Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5: Combinatoria y Métodos de Conteo.

Ejercicio 1.

Un hombre tiene ocho camisas, cuatro pantalones y cinco pares de zapatos. ¿Cuántas combinaciones de ropa puede hacer?

R= 8 * 4 * 5
R= 160.

Por lo tanto, puede hacer 160 combinaciones de ropa.

Ejercicio 2.

¿Cuántas patentes de auto diferentes pueden construirse?

R= $26^3 10^3$
R= 17576000.

Por lo tanto, pueden construirse 17.576.000 patentes de auto diferentes.

Ejercicio 3.

(a) *¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 1100?*

R= $1^4 2^4$
R= 1 * 16
R= 16.

Por lo tanto, 16 cadenas de ocho bits comienzan con 1100.

(b) *¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen el segundo o el cuarto bit igual a 1?*

R= 2 * 1 * 2 * 1 * 2^4 + 2 * 1 * 2 * 1 * 2^4
R= 2 * 1 * 2 * 1 * 16 + 2 * 1 * 2 * 1 * 16
R= 64 + 64
R= 128.

Por lo tanto, 128 cadenas de ocho bits tienen el segundo o el cuarto bit igual a 1.

(c) *¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen, exactamente, un 1?*

R= 8 * 1 * 1^7
R= 8 * 1 * 1
R= 8.

Por lo tanto, 8 cadenas de ocho bits tienen, exactamente, un 1.

(d) *¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen, al menos, un 1?*

R= 2^8 - 1^8
R= 256 - 1
R= 255.

Por lo tanto, 255 cadenas de ocho bits tienen, al menos, un 1.

(e) *¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen, exactamente, dos 1?*

R= 7 * $1^2 1^6$ + 6 * $1^2 1^6$ + 5 * $1^2 1^6$ + 4 * $1^2 1^6$ + 3 * $1^2 1^6$ + 2 * $1^2 1^6$ + 1 * $1^2 1^6$
R= 7 * 1 * 1 + 6 * 1 * 1 + 5 * 1 * 1 + 4 * 1 * 1 + 3 * 1 * 1 + 2 * 1 * 1 + 1 * 1 * 1
R= 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
R= 28.

Por lo tanto, 28 cadenas de ocho bits tienen, exactamente, dos 1.

(f) *¿Cuántas cadenas de ocho bits se leen igual en ambas direcciones?*

R= $1^4 2^4$
R= 1 * 16
R= 16.

Por lo tanto, 16 cadenas de ocho bits se leen igual en ambas direcciones.

Ejercicio 4.

Las letras A B C D E se utilizan para formar cadenas de longitud 3.

(a) *¿Cuál es el número total de cadenas?*

R= 5^3
R= 125.

Por lo tanto, el número total de cadenas es 125.

(b) *¿Cuántas cadenas hay sin letras repetidas?*

R= 5 * 4 * 3
R= 60.

Por lo tanto, hay 60 cadenas sin letras repetidas.

(c) *¿Cuántas cadenas comienzan con A?*

R= 1 * 5^2
R= 1 * 25
R= 25.

Por lo tanto, 25 cadenas comienzan con A.

(d) *¿Cuántas cadenas comienzan con A y no tienen letras repetidas?*

R= 1 * 4 * 3
R= 12.

Por lo tanto, 12 cadenas comienzan con A y no tienen letras repetidas.

(e) *¿Cuántas cadenas comienzan con B o con D?*

R= 1 * 5^2 + 1 * 5^2
R= 1 * 25 + 1 * 25
R= 25 + 25
R= 50.

Por lo tanto, 50 cadenas comienzan con B o con D.

(f) *¿Cuántas cadenas comienzan con B o terminan con D?*

R= 1 * 5 * 4 + 4 * 5 * 1
R= 20 + 20
R= 40.

Por lo tanto, 40 cadenas comienzan con B o terminan con D.

Ejercicio 5.

(a) *¿Cuántos enteros entre el 0 y el 200 inclusive son divisibles por 5?*

R= $1 + \frac{200}{5}$
R= 1 + 40
R= 41.

Por lo tanto, 41 enteros entre el 0 y el 200 inclusive son divisibles por 5.

(b) *¿Cuántos enteros de 3 cifras tienen dígitos distintos?*

R= 9 * 9 * 8
R= 648.

Por lo tanto, 648 enteros de 3 cifras tienen dígitos distintos.

(c) *¿Cuántos enteros de 3 cifras contienen el dígito 7?*

R= 1 * 10^2 + 9 * 1 * 10 + 9 * 10 * 1 - 10 - 10 - 9 + 1
R= 1 * 100 + 90 + 90 - 10 - 10 - 9 + 1
R= 100 + 90 + 90 - 10 - 10 - 9 + 1
R= 252.

R= 1 * 10^2 + 8 * 1 * 10 + 8 * 10 * 1 - 8
R= 1 * 100 + 80 + 80 - 8
R= 100 + 80 + 80 - 8
R= 252.

R= 1 * 10^2 + 8 * 1 * 10 + 8 * 9 * 1
R= 1 * 100 + 80 + 72
R= 100 + 80 + 72
R= 252.

Por lo tanto, 252 enteros de 3 cifras contienen el dígito 7.

(d) *¿Cuántos enteros de 3 cifras no contienen al dígito 0?*

R= 9^3
R= 729.

Por lo tanto, 729 enteros de 3 cifras no contienen al dígito 0.

Ejercicio 6.

Con referencia al ejemplo 2.2, ¿de cuántas maneras pueden ocuparse los cargos si Berta es presidente o Carlos tiene un puesto? (Recordar: se considera el "o inclusivo", es decir, que pueden ocurrir las dos cosas).

R= 1 * 5 * 4 + 1 * 5 * 4 + 5 * 1 * 4 + 5 * 4 * 1 - 4 - 4
R= 20 + 20 + 20 + 20 - 4 - 4
R= 72.

R= 1 * 5 * 4 + 1 * 5 * 4 + 4 * 1 * 4 + 4 * 4 * 1
R= 20 + 20 + 16 + 16
R= 72.

Por lo tanto, si Berta es presidente o Carlos tiene un puesto, pueden ocuparse los cargos de 72 maneras.

Ejercicio 7.

Dados los conjuntos A= {a, b, c, d} y B= {x, y, z, w, t, r, h}, ¿cuántas funciones inyectivas hay con dominio A y codominio B?

R= 7 * 6 * 5 * 4
R= 840.

Por lo tanto, hay 840 funciones inyectivas con dominio A y codominio B.

Juan Menduiña

Ejercicio 8.

(a) *¿Cuántos códigos de cuatro letras se pueden formar con las letras P, D, Q, X sin repeticiones?*

R= 4!
R= 24.

Por lo tanto, se pueden formar 24 códigos de cuatro letras con las letras P, D, Q, X sin repeticiones.

(b) *¿Cuántos números diferentes pueden formarse utilizando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 sin repetirlos?*

R= 5!
R= 120.

Por lo tanto, pueden formarse 120 números diferentes utilizando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 sin repetirlos.

(c) *¿De cuántas maneras pueden estacionar 6 bicicletas en una hilera?*

R= 6!
R= 720.

Por lo tanto, se pueden estacionar de 720 maneras 6 bicicletas en una hilera.

Juan Menduiña

Ejercicio 9.

(a) *¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF? (nos referimos a las permutaciones de las letras dadas que tienen a las letras D, E y F juntas y en ese orden).*

R= 4!
R= 24.

Por lo tanto, 24 permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF.

(b) *¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen las letras D, E y F juntas en cualquier orden?*

R= 4! 3!
R= 24 * 6
R= 144.

Por lo tanto, 144 permutaciones de las letras ABCDEF contienen las letras DEF juntas en cualquier orden.

Ejercicio 10.

¿De cuántas formas pueden sentarse seis personas en torno de una mesa circular? Aclaración: Las formas de sentarse obtenidas mediante rotaciones se consideran idénticas.

R= (6 - 1)!
R= 5!
R= 120.

Por lo tanto, pueden sentarse de 120 formas seis personas en torno de una mesa circular.

Ejercicio 11.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MESA? ¿Y las de la palabra SOL?

R= 4!
R= 24.

R= 3!
R= 6.

Por lo tanto, las letras de la palabra MESA y las de la palabra SOL pueden ordenarse de 24 y 6 maneras, respectivamente.

Ejercicio 12.

¿De cuántas maneras pueden izarse en un mástil 7 banderas entre las que hay 3 rojas, 2 verdes y 2 amarillas? (las del mismo color son idénticas).

R= $\frac{7!}{3!2!2!}$
R= $\frac{5040}{6*2*2}$
R= $\frac{5040}{24}$
R= 210.

Por lo tanto, pueden izarse de 210 maneras en un mástil 7 banderas entre las que hay 3 rojas, 2 verdes y 2 amarillas.

Ejercicio 13.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA?

R= $\frac{10!}{2!3!2!}$
R= $\frac{3628800}{2*6*2}$
R= $\frac{3628800}{24}$
R= 151200.

Por lo tanto, las letras de la palabra MATEMATICA pueden ordenarse de 151.200 maneras.

Ejercicio 14.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 5 libros iguales de matemática, 3 libros iguales de computación y 2 libros iguales de física?

R= $\frac{10!}{5!3!2!}$
R= $\frac{3628800}{120*6*2}$
R= $\frac{3628800}{1440}$
R= 2520.

Por lo tanto, en un estante, 5 libros iguales de matemática, 3 libros iguales de computación y 2 libros iguales de física pueden ordenarse de 2.520 maneras.

Ejercicio 15.

(a) *¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 libros distintos de física?*

R= 10!
R= 3628800.

Por lo tanto, en un estante, 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 libros distintos de física pueden ordenarse de 3.628.800 maneras.

(b) *¿De cuántas maneras puede hacerse si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?*

R= 3! 5! 3! 2!
R= 6 * 120 * 6 * 2
R= 8640.

Por lo tanto, en un estante, 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 libros distintos de física, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí, pueden ordenarse de 8.640 maneras.

(c) *¿De cuántas maneras puede hacerse si sólo los de matemática deben estar juntos entre sí?*

R= 2! 5! 5!
R= 2 * 120 * 120
R= 28800.

Por lo tanto, en un estante, 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 libros distintos de física, si sólo los de matemática deben estar juntos entre sí, pueden ordenarse de 28.800 maneras.

Ejercicio 16.

(a) *¿Cuántas permutaciones existen de 11 objetos distintos?*

P (11, 11)= $\frac{11!}{(11-11)!}$
P (11, 11)= $\frac{39916800}{0!}$
P (11, 11)= $\frac{39916800}{1}$
P (11, 11)= 39916800.

Por lo tanto, existen 39.916.800 permutaciones de 11 objetos distintos.

(b) *¿Cuántas 5-permutaciones existen de 11 objetos distintos?*

P (11, 5)= $\frac{11!}{(11-5)!}$
P (11, 5)= $\frac{11*10*9*8*7*6!}{6!}$
P (11, 5)= 11 * 10 * 9 * 8 * 7
P (11, 5)= 55440.

Por lo tanto, existen 55.440 5-permutaciones de 11 objetos distintos.

Ejercicio 17.

Calcular:

(a) *P (10, 4).*

P (10, 4)= $\frac{10!}{(10-4)!}$
P (10, 4)= $\frac{10*9*8*7*6!}{6!}$
P (10, 4)= 10 * 9 * 8 * 7
P (10, 4)= 5040.

(b) *P (4, 4).*

P (4, 4)= $\frac{4!}{(4-4)!}$
P (4, 4)= $\frac{24}{0!}$
P (4, 4)= $\frac{24}{1}$
P (4, 4)= 24.

(c) *P (n, n-1).*

P (n, n-1)= $\frac{n!}{[n-(n-1)]!}$
P (n, n-1)= $\frac{n!}{(n-n+1)!}$
P (n, n-1)= $\frac{n!}{1!}$
P (n, n-1)= $\frac{n!}{1}$
P (n, n-1)= n!.

(d) *P (n, n-2).*

P (n, n-2)= $\frac{n!}{[n-(n-2)]!}$
P (n, n-2)= $\frac{n!}{(n-n+2)!}$
P (n, n-2)= $\frac{n!}{2!}$
P (n, n-2)= $\frac{n!}{2}$.

Ejercicio 18.

Hallar el valor de n tal que:

(a) *P (n, 5)= 7 P (n, 4).*

P (n, 5)= 7 P (n, 4)

$\frac{n!}{(n-5)!}$= 7 $\frac{n!}{(n-4)!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}$= 7 $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$

n (n - 1) (n - 2) (n - 3) (n - 4)= 7 n (n - 1) (n - 2) (n - 3)

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$= 7

n - 4= 7

n= 7 + 4

n= 11.

(b) *P (n, 5)= 9 P (n-1, 4).*

P (n, 5)= 9 P (n-1, 4)

$\frac{n!}{(n-5)!}$= 9 $\frac{(n-1)!}{[(n-1)-4)]!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}$= 9 $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}$

n (n - 1) (n - 2) (n - 3) (n - 4)= 9 (n - 1) (n - 2) (n - 3) (n - 4)

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$= 9

n= 9.

Ejercicio 19.

(a) *¿Cuántos códigos de 7 letras diferentes pueden formarse con las letras del conjunto {A, B, C, D, E, F, G}?*

P (7, 7)= $\frac{7!}{(7-7)!}$
P (7, 7)= $\frac{5040}{0!}$
P (7, 7)= $\frac{5040}{1}$
P (7, 7)= 5040.

Por lo tanto, pueden formarse 5.040 códigos de 7 letras diferentes con las letras del conjunto {A, B, C, D, E, F, G}.

(b) *¿Cuántos de 5 letras diferentes?*

P (7, 5)= $\frac{7!}{(7-5)!}$
P (7, 5)= $\frac{5040}{2!}$
P (7, 5)= $\frac{5040}{2}$
P (7, 5)= 2520.

Por lo tanto, pueden formarse 2.520 códigos de 5 letras diferentes con las letras del conjunto {A, B, C, D, E, F, G}.

(c) *¿Cuántos de hasta tres letras diferentes?*

R= P (7, 1) + P (7, 2) + P (7, 3)
R= $\frac{7!}{(7-1)!} + \frac{7!}{(7-2)!} + \frac{7!}{(7-3)!}$
R= $\frac{7*6!}{6!} + \frac{7*6*5!}{5!} + \frac{7*6*5*4!}{4!}$
R= 7 + 7 * 6 + 7 * 6 * 5
R= 7 + 42 + 210
R= 259.

Ejercicio 20.

Interpretar la fórmula C (n, r)= $\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$ *para el caso r= 0.*

C (n, 0)= $\frac{P(n,0)}{0!}$
C (n, 0)= $\frac{n!}{(n-0)!0!}$
C (n, 0)= $\frac{n!}{n!*1}$
C (n, 0)= 1.

Por lo tanto, para el caso r= 0, la fórmula C (n, r) se interpreta como que hay una única combinación posible al seleccionar cero elementos de un conjunto de n elementos, la cual es la combinación vacía.

Ejercicio 21.

Calcular:

(a) $\binom{7}{4}$.

C (7, 4)= $\frac{7!}{(7-4)!4!}$
C (7, 4)= $\frac{7*6*5*4!}{3!4!}$
C (7, 4)= $\frac{7*6*5}{6}$
C (7, 4)= 7 * 5
C (7, 4)= 35.

(b) $\binom{10}{8}$.

C (10, 8)= $\frac{10!}{(10-8)!8!}$
C (10, 8)= $\frac{10*9*8!}{2!8!}$
C (10, 8)= $\frac{10*9}{2}$
C (10, 8)= 5 * 9
C (10, 8)= 45.

(c) $\binom{n}{1}$.

C (n, 1)= $\frac{n!}{(n-1)!1!}$
C (n, 1)= $\frac{n(n-1)!}{(n-1)!*1}$
C (n, 1)= $\frac{n}{1}$
C (n, 1)= n.

(d) $\binom{n}{n-1}$.

C (n, n-1)= $\frac{n!}{[n-(n-1)]!(n-1)!}$
C (n, n-1)= $\frac{n(n-1)!}{(n-n+1)!(n-1)!}$
C (n, n-1)= $\frac{n!}{1!}$
C (n, n-1)= $\frac{n!}{1}$
C (n, n-1)= n!.

(e) $\binom{n}{n}$.

C (n, n)= $\frac{n!}{(n-n)!n!}$
C (n, n)= $\frac{1}{0!*1}$
C (n, n)= $\frac{1}{1*1}$
C (n, n)= $\frac{1}{1}$
C (n, n)= 1.

Ejercicio 22.

Demostrar que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ *cualesquiera sean n y r* $\leq$ *n.*

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

C (n, r)= C (n, n-r)

$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!}$

$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!}$

$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!}$

$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Ejercicio 23.

Hallar el valor de n:

(a) $\binom{n+1}{3}= 2\binom{n}{2}$.

$\binom{n+1}{3}= 2\binom{n}{2}$
C (n+1, 3)= 2 C (n, 2)
$\frac{(n+1)!}{[(n+1)-3]!3!}= 2\,\frac{n!}{(n-2)!2!}$
$\frac{(n+1)!}{(n+1-3)!3!}= 2\,\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!*2}$
$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!*6}$= n (n - 1)
$\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$= n (n - 1)
$\frac{(n+1)n(n-1)}{n(n-1)}$= 6
n + 1= 6
n= 6 - 1
n= 5.

(b) $\binom{n}{n-2}= 6$.

$\binom{n}{n-2}$= 6
C (n, n-2)= 6
$\frac{n!}{[n-(n-2)]!(n-2)!}$= 6
$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-n+2)!(n-2)!}$= 6
$\frac{n(n-1)}{2}$= 6
n (n - 1)= 6 * 2
n^2 - n= 12
n^2 - n - 12= 0.

$n_1, n_2= \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4*1(-12)}}{2*1}$
$n_1, n_2= \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}$
$n_1, n_2= \frac{1\pm\sqrt{49}}{2}$
$n_1, n_2= \frac{1\pm 7}{2}$
$n_1= \frac{1+7}{2}= \frac{8}{2}$= 4.
$n_2= \frac{1-7}{2}= \frac{-6}{2}$= -3.

(c) $\binom{n}{3}= \binom{n-1}{1}\binom{n}{1}$.

$\binom{n}{3}$= $\binom{n-1}{1}$ $\binom{n}{1}$

C (n, 3)= C (n-1, 1) C (n, 1)

$\frac{n!}{(n-3)!3!}$= $\frac{(n-1)!}{[(n-1)-1]!1!}$ $\frac{n!}{(n-1)!1!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!*6}$= $\frac{(n-1)!}{(n-1-1)!*1}$ $\frac{n(n-1)!}{(n-1)!*1}$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$= $\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!*1}$ $\frac{n}{1}$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$= $\frac{n-1}{1}$ n

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$= n (n - 1)

$\frac{n(n-1)(n-2)}{n(n-1)}$= 6

n - 2= 6

n= 6 + 2

n= 8.

Ejercicio 24.

¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen, exactamente, cuatro unos?

C (8, 4)= $\frac{8!}{(8-4)!4!}$
C (8, 4)= $\frac{8*7*6*5*4!}{4!*24}$
C (8, 4)= 2 * 7 * 5
C (8, 4)= 70.

Por lo tanto, 70 cadenas de ocho bits contienen, exactamente, cuatro unos.

Ejercicio 25.

¿De cuantas formas puede elegirse un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres distintas y seis hombres distintos?

R= C (5, 2) C (6, 3)
R= $\frac{5!}{(5-2)!2!} \frac{6!}{(6-3)!3!}$
R= $\frac{5*4*3!}{3!*2} \frac{6*5*4*3!}{3!*6}$
R= 5 * 2 * 2 * 5 * 2
R= 200.

Por lo tanto, un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres distintas y seis hombres distintos puede elegirse de 200 formas.

Ejercicio 26.

¿Cuántos partidos de football se juegan en una liga de 9 equipos si cada uno de ellos debe jugar dos veces contra cada rival?

C (9, 2)= $\frac{9!}{(9-2)!2!}$
C (9, 2)= $\frac{9*8*7!}{7!*2}$
C (9, 2)= 9 * 4
C (9, 2)= 36.

Por lo tanto, en una liga de 9 equipos, si cada uno de ellos debe jugar dos veces contra cada rival, se juegan 36 partidos.

Ejercicio 27.

Una baraja de 52 cartas consta de 4 palos con 13 denominaciones cada uno de ellos y una mano de póquer consta de cinco de esas cartas (sin importar el orden).

(a) *¿Cuántas manos de póquer pueden elegirse?*

C (52, 5)= $\frac{52!}{(52-5)!5!}$
C (52, 5)= $\frac{52*51*50*49*48*47!}{47!*120}$
C (52, 5)= 52 * 51 * 10 *49 * 2
C (52, 5)= 2598960.

Por lo tanto, pueden elegirse 2.598.960 manos de póquer.

(b) *¿Cuántas manos de póquer tienen todas las cartas del mismo palo?*

C (13, 5)= $\frac{13!}{(13-5)!5!}$
C (13, 5)= $\frac{13*12*11*10*9*8!}{8!*120}$
C (13, 5)= 13 * 3 * 11 * 3
C (13, 5)= 1287.

Por lo tanto, 1.287 manos de póquer tienen todas las cartas del mismo palo.

(c) *¿Cuántas manos de póquer tienen tres cartas de una denominación y otras dos de otra denominación?*

R= C (13, 1) C (4, 3) C (12, 1) C (4, 2)
R= $\frac{13!}{(13-1)!1!} \frac{4!}{(4-3)!3!} \frac{12!}{(12-1)!1!} \frac{4!}{(4-2)!2!}$
R= $\frac{13*12!}{12!*1} \frac{4*3!}{1!3!} \frac{12*11!}{11!*1} \frac{4*3*2!}{2!*2}$
R= 13 $\frac{4}{1} \frac{12}{1}$ * 2 * 3
R= 13 * 4 * 12 * 2 * 3
R= 3744.

Por lo tanto, 3.744 manos de póquer tienen tres cartas de una denominación y otras dos de otra denominación.

Ejercicio 28.

Demostrar que $\binom{n}{k+1}= \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$.

$\binom{n}{k+1}= \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$

C (n, k+1)= C (n, k) $\frac{n-k}{k+1}$

$\frac{n!}{[n-(k+1)]!(k+1)!}= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{n-k}{k+1}$

$\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{n-k}{k+1}$

$\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}= \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!(k+1)!}$ (n - k)

$\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}= \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$.

Ejercicio 29.

Si un examen de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 3 opciones de respuesta, ¿de cuántas maneras se puede responder?

R= $[C\ (3,1)]^5$
R= $[\frac{3!}{(3-1)!1!}]^5$
R= $(\frac{3*2!}{2!*1})^5$
R= 3^5
R= 243.

Por lo tanto, si un examen de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 3 opciones de respuesta, se puede responder de 243 maneras.

Ejercicio 30.

¿Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen con 101 o con 111?

R= $2\ [C\ (2{,}1)]^5$
R= $2\ [\frac{2!}{(2-1)!1!}]^5$
R= $2\ (\frac{2*1!}{1!*1})^5$
R= $2 * 2^5$
R= 2^6
R= 64.

Por lo tanto, hay 64 cadenas de 8 bits que comiencen con 101 o con 111.

Ejercicio 31.

¿Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen o terminen con 1?

R= 2 $[C\ (2,1)]^7$ - $\frac{1}{2}$ $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$
R= 2 $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$ - $\frac{1}{2}$ $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$
R= 2 $(\frac{2*1!}{1!*1})^7$ - $\frac{1}{2}$ $(\frac{2*1!}{1!*1})^7$
R= 2 $*\ 2^7$ - $\frac{1}{2}*2^7$
R= 2 * 128 - $\frac{1}{2}$ * 128
R= 256 - 64
R= 192.

R= $[C\ (2,1)]^7 + \frac{1}{2}$ $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$
R= $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7 + \frac{1}{2}$ $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$
R= $(\frac{2*1!}{1!*1})^7 + \frac{1}{2}$ $(\frac{2*1!}{1!*1})^7$
R= $2^7 + \ \frac{1}{2}*2^7$
R= 128 + $\frac{1}{2}$ * 128
R= 128 + 64
R= 192.

R= $[C\ (2,1)]^8$ - $[C\ (2,1)]^6$
R= $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^8$ - $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^6$
R= $(\frac{2*1!}{1!*1})^8$ - $(\frac{2*1!}{1!*1})^6$
R= 2^8 - 2^6
R= 256 - 64
R= 192.

Por lo tanto, hay 192 cadenas de 8 bits que comiencen o terminen con 1.

Ejercicio 32.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse 5 libros de Matemática, 4 de Física y 6 de Informática, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?

R= P (3, 3) P (5, 5) P (4, 4) P (6, 6)
R= $\frac{3!}{(3-3)!} \frac{5!}{(5-5)!} \frac{4!}{(4-4)!} \frac{6!}{(6-6)!}$
R= $\frac{6}{0!} \frac{120}{0!} \frac{24}{0!} \frac{720}{0!}$
R= $\frac{6}{1} \frac{120}{1} \frac{24}{1} \frac{720}{1}$
R= 6 * 120 * 24 * 720
R= 12441600.

Por lo tanto, 5 libros de Matemática, 4 de Física y 6 de Informática, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí, pueden ordenarse de 12.441.600 maneras.

Ejercicio 33.

En una fiesta con 20 invitados donde todos se saludan entre sí, ¿cuántos saludos hay?

C (20, 2)= $\frac{20!}{(20-2)!2!}$
C (20, 2)= $\frac{20*19*18!}{18!*2}$
C (20, 2)= 10 * 19
C (20, 2)= 190.

Por lo tanto, en una fiesta con 20 invitados, donde todos se saludan entre sí, hay 190 saludos.

Ejercicio 34.

De un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, se quiere formar un grupo de 4 estudiantes.

(a) *¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber 2 de Informática, 1 de Física y 1 de Ingeniería?*

R= C (10, 2) C (5, 1) C (8, 1)

R= $\frac{10!}{(10-2)!2!} \frac{5!}{(5-1)!1!} \frac{8!}{(8-1)!1!}$

R= $\frac{10*9*8!}{8!*2} \frac{5*4!}{4!*1} \frac{8*7!}{7!*1}$

R= 5 * 9 * 5 * 8

R= 1800.

Por lo tanto, si, de un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, debe haber 2 de Informática, 1 de Física y 1 de Ingeniería, puede hacerse de 1.800 maneras.

(b) *¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber, al menos, uno de Ingeniería?*

R= C (8, 1) C (15, 3) + C (8, 2) C (15, 2) + C (8, 3) C (15, 1) + C (8, 4) C (15, 0)

R= $\frac{8!}{(8-1)!1!} \frac{15!}{(15-3)!3!} + \frac{8!}{(8-2)!2!} \frac{15!}{(15-2)!2!} + \frac{8!}{(8-3)!3!} \frac{15!}{(15-1)!1!} + \frac{8!}{(8-4)!4!} \frac{15!}{(15-0)!0!}$

R= $\frac{8*7!}{7!*1} \frac{15*14*13*12!}{12!*6} + \frac{8*7*6!}{6!*2} \frac{15*14*13!}{13!*2} + \frac{8*7*6*5!}{5!*6} \frac{15*14!}{14!*1} + \frac{8*7*6*5*4!}{4!*24} \frac{15!}{15!*1}$

R= 8 * 5 * 7 * 13 + 4 * 7 * 15 * 7 + 8 * 7 * 15 + 2 * 7 * 5

R= 3640 + 2940 + 840 + 70

R= 7490.

Por lo tanto, si, de un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, debe haber, al menos, uno de Ingeniería, puede hacerse de 7.490 maneras.

Ejercicio 35.

¿Cuántos números impares de 4 cifras hay?

R= C (9, 1) C (10, 1) C (10, 1) C (5, 1)
R= $\frac{9!}{(9-1)!1!} \frac{10!}{(10-1)!1!} \frac{10!}{(10-1)!1!} \frac{5!}{(5-1)!1!}$
R= $\frac{9*8!}{8!*1} \frac{10*9!}{9!*1} \frac{10*9!}{9!*1} \frac{5*4!}{4!*1}$
R= 9 * 10 * 10 * 5
R= 4500.

Por lo tanto, hay 4.500 números impares de 4 cifras.

Ejercicio 36.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse 3 libros de Ciencia Ficción, 5 de Novelas Policiales y 7 de Poesía, si los de Ciencia Ficción deben estar juntos entre sí?

R= P (2, 2) P (3, 3) P (12, 12)

R= $\frac{2!}{(2-2)!} \frac{3!}{(3-3)!} \frac{12!}{(12-12)!}$

R= $\frac{2}{0!} \frac{6}{0!} \frac{1479001600}{0!}$

R= $\frac{2}{1} \frac{6}{1} \frac{479001600}{1}$

R= 2 * 6 * 479001600

R= 5748019200.

Por lo tanto, 3 libros de Ciencia Ficción, 5 de Novelas Policiales y 7 de Poesía, si los de Ciencia Ficción deben estar juntos entre sí, pueden ordenarse de 5.748.019.200 maneras.

Ejercicio 37.

Con 21 equipos de futbol, ¿cuántos partidos se juegan si deben jugar una vez todos contra todos?

C (21, 2)= $\frac{21!}{(21-2)!2!}$
C (21, 2)= $\frac{21*20*19!}{19!*2}$
C (21, 2)= 21 * 10
C (21, 2)= 210.

Por lo tanto, con 21 equipos de fútbol, si deben jugar una vez todos contra todos, se juegan 210 partidos.

Ejercicio 38.

En un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una:

(a) *¿De cuántas maneras se puede sacar 0?*

R= $[C\ (2,1)]^5$
R= $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^5$
R= $(\frac{2*1!}{1!*1})^5$
R= 2^5
R= 32.

Por lo tanto, en un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una, se puede sacar 0 de 32 maneras.

(b) *¿De cuántas maneras se puede sacar 10?*

R= $[C\ (1,1)]^5$
R= $[\frac{1!}{(1-1)!1!}]^5$
R= $(\frac{1}{0!*1})^5$
R= $(\frac{1}{1*1})^5$
R= $(\frac{1}{1})^5$
R= 1^5
R= 1.

Por lo tanto, en un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una, se puede sacar 0 de 1 manera.

(c) *Si se considera que cada pregunta vale 2 puntos, ¿de cuántas maneras se puede sacar 4?*

R= C (5, 2)
R= $\frac{5!}{(5-2)!2!}$
R= $\frac{5*4*3!}{3!*2}$
R= 5 * 2
R= 10.

Por lo tanto, en un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una, si se considera que cada pregunta vale 2 puntos, se puede sacar 4 de 10 maneras.

(d) *¿De cuántas maneras se puede sacar 4 o más?*

R= C (5, 2) + C (5, 3) + C (5, 4) + C (5, 5)
R= $\frac{5!}{(5-2)!2!} + \frac{5!}{(5-3)!3!} + \frac{5!}{(5-4)!4!} + \frac{5!}{(5-5)!5!}$
R= $\frac{5*4*3!}{3!*2} + \frac{5*4*3!}{2!3!} + \frac{5*4!}{1!4!} + \frac{5!}{0!5!}$
R= 5 * 2 + $\frac{5*4}{2} + \frac{5}{1} + \frac{1}{1}$
R= 10 + 5 * 2 + 5 + 1
R= 10 + 10 + 5 + 1
R= 26.

Por lo tanto, en un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una, se puede sacar 4 o más de 26 maneras.

Ejercicio 39.

¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra TELEFONO?

R= $\frac{P(8,8)}{P(2,2)P(2,2)}$

R= $\frac{\frac{8!}{(8-8)!}}{\frac{2!}{(2-2)!}\frac{2!}{(2-2)!}}$

R= $\frac{\frac{40320}{0!}}{\frac{2}{0!}\frac{2}{0!}}$

R= $\frac{\frac{40320}{1}}{\frac{2}{1}\frac{2}{1}}$

R= $\frac{40320}{2*2}$

R= $\frac{40320}{4}$

R= 10080.

Por lo tanto, las letras de la palabra TELEFONO pueden ordenarse de 10.080 formas.

Ejercicio 40.

En el Quini 6 los apostadores deben elegir 6 números entre el 0 y el 45, ¿cuántos resultados puede haber?

C (46, 6)= $\frac{46!}{(46-6)!6!}$
C (46, 6)= $\frac{46*45*44*43*42*41*40!}{40!*720}$
C (46, 6)= 23 * 3 * 11 * 43 * 7 * 41
C (46, 6)= 9366819.

Por lo tanto, en el Quini 6, donde se deben elegir 6 números entre el 0 y el 45, puede haber 9.366.819 resultados.