Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2: Demostraciones, Conjuntos y Funciones.

Ejercicio 1.

Demostrar que la suma de 3 números enteros consecutivos es un múltiplo de 3. (Un múltiplo de 3 es un número que puede escribirse como 3 por un número entero: si a es múltiplo de 3, entonces, a= 3h, h entero).

Proposición:

"La suma de 3 números enteros consecutivos es un múltiplo de 3".
"Si a, (a + 1), [(a + 1) + 1] $\in \mathbb{Z}$, entonces, a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3k, con k $\in \mathbb{Z}$".

Método directo:

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= a + a + 1 + a + 1 + 1$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3a + 3$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3 (a + 1)$,

donde $(a + 1) \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

Método del absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3k + 1$
$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad a + a + 1 + a + 1 + 1= 3k + 1$
$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 3a + 3= 3k + 1$
$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 3 (a + 1)= 3k + 1$,

donde $(a + 1) \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es y no es múltiplo de 3), queda demostrada la proposición.

Método indirecto:

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3k + 1$
$a + a + 1 + a + 1 + 1= 3k + 1$
$3a + 3= 3k + 1$
$3a= 3k + 1 - 3$

$3a = 3k - 2$

$a = \frac{3k-2}{3}$

$a = k - \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

$a + 1 = k + \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

$(a + 1) + 1 = k + \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

Ejercicio 2.

Demostrar que, si el cuadrado de un número entero w es par , el cuadrado del anterior a w es impar.

Proposición:

"Si el cuadrado de un número entero w es par, el cuadrado del anterior a w es impar".
"Si w^2= 2k, entonces, $(w-1)^2$= 2k + 1, con k $\in \mathbb{Z}$".

Método del absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

w^2= 2k $\wedge$ $(w-1)^2$= 2k
w^2= 2k $\wedge$ w^2 - 2w + 1= 2k
w^2= 2k $\wedge$ w^2= 2k + 2w - 1
w^2= 2k $\wedge$ w^2= 2 (k + w) - 1,

donde (k + w) $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es par e impar), queda demostrada la proposición.

Método indirecto:

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$(w-1)^2$= 2k
w^2 - 2w + 1= 2k
w^2= 2k + 2w - 1
w^2= 2 (k + w) - 1,

donde (k + w) $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

Ejercicio 3.

Demostrar que la suma de 3 números enteros consecutivos, si el primero es impar, es múltiplo de 6.

Proposición:

"Si el primer número es impar, entonces, la suma de 3 números enteros consecutivos es múltiplo de 6".
"Si a= 2k + 1, entonces, a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6k, con k ∈ ℤ".

Método directo:

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= (2k + 1) + [(2k + 1) + 1] + \{[(2k + 1) + 1] + 1\}$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 2k + 1 + 2k + 1 + 1 + 2k + 1 + 1 + 1$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6k + 6$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6 (k + 1)$,

donde $(k + 1) \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

Método del absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6k + 3$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad a + a + 1 + a + 1 + 1= 6k + 3$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad 3a + 3= 6k + 3$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad 3a= 6k + 3 - 3$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad 3a= 6k$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad a= \frac{6k}{3}$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad a= 2k$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es impar y par), queda demostrada la proposición.

Método indirecto:

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6k + 3$
$a + a + 1 + a + 1 + 1= 6k + 3$
$3a + 3= 6k + 3$
$3a= 6k + 3 - 3$
$3a= 6k$

a= $\frac{6k}{3}$
a= 2k.

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

Ejercicio 4.

Recordar que un número racional o fraccionario es aquel que puede expresarse como cociente de enteros, es decir si $x = \frac{a}{b}$ *y* $b \neq 0$ *, se dice que* x *es un número racional. Un número es irracional si no puede escribirse como cociente de enteros, por ejemplo:* $\sqrt{2}$*,* π*,* $\sqrt{5}$*. Demostrar que la suma de un número racional y un irracional es un número irracional.*

Proposición:

"Si a es un número racional y b es un número irracional, entonces, su suma es un número irracional".
"Si $a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y $b \in I$, entonces, $(a + b) \in I$".

Método directo:

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

$a + b = \frac{x}{y} + b \in I$.

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

Método absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y $b \in I$ $\quad\wedge\quad$ $(a + b) \notin I$
$a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y $b \in I$ $\quad\wedge\quad$ $\frac{x}{y} + b = \frac{w}{z}$
$a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y $b \in I$ $\quad\wedge\quad$ $b = \frac{w}{z} - \frac{x}{y}$
$a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y $b \in I$ $\quad\wedge\quad$ $b = \frac{yw - xz}{yz} \in \mathbb{Q}$,

donde $x, y, w, z \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es irracional y racional), queda demostrada la proposición.

Método indirecto:

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$(a + b) \notin I$
$\frac{x}{y} + b = \frac{w}{z}$
$b = \frac{w}{z} - \frac{x}{y}$
$b = \frac{yw - xz}{yz} \in \mathbb{Q}$,

donde x, y, w, z $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

Juan Menduiña

Ejercicio 5.

Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

(a) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 9\}$.

A= {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

(b) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x + 3= 7\}$.

A= {4}.

(c) $B= \{y: y \in \mathbb{Z} \wedge -2 < y \leq 3\}$.

B= {-1, 0, 1, 2, 3}.

(d) *C= {x: x es una vocal de la palabra "número"}.*

C= {e, o, u}.

(e) *D= {x: x es un dígito de la cifra 453425}.*

D= {2, 3, 4, 5}.

(f) *E= {z: z es un dígito primo de la cifra 729634}.*

E= {2, 3, 7}.

(g) $A= \{w: w \in \mathbb{N} \wedge$ *w es divisor de 50}.*

A= {1, 2, 5, 10, 25, 50}.

(h) $H= \{w: w \in \mathbb{N} \wedge w^2 \leq 9\}$.

H= {1, 2, 3}.

(i) $F= \{a: a \in \mathbb{Z} \wedge -4 \leq a + 2 \leq 5\}$.

F= {-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}.

(j) $G= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 3 \leq x - 4 \leq 8\}$.

G= {7, 8, 9, 10, 11, 12}.

(k) $W= \{x: x= 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 5\}$.

W= {2, 6, 10, 14, 18, 22}.

(l) $F= \{x: x= 6k + 3 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 4\}$.

F= {3, 9, 15, 21, 27}.

Juan Menduiña

Ejercicio 6.

Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

(a) *El conjunto de los números enteros pares mayores que -8 y menores o iguales que 12.*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 2k \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq k \leq 6\}$.

(b) *El conjunto de las primeras seis potencias naturales de -2.*

B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= (-2)^k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 6\}$.

(c) *El conjunto de los números naturales pares.*

C= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}$.

(d) *El conjunto de los enteros múltiplos de 3.*

D= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 3k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) *El conjunto de los naturales múltiplos de 5.*

E= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 5k \wedge k \in \mathbb{N}\}$.

(f) *El conjunto de los enteros múltiplos de 9.*

F= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 9k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(g) *El conjunto de los números reales que anulan la ecuación* $(x^3 - \frac{1}{4}x)(x^2 - 3)(x + 5)$.

G= $\{x: x \in \mathbb{R} \wedge (x^3 - \frac{1}{4}x)(x^2 - 3)(x + 5)= 0\}$.

(h) *El conjunto de los enteros que son el siguiente de los múltiplos de 3.*

H= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 3k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(i) *El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 2 a los múltiplos de 4.*

I= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(j) *El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 5 a los múltiplos de 10.*

J= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 10k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 7.

Indicar si los siguientes pares de conjuntos son iguales, son distintos o alguno está incluído en el otro:

(a) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 6\}$; $B= \{1, 2, 3, 6\}$.

A= B.

(b) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 5\}$; $B= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 5\}$.

A ⊂ B.

(c) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 12\}$; $B= \{1, 2, 3, 4\}$.

B ⊂ A.

(d) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 4x + 4= 0\}$; $B= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x^2 \leq 5\}$.

A= B.

(e) $A= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 2x= x\}$; $B= \{0\}$.

A= B.

Ejercicio 8.

En cada caso, escribir por comprensión los conjuntos que se mencionan.

(a) *Probar que los múltiplos naturales de 18 son múltiplos de 6.*

A= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 18k \wedge k \in \mathbb{N}\}$= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 6 (3k) \wedge k \in \mathbb{N}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$.

(b) *Probar que los múltiplos enteros de 60 son múltiplos de 15.*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 60k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 15 (4k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 15k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) *Probar que los múltiplos enteros de 12 son pares.*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 12k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 2 (6k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) *¿Son todos los múltiplos naturales de 3 múltiplos de 21?*

A= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 21k \wedge k \in \mathbb{N}\}$= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 3 (7k) \wedge k \in \mathbb{N}\}$.

Por lo tanto, no todos los múltiplos naturales de 3 son múltiplos de 21.

(e) *¿Son todos los múltiplos enteros de 13 múltiplos de 39?*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 13k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 39k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 13 (3k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

Por lo tanto, no todos los múltiplos naturales de 13 son múltiplos de 39.

(f) *Probar que los múltiplos enteros de 39 son múltiplos de 13.*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 39k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 13 (3k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 13k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(g) *Sean B el conjunto de los múltiplos enteros de -5 y C el conjunto de los múltiplos enteros de 5, probar que B= C.*

B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \land x= -5k \land k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \land x= 5 (-k) \land k \in \mathbb{Z}\}$.
C= $\{x: x \in \mathbb{Z} \land x= 5k \land k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \land x= -5 (-k) \land k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 9.

Sean A= {x: x= 10k + 5 ∧ k ∈ ℤ} y B= {x: x= 5h ∧ h ∈ ℤ} conjuntos.

(a) *Probar que A ⊆ B.*

A= {x: x= 10k + 5 ∧ k ∈ ℤ}
A= {x: x= 5 * 2k + 5 ∧ k ∈ ℤ}
A= {x: x= 5 (2k + 1) ∧ k ∈ ℤ ∧ (k + 1) ∈ ℤ}.

Por lo tanto, queda demostrado que A ⊆ B.

(b) *¿El número 40 es un elemento de A ? ¿Y de B ? Justificar la respuesta.*

40= 10k + 5
10k= 40 - 5
10k= 35
k= $\frac{35}{10}$
k= 3,5 ∉ ℤ.

Por lo tanto, 40 no es un elemento de A.

40= 5h
h= $\frac{40}{5}$
h= 8 ∈ ℤ.

Por lo tanto, 40 es un elemento de B.

(c) *¿Está el conjunto B incluído en A? Justificar la respuesta.*

Para que B ⊆ A, todo elemento de B sería elemento de A y, como se vió anteriormente, existe, al menos, un elemento de B que no es elemento de A. Por lo tanto, el conjunto B no está incluído en el conjunto A.

Ejercicio 10.

Sean $A= \{x: x= 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ y $B= \{x: x= 2h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$ conjuntos.

(a) *Probar que $A \subseteq B$.*

$A= \{x: x= 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$
$A= \{x: x= 2 * 2k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$
$A= \{x: x= 2 (2k + 1) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge (k + 1) \in \mathbb{Z}\}$.

Por lo tanto, queda demostrado que $A \subseteq B$.

(b) *¿A y B son el mismo conjunto? Justificar la respuesta.*

Se debe demostrar que $A \subseteq B$ (demostrado en inciso (a)) y $B \subseteq A$.

Sea $4= 2h$, con $h= 2 \in \mathbb{Z}$, entonces, $4 \in B$. Si $4 \in A$, $4= 4k + 2$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, pero esto no sucede para ningún $k \in \mathbb{Z}$, entonces, $4 \notin A$. Entonces, $B \nsubseteq A$.

Por lo tanto, A y B no son el mismo conjunto.

Ejercicio 11.

Sean A= {1, 2}, B= {1, 2, 3, 6}, C= {x: x= 2k ∧ k ∈ ℕ}, D= {x: x= 3m ∧ m ∈ ℤ} y U= ℤ.

(a) *Expresar por comprensión A ∪ ℤ.*

A ∪ ℤ= ℤ.

(b) *Expresar por comprensión* A^c.

A^c= ℤ - {1, 2}.

(c) *Expresar por extensión A ∩ C.*

A ∩ C= {2}.

(d) *Expresar por extensión B - (D ∩ A).*

B - (D ∩ A)= B - ∅
B - (D ∩ A)= B
B - (D ∩ A)= {1, 2, 3, 6}.

(e) *Expresar por comprensión* C^c.

C^c= {x: x ∈ ℤ ∧ x≠ 2k ∧ k ∈ ℕ}.

(f) *Expresar por comprensión* $D^c \cup B^c$. *Recordar que, por las propiedades mencionadas, se puede calcular como* $(D \cap B)^c$.

$D^c \cup B^c$= $(D \cap B)^c$
$D^c \cup B^c$= {x: x ∈ ℤ - {3, 6}}.

(g) *Expresar por extensión (A ∪ B) ∩ (A ∪ C). Según las propiedades enunciados, ¿de qué otra forma se podría calcular?*

(A ∪ B) ∩ (A ∪ C)= {1, 2, 3, 6} ∩ {1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, …}
(A ∪ B) ∩ (A ∪ C)= {1, 2, 6}.

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2\} \cup \{2, 6\}$
$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 6\}$.

(h) *Expresar por comprensión* $A^c \cup D^c$.

$A^c \cup D^c = (A \cap D)^c$
$A^c \cup D^c = \{x: x \in \mathbb{Z}\}$.

(i) *Expresar por comprensión* $A^c \cap C^c$.

$A^c \cap C^c = (A \cup C)^c$
$A^c \cap C^c = \{x: x \in \mathbb{Z} \land x \neq 1 \land x \neq 2k \land k \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 12.

Sean $A= \{x: x= 5w \wedge w \in \mathbb{Z}\}$ *y* $B= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x + 2 \leq 7\}$.

(a) *Hallar por extensión los conjuntos:* $A \cap B$ *y* $B - A$.

$A \cap B= \{0, 5\}$.

$B - A= \{-1, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) *Definir un conjunto H, que cumpla que* $H \subseteq B$.

$H= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq x + 2 \leq 7\}$.

$H \subseteq B$.

Ejercicio 13.

Sean los conjuntos $A= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B= \{x: x= 4k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ *y* $C= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(a) *Hallar y expresar por extensión:* $A \cap (B \cup C)$ *y* $C - (A - B)$.

$A \cap (B \cup C)= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$
$A \cap (B \cup C)= \{3, 4, 5, 6\}$.

$C - (A - B)= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 5, 6\}$
$C - (A - B)= \{4, 7, 8\}$.

(b) *Hallar un conjunto D que esté incluído en B.*

$D= \{x: x= 8k \wedge k \in \mathbb{Z}\}= \{x: x= 4 (2k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

$D \subseteq B$.

Ejercicio 14.

Sean P el conjunto de los enteros pares e I el conjunto de los enteros impares y U= $\mathbb{Z}$.

(a) *Expresar por comprensión: P ∪ I, P - I, I - P, P^c, I^c.*

P ∪ I= $\mathbb{Z}$.

P - I= P= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}.

I - P= I= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k + 1 ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}.

P^c= I= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k + 1 ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}.

I^c= P= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}.

(b) *Probar que P ∩ I= ∅. Indicaciones: probar por el absurdo, suponiendo que fuera distinto del ∅, es decir, que existe un número m que es, a la vez, elemento de P y elemento de I .*

Proposición:

"Si P es el conjunto de los enteros pares e I es el conjunto de los enteros impares, entonces, su intersección es vacía".
"Si P= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$} ∧ I= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k + 1 ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}, entonces, P ∩ I= ∅".

Método del absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

P= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$} ∧ I= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k + 1 ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$} ∧ P ∩ I= a.

Entonces, a= 2k y a= 2k + 1, k ∈ $\mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es par e impar), queda demostrada la proposición.

Ejercicio 15.

Si T es un conjunto de enteros múltiplos de 3 y C= {x: x ∈ ℤ ∧ x= 3k + 1 ∧ k ∈ ℤ} y U= ℤ.

(a) *Hallar T ∩ C.*

T ∩ C= ∅.

(b) *Hallar* $(T \cup C)^c$.

$(T \cup C)^c$= {x: x ∈ ℤ ∧ x= 3k + 2 ∧ k ∈ ℤ}.

Ejercicio 16.

Hallar el producto cartesiano E x F de los conjuntos E= {-2, -1, 0, 1} y F= {2, 3} y representarlo en $\mathbb{R}^2$ como puntos del plano.

E x F= {(-2, 2), (-2, 3), (-1, 2), (-1, 3), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)}.

Gráfico.

Ejercicio 17.

Si A= {1, 2, 3}, B= {-2, -1, 6} y C= {6, 7} son conjuntos, hallar A x (B ∩ C) y (A x B) ∩ (A x C) y verificar que son iguales.

A x (B ∩ C)= {1, 2, 3} x {6}
A x (B ∩ C)= {(1, 6), (2, 6), (3, 6)}.

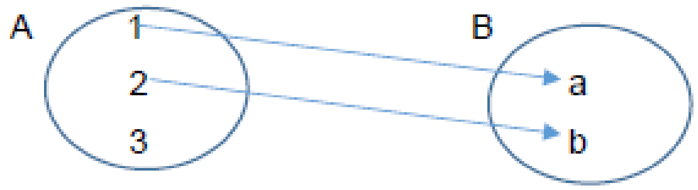
(A x B) ∩ (A x C)= {(1, -2), (1, -1), (1, 6), (2, -2), (2, -1), (2, 6), (3, -2), (3, -1), (3, 6)} ∩ {(1, 6), (1, 7), (2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7)}
(A x B) ∩ (A x C)= {(1, 6), (2, 6), (3, 6)}.

Por lo tanto, A x (B ∩ C)= (A x B) ∩ (A x C).

Ejercicio 18.

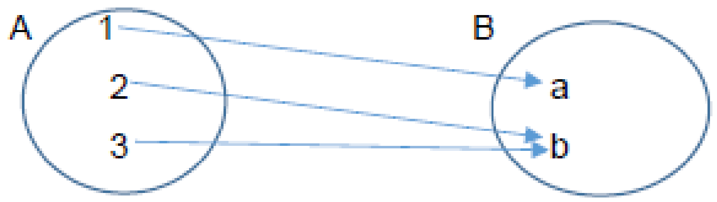
Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones, justificando lo que se afirma. En caso de serlo, indicar la imagen:

(a)



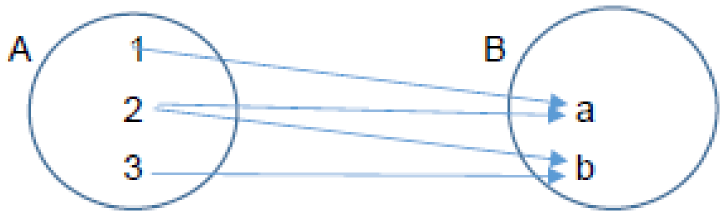
Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (3) al que no se le asigna un único elemento de B.

(b)



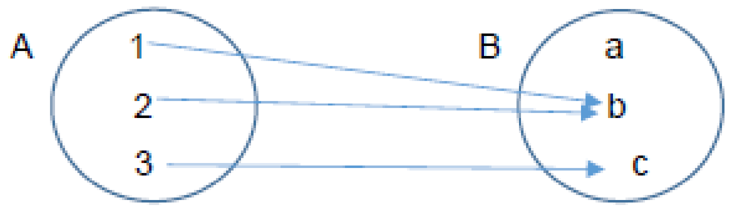
Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es {a, b}.

(c)



Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (2) al que se le asigna más de un elemento de B.

(d)



Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es {b, c}.

(e) *Si A= {1, 2, 3} y B= {x, y, z}:*

(i) *f: A ⟶ B, f= {(1, x), (2, z)}.*

Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (3) al que no se le asigna un único elemento de B.

(ii) *g: A ⟶ B, g= {(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)}.*

Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (2) al que se le asigna más de un elemento de B.

(iii) *h: A ⟶ B, h= {(1, y), (2, x), (3, y)}.*

Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es {x, y}.

Ejercicio 19.

Sea A el conjunto de los alumnos de Matemática 1. Determinar cuál de las siguientes asignaciones define una función sobre A:

(a) *Asignarle a cada estudiante su edad.*

Esta asignación define una función sobre A (dado que cada estudiante tiene sólo una edad).

(b) *Asignarle a cada estudiante su profesor.*

Esta asignación define una función sobre A (siempre que no exista un estudiante que tenga más de un profesor).

(c) *Asignarle a cada estudiante su hermana mujer.*

Esta asignación no define una función sobre A (siempre que exista, al menos, un estudiante que tenga más de una hermana mujer).

Ejercicio 20.

Dada f: $\mathbb{R}$ *- {5}* $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$*, f (x)=* $\frac{3+x}{x-5}$*, determinar:*

(a) *f (-1).*

f (-1)= $\frac{3+(-1)}{-1-5}$
f (-1)= $\frac{3-1}{-6}$
f (-1)= $\frac{2}{-6}$
f (-1)= $\frac{-1}{3}$.

(b) *f (0).*

f (0)= $\frac{3+0}{0-5}$
f (0)= $\frac{3}{-5}$
f (0)= $\frac{-3}{5}$.

(c) *f (2).*

f (2)= $\frac{3+2}{2-5}$
f (2)= $\frac{5}{-3}$
f (2)= $\frac{-5}{3}$.

(d) *f (*$\frac{3}{2}$*).*

f ($\frac{3}{2}$)= $\frac{3+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-5}$
f ($\frac{3}{2}$)= $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{-7}{2}}$
f ($\frac{3}{2}$)= $\frac{-9}{7}$.

Ejercicio 21.

Dada g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, g (t)=* $\sqrt{1+t^2}$*, determinar:*

(a) *g (0).*

g (0)= $\sqrt{1+0^2}$
g (0)= $\sqrt{1+0}$
g (0)= $\sqrt{1}$
g (0)= 1.

(b) *g* $(\frac{-3}{4})$.

g $(\frac{-3}{4})$= $\sqrt{1+(\frac{-3}{4})^2}$
g $(\frac{-3}{4})$= $\sqrt{1+\frac{9}{16}}$
g $(\frac{-3}{4})$= $\sqrt{\frac{25}{16}}$
g $(\frac{-3}{4})$= $\frac{5}{4}$.

(c) *g (3).*

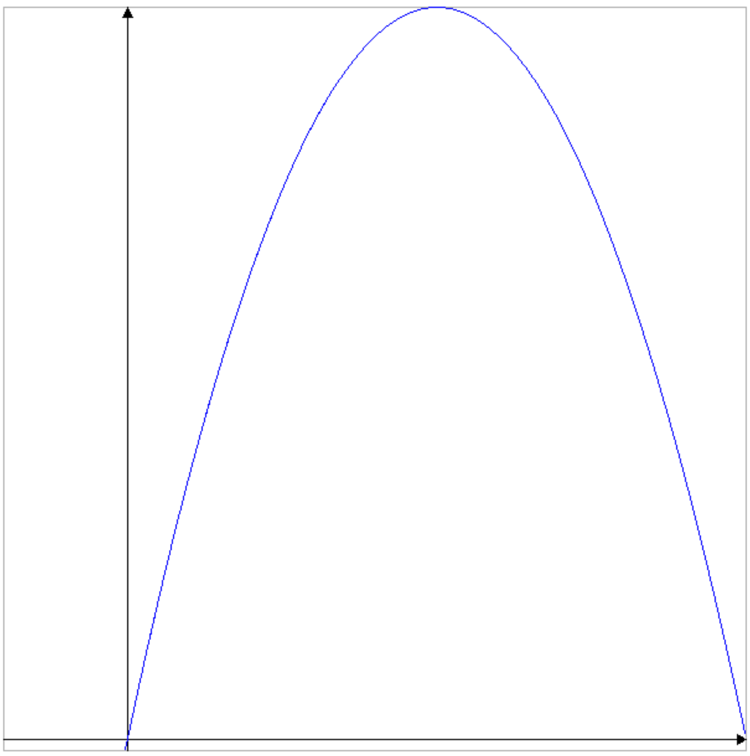
g (3)= $\sqrt{1+3^2}$
g (3)= $\sqrt{1+9}$
g (3)= $\sqrt{10}$.

Ejercicio 22.

Un rectángulo tiene 100 cm de perímetro. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados. Graficar la función obtenida, utilizando el eje x para indicar la longitud del lado elegido y el eje y para indicar el área. ¿Cuál es el área máxima?

P= 2 $(L_1 + L_2)$
100= 2 $(L_1 + L_2)$
$L_1 + L_2 = \frac{100}{2}$
$L_1 + L_2 = 50$.
$L_2 = 50 - L_1$.

A $(L_1, L_2) = L_1 L_2$
A $(L_1) = L_1 (50 - L_1)$
A $(L_1) = 50L_1 - L_1^2$.



A′ $(L_1) = 50 - 2L_1$.

A′ $(L_1) = 0$
$50 - 2L_1 = 0$
$2L_1 = 50$
$L_1 = \frac{50}{2}$
$L_1 = 25$.

A (25)= 50 * 25 - 25^2

A (25)= 1250 - 625
A (25)= 625.

Por lo tanto, el área máxima es 625 cm^2.

Ejercicio 23.

Se desea construir un depósito de base cuadrada (sin tapa) y 10 m^3 de capacidad. Expresar la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.

h= $\frac{V}{b^2}$,

donde h es la altura del depósito, V es la capacidad y b es la longitud del lado de la base.

S (b)= 4bh
S (b)= 4b $\frac{V}{b^2}$
S (b)= 4 $\frac{V}{b}$
S (b)= 4 $\frac{10}{b}$
S (b)= $\frac{40}{b}$,

donde S (b) es la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.

Ejercicio 24.

Una lámina metálica rectangular mide 5 m de ancho y 8 m de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. Expresar el volumen de la caja en función de su altura.

a= 5 - 2h; l= 8 - 2h,

donde a es el ancho, l es el largo y h es la altura de la caja sin tapa.

V (h)= alh
V (h)= (5 - 2h) (8 - 2h) h
V (h)= 40h - $10h^2$ - $16h^2$ + $4h^3$
V (h)= $4h^3$ - $16h^2$ + 40h,

donde V (h) es el volumen de la caja en función de su altura.

Ejercicio 25.

Estudiar si las siguientes funciones son iguales. Justificar.

f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por f (x)= x + 2 y g:* $\mathbb{R}$ *- {2}* $\longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por g (x)=* $\frac{x^2-4}{x-2}$.

g (x)= $\frac{x^2-4}{x-2}$
g (x)= $\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$
g (x)= x + 2.

Por lo tanto, si se redefine el dominio de g en $\mathbb{R}$, estas funciones (f y g) son iguales.

Ejercicio 26.

Usar una fórmula para definir cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

(a) *f asigna a cada número su cubo.*

f (x)= x^3.

(b) *g asigna a cada número el 5.*

g (x)= 5.

(c) *h asigna a cada número 4 más su cuadrado.*

h (x)= 4 + x^2.

(d) *w asigna a cada número su cubo más el doble del número.*

w (x)= x^3 + 2x.

Ejercicio 27.

Se define la función floor o suelo: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$*, como la función que a cada número real le asigna el mayor entero menor o igual que el número. Así, suelo (2,5)= 2, suelo (-3,7)= --4, suelo (5)= 5. Se nota también como suelo (x)=* $\lfloor x \rfloor$*. Hallar el valor de:*

(a) $\lfloor \sqrt{5} \rfloor$.

suelo ($\sqrt{5}$)= $\lfloor \sqrt{5} \rfloor$
suelo ($\sqrt{5}$)= 2.

(b) $\lfloor \frac{3}{4} \rfloor$.

suelo ($\frac{3}{4}$)= $\lfloor \frac{3}{4} \rfloor$
suelo ($\frac{3}{4}$)= 0.

(c) $\lfloor \frac{7}{3} - 9 \rfloor$.

suelo ($\frac{7}{3}$ - 9)= $\lfloor \frac{7}{3} - 9 \rfloor$
suelo ($\frac{7}{3}$ - 9)= $\lfloor \frac{-20}{3} \rfloor$
suelo ($\frac{7}{3}$ - 9)= -7.

Ejercicio 28.

Se define la función ceiling o techo: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, como la función que a cada número real le asigna el menor entero mayor o igual que el número. Así, techo (2,5)= 3, techo (-3,7)= -3, techo (5)= 5. Se nota también como techo (x)= $\lceil x \rceil$. Hallar el valor de:

(a) $\lceil \sqrt{11} \rceil$.

techo ($\sqrt{11}$)= $\lceil \sqrt{11} \rceil$
techo ($\sqrt{11}$)= 4.

(b) $\left\lceil \frac{3}{5} + \sqrt{2} \right\rceil$.

techo ($\frac{3}{5} + \sqrt{2}$)= $\left\lceil \frac{3}{5} + \sqrt{2} \right\rceil$
techo ($\frac{3}{5} + \sqrt{2}$)= 2.

(c) $\left\lceil \frac{5}{3} - 7 \right\rceil$.

techo ($\frac{5}{3}$ - 7)= $\left\lceil \frac{5}{3} - 7 \right\rceil$
techo ($\frac{5}{3}$ - 7)= $\left\lceil \frac{-16}{3} \right\rceil$
techo ($\frac{5}{3}$ - 7)= 6.

Ejercicio 29.

Se define la función factorial $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$*, como la función que a cada número natural le asigna el producto de todos los números naturales desde el número hasta el 1, suele escribirse en forma decreciente. Así, factorial (1)= 1, factorial (2)= 2 * 1, factorial (3)= 3 * 2 * 1, factorial (4)= 4 * 3 * 2 * 1. La notación habitual es factorial (n)= n!. Por definición, 0!= 1. Hallar el valor de:*

(a) *4!.*

factorial (4)= 4!
factorial (4)= 4 * 3 * 2 * 1
factorial (4)= 24.

(b) *5!.*

factorial (5)= 5!
factorial (5)= 5 * 4 * 3 * 2 * 1
factorial (5)= 120.

(c) *6!.*

factorial (6)= 6!
factorial (6)= 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1
factorial (6)= 720.

Ejercicio 30.

Sean A= {1, 2, 3, 4} y B= {a, b, c} conjuntos. Definir una función con dominio A y codominio B, que sea suryectiva.

1 ⟶ a.
2 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ c.

Por lo tanto, esta función A ⟶ B es suryectiva porque (∀y) (y ∈ B ⟶ (∃x) (x ∈ A ∧ y= f (x))) o, equivalentemente, porque Im (f)= Codom (f).

Juan Menduiña

Ejercicio 31.

Sean A= {1, 2, 3, 4} y B= {a, b, c, d, e} conjuntos. Definir una función con dominio A y codominio B, que sea inyectiva.

1 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ d.

Por lo tanto, esta función A ⟶ B es inyectiva porque $(\forall x_1)$ $(\forall x_2)$ $(x_1 \neq x_2 \longrightarrow$ f $(x_1)\neq$ f $(x_2))$ o, equivalentemente, porque $(\forall x_1)$ $(\forall x_2)$ (f $(x_1)=$ f $(x_2) \longrightarrow x_1= x_2)$.

Ejercicio 32.

Definir conjuntos finitos A, B, C, D, E y realizar diagramas de flechas para definir una función:

(a) *f: B ⟶ C que sea inyectiva y no suryectiva.*

B= {1, 2, 3, 4}.
C= {a, b, c, d, e}.

1 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ d.

(b) *g: D ⟶ E que sea suryectiva y no inyectiva.*

D= {1, 2, 3, 4}.
E= {a, b, c}.

1 ⟶ a.
2 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ c.

(c) *f: B ⟶ A que sea biyectiva. Definir la función inversa.*

B= {1, 2, 3, 4}.
A= {a, b, c, d}.

1 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ d.

f^{-1}: A ⟶ B.

a ⟶ 1.
b ⟶ 2.
c ⟶ 3.
d ⟶ 4.

Ejercicio 33.

Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos justificando lo que afirma:

(a) *"Una recta horizontal es la gráfica de una función inyectiva".*

Este enunciado es FALSO, ya que el único elemento de la imagen tiene asociado infinitos valores del dominio.

(b) *"Una recta vertical es la gráfica de una función".*

Este enunciado es FALSO, ya que el único elemento del dominio tiene asociado infinitos elementos del codominio.

(c) *"Una parábola con eje paralelo al eje y es la gráfica de una función inyectiva".*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento de la imagen (excepto en el vértice de la parábola) tiene asociado dos elementos del dominio.

(d) *"Una parábola con eje paralelo al eje x es la gráfica de una función".*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento del dominio (excepto en el vértice de la parábola) tiene asociado dos elementos del codominio.

(e) *"Una circunferencia es la gráfica de una función".*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento del dominio (excepto en los extremos laterales de la circunferencia) tiene asociado dos elementos del codominio.

(f) *"Dos conjuntos finitos entre los que se establece una función biyectiva pueden tener distinta cantidad de elementos".*

Este enunciado es FALSO, ya que, si se establece una función biyectiva entre dos conjuntos finitos, entonces, estos tienen la misma cantidad de elementos.

Ejercicio 34.

Para las funciones del ejercicio 16, indicar si son inyectivas, suryectivas o biyectivas.

El producto cartesiano del ejercicio 16 no es una función.

Ejercicio 35.

Para las funciones del ejercicio 17, indicar si son inyectivas. Definir, para cada una, un codominio de manera que sean suryectivas y otro para que no lo sean.

A x (B ∩ C)= (A x B) ∩ (A x C)= {(1, 6), (2, 6), (3, 6)}.

Estas funciones no son inyectivas. El codominio de manera que sean suryectivas es Codom= {6} y un codominio para que no lo sean es Codom= {6, 7}.

Ejercicio 36.

Analizar si las funciones suelo, techo y factorial son funciones inyectivas, suryectivas o biyectivas.

- La función "suelo" no es inyectiva, es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.
- La función "techo" no es inyectiva, es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.
- La función "factorial" es inyectiva, no es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.