Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5: Distribución Conjunta, Suma y Promedios de Variables Aleatorias. Ley de los Grandes Números. Teorema Central del Límite.

Ejercicio 1.

Se analizaron las longitudes y los anchos de la bandeja de plástico rectangular para un CD que está instalada en una computadora personal. Las mediciones se redondearon al milímetro más cercano. Sean X: "la longitud medida" e Y: "el ancho medido". La f.d.p. conjunta de (X , Y) está dada por:

Y | X	*129*	*130*	*131*
15	*0,12*	*0,42*	*0,06*
16	*0,08*	*0,28*	*0,04*

(a) *Determinar la probabilidad de que la cubierta del CD tenga una longitud de 129 mm.*

P (X= 129)= $\sum_{j=15}^{16} P\ (X = 129, Y = j)$
P (X= 129)= P (X= 129, Y= 15) + P (X= 129, Y= 16)
P (X= 129)= 0,12 + 0,08
P (X= 129)= 0,2.

(b) *Determinar la probabilidad de que una cubierta de CD tenga ancho de 16 mm.*

P (Y= 16)= $\sum_{i=129}^{131} P\ (X = i, Y = 16)$
P (Y= 16)= P (X= 129, Y= 16) + P (X= 130, Y= 16) + P (X= 131, Y= 16)
P (Y= 16)= 0,08 + 0,28 + 0,04
P (Y= 16)= 0,4.

(c) *Hallar las distribuciones marginales de X e Y.*

p (x_i)= P (X= x_i)
p (x_i)= $\sum_{j=15}^{16} P\ (x_i, y_j)$, i= 129, 130 , 131.

p (y_j)= P (Y= y_j)
p (y_j)= $\sum_{i=129}^{131} P\ (x_i, y_j)$, j= 15, 16.

(d) *Hallar E (X), E (Y), V (X), V (Y).*

E (X)= $\sum_{i=129}^{131} x_i \ p \ (x_i)$
E (X)= $\sum_{i=129}^{131} x_i \ P \ (X = x_i)$
E (X)= 129 (0,12 + 0,08) + 130 (0,42 + 0,28) + 131 (0,06 + 0,04)
E (X)= 129 * 0,2 + 130 * 0,7 + 131 * 0,1
E (X)= 25,8 + 91 + 13,1
E (X)= 129,9.

E (Y)= $\sum_{j=15}^{16} y_j \ p \ (y_j)$
E (Y)= $\sum_{j=15}^{16} y_j \ P \ (Y = y_j)$
E (Y)= 15 (0,12 + 0,42 + 0,06) + 16 (0,08 + 0,28 + 0,04)
E (Y)= 15 * 0,6 + 16 * 0,4
E (Y)= 9 + 6,4
E (Y)= 15,4.

E (X^2)= $\sum_{i=129}^{131} x_i^2 \ p \ (x_i)$
E (X^2)= $\sum_{i=129}^{131} x_i^2 \ P \ (X = x_i)$
E (X^2)= 129^2 (0,12 + 0,08) + 130^2 (0,42 + 0,28) + 131^2 (0,06 + 0,04)
E (X^2)= 16641 * 0,2 + 16900 * 0,7 + 17161 * 0,1
E (X^2)= 3328,2 + 11830 + 1716,1
E (X^2)= 16874,3.

V (X)= E (X^2) - $[E \ (X)]^2$
V (X)= 16874,3 - $129{,}9^2$
V (X)= 16874,3 - 16874,01
V (X)= 0,29.

E (Y^2)= $\sum_{j=15}^{16} y_i^2 \ p \ (y_i)$
E (Y^2)= $\sum_{j=15}^{16} y_i^2 \ P \ (Y = y_i)$
E (Y^2)= 15^2 (0,12 + 0,42 + 0,06) + 16^2 (0,08 + 0,28 + 0,04)
E (Y^2)= 225 * 0,6 + 256 * 0,4
E (Y^2)= 135 + 102,4
E (Y^2)= 237,4.

V (Y)= E (Y^2) - $[E \ (Y)]^2$
V (Y)= 237,4 - $15{,}4^2$
V (Y)= 237,4 - 237,16
V (Y)= 0,24.

Ejercicio 2.

En el ejercicio anterior, calcular la f.d.p. condicional $p_{y|x}$ (y | x= 130). ¿Son X e Y independientes? Explicar.

$p_{y|x}$ (y | x= 130)= $\frac{P(Y,X=130)}{P(X=130)}$
$p_{y|x}$ (y | x= 130)= $\frac{0,42}{0,7}$
$p_{y|x}$ (y | x= 130)= 0,6.

P (X= 129, Y= 15)= 0,12.
P (X= 129) P (Y= 15)= 0,2 * 0,6= 0,12.

P (X= 129, Y= 16)= 0,08.
P (X= 129) P (Y= 16)= 0,2 * 0,4= 0,08.

P (X= 130, Y= 15)= 0,42.
P (X= 130) P (Y= 15)= 0,7 * 0,6= 0,42.

P (X= 130, Y= 16)= 0,28.
P (X= 130) P (Y= 16)= 0,7 * 0,4= 0,28.

P (X= 131, Y= 15)= 0,06.
P (X= 131) P (Y= 15)= 0,1 * 0,6= 0,06.

P (X= 131, Y= 16)= 0,04.
P (X= 131) P (Y= 16)= 0,1 * 0,4= 0,04.

Por lo tanto, X e Y son independientes, ya que p (x_i, y_j)= p (x_i) p (y_i), ∀ (x_i, y_j).

Ejercicio 3.

Un software puede hacer llamadas a dos subrutinas A y B. En una ejecución elegida al azar, sean X: "número de llamadas hechas a la subrutina A", Y: "número de llamadas hechas a la subrutina B". La f.d.p. conjunta de (X , Y) está dada por:

X | Y	***1***	***2***	***3***
1	*0,15*	*0,1*	*0,1*
2	*0,1*	*0,2*	*0,15*
3	*0,05*	*0,05*	*0,1*

(a) *Determinar las f.d.p. marginales de X e Y.*

p (x_i)= P (X= x_i)
p (x_i)= $\sum_{j=1}^{3} P\ (x_i, y_j)$, i= 1, … , 3.

p (y_j)= P (Y= y_j)
p (y_j)= $\sum_{i=1}^{3} P\ (x_i, y_j)$, j= 1, … , 3.

(b) *Determinar E (X), E (Y), V (X), V (Y).*

E (X)= $\sum_{i=1}^{3} x_i\ p\ (x_i)$
E (X)= $\sum_{i=1}^{3} x_i\ P\ (X = x_i)$
E (X)= 1 (0,15 + 0,1 + 0,1) + 2 (0,1 + 0,2 + 0,15) + 3 (0,05 + 0,05 + 0,1)
E (X)= 1 * 0,35 + 2 * 0,45 + 3 * 0,2
E (X)= 0,35 + 0,9 + 0,6
E (X)= 1,85.

E (Y)= $\sum_{j=1}^{3} y_j\ p\ (y_j)$
E (Y)= $\sum_{j=1}^{3} y_j\ P\ (Y = y_j)$
E (Y)= 1 (0,15 + 0,1 + 0,05) + 2 (0,1 + 0,2 + 0,05) + 3 (0,1 + 0,15 + 0,1)
E (Y)= 1 * 0,3 + 2 * 0,35 + 3 * 0,35
E (Y)= 0,3 + 0,7 + 1,05
E (Y)= 2,05.

E (X^2)= $\sum_{i=1}^{3} x_i^2\ p\ (x_i)$
E (X^2)= $\sum_{i=1}^{3} x_i^2\ P\ (X = x_i)$
E (X^2)= 1^2 (0,15 + 0,1 + 0,1) + 2^2 (0,1 + 0,2 + 0,15) + 3^2 (0,05 + 0,05 + 0,1)
E (X^2)= 1 * 0,35 + 4 * 0,45 + 9 * 0,2
E (X^2)= 0,35 + 1,8 + 1,8
E (X^2)= 3,95.

V (X)= E (X^2) - $[E\ (X)]^2$
V (X)= 3,95 - $1,85^2$
V (X)= 3,95 - 3,4225

V (X)= 0,5275.

E (Y^2)= $\sum_{j=1}^{3} y_j^2\ p\ (y_j)$
E (Y^2)= $\sum_{j=1}^{3} y_j^2\ P\ (Y = y_j)$
E (Y^2)= 1^2 (0,15 + 0,1 + 0,05) + 2^2 (0,1 + 0,2 + 0,05) + 3^2 (0,1 + 0,15 + 0,1)
E (Y^2)= 1 * 0,3 + 4 * 0,35 + 9 * 0,35
E (Y^2)= 0,3 + 1,4 + 3,15
E (Y^2)= 4,85.

V (Y)= E (Y^2) - $[E\ (Y)]^2$
V (Y)= 4,85 - $2{,}05^2$
V (Y)= 4,85 - 4,2025
V (Y)= 0,6475.

(c) *Determinar Cov (X , Y).*

E (XY)= $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_i\ p\ (x_i, y_i)$
E (XY)= $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_i\ P\ (X = x_i, Y = y_i)$
E (XY)= 1 * 1 * 0,15 + 1 * 2 * 0,1 + 1 * 3 * 0,1 + 2 * 1 * 0,1 + 2 * 2 * 0,2 + 2 * 3 * 0,15 + 3 * 1 *0,05 + 3 * 2 * 0,05 + 3 * 3 * 0,1
E (XY)= 0,15 + 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,8 + 0,9 + 0,15 + 0,3 + 0,9
E (XY)= 3,9.

Cov (X, Y)= E (XY) - E (X) E (Y)
Cov (X, Y)= 3,9 - 1,85 * 2,05
Cov (X, Y)= 3,9 - 3,7925
Cov (X, Y)= 0,1075.

(d) *¿Son X e Y independientes? Explicar.*

Cov (X, Y)$\neq$ 0.

Por lo tanto, X e Y no son independientes.

Ejercicio 4.

Con referencia al ejercicio anterior:

(a) *Determinar E (X + Y).*

E (X + Y)= E (X) + E (Y)
E (X + Y)= 1,85 + 2,05
E (X + Y)= 3,9.

(b) *Determinar V (X + Y) y σ_{X+Y}.*

V (X + Y)= V (X) + V (Y) + 2 Cov (X, Y)
V (X + Y)= 0,5275 + 0,6475 + 2 * 0,1075
V (X + Y)= 0,5275 + 0,6475 + 0,215
V (X + Y)= 1,39.

$\sigma_{X+Y}= \sqrt{V(X+Y)}$
$\sigma_{X+Y}= \sqrt{1{,}39}$
$\sigma_{X+Y}=$ 1,179.

(c) *Determinar P (X + Y = 4).*

P (X + Y = 4)= P (X= 1, Y= 3) + P (X= 2, Y= 2) + P (X= 3, Y= 1)
P (X + Y = 4)= 0,1 + 0,2 + 0,05
P (X + Y = 4)= 0,35.

(d) *Suponer que cada ejecución de la subrutina A tarda 100 ms y que cada ejecución de la subrutina B tarda 200 ms.*

(i) *Determinar el número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.*

E (100X + 200Y)= E (100X) + E (200Y)
E (100X + 200Y)= 100 E (X) + 200 E (Y)
E (100X + 200Y)= 100 * 1,85 + 200 * 2,05
E (100X + 200Y)= 185 + 410
E (100X + 200Y)= 595.

(ii) *Encontrar la desviación estándar del número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.*

V (100X + 200Y)= V (100X) + V (200Y) + 2 Cov (100X, 200Y)
V (100X + 200Y)= 100^2 V (X) + 200^2 V (Y) + 2 * 100 * 200 Cov (X, Y)
V (100X + 200Y)= 10000 * 0,5275 + 40000 * 0,6475 + 2 * 100 * 200 * 0,1075
V (100X + 200Y)= 5275 + 25900 + 4300
V (100X + 200Y)= 35475.

DE (100X + 200Y)= $\sqrt{V(100X + 200Y)}$
DE (100X + 200Y)= $\sqrt{35475}$
DE (100X + 200Y)= 188,348.

Ejercicio 5.

Dos computadoras trabajan en forma independiente. Sean X: "número de fallas semanales de la computadora 1" e Y: "número de fallas semanales de la computadora 2". Las distribuciones están dadas por:

x	***0***	***1***	***2***	***3***
p (x)	*0,25*	*0,25*	*0,3*	*0,2*

y	***0***	***1***	***2***	***3***
p (y)	*0,15*	*0,2*	*0,4*	*0,25*

(a) *Determinar P (X= Y), es decir, ambas computadoras tienen el mismo número de fallas.*

P (X= Y)= P (X= 0, Y= 0) + P (X= 1, Y= 1) + P (X= 2, Y= 2) + P (X= 3, Y= 3)
P (X= Y)= 0,25 * 0,15 + 0,25 * 0,2 + 0,3 * 0,4 + 0,2 * 0,25
P (X= Y)= 0,0375 + 0,05 + 0,12 + 0,05
P (X= Y)= 0,2575.

(b) *Determinar P (X > Y), es decir, el número de fallas de la computadora 1 es mayor que el de la computadora 2.*

P (X > Y)= P (X= 1, Y= 0) + P (X= 2, Y= 0) + P (X= 2, Y= 1) + P (X= 3, Y= 0) + P (X= 3, Y= 1) + P (X= 3, Y= 2)
P (X > Y)= 0,25 * 0,15 + 0,3 * 0,15 + 0,3 * 0,2 + 0,2 * 0,15 + 0,2 * 0,2 + 0,2 * 0,4
P (X > Y)= 0,0375 + 0,045 + 0,06 + 0,03 + 0,04 + 0,08
P (X > Y)= 0,2925.

Ejercicio 6.

El tiempo de vida de cierto componente, en años, tiene una función de densidad f (x)= e^{-x} si x > 0, 0 si x ≤ 0. Están disponibles dos de dichos componentes, cuyos tiempos de vida son independientes. Tan pronto como falle el primer componente, éste se reemplaza por el segundo. Sean las variables aleatorias: X: "tiempo de vida del primer componente" e Y: "tiempo de vida del segundo componente".

(a) *Determinar P (X ≤ 1, Y ≤ 1).*

P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= P (X ≤ 1) P (Y ≤ 1)
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= $\int_0^1 e^{-x}\,dx \int_0^1 e^{-y}\,dy$
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= ($-e^{-x}$) $|_0^1$ ($-e^{-y}$) $|_0^1$
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= -(e^{-1} - e^{-0}) [-(e^{-1} - e^{-0})]
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= -($\frac{1}{e}$ - e^0) [-($\frac{1}{e}$ - e^0)]
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= -($\frac{1}{e}$ - 1) [-($\frac{1}{e}$ - 1)]
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= -($\frac{1-e}{e}$) [-($\frac{1-e}{e}$)]
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= $(\frac{1-e}{e})^2$.

(b) *Determinar E (X) , E (Y).*

E (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}\,dx$
E (X)= $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$
E (X)= $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b xe^{-x}\,dx$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} [x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx]|_0^b$ (*)
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} [-xe^{-x} + \int e^{-x}dx]|_0^b$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} [-xe^{-x} + (-e^{-x})]|_0^b$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-xe^{-x} - e^{-x})|_0^b$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0e^{-0} - e^{-0})$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0e^{0} - e^{0})$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0 * 1 - 1)$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (0 - 1)$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-1)$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} -be^{-b} - e^{-b} + 1$
E (X)= 0 - 0 + 1
E (X)= 1.

(*) u= x; du= dx; dv= e^{-x} dx; v= $-e^{-x}$.

E (Y)= $\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y}\, dy$
E (Y)= $\int_{0}^{+\infty} ye^{-y}\, dx$
E (Y)= $\int_{0}^{+\infty} ye^{-y}\, dy$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} ye^{-y}\, dy$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} [y(-e^{-y}) - \int -e^{-y} dy]|_0^b$ (*)
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} [-ye^{-y} + \int e^{-y} dy]|_0^b$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} [-ye^{-y} + (-e^{-y})]|_0^b$
E (X)= $\lim_{b \to +\infty} (-ye^{-y} - e^{-y})|_0^b$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0e^{-0} - e^{-0})$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0e^{0} - e^{0})$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0 * 1 - 1)$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (0 - 1)$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-1)$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} -be^{-b} - e^{-b} + 1$
E (Y)= 0 - 0 + 1
E (Y)= 1.

(*) u= y; du= dy; dv= e^{-y} dy; v= -e^{-y}.

(c) *Determinar E (X + Y).*

E (X + Y)= E (X) + E (Y)
E (X + Y)= 1 + 1
E (X + Y)= 2.

Ejercicio 7.

Una instalación de luz tiene dos focos A y B. La duración del foco A se puede considerar una v.a. X con distribución normal con media 800 hs. y desviación estándar de 100 hs. La duración del foco B se puede considerar una v.a. Y con distribución normal con media 900 hs. y desviación estándar de 150 hs. Suponer que las duraciones de los focos son independientes.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que el foco B dure más que el foco A? (Sugerencia: Pensar cómo interpretar el evento {Y - X > 0} y qué distribución tiene Y - X).*

X: "duración (en horas) de la instalación de luz con el foco A".
Y: "duración (en horas) de la instalación de luz con el foco B".
W: "diferencia de duración (en horas) de la instalación de luz con el foco B versus con el foco A".

X ~ $\mathcal{N}$ (μ_x= 800, σ_x^2= 100^2= 10000).
Y ~ $\mathcal{N}$ (μ_y= 900, σ_y^2= 150^2= 22500).
W= Y - X ~ $\mathcal{N}$ (μ_w= μ_y - μ_x= 900 - 800= 100, σ_w^2= σ_y^2 + σ_x^2= 22500 + 10000= 32500).

P (W > 0)= 1 - P (W ≤ 0)
P (W > 0)= 1 - P ($\frac{W-\mu_w}{\sqrt{\sigma_w^2}} \leq \frac{0-100}{\sqrt{32500}}$)
P (W > 0)= 1 - P (Z ≤ $\frac{-100}{180,278}$)
P (W > 0)= 1 - P (Z ≤ -0,555)
P (W > 0)= 1 - [1 - P (Z < 0,555)]
P (W > 0)= 1 - 1 + P (Z < 0,555)
P (W > 0)= P (Z < 0,555)
P (W > 0)= F (0,555)
P (W > 0)= 0,7088.

Por lo tanto, la probabilidad de que el foco B dure más que el foco A es 0,7088.

(b) *Otra instalación de luz tiene solo un foco. Se pone uno del tipo A y cuando se funde se instala otro de tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total de ambos sea mayor que 2000 hs.? (Sugerencia: Pensar cómo interpretar el evento {Y + X > 2000} y qué distribución tiene Y + X).*

V: "suma de la duración (en horas) de la instalación de luz con el foco A y con el foco B".

V= Y + X ~ $\mathcal{N}$ (μ_v= μ_y + μ_x= 900 + 800= 1700, σ_v^2= σ_y^2 + σ_x^2= 22500 + 10000= 32500).

P (V > 2000)= 1 - P (V ≤ 2000)
P (V > 2000)= 1 - P ($\frac{V-\mu_v}{\sqrt{\sigma_v^2}} \leq \frac{2000-1700}{\sqrt{32500}}$)

P (V $>$ 2000)= 1 - P (Z $\leq \frac{300}{180,278}$)
P (V $>$ 2000)= 1 - P (Z $\leq$ 1,66)
P (V $>$ 2000)= 1 - F (1,66)
P (V $>$ 2000)= 1 - 0,9515
P (V $>$ 2000)= 0,0485.

Por lo tanto, la probabilidad de que la duración total de ambos sea mayor a 2000 hs. es 0,0485.

Ejercicio 8.

El peso de un caramelo pequeño tiene una distribución normal con media 2,835 gramos y desviación estándar de 0,2835 gramos. Suponer que se colocan 16 caramelos en un paquete y que los pesos de estos son independientes.

(a) *¿Cuáles son la media y la varianza del peso neto del paquete?*

X_i: "peso (en gramos) del i-ésimo caramelo pequeño", i= 1, 2, … , 16.
Y: "suma del peso (en gramos) de n caramelos pequeños".

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ_i= 2,835, σ_i^2= $0{,}2835^2$= 0,08037225), i= 1, 2, … , 16.
Y= $\sum_{i=1}^{16} X_i \sim \mathcal{N}$ (μ_y= nμ= 45,36, σ_y^2= nσ^2= 1,285956).

Por lo tanto, la media y la varianza del peso neto del paquete son 45,36 y 1,285956, respectivamente.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que el peso neto del paquete sea menor que 45,5 gramos?*

P (Y ≤ 45,5)= P ($\frac{Y-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{45{,}5-16*2{,}835}{\sqrt{16}*0{,}2835}$)
P (Y ≤ 45,5)= P (Z ≤ $\frac{45{,}5-45{,}36}{4*0{,}2835}$)
P (Y ≤ 45,5)= P (Z ≤ $\frac{0{,}14}{1{,}134}$)
P (Y ≤ 45,5)= P (Z ≤ 0,12)
P (Y ≤ 45,5)= F (0,12)
P (Y ≤ 45,5)= 0,5478.

Por lo tanto, la probabilidad de que el peso neto del paquete sea menor que 45,5 gramos es 0,5478.

Ejercicio 9.

El tiempo para que un sistema automatizado localice una pieza en un almacén tiene una distribución normal con media de 45 segundos y desviación estándar de 30 segundos. Suponer que se hacen pedidos independientes por 10 piezas.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 60 segundos? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 600 segundos*?

X_i: "tiempo (en segundos) para que el sistema automatizado localice la i-ésima pieza en un almacén", i= 1, 2, … , 10.
Y: "tiempo (en segundos) promedio para que el sistema automatizado localice una pieza en un almacén de una muestra de n piezas".
W: "suma del tiempo (en segundos) para que el sistema automatizado localice n piezas".

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ_i= 45, σ_i^2= 30^2= 900), i= 1, 2, … , 10.
Y= $\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{n} \sim \mathcal{N}$ (μ_w= μ= 45, σ_w^2= $\frac{\sigma^2}{n}$= 90).
W= $\sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{N}$ (μ_y= nμ= 450, σ_y^2= nσ^2= 9000).

P (Y > 60)= 1 - P (Y ≤ 60)
P (Y > 60)= 1 - P ($\frac{Y-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{60-45}{\frac{30}{\sqrt{10}}}$)
P (Y > 60)= 1 - P (Z ≤ $\frac{15}{\frac{30}{3,1623}}$)
P (Y > 60)= 1 - P (Z ≤ $\frac{15}{9,4868}$)
P (Y > 60)= 1 - P (Z ≤ 1,58)
P (Y > 60)= 1 - F (1,58)
P (Y > 60)= 1 - 0,9429
P (Y > 60)= 0,0571.

P (W > 600)= 1 - P (W ≤ 600)
P (W > 600)= 1 - P ($\frac{W-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{600-10*45}{\sqrt{10}*30}$)
P (W > 600)= 1 - P (Z ≤ $\frac{600-450}{3,1623*30}$)
P (W > 600)= 1 - P (Z ≤ $\frac{150}{94,868}$)
P (W > 600)= 1 - P (Z ≤ 1,58)
P (W > 600)= 1 - F (1,58)
P (W > 600)= 1 - 0,9429
P (W > 600)= 0,0571.

Por lo tanto, la probabilidad de que el tiempo promedio necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 60 segundos es 0,0571 y la probabilidad de que el tiempo total necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 600 segundos es 0,0571.

(b) *Enunciar la propiedad teórica que se utiliza para resolver el inciso anterior.*

"Si $X_1, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2), i= 1, 2, … , n, entonces, $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim \mathcal{N}$ $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$".

"Si $X_1, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2), i= 1, 2, … , n, entonces, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}$ $(n\mu, n\sigma^2)$".

Ejercicio 10.

El centro de cálculo de una universidad dispone de un servidor para gestionar las páginas web personales de profesores y alumnos. Suponer que la cantidad de memoria ocupada por una de estas páginas puede considerarse como una variable aleatoria con una media de 1,3 MB y una desviación estándar de 0,3. Si el servidor va a gestionar un total de 500 páginas, calcular, aproximadamente, la probabilidad de que la cantidad total de memoria necesaria supere los 660 MB. (Sugerencia: Considerar las v.a. X_i: "cantidad de memoria ocupada por la página i", i= 1, 2, … , 500).

X_i: "cantidad de memoria ocupada por la i-ésima página", i= 1, 2, … , 500.
Y: "suma de la cantidad de memoria ocupada por n páginas".

Y= $\sum_{i=1}^{500} X_i \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (μ_y= nμ= 650, σ_y^2= nσ^2= 45), por TCL.

P (Y > 660)= 1 - P (Y ≤ 660)
P (Y > 660)= 1 - P ($\frac{Y-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{660-500*1,3}{\sqrt{500}*0,3}$)
P (Y > 660)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{600-650}{22,36*0,3}$) por TCL
P (Y > 660)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{10}{6,708}$)
P (Y > 660)≈ 1 - P (Z ≤ 1,49)
P (Y > 660)≈ 1 - 0,9319
P (Y > 660)≈ 0,0681.

Ejercicio 11.

El tiempo de vida (en horas) de un componente electrónico viene determinado por la siguiente función de densidad:

$f(x)= \begin{cases} 2ke^{\frac{-x}{5}}, x > 0 \\ 0, c.c. \end{cases}$.

(a) *Calcular k y la función de distribución acumulada asociada.*

P ($-\infty < X < +\infty$)= 1
$\int_{-\infty}^{+\infty} 2ke^{\frac{-x}{5}} dx$= 1
$\int_{0}^{+\infty} 2ke^{\frac{-x}{5}} dx$= 1
2k $\int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-x}{5}} dx$= 1
2k $\lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{\frac{-x}{5}} dx$= 1
2k $\lim_{b \to +\infty} -5e^{\frac{-x}{5}}|_0^b$= 1
-10k $\lim_{b \to +\infty} e^{\frac{-b}{5}} - e^{\frac{-0}{5}}$= 1
-10k $\lim_{b \to +\infty} e^{\frac{-b}{5}} - e^{\frac{0}{5}}$= 1
-10k $\lim_{b \to +\infty} e^{\frac{-b}{5}} - e^{0}$= 1
-10k $\lim_{b \to +\infty} e^{\frac{-b}{5}} - 1$= 1
-10k (0 - 1)= 1
-10k (-1)= 1
10k= 1
k= $\frac{1}{10}$.

f (x)= $\begin{cases} \frac{1}{5} e^{\frac{-x}{5}}, x > 0 \\ 0, c.c. \end{cases}$.

X ~ Exp (λ= $\frac{1}{5}$).

(b) *¿Qué porcentaje de componentes de este tipo duran entre 2 y 10 horas? ¿Y más de un día? Determinar la esperanza y la varianza.*

P ($2 \leq X \leq 10$)= P ($X \leq 10$) - P ($X < 2$)
P ($2 \leq X \leq 10$)= F (10) - F (2)
P ($2 \leq X \leq 10$)= (1 - $e^{\frac{-1}{5}*10}$) - (1 - $e^{\frac{-1}{5}*2}$)
P ($2 \leq X \leq 10$)= (1 - e^{-2}) - (1 - $e^{\frac{-2}{5}}$)

P $(2 \leq X \leq 10)$= 1 - e^{-2} - 1 + $e^{\frac{-2}{5}}$
P $(2 \leq X \leq 10)$= e^{-2} + $e^{\frac{-2}{5}}$
P $(2 \leq X \leq 10)$= 0,135 + 0,67
P $(2 \leq X \leq 10)$= 0,805.

P $(X > 24)$= 1 - P $(X \leq 24)$
P $(X > 24)$= 1 - F (24)
P $(X > 24)$= 1 - (1 - $e^{\frac{-1}{5}*24}$)
P $(X > 24)$= 1 - (1 - $e^{\frac{-24}{5}}$)
P $(X > 24)$= 1 - 1 + $e^{\frac{-24}{5}}$
P $(X > 24)$= $e^{\frac{-24}{5}}$
P $(X > 24)$= 0,0082.

Por lo tanto, el porcentaje de componentes de este tipo que duran entre 2 y 10 horas es 0,805 y más de un día 0,0082.

E (X)= $\frac{1}{\lambda}$
E (X)= $\frac{1}{\frac{1}{5}}$
E (X)= 5.

V (X)= $\frac{1}{\lambda^2}$
V (X)= $\frac{1}{(\frac{1}{5})^2}$
V (X)= $\frac{1}{\frac{1}{25}}$
V (X)= 25.

(c) *Si se consideran 40 componentes del tipo anterior, obtener, aproximadamente, la probabilidad de que la vida media de los 40 componentes esté comprendida entre 2 y 10 horas. (Sugerencia: Considerar las v.a. X_i: "duración en horas del componente electrónico i", i= 1, 2, … , 40).*

X_i: "duración (en horas) del i-ésimo componente electrónico", i= 1, 2, … , 40.
$\bar{X}$: "duración (en horas) promedio de un componente electrónico de una muestra de n componentes electrónicos".

$\bar{X} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ ($\mu_{\bar{X}}$= μ= 5, $\sigma_{\bar{X}}^2$= $\frac{\sigma^2}{n}$= $\frac{5}{8}$), por TCL.

P $(2 \leq \bar{X} \leq 10)$= P $(\bar{X} \leq 10)$ - P $(\bar{X} < 2)$
P $(2 \leq \bar{X} \leq 10)$= P $(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{10-5}{\frac{5}{\sqrt{40}}})$ - P $(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{2-5}{\frac{5}{\sqrt{40}}})$
P $(2 \leq \bar{X} \leq 10)$= P $(Z \leq \frac{5}{\frac{5}{6,32}})$ - P $(Z < \frac{-3}{\frac{5}{6,325}})$ por TCL

$P\ (2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx P\ (Z \leq 6{,}32) - P\ (Z < -3{,}79)$
$P\ (2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx F\ (6{,}32) - F\ (-3{,}79)$
$P\ (2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx 1 - 0$
$P\ (2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx 1.$

Ejercicio 12.

La resistencia a la ruptura de un remache tiene un valor medio de 10000 lb/$pulg^2$ y una desviación estándar de 500 lb/$pulg^2$.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio a la ruptura de la muestra, para una muestra de 40 remaches, sea entre 9900 y 10200?*

X_i: "resistencia (en lb/pulg) a la ruptura del i-ésimo remache", i= 1, 2, … , 40.
$\bar{X}$: "resistencia (en lb/pulg) a la ruptura promedio de un remache de una muestra de n remaches".

$\bar{X} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ ($\mu_{\bar{X}}$= μ= 10000, $\sigma_{\bar{X}}^2$= $\frac{\sigma^2}{n}$= 6250), por TCL.

P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)= P ($\bar{X} \leq$ 10200) - P ($\bar{X} <$ 9900)
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)= P ($\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{10200-10000}{\frac{500}{\sqrt{40}}}$) - P ($\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{9900-10000}{\frac{500}{\sqrt{40}}}$)
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)$\approx$ P (Z $\leq \frac{200}{\frac{500}{6,325}}$) - P (Z $< \frac{-100}{\frac{500}{6,325}}$) por TCL
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)$\approx$ P (Z $\leq$ 2,53) - P (Z $<$ -1,26)
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)$\approx$ F (2,53) - F (-1,26)
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)$\approx$ 0,9941 - 0,1038
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)$\approx$ 0,8903.

Por lo tanto, la probabilidad de que la resistencia promedio a la ruptura de la muestra, para una muestra de 40 remaches, sea entre 9900 y 10200 es, aproximadamente, 0,8903.

(b) *Si el tamaño de la muestra hubiera sido 15 en lugar de 40, ¿podría calcularse la probabilidad pedida en el inciso (a) a partir de la información dada?*

Si el tamaño de la muestra hubiera sido 15 en lugar de 40, no podría calcularse la probabilidad pedida en el inciso (a) a partir de la información, porque n $<$ 30 y, por lo tanto, no es posible aplicar el Teorema Central del Límite.

Ejercicio 13.

Si el 3% de las válvulas manufacturadas por una compañía son defectuosas, hallar la probabilidad de que en una muestra de 100 válvulas: (i) 0, (ii) más de 5, (iii) entre 1 y 3, sean defectuosas.

(a) *Usar la aproximación normal a la binomial.*

X: "número de válvulas manufacturadas defectuosas".

X ~ B (n= 100, p= 0,03).

P (X= 0)≈ P (X= 0 + 0,5) corrección por continuidad
P (X= 0)≈ P (X= 0,5)
P (X= 0)≈ P ($\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$= $\frac{0,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03(1-0,03)}}$)
P (X= 0)≈ P (Z= $\frac{0,5-3}{\sqrt{100*0,03*0,97}}$) por TCL (*)
P (X= 0)≈ P (Z= $\frac{-2,5}{\sqrt{2,91}}$)
P (X= 0)≈ P (Z= $\frac{-2,5}{1,706}$)
P (X= 0)≈ P (Z= -1,47)
P (X= 0)≈ 0.

P (X > 5)= 1 - P (X ≤ 5)
P (X > 5)≈ 1 - P (X ≤ 5 + 0,5) corrección por continuidad
P (X > 5)≈ 1 - P (X ≤ 5,5)
P (X > 5)≈ 1 - P ($\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{5,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03(1-0,03)}}$)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{5,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03*(1-0,03)}}$) por TCL (*)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{5,5-3}{\sqrt{100*0,03*0,97}}$)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{2,5}{\sqrt{2,91}}$)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{2,5}{1,706}$)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ 1,47)
P (X > 5)≈ 1 - F (1,47)
P (X > 5)≈ 1 - 0,9292
P (X > 5)≈ 0,0708.

P (1 ≤ X ≤ 3)= P (X ≤ 3) - P (X < 1)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (X ≤ 3 + 0,5) - P (X < 1 + 0,5)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (X ≤ 3,5) - P (X < 1,5) corrección por continuidad
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P ($\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{3,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03(1-0,03)}}$) - P ($\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{1,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03(1-0,03)}}$)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (Z ≤ $\frac{3,5-3}{\sqrt{100*0,03*0,97}}$) - P (Z ≤ $\frac{1,5-3}{\sqrt{100*0,03*0,97}}$) por TCL (*)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (Z ≤ $\frac{0,5}{\sqrt{2,91}}$) - P (Z ≤ $\frac{-1,5}{\sqrt{2,91}}$)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (Z ≤ $\frac{0,5}{1,706}$ - P (Z ≤ $\frac{-1,5}{1,706}$)

$P(1 \leq X \leq 3) \approx P(Z \leq 0{,}29) - P(Z \leq -0{,}88)$
$P(1 \leq X \leq 3) \approx F(0{,}29) - F(-0{,}88)$
$P(1 \leq X \leq 3) \approx 0{,}6141 - 0{,}1894$
$P(1 \leq X \leq 3) \approx 0{,}4247$.

(*) np= $3 < 10$ y n (1 - p)= $97 > 10$ (no es tan efectivo aplicar esta aproximación).

(b) *Usar la distribución binomial y hacer el cálculo con la ayuda de un software de matemática (o una calculadora).*

$P(X=0) = \binom{100}{0} 0{,}03^0 (1-0{,}03)^{100-0}$
$P(X=0) = 1 * 1 * 0{,}97^{100}$
$P(X=0) = 1 * 1 * 0{,}0476$
$P(X=0) = 0{,}0476$.

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$
$P(X > 5) = 1 - 0{,}9192$
$P(X > 5) = 0{,}0808$.

$P(1 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X < 1)$
$P(1 \leq X \leq 3) = 0{,}6472 - 0{,}0476$
$P(1 \leq X \leq 3) = 0{,}5996$.

Ejercicio 14.

Una máquina fabrica piezas cuyas longitudes se distribuyen según una normal de media 32 y desviación estándar 0,3 milímetros, considerándose aceptables aquellas cuya medida se encuentra dentro del intervalo (31,1; 32,6).

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que una pieza fabricada por esta máquina sea defectuosa?*

X: "longitud (en milímetros) de una pieza fabricada por la máquina".

$X \sim \mathcal{N}$ (μ= 32, σ^2= $0,3^2$= 0,09).

P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - P (31,1 ≤ X ≤ 32,6)
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - (P (X ≤ 32,6) - P (X < 31,1))
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - [P ($\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{32,6-32}{0,3}$) - P ($\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{31,1-32}{0,3}$)]
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - [P (Z ≤ $\frac{0,6}{0,3}$) - P (Z < $\frac{-0,9}{0,3}$)]
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - [P (Z ≤ 2) - P (Z < -3)]
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1- [F (2) - F (-3)]
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - (0,9772 - 0,0013)
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - 0,9759
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 0,0241.

Por lo tanto, la probabilidad de que una pieza fabricada por esta máquina sea defectuosa es 0,0241.

(b) *Calcular la probabilidad de que un lote de 500 piezas contenga más de 15 defectuosas. (Sugerencia: Considerar la v.a. Y: "número de piezas defectuosas en el lote" y pensar qué distribución tiene Y).*

Y: "número de piezas defectuosas".

Y ~ B (n= 500, p= 0,0241).

P (Y > 15)= 1 - P (Y ≤ 15)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Y ≤ 15 + 0,5) corrección por continuidad
P (Y > 15)≈ 1 - P (Y ≤ 15,5)
P (Y > 15)≈ 1 - P ($\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{15,5-500*0,0241}{\sqrt{500*0,0241(1-0,0241)}}$)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{15,5-12,05}{\sqrt{500*0,0241*0,9759}}$) por TCL (*)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{3,45}{\sqrt{11,759595}}$)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{3,45}{3,429}$)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Z ≤ 1,01)
P (Y > 15)≈ 1 - F (1,01)

$P\ (Y > 15) \approx 1 - 0{,}8438$
$P\ (Y > 15) \approx 0{,}1562.$

(*) $np = 12{,}05 > 10$ y $n\ (1 - p) = 487{,}95 > 10$ (es efectivo aplicar esta aproximación).