Organización de Computadoras

Clase 3

Temas de Clase

- Representación de números en Punto Flotante

Números en punto fijo

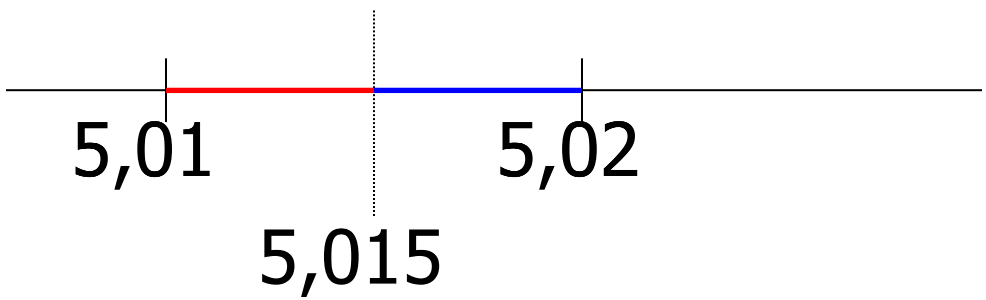
- Todos los números a representar tienen exactamente la misma cantidad de dígitos y la coma fraccionaria está siempre ubicada en el mismo lugar.
- La diferencia principal entre la representación en el papel y su almacenamiento en la computadora, es que no se guarda coma alguna, se supone que está en un lugar determinado.

Rango y Resolución

- Rango: diferencia entre el número mayor y el menor
- Resolución: diferencia entre dos números consecutivos

Error en punto fijo (1)

- El máximo error cometido en una representación puede considerarse como la mitad de la diferencia (resolución) entre dos números consecutivos



- $5{,}01 \leq N^o \leq 5{,}015$ se representa por 5,01
- $5{,}015 < N^o \leq 5{,}02$ se representa por 5,02

Error en punto fijo (2)

- En cualquiera de los dos casos el Error Absoluto máximo resulta ser:

  EA max = 5,015 - 5,01 = 0,005 ó

  (5,02 - 5,01)/2 = 0,005

  - Que corresponden a los Nº marcados en rojo ó azul.

Números en punto flotante

- En punto fijo (ej. Ca2), es posible representar un rango de enteros positivos y negativos centrados en 0.
- Suponiendo un número con componente fraccionaria, en este formato de punto fijo también se pueden representar números.
- Limitaciones: “números muy grandes y números muy pequeños”.

Números en punto flotante (2)

- Un número decimal "muy grande":

  976.000.000.000.000

  se puede representar como:

  $9{,}76 \times 10^{14}$

- Un número decimal "muy pequeño":

  0,00000000000000976

  $9{,}76 \times 10^{-14}$

Números en punto flotante (3)

- Lo que hemos hecho es desplazar en forma dinámica la coma decimal a una posición conveniente y usar el exponente de base 10 para mantener la "pista" de la coma.
- Esto permite tener un rango de números desde "muy pequeños" a "muy grandes" y pueden ser representados con pocos dígitos.

Números en punto flotante (4)

Veamos este mismo enfoque con números binarios:

- Un número se puede representar de la forma:

$$\pm M \times B^{\pm E}$$

- Este número se puede almacenar en una palabra binaria con dos campos:
  - Mantisa M
  - Exponente E

Números en punto flotante (5)

- La base B es implícita y no necesita almacenarse ya que es la misma para todos los números. Debemos almacenar M y E.
- Se necesitan menos bits para almacenar M y E, que para almacenar el “número completo” en la base correspondiente.

Números en punto flotante (6)

- M y E están representados en alguno de los sistemas en punto fijo que ya conocíamos como BSS, BCS, Ca2, Ca1, Exceso.

exponente	mantisa

La figura muestra un formato típico

Ejemplo

- Supongamos el siguiente formato en punto flotante

$$\text{Mantisa} \begin{cases} \text{BSS} \\ \text{4 bits} \\ \text{entera} \end{cases} \qquad \text{Exponente} \begin{cases} \text{BSS} \\ \text{4 bits} \\ \text{entero} \end{cases}$$

Determinar el rango y resolución

Ejemplo 1

- Máximo = $1111 \times 2^{1111} = 15 \times 2^{15}$
- Mínimo = 0
- Rango = $[\,0,..,15\text{x}2^{15}]=[\,0,..,491520]$
- Resolución en el extremo superior

  $R = (15 - 14)\text{x}2^{15} = 1 \times 2^{15}$
- Resolución en el extremo inferior

  $R = (1 - 0)\text{x}2^{0} = 1$

Ejemplo 2

Consideremos enteros de 8 bits y en BSS

Calcular el rango y resolución:

- Rango = [0,..,255]
- Resolución en el extremo superior

  R = 255 – 254 = 1

- Resolución en el extremo inferior

  R = 1 – 0 = 1

Comparación

Si comparamos ambos ejemplos vemos:

- ✓ el rango en punto flotante es mayor
- ✓ la cantidad de combinaciones binarias distintas es la misma en ambos sistemas $2^8 = 256$
- ✓ en punto flotante la resolución no es constante a lo largo del intervalo, como lo es en el segundo ejemplo.

Conclusión

- En el sistema de punto flotante el rango es mayor. Podemos representar números más grandes ó más pequeños que en un sistema de punto fijo (para igual cantidad de bits), pero pagamos el precio que los Nºs no están igualmente espaciados, como en punto fijo.

Mantisa y exponente en Ca2

- Ejemplo: supongamos el siguiente formato en punto flotante

$$\text{Mantisa}\left\{\begin{array}{l}\text{Ca2}\\ \text{4 bits}\\ \text{entera}\end{array}\right. \qquad \text{Exponente}\left\{\begin{array}{l}\text{Ca2}\\ \text{4 bits}\\ \text{entero}\end{array}\right.$$

Determinar el rango y resolución

Mantisa y exponente en Ca2

- Máximo = $0111 \times 2^{0111} = +7 \times 2^{+7}$
- Mínimo = $1000 \times 2^{0111} = -8 \times 2^{+7}$
- Rango = $[-8 \times 2^{+7},\ldots,+7 \times 2^{+7}]$
- Resolución en el extremo superior

  $R = (7 - 6) \times 2^{7} = 1 \times 2^{7}$
- Resolución en el origen

  $R = (1 \times 2^{-8} - 0) = 1 \times 2^{-8}$

Mantisa fraccionaria

- Ejemplo: supongamos el siguiente formato en punto flotante

Mantisa: BCS (ó MyS), 23 bits fraccionaria, 1 bit signo

Exponente: Ca2, 8 bits entero

Determinar el rango y resolución

Mantisa fraccionaria

- Máximo positivo

$0 \;\; 0{,}111..111 \times 2^{01111111} = +(1-2^{-23}).2^{+127}$

- Mínimo positivo ($\neq 0$)

$0 \;\; 0{,}000..001 \times 2^{10000000} = +(2^{-23}).2^{-128}$

- Máximo negativo ($\neq 0$)

$1 \;\; 0{,}000..001 \times 2^{10000000} = -(2^{-23}).2^{-128}$

- Mínimo negativo

$1 \;\; 0{,}111..111 \times 2^{01111111} = -(1-2^{-23}).2^{+127}$

Formato final

- El formato anterior se puede representar

0	1 8	9 31
S	Exponente	Mantisa

- El mínimo negativo es

1	01111111	1111...11

Normalización

Veamos el siguiente ejemplo:

$40x10^0 = 4x10^1 = 0,4x10^2 = 400x10^{-1}$

- Existen distintos valores de mantisa y exponente para representar un mismo número.
- Lo mismo sucede en base 2.
- Con el objetivo de tener un único par de valores de mantisa y exponente para un número, se introduce la *normalización*.

Normalización

- Con el objetivo anterior, las mantisas fraccionarias se definen de la forma:

  0,1dddddd.....ddd

  - donde d es un dígito binario que vale 0 ó 1.

- Todas las mantisas empiezan con 0,1...

Normalización

- Ejemplo: formato en punto flotante

Mantisa: BCS, 23 bits, fraccionaria, 1 bit signo, Normalizada

Exponente: Exceso, 8 bits, entero

Determinar el rango y resolución

Normalización

- Máximo positivo

  $0 \;\; 0{,}111..111 \times 2^{11111111} = +(1-2^{-23}).2^{+127}$

- Mínimo positivo ($\neq$0)

  $0 \;\; 0{,}100..000 \times 2^{00000000} = +(0{,}5).2^{-128}$

- Máximo negativo ($\neq$0)

  $1 \;\; 0{,}100..000 \times 2^{00000000} = -\,(0{,}5).2^{-128}$

- Mínimo negativo

  $1 \;\; 0{,}111..111 \times 2^{11111111} = -(1-2^{-23}).2^{+127}$

Normalización

- El formato anterior se puede representar

0	1 8	9 31
S	Exponente	Mantisa

- El máximo negativo ($\neq 0$) es

1	00000000	1000..00

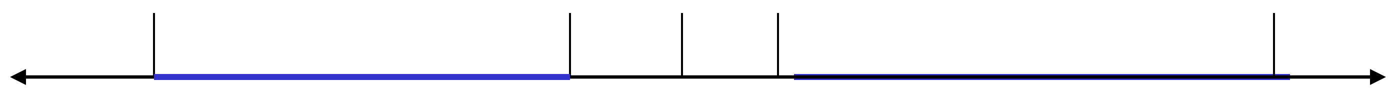
Bit implícito

- Como todos los números comienzan con 0,1 ¿es necesario almacenar el 1?
  - siempre está presente !!!
- Si no lo almaceno, puedo "adicionar" un bit más a la mantisa. El bit no almacenado se conoce como *bit implícito.*

1	00000000	1000...................................000

Recta numérica

- Sin bit implícito



$-(1-2^{-23}).2^{+127}$ $-0,5.2^{-128}$ 0 $0,5.2^{-128}$ $(1-2^{-23}).2^{+127}$

- Con bit implícito

$-(1-2^{-24}).2^{+127}$ $-0,5.2^{-128}$ 0 $0,5.2^{-128}$ $(1-2^{-24}).2^{+127}$

¿Cómo se escribe un Nº en punto flotante normalizado?

1. Se escribe el Nº en el sistema propuesto para la mantisa.
2. Se desplaza la coma y se cambia el exponente hasta obtener la forma normalizada.
3. Se convierte el exponente al sistema propuesto para él.

¿Cómo......? (2)

Ej. - 13,5 . Formato anterior

- 1) 1 1101,100..0=1 1101,100..0x2^0
- 2) 1 0,110110..0 x 2^4
- 3) 4 en Ca2=00000100

  4 en Exceso=10000100
- Finalmente →

¿Cómo...... ? (3)

- Sin bit implícito

1	10000100	1101100000................00

- Con bit implícito

1	10000100	101100000...................00

Resolución – Error absoluto

- Resolución: es la diferencia entre dos representaciones sucesivas, y varía a lo largo del rango, no es constante como en el caso de punto fijo.
- Error Absoluto: es la diferencia entre el valor representado y el valor a representar

Error absoluto y relativo

- Error Absoluto máximo $\leq$ Resolución/2
- Error Relativo = EA/Número a representar

Estándar IEEE 754

- Simple precisión

1	8	23

- Doble precisión

1	11	52

Estándar IEEE 754

- Mantisa: fraccionaria normalizada, con la coma después del primer bit que es siempre uno (1,) en M y S.

- Exponente: representado en exceso

$$2^{n-1} - 1$$

Estándar IEEE 754

	Simple	Doble precisión
Bits en signo	1	1
Bits en exponente	8	11
Bits en fracción	23	52
Total de bits	32	64
Exponente en exceso	127	1023
Rango de exponente	-126 a +127	−1022 a +1023
Rango de números	2^{-126} a $\sim 2^{128}$	2^{-1022} a $\sim 2^{1024}$

Ejemplo 1 en simple precisión

¿Qué valor representa el hexadecimal 3F800000?

0011 1111 1000 0000 0000 0000 0000 0000

01111111=127 en exceso 127 representa 0

00000000000000000000000=0

$+\ 1{,}0 \times 2^{0} = 1$

Ejemplo 2 en simple precisión

¿Qué valor representa el hexadecimal C0066666?

1100 0000 0000 0110 0110 0110 0110 0110

10000000=128 en exceso 127 representa 1

00001100110011001100110=0,05

$- 1{,}05 \times 2^{1} = -2{,}1$

Estándar IEEE 754

Casos especiales:

- $E = 255/2047,\ M \neq 0 \Rightarrow$ NaN -Not a Number-
- $E = 255/2047,\ M = 0 \Rightarrow$ Infinito
- $E = 0,\ M = 0 \Rightarrow$ Cero
- $E = 0,\ M \neq 0 \Rightarrow$ Denormalizado
  - $\pm$ 0,mantisa_s-p 2^{-126}
  - $\pm$ 0,mantisa_d-p 2^{-1022}

Operaciones aritméticas en pf

Sumar y restar

- Comprobar valores cero.
- Ajuste de mantisas (ajuste de exponentes).
- Sumar o restar las mantisas.
- Normalizar el resultado.

Operaciones aritméticas… (2)

Multiplicar y dividir

- Comprobar valores cero.
- Sumar y restar exponentes.
- Multiplicar y dividir mantisas
  - tener en cuenta el signo
- Normalizar.
- Redondear.

Todos los resultados intermedios deben doblar su longitud al almacenarse

mayor información …

- Punto flotante
  - Apunte 2 de Cátedra
  - PFI-PFO. Software en Descargas del sitio de cátedra
- Capítulo 8: Aritmética del computador (8.4., 8.5.)
  - Stallings, W., 5º Ed.
- Link de interés
  - http://babbage.cs.gc.edu/ieee-754/