

Ejercitación Teórica N° 3: **Análisis de Algoritmos.**

Ejercicio 1.

Ordenar las siguientes funciones: \sqrt{n} , n , 3^n , n^2 , cte , 2^n , $\log_2^2 n$, $\log_3 n$, $\log_2 n$, según su velocidad de crecimiento.

$$cte < \log_3 n < \log_2 n < \log_2^2 n < \sqrt{n} < n < n^2 < 2^n < 3^n.$$

Ejercicio 2.

Expresar de qué orden es el siguiente fragmento de código:

```
for (int j = 4; j < n; j=j+2) {
    val = 0;
    for (int i = 0; i < j; ++i) {
        val = val + i * j;
        for (int k = 0; k < n; ++k){
            val++;
        }
    }
}
```

- (a) $O(n \log n)$. (b) $O(n^2)$. (c) $O(n^2 \log n)$. **(d) $O(n^3)$.**

Iteraciones del primer *for*:

$j = 4$.
 $j = 4 + 2$.
 $j = 4 + 2 * 2$.
 \dots
 $j = 4 + 2 (k - 1)$.

$$4 + 2 (k - 1) = n - 1$$

$$2 (k - 1) = n - 1 - 4$$

$$2 (k - 1) = n - 5$$

$$k - 1 = \frac{n-5}{2}$$

$$k = \frac{n-5}{2} + 1$$

$$k = \frac{n-3}{2}$$

Iteraciones del segundo *for*:

$i = 0$.
 $i = 1$.
 $i = 2$.
 \dots
 $i = k - 1$.

$$k - 1 = j - 1$$

$$k = j - 1 + 1$$

$$k = j$$

Iteraciones del tercer *for*:

$k = 0$.

k= 1.

k= 2.

...

k= k' - 1.

k - 1= n - 1

k= n - 1 + 1

k= n.

Entonces:

$$T(n) = \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} cte_1 (\sum_{i=1}^j cte_2 + \sum_{k=1}^n cte_3)$$

$$T(n) = \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} cte_1 (\sum_{i=1}^j cte_2 + n * cte_3)$$

$$T(n) = \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} cte_1 * j * (cte_2 + n * cte_3)$$

$$T(n) = cte_1 (cte_2 + n cte_3) \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} j$$

$$T(n) = cte_1 (cte_2 + n cte_3) \frac{\frac{n-3}{2}(\frac{n-3}{2}+1)}{2}$$

$$T(n) = cte_1 (cte_2 + n cte_3) \frac{\frac{n-3}{2} \frac{n-1}{2}}{2}$$

$$T(n) = cte_1 (cte_2 + n cte_3) \frac{\frac{n^2-n-3n+3}{4}}{2}$$

$$T(n) = cte_1 (cte_2 + n cte_3) \frac{\frac{n^2-4n+3}{4}}{2}$$

$$T(n) = cte_1 (cte_2 + n cte_3) \frac{n^2-4n+3}{8}$$

$$T(n) = cte_1 (cte_2 + n cte_3) (\frac{1}{8} n^2 - \frac{1}{2} n + \frac{3}{8})$$

$$T(n) = (\frac{1}{8} n^2 - \frac{1}{2} n + \frac{3}{8}) cte_1 cte_2 + (\frac{1}{8} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{8} n) cte_1 cte_3.$$

Por lo tanto, el fragmento de código es de orden $O(n^3)$.

Ejercicio 3.

Suponer que se dispone de un algoritmo A, que resuelve un problema de tamaño n, y su función de tiempo de ejecución es $T(n) = n \log_2(n)$. Este algoritmo se ejecuta en una computadora que procesa 10.000 operaciones por segundo. Determinar el tiempo que requerirá el algoritmo para resolver un problema de tamaño $n = 1.024$.

$$T(n) = n \log_2 n.$$

$$T(1024) = 1024 \log_2 1024$$

$$T(1024) = 1024 * 10$$

$$T(1024) = 10240.$$

10.000 operaciones por segundo.

$$\text{Tiempo (en segundos)} = \frac{10240}{10000}$$

$$\text{Tiempo (en segundos)} = 1,024.$$

Por lo tanto, el tiempo en segundos que requerirá el algoritmo para resolver un problema de tamaño $n = 1.024$ es 1,024.

Ejercicio 4.

¿Cuál es el resultado de la siguiente sumatoria? $\sum_{i=3}^8 ni$.

(a) $(8-3+1) n$.

(b) $(8-3+1) in$.

(c) $33n$.

(d) $5n$.

(e) $8i$.

(f) Ninguna de las otras opciones.

$$\sum_{i=3}^8 ni = n \sum_{i=3}^8 i$$

$$\sum_{i=3}^8 ni = n (\sum_{i=1}^8 i - \sum_{i=1}^2 i)$$

$$\sum_{i=3}^8 ni = n (\sum_{i=1}^8 i - \sum_{i=1}^2 i)$$

$$\sum_{i=3}^8 ni = n (\frac{8*9}{2} - \frac{2*3}{2})$$

$$\sum_{i=3}^8 ni = n (\frac{72}{2} - \frac{6}{2})$$

$$\sum_{i=3}^8 ni = n (36 - 3)$$

$$\sum_{i=3}^8 ni = 33n.$$

Ejercicio 5.

¿Cuál de las siguientes sentencias es correcta, según la definición vista en clase?

- (a) n^2 es $O(n^2)$.
- (b) n^2 es $O(n^3)$.
- (c) n^2 es $O(n^2 \log n)$.
- (d) Opciones a y b.
- (e) Opciones a, b y c.
- (f) Ninguna de las otras opciones.

Ejercicio 6.

Dado el siguiente algoritmo:

```
void ejercicio5 (int n) {  
    if (n ≥ 2) {  
        2 * ejercicio5 (n/2);  
        n = n/2;  
        ejercicio5 (n/2);  
    }  
}
```

Indicar el $T(n)$ para $n \geq 2$:

- (a) $T(n) = d + 3 T(\frac{n}{2})$.
- (b) $T(n) = d + 2 T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4})$.
- (c) $T(n) = d + T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4})$.
- (d) $T(n) = d + T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2})$.
- (e) $T(n) = d + T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4})$.

Ejercicio 7.

Dada la recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n \leq 1 \\ T(\frac{n}{3}) + c, & \text{para } n > 1 \end{cases}$$

(a) ¿Cómo se reemplaza $T(\frac{n}{3})$, considerando $\frac{n}{3} > 1$?

(i) $T(\frac{n}{3}) + c$.

(ii) Ninguna de las otras opciones.

(iii) $T(\frac{n}{3}) + 1$.

(iv) $T(\frac{\frac{n}{3}}{3}) + c$.

(v) $T(\frac{\frac{n}{3}}{3}) + 1$.

(b) Desarrollar la función $T(n)$.

Paso 1:

$$T(n) = T(\frac{n}{3}) + c, \text{ si } n > 1.$$

Paso 2:

$$T(n) = T(\frac{\frac{n}{3}}{3}) + c + c$$

$$T(n) = T(\frac{n}{9}) + 2c, \text{ si } n > 2.$$

Paso 3:

$$T(n) = T(\frac{\frac{\frac{n}{3}}{3}}{3}) + c + 2c$$

$$T(n) = T(\frac{n}{27}) + 3c, \text{ si } n > 3.$$

Paso i (Paso general):

$$T(n) = T(\frac{n}{3^i}) + ic, \text{ si } n > i.$$

$$\frac{n}{3^i} = 1$$

$$1 * 3^i = n$$

$$3^i = n$$

$$i \log_3 3 = \log_3 n$$

$$i * 1 = \log_3 n$$

$$i = \log_3 n.$$

Entonces:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3^{\log_3 n}}\right) + \log_3 n * c$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{n}\right) + \log_3 n * c$$

$$T(n) = T(1) + \log_3 n * c$$

$$T(n) = 1 + \log_3 n * c \leq O(\log_3 n).$$

Ejercicio 8.

Considerar el siguiente fragmento de código:

```
int count = 0; int n = a.length;
  for (int i = 0; i < n; i+=n/2)  {
      for (int j = 0; j < n; j++) {
          a[j]++;
      }
  }
```

Este algoritmo se ejecuta en una computadora que procesa 100.000 operaciones por cada segundo. Determinar el tiempo aproximado que requerirá el algoritmo para resolver un problema de tamaño $n=1.000$.

(a) 0,01 seg. (b) 0,1 seg. (c) 1 seg. (d) Ninguna de las opciones anteriores.

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n cte_2$$

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^2 n * cte_2$$

$$T(n) = cte_1 + 2n cte_2.$$

$$T(1000) \cong 1000.$$

100.000 operaciones por segundo.

$$\text{Tiempo (en segundos)} \cong \frac{1000}{100000}$$

$$\text{Tiempo (en segundos)} \cong 0,01.$$

Por lo tanto, el tiempo aproximado que requerirá el algoritmo para resolver un problema de tamaño $n=1.000$ es 0,01 segundos.

Ejercicio 9.

Considerar la siguiente recurrencia:

$$T(1) = 4.$$

$$T(n) = 2 T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n + 1 \quad (n \geq 2).$$

¿Cuál es el valor de $T(n)$ para $n = 4$?

- (a) 51. (b) 38. **(c) 59.** (d) 79. (e) Ninguna de las opciones anteriores.

$$T(4) = 2 T\left(\frac{4}{2}\right) + 5 * 4 + 1$$

$$T(4) = 2 T(2) + 20 + 1$$

$$T(4) = 2 T(2) + 21$$

$$T(4) = 2 [2 T\left(\frac{2}{2}\right) + 5 * 2] + 21$$

$$T(4) = 2 [2 T(1) + 10 + 1] + 21$$

$$T(4) = 2 [2 T(1) + 11] + 21$$

$$T(4) = 2 (2 * 4 + 11) + 21$$

$$T(4) = 2 (8 + 11) + 21$$

$$T(4) = 2 * 19 + 21$$

$$T(4) = 38 + 21$$

$$T(4) = 59.$$

Ejercicio 10.

Expresar la función $T(n)$ del siguiente segmento de código:

```
public static void ejercicio (int n) {
    int x = 0;
    int j = 1;
    while ( j <= n ) {
        for ( int i = n*n ; i >=1 ; i = i - 3 )
            x = x + 1 ;
        j = j * 2 ;
    }
}
```

(a) $T(n) = \frac{1}{3} n^2 + \log_2 n.$

(b) $T(n) = n^2 + \frac{1}{3} \log_2 n.$

(c) $T(n) = \frac{1}{3} \log_2 n.$

(d) $T(n) = \frac{1}{3} n^2 \log_2 n + \log_2 n.$

Iteraciones del while:

$$j = 1.$$

$$j = 2.$$

$$j = 4.$$

...

$$j = 2^{k-1}.$$

$$2^{k-1} = n$$

$$\log_2 2^{k-1} = \log_2 n$$

$$(k-1) \log_2 2 = \log_2 n$$

$$(k-1) * 1 = \log_2 n$$

$$k-1 = \log_2 n$$

$$k = \log_2 n + 1.$$

Iteraciones del for:

$$i = n^2.$$

$$i = n^2 - 3.$$

$$i = n^2 - 3 * 2.$$

...

$$i = n^2 - 3 (k-1).$$

$$n^2 - 3 (k-1) = 1$$

$$3 (k-1) = n^2 - 1$$

$$k - 1 = \frac{n^2 - 1}{3}$$

$$k = \frac{n^2 - 1}{3} + 1$$

$$k = \frac{n^2 + 2}{3}.$$

Entonces:

$$T(n) = \sum_{j=1}^{\log_2 n + 1} \sum_{i=1}^{\frac{n^2 + 2}{3}} cte$$

$$T(n) = \sum_{j=1}^{\log_2 n + 1} \frac{n^2 + 2}{3} cte$$

$$T(n) = (\log_2 n + 1) \frac{n^2 + 2}{3} cte$$

$$T(n) = (\log_2 n + 1) \left(\frac{1}{3} n^2 + \frac{2}{3} \right) cte$$

$$T(n) = \left(\frac{1}{3} n^2 \log_2 n + \frac{2}{3} \log_2 n + \frac{1}{3} n^2 + \frac{2}{3} \right) cte.$$

Ejercicio 11.

¿Cuál es el tiempo de ejecución del siguiente método?

```
void fun(int n, int arr[])
{
    int i = 0, j = 0;
    for (; i < n; ++i)
        while (j < n && arr[i] < arr[j])
            j++;
}
```

Iteraciones del *for*:

i= 0.
i= 1.
i= 2.
...
i= k - 1.

k - 1= n - 1
k= n - 1 + 1
k= n.

Iteraciones del *while*:

j= 0.
j= 1.
j= 2.
...
j= k - 1.

k - 1= n - 1
k= n - 1 + 1
k= n.

Entonces:

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n cte_2$$

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^n n * cte_2$$

$$T(n) = cte_1 + nn cte_2$$

$$T(n) = cte_1 + n^2 cte_2.$$

Por lo tanto, el tiempo de ejecución del método es $T(n) = cte_1 + n^2 cte_2$.

Ejercicio 12.

¿Cuál es el valor que retorna el método *fun1*?

```
int fun1 (int n) {
    int i, j, k, p, q = 0;
    for (i = 1; i < n; ++i)    {
        p = 0;
        for (j = n; j > 1; j = j/2)
            ++p;
        for (k = 1; k < p; k = k*2)
            ++q;
    }
    return q;
}
```

Iteraciones del primer *for*:

i= 1.

i= 2.

i= 3.

...

i= k.

k= n - 1.

Iteraciones del segundo *for*:

j= n.

$j = \frac{n}{2}$.

$j = \frac{n}{4}$.

...

$j = \frac{n}{2^{k-1}}$.

$$\frac{n}{2^{k-1}} = 1 + 1$$

$$\frac{n}{2^{k-1}} = 2$$

$$2 * 2^{k-1} = n$$

$$2^k = n$$

$$\log_2 2^k = \log_2 n$$

$$k \log_2 2 = \log_2 n$$

$$k * 1 = \log_2 n$$

$$k = \log_2 n.$$

Iteraciones del tercer *for*:

$k = 1$.

$k = 2$.

$k = 4$.

...

$k = 2^{k'-1}$.

$$2^{k-1} = p - 1$$

$$\log_2 2^{k-1} = \log_2 (p - 1)$$

$$(k - 1) \log_2 2 = \log_2 (p - 1)$$

$$(k - 1) * 1 = \log_2 (p - 1)$$

$$k - 1 = \log_2 (p - 1)$$

$$k = \log_2 (p - 1) + 1, \text{ si } p > 1.$$

Entonces:

$$q = (n - 1) [\log_2 (\log_2 n - 1) + 1], \text{ si } n > 2.$$

Por lo tanto, el valor que retorna *fun1* es $q = (n - 1) [\log_2 (\log_2 n - 1) + 1]$, si $n > 2$.

Ejercicio 13.

¿Cuál es el tiempo de ejecución del siguiente código?

```

void fun(int n)
{
    for (int i = 0; i < n / 2; i++)
        for (int j = 1; j + n / 2 <= n; j++)
            for (int k = 1; k <= n; k = k * 2)
                System.out.print("AyED");
}

int main()
{
    int n=8;
    fun(3);
}

```

Iteraciones del primer for:

i= 0.
 i= 1.
 i= 2.
 ...
 i= k - 1.

$$k - 1 = \frac{n}{2} - 1$$

$$k = \frac{n}{2} - 1 + 1$$

$$k = \frac{n}{2}.$$

Iteraciones del segundo for:

j= 1.
 j= 2.
 j= 3.
 ...
 j= k.

$$k + \frac{n}{2} = n$$

$$k = n - \frac{n}{2}$$

$$k = \frac{n}{2}.$$

Iteraciones del tercer for:

$k = 1.$

$k = 2.$

$k = 4.$

...

$k = 2^{k'-1}.$

$$2^{k-1} = n$$

$$\log_2 2^{k-1} = \log_2 n$$

$$(k - 1) \log_2 2 = \log_2 n$$

$$(k - 1) * 1 = \log_2 n$$

$$k - 1 = \log_2 n$$

$$k = \log_2 n + 1.$$

Entonces:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{\log_2 n + 1} cte$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (\log_2 n + 1) cte$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2} (\log_2 n + 1) cte$$

$$T(n) = \frac{n}{2} \frac{n}{2} (\log_2 n + 1) cte$$

$$T(n) = \frac{1}{4} n^2 (\log_2 n + 1) cte.$$

Por lo tanto, el tiempo de ejecución del código es $T(n) = \frac{1}{4} n^2 (\log_2 n + 1) cte.$

Ejercicio 14.

¿Cuál es el tiempo de ejecución del siguiente código?

```
void fun(int a, int b)
{
    // Consider a and b both are positive integers
    while (a != b) {
        if (a > b)
            a = a - b;
        else
            b = b - a;
    }
}
```

Este algoritmo implementa el cálculo del máximo común divisor (MCD) utilizando el método de resta sucesiva. La complejidad temporal de este enfoque es $O(\max(a, b))$, ya que, en cada iteración del bucle *while*, la variable más grande se reduce por la cantidad de la menor. En el peor de los casos, si *a* y *b* son muy desiguales, el número de iteraciones podría ser proporcional a la variable con mayor valor.

Ejercicio 15.

¿Cuál es el tiempo de ejecución del siguiente código?

```
void fun(int n)
{
    for(int i=0;i*i<n;i++)
        System.out.print("AyED");
}
```

Iteraciones del *for*:

i= 0.
i= 1.
i= 2.
...
i= k - 1.

$$(k - 1)(k - 1) = n - 1$$

$$(k - 1)^2 = n - 1$$

$$k - 1 = \sqrt{n - 1}$$

$$k = \sqrt{n - 1} + 1.$$

Entonces:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\sqrt{n-1}+1} cte$$

$$T(n) = (\sqrt{n - 1} + 1) \text{ cte.}$$

Por lo tanto, el tiempo de ejecución del código es $T(n) = (\sqrt{n - 1} + 1) \text{ cte.}$

Ejercicio 16.

¿Cuál es el tiempo de ejecución del siguiente código?

```
int fun(int n)
{
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        for (int j = 1; j < n; j += i)
        {
            // Some O(1) task
        }
    }
}
```

Nota: Tener en cuenta que $(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$ se puede acotar con $O(\log n)$.

Iteraciones del primer for:

i= 1.
i= 2.
i= 3.
...
i= k.

k= n.

Iteraciones del segundo for:

j= 1.
j= 1 + i
j= 1 + i * 2
...
j= 1 + i (k - 1).

$1 + i (k - 1) = n - 1$
 $i (k - 1) = n - 1 - 1$
 $i (k - 1) = n - 2$
 $k - 1 = \frac{n-2}{i}$
 $k = \frac{n-2}{i} + 1.$

Entonces:

$$T(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{i}+1} cte$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{n-2}{i} + 1 \right) cte$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^n \frac{n-2}{i} cte + cte$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^n \frac{n-2}{i} cte + \sum_{i=1}^n cte$$

$$T(n) = (n-2) cte \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + n cte$$

$$T(n) \cong cte (n-2) \log_2 n + n cte$$

$$T(n) \cong [(n-2) \log_2 n + n] cte.$$

Por lo tanto, el tiempo de ejecución del código es $T(n) \cong [(n-2) \log_2 n + n] cte$.