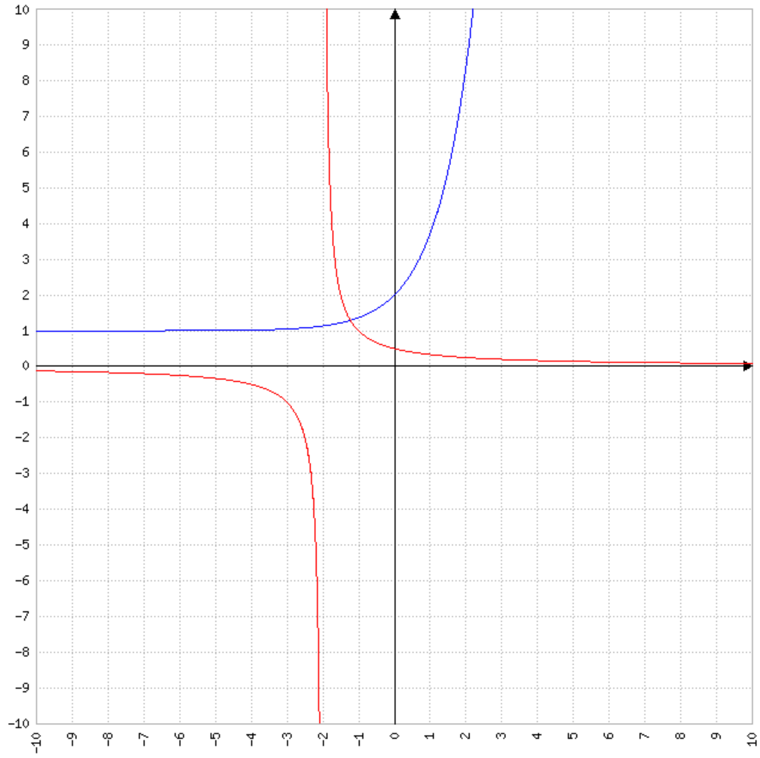
La función b (x) no es derivable para x= 2.

(c) *c (x)*= $\begin{cases} x^2, si\ x \leq 0 \\ x+1, si\ x > 0 \end{cases}$.



La función c (x) no es derivable para x= 0.

(d) *d (x)*= $\begin{cases} e^x + 1, si\ x \leq -1 \\ \frac{1}{x+2}, si\ x > -1 \end{cases}$.



La función d (x) no es derivable para x= -1.

Ejercicio 6.

Realizar el estudio de las siguientes funciones y graficar.

(a) *f (x)=* x^3 *- 3x.*

(1) Determinar el dominio de la función:

Dom_f= ℝ.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

Las funciones polinómicas son continuas en ℝ. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, ∀ a ∈ ℝ.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x = +\infty$.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

f´ (x)= $3x^2$ - 3
f´ (x)= 3 (x^2 - 1).

∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
3 (x^2 - 1)= 0
x^2 - 1= $\frac{0}{3}$
x^2 - 1= 0
x^2= 1
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{1}$
$|x|$= 1
x= $\pm$1.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en x_1= -1 y x_2= 1.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	**(-∞, -1)**	**x= -1**	**(-1, 1)**	**x= 1**	**(1, +∞)**
VP	-2	---	0	---	2
f´ (x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f (x)	creciente	máximo relativo	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (-∞, -1) ∪ (1, +∞) y (-1, 1), respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

f (-1)= $(-1)^3$ - 3 (-1)
f (-1)= -1 + 3
f (-1)= 2.

f (1)= 1^3 - 3 * 1
f (1)= 1 - 3
f (1)= -2.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos máximo y mínimo relativos en (-1, 2) y (-1, -2), respectivamente.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:

f´´ (x)= 6x.

∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0
6x= 0
x= $\frac{0}{6}$
x= 0.

Por lo tanto, f´´ (x)= 0 en x= 0.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	**(-∞, 0)**	**x= 0**	**(0, +∞)**
VP	-1	---	1
f´´ (x)	< 0	0	> 0
f (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

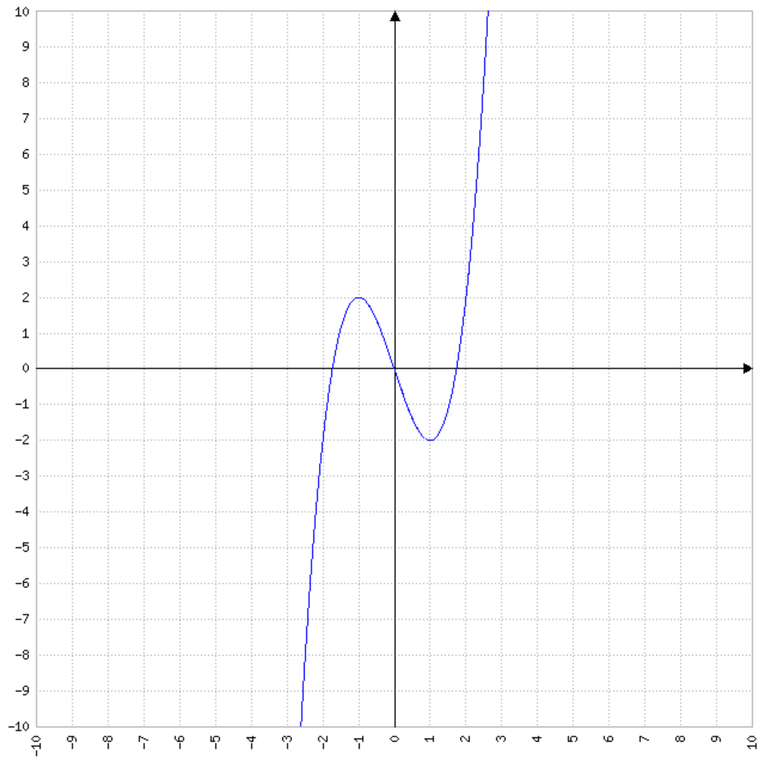
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (0, +∞) y (-∞, 0), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

f (0)= 0^3 - 3 * 0
f (0)= 0 - 0
f (0)= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto de inflexión en (0, 0).

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(b) *h (x)*= $\frac{x^2+1}{x-1}$.

(1) Determinar el dominio de la función:

x - 1= 0
x= 1.

Dom_h= ℝ - {1}.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

h (x) es discontinua inevitable en x= 0, ya que $\lim_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim_{x \to 1^+} h(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 1} h(x)$. Por lo tanto, h (x) es continua en ℝ - {1}.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 1^-} h\ (x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$.

$\lim_{x \to 1^+} h\ (x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$.

Por lo tanto, h (x) tiene una asíntota vertical en x= 1.

$\lim_{x \to -\infty} h\ (x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} h\ (x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$.

Por lo tanto, h (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) <u>Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:</u>

h´ (x)= $\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}$
h´ (x)= $\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$
h´ (x)= $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

$\exists$ h´ (x) $\forall$ x $\in$ Dom_h.

h´ (x)= 0
$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0$
x^2 - 2x - 1= 0 $(x-1)^2$
x^2 - 2x - 1= 0.

$x_1, x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4*1(-1)}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4*2}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{2}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2}$.
$x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

Por lo tanto, h (x) tiene puntos críticos en x_1= 1 - $\sqrt{2}$ y x_2= 1 + $\sqrt{2}$.

(5) <u>Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:</u>

Intervalo	**(-∞, 1 - $\sqrt{2}$)**	**x= 1 - $\sqrt{2}$**	**(1 - $\sqrt{2}$, 1)**	**x= 1**	**(1, 1 + $\sqrt{2}$)**	**x= 1 + $\sqrt{2}$**	**(1 + $\sqrt{2}$, +∞)**
VP	-1	---	0	---	2	---	3
h´ (x)	> 0	0	< 0	---	< 0	0	> 0
h (x)	creciente	máximo relativo	decreciente	asíntota vertical	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (-∞, 1 - $\sqrt{2}$) ∪ (1 + $\sqrt{2}$, +∞) y (1 - $\sqrt{2}$, 1) ∪ (1, 1 + $\sqrt{2}$), respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

h (1 - $\sqrt{2}$)= $\frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= $\frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{-\sqrt{2}}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= $\frac{2\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= $\frac{2(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{2}}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ - 2)
h (1 - $\sqrt{2}$)= 2 - 2 $\sqrt{2}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= 2 (1 - $\sqrt{2}$).

h (1 + $\sqrt{2}$)= $\frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= $\frac{1+2\sqrt{2}+2+1}{\sqrt{2}}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= $\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= $\frac{2(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ + 2)
h (1 + $\sqrt{2}$)= 2 + 2 $\sqrt{2}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= 2 (1 + $\sqrt{2}$).

Por lo tanto, h (x) tiene puntos máximo y mínimo relativos en (1 - $\sqrt{2}$, 2 (1 - $\sqrt{2}$)) y (1 + $\sqrt{2}$, 2 (1 + $\sqrt{2}$)), respectivamente.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:

h´´ (x)= $\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4}$
h´´ (x)= $\frac{2(x-1)(x^2-2x+1)-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}$
h´´ (x)= $\frac{2(x-1)[(x^2-2x+1)-(x^2-2x-1)]}{(x-1)^4}$
h´´ (x)= $\frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3}$
h´´ (x)= $\frac{2*2}{(x-1)^3}$

h´´ (x)= $\frac{4}{(x-1)^3}$.

∃ h´´ (x) ∀ x ∈ Dom_h.

h´´ (x)= 0
$\frac{4}{(x-1)^3}$= 0
4= 0 * $(x-1)^3$
4≠ 0.

Por lo tanto, h´´ (x)≠ 0 ∀ x ∈ Dom_h.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

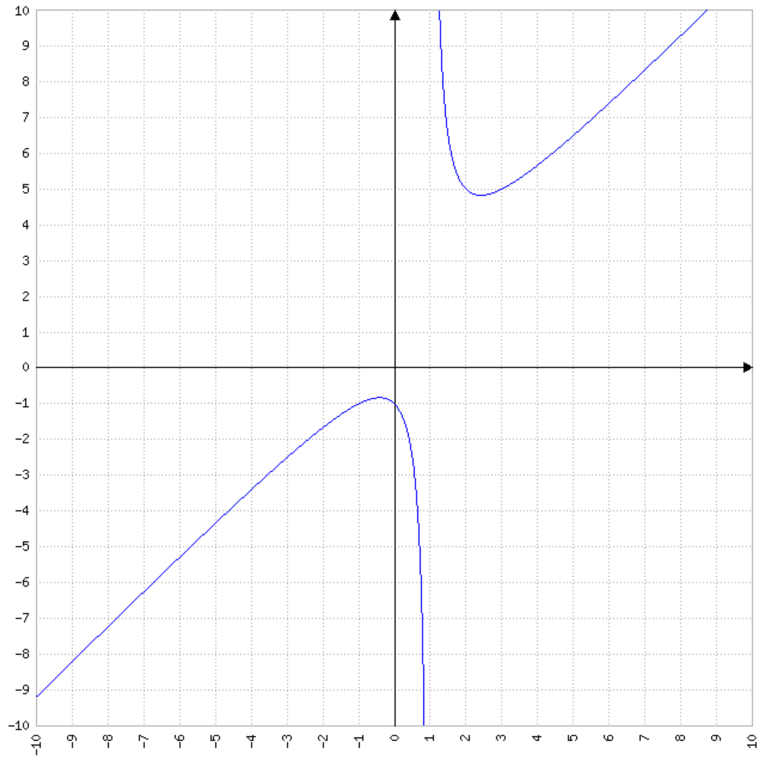
Intervalo	**(-∞, 1)**	**x= 1**	**(1, +∞)**
VP	0	---	2
h´´ (x)	< 0	0	> 0
h (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de h (x) son (1, +∞) y (-∞, 1), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

Por lo tanto, h (x) no tiene puntos de inflexión.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(c) *g (x)*= x^2 + *ln x.*

(1) Determinar el dominio de la función:

Dom_g= (0, +∞).

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

Las funciones logarítmicas son continuas en sus dominios. Por lo tanto, g (x) es continua en (0, +∞).

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + \ln x = -\infty.$

Por lo tanto, g (x) tiene una asíntota vertical en x= 0.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + \ln x = -\infty.$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \ln x = +\infty.$

Por lo tanto, g (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

g´ (x)= 2x + $\frac{1}{x}$
g´ (x)= $\frac{2x^2+1}{x}$.

∃ g´ (x) ∀ x ∈ Dom_g.

g´ (x)= 0
$\frac{2x^2+1}{x}$= 0
$2x^2$ + 1= 0x
$2x^2$ + 1= 0
$2x^2$= -1
x^2= $\frac{-1}{2}$.   ∄ x ∈ ℝ / x^2= $\frac{-1}{2}$.

Por lo tanto, g (x) no tiene puntos críticos.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	**(0, +∞)**
VP	1
g´ (x)	> 0
g (x)	creciente

Por lo tanto, g (x) es crece en todo su dominio.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

Dado que decrece en todo su dominio, g (x) no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:

g´´ (x)= $\frac{4x*x-(2x^2+1)}{x^2}$
g´´ (x)= $\frac{4x^2-2x^2-1}{x^2}$
g´´ (x)= $\frac{2x^2-1}{x^2}$.

∃ g´´ (x) ∀ x ∈ Dom_g.

g´´ (x)= 0
$\frac{2x^2-1}{x^2}$= 0
$2x^2$ - 1= 0 * x^2
$2x^2$ - 1= 0
$2x^2$= 1
x^2= $\frac{1}{2}$

$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{\frac{1}{2}}$

$|x|$= $\frac{1}{\sqrt{2}}$

x= $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, g´´ (x)= 0 en x= $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	**(0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)**	**x= $\frac{1}{\sqrt{2}}$**	**($\frac{1}{\sqrt{2}}$, +∞)**
VP	$\frac{1}{2}$	---	1
g´´ (x)	< 0	0	> 0
g (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de g (x) son ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, +∞) y (0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$), respectivamente.

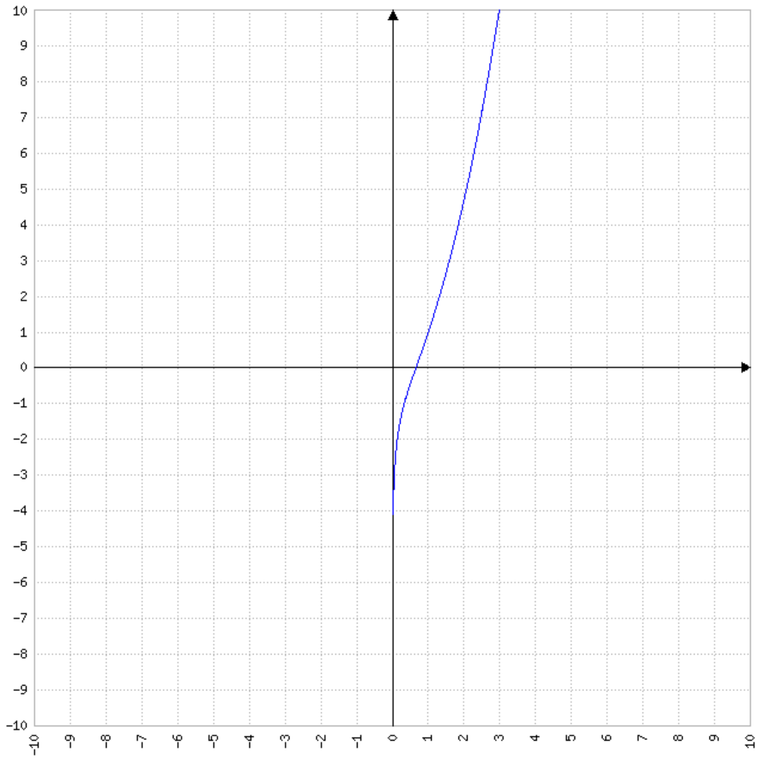
(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

g ($\frac{1}{\sqrt{2}}$)= $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ + ln $\frac{1}{\sqrt{2}}$

g ($\frac{1}{\sqrt{2}}$)= $\frac{1}{2}$ + ln $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, g (x) tiene un punto de inflexión en ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$ + ln $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(d) $j\ (x)= xe^x$.

(1) Determinar el dominio de la función:

Dom_j= ℝ.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

La función identidad (y= x) y las funciones exponenciales son continuas en ℝ. Por lo tanto, j (x) es continua en ℝ.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} j\ (x)= \pm\infty$, ∀ a ∈ ℝ.

Por lo tanto, j (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} j\ (x)= \lim_{x \to -\infty} xe^x= 0$.

$\lim_{x \to +\infty} j\ (x)= \lim_{x \to +\infty} xe^x= +\infty$.

Por lo tanto, j (x) tiene una asíntota horizontal en y= 0.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

j´ (x)= e^x + xe^x
j´ (x)= e^x (x + 1).

∃ j´ (x) ∀ x ∈ Dom_j.

j´ (x)= 0
e^x (x + 1)= 0
x + 1= $\frac{0}{e^x}$
x + 1= 0
x= -1.

Por lo tanto, j (x) tiene un punto crítico en x= -1.

(5) <u>Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:</u>

Intervalo	**(-∞, -1)**	**x= -1**	**(-1, +∞)**
VP	-2	---	0
j´ (x)	< 0	0	> 0
j (x)	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de j (x) son (-1, +∞) y (-∞, -1), respectivamente.

(6) <u>Determinar los valores máximos y mínimos relativos:</u>

j (-1)= -1e^{-1}
j (-1)= $\frac{-1}{e}$.

Por lo tanto, j (x) tiene un punto mínimo relativo en (-1, $\frac{-1}{e}$).

(7) <u>Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:</u>

j´´ (x)= e^x (x + 1) + e^xx
j´´ (x)= e^xx + e^x + e^xx
j´´ (x)= 2e^xx + e^x
j´´ (x)= e^x (2x + 1).

∃ j´´ (x) ∀ x ∈ Dom_j.

j´´ (x)= 0
e^x (2x + 1)= 0
2x + 1= $\frac{0}{e^x}$
2x + 1= 0
2x= -1
x= $\frac{-1}{2}$.

Por lo tanto, j´´´(x)= 0 en x= $\frac{-1}{2}$.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	**(-∞, $\frac{-1}{2}$)**	**x= $\frac{-1}{2}$**	**($\frac{-1}{2}$, +∞)**
VP	-1	---	1
j´´ (x)	< 0	0	> 0
j (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

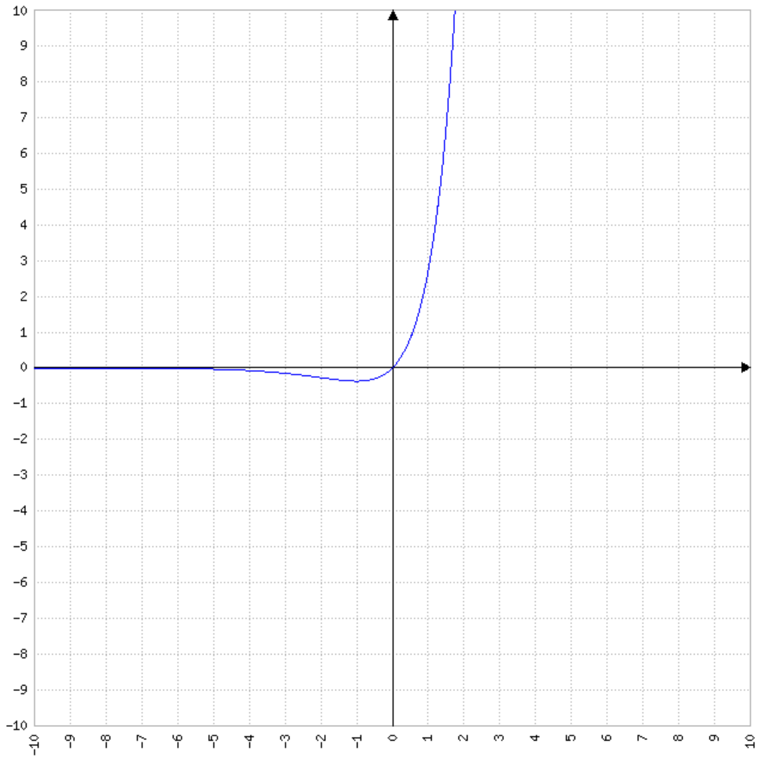
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de j (x) son ($\frac{-1}{2}$, +∞) y (-∞, $\frac{-1}{2}$), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

j ($\frac{-1}{2}$)= $\frac{-1}{2} e^{\frac{-1}{2}}$
j ($\frac{-1}{2}$)= $\frac{-1}{2\sqrt{e}}$.

Por lo tanto, j (x) tiene un punto de inflexión en ($\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{2\sqrt{e}}$).

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



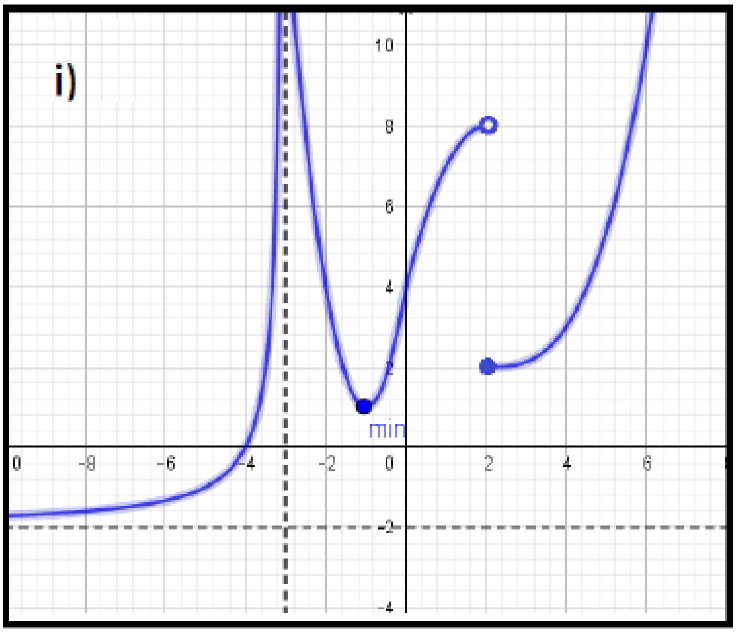
Ejercicio 7.

En cada caso, realizar el gráfico de una función f (x) que cumpla con los siguientes requisitos:

(a)

- *Dominio de f (x): (-∞, -3) ∪ (-3, +∞).*
- *Continuidad: (-∞, -3) ∪ (-3, 2) ∪ (2, +∞).*
- *Discontinuidad inevitable en x= 2.*
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.
- *f´ (x) > 0 en (-∞, -3) ∪ (-1, +∞).*
- *f´ (x) < 0 en (-3, -1).*
- *f´´ (x) > 0 en (-∞, -3) ∪ (-3, 0) ∪ (2, +∞).*
- *f´´ (x) < 0 en (0, 2).*

Intervalo	**(-∞, -3)**	**(-3, -1)**	**(-1, 0)**	**(0, 2)**	**(2, +∞)**
f´ (x)	+	-	+	+	+
f´´ (x)	+	+	+	-	+
f (x)	creciente y convexa	decreciente y convexa	creciente y convexa	creciente y cóncava	creciente y convexa

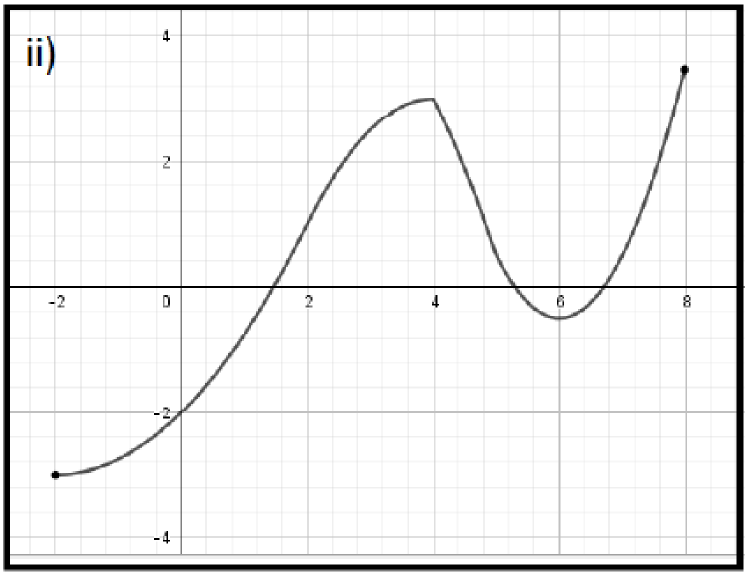


(b)

- *Dominio de f (x): [-2, 8].*
- *Creciente en (-2, 4) ∪ (6, 8) y decreciente en el intervalo (4, 6).*
- *f´´ (x) > 0 en (-2, 2) ∪ (5, 8) y f´´ (x) < 0 en (2, 5).*

- *¿Esta función tiene máximo absoluto? Sí, tiene máximo absoluto (por teorema de Weierstrass).*

Intervalo	**(-2, 2)**	**(2, 4)**	**(4, 5)**	**(5, 6)**	**(6, 8)**
f´ (x)	+	+	-	-	+
f´´ (x)	+	-	-	+	+
f (x)	creciente y cóncava	creciente y convexa	decreciente y convexa	decreciente y cóncava	creciente y cóncava



Ejercicio 8.

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int \frac{\pi}{2} cos\, x \;\; dx$.

$\int \frac{\pi}{2} \cos x \;\; dx = \frac{\pi}{2} \int \cos x \;\; dx$
$\int \frac{\pi}{2} \cos x \;\; dx = \frac{\pi}{2}$ sen x + C.

(b) $\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx$.

$\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx = \int 2x^8 \; dx + \int \frac{-1}{x} dx$
$\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx = 2 \int x^8 \; dx$ - $\int \frac{1}{x} dx$
$\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx = 2 \frac{x^9}{9}$ - ln x
$\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx = \frac{2}{9} x^9$ - ln x + C.

(c) $\int cos\, 3x \; dx$.

$\int \cos 3x \; dx = \int \cos u \frac{du}{3}$ (*)
$\int \cos 3x \; dx = \frac{1}{3} \int \cos u \; du$
$\int \cos 3x \; dx = \frac{1}{3}$ sen u
$\int \cos 3x \; dx = \frac{1}{3}$ sen 3x + C.

(*) u= 3x; du= 3 dx.

(d) $\int x \; sen \; x \; dx$.

$\int x \; sen \; x \; dx$= x (-cos x) - $\int - \cos x \; dx$ (*)
$\int x \; sen \; x \; dx$= -x cos x + $\int \cos x \; dx$
$\int x \; sen \; x \; dx$= -x cos x + sen x + C.

(*) u= x; du= dx; dv= sen x dx; v= -cos x.

(e) $\int x^2 e^x \; dx$.

$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int e^x 2x \, dx$ (*)
$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$
$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 (\mathrm{x} e^x - \int e^x \, dx)$ (**)
$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 (\mathrm{x} e^x - e^x)$
$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\mathrm{x} e^x + 2e^x + \mathrm{C}.$

(*) u= x^2; du= 2x dx; dv= e^x dx; v= e^x.
(**) u= x; du= dx; dv= e^x dx; v= e^x.

(f) $\int x^2(1+x^3) \, dx$.

$\int x^2(1+x^3) \, dx = \int x^2 + x^5 \, dx$
$\int x^2(1+x^3) \, dx = \int x^2 \, dx + \int x^5 \, dx$
$\int x^2(1+x^3) \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \mathrm{C}.$
$\int x^2(1+x^3) \, dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^6 + \mathrm{C}.$

(g) $\int (e^x - 3x^3)^5 (e^x - 9x^2) \, dx$.

$\int (e^x - 3x^3)^5 (e^x - 9x^2) \, dx = \int u^5 \, du$ (*)
$\int (e^x - 3x^3)^5 (e^x - 9x^2) \, dx = \frac{u^6}{6}$
$\int (e^x - 3x^3)^5 (e^x - 9x^2) \, dx = \frac{1}{6} (e^x - 3x^3)^6 + \mathrm{C}.$

(*) u= e^x - $3x^3$; du= (e^x - $9x^2$) dx.

(h) $\int sen \, x \, cos \, x \; dx$.

$\int sen \, x \cos x \; dx = \int u \, du$ (*)
$\int sen \, x \cos x \; dx = \frac{u^2}{2}$
$\int sen \, x \cos x \; dx = \frac{1}{2} (sen \, x)^2 + \mathrm{C}.$

(*) u= sen x; du= cos x dx.

(i) $\int \frac{x}{x+1} \, dx$.

$\int \frac{x}{x+1} \, dx = \int \frac{u-1}{u} \, du$ (*)
$\int \frac{x}{x+1} \, dx = \int 1 - \frac{1}{u} \, du$

$\int \frac{x}{x+1}\, dx$= $\int du$ + $\int \frac{-1}{u}\, du$
$\int \frac{x}{x+1}\, dx$= u - $\int \frac{1}{u}\, du$
$\int \frac{x}{x+1}\, dx$= u - ln $|u|$
$\int \frac{x}{x+1}\, dx$= x + 1 - ln $|x+1|$ + C.

(*) u= x + 1; du= dx.

(j) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$.

$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$= $\int \frac{1}{u} du$ (*)
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$= ln $|u|$
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$= ln $|x^2+x+1|$ + C.

(*) u= x^2 + x + 1; du= (2x + 1) dx.

(k) $\int \frac{4}{(ln\, x)^3 x} dx$.

$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= $\int \frac{4}{u^3} du$ (*)
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= 4 $\int \frac{1}{u^3} du$
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= 4 $\int u^{-3}\, du$
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= 4 $\frac{u^{-2}}{-2}$
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= $\frac{-2}{u^2}$
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= $\frac{-2}{(\ln x)^2}$ + C.

(*) u= ln x; du= $\frac{1}{x}$ dx.

Ejercicio 9.

Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_1^3 (2x+3)^2\, dx$.

$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \int_1^3 u^2\, \frac{du}{2}$ (*)
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_{2*1+3}^{2*3+3} u^2\, du$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} |_{2*3+3}^{2*3+3}$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} (2x+3)^3 |_1^3$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} [(2*3+3)^3 - (2*1+3)^3]$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} [(6+3)^3 - (2+3)^3]$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} (9^3 - 5^3)$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} (729 - 125)$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} * 604$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{302}{3}$.

(*) u= 2x + 3; du= 2 dx.

(b) $\int_0^{\pi} sen\ x\, dx$.

$\int_0^{\pi} sen\ x\, dx$= -cos x $|_0^{\pi}$
$\int_0^{\pi} sen\ x\, dx$= -(cos π - cos 0)
$\int_0^{\pi} sen\ x\, dx$= -(-1 - 1)
$\int_0^{\pi} sen\ x\, dx$= -(-2)
$\int_0^{\pi} sen\ x\, dx$= 2.

(c) $\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\, dx$.

$\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} |_{-1}^{1}$
$\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4} [1^{\frac{4}{3}} - (-1)^{\frac{4}{3}}]$
$\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4}$ (1 - 1)
$\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4} * 0$

$\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\, dx$= 0.

(d) $\int_0^{\pi} cos\, x + 3x^4\, dx$.

$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$ + $\int_0^{\pi} 3x^4\, dx$
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= sen x $|_0^{\pi}$ + 3 $\int_0^{\pi} x^4\, dx$
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= (sen π - sen 0) + 3 $\frac{x^5}{5}$ $|_0^{\pi}$
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= (0 - 0) + $\frac{3}{5}$ (π^5 - 0^5)
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= (0 - 0) + $\frac{3}{5}$ (π^5 - 0)
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= 0 + $\frac{3}{5}$ π^5
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= $\frac{3}{5}$ π^5.

(e) $\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$.

$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= $\int_{1^2+1}^{e^2+1} \frac{1}{u}\, du$ (*)
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln $|u|$ $|_{1^2+1}^{e^2+1}$
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln $|x^2+1|$ $|_1^{e}$
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln ($e^2$ + 1) - ln (1^2 + 1)
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln ($e^2$ + 1) - ln (1 + 1)
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln ($e^2$ + 1) - ln 2
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln $\frac{e^2+1}{2}$.

(*) u= x^2 + 1; du= 2x dx.

(f) $\int_0^{4} e^x x^3\, dx$.

$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= ($x^3 e^x$ - $\int e^x 3x^2\, dx$) $|_0^4$ (*)
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= ($x^3 e^x$ - 3 $\int x^2 e^x\, dx$) $|_0^4$
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= [$x^3 e^x$ - 3 ($x^2 e^x$ - $\int e^x 2x\, dx$)] $|_0^4$ (**)
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= [$x^3 e^x$ - 3 ($x^2 e^x$ - 2 $\int x e^x\, dx$)] $|_0^4$
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= {$x^3 e^x$ - 3 [$x^2 e^x$ - 2 (xe^x - $\int e^x\, dx$)]} $|_0^4$ (***)
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= {$x^3 e^x$ - 3 [$x^2 e^x$ - 2 (xe^x - e^x)]} $|_0^4$
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= [$x^3 e^x$ - 3 ($x^2 e^x$ - 2xe^x + 2e^x)] $|_0^4$

$\int_0^4 e^x x^3\ dx$= ($x^3 e^x$ - $3x^2 e^x$ + 6xe^x - 6e^x) $|_0^4$
$\int_0^4 e^x x^3\ dx$= ($4^3 e^4$ - 3 * $4^2 e^4$ + 6 * 4e^4 - 6e^4) - ($0^3 e^0$ - 3 * $0^2 e^0$ + 6 * 0e^0 - 6e^0)
$\int_0^4 e^x x^3\ dx$= (64e^4 - 3 * 16e^4 + 24e^4 - 6e^4) - (0 * 1 - 3 * 0 * 1 + 6 * 0 * 1 - 6 * 1)
$\int_0^4 e^x x^3\ dx$= (64e^4 - 48e^4 + 24e^4 - 6e^4) - (0 - 0 + 0 - 6)
$\int_0^4 e^x x^3\ dx$= 34e^4 - (-6)
$\int_0^4 e^x x^3\ dx$= 34e^4 + 6.

(*) u= x^3; du= 3x^2 dx; dv= e^x dx; v= e^x.
(**) u= x^2; du= 2x dx; dv= e^x dx; v= e^x.
(***) u= x; du= dx; dv= e^x; v= e^x.

(g) $\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$.

$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= $\int_{2*1+3}^{2*4+3} \sqrt{u}\ \frac{du}{2}$ (*)
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= $\frac{1}{2} \int_{2*1+3}^{2*4+3} u^{\frac{1}{2}}\ du$
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= $\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ |_{2*1+3}^{2*4+3}$
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= $\frac{1}{3}\ (2x+3)^{\frac{3}{2}}\ |_1^4$
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= $\frac{1}{3}$ [$(2*4+3)^{\frac{3}{2}}$ - $(2*1+3)^{\frac{3}{2}}$]
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= $\frac{1}{3}$ [$(8+3)^{\frac{3}{2}}$ - $(2+3)^{\frac{3}{2}}$]
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= $\frac{1}{3}$ ($11^{\frac{3}{2}}$ - $5^{\frac{3}{2}}$)
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= $\frac{1}{3}$ ($11^{\frac{3}{2}}$ - $5^{\frac{3}{2}}$)
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\ dx$= 8,434.

(*) u= 2x + 3; du= 2 dx.

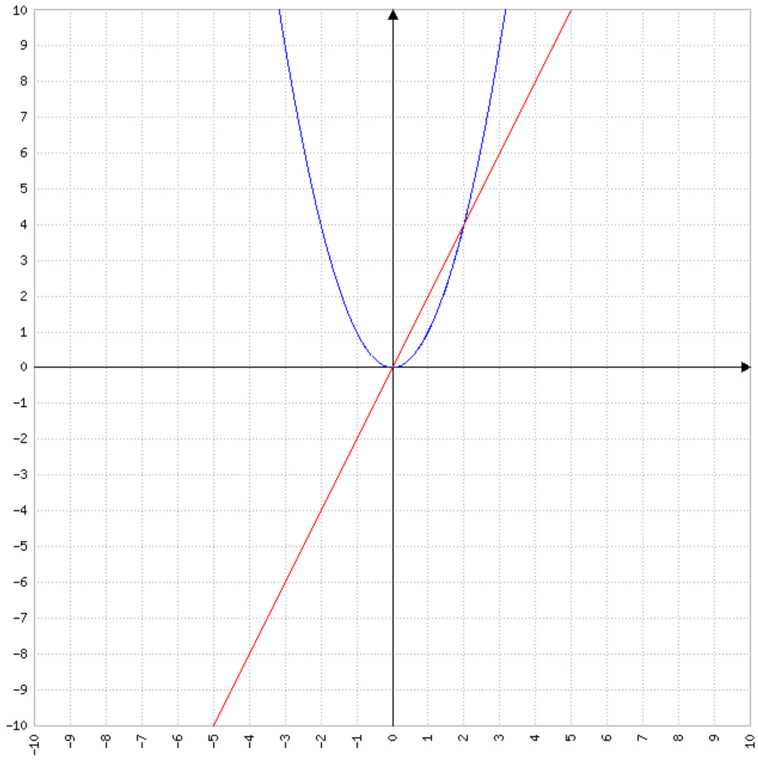
(h) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$.

$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$= $\int_1^3 x^{\frac{-1}{2}}\ dx$
$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$= $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\ |_1^3$
$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$= 2 ($3^{\frac{1}{2}}$ - $1^{\frac{1}{2}}$)
$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$= 2 ($\sqrt{3}$ - 1).

Ejercicio 10.

Graficar las curvas y hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de esas curvas.

(a) *y=* x^2*; y= 2x.*



f (x)= g (x)
x^2= 2x
x^2 - 2x= 0
x (x - 2)= 0.

x_1= 0; x_2= 2.

Intervalo	(0, 2)
VP	1
f (x)	1
g (x)	2

A= $\int_0^2 g\ (x) - f\ (x)\ dx$
A= $\int_0^2 2x - x^2\ dx$
A= $\int_0^2 2x\ dx + \int_0^2 -x^2\ dx$
A= 2 $\int_0^2 x\ dx$ - $\int_0^2 x^2\ dx$
A= 2 $\frac{x^2}{2} |_0^2$ - $\frac{x^3}{3} |_0^2$
A= $(2^2 - 0^2)$ - $\frac{1}{3}(2^3 - 0^3)$

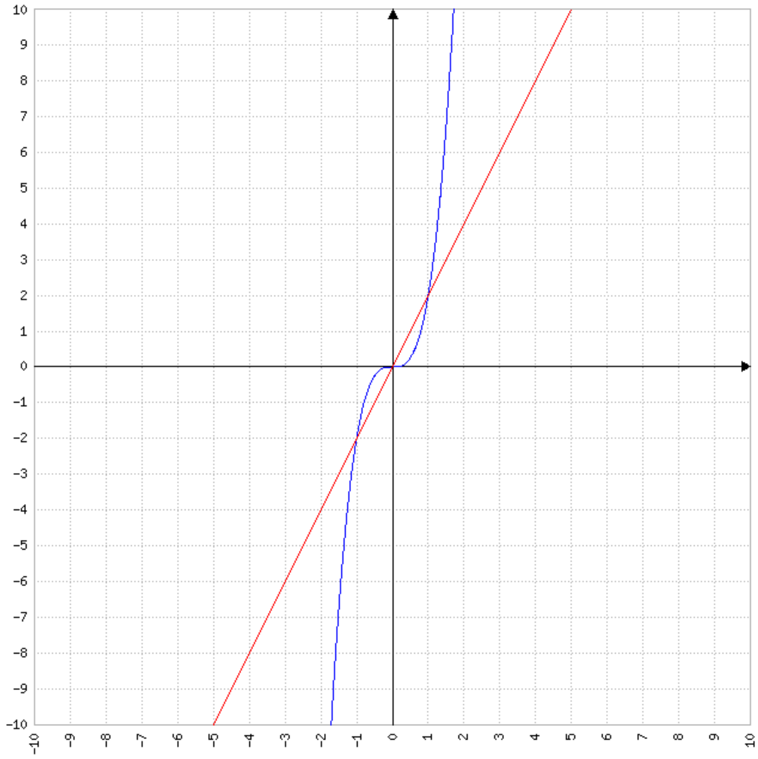
A= $(2^2 - 0^2) - \frac{1}{3}(8 - 0)$

A= $(4 - 0) - \frac{1}{3} * 8$

A= $4 - \frac{8}{3}$

A= $\frac{4}{3}$.

(b) *y= $2x^3$; y= 2x.*



f (x)= g (x)
$2x^3$= 2x
x^3= x
x^3 - x= 0
x (x^2 - 1)= 0.

x_1= 0; x_2= -1; x_3= 1.

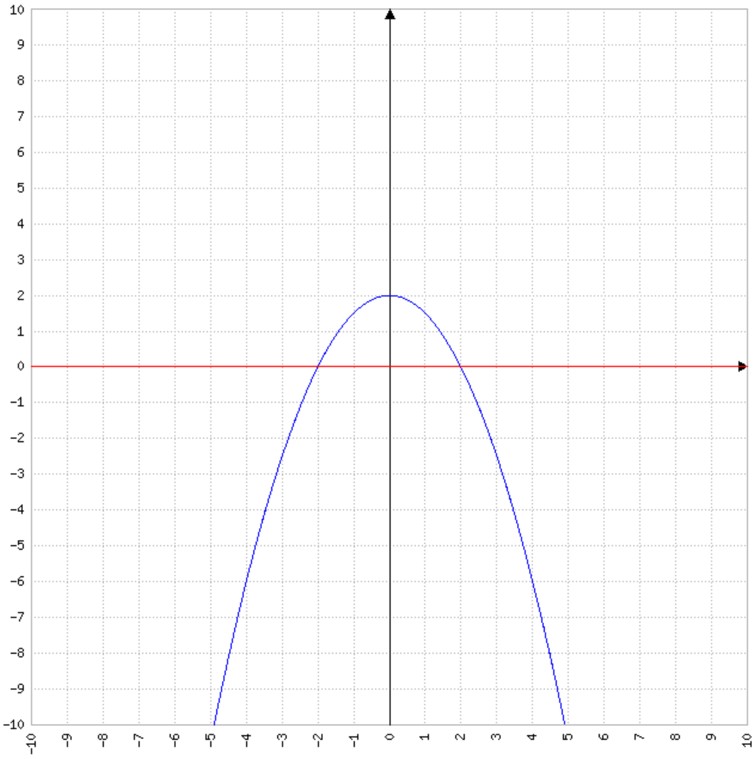
Intervalo	**(-1, 0)**	**(0, 1)**
VP	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f (x)	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$
g (x)	-1	1

A= $\int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\, dx + \int_{0}^{1} g(x) - f(x)\, dx$

A= $\int_{-1}^{0} 2x^3 - 2x\, dx + \int_{0}^{1} 2x - 2x^3\, dx$

A= $\int_{-1}^{0} 2\,(x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} 2\,(x - x^3)\,dx$
A= $2\int_{-1}^{0} x^3 - x\,dx + 2\int_{0}^{1} x - x^3\,dx$
A= $2\,(\int_{-1}^{0} x^3 - x\,dx + \int_{0}^{1} x - x^3\,dx)$
A= $2\,(\int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{0}^{1} -x^3\,dx)$
A= $2\,(\frac{x^4}{4}\,|_{-1}^{0}$ - $\int_{-1}^{0} x\,dx + \frac{x^2}{2}\,|_{0}^{1}$ - $\int_{0}^{1} x^3\,dx)$
A= $2\,\{\frac{1}{4}\,[0^4 - (-1)^4] - \frac{x^2}{2}\,|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\,(1^2 - 0^2) - \frac{x^4}{4}\,|_{0}^{1}\}$
A= $2\,\{\frac{1}{4}\,(0 - 1) - \frac{1}{2}\,[0^2 - (-1)^2] + \frac{1}{2}\,(1 - 0) - \frac{1}{4}\,(1^4 - 0^4)\}$
A= $2\,[\frac{1}{4}\,(-1) - \frac{1}{2}\,(0 - 1) + \frac{1}{2} * 1 - \frac{1}{4}\,(1 - 0)]$
A= $2\,[\frac{-1}{4} - \frac{1}{2}\,(-1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} * 1]$
A= $2\,(\frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4})$
A= $2\,\frac{1}{2}$
A= 1.

(c) *y=* $\frac{-x^2}{2} + 2$*; y= 0-*



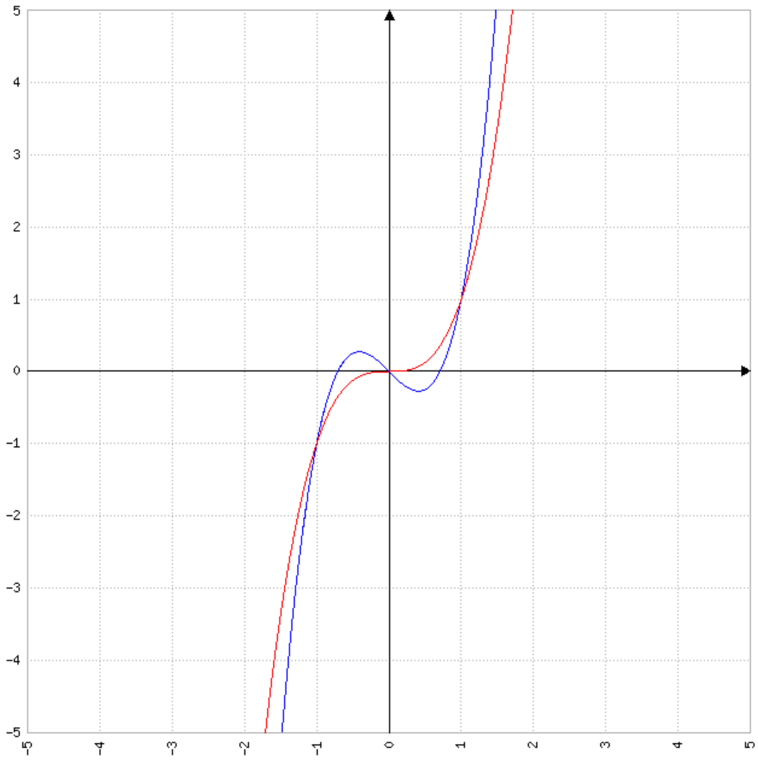
f (x)= g (x)
$\frac{-x^2}{2} + 2 = 0$
$\frac{x^2}{2} = 2$
$x^2 = 2 * 2$
$x^2 = 4$

$\sqrt{x^2}= \sqrt{4}$
$|x|= 2$
x= $\pm$2.

Intervalo	(-2, 2)
VP	0
f (x)	2
g (x)	0

A= $\int_{-2}^{2} f\ (x) - g\ (x)\ dx$
A= $\int_{-2}^{2} \frac{-x^2}{2} + 2 - 0\ dx$
A= $\int_{-2}^{2} \frac{-x^2}{2} + 2\ dx$
A= $\int_{-2}^{2} \frac{-x^2}{2}\ dx + \int_{-2}^{2} 2\ dx$
A= $\frac{-1}{2} \int_{-2}^{2} x^2\ dx + 2 \int_{-2}^{2} dx$
A= $\frac{-1}{2} \frac{x^3}{3} |_{-2}^{2} + 2x |_{-2}^{2}$
A= $\frac{-1}{6} [2^3 - (-2)^3] + 2 [2 - (-2)]$
A= $\frac{-1}{6}$ [8 - (-8)] + 2 (2 + 2)
A= $\frac{-1}{6}$ (8 + 8) + 2 * 4
A= $\frac{-1}{6}$ * 16 + 8
A= $\frac{-16}{6}$ + 8
A= $\frac{16}{3}$.

(d) *y= 2x^3 - x; y= x^3.*



f (x)= g (x)
$2x^3$ - x= x^3
$2x^3$ - x - x^3= 0
x^3 - x= 0
x (x^2 - 1)= 0.

x_1= 0; x_2= -1; x_3= 1.

Intervalo	(-1, 0)	(0, 1)
VP	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f (x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$
g (x)	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$

A= $\int_{-1}^{0} f\ (x) - g\ (x)\ dx$ + $\int_{0}^{1} g\ (x) - f\ (x)\ dx$
A= $\int_{-1}^{0} 2x^3 - x - x^3\ dx$ + $\int_{0}^{1} x^3 - (2x^3 - x)\ dx$
A= $\int_{-1}^{0} x^3 - x\ dx$ + $\int_{0}^{1} x^3 - 2x^3 + x\ dx$
A= $\int_{-1}^{0} x^3 - x\ dx$ + $\int_{0}^{1} -x^3 + x\ dx$
A= $\int_{-1}^{0} x^3\ dx$ + $\int_{-1}^{0} -x\ dx$ + $\int_{0}^{1} -x^3\ dx$ + $\int_{0}^{1} x\ dx$
A= $\frac{x^4}{4}\ |_{-1}^{0}$ - $\int_{-1}^{0} x\ dx$ - $\int_{0}^{1} x^3\ dx$ + $\frac{x^2}{2}\ |_{0}^{1}$
A= $\frac{1}{4}$ [0^4 - $(-1)^4$] - $\frac{x^2}{2}\ |_{-1}^{0}$ - $\frac{x^4}{4}\ |_{0}^{1}$ + $\frac{1}{2}$ (1^2 - 0^2)
A= $\frac{1}{4}$ (0 - 1) - $\frac{1}{2}$ [0^2 - $(-1)^2$] - $\frac{1}{4}$ (1^4 - 0^4) + $\frac{1}{2}$ (1 - 0)

$A = \frac{1}{4}(-1) - \frac{1}{2}(0 - 1) - \frac{1}{4}(1 - 0) + \frac{1}{2} * 1$

$A = \frac{-1}{4} - \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{2}$

$A = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}$.