Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 1:
Geometría.

Ejercicio 1.

Representar en el plano los siguientes puntos y decir a qué cuadrante pertenecen: P (2, -1), Q (3, $\frac{1}{2}$), R (-2, -4), S (0, -2), T (-3, 0).

Gráfico.

P pertenece al 4to. cuadrante.
Q pertenece al 1er. cuadrante.
R pertenece al 3er. cuadrante.
S no pertenece a ningún cuadrante.
T no pertenece a ningún cuadrante.

Juan Menduiña

Ejercicio 2.

Representar en el plano los puntos abscisa negativa y ordenada mayor que 2.

Gráfico.

Ejercicio 3.

Representar en el plano los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{(x, y) \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 1 \leq x < 2 \wedge y \geq 0\}$.

Gráfico.

(b) $B = \{(x, y) \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge xy < 0\}$.

Gráfico.

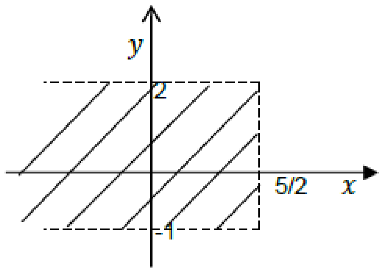
(c) $C = \{(x, y) \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x = y\}$.

Gráfico.

Ejercicio 4.

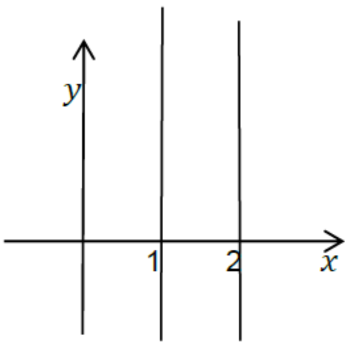
Definir, mediante condiciones, los siguientes subconjuntos del plano:

(a)



A= $\{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x < \frac{5}{2} \wedge -1 < y < 2\}$.

(b)



B= $\{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x= 1 \vee x= 2)\}$.

Ejercicio 5.

Calcular la distancia entre P_1 (3, 2) y P_2 (-1, 4).

d (P_1, P_2)= $\sqrt{(-1-3)^2+(4-2)^2}$
d (P_1, P_2)= $\sqrt{(-4)^2+2^2}$
d (P_1, P_2)= $\sqrt{16+4}$
d (P_1, P_2)= $\sqrt{20}$
d (P_1, P_2)= $\sqrt{4*5}$
d (P_1, P_2)= $\sqrt{4}\,\sqrt{5}$
d (P_1, P_2)= 2 $\sqrt{5}$.

<u>Ejercicio 6.</u>

Representar y hallar el perímetro del triángulo de vértices A (-1,2), B (4,5) y C (5,0).

Gráfico.

Perímetro= d (A, B) + d (B, C) + d (C, A)
Perímetro= $\sqrt{(4+1)^2+(5-2)^2}$ + $\sqrt{(5-4)^2+(0-5)^2}$ + $\sqrt{(-1-5)^2+(2-0)^2}$
Perímetro= $\sqrt{5^2+3^2}$ + $\sqrt{1^2+(-5)^2}$ + $\sqrt{(-6)^2+2^2}$
Perímetro= $\sqrt{25+9}$ + $\sqrt{1+25}$ + $\sqrt{36+4}$
Perímetro= $\sqrt{34}$ + $\sqrt{26}$ + $\sqrt{40}$
Perímetro= $\sqrt{2*17}$ + $\sqrt{2*13}$ + $\sqrt{2*20}$
Perímetro= $\sqrt{2}\sqrt{17}$ + $\sqrt{2}\sqrt{13}$ + $\sqrt{2}\sqrt{20}$
Perímetro= $\sqrt{2}$ ($\sqrt{17}$ + $\sqrt{13}$ + $\sqrt{20}$).

Ejercicio 7.

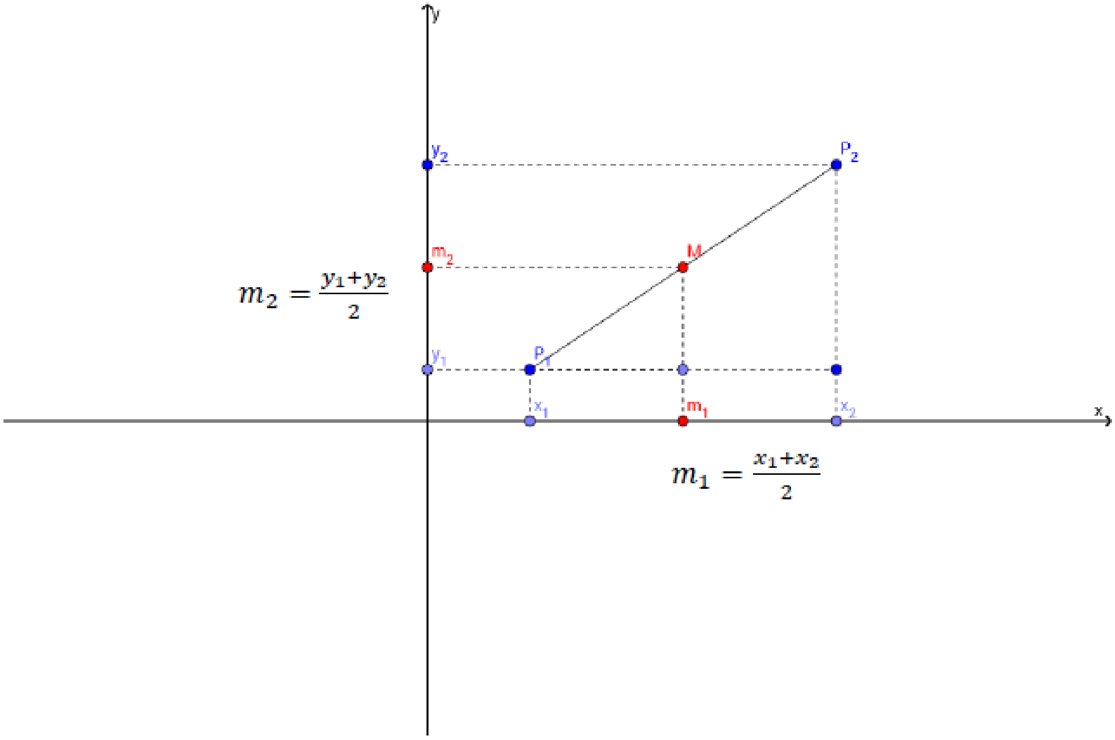
Determinar un punto sobre el eje y que equidiste de (2,5) y (3,3).

d ((0, y), (2, 5))= d ((0, y), (3, 3))
$\sqrt{(2-0)^2+(5-y)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(3-y)^2}$
$\sqrt{2^2+(5-y)^2}=\sqrt{3^2+(3-y)^2}$
$\sqrt{4+(5-y)^2}=\sqrt{9+(3-y)^2}$
4 + $(5-y)^2$= 9 + $(3-y)^2$
4 + 25 - 10y + y^2= 9 + 9 - 6y + y^2
29 - 10y= 18 - 6y
-6y + 10y= 29 - 18
4y= 11
y= $\frac{11}{4}$.

Por lo tanto, el punto sobre el eje y que equidista de (2, 5) y (3, 3) es (0, $\frac{11}{4}$).

Ejercicio 8.

El punto medio entre dos puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) está dado por el punto M ($\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$) como se muestra en el gráfico:



Determinar las coordenadas del punto medio entre A (-3, 8) y B (5, -4).

M ($\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$)= M ($\frac{-3+5}{2}$, $\frac{8-4}{2}$)
M ($\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$)= M ($\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$)
M ($\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$)= M (1, 2).

Ejercicio 9.

Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos dados:

(a) *(2, 5) y (4, 3).*

$$\begin{cases} 5 = 2m + b \Leftrightarrow b = 5 - 2m \\ 3 = 4m + b \Leftrightarrow b = 3 - 4m \end{cases}.$$

5 - 2m= 3 - 4m
-2m + 4m= 3 - 5
2m= -2
m= $\frac{-2}{2}$
m= -1.

b= 5 - 2 (-1)= 5 + 2= 7.
b= 3 - 4 (-1)= 3 + 4= 7.

y= -x + 7. Ecuación explícita de la recta.

(b) *(-1, 3) y (-2, -3).*

$$\begin{cases} 3 = -m + b \Leftrightarrow b = 3 + m \\ -3 = -2m + b \Leftrightarrow b = -3 + 2m \end{cases}.$$

3 + m= -3 + 2m
2m - m= 3 + 3
m= 6.

b= 3 + 6= 9.
b= -3 + 2 * 6= 9.

y= 6x + 9. Ecuación explícita de la recta.

(c) *($\frac{1}{2}$, 0) y ($\frac{-1}{2}$, -2).*

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}m + b \Leftrightarrow b = \frac{-1}{2}m \\ -2 = \frac{-1}{2}m + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{1}{2}m \end{cases}.$$

$\frac{-1}{2}$ m= -2 + $\frac{1}{2}$ m
$\frac{1}{2}$ m + $\frac{1}{2}$ m= 2
m= 2.

b= $\frac{-1}{2}$ * 2= -1.
b= -2 + $\frac{1}{2}$ * 2= -2 + 1= -1.

y= 2x - 1. Ecuación explícita de la recta.

Ejercicio 10.

Determinar el valor de k para el cual los puntos (-1,2), (3, 1) y (2, -k+1) están alineados.

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\frac{y-2}{x-(-1)}=\frac{2-1}{3-(-1)}$

$\frac{y-2}{x+1}=\frac{1}{3+1}$

$\frac{y-2}{x+1}=\frac{1}{4}$

y - 2= $\frac{1}{4}$ (x + 1)

y - 2= $\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{4}$

y= $\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{4}$ + 2

y= $\frac{1}{4}$ x + $\frac{9}{4}$.

-k + 1= $\frac{1}{4}$ * 2 + $\frac{9}{4}$

-k + 1= $\frac{1}{2}$ + $\frac{9}{4}$

k= 1 - $\frac{1}{2}$ - $\frac{9}{4}$

k= $\frac{-7}{4}$.

Por lo tanto, el valor de k para el cual los puntos (-1,2), (3, 1) y (2, -k+1) están alineados es $\frac{-7}{4}$.

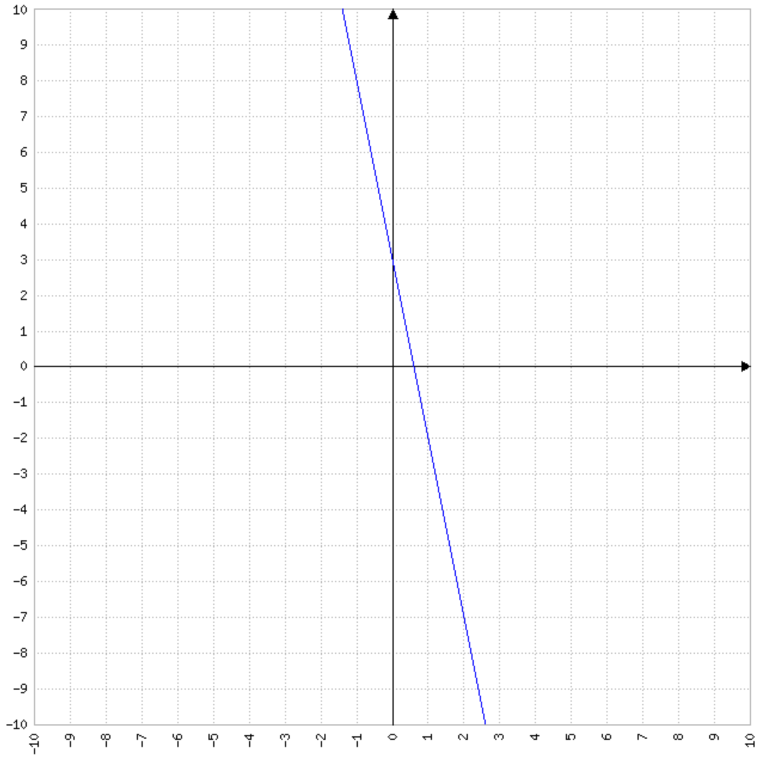
Ejercicio 11.

Hallar la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas y representarlas gráficamente.

(a) *L: 5x + y - 3= 0.*

y= -5x + 3.

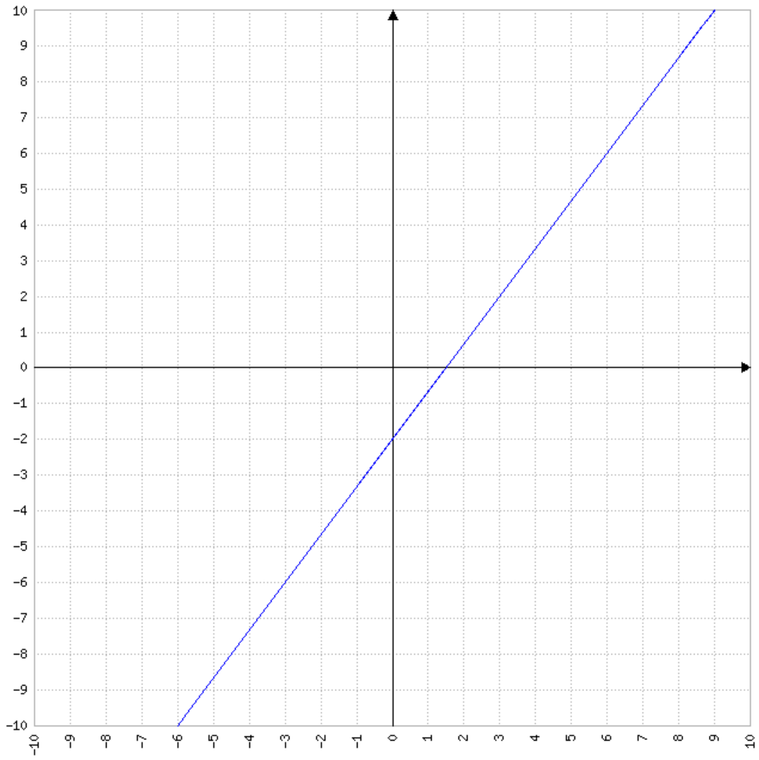
m= -5. Pendiente.
b= 3. Ordenada al origen.



(b) *S: 4x - 3y= 6.*

3y= 4x - 6
y= $\frac{4x-6}{3}$
y= $\frac{4}{3}$ x - 2.

m= $\frac{4}{3}$. Pendiente.
b= -2. Ordenada al origen.



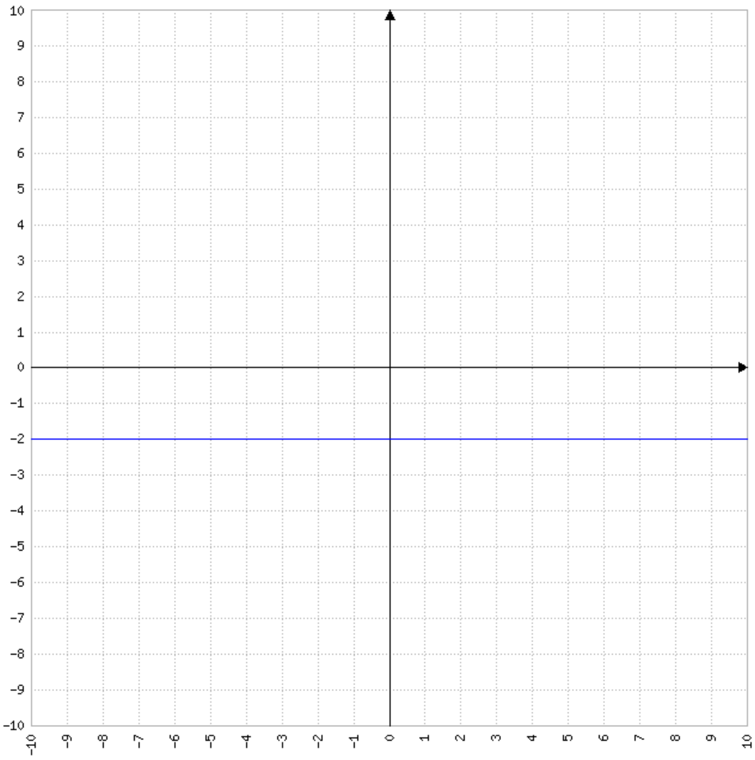
(c) *M: 3x - 6= 0.*

$3x= 6$
$x= \frac{6}{3}$
$x= 2.$

(d) *H: y + 2= 0.*

$y= -2.$

$m= 0.$	Pendiente.
$b= -2.$	Ordenada al origen.



Ejercicio 12.

Escribir la ecuación explícita de la recta que:

(a) *tiene pendiente –2 y pasa por el origen de coordenadas.*

y= -2x. Ecuación explícita de la recta.

(b) *tiene pendiente –2 y pasa por (-2, -3).*

-3= -2 (-2) + b
-3= 4 + b
b= -3 - 4
b= -7.

y= -2x - 7. Ecuación explícita de la recta.

Ejercicio 13.

(a) *Hallar la ecuación explícita de la recta L que tiene pendiente* $\frac{3}{5}$ *y pasa por P (12, 5).*

$5= \frac{3}{5} * 12 + b$
$5= 9 + b$
$b= 5 - 9$
$b= -4.$

$y= \frac{3}{5} x - 4.$ Ecuación explícita de la recta L.

(b) *Hallar una paralela a L que pase por Q (3, 12).*

$12= \frac{3}{5} * 3 + b$
$12= \frac{9}{5} + b$
$b= 12 - \frac{9}{5}$
$b= \frac{51}{5}.$

$y= \frac{3}{5} x + \frac{51}{5}.$ Ecuación explícita de recta paralela a L.

(c) *Hallar una perpendicular a L que pase por T (3, 6).*

$6= \frac{-5}{3} * 3 + b$
$6= -5 + b$
$b= 6 + 5$
$b= 11.$

$y= \frac{-5}{3} x + 11.$ Ecuación explícita de recta perpendicular a L.

Ejercicio 14.

(a) *Hallar la ecuación explícita de la recta L que tiene pendiente* $\frac{-5}{12}$ *y pasa por P (9, 6).*

$6= \frac{-5}{12} * 9 + b$

$6= \frac{-15}{4} + b$

$b= 6 + \frac{15}{4}$

$b= \frac{39}{4}$.

$y= \frac{-5}{12} x + \frac{39}{4}$. Ecuación explícita de la recta L.

(b) *Hallar una paralela a L que pase por Q (-5, 1).*

$1= \frac{-5}{12} (-5) + b$

$1= \frac{25}{12} + b$

$b= 1 - \frac{25}{12}$

$b= \frac{-13}{12}$.

$y= \frac{-5}{12} x - \frac{13}{12}$. Ecuación explícita de recta paralela a L.

(c) *Hallar una perpendicular a L que pase por T (-8, 4).*

$4= \frac{12}{5} (-8) + b$

$4= \frac{-96}{5} + b$

$b= 4 - \frac{96}{5}$

$b= \frac{-76}{5}$.

$y= \frac{12}{5} x - \frac{76}{5}$. Ecuación explícita de recta perpendicular a L.

Ejercicio 15.

(a) *Hallar la ecuación explícita de la recta L que pasa por los puntos P (-1, 5) y Q (5, 9).*

$\frac{y-5}{x-(-1)}=\frac{5-9}{-1-5}$

$\frac{y-5}{x+1}=\frac{-4}{-6}$

$\frac{y-5}{x+1}=\frac{2}{3}$

$y - 5= \frac{2}{3}(x + 1)$

$y - 5= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

$y= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 5$

$y= \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$. Ecuación explícita de la recta L.

(b) *Hallar una perpendicular a L que pase por S (-8, 5).*

$5= \frac{-3}{2}(-8) + b$

$5= 12 + b$

$b= 5 - 12$

$b= -7$.

$y= \frac{-3}{2}x - 7$. Ecuación explícita de recta perpendicular a L.

(c) *Hallar una paralela a L que pase por Q (-9, 15).*

$15= \frac{2}{3}(-9) + b$

$15= -6 + b$

$b= 15 + 6$

$b= 21$.

$y= \frac{2}{3}x + 21$. Ecuación explícita de recta paralela a L.

Ejercicio 16.

(a) *Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por P (-1, $\frac{1}{3}$) y es paralela a la recta de ecuación -x + 2y - 1= 0.*

-x + 2y - 1= 0
2y= x + 1
y= $\frac{x+1}{2}$
y= $\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3}$= $\frac{1}{2}$ (-1) + b
$\frac{1}{3}$= $\frac{-1}{2}$ + b
b= $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{2}$
b= $\frac{5}{6}$.

y= $\frac{1}{2}$ x + $\frac{5}{6}$. Ecuación explícita de la recta.

(b) *Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por P (2, $\frac{-1}{2}$) y es perpendicular a la recta de ecuación 3x - 2y + 1= 0.*

3x - 2y + 1= 0
2y= 3x + 1
y= $\frac{3x+1}{2}$
y= $\frac{3}{2}$ x + $\frac{1}{2}$.

$\frac{-1}{2}$= $\frac{-2}{3}$ * 2 + b
$\frac{-1}{2}$= $\frac{-4}{3}$ + b
b= $\frac{-1}{2}$ + $\frac{4}{3}$
b= $\frac{5}{6}$.

y= $\frac{-2}{3}$ + $\frac{5}{6}$. Ecuación explícita de la recta.

Ejercicio 17.

Hallar las pendientes de las siguientes rectas y expresarlas por sus ecuaciones explícitas. Para cada una de ellas, hallar una recta paralela y una perpendicular que pasen por el origen:

(a) *L: 3x - 2y + 6= 0.*

3x - 2y + 6= 0
2y= 3x + 6
y= $\frac{3x+6}{2}$
y= $\frac{3}{2}$ x + 3. Ecuación explícita de la recta con pendiente m= $\frac{3}{2}$.

y= $\frac{3}{2}$ x. Ecuación explícita de recta paralela.

y= $\frac{-2}{3}$ x. Ecuación explícita de recta perpendicular.

(b) *S: 2x + y= 6.*

2x + y= 6
y= -2x + 6. Ecuación explícita de la recta con pendiente m= -2.

y= -2x. Ecuación explícita de recta paralela que pasa por el origen.

y= $\frac{-1}{2}$ x. Ecuación explícita de recta perpendicular que pasa por el origen.

(c) *T= 6y - x - 2= 0.*

6y - x - 2= 0
6y= x + 2
y= $\frac{x+2}{6}$
y= $\frac{1}{6}$ x + $\frac{1}{3}$. Ecuación explícita de la recta con pendiente m= $\frac{1}{6}$.

y= $\frac{1}{6}$ x. Ecuación explícita de recta paralela que pasa por el origen.

y= -6x. Ecuación explícita de recta perpendicular que pasa por el origen.

Ejercicio 18.

Decidir si los siguientes pares de rectas son transversales, paralelas o coincidentes y determinar, cuando corresponda, las coordenadas del punto en el que se cortan.

(a) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -6x + 3y = -6 \end{cases}$.

y= 2x + 3.

3y= 6x - 6
y= $\frac{6x-6}{3}$
y= 2x - 2.

Por lo tanto, estas rectas son paralelas, ya que tienen la misma pendiente (m= 2).

(b) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

y= -2x - 1.

y= x - 2.

-2x - 1= x - 2
x + 2x= -1 + 2
3x= 1
x= $\frac{1}{3}$.

y= -2 $\frac{1}{3}$ - 1= $\frac{-2}{3}$ - 1= $\frac{-5}{3}$.
y= $\frac{1}{3}$ - 2= $\frac{-5}{3}$.

Por lo tanto, estas rectas son transversales, ya que se cortan en un punto pero sin formar un ángulo recto de 90°, y las coordenadas del punto en el que se cortan son ($\frac{1}{3}$, $\frac{-5}{3}$).

(c) $\begin{cases} 4x - 8y = -12 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$.

8y= 4x + 12
y= $\frac{4x+12}{8}$
y= $\frac{1}{2}$ x + $\frac{3}{2}$.

2y= x + 3

y= $\frac{x+3}{2}$

y= $\frac{1}{2}$ x + $\frac{3}{2}$.

Por lo tanto, estas rectas son paralelas, ya que tienen la misma pendiente (m= $\frac{1}{2}$).

Ejercicio 19.

(a) *Escribir la ecuación estándar de la circunferencia de centro C (-3, 4) y radio* $3^{\frac{1}{2}}$. *Graficar.*

$[x-(-3)]^2 + (y-4)^2 = (3^{\frac{1}{2}})^2$
$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 3.$ Ecuación estándar de la circunferencia.

Gráfico.

(b) *Escribir la ecuación estándar de la circunferencia de centro C (-2, 5) y que pasa por el punto de coordenadas (1, 2). Graficar.*

$[x-(-2)]^2 + (y-5)^2 = r^2$
$(x+2)^2 + (y-5)^2 = r^2.$

$r^2 = (1+2)^2 + (2-5)^2$
$r^2 = 3^2 + (-3)^2$
$r^2 = 9 + 9$
$r^2 = 18.$

$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 18.$ Ecuación estándar de la circunferencia.

Gráfico.

Ejercicio 20.

Hallar las ecuaciones estándar de las siguientes circunferencias con centro P y que pasa por Q, y con centro Q que pasa por P:

(a) *P (2, 5) y Q (4, 3).*

Con centro P y que pasa por Q:

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = r^2$.

$r^2 = (4-2)^2 + (3-5)^2$
$r^2 = 2^2 + (-2)^2$
$r^2 = 4 + 4$
$r^2 = 8$.

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 8$. Ecuación estándar de la circunferencia.

Con centro Q y que pasa por P:

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2$.

$r^2 = (2-4)^2 + (5-3)^2$
$r^2 = (-2)^2 + 2^2$
$r^2 = 4 + 4$
$r^2 = 8$.

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 8$. Ecuación estándar de la circunferencia.

(b) *P (-1, 3) y Q (-2, -3).*

Con centro P y que pasa por Q:

$(x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$.

$r^2 = (-2+1)^2 + (-3-3)^2$
$r^2 = (-1)^2 + (-6)^2$
$r^2 = 1 + 36$
$r^2 = 37$.

$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 37$. Ecuación estándar de la circunferencia.

Con centro Q y que pasa por P:

$(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$.

$r^2 = (-1+2)^2 + (3+3)^2$

r^2= 1^2 + 6^2
r^2= 1 + 36
r^2= 37.

$(x+2)^2$ + $(y+3)^2$= 37. Ecuación estándar de la circunferencia.

(c) *P* ($\frac{1}{2}$, *0) y Q* ($\frac{-1}{2}$, *-2).*

<u>Con centro P y que pasa por Q:</u>

$(x-\frac{1}{2})^2$ + y^2= r^2.

r^2= $(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2})^2$ + $(-2)^2$
r^2= $(-1)^2$ + 4
r^2= 1 + 4
r^2= 5.

$(x-\frac{1}{2})^2$ + y^2= 5. Ecuación estándar de la circunferencia.

<u>Con centro Q y que pasa por P:</u>

$(x+\frac{1}{2})^2$ + $(y+2)^2$= r^2.

r^2= $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^2$ + $(0+2)^2$
r^2= 1^2 + 2^2
r^2= 1 + 4
r^2= 5.

$(x+\frac{1}{2})^2$ + $(y+2)^2$= 5. Ecuación estándar de la circunferencia.

Ejercicio 21.

Analizar si las siguientes ecuaciones corresponden o no a una circunferencia, indicando, en caso afirmativo, los elementos de la misma y graficar:

(a) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$.

$2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$
$2 (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4) = 0$
$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = \frac{0}{2}$
$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 + 1^2 + (-2)^2$
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 + 1 + 4$
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Centro: C (-1, 2).
Radio: r= 3.

Gráfico.

(b) $x^2 + y^2 - 2x = 1$.

$x^2 + y^2 - 2x = 1$
$(x-1)^2 + y^2 = 1 + (-1)^2$
$(x-1)^2 + y^2 = 1 + 1$
$(x-1)^2 + y^2 = 2$.

Centro: C (1, 0).
Radio: r= $\sqrt{2}$.

Gráfico.

(c) $3x^2 + 3y^2 + 9x - 3y + 21 = 0$.

$3x^2 + 3y^2 + 9x - 3y + 21 = 0$
$3 (x^2 + y^2 + 3x - y + 7) = 0$
$x^2 + y^2 + 3x - y + 7 = \frac{0}{3}$
$x^2 + y^2 + 3x - y + 7 = 0$
$x^2 + y^2 + 3x - y = -7$
$(x+\frac{3}{2})^2 + (y-1)^2 = -7 + (\frac{3}{2})^2 + (-1)^2$
$(x+\frac{3}{2})^2 + (y-1)^2 = -7 + \frac{9}{2} + 1$

$(x+\frac{3}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{-3}{2}$.

Por lo tanto, esta ecuación no corresponde a una circunferencia.

(d) $x^2 + y^2 + 3x - 5y - \frac{1}{2} = 0$.

$x^2 + y^2 + 3x - 5y - \frac{1}{2} = 0$
$x^2 + y^2 + 3x - 5y = \frac{1}{2}$
$(x+\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{1}{2} + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{-5}{2})^2$
$(x+\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$
$(x+\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = 9$.

Centro: C $(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2})$.
Radio: r= 3.

Gráfico.

Ejercicio 22.

Llevar la ecuación $6x^2 + 6y^2 - 12x + 12y - 6 = 0$ *a la forma estándar e indicar sus elementos. Graficar.*

$6 (x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1)= 0$
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1= \frac{0}{6}$
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1= 0$
$x^2 + y^2 - 2x + 2y= 1$
$(x-1)^2 + (y+1)^2= 1 + (-1)^2 + 1^2$
$(x-1)^2 + (y+1)^2= 1 + 1 + 1$
$(x-1)^2 + (y+1)^2= 3$. Ecuación estándar de la circunferencia.

Centro: C (1, -1).
Radio: r= $\sqrt{3}$.

Gráfico.

Ejercicio 23.

(a) *Hallar la intersección de la circunferencia del ejercicio anterior con el eje x.*

$(0-1)^2 + (y+1)^2 = 3$
$(-1)^2 + (y+1)^2 = 3$
$1 + (y+1)^2 = 3$
$(y+1)^2 = 3 - 1$
$(y+1)^2 = 2$
$\sqrt{(y+1)^2} = \sqrt{2}$
$|y+1| = \sqrt{2}$
$y + 1 = \pm \sqrt{2}$
$y = -1 \pm \sqrt{2}$.

Por lo tanto, la circunferencia del ejercicio anterior intersecciona con el eje x en los puntos $(0, -1 + \sqrt{2})$ y $(0, -1 - \sqrt{2})$.

(b) *Hallar la intersección de dicha circunferencia con el eje y.*

$(x-1)^2 + (0+1)^2 = 3$
$(x-1)^2 + 1^2 = 3$
$(x-1)^2 + 1 = 3$
$(x-1)^2 = 3 - 1$
$(x-1)^2 = 2$
$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{2}$
$|x-1| = \sqrt{2}$
$x - 1 = \pm \sqrt{2}$
$x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Por lo tanto, dicha circunferencia intersecciona con el eje y en los puntos $(1 + \sqrt{2}, 0)$ y $(1 - \sqrt{2}, 0)$.

(c) *Hallar la intersección de dicha circunferencia con la recta de ecuación y= x - 1.*

$(x-1)^2 + (x-1+1)^2 = 3$
$x^2 - 2x + 1 + x^2 = 3$
$2x^2 - 2x + 1 = 3$
$2x^2 - 2x + 1 - 3 = 0$
$2x^2 - 2x - 2 = 0$
$2(x^2 - x - 1) = 0$
$x^2 - x - 1 = \frac{0}{2}$
$x^2 - x - 1 = 0$.

$x_1, x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1(-1)}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.
$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
$y_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Por lo tanto, dicha circunferencia intersecciona con el eje y en los puntos $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ y $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$.

Ejercicio 24.

Escribir la ecuación canónica de las parábolas:

(a) *con foco en (0, 6) y directriz y + 6= 0.*

$(x-0)^2$= 4 * 6 (y - 0)
x^2= 24y. Ecuación estándar de la parábola.

(b) *con vértice en el origen y foco en (-4, 0).*

$(y-0)^2$= 4 (-4) (x - 0)
y^2= -16x. Ecuación estándar de la parábola.

(c) *con vértice en (3, 2) y foco en (5, 2).*

$(y-2)^2$= 4 * 2 (x - 3)
$(y-2)^2$= 8 (x - 3). Ecuación estándar de la parábola.

(d) *con vértice en (0, 0) y que contiene a los puntos (2, -3) y (-2, -3).*

$(x-0)^2$= 4c (y - 0)
x^2= 4cy.

2^2= 4c (-3)
4= -12c
c= $\frac{4}{-12}$
c= $\frac{-1}{3}$.

$(-2)^2$= 4c (-3)
4= -12c
c= $\frac{4}{-12}$
c= $\frac{-1}{3}$.

x^2= 4 ($\frac{-1}{3}$) y
x^2= $\frac{-4}{3}$ y. Ecuación estándar de la parábola.

Ejercicio 25.

Graficar y dar los elementos de las parábolas definidas por las siguientes ecuaciones:

(a) $3y^2 = 8x$.

Vértice: V (0, 0).
Foco: F ($\frac{2}{3}$, 0).
Directriz: x= $\frac{-2}{3}$.

Gráfico.

(b) $y^2 = -12x$.

Vértice: V (0, 0).
Foco: F (-3, 0).
Directriz: x= 3.

Gráfico.

(c) $x^2 = 4 (y + 1)$.

Vértice: V (0, -1).
Foco: F (0, 0).
Directriz: y= -2.

Gráfico.

(d) $(y-3)^2 = -20 (x + 2)$.

Vértice: V (-2, 3).
Foco: F (-7, 3).
Directriz: x= 3.

Gráfico.

Ejercicio 26.

Encontrar la ecuación estándar y los elementos de las parábolas:

(a) $2x^2 + 12x + 8y + 10 = 0$.

$2x^2$ + 12x + 8y + 10= 0
2 (x^2 + 6x + 4y + 5)= 0
x^2 + 6x + 4y + 5= $\frac{0}{2}$
x^2 + 6x + 4y + 5= 0
x^2 + 6x= -4y - 5
$(x+3)^2$= -4y - 5 + 3^2
$(x+3)^2$= -4y - 5 + 9
$(x+3)^2$= -4y + 4
$(x+3)^2$= -4 (y - 1). Ecuación estándar de la parábola.

Vértice: V (-3, 1).
Foco: F (-3, 2).
Directriz: y= 0.

(b) $3y^2 + 18y - 24x = 93$.

$3y^2$ + 18y - 24x= 93
3 (y^2 + 6y - 8x)= 93
y^2 + 6y - 8x= $\frac{93}{3}$
y^2 + 6y - 8x= 31
y^2 + 6y= 8x + 31
$(y+3)^2$= 8x + 31 + 3^2
$(y+3)^2$= 8x + 31 + 9
$(y+3)^2$= 8x + 40
$(y+3)^2$= 8 (x + 5). Ecuación estándar de la parábola.

Vértice: V (-5, -3).
Foco: F (-3, -3).
Directriz: x= -7.

(c) $y = x^2 + 6x + 10$.

y= x^2 + 6x + 10
x^2 + 6x= y - 10
$(x+3)^2$= y - 10. Ecuación estándar de la parábola.

Vértice: V (-3, 10).

Foco: F (-3, $\frac{41}{4}$).

Directriz: y= $\frac{39}{4}$.

Ejercicio 27.

(a) *Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice V (1,3), eje focal paralelo al eje x y que pasa por el punto P (6, 13). Graficar y dar los restantes elementos.*

$(y-3)^2$= 4c (x - 1).

$(13-3)^2$= 4c (6 - 1)
10^2= 4c * 5
100= 20c
c= $\frac{100}{20}$
c= 5.

$(y-3)^2$= 4 * 5 (x - 1)
$(y-3)^2$= 20 (x - 1). Ecuación estándar de la parábola.

Foco: F (6, 3).
Directriz: x= -4.

Gráfico.

(b) *Hallar una ecuación de una recta vertical que corte a la parábola. Dar el punto de corte.*

x= 6.

$(y-3)^2$= 20 (6 - 1)
$(y-3)^2$= 20 * 5
$(y-3)^2$= 100
$\sqrt{(y-3)^2}$= $\sqrt{100}$
$|y-3|$= 10
y - 3= $\pm$10
y= 3 $\pm$ 10
y_1= 3 + 10= 13.
y_2= 3 - 10= -7.

Por lo tanto, los puntos de corte son (6, 13) y (6, -7).

(c) *Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice V (-5,1), eje focal paralelo al eje y y que pasa por el punto P (1, 0). Graficar y dar los restantes elementos.*

$(x+5)^2$= 4c (y - 1).

$(1+5)^2$= 4c (0 - 1)

6^2= 4c (-1)
36= -4c
c= $\frac{36}{-4}$
c= -9.

$(x+5)^2$= 4 (-9) (y - 1)
$(x+5)^2$= -36 (y - 1). Ecuación estándar de la parábola.

Foco: F (-5, -8).
Directriz: y= 10.

Gráfico.

(d) *Hallar una ecuación de una recta horizontal que corte a la parábola. Dar el punto de corte.*

y= -8.

$(x+5)^2$= -36 (-8 - 1)
$(x+5)^2$= -36 (-9)
$(x+5)^2$= 324
$\sqrt{(x+5)^2}$= $\sqrt{324}$
$|x+5|$= 18
x + 5= $\pm$18
x= -5 $\pm$ 18
x_1= -5 + 18= 13.
x_2= -5 - 18= -23.

Por lo tanto, los puntos de corte son (13, -8) y (-23, -8).

Ejercicio 28.

(a) *Hallar las ecuaciones estándar de las parábolas con vértice V (3, 2) y foco F (7, 2), y otra con vértice V (7, 2) y foco F (3, 2).*

$(y-2)^2$= 16 (x - 3). Ecuación estándar de la parábola con V (3, 2) y F (7, 2).
$(y-2)^2$= -16 (x - 7). Ecuación estándar de la parábola con V (7, 2) y F (3, 2).

(b) *Hallar las ecuaciones estándar de las parábolas con vértice V (-3, 3) y foco F (-3, -1), y otra con vértice V (-3, -1) y foco F (-3, 3).*

$(x+3)^2$= -16 (y - 3). Ecuación estándar de la parábola con V (-3, 3) y F (-3, -1).
$(x+3)^2$= 16 (y + 1). Ecuación estándar de la parábola con V (-3, -1) y F (-3, 3).

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2: Demostraciones, Conjuntos y Funciones.

Ejercicio 1.

Demostrar que la suma de 3 números enteros consecutivos es un múltiplo de 3. (Un múltiplo de 3 es un número que puede escribirse como 3 por un número entero: si a es múltiplo de 3, entonces, a= 3h, h entero).

Proposición:

"La suma de 3 números enteros consecutivos es un múltiplo de 3".
"Si a, (a + 1), [(a + 1) + 1] $\in \mathbb{Z}$, entonces, a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3k, con k $\in \mathbb{Z}$".

Método directo:

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= a + a + 1 + a + 1 + 1$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3a + 3$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3 (a + 1)$,

donde (a + 1) $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

Método del absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3k + 1$
$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad a + a + 1 + a + 1 + 1= 3k + 1$
$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 3a + 3= 3k + 1$
$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 3 (a + 1)= 3k + 1$,

donde (a + 1) $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es y no es múltiplo de 3), queda demostrada la proposición.

Método indirecto:

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 3k + 1$
$a + a + 1 + a + 1 + 1= 3k + 1$
$3a + 3= 3k + 1$
$3a= 3k + 1 - 3$

3a= 3k - 2

a= $\frac{3k-2}{3}$

a= k - $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

a + 1= k + $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

(a + 1) + 1= k + $\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

Ejercicio 2.

Demostrar que, si el cuadrado de un número entero w es par , el cuadrado del anterior a w es impar.

Proposición:

"Si el cuadrado de un número entero w es par, el cuadrado del anterior a w es impar".
"Si w^2= 2k, entonces, $(w-1)^2$= 2k + 1, con k $\in \mathbb{Z}$".

Método del absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

w^2= 2k $\wedge$ $(w-1)^2$= 2k
w^2= 2k $\wedge$ w^2 - 2w + 1= 2k
w^2= 2k $\wedge$ w^2= 2k + 2w - 1
w^2= 2k $\wedge$ w^2= 2 (k + w) - 1,

donde (k + w) $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es par e impar), queda demostrada la proposición.

Método indirecto:

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$(w-1)^2$= 2k
w^2 - 2w + 1= 2k
w^2= 2k + 2w - 1
w^2= 2 (k + w) - 1,

donde (k + w) $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

Ejercicio 3.

Demostrar que la suma de 3 números enteros consecutivos, si el primero es impar, es múltiplo de 6.

Proposición:

"Si el primer número es impar, entonces, la suma de 3 números enteros consecutivos es múltiplo de 6".
"Si $a= 2k + 1$, entonces, $a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6k$, con $k \in \mathbb{Z}$".

Método directo:

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= (2k + 1) + [(2k + 1) + 1] + \{[(2k + 1) + 1] + 1\}$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 2k + 1 + 2k + 1 + 1 + 2k + 1 + 1 + 1$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6k + 6$
$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6 (k + 1)$,

donde $(k + 1) \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

Método del absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6k + 3$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad a + a + 1 + a + 1 + 1= 6k + 3$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad 3a + 3= 6k + 3$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad 3a= 6k + 3 - 3$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad 3a= 6k$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad a= \frac{6k}{3}$
$a= 2k + 1 \quad \wedge \quad a= 2k.$

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es impar y par), queda demostrada la proposición.

Método indirecto:

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1]= 6k + 3$
$a + a + 1 + a + 1 + 1= 6k + 3$
$3a + 3= 6k + 3$
$3a= 6k + 3 - 3$
$3a= 6k$

a= $\frac{6k}{3}$
a= 2k.

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

Ejercicio 4.

Recordar que un número racional o fraccionario es aquel que puede expresarse como cociente de enteros, es decir si $x= \frac{a}{b}$ *y* $b \neq 0$ *, se dice que* x *es un número racional. Un número es irracional si no puede escribirse como cociente de enteros, por ejemplo:* $\sqrt{2}$*,* π*,* $\sqrt{5}$*. Demostrar que la suma de un número racional y un irracional es un número irracional.*

Proposición:

"Si a es un número racional y b es un número irracional, entonces, su suma es un número irracional".
"Si a= $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y b $\in I$, entonces, (a + b) $\in I$".

Método directo:

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

a + b= $\frac{x}{y}$ + b $\in I$.

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

Método absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

a= $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y b $\in I$ $\wedge$ (a + b) $\notin I$
a= $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y b $\in I$ $\wedge$ $\frac{x}{y}$ + b= $\frac{w}{z}$
a= $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y b $\in I$ $\wedge$ b= $\frac{w}{z}$ - $\frac{x}{y}$
a= $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ y b $\in I$ $\wedge$ b= $\frac{yw-xz}{yz} \in \mathbb{Q}$,

donde x, y, w, z $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es irracional y racional), queda demostrada la proposición.

Método indirecto:

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

(a + b) $\notin I$
$\frac{x}{y}$ + b= $\frac{w}{z}$
b= $\frac{w}{z}$ - $\frac{x}{y}$
b= $\frac{yw-xz}{yz} \in \mathbb{Q}$,

donde x, y, w, z $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

Ejercicio 5.

Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

(a) *A= {x: $x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 9$}.*

A= {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

(b) *A= {x: $x \in \mathbb{N} \wedge x + 3 = 7$}.*

A= {4}.

(c) *B= {y: $y \in \mathbb{Z} \wedge -2 < y \leq 3$}.*

B= {-1, 0, 1, 2, 3}.

(d) *C= {x: x es una vocal de la palabra "número"}.*

C= {e, o, u}.

(e) *D= {x: x es un dígito de la cifra 453425}.*

D= {2, 3, 4, 5}.

(f) *E= {z: z es un dígito primo de la cifra 729634}.*

E= {2, 3, 7}.

(g) *A= {w: $w \in \mathbb{N} \wedge$ w es divisor de 50}.*

A= {1, 2, 5, 10, 25, 50}.

(h) *H= {w: $w \in \mathbb{N} \wedge w^2 \leq 9$}.*

H= {1, 2, 3}.

(i) $F= \{a: a \in \mathbb{Z} \wedge -4 \leq a + 2 \leq 5\}$.

F= {-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}.

(j) $G= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 3 \leq x - 4 \leq 8\}$.

G= {7, 8, 9, 10, 11, 12}.

(k) $W= \{x: x= 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 5\}$.

W= {2, 6, 10, 14, 18, 22}.

(l) $F= \{x: x= 6k + 3 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 4\}$.

F= {3, 9, 15, 21, 27}.

Ejercicio 6.

Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

(a) *El conjunto de los números enteros pares mayores que -8 y menores o iguales que 12.*

A= {x: x $\in \mathbb{Z} \wedge$ x= 2k $\wedge$ k $\in \mathbb{Z} \wedge$ -3 $\leq$ k $\leq$ 6}.

(b) *El conjunto de las primeras seis potencias naturales de -2.*

B= {x: x $\in \mathbb{Z} \wedge$ x= $(-2)^k$ $\wedge$ k $\in \mathbb{N} \wedge$ k $\leq$ 6}.

(c) *El conjunto de los números naturales pares.*

C= {x: x $\in \mathbb{N} \wedge$ x= 2k $\wedge$ k $\in \mathbb{N}$}.

(d) *El conjunto de los enteros múltiplos de 3.*

D= {x: x $\in \mathbb{Z} \wedge$ x= 3k $\wedge$ k $\in \mathbb{Z}$}.

(e) *El conjunto de los naturales múltiplos de 5.*

E= {x: x $\in \mathbb{N} \wedge$ x= 5k $\wedge$ k $\in \mathbb{N}$}.

(f) *El conjunto de los enteros múltiplos de 9.*

F= {x: x $\in \mathbb{Z} \wedge$ x= 9k $\wedge$ k $\in \mathbb{Z}$}.

(g) *El conjunto de los números reales que anulan la ecuación* $(x^3 - \frac{1}{4}x)(x^2 - 3)(x + 5)$.

G= {x: x $\in \mathbb{R} \wedge (x^3 - \frac{1}{4}x)(x^2 - 3)(x + 5) = 0$}.

(h) *El conjunto de los enteros que son el siguiente de los múltiplos de 3.*

H= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 3k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(i) *El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 2 a los múltiplos de 4.*

I= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(j) *El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 5 a los múltiplos de 10.*

J= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 10k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 7.

Indicar si los siguientes pares de conjuntos son iguales, son distintos o alguno está incluído en el otro:

(a) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 6\}$; $B= \{1, 2, 3, 6\}$.

A= B.

(b) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 5\}$; $B= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 5\}$.

A ⊂ B.

(c) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 12\}$; $B= \{1, 2, 3, 4\}$.

B ⊂ A.

(d) $A= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 4x + 4= 0\}$; $B= \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x^2 \leq 5\}$.

A= B.

(e) $A= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 2x= x\}$; $B= \{0\}$.

A= B.

Ejercicio 8.

En cada caso, escribir por comprensión los conjuntos que se mencionan.

(a) *Probar que los múltiplos naturales de 18 son múltiplos de 6.*

A= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 18k \wedge k \in \mathbb{N}\}$= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 6 (3k) \wedge k \in \mathbb{N}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$.

(b) *Probar que los múltiplos enteros de 60 son múltiplos de 15.*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 60k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 15 (4k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 15k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) *Probar que los múltiplos enteros de 12 son pares.*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 12k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 2 (6k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) *¿Son todos los múltiplos naturales de 3 múltiplos de 21?*

A= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 21k \wedge k \in \mathbb{N}\}$= $\{x: x \in \mathbb{N} \wedge x= 3 (7k) \wedge k \in \mathbb{N}\}$.

Por lo tanto, no todos los múltiplos naturales de 3 son múltiplos de 21.

(e) *¿Son todos los múltiplos enteros de 13 múltiplos de 39?*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 13k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 39k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 13 (3k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

Por lo tanto, no todos los múltiplos naturales de 13 son múltiplos de 39.

(f) *Probar que los múltiplos enteros de 39 son múltiplos de 13.*

A= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 39k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 13 (3k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 13k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

(g) *Sean B el conjunto de los múltiplos enteros de -5 y C el conjunto de los múltiplos enteros de 5, probar que B= C.*

B= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= -5k \wedge k \in \mathbb{Z}\}= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 5 (-k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.
C= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= 5k \wedge k \in \mathbb{Z}\}= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x= -5 (-k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 9.

Sean A= {x: x= 10k + 5 ∧ k ∈ ℤ} y B= {x: x= 5h ∧ h ∈ ℤ} conjuntos.

(a) *Probar que A ⊆ B.*

A= {x: x= 10k + 5 ∧ k ∈ ℤ}
A= {x: x= 5 * 2k + 5 ∧ k ∈ ℤ}
A= {x: x= 5 (2k + 1) ∧ k ∈ ℤ ∧ (k + 1) ∈ ℤ}.

Por lo tanto, queda demostrado que A ⊆ B.

(b) *¿El número 40 es un elemento de A ? ¿Y de B ? Justificar la respuesta.*

40= 10k + 5
10k= 40 - 5
10k= 35
k= $\frac{35}{10}$
k= 3,5 ∉ ℤ.

Por lo tanto, 40 no es un elemento de A.

40= 5h
h= $\frac{40}{5}$
h= 8 ∈ ℤ.

Por lo tanto, 40 es un elemento de B.

(c) *¿Está el conjunto B incluído en A? Justificar la respuesta.*

Para que B ⊆ A, todo elemento de B sería elemento de A y, como se vió anteriormente, existe, al menos, un elemento de B que no es elemento de A. Por lo tanto, el conjunto B no está incluído en el conjunto A.

Ejercicio 10.

Sean $A= \{x: x= 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ y $B= \{x: x= 2h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$ conjuntos.

(a) *Probar que $A \subseteq B$.*

$A= \{x: x= 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$
$A= \{x: x= 2 * 2k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$
$A= \{x: x= 2 (2k + 1) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge (k + 1) \in \mathbb{Z}\}$.

Por lo tanto, queda demostrado que $A \subseteq B$.

(b) *¿A y B son el mismo conjunto? Justificar la respuesta.*

Se debe demostrar que $A \subseteq B$ (demostrado en inciso (a)) y $B \subseteq A$.

Sea $4= 2h$, con $h= 2 \in \mathbb{Z}$, entonces, $4 \in B$. Si $4 \in A$, $4= 4k + 2$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, pero esto no sucede para ningún $k \in \mathbb{Z}$, entonces, $4 \notin A$. Entonces, $B \nsubseteq A$.

Por lo tanto, A y B no son el mismo conjunto.

Ejercicio 11.

Sean A= {1, 2}, B= {1, 2, 3, 6}, C= {x: x= 2k ∧ k ∈ ℕ}, D= {x: x= 3m ∧ m ∈ ℤ} y U= ℤ.

(a) *Expresar por comprensión A ∪ ℤ.*

A ∪ ℤ= ℤ.

(b) *Expresar por comprensión* A^c.

A^c= ℤ - {1, 2}.

(c) *Expresar por extensión A ∩ C.*

A ∩ C= {2}.

(d) *Expresar por extensión B - (D ∩ A).*

B - (D ∩ A)= B - ∅
B - (D ∩ A)= B
B - (D ∩ A)= {1, 2, 3, 6}.

(e) *Expresar por comprensión* C^c.

C^c= {x: x ∈ ℤ ∧ x≠ 2k ∧ k ∈ ℕ}.

(f) *Expresar por comprensión* $D^c \cup B^c$. *Recordar que, por las propiedades mencionadas, se puede calcular como* $(D \cap B)^c$.

$D^c \cup B^c$= $(D \cap B)^c$
$D^c \cup B^c$= {x: x ∈ ℤ - {3, 6}}.

(g) *Expresar por extensión (A ∪ B) ∩ (A ∪ C). Según las propiedades enunciados, ¿de qué otra forma se podría calcular?*

(A ∪ B) ∩ (A ∪ C)= {1, 2, 3, 6} ∩ {1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, …}
(A ∪ B) ∩ (A ∪ C)= {1, 2, 6}.

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2\} \cup \{2, 6\}$
$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 6\}$.

(h) *Expresar por comprensión* $A^c \cup D^c$.

$A^c \cup D^c = (A \cap D)^c$
$A^c \cup D^c = \{x \colon x \in \mathbb{Z}\}$.

(i) *Expresar por comprensión* $A^c \cap C^c$.

$A^c \cap C^c = (A \cup C)^c$
$A^c \cap C^c = \{x \colon x \in \mathbb{Z} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 12.

Sean $A= \{x: x= 5w \wedge w \in \mathbb{Z}\}$ *y* $B= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x + 2 \leq 7\}$.

(a) *Hallar por extensión los conjuntos:* $A \cap B$ *y* $B - A$.

$A \cap B= \{0, 5\}$.

$B - A= \{-1, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) *Definir un conjunto H, que cumpla que* $H \subseteq B$.

$H= \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq x + 2 \leq 7\}$.

$H \subseteq B$.

Ejercicio 13.

Sean los conjuntos A= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B= {x: x= 4k ∧ k ∈ ℤ} y C= {3, 4, 5, 6, 7, 8}.

(a) *Hallar y expresar por extensión: A ∩ (B ∪ C) y C - (A - B).*

A ∩ (B ∪ C)= {1, 2, 3, 4, 5, 6} ∩ {3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 20, 24, …}
A ∩ (B ∪ C)= {3, 4, 5, 6}.

C - (A - B)= {3, 4, 5, 6, 7, 8} - {1, 2, 3, 5, 6}
C - (A - B)= {4, 7, 8}.

(b) *Hallar un conjunto D que esté incluído en B.*

D= {x: x= 8k ∧ k ∈ ℤ}= {x: x= 4 (2k) ∧ k ∈ ℤ}.

D ⊆ B.

Ejercicio 14.

Sean P el conjunto de los enteros pares e I el conjunto de los enteros impares y U= $\mathbb{Z}$.

(a) *Expresar por comprensión: P ∪ I, P - I, I - P, P^c, I^c.*

P ∪ I= $\mathbb{Z}$.

P - I= P= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}.

I - P= I= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k + 1 ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}.

P^c= I= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k + 1 ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}.

I^c= P= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}.

(b) *Probar que P ∩ I= ∅. Indicaciones: probar por el absurdo, suponiendo que fuera distinto del ∅, es decir, que existe un número m que es, a la vez, elemento de P y elemento de I .*

Proposición:

"Si P es el conjunto de los enteros pares e I es el conjunto de los enteros impares, entonces, su intersección es vacía".
"Si P= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$} ∧ I= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k + 1 ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$}, entonces, P ∩ I= ∅".

Método del absurdo:

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

P= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$} ∧ I= {x: x ∈ $\mathbb{Z}$ ∧ x= 2k + 1 ∧ k ∈ $\mathbb{Z}$} ∧ P ∩ I= a.

Entonces, a= 2k y a= 2k + 1, k ∈ $\mathbb{Z}$.

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es par e impar), queda demostrada la proposición.

Ejercicio 15.

Si T es un conjunto de enteros múltiplos de 3 y $C = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 3k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ *y* $U = \mathbb{Z}$.

(a) *Hallar* $T \cap C$.

$T \cap C = \emptyset$.

(b) *Hallar* $(T \cup C)^c$.

$(T \cup C)^c = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 16.

Hallar el producto cartesiano E x F de los conjuntos E= {-2, -1, 0, 1} y F= {2, 3} y representarlo en $\mathbb{R}^2$ como puntos del plano.

E x F= {(-2, 2), (-2, 3), (-1, 2), (-1, 3), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)}.

Gráfico.

Ejercicio 17.

Si A= {1, 2, 3}, B= {-2, -1, 6} y C= {6, 7} son conjuntos, hallar A x (B ∩ C) y (A x B) ∩ (A x C) y verificar que son iguales.

A x (B ∩ C)= {1, 2, 3} x {6}
A x (B ∩ C)= {(1, 6), (2, 6), (3, 6)}.

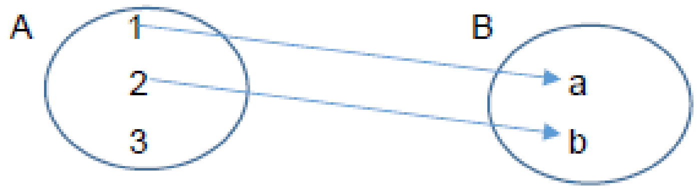
(A x B) ∩ (A x C)= {(1, -2), (1, -1), (1, 6), (2, -2), (2, -1), (2, 6), (3, -2), (3, -1), (3, 6)} ∩ {(1, 6), (1, 7), (2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7)}
(A x B) ∩ (A x C)= {(1, 6), (2, 6), (3, 6)}.

Por lo tanto, A x (B ∩ C)= (A x B) ∩ (A x C).

Ejercicio 18.

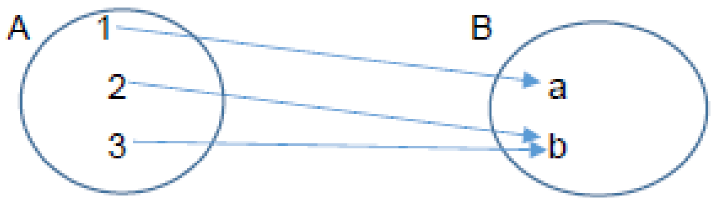
Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones, justificando lo que se afirma. En caso de serlo, indicar la imagen:

(a)



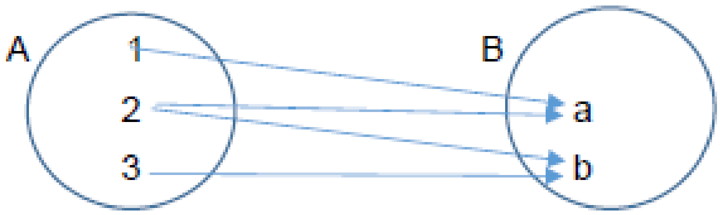
Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (3) al que no se le asigna un único elemento de B.

(b)



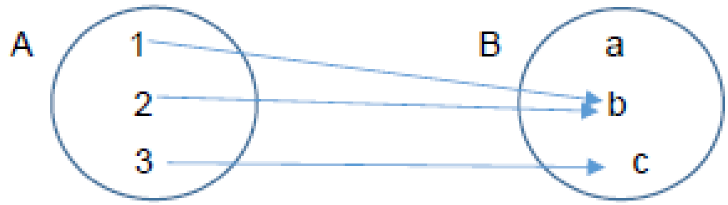
Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es {a, b}.

(c)



Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (2) al que se le asigna más de un elemento de B.

(d)



Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es {b, c}.

(e) *Si A= {1, 2, 3} y B= {x, y, z}:*

(i) *f: A ⟶ B, f= {(1, x), (2, z)}.*

Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (3) al que no se le asigna un único elemento de B.

(ii) *g: A ⟶ B, g= {(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)}.*

Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (2) al que se le asigna más de un elemento de B.

(iii) *h: A ⟶ B, h= {(1, y), (2, x), (3, y)}.*

Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es {x, y}.

Ejercicio 19.

Sea A el conjunto de los alumnos de Matemática 1. Determinar cuál de las siguientes asignaciones define una función sobre A:

(a) *Asignarle a cada estudiante su edad.*

Esta asignación define una función sobre A (dado que cada estudiante tiene sólo una edad).

(b) *Asignarle a cada estudiante su profesor.*

Esta asignación define una función sobre A (siempre que no exista un estudiante que tenga más de un profesor).

(c) *Asignarle a cada estudiante su hermana mujer.*

Esta asignación no define una función sobre A (siempre que exista, al menos, un estudiante que tenga más de una hermana mujer).

Ejercicio 20.

Dada f: $\mathbb{R}$ *- {5}* $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$*, f (x)=* $\frac{3+x}{x-5}$*, determinar:*

(a) *f (-1).*

f (-1)= $\frac{3+(-1)}{-1-5}$
f (-1)= $\frac{3-1}{-6}$
f (-1)= $\frac{2}{-6}$
f (-1)= $\frac{-1}{3}$.

(b) *f (0).*

f (0)= $\frac{3+0}{0-5}$
f (0)= $\frac{3}{-5}$
f (0)= $\frac{-3}{5}$.

(c) *f (2).*

f (2)= $\frac{3+2}{2-5}$
f (2)= $\frac{5}{-3}$
f (2)= $\frac{-5}{3}$.

(d) *f (*$\frac{3}{2}$*).*

f ($\frac{3}{2}$)= $\frac{3+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-5}$
f ($\frac{3}{2}$)= $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{-7}{2}}$
f ($\frac{3}{2}$)= $\frac{-9}{7}$.

Ejercicio 21.

Dada g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, g (t)= $\sqrt{1+t^2}$, determinar:

(a) *g (0).*

g (0)= $\sqrt{1+0^2}$
g (0)= $\sqrt{1+0}$
g (0)= $\sqrt{1}$
g (0)= 1.

(b) *g ($\frac{-3}{4}$).*

g ($\frac{-3}{4}$)= $\sqrt{1+(\frac{-3}{4})^2}$
g ($\frac{-3}{4}$)= $\sqrt{1+\frac{9}{16}}$
g ($\frac{-3}{4}$)= $\sqrt{\frac{25}{16}}$
g ($\frac{-3}{4}$)= $\frac{5}{4}$.

(c) *g (3).*

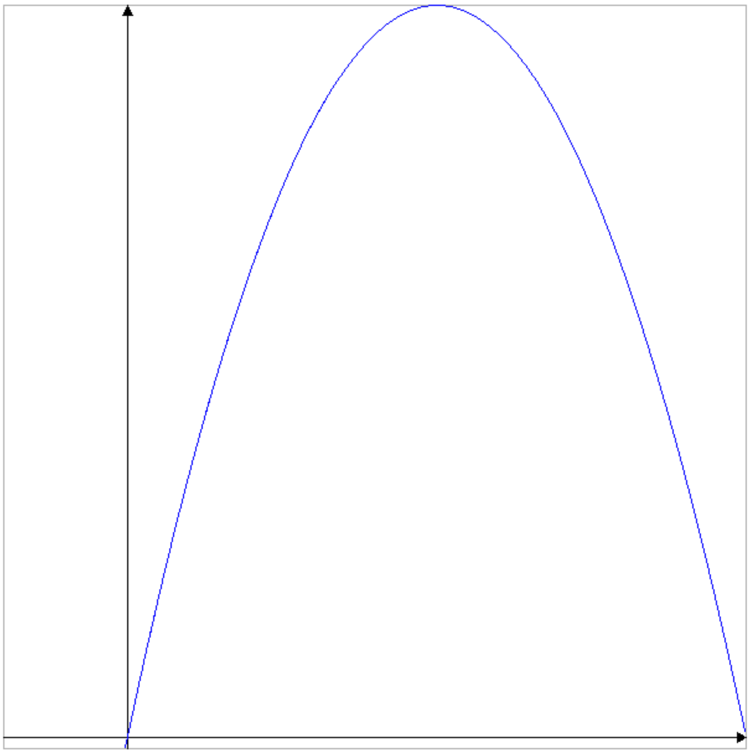
g (3)= $\sqrt{1+3^2}$
g (3)= $\sqrt{1+9}$
g (3)= $\sqrt{10}$.

Ejercicio 22.

Un rectángulo tiene 100 cm de perímetro. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados. Graficar la función obtenida, utilizando el eje x para indicar la longitud del lado elegido y el eje y para indicar el área. ¿Cuál es el área máxima?

P= 2 (L_1 + L_2)
100= 2 (L_1 + L_2)
L_1 + L_2= $\frac{100}{2}$
L_1 + L_2= 50.
L_2= 50 - L_1.

A (L_1, L_2)= $L_1 L_2$
A (L_1)= L_1 (50 - L_1)
A (L_1)= 50L_1 - L_1^2.



A´ (L_1)= 50 - 2L_1.

A´ (L_1)= 0
50 - 2L_1= 0
2L_1= 50
L_1= $\frac{50}{2}$
L_1= 25.

A (25)= 50 * 25 - 25^2

A (25)= 1250 - 625
A (25)= 625.

Por lo tanto, el área máxima es 625 cm^2.

Ejercicio 23.

Se desea construir un depósito de base cuadrada (sin tapa) y 10 m^3 de capacidad. Expresar la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.

h= $\frac{V}{b^2}$,

donde h es la altura del depósito, V es la capacidad y b es la longitud del lado de la base.

S (b)= 4bh
S (b)= 4b $\frac{V}{b^2}$
S (b)= 4 $\frac{V}{b}$
S (b)= 4 $\frac{10}{b}$
S (b)= $\frac{40}{b}$,

donde S (b) es la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.

Ejercicio 24.

Una lámina metálica rectangular mide 5 m de ancho y 8 m de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. Expresar el volumen de la caja en función de su altura.

a= 5 - 2h; l= 8 - 2h,

donde a es el ancho, l es el largo y h es la altura de la caja sin tapa.

V (h)= alh
V (h)= (5 - 2h) (8 - 2h) h
V (h)= 40h - $10h^2$ - $16h^2$ + $4h^3$
V (h)= $4h^3$ - $16h^2$ + 40h,

donde V (h) es el volumen de la caja en función de su altura.

Ejercicio 25.

Estudiar si las siguientes funciones son iguales. Justificar.

f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por f (x)= x + 2 y g:* $\mathbb{R}$ *- {2}* $\longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por g (x)=* $\frac{x^2-4}{x-2}$.

g (x)= $\frac{x^2-4}{x-2}$
g (x)= $\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$
g (x)= x + 2.

Por lo tanto, si se redefine el dominio de g en $\mathbb{R}$, estas funciones (f y g) son iguales.

Ejercicio 26.

Usar una fórmula para definir cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

(a) *f asigna a cada número su cubo.*

f (x)= x^3.

(b) *g asigna a cada número el 5.*

g (x)= 5.

(c) *h asigna a cada número 4 más su cuadrado.*

h (x)= 4 + x^2.

(d) *w asigna a cada número su cubo más el doble del número.*

w (x)= x^3 + 2x.

Ejercicio 27.

Se define la función floor o suelo: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, como la función que a cada número real le asigna el mayor entero menor o igual que el número. Así, suelo (2,5)= 2, suelo (-3,7)= -4, suelo (5)= 5. Se nota también como suelo (x)= $\lfloor x \rfloor$. Hallar el valor de:

(a) $\lfloor \sqrt{5} \rfloor$.

suelo ($\sqrt{5}$)= $\lfloor \sqrt{5} \rfloor$
suelo ($\sqrt{5}$)= 2.

(b) $\lfloor \frac{3}{4} \rfloor$.

suelo ($\frac{3}{4}$)= $\lfloor \frac{3}{4} \rfloor$
suelo ($\frac{3}{4}$)= 0.

(c) $\lfloor \frac{7}{3} - 9 \rfloor$.

suelo ($\frac{7}{3}$ - 9)= $\lfloor \frac{7}{3} - 9 \rfloor$
suelo ($\frac{7}{3}$ - 9)= $\lfloor \frac{-20}{3} \rfloor$
suelo ($\frac{7}{3}$ - 9)= -7.

Ejercicio 28.

Se define la función ceiling o techo: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, como la función que a cada número real le asigna el menor entero mayor o igual que el número. Así, techo (2,5)= 3, techo (-3,7)= -3, techo (5)= 5. Se nota también como techo (x)= $\lceil x \rceil$. Hallar el valor de:

(a) $\lceil \sqrt{11} \rceil$.

techo ($\sqrt{11}$)= $\lceil \sqrt{11} \rceil$
techo ($\sqrt{11}$)= 4.

(b) $\left\lceil \frac{3}{5} + \sqrt{2} \right\rceil$.

techo ($\frac{3}{5}$ + $\sqrt{2}$)= $\left\lceil \frac{3}{5} + \sqrt{2} \right\rceil$
techo ($\frac{3}{5}$ + $\sqrt{2}$)= 2.

(c) $\left\lceil \frac{5}{3} - 7 \right\rceil$.

techo ($\frac{5}{3}$ - 7)= $\left\lceil \frac{5}{3} - 7 \right\rceil$
techo ($\frac{5}{3}$ - 7)= $\left\lceil \frac{-16}{3} \right\rceil$
techo ($\frac{5}{3}$ - 7)= 6.

Ejercicio 29.

*Se define la función factorial $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, como la función que a cada número natural le asigna el producto de todos los números naturales desde el número hasta el 1, suele escribirse en forma decreciente. Así, factorial (1)= 1, factorial (2)= 2 * 1, factorial (3)= 3 * 2 * 1, factorial (4)= 4 * 3 * 2 * 1. La notación habitual es factorial (n)= n!. Por definición, 0!= 1. Hallar el valor de:*

(a) *4!.*

factorial (4)= 4!
factorial (4)= 4 * 3 * 2 * 1
factorial (4)= 24.

(b) *5!.*

factorial (5)= 5!
factorial (5)= 5 * 4 * 3 * 2 * 1
factorial (5)= 120.

(c) *6!.*

factorial (6)= 6!
factorial (6)= 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1
factorial (6)= 720.

Ejercicio 30.

Sean A= {1, 2, 3, 4} y B= {a, b, c} conjuntos. Definir una función con dominio A y codominio B, que sea suryectiva.

1 ⟶ a.
2 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ c.

Por lo tanto, esta función A ⟶ B es suryectiva porque (∀y) (y ∈ B ⟶ (∃x) (x ∈ A ∧ y= f (x))) o, equivalentemente, porque Im (f)= Codom (f).

Ejercicio 31.

Sean A= {1, 2, 3, 4} y B= {a, b, c, d, e} conjuntos. Definir una función con dominio A y codominio B, que sea inyectiva.

1 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ d.

Por lo tanto, esta función A ⟶ B es inyectiva porque $(\forall x_1)$ $(\forall x_2)$ $(x_1 \neq x_2 \longrightarrow$ f $(x_1) \neq$ f $(x_2))$ o, equivalentemente, porque $(\forall x_1)$ $(\forall x_2)$ (f $(x_1)=$ f $(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2)$.

Ejercicio 32.

Definir conjuntos finitos A, B, C, D, E y realizar diagramas de flechas para definir una función:

(a) *f: B ⟶ C que sea inyectiva y no suryectiva.*

B= {1, 2, 3, 4}.
C= {a, b, c, d, e}.

1 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ d.

(b) *g: D ⟶ E que sea suryectiva y no inyectiva.*

D= {1, 2, 3, 4}.
E= {a, b, c}.

1 ⟶ a.
2 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ c.

(c) *f: B ⟶ A que sea biyectiva. Definir la función inversa.*

B= {1, 2, 3, 4}.
A= {a, b, c, d}.

1 ⟶ a.
2 ⟶ b.
3 ⟶ c.
4 ⟶ d.

f^{-1}: A ⟶ B.

a ⟶ 1.
b ⟶ 2.
c ⟶ 3.
d ⟶ 4.

Ejercicio 33.

Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos justificando lo que afirma:

(a) *"Una recta horizontal es la gráfica de una función inyectiva".*

Este enunciado es FALSO, ya que el único elemento de la imagen tiene asociado infinitos valores del dominio.

(b) *"Una recta vertical es la gráfica de una función".*

Este enunciado es FALSO, ya que el único elemento del dominio tiene asociado infinitos elementos del codominio.

(c) *"Una parábola con eje paralelo al eje y es la gráfica de una función inyectiva".*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento de la imagen (excepto en el vértice de la parábola) tiene asociado dos elementos del dominio.

(d) *"Una parábola con eje paralelo al eje x es la gráfica de una función".*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento del dominio (excepto en el vértice de la parábola) tiene asociado dos elementos del codominio.

(e) *"Una circunferencia es la gráfica de una función".*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento del dominio (excepto en los extremos laterales de la circunferencia) tiene asociado dos elementos del codominio.

(f) *"Dos conjuntos finitos entre los que se establece una función biyectiva pueden tener distinta cantidad de elementos".*

Este enunciado es FALSO, ya que, si se establece una función biyectiva entre dos conjuntos finitos, entonces, estos tienen la misma cantidad de elementos.

Ejercicio 34.

Para las funciones del ejercicio 16, indicar si son inyectivas, suryectivas o biyectivas.

El producto cartesiano del ejercicio 16 no es una función.

Ejercicio 35.

Para las funciones del ejercicio 17, indicar si son inyectivas. Definir, para cada una, un codominio de manera que sean suryectivas y otro para que no lo sean.

A x (B ∩ C)= (A x B) ∩ (A x C)= {(1, 6), (2, 6), (3, 6)}.

Estas funciones no son inyectivas. El codominio de manera que sean suryectivas es Codom= {6} y un codominio para que no lo sean es Codom= {6, 7}.

Ejercicio 36.

Analizar si las funciones suelo, techo y factorial son funciones inyectivas, suryectivas o biyectivas.

- La función “suelo” no es inyectiva, es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.
- La función “techo” no es inyectiva, es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.
- La función “factorial” es inyectiva, no es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 3:
Álgebra de Boole.

Ejercicio 1.

En ℝ, se define la operación \$ como a\$b= a - b + ab. Analizar si la operación es cerrada y conmutativa en ℝ.

Cerrada:

Dado que (ℝ, +, .) tiene estructura de Anillo, entonces, a\$b ∈ ℝ.

Conmutativa:

a\$b= a - b + ab
≠
b\$a= b - a + ba.

Por lo tanto, la operación es cerrada, pero no es conmutativa.

Ejercicio 2.

Analizar si (ℕ, .) es un grupo conmutativo.

Para que (ℕ, .) sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en ℕ:

Cerrada:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da un número natural:

Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $ab \in \mathbb{N}$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $(ab)\, c= a\, (bc)$.

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número natural tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en ℕ tal que:

$a * 1= 1 * a= a$.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número natural no existe otro, único, que sumado a él dé como resultado el elemento neutro.

Conmutativa:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $ab= ba$.

Por lo tanto, (ℕ, .) no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

Ejercicio 3.

Sea H un conjunto y (P (H), ∩) el conjunto de Partes de H con la operación intersección. Analizar si (P (H), ∩) es un grupo conmutativo.

Para que (P (H), ∩) sea un grupo conmutativo, la operación ∩ debe cumplir las siguientes propiedades en P (H):

Cerrada:

Para cualquier par de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección es un elemento de P (H):

Si A, B ∈ P (H), entonces, A ∩ B ∈ P (H).

Asociativa:

Para cualquier terna de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si A, B, C ∈ P (H), entonces, (A ∩ B) ∩ C= A ∩ (B ∩ C).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único elemento de P (H) tal que realizando su intersección con cualquier otro da como resultado el mismo elemento. El elemento neutro es H, ya que existe H en P (H) tal que:

A ∩ H= H ∩ A= A.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo elemento de P (H) no existe otro, único, que realizando la intersección con él dé como resultado el elemento neutro.

Conmutativa:

Para cualquier par de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección da lo mismo en cualquier orden:

Si A, B ∈ P (H), entonces, A ∩ B= B ∩ A.

Por lo tanto, (P (H), ∩) no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

Ejercicio 4.

Demostrar que (ℝ - {0}, .) es un grupo conmutativo. Indicar por qué (ℝ, .) no es un grupo.

Para que (ℝ - {0}, .) sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en ℝ - {0}:

Cerrada:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da un número real distinto de cero:

Si a, b ∈ ℝ - {0}, entonces, ab ∈ ℝ - {0}.

Asociativa:

Para cualquier terna de números reales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ ℝ - {0}, entonces, (ab) c= a (bc).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número real distinto de cero tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en ℝ - {0} tal que:

a * 1= 1 * a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número real distinto de cero existe otro, único, que multiplicado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a ∈ ℝ - {0}, entonces, a $\frac{1}{a}$= $\frac{1}{a}$ a= 1.

Conmutativa:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b ∈ ℝ - {0}, entonces, ab= ba.

Por lo tanto, (ℝ - {0}, .) es un grupo conmutativo. Por otra parte, (ℝ, .) no es un grupo porque no se cumple la propiedad de existencia de elemento opuesto (no existe elemento opuesto para el 0).

Ejercicio 5.

Sea E= {x: x ∈ ℤ ∧ x es par}. Demostrar que (E, +, .) es un anillo.

Para que (E, +, .) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en E:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da un número entero par:

Si a, b ∈ E, entonces, a + b ∈ E.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ E, entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en E tal que:

a + 0= 0 + a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a ∈ E, entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

Conmutativa:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b ∈ E, entonces, a + b= b + a.

Para que (E, +, .) sea un anillo, por otro lado, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en E:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da un número entero par:

Si a, b ∈ E, entonces, ab ∈ E.

<u>Asociativa:</u>

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ E, entonces, (ab) c= a (bc).

<u>Distributiva respecto a la suma:</u>

Para cualquier terna de números enteros pares, es posible distribuir la multiplicación respecto a la suma:

Si a, b, c ∈ E, entonces, a (b + c)= ab + ac y (b + c) a= ba + ca.

Por lo tanto, (E, +, .) es un anillo.

Ejercicio 6.

Sea ⊗, la operación definida sobre los números enteros como a ⊗ b= 2ab. Demostrar que (ℤ, +, ⊗) es un anillo.

Para que (ℤ, +, ⊗) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en ℤ:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si a, b ∈ ℤ, entonces, a + b ∈ ℤ.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ ℤ, entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en ℤ tal que:

a + 0= 0 + a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a ∈ ℤ, entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

Conmutativa:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b ∈ ℤ, entonces, a + b= b + a.

Para que (ℤ, +, ⊗) sea un anillo, por otro lado, la operación ⊗ debe cumplir las siguientes propiedades en ℤ:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de realizar la operación ⊗ da un número entero:

Si a, b $\in \mathbb{Z}$, entonces, a $\otimes$ b $\in \mathbb{Z}$.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de realizar la operación $\otimes$ da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c $\in \mathbb{Z}$, entonces,

$(a \otimes b) \otimes c= a \otimes (b \otimes c)$
$2ab \otimes c= a \otimes (2bc)$
$2 * 2ab * c= 2a * (2bc)$
$4abc= 4abc.$

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros, es posible distribuir la operación $\otimes$ respecto a la suma:

Si a, b, c $\in \mathbb{Z}$, entonces,

$a \otimes (b + c)= a \otimes b + a \otimes c$
$2a (b + c)= 2ab + 2ac$
$2ab + 2ac= 2ab + 2ac$

y

$(b + c) \otimes a= b \otimes a + c \otimes a$
$2 (b + c) a= 2ba + 2ca$
$2ba + 2ca= 2ba + 2ca.$

Por lo tanto, $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ es un anillo.

Ejercicio 7.

En el conjunto P de los números pares se definen dos operaciones, una de ellas es la suma usual y la otra (#) está definida en la forma: si x, y ∈ P, x # y= $\frac{xy}{2}$*. Demostrar que (P, +, #) tiene estructura de anillo.*

Para que (P, +, #) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en P:

<u>Cerrada:</u>

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si a, b ∈ P, entonces, a + b ∈ P.

<u>Asociativa:</u>

Para cualquier terna de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c ∈ P, entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

<u>Existencia de elemento neutro:</u>

Existe un único número par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en P tal que:

a + 0= 0 + a= a.

<u>Existencia de elemento opuesto:</u>

Para todo número par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a ∈ P, entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

<u>Conmutativa:</u>

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b ∈ P, entonces, a + b= b + a.

Para que (P, +, #) sea un anillo, por otro lado, la operación # debe cumplir las siguientes propiedades en P:

<u>Cerrada:</u>

Para cualquier par de números pares, el resultado de realizar la operación # da un número entero:

Si a, b $\in$ P, entonces, a # b $\in$ P.

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de realizar la operación # da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c $\in$ P, entonces,

$$(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$$
$$\frac{ab}{2} \# c = a \# \frac{bc}{2}$$
$$\frac{\frac{ab}{2} * c}{2} = \frac{a * \frac{bc}{2}}{2}$$
$$\frac{abc}{4} = \frac{abc}{4}.$$

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números pares, es posible distribuir la operación # respecto a la suma:

Si a, b, c $\in$ P, entonces,

$$a \# (b + c) = a \# b + a \# c$$
$$\frac{a(b+c)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2}$$
$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2}$$
$$\frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2}$$

y

$$(b + c) \# a = b \# a + c \# a$$
$$\frac{(b+c)a}{2} = \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2}$$
$$\frac{ba+ca}{2} = \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2}$$
$$\frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} = \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2}.$$

Por lo tanto, (P, +, #) tiene estructura de anillo.

Ejercicio 8.

Sean A, B, C elementos de un álgebra de Boole G= (F, +, ., ‘, 0, 1), indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, señalando los axiomas usados:

(a) *A + (AC)= (A + A) (A + C).*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B4) de distributividad de la suma con respecto a la multiplicación.

(b) *AB + 0= AB.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(c) *CB1= CB.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B6) de existencia de elemento neutro (1) de la multiplicación.

(d) *(AB)´ + AB= 0.*

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B7), (AB)’ + AB= 1.

(e) *CA(CA)’ + B= B.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B8) y (B5), CA(CA)’= 0 y 0 + B= B.

(f) *CA + 0= 0.*

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(g) *(AB)’ + AB + CC’= 1.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B7) y (B8), (AB)’ + AB= 1, CC’= 0, 1 + 0= 1.

Ejercicio 9.

Sea H= {a, b, c, d, e} y sean Π= *(P (H),* ∪*,* ∩*,* ^{c}*,* ∅*, H) el álgebra de Boole de partes de H. Los siguientes conjuntos son elementos de P (H): {b}, {c}, {d}, {b, c}, {c, d}, {b, d}, {b, c, d}, {b, d, e}, {b, c, d, e}. Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.*

	{b, c, d, e}
{b, c, d}	{b, d, e}
{b, c} {b, d} {c, d}	
{b} {c} {d}	{e}

Ejercicio 10.

Sea W el conjunto formado por las clases de 3 letras proposicionales [p], [q], [r] y sus conjunciones, disyunciones y negaciones. Sea Λ= *(W,* ∨, ∧, ∼, ⊥, ⊤*) del álgebra de Boole del cálculo proposicional. Las siguientes proposiciones son elementos de W: [p* ∧ *q], [q* ∧ *r], [p], [q], [r], [q* ∨ *r]. Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.*

[q ∨ r]
[p] [q] [r]
[p ∧ q] [q ∧ r]

Ejercicio 11.

Sean B= ℤ, + la suma usual de enteros, . el producto usual de enteros y, para cada a ∈ ℤ, se define a'= -a. ¿Es H= (B, +, ., ', 0, 1) un álgebra booleana?

Para que H= (B, +, ., ', 0, 1) sea un álgebra booleana, se deben cumplir las siguientes propiedades en B. Sean x, y, z ∈ B:

(B1) x + y= y + x.	Se cumple.
(B2) xy= yx.	Se cumple.
(B3) x (y + z)= xy + xz.	Se cumple.
(B4) x + yz= (x + y) (x + z).	Se cumple.
(B5) x + 0= x.	Se cumple.
(B6) x1= x.	Se cumple.
(B7) x + x'= 1.	Se cumple.
(B8) xx'= 0.	Se cumple.

Por lo tanto, H= (B, +, ., ', 0, 1) es un álgebra booleana.

Ejercicio 12.

Demostrar que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces, 1'= 0 y 0'= 1.

Por el axioma (B7), se cumple que:

$0 + 0' = 1$ y
$1 + 1' = 1$.

Además, por el axioma (B5), se cumple que:

$0' = 1$ y
$1' = 0$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces, $1' = 0$ y $0' = 1$.

Ejercicio 13.

(a) *Probar la Ley de De Morgan: (xy)'= x' + y'.*

Teniendo en cuenta que el complemento es único, se debe tener que:

(i) (xy) + (x' + y')= 1 y
(ii) (xy) (x' + y')= 0.

Si esto se cumple, quiere decir que (x' + y') es el complemento de (xy).

(i)

(xy) + (x' + y')= [(x'+ y') + x] [(x' + y') + y]	por axioma (B4)
(xy) + (x' + y')= [(x' + x) + y'] [(y' + y) + x']	por axioma (B1) y asociatividad
(xy) + (x' + y')= (1 + y') (1 + x')	por axioma (B7)
(xy) + (x' + y')= 1 * 1	por ley de acotación
(xy) + (x' + y')= 1.	

(ii)

(xy) (x' + y')= [x' (xy)] [y' (xy)]	por axioma (B5)
(xy) (x' + y')= [(x'x) y] [(y'y) x]	por axioma (B2) y asociatividad
(xy) (x' + y')= (0 * y) (0 * x)	por axioma (B8)
(xy) (x' + y')= 0 * 0	por ley de acotación
(xy) (x' + y')= 0.	

Por lo tanto, queda demostrado la Ley de De Morgan (xy)'= x' + y', ya que (x' + y') es el complemento de (xy).

(b) *Expresar las Leyes de De Morgan en los conjuntos y en el cálculo proposicional, con los símbolos y operaciones que corresponden en cada caso.*

<u>Leyes de De Morgan en teoría de conjuntos:</u>

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

<u>Leyes de De Morgan en teoría de lógica proposicional:</u>

$\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.
$\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

Ejercicio 14.

Si x, y, z, w son variables de un Álgebra de Boole, simplificar (hasta su mínima expresión) las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas:

(a) $x + xy + x (x + y)$.

$x + xy + x (x + y)= x + xy + xx + xy$ por axioma (B5)
$x + xy + x (x + y)= x + xy + x + xy$ por ley de idempotencia
$x + xy + x (x + y)= x (1 + y) + x (1 + y)$ por axiomas (B6) y (B3)
$x + xy + x (x + y)= x * 1 + x * 1$ por ley de acotación
$x + xy + x (x + y)= x + x$ por axioma (B6)
$x + xy + x (x + y)= x$. por ley de idempotencia

(b) $x' + [(xx')']$.

$x' + [(xx')']= x' + (x' + x)$ por Ley de De Morgan
$x' + [(xx')']= x' + 1$ por (B7)
$x' + [(xx')']= x'$. por ley de acotación

(c) $x (y + x')'$.

$x (y + x')'= x (y'x)$ por Ley de De Morgan
$x (y + x')'= xxy'$ por asociatividad
$x (y + x')'= xy'$. por ley de idempotencia

(d) $[x (y'y)] + [y (x + x')]$.

$[x (y'y)] + [y (x + x')]= (x * 0) + (y * 1)$ por axiomas (B8) y (B7)
$[x (y'y)] + [y (x + x')]= 0 + y$ por ley de acotación y axioma (B6)
$[x (y'y)] + [y (x + x')]= y$. por axioma (B5).

(e) $y'xy + y'x + ywx' + yww$.

$y'xy + y'x + ywx' + yww= y'yx + y'x + ywx' + yw$ por asociatividad y ley de idempotencia
$y'xy + y'x + ywx' + yww= 0 * x + y'x + ywx' + yw$ por axioma (B8)
$y'xy + y'x + ywx' + yww= 0 + y'x + ywx' + yw$ por ley de acotación
$y'xy + y'x + ywx' + yww= y'x + ywx' + yw$
$y'xy + y'x + ywx' + yww= y'x + yw (x' + 1)$ por axiomas (B6) y (B3)
$y'xy + y'x + ywx' + yww= y'x + yw * 1$ por ley de acotación

y'xy + y'x + ywx' + yww= y'x + yw. por axioma (B6)

(f) *[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']*.

[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']= [(x'y') + z'] [z' + (x'yz)] por Leyes de De Morgan e involución
[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']= (z' + x'y') (z' + x'yz) por axioma (B1)
[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']= z' + (x'y') (x'yz) por axioma (B4)
[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']= z' + [(x'x') (y'y) z] por axioma (B2)
[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']= z' + (x' * 0 * z) por ley de idempotencia y por axioma (B8)
[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']= z' + 0 por ley de acotación
[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']= z'. por axioma (B5)

Ejercicio 15.

Si x, y, z son variables de un Álgebra de Boole, demostrar que:

(a) $x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = z + xy$.

$x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = x'z (y' + y) + xy'z + xy (z + z')$
$x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = x'z * 1 + xy'z + xy * 1$
$x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = x'z + xy'z + xy$
$x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = z (x' + xy') + xy$.

(b) $x + (y + 0)' + y'z = x + y'$.

$x + (y + 0)' + y'z = x + y' + y'z$
$x + (y + 0)' + y'z = x + y' (1 + z)$
$x + (y + 0)' + y'z = x + y' * 1$
$x + (y + 0)' + y'z = x + y'$.

(c) $x + y' + (xy + 0)' = 1$.

$x + y' + (xy + 0)' = x + y' + (xy + 0)'$
$x + y' + (xy + 0)' = x + y' + (xy)'$
$x + y' + (xy + 0)' = x + y' + x' + y'$
$x + y' + (xy + 0)' = (x + x') + (y' + y')$
$x + y' + (xy + 0)' = 1 + y'$
$x + y' + (xy + 0)' = 1$.

(d) $x + (y + 1)' + xy = x$.

$x + (y + 1)' + xy = x + y' * 0 + xy$
$x + (y + 1)' + xy = x + 0 + xy$
$x + (y + 1)' + xy = x + xy$
$x + (y + 1)' + xy = x (1 + y)$
$x + (y + 1)' + xy = x * 1$
$x + (y + 1)' + xy = x$.

(e) $[(zx)' zx]' + xy + xy' = 1$.

$[(zx)' zx]' + xy + xy' = [(zx) + (zx)'] + x (y + y')$
$[(zx)' zx]' + xy + xy' = [(zx) + (z' + x')] + x * 1$
$[(zx)' zx]' + xy + xy' = zx + (z' + x') + x$

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x (1 + z)
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x * 1
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= z’ + (x’ + x)
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= z’ + 1
[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= 1.

(f) *x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0.*

x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= x (yx’ + yy’)
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= x (yx’ + 0)
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= xy’x’
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= xx’y
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0 * y
x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0.

Ejercicio 16.

(a) *Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:*

A	**B**	**C**	**F (A, B, C)**
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

F (A, B, C)= A'B'C' + AB'C' + ABC'.

(b) *Simplificar la expresión hallada.*

F (A, B, C)= A'B'C' + AB'C' + ABC'
F (A, B, C)= (A'B' + AB' + AB) C'

F (A, B, C)= [(A' + A) B' + AB] C'
F (A, B, C)= (1 * B' + AB) C'
F (A, B, C)= (B' + AB) C'.

F (A, B, C)= [A'B' + A (B' + B)] C'
F (A, B, C)= (A'B' + A * 1) C'
F (A, B, C)= (A'B' + A) C'.

Ejercicio 17.

(a) *Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:*

A	B	C	D	F (A, B, C, D)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

F (A, B, C, D)= A’B’C’D’ + A’B’CD’ + A’BC’D’ + A’BC’D + A’BCD’ + A’BCD + ABC’D + ABCD.

(b) *Simplificar la expresión hallada.*

F (A, B, C, D)= A’B’C’D’ + A’B’CD’ + A’BC’D’ + A’BC’D + A’BCD’ + A’BCD + ABC’D + ABCD
F (A, B, C, D)= A’B’D’ (C’ + C) + A’BC’ (D’ + D) + A’BC (D’ + D) + ABD (C’ + C)
F (A, B, C, D)= A’B’D’ * 1 + A’BC’ * 1 + A’BC * 1 + ABD * 1
F (A, B, C, D)= A’B’D’ + A’BC’ + A’BC + ABD
F (A, B, C, D)= A’B’D’ + A’B (C’ + C) + ABD
F (A, B, C, D)= A’B’D’ + A’B * 1 + ABD
F (A, B, C, D)= A’B’D’ + A’B + ABD

F (A, B, C, D)= A’ (B’D’ + B) + ABD.

F (A, B, C, D)= A’B’D’ + B (A’ + AD).

Ejercicio 18.

Sea f: $B_1 \longrightarrow B_2$ un isomorfismo de álgebras booleanas. Si se llama 0_1 y 0_2 al 0 de B_1 y B_2, respectivamente, y 1_1 y 1_2 al 1 de B_1 y B_2, respectivamente, demostrar que f (0_1)= 0_2 y f (1_1)= 1_2.

Para cualquier elemento b de B_1, b + 0_1= b. Como f es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que f (b + 0_1)= f (b) + f (0_1). Pero, debido a que 0_2 es el elemento identidad aditivo en B_2, f (b + 0_1)= f (b) + 0_2= f (b), lo que implica que f (0_1)= 0_2. Por lo tanto, queda demostrado que f (0_1)= 0_2.

Para cualquier elemento b de B_1, b * 1_1= b. Como f es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que f (b * 1_1)= f (b) * f (1_1). Pero, debido a que 1_2 es el elemento identidad multiplicativo en B_2, f (b * 1_1)= f (b) * 1_2= f (b), lo que implica que f (1_1)= 1_2. Por lo tanto, queda demostrado que f (1_1)= 1_2.

Ejercicio 19.

(a) *Hallar un isomorfismo entre Ω= {B^2, ∨, ∧, ‘, (0, 0), (1, 1)} y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.*

Para encontrar un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva f que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto A= {a, b} y se considera el álgebra de Boole de partes de A, denotada por P (A). Entonces, se tiene:

- B^2 representa el conjunto de subconjuntos de A, es decir, B^2= P (A).
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto A se corresponde con su complemento relativo en A, es decir, A’= {x ∈ A: x ∉ A}.
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función f: Ω ⟶ P (A) como sigue:

- Para cada par ordenado (0, 0) en B^2, f lo mapea al conjunto vacío ∅ en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 1) en B^2, f lo mapea al conjunto A en P (A).
- Para cada par ordenado (0, 1) en B^2, f lo mapea al conjunto {b} en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 0) en B^2, f lo mapea al conjunto {a} en P (A).

Se puede verificar que f es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función f es inyectiva porque cada par ordenado en Ω se mapea a un único subconjunto en P (A) y f es suryectiva porque todo subconjunto de A se puede representar como un par ordenado en Ω.
- La función f preserva la disyunción, ya que f ((x_1, y_1) ∨ (x_2, y_2))= f ((1, 1)) si y sólo si (x_1, y_1)= (1, 1) o (x_2, y_2)= (1, 1), lo que implica que f ((x_1, y_1) ∨ (x_2, y_2))= A si y sólo si f ((x_1, y_1))= A o f ((x_2, y_2))= A.
- La función f preserva la conjunción, ya que f ((x_1, y_1) ∧ (x_2, y_2))= f ((1, 1)) si y sólo si (x_1, y_1)= (1, 1) y (x_2, y_2)= (1, 1), lo que implica que f ((x_1, y_1) ∧ (x_2, y_2))= A si y sólo si f ((x_1, y_1))= A y f ((x_2, y_2))= A.
- La función f preserva el complemento, ya que f ((x, y)’)= f ((1, 1)) si y sólo si (x, y)’= (1, 1), lo que implica que f ((x, y)’)= A si y sólo si f ((x, y))= ∅.
- La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si (x_1, y_1) ≤ (x_2, y_2), entonces f ((x_1, y_1)) ⊆ f ((x_2, y_2)).

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de A (P (A)).

Diagrama de Hasse de Ω:

(1, 1)
(1, 0) (0, 1)
(0, 0)

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

A
{a} {b}
∅

(b) *Hallar un isomorfismo entre Ω= {B^3, ∨, ∧, ', (0, 0, 0), (1, 1, 1)} y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.*

Para encontrar un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva f que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto A= {a, b, c} y se considera el álgebra de Boole de partes de A, denotada por P (A). Entonces, se tiene:

- B^3 representa el conjunto de subconjuntos de A, es decir, B^3= P (A).
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto A se corresponde con su complemento relativo en A, es decir, A'= {x ∈ A: x ∉ A}.
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función f: Ω ⟶ P (A) como sigue:

- Para cada par ordenado (0, 0, 0) en B^3, f lo mapea al conjunto vacío ∅ en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 1, 1) en B^3, f lo mapea al conjunto A en P (A).
- Para cada par ordenado (0, 0, 1) en B^3, f lo mapea al conjunto {c} en P (A).
- Para cada par ordenado (0, 1, 0) en B^3, f lo mapea al conjunto {b} en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 0, 0) en B^3, f lo mapea al conjunto {a} en P (A).
- Para cada par ordenado (0, 1, 1) en B^3, f lo mapea al conjunto {b, c} en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 0, 1) en B^3, f lo mapea al conjunto {a, c} en P (A).
- Para cada par ordenado (1, 1, 0) en B^3, f lo mapea al conjunto {a, b} en P (A).

Se puede verificar que f es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función f es inyectiva porque cada par ordenado en Ω se mapea a un único subconjunto en P (A) y f es suryectiva porque todo subconjunto de A se puede representar como un par ordenado en Ω.

- La función f preserva la disyunción, ya que f $((x_1, y_1, z_1) \vee (x_2, y_2, z_2))$= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (x_1, y_1, z_1)= (1, 1, 1) o (x_2, y_2, z_2)= (1, 1, 1), lo que implica que f $((x_1, y_1, z_1) \vee (x_2, y_2, z_2))$= A si y sólo si f $((x_1, y_1, z_1))$= A o f $((x_2, y_2, z_2))$= A.
- La función f preserva la conjunción, ya que f $((x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2))$= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (x_1, y_1, z_1)= (1, 1, 1) y (x_2, y_2, z_2)= (1, 1, 1), lo que implica que f $((x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2))$= A si y sólo si f $((x_1, y_1, z_1))$= A y f $((x_2, y_2, z_2))$= A.
- La función f preserva el complemento, ya que f ((x, y, z)')= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (x, y, z)'= (1, 1, 1), lo que implica que f ((x, y, z)')= A si y sólo si f ((x, y, z))= $\emptyset$.
- La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si $(x_1, y_1, z_1) \leq (x_2, y_2, z_2)$, entonces f $((x_1, y_1, z_1)) \subseteq$ f $((x_2, y_2, z_2))$.

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre Ω y el álgebra de Boole de partes de A (P (A)).

<u>Diagrama de Hasse de Ω:</u>

(1, 1, 1)
(1, 1, 0) (1, 0, 1) (0, 1, 1)
(1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1)
(0, 0, 0)

<u>Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:</u>

A
{a, b} {a, c} {b, c}
{a} {b} {c}
$\emptyset$

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 4:
Sucesión e Inducción.

Ejercicio 1.

Hallar los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones:

(a) $a_h = (-1)^h \, 3^h$, $h \geq 1$.

$a_1 = (-1)^1 \, 3^1 = -1 * 3 = -3$.
$a_2 = (-1)^2 \, 3^2 = 1 * 9 = 9$.
$a_3 = (-1)^3 \, 3^3 = -1 * 27 = -27$.
$a_4 = (-1)^4 \, 3^4 = 1 * 81 = 81$.

(b) $b_j = 2j + 3^j$, $j \geq 1$.

$b_1 = 2 * 1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$.
$b_2 = 2 * 2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.
$b_3 = 2 * 3 + 3^3 = 6 + 27 = 33$.
$b_4 = 2 * 4 + 3^4 = 8 + 81 = 89$.

(c) $c_t = 2^t - 1$, $t \geq 1$.

$c_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.
$c_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.
$c_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$.
$c_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$.

(d) $d_h = h^2$, $h \geq 1$.

$d_1 = 1^2 = 1$.
$d_2 = 2^2 = 4$.
$d_3 = 3^2 = 9$.
$d_4 = 4^2 = 16$.

(e) $e_1 = 4$, $e_k = -3e_{k-1} + 2$, $k \geq 2$.

$e_1 = 4$.
$e_2 = -3e_1 = -3 * 4 = -12$.
$e_3 = -3e_2 = -3 (-12) = 36$.

e_4= -3e_3= -3 * 36= -108.

(f) *f_1= -2, f_2= 1, f_k= 3f_{k-1} - f_{k-2}, k ≥ 3.*

f_1= -2.
f_2= 1.
f_3= 3f_2 - f_1= 3 * 1 - (-2)= 3 + 2= 5.
f_4= 3f_3 - f_2= 3 * 5 - 1= 15 - 1= 14.

(g) *g_h= 4, h ≥ 1.*

g_1= 4.
g_2= 4.
g_3= 4.
g_4= 4.

(h) *x_1= 3, x_{k+1}= x_k - tan x_k, k ≥ 1, esta sucesión genera aproximaciones del número π.*

x_1= 3.
x_2= x_1 - tan x_1= 3 - tan 3= 2,95.
x_3= x_2 - tan x_2= 2,95 - tan 2,95= 2,9.
x_4= x_3 - tan x_3= 2,9 - tan 2,9= 2,85.

Ejercicio 2.

Hallar una definición, explícita o recursiva, para las siguientes sucesiones:

(a) *1, -1, 1, -1, 1, -1, …*

Explícita:

a_n= $(-1)^{n+1}$, n ≥ 1.

Recursiva:

a_1= 1.
a_n= -a_{n-1}, n ≥ 2.

(b) *1, 8, 27, 64, 125, …*

Explícita:

b_n= n^3, n ≥ 1.

(c) *4, 9, 14, 19, 24, 29, …*

Explícita:

c_n= 4 + (n - 1) * 5, n ≥ 1.

Recursiva:

c_1= 4.
c_n= c_{n-1} + 5, n ≥ 2.

(d) *-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, …*

Explícita:

d_n= -3 + (n - 1) * 2, n ≥ 1.

Recursiva:

d_1= -3.
d_n= d_{n-1} + 2, n ≥ 2.

(e) *1,* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},$ ...

<u>Explícita:</u>

$e_n = \frac{1}{n}$, n ≥ 1.

(f) *2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, …*

<u>Recursiva:</u>

$f_1 = 2$.
$f_2 = 5$.
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, n ≥ 3.

(g) *-1,* $\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},$ ...

<u>Explícita:</u>

$g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, n ≥ 1.

(h) *0, 5, 10, 15, 20, …*

<u>Explícita:</u>

$h_n = (n - 1) * 5$, n ≥ 1.

<u>Recursiva:</u>

$h_1 = 0$.
$h_n = h_{n-1} + 5$, n ≥ 2.

Ejercicio 3.

(a) *Dada la sucesión* $d_h= \frac{h^2}{h+1}$, $h \geq 1$. *Encontrar* d_3, d_5, d_j *y* d_{h+1}.

$d_3= \frac{3^2}{3+1}= \frac{9}{4}$.
$d_5= \frac{5^2}{5+1}= \frac{25}{6}$.
$d_j= \frac{j^2}{j+1}$.
$d_{h+1}= \frac{(h+1)^2}{h+1+1}= \frac{(h+1)^2}{h+2}$.

(b) *Dada la sucesión* $f_1= -2$, $f_2= 1$, $f_k= 3f_{k-1} - f_{k-2}$, $k \geq 3$. *Encontrar* f_t, f_{j+2}, f_{k-3} *y* f_{h+1}.

$f_t= 3f_{t-1} - f_{t-2}$.
$f_{j+2}= 3f_{j+1} - f_j$.
$f_{k-3}= 3f_{k-4} - f_{k-5}$.
$f_{h+1}= 3f_h - f_{h-1}$.

Ejercicio 4.

Dar una definición explícita para las siguientes sucesiones:

(a) *4, 1,* $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$

a_n= 4 $(\frac{1}{4})^{n-1}$, n ≥ 1.

(b) *5, 15, 25, 35, 45, …*

b_n= 5 + (n - 1) * 10, n ≥ 1.

(c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \ldots$

c_n= $\frac{1}{3n+(-1)^n}$, n= 1.
c_n= $\frac{1}{3n+(-1)^{n+1}}$, 1 < n ≤ 3.
c_n= $\frac{1}{3n+5}$, n= 4.
c_n= $\frac{1}{3n+11}$, n= 5.
…

(d) *0, -4, 8, -12, 16, -20, …*

d_n= $(-1)^{n+1}$ (n - 1) * 4, n ≥ 1.

Ejercicio 5.

Algunas calculadoras utilizan un algoritmo similar al siguiente para calcular $\sqrt{n}$, para un número n real positivo:

Sea $x_1=\frac{n}{2}$, encontrar aproximaciones sucesivas x_2, x_3, ... mediante la siguiente fórmula: $x_k=\frac{1}{2}(x_{k-1}+\frac{n}{x_{k-1}})$, $k \geq 2$, hasta obtener la precisión deseada.

Utilizar este método para calcular $\sqrt{5}$ y $\sqrt{18}$ con una precisión de 6 cifras decimales.

(a) $\sqrt{5} \cong 2{,}236068$.

$x_1=\frac{5}{2}=2{,}5$.
$x_2=\frac{1}{2}(x_1+\frac{5}{x_1})=\frac{1}{2}(\frac{5}{2}+\frac{5}{\frac{5}{2}})=\frac{1}{2}(\frac{5}{2}+2)=\frac{1}{2}\frac{9}{2}=\frac{9}{4}=2{,}25$.
$x_3=\frac{1}{2}(x_2+\frac{5}{x_2})=\frac{1}{2}(\frac{9}{4}+\frac{5}{\frac{9}{4}})=\frac{1}{2}(\frac{9}{4}+\frac{20}{9})=\frac{1}{2}\frac{161}{36}=\frac{161}{72}=2{,}236\hat{1}$.
$x_4=\frac{1}{2}(x_3+\frac{5}{x_3})=\frac{1}{2}(\frac{161}{72}+\frac{5}{\frac{161}{72}})=\frac{1}{2}(\frac{161}{72}+\frac{360}{161})=\frac{1}{2}\frac{51841}{11592}=\frac{51841}{23184}=2{,}236068$.

(b) $\sqrt{18} \cong 4{,}242641$.

$x_1=\frac{18}{2}=9$.
$x_2=\frac{1}{2}(x_1+\frac{5}{x_1})=\frac{1}{2}(9+\frac{5}{9})=\frac{1}{2}\frac{86}{9}=\frac{43}{9}=4{,}\hat{7}$.
$x_3=\frac{1}{2}(x_2+\frac{5}{x_2})=\frac{1}{2}(\frac{43}{9}+\frac{5}{\frac{43}{9}})=\frac{1}{2}(\frac{43}{9}+\frac{40}{43})=\frac{1}{2}\frac{2209}{387}=\frac{2209}{774}=2{,}854005$.

Ejercicio 6.

Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar una definición explícita en todos los casos.

(a) *1, 1, 1, 1, 1, ...*

a_n= 1 + 0n, n $\geq$ 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

(b) *1, -1, 1, -1, 1, ...*

a_n= $(-1)^{n+1}$, n $\geq$ 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

(c) *1, 2, 3, 4, 5, ...*

a_n= 1 + (n - 1), n $\geq$ 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

(d) *4, 5, 6, 7, 8, ...*

a_n= 4 + (n - 1), n $\geq$ 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

(e) *13, 20, 27, 34, 41, ...*

a_n= 13 + (n - 1) * 7, n $\geq$ 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

(f) *8,* $\frac{2}{3}, \frac{1}{18}, \frac{1}{216}, \ldots$

a_n= 8 $(\frac{1}{12})^{n-1}$, n $\geq$ 1.

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

(g) a_n= *2n, n ≥ 1.*

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

(h) a_n= 2^n*, n ≥ 1.*

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

(i) *10,* $\frac{19}{2}$*, 9,* $\frac{17}{2}$*, 8,* $\frac{15}{2}$.

a_n= 10 $(\frac{95}{10})^{n-1}$, n ≥ 1.

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

(i) *300, -30, 3, -0,3, ….*

a_n= $(-1)^{n+1} * 300\ (\frac{1}{10})^{n-1}$, n ≥ 1.

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

Ejercicio 7.

Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar el primer término y diferencia o primer término y razón según corresponda.

(a) a_n= *7 (1 +* $\frac{3}{7}$ *n) + 2, n ≥ 1.*

a_1= 7 (1 + $\frac{3}{7}$ * 1) + 2
a_1= 7 (1 + $\frac{3}{7}$) + 2
a_1= 7 $\frac{10}{7}$ + 2
a_1= 10 + 2
a_1= 12.

a_2= 7 (1 + $\frac{3}{7}$ * 2) + 2
a_2= 7 (1 + $\frac{6}{7}$) + 2
a_2= 7 $\frac{13}{7}$ + 2
a_2= 13 + 2
a_2= 15.

d= a_2 - a_1
d= 15 - 12
d= 3.

Por lo tanto, esta sucesión es aritmética.

(b) b_n= *5 ** 2^{n-2}, *n ≥ 1.*

b_1= 5 * 2^{1-2}
b_1= 5 * 2^{-1}
b_1= $\frac{5}{2}$.

b_2= 5 * 2^{2-2}
b_2= 5 * 2^0
b_2= 5 * 1
b_2= 5.

r= $\frac{b_2}{b_1}$
r= $\frac{5}{\frac{5}{2}}$
r= 2.

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

(c) c_n= *3 ** 4^{n+1}, *n ≥ 1.*

c_1= 3 * 4^{1+1}
c_1= 3 * 4^2
c_1= 3 * 16
c_1= 48.

c_2= 3 * 4^{2+1}
c_2= 3 * 4^3
c_2= 3 * 64
c_2= 192.

r= $\frac{c_2}{c_1}$
r= $\frac{192}{48}$
r= 4.

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

(d) d_n= *5 (*$\frac{4}{5}$ *- n), n ≥ 1.*

d_1= 5 ($\frac{4}{5}$ - 1)
d_1= 5 ($\frac{-1}{5}$)
d_1= -1.

d_2= 5 ($\frac{4}{5}$ - 2)
d_2= 5 ($\frac{-6}{5}$)
d_2= -6.

d= d_2 - d_1
d= -6 - (-1)
d= -6 + 1
d= -5.

Por lo tanto, esta sucesión es aritmética.

(e) e_n= *2* $(\frac{1}{3})^n$, *n ≥ 1.*

e_1= 2 $(\frac{1}{3})^1$
e_1= 2 $\frac{1}{3}$

$e_1 = \frac{2}{3}$.

$e_2 = 2\ (\frac{1}{3})^2$
$e_2 = 2\ \frac{1}{9}$
$e_2 = \frac{2}{9}$.

r= $\frac{e_2}{e_1}$
r= $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}}$
r= $\frac{1}{3}$.

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

Ejercicio 8.

El tercer término de una sucesión aritmética es 85 y el decimocuarto es 30, hallar el primer término y la diferencia.

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \Leftrightarrow 85 = a_1 + 2d \\ a_{14} = a_1 + 13d \Leftrightarrow 30 = a_1 + 13d \end{cases}.$$

85 - 30= (a_1 + 2d) - (a_1 + 13d)
55= a_1 + 2d - a_1 - 13d
55= -11d
d= $\frac{55}{-11}$
d= -5.

a_1= 85 - 2 (-5)= 85 + 10= 95.
a_1= 30 - 13 (-5)= 30 + 65= 95.

Por lo tanto, el primer término y la diferencia son 95 y -5, respectivamente.

Ejercicio 9.

Encontrar tres números f, g y h tales que 320, f, g, h, 20 sean los 5 primeros términos de una sucesión geométrica.

$a_5= a_1r^4$
20= $320r^4$
$r^4= \frac{20}{320}$
$r^4= \frac{1}{16}$
r= $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$
r= $\frac{1}{2}$.

f= a_2
f= 320 $(\frac{1}{2})^1$
f= 320 $\frac{1}{2}$
f= 160.

g= a_3
g= 320 $(\frac{1}{2})^2$
g= 320 $\frac{1}{4}$
g= 80.

h= a_2
h= 320 $(\frac{1}{2})^3$
h= 320 $\frac{1}{8}$
h= 40.

Por lo tanto, los tres números f, g y h son 160, 80, 40, respectivamente.

Ejercicio 10.

Hallar el primer término y la diferencia de una sucesión aritmética sabiendo que la suma del tercer término y el octavo da 75 y la diferencia entre el noveno y el segundo es 49.

$a_3 + a_8 = 75$
$a_1 + 2d + a_1 + 7d = 75$
$2a_1 + 9d = 75.$

$a_9 - a_2 = 49$
$(a_1 + 8d) - (a_1 + d) = 49$
$a_1 + 8d - a_1 + d = 49$
$9d = 49$
$d = \frac{49}{9}.$

$2a_1 + 9\,\frac{49}{9} = 75$
$2a_1 + 49 = 75$
$2a_1 = 75 - 49$
$2a_1 = 26$
$a_1 = \frac{26}{2}$
$a_1 = 13.$

Por lo tanto, el primer término y la diferencia son 13 y $\frac{49}{9}$, respectivamente.

Ejercicio 11.

La superficie de un triángulo rectángulo es 54 cm^2. Hallar la longitud de sus lados sabiendo que están en progresión aritmética. (Idea: Plantear la relación pitagórica del triángulo rectángulo y resolver la ecuación cuadrática para a_1 dejando fijo d).

S= $\frac{a_1 a_2}{2}$
S= $\frac{a_1(a_1+d)}{2}$
54= $\frac{a_1^2+a_1 d}{2}$
a_1^2 + a_1d= 54 * 2
a_1^2 + a_1d= 108
a_1^2 + a_1d - 108= 0.

a_1^2 + $(a_1 + d)^2$= $(a_1 + 2d)^2$
a_1^2 + a_1^2 + 2a_1d + d^2= a_1^2 + 4a_1d + 4d^2
2a_1^2 + 2a_1d + d^2= a_1^2 + 4a_1d + 4d^2
2a_1^2 + 2a_1d + d^2 - a_1^2 - 4a_1d - 4d^2= 0
a_1^2 - 2a_1d - 3d^2= 0.
$(\frac{a_1}{d})^2$ - 2 $\frac{a_1}{d}$ - 3= 0.

$(\frac{a_1}{d})_1$, $(\frac{a_1}{d})_2$= $\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4*1(-3)}}{2*1}$
$(\frac{a_1}{d})_1$, $(\frac{a_1}{d})_2$= $\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$
$(\frac{a_1}{d})_1$, $(\frac{a_1}{d})_2$= $\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$
$(\frac{a_1}{d})_1$, $(\frac{a_1}{d})_2$= $\frac{2\pm 4}{2}$
$(\frac{a_1}{d})_1$= $\frac{2+4}{2}$= $\frac{6}{2}$= 3.
$(\frac{a_1}{d})_2$= $\frac{2-4}{2}$= $\frac{-2}{2}$= -1.

$\frac{a_1}{d}$= 3
a_1= 3d.

$(3d)^2$ + 3dd - 108= 0
9d^2 + 3d^2 - 108= 0
12d^2 - 108= 0
12d^2= 108
d^2= $\frac{108}{12}$
d^2= 9
d= $\sqrt{9}$
d= 3.

a_1= 3 * 3
a_1= 9.

a_2= 9 + 3
a_2= 12.

Por lo tanto, la longitud de sus lados es 9 cm y 12 cm, respectivamente.

Juan Menduiña

Ejercicio 12.

Se desea construir una escalera de pared de 16 escalones cuyas longitudes decrecen uniformemente de 50 cm en la base a 30 cm en la parte superior. Encontrar una fórmula para saber cuánto mide el escalón n.

$a_{16}= a_1 + 15d$
30= 50 + 15d
15d= 30 - 50
15d= -20
d= $\frac{-20}{15}$
d= $\frac{-4}{3}$.

$a_n= a_1 + (n - 1) (\frac{-4}{3})$, n ≥ 2.

Ejercicio 13.

Hallar el término especificado de la sucesión aritmética a partir de los términos dados:

(a) a_{11}, *siendo* a_1= *2 +* $\sqrt{2}$ *y* a_2= *3.*

d= a_2 - a_1
d= 3 - (2 + $\sqrt{2}$)
d= 3 - 2 - $\sqrt{2}$
d= 1 - $\sqrt{2}$.

a_{11}= a_1 + 10d
a_{11}= 2 + $\sqrt{2}$ + 10 (1 - $\sqrt{2}$)
a_{11}= 2 + $\sqrt{2}$ + 10 - 10 $\sqrt{2}$
a_{11}= 12 - 9 $\sqrt{2}$.

(b) a_1, *siendo* a_8= *47 y* a_9= *53.*

d= a_9 - a_8
d= 53 - 47
d= 6.

a_8= a_1 + 7d
47= a_1 + 7 * 6
47= a_1 + 42
a_1= 47 - 42
a_1= 5.

Ejercicio 14.

Encontrar la razón de una sucesión geométrica cuyo primer término es 320 y el séptimo es 5.

a_1= 320.

a_7= $a_1 r^6$
5= 320r^6
r^6= $\frac{5}{320}$
r^6= $\frac{1}{64}$
r= $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$
r= $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la razon es $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 15.

Hallar todos los posibles valores de r para una sucesión geométrica con los términos dados:

(a) $a_4= 3$ *y* $a_6= 9$.

$a_4= 3$
$a_1r^3= 3$
$r^3= \frac{3}{a_1}$
r= $(\frac{3}{a_1})^{\frac{1}{3}}$.

$a_6= 9$
$a_1r^5= 9$
$r^5= \frac{9}{a_1}$
r= $(\frac{9}{a_1})^{\frac{1}{5}}$.

$(\frac{3}{a_1})^{\frac{1}{3}}= (\frac{9}{a_1})^{\frac{1}{5}}$
$[(\frac{3}{a_1})^{\frac{1}{3}}]^5= \frac{9}{a_1}$
$(\frac{3}{a_1})^{\frac{5}{3}}= \frac{3^2}{a_1}$
$\frac{3^{\frac{5}{3}}}{a_1^{\frac{5}{3}}}= \frac{3^2}{a_1}$
$\frac{a_1^{\frac{5}{3}}}{a_1}= \frac{3^{\frac{5}{3}}}{3^2}$
$a_1^{\frac{2}{3}}= 3^{\frac{-1}{3}}$
$a_1= (3^{\frac{-1}{3}})^{\frac{3}{2}}$
$a_1= 3^{\frac{-1}{2}}$.

r= $(\frac{3}{3^{\frac{-1}{2}}})^{\frac{1}{3}}= (3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}= 3^{\frac{1}{2}}$.
r= $(\frac{9}{3^{\frac{-1}{2}}})^{\frac{1}{5}}= (3^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}}= 3^{\frac{1}{2}}$.

(b) $a_3= 4$ *y* $a_7= \frac{1}{4}$.

$a_3= 4$
$a_1r^2= 4$
$r^2= \frac{4}{a_1}$

r= $(\frac{4}{a_1})^{\frac{1}{2}}$
r= $\frac{2}{a_1^{\frac{1}{2}}}$.

a_7= $\frac{1}{4}$
$a_1 r^6$= $\frac{1}{4}$
r^6= $\frac{1}{4a_1}$
r= $(\frac{1}{4a_1})^{\frac{1}{6}}$
r= $\frac{1}{4^{\frac{1}{6}} a_1^{\frac{1}{6}}}$
r= $\frac{1}{2^{\frac{1}{3}} a_1^{\frac{1}{6}}}$.

$\frac{2}{a_1^{\frac{1}{2}}}$= $\frac{1}{2^{\frac{1}{3}} a_1^{\frac{1}{6}}}$
$\frac{a_1^{\frac{1}{2}}}{a_1^{\frac{1}{6}}}$= $2 * 2^{\frac{1}{3}}$
$a_1^{\frac{1}{3}}$= $2^{\frac{4}{3}}$
a_1= $(2^{\frac{4}{3}})^3$
a_1= 2^4
a_1= 16.

r= $\frac{2}{16^{\frac{1}{2}}}$= $\frac{2}{4}$= $\frac{1}{2}$.
r= $\frac{1}{2^{\frac{1}{3}} 16^{\frac{1}{6}}}$= $\frac{1}{2^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}}}$= $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 16.

La cantidad de bacterias en cierto cultivo es, inicialmente, 500 y el cultivo se duplica todos los días.

(a) *Encontrar la cantidad de bacterias en el día 2, día 3 y día 4.*

a_1= 500.
d= 2.

a_2= a_1 * 2
a_2= 500 * 2
a_2= 1000.

a_3= a_2 * 2
a_3= 1000 * 2
a_3= 2000.

a_4= a_3 * 2
a_4= 2000 * 2
a_4= 4000.

(b) *Dar una fórmula para hallar la población bacteriana en el día n.*

a_n= $a_1 2^{n-1}$, n $\geq$ 2.

Ejercicio 17.

Habitualmente, se agrega cloro al agua de las piscinas para controlar los microorganismos. Si el nivel de cloro es mayor de 3 ppm (partes por millón), los nadadores sentirán ardor en los ojos e incomodidad en la piel; si el nivel baja a menos de 1 ppm, existe la posibilidad de que el agua tome color verde por la presencia de algas. El cloro debe agregarse al agua a intervalos regulares. Si no se agrega cloro a una piscina en un período de 24 hs, alrededor del 20% del cloro existente se disipará en la atmósfera y el 80% permanecerá en el agua.

(a) *Determinar la sucesión a_n que exprese la cantidad de cloro presente después de n días, si la piscina tiene a_1 ppm de cloro al principio y no vuelve a agregarse. Expresar la sucesión en forma recursiva y en forma explícita.*

Explícita:

$a_n = a_1 * 0{,}8^{n-1}$, n ≥ 2.

Recursiva:

a_1.
$a_n = 0{,}8 a_{n-1}$, n ≥ 2.

(b) *Si al inicio tiene 7 ppm, determinar el primer día en que el nivel de cloro baja de 3 ppm.*

$a_n < 3$
$7 * 0{,}8^{n-1} < 3$
$0{,}8^{n-1} < \frac{3}{7}$
$\ln 0{,}8^{n-1} < \ln \frac{3}{7}$
$(n - 1) \ln 0{,}8 < \ln \frac{3}{7}$
$n - 1 > \frac{\ln\frac{3}{7}}{\ln\frac{8}{10}}$
$n - 1 > \frac{-0{,}85}{-0{,}22}$
$n - 1 > 3{,}86$
$n > 3{,}86 + 1$
$n > 4{,}86$.

Por lo tanto, si al inicio tiene 7ppm, el primer día en que el nivel de cloro baja de 3 ppm es el quinto día.

Ejercicio 18.

Desarrollar las siguientes sumas:

(a) $\sum_{k=1}^{7}(2k-4)$.

$\sum_{k=1}^{7}(2k-4)$= (2 * 1 - 4) + (2 * 2 - 4) + (2 * 3 - 4) + (2 * 4 - 4) + (2 * 5 - 4) + (2 * 6 - 4) + (2 * 7 - 4).

(b) $\sum_{t=4}^{10}(3^t-t^2)$.

$\sum_{t=4}^{10}(3^t-t^2)$= (3^5 - 5^2) + (3^6 - 6^2) + (3^7 - 7^2) + (3^8 - 8^2) + (3^9 - 9^2) + (3^{10} - 10^2).

(c) $\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h})$.

$\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h})$= (2 - $\frac{4}{5}$) + (2 - $\frac{4}{6}$) + (2 - $\frac{4}{7}$) + (2 - $\frac{4}{8}$) + (2 - $\frac{4}{9}$) + (2 - $\frac{4}{10}$) + (2 - $\frac{4}{11}$) + (2 - $\frac{4}{12}$) + (2 - $\frac{4}{13}$) + (2 - $\frac{4}{14}$).

Ejercicio 19.

Completar las siguientes igualdades:

(a) $\sum_{k=1}^{28} 2k-4 = \sum_{k=1}^{7} 2k-4 + \sum \quad 2k-4$.

$\sum_{k=1}^{28} 2k-4 = \sum_{k=1}^{7} 2k-4 + \sum_{k=8}^{28} 2k-4$.

(b) $\sum_{t=4}^{10}(3^t-t^2) = \sum_{t=1}^{10}(3^t-t^2)$ - $\sum \quad (3^t-t^2)$.

$\sum_{t=4}^{10}(3^t-t^2) = \sum_{t=1}^{10}(3^t-t^2)$ - $\sum_{t=1}^{3}(3^t-t^2)$.

(c) $\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h}) = \sum \quad (2-\frac{4}{h})$ - $\sum \quad (2-\frac{4}{h})$.

$\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h}) = \sum_{h=1}^{14}(2-\frac{4}{h})$ - $\sum_{h=1}^{4}(2-\frac{4}{h})$.

(d) $\sum_{i=4}^{10} 2^i + i = 2^4 + 4 + \sum \quad 2^i + i$.

$\sum_{i=4}^{10} 2^i + i = 2^4 + 4 + \sum_{i=5}^{10} 2^i + i$.

(e) $\sum_{j=3}^{18} \frac{1+j}{j} = \sum \quad \frac{1+j}{j} + \frac{1+18}{17}$.

$\sum_{j=3}^{18} \frac{1+j}{j} = \sum_{j=3}^{17} \frac{1+j}{j} + \frac{1+18}{17}$.

(f) $\sum_{j=2}^{45} \frac{4-j}{j+1} = \sum_{j=2}^{44} \frac{4-j}{j+1} + \ldots$.

$\sum_{j=2}^{45} \frac{4-j}{j+1} = \sum_{j=2}^{44} \frac{4-j}{j+1} + \frac{4-45}{45+1}$.

(g) $\sum_{n=3}^{h} \frac{4}{n+1} = \sum_{n=3}^{h-1} \frac{4}{n+1} + \ldots$.

$\sum_{n=3}^{h} \frac{4}{n+1} = \sum_{n=3}^{h-1} \frac{4}{n+1} + \frac{4}{h+1}$.

(h) $\sum_{t=6}^{k} \frac{t}{t+2} = \sum_{t=6}^{k-1} \frac{t}{t+2} + \ldots.$

$\sum_{t=6}^{k} \frac{t}{t+2} = \sum_{t=6}^{k-1} \frac{t}{t+2} + \frac{k}{k+2}.$

Ejercicio 20.

Escribir las siguientes sumas utilizando la notación sigma:

(a) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + ... + 81.$

$\sum_{i=1}^{9} i^2.$

(b) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1.$

$\sum_{i=0}^{6} (-1)^i.$

(c) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 46.$

$\sum_{i=1}^{46} i.$

(d) $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ... + 34.$

$\sum_{i=4}^{34} i.$

(e) $13 + 20 + 27 + 34 + 41 + ... + [13 + (n - 1) * 7].$

$\sum_{i=1}^{n} 13 + (i - 1) * 7.$

(f) $8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{216} + ... + 8\left(\frac{1}{12}\right)^{k-1}.$

$\sum_{i=1}^{k} 8\left(\frac{1}{12}\right)^{k-1}.$

(g) $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2t.$

$\sum_{i=1}^{t} 2i.$

Ejercicio 21.

Dar el resultado de las siguientes sumas:

(a) $\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5$.

$\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 = \sum_{i=1}^{4} 4i^2 + \sum_{i=1}^{4} 5$
$\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 = 4 \sum_{i=1}^{4} i^2 + 4 * 5$
$\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 = 4 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 20$
$\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 = 4 (1 + 4 + 9 + 16) + 20$
$\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 = 4 * 30 + 20$
$\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 = 120 + 20$
$\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 = 140$.

(b) $\sum_{j=3}^{6} \frac{j-1}{j-2}$.

$\sum_{j=3}^{6} \frac{j-1}{j-2} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$
$\sum_{j=3}^{6} \frac{j-1}{j-2} = \frac{73}{12}$.

(c) $\sum_{k=3}^{8} k(k-1)$.

$\sum_{k=3}^{8} k(k-1) = 3 * 2 + 4 * 3 + 5 * 4 + 6 * 5 + 7 * 6 + 8 * 7$
$\sum_{k=3}^{8} k(k-1) = 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56$
$\sum_{k=3}^{8} k(k-1) = 166$.

(d) $\sum_{t=5}^{9} 1 + (-1)^t$.

$\sum_{t=5}^{9} 1 + (-1)^t = \sum_{t=5}^{9} 1 + \sum_{t=5}^{9} (-1)^t$
$\sum_{t=5}^{9} 1 + (-1)^t = 5 * 1 + (-1)$
$\sum_{t=5}^{9} 1 + (-1)^t = 5 - 1$
$\sum_{t=5}^{9} 1 + (-1)^t = 4$.

(e) $\sum_{i=1}^{200} 10$.

$\sum_{i=1}^{200} 10 = 200 * 10$
$\sum_{i=1}^{200} 10 = 2000$.

(f) $\sum_{j=8}^{70} 20$.

$\sum_{j=8}^{70} 20$= 63 * 20
$\sum_{j=8}^{70} 20$= 1260.

Ejercicio 22.

Calcular las siguientes sumas de dos formas diferentes: a) aplicando la suma de una sucesión aritmética, b) aplicando las propiedades vistas de la sumatoria.

(a) $\sum_{i=1}^{30} 4i + 5$.

$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5= \frac{30[(4*1+5)+(4*30+5)]}{2}$
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5= \frac{30[(4+5)+(120+5)]}{2}$
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5= \frac{30(9+125)}{2}$
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5= \frac{30*134}{2}$
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5= \frac{4020}{2}$
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5=$ 2010.

$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5= \sum_{i=1}^{30} 4i + \sum_{i=1}^{30} 5$
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5= 4 \sum_{i=1}^{30} i + 30 * 5$
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5=$ 4 * 465 + 150
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5=$ 1860 + 150
$\sum_{i=1}^{30} 4i + 5=$ 2010.

(b) $\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2$.

$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2= \frac{33\{[-3(1-1)+2]+[-3(33-1)+2]\}}{2}$
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2= \frac{33[(-3*0+2)+(-3*32+2)]}{2}$
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2= \frac{33[(0+2)+(-96+2)]}{2}$
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2= \frac{33[2+(-94)]}{2}$
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2= \frac{33(2-94)}{2}$
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2= \frac{33(-92)}{2}$
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2= \frac{-3036}{2}$
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2=$ -1518.

$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2= \sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + \sum_{j=1}^{33} 2$
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2=$ -3 $\sum_{j=1}^{33} j - 1$ + 33 * 2
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2=$ -3 ($\sum_{j=1}^{33} j$ - $\sum_{j=1}^{33} 1$) + 66
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2=$ -3 (561 - 33 * 1) + 66
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2=$ -3 (561 - 33) + 66
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2=$ -3 * 528 + 66
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2=$ -1584 + 66
$\sum_{j=1}^{33} -3(j-1) + 2=$ -1518.

(c) $\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)$.

$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)= \frac{45\{[4+5(1-1)]+[4+5(45-1)]\}}{2}$
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)= \frac{45[(4+5*0)+(4+5*44)]}{2}$
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)= \frac{45[(4+0)+(4+220)]}{2}$
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)= \frac{45(4+224)}{2}$
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)= \frac{45*228}{2}$
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)= \frac{10260}{2}$
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)=$ 5130.

$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)= \sum_{k=1}^{45} 4 + \sum_{k=1}^{45} 5(k-1)$
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)=$ 45 * 4 + 5 $\sum_{k=1}^{45} k - 1$
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)=$ 180 + 5 ($\sum_{k=1}^{45} k$ - $\sum_{k=1}^{45} 1$)
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)=$ 180 + 5 (1035 - 45 * 1)
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)=$ 180 + 5 (1035 - 45)
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)=$ 180 + 5 * 990
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)=$ 180 + 4950
$\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k-1)=$ 5130.

(d) $\sum_{t=1}^{h} 3t + 1$.

$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \frac{h[(3*1+1)+(3h+1)]}{2}$
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \frac{h[(3+1)+(3h+1)]}{2}$
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \frac{h(4+3h+1)}{2}$
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \frac{h(3h+5)}{2}$
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \frac{3h^2+5h}{2}$
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \frac{3}{2} h^2 + \frac{5}{2}$ h.

$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \sum_{t=1}^{h} 3t + \sum_{t=1}^{h} 1$
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1=$ 3 $\sum_{t=1}^{h} t$ + h * 1
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1=$ 3 $\frac{h(1+h)}{2}$ + h
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1=$ 3 $\frac{h+h^2}{2}$ + h
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1=$ 3 ($\frac{1}{2}$ h + $\frac{1}{2} h^2$) + h
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \frac{3}{2}$ h + $\frac{3}{2} h^2$ + h
$\sum_{t=1}^{h} 3t + 1= \frac{3}{2} h^2 + \frac{5}{2}$ h.

Ejercicio 23.

(a) *Dada la siguiente sucesión definida en forma recursiva* c_1*=3 y* c_n*= 4 +* c_{n-1}*, si n ≥ 2, calcular* $\sum_{k=1}^{n} c_k$.

$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{n(3+4+c_{n-1})}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{n(7+c_{n-1})}{2}$

(b) *Dar el valor de* $\sum_{k=10}^{67} c_k$.

$\sum_{k=10}^{67} c_k = \sum_{k=1}^{67} c_k - \sum_{k=1}^{9} c_k$
$\sum_{k=10}^{67} c_k = \frac{67(7+c_{66})}{2} - \frac{9(7+c_8)}{2}$
$\sum_{k=10}^{67} c_k = \frac{469+67c_{66}}{2} - \frac{63+9c_8}{2}$
$\sum_{k=10}^{67} c_k = \frac{469+67c_{66}-63-9c_8}{2}$
$\sum_{k=10}^{67} c_k = \frac{403+67c_{66}-9c_8}{2}$.

Ejercicio 24.

(a) *Dada la siguiente sucesión definida por sus primeros términos* s_1*= -1,* s_2*= 4,* s_3*= 9,* s_4*= 14, ..., calcular* $\sum_{j=1}^{t} s_j$.

$\sum_{j=1}^{t} s_j = \frac{t(-1+5+s_{j-1})}{2}$
$\sum_{j=1}^{t} s_j = \frac{t(4+s_{j-1})}{2}$.

(b) *Dar el valor de* $\sum_{j=21}^{100} 2s_j$.

$\sum_{j=21}^{100} s_j = \sum_{j=1}^{100} s_j$ - $\sum_{j=1}^{20} s_j$
$\sum_{j=21}^{100} s_j = \frac{100(4+s_{99})}{2}$ - $\frac{20(4+s_{19})}{2}$
$\sum_{j=21}^{100} s_j = 50\ (4 + s_{99})$ - $10\ (4 + s_{19})$
$\sum_{j=21}^{100} s_j = 200 + 50s_{99}$ - 40 - $10s_{19}$
$\sum_{j=21}^{100} s_j = 160 + 50s_{99}$ - $10s_{19}$.

Ejercicio 25.

Calcular la suma de los 200 primeros números naturales.

$\sum_{i=1}^{200} i= \frac{200(1+200)}{2}$
$\sum_{i=1}^{200} i= 100 * 201$
$\sum_{i=1}^{200} i= 20100.$

Ejercicio 26.

Calcular la suma de los 100 primeros números impares.

$\sum_{i=0}^{99} 2i + 1 = \frac{100(1+199)}{2}$
$\sum_{i=0}^{99} 2i + 1 = 50 * 200$
$\sum_{i=0}^{99} 2i + 1 = 10000.$

Ejercicio 27.

Una pila de troncos tiene 24 troncos en la base, 23 en la segunda hilera, 22 en la tercera, y así siguiendo hasta llegar a la capa superior en la que tiene 10 troncos. Encontrar la cantidad total de troncos en la pila.

$\sum_{i=10}^{24} i = \frac{15(10+24)}{2}$
$\sum_{i=10}^{24} i = \frac{15*34}{2}$
$\sum_{i=10}^{24} i = \frac{510}{2}$
$\sum_{i=10}^{24} i = 255.$

Por lo tanto, la cantidad total de troncos en la pila es 255.

Ejercicio 28.

Sabiendo que la suma de los 10 primeros términos de una sucesión aritmética es 50 y el primer término es -2. Calcular la diferencia de la sucesión.

$\sum_{i=1}^{10} a_i$= 50
$\frac{10(-2+a_{10})}{2}$= 50
5 (-2 + a_{10})= 50
-10 + 5a_{10}= 50
5a_{10}= 50 + 10
5a_{10}= 60
a_{10}= $\frac{60}{5}$
a_{10}= 12.

a_{10}= a_1 + 9d
9d= a_{10} - a_1
9d= 12 - (-2)
9d= 14
d= $\frac{14}{9}$.

Por lo tanto, la diferencia de la sucesión es $\frac{14}{9}$.

Ejercicio 29.

Pablo sumó todos los números enteros positivos de 4 dígitos, pero se salteó uno. La suma de Pablo es igual a 8499 veces el número que se salteó Pablo. Hallar el número que se salteó Pablo.

8499x= $\sum_{i=1000}^{9999} i$ - x
8499x + x= $\sum_{i=1000}^{9999} i$
8500x= $\sum_{i=1000}^{9999} i$
8500x= $\frac{9000(1000+9999)}{2}$
8500x= 4500 * 10999
8500x= 49495500
x= $\frac{49495500}{8500}$
x= 5823.

Por lo tanto, el número que se salteó Pablo es el 5823.

Ejercicio 30.

Un ciclista avanza cuesta abajo a razón de 4 pies el primer segundo. En cada segundo sucesivo, avanza 5 pies más que en el segundo anterior. Si el deportista llega a la parte inferior del cerro en 11 segundos, encontrar la distancia total recorrida.

$\sum_{i=1}^{11} a_i = \frac{11(4+4+10*5)}{2}$
$\sum_{i=1}^{11} a_i = \frac{11(4+4+50)}{2}$
$\sum_{i=1}^{11} a_i = \frac{11*58}{2}$
$\sum_{i=1}^{11} a_i = \frac{638}{2}$
$\sum_{i=1}^{11} a_i = 319.$

Por lo tanto, la distancia total recorrida es 319 pies.

Ejercicio 31.

Si el primero de octubre ahorro 10 centavos, el 2 de octubre ahorro 20, el 3 de octubre ahorro 30 y así sucesivamente.

(a) *¿Cuánto dinero ahorraré el 31 de octubre?*

a_{31}= 10 + 30 * 10
a_{31}= 10 + 300
a_{31}= 310.

Por lo tanto, el 31 de octubre ahorraré 3,10 pesos.

(b) *¿Cuánto dinero ahorraré en todo el mes de octubre?*

$\sum_{i=1}^{31} a_i = \frac{31(10+310)}{2}$
$\sum_{i=1}^{31} a_i = \frac{31*320}{2}$
$\sum_{i=1}^{31} a_i = 31 * 160$
$\sum_{i=1}^{31} a_i = 4960.$

Por lo tanto, ahorraré 49,60 pesos en todo el mes de octubre.

Ejercicio 32.

Calcular las siguientes sumas:

(a) $\sum_{i=1}^{30}(\frac{1}{2})^{i-1}$.

$\sum_{i=1}^{30}(\frac{1}{2})^{i-1}=\frac{(\frac{1}{2})^{1-1}[1-(\frac{1}{2})^{30}]}{1-\frac{1}{2}}$

$\sum_{i=1}^{30}(\frac{1}{2})^{i-1}=\frac{(\frac{1}{2})^{0}[1-(\frac{1}{2})^{30}]}{\frac{1}{2}}$

$\sum_{i=1}^{30}(\frac{1}{2})^{i-1}=\frac{1[1-(\frac{1}{2})^{30}]}{\frac{1}{2}}$

$\sum_{i=1}^{30}(\frac{1}{2})^{i-1}=\frac{1-(\frac{1}{2})^{30}}{\frac{1}{2}}$

$\sum_{i=1}^{30}(\frac{1}{2})^{i-1}=2\ [1-(\frac{1}{2})^{30}]$.

(b) $\sum_{j=1}^{30}(\frac{1}{2})^{j}$.

$\sum_{j=1}^{30}(\frac{1}{2})^{j}=\frac{(\frac{1}{2})^{2-1}[1-(\frac{1}{2})^{30}]}{1-\frac{1}{2}}$

$\sum_{j=1}^{30}(\frac{1}{2})^{j}=\frac{(\frac{1}{2})^{1}[1-(\frac{1}{2})^{30}]}{\frac{1}{2}}$

$\sum_{j=1}^{30}(\frac{1}{2})^{j}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^{30}]}{\frac{1}{2}}$

$\sum_{j=1}^{30}(\frac{1}{2})^{j}=1-(\frac{1}{2})^{30}$.

(c) $\sum_{k=1}^{45}(\frac{1}{2})^{k+1}$.

$\sum_{k=1}^{45}(\frac{1}{2})^{k+1}=\frac{(\frac{1}{2})^{1+1}[1-(\frac{1}{2})^{45}]}{1-\frac{1}{2}}$

$\sum_{k=1}^{45}(\frac{1}{2})^{k+1}=\frac{(\frac{1}{2})^{2}[1-(\frac{1}{2})^{45}]}{\frac{1}{2}}$

$\sum_{k=1}^{45}(\frac{1}{2})^{k+1}=\frac{1}{2}\ [1-(\frac{1}{2})^{45}]$.

(d) $\sum_{t=1}^{h}5*2^{t-1}$.

$\sum_{t=1}^{h}5*2^{t-1}=\frac{5*2^{1}(1-2^{h})}{1-2}$

$\sum_{t=1}^{h} 5 * 2^{t-1} = \frac{5*2(1-2^h)}{-1}$
$\sum_{t=1}^{h} 5 * 2^{t-1} =$ -10 (1 - 2^h).

(e) $\sum_{k=1}^{m} 4(\frac{1}{3})^{k-1}$.

$\sum_{k=1}^{m} 4(\frac{1}{3})^{k-1} = \frac{4*(\frac{1}{3})^{1-1}[1-(\frac{1}{3})^m]}{1-\frac{1}{3}}$
$\sum_{k=1}^{m} 4(\frac{1}{3})^{k-1} = \frac{4*(\frac{1}{3})^{0}[1-(\frac{1}{3})^m]}{\frac{2}{3}}$
$\sum_{k=1}^{m} 4(\frac{1}{3})^{k-1} = \frac{4*1[1-(\frac{1}{3})^m]}{\frac{2}{3}}$
$\sum_{k=1}^{m} 4(\frac{1}{3})^{k-1} = \frac{4[1-(\frac{1}{3})^m]}{\frac{2}{3}}$
$\sum_{k=1}^{m} 4(\frac{1}{3})^{k-1} =$ 6 [1 - $(\frac{1}{3})^m$].

(f) $\sum_{t=1}^{h} 2 * 8^{t}$.

$\sum_{t=1}^{h} 2 * 8^{t} = \frac{2*8^1(1-8^h)}{1-8}$
$\sum_{t=1}^{h} 2 * 8^{t} = \frac{2*8(1-8^h)}{-7}$
$\sum_{t=1}^{h} 2 * 8^{t} = \frac{16(1-8^h)}{-7}$
$\sum_{t=1}^{h} 2 * 8^{t} = \frac{-16}{7}$ (1 - 8^h).

(g) $\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1}$.

$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} = \frac{5*2^{8-1}(1-2^{73})}{1-2}$
$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} = \frac{5*2^{7}(1-2^{73})}{-1}$
$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} =$ -5 * 2^7 (1 - 2^{73})
$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} =$ -5 * 2^7 + 5 * 2^{80}
$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} =$ -5 (2^7 - 2^{80}).

(h) $\sum_{j=14}^{94} 8^{j}$.

$\sum_{j=14}^{94} 8^{j} = \frac{8^{14}(1-8^{81})}{1-8}$
$\sum_{j=14}^{94} 8^{j} = \frac{8^{14}(1-8^{81})}{-7}$

$\sum_{j=14}^{94} 8^j = \frac{-8^{14}}{7} (1 - 8^{81})$

$\sum_{j=14}^{94} 8^j = \frac{-8^{14}}{7} + \frac{8^{95}}{7}$

$\sum_{j=14}^{94} 8^j = \frac{-1}{7} (8^{14} - 8^{95})$.

Ejercicio 33.

Una pelota de ping pong se lanza desde una altura de 16 mts. En cada rebote, se eleva verticalmente $\frac{1}{4}$ de la altura alcanzada en la caída previa.

(a) *¿A qué altura se elevará en el séptimo rebote?*

$a_7 = 16\ (\frac{1}{4})^6$
$a_7 = 16\ \frac{1}{4096}$
$a_7 = \frac{1}{256}$.

Por lo tanto, a la altura que se elevará en el séptimo rebote es $\frac{1}{256}$ mts.

(b) *¿Cuál es la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo?*

$\sum_{i=1}^{7} a_n = \frac{16[1-(\frac{1}{4})^7]}{1-\frac{1}{4}}$
$\sum_{i=1}^{7} a_n = \frac{16(1-\frac{1}{16384})}{\frac{3}{4}}$
$\sum_{i=1}^{7} a_n = \frac{16\frac{16383}{16384}}{\frac{3}{4}}$
$\sum_{i=1}^{7} a_n = \frac{16\frac{16383}{16384}}{\frac{3}{4}}$
$\sum_{i=1}^{7} a_n = \frac{64}{3}$
$\sum_{i=1}^{7} a_n = 21,\hat{3}$.

Por lo tanto, la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo es $21,\hat{3}$ mts.

Ejercicio 34.

Un mendigo le propuso a un avaro: "… durante este mes, le daré a usted un peso el primer día, dos pesos el segundo día, 3 el tercero y así sucesivamente. A cambio, usted sólo me dará 0,01 pesos el primer día, 0,02 pesos el segundo día, 0,04 pesos el tercero, 0,08 pesos el cuarto y así sucesivamente. El avaro aceptó entusiasmado y convinieron en realizar el pago a fin de mes. ¿Cuánto le deberá cada uno al otro al cabo de ese tiempo?

$\sum_{i=1}^{30} m_n = \frac{30(1+1+29*1)}{2}$
$\sum_{i=1}^{30} m_n = 15\ (1 + 1 + 29)$
$\sum_{i=1}^{30} m_n = 15 * 31$
$\sum_{i=1}^{30} m_n = 465.$

$\sum_{i=1}^{30} a_n = \frac{30(0{,}01+0{,}01+29*0{,}01)}{2}$
$\sum_{i=1}^{30} a_n = 15\ (0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}29)$
$\sum_{i=1}^{30} a_n = 15 * 0{,}31$
$\sum_{i=1}^{30} a_n = 4{,}65.$

Por lo tanto, al cabo de ese tiempo, el mendigo le deberá al avaro 465 pesos, mientras que el avaro le deberá al mendigo 4,65 pesos.

Ejercicio 35.

Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, el valor de verdad de P (1), P (2), P (3) y establecer si los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad:

(a) *P (n): 2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)=* $2n^2$*.*

P (n): $\sum_{i=1}^{n} 4i - 2 = 2n^2$.

P (1): $\sum_{i=1}^{1} 4i - 2 = 2 * 1^2$
P (1): 4 * 1 - 2= 2 * 1
P (1): 4 - 2= 2
P (1): 2= 2.

P (2): $\sum_{i=1}^{2} 4i - 2 = 2 * 2^2$
P (2): 4 * 1 - 2 + 4 * 2 - 2= 2 * 4
P (2): 4 - 2 + 8 - 2= 8
P (2): 8= 8.

P (3): $\sum_{i=1}^{3} 4i - 2 = 2 * 3^2$
P (3): 4 * 1 - 2 + 4 * 2 - 2 + 4 * 3 - 2= 2 * 9
P (3): 4 - 2 + 8 - 2 + 12 - 2= 18
P (3): 18= 18.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

(b) *P (n): 4 + 8 + 12 + ... + 4n= 2n (n - 1).*

P (n): $\sum_{i=1}^{n} 4i$= 2n (n + 1).

P (1): $\sum_{i=1}^{1} 4i$= 2 * 1 (1 + 1)
P (1): 4 * 1= 2 * 1 * 2
P (1): 4= 4.

P (2): $\sum_{i=1}^{2} 4i$= 2 * 2 (2 + 1)
P (2): 4 * 1 + 4 * 2= 2 * 2 * 3
P (2): 4 + 8= 12
P (2): 12= 12.

P (3): $\sum_{i=1}^{3} 4i$= 2 * 3 (3 + 1)
P (3): 4 * 1 + 4 * 2 + 4 * 3= 2 * 3 * 4
P (3): 4 + 8 + 12= 24
P (3): 24= 24.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

(c) *P (n):* $a^5 a^n = a^{5+n}$.

P (n): $a^{5+n} = a^{5+n}$.

P (1): $a^{5+1} = a^{5+1}$
P (1): $a^6 = a^6$.

P (2): $a^{5+2} = a^{5+2}$
P (2): $a^7 = a^7$.

P (3): $a^{5+3} = a^{5+3}$
P (3): $a^8 = a^8$.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

(d) *P (n):* 9^n *- 1 es divisible por 4.*

P (n): (9^n - 1) mod 4= 0.

P (1): (9^1 - 1) mod 4= 0
P (1): (9 - 1) mod 4= 0
P (1): 8 mod 4= 0
P (1): 0= 0.

P (2): (9^2 - 1) mod 4= 0
P (2): (81 - 1) mod 4= 0
P (2): 80 mod 4= 0
P (2): 0= 0.

P (3): (9^3 - 1) mod 4= 0
P (3): (729 - 1) mod 4= 0
P (3): 728 mod 4= 0
P (3): 0= 0.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

(e) *P (n):* 4^n *- 1 es divisible por 3.*

P (n): (4^n - 1) mod 3= 0.

P (1): (4^1 - 1) mod 3= 0
P (1): (4 - 1) mod 3= 0
P (1): 3 mod 3= 0
P (1): 0= 0.

P (2): (4^2 - 1) mod 3= 0
P (2): (16 - 1) mod 3= 0
P (2): 15 mod 3= 0
P (2): 0= 0.

P (3): (4^3 - 1) mod 3= 0
P (3): (64 - 1) mod 3= 0
P (3): 63 mod 3= 0
P (3): 0= 0.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

Ejercicio 36.

Dar dos ejemplos de funciones proposicionales que sean teoremas sobre los números naturales.

Ejemplo 1 (Teorema de la suma de los primeros n números naturales):

"Para todo número natural n, la suma de los primeros n números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$".

Formalmente, se puede representar como una función proposicional:

P (n): 1 + 2 + 3 + … + n= $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ejemplo 2 (Teorema del producto de los primeros n números naturales):

"Para todo número natural n, el producto de los primeros n números naturales es igual a n factorial (n!)".

Formalmente, se puede representar como una función proposicional:

Q (n): 1 * 2 * 3 * … * n= n!.

Ejercicio 37.

Dar dos ejemplos de funciones proposicionales que no sean teoremas.

Ejemplo 1:

P (n): "n es un número primo".

Ejemplo 2:

Q (n): n^2 + 2n + 1= 0.

Ejercicio 38.

Utilizando el principio de inducción matemática, demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) *2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n= n (n + 1), para todo n, n natural.*

P (n): $\sum_{i=1}^{n} 2i$= n (n + 1), ∀ n ∈ ℕ.

P (1): $\sum_{i=1}^{1} 2i$= 1 (1 + 1)
P (1): 2 * 1= 1 * 2
P (1): 2= 2.

P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} 2i$= $\sum_{i=1}^{n} 2i$ + 2 (n + 1)
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} 2i$= n (n + 1) + 2 (n + 1)
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} 2i$= (n + 1) (n + 2)
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} 2i$= (n + 1) [(n + 1) + 1].

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(b) $\sum_{h=1}^{n} 3h$= $\frac{3}{2}$ *n (n + 1), para todo n, n natural.*

P (n): $\sum_{h=1}^{n} 3h$= $\frac{3}{2}$ n (n + 1), ∀ n ∈ ℕ.

P (1): $\sum_{h=1}^{1} 3h$= $\frac{3}{2}$ * 1 (1 + 1)
P (1): 3 * 1= $\frac{3}{2}$ * 1 * 2
P (1): 3= 3.

P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 3h$= $\sum_{h=1}^{n} 3h$ + 3 (n + 1)
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 3h$= $\frac{3}{2}$ n (n + 1) + 3 (n + 1)
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 3h$= $\frac{3}{2}$ (n + 1) (n + 2)
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 3h$= $\frac{3}{2}$ (n + 1) [(n + 1) + 1].

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*, para todo n, n natural.*

P (n): $\sum_{i=1}^{n} i^2$= $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ∀ n ∈ ℕ.

P (1): $\sum_{i=1}^{1} i^2$= $\frac{1(1+1)(2*1+1)}{6}$

P (1): $1^2 = \frac{1*2(2+1)}{6}$
P (1): 1= $\frac{1*2*3}{6}$
P (1): 1= $\frac{6}{6}$
P (1): 1= 1.

P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6]}{6}$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6]}{6}$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)[2(n+1)+1]}{6}$.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(d) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$*, para todo n, n natural.*

P (n): $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$.

P (1): $\sum_{j=1}^{1} j^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$
P (1): $1^3 = \frac{1*2^2}{4}$
P (1): 1= $\frac{1*4}{4}$
P (1): 1= $\frac{4}{4}$
P (1): 1= 1.

P (n + 1): $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n+1)^3$
P (n + 1): $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$
P (n + 1): $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$
P (n + 1): $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}$
P (n + 1): $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$
P (n + 1): $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$
P (n + 1): $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(e) *2n + 1 < 5n, para todo n, n natural.*

P (n): 2n + 1 < 5n, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$.

P (1): 2 * 1 + 1 < 5 * 1
P (1): 2 + 1 < 5
P (1): 3 < 5.

P (n + 1): 2 (n + 1) + 1= 2n + 2 + 1
P (n + 1): 2 (n + 1) + 1= 2n + 1 + 2
P (n + 1): 2 (n + 1) + 1 < 5n + 5
P (n + 1): 2 (n + 1) + 1 < 5 (n + 1).

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(f) 9^n *- 1 es divisible por 4, para todo n natural.*

P (n): (9^n - 1) mod 4= 0, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$.

P (1): (9^1 - 1) mod 4= 0
P (1): (9 - 1) mod 4= 0
P (1): 8 mod 4= 0
P (1): 0= 0.

P (n + 1): (9^{n+1} - 1) mod 4= 0
P (n + 1): (9^n * 9 - 1) mod 4= 0
P (n + 1): [(9^n - 1) * 9 + 8] mod 4= 0
P (n + 1): 0= 0.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(g) 7^n *- 1 es divisible por 6, para todo n natural.*

P (n): (7^n - 1) mod 6= 0, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$.

P (1): (7^1 - 1) mod 6= 0
P (1): (7 - 1) mod 6= 0
P (1): 6 mod 6= 0
P (1): 0= 0.

P (n + 1): (7^{n+1} - 1) mod 6= 0
P (n + 1): (7^n * 7 - 1) mod 6= 0
P (n + 1): [(7^n - 1) * 7 + 6] mod 6= 0
P (n + 1): 0= 0.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(h) $\sum_{h=1}^{n} h * h!$= *(n + 1)! - 1, para todo n, n natural.*

P (n): $\sum_{h=1}^{n} h * h!$= (n + 1)! - 1, ∀ n ∈ ℕ.

P (1): $\sum_{h=1}^{1} h * h!$= (1 + 1)! - 1
P (1): 1 * 1!= 2! - 1
P (1): 1 * 1= 2 - 1
P (1): 1= 1.

P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} h * h!$= $\sum_{h=1}^{n} h * h!$ + (n + 1) (n + 1)!
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} h * h!$= (n + 1)! - 1 + (n + 1) (n + 1)!
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} h * h!$= (n + 1)! (n + 1 + 1) - 1
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} h * h!$= (n + 1 + 1)! - 1.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(i) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$= $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$*, para todo n, n natural.*

P (n): $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$= $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, ∀ n ∈ ℕ.

P (1): $\sum_{i=1}^{1} i(i+1)$= $\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$
P (1): 1 (1 + 1)= $\frac{1*2*3}{3}$
P (1): 1 * 2= $\frac{6}{3}$
P (1): 2= 2.

P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)$= $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$ + (n + 1) (n + 1 + 1)
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)$= $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ + (n + 1) (n + 2)
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)$= $\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)$= $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$
P (n + 1): $\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)$= $\frac{(n+1)[(n+1)+1][(n+1)+2]}{3}$.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(j) $\sum_{h=1}^{n} 8 * 3^{h-1}$= *4 (*$3^n$ *- 1), para todo n, n natural.*

P (n): $\sum_{h=1}^{n} 8 * 3^{h-1}$= 4 ($3^n$ - 1), ∀ n ∈ ℕ.

P (1): $\sum_{h=1}^{1} 8 * 3^{h-1}$= 4 ($3^1$ - 1)
P (1): 8 * 3^{1-1}= 4 (3 - 1)
P (1): 8 * 3^0= 4 * 2
P (1): 8 * 1= 8
P (1): 8= 8.

P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1}$= $\sum_{h=1}^{n} 8 * 3^{h-1}$ + 8 * 3^{n+1-1}
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1}$= 4 ($3^n$ - 1) + 8 * 3^n
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1}$= 4 * 3^n - 4 + 8 * 3^n
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1}$= 12 * 3^n - 4
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1}$= 4 * 3 * 3^n - 4
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1}$= 4 * 3^{n+1} - 4
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1}$= 4 ($3^{n+1}$ - 1).

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(k) $\sum_{h=1}^{n} 6h - 5$= *n (3n - 2), para todo n, n natural.*

P (n): $\sum_{h=1}^{n} 6h - 5$= n (3n - 2), ∀ n ∈ ℕ.

P (1): $\sum_{h=1}^{1} 6h - 5$= 1 (3 * 1 - 2)
P (1): 6 * 1 - 5= 1 (3 - 2)
P (1): 6 - 5= 1 * 1
P (1): 1= 1.

P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5$= $\sum_{h=1}^{n} 6h - 5$ + 6 (n + 1) - 5
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5$= n (3n - 2) + 6n + 6 - 5
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5$= $3n^2$ - 2n + 6n + 1
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5$= $3n^2$ + 4n + 1
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5$= (n + 1) (3n + 1)
P (n + 1): $\sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5$= (n + 1) [3 (n + 1) - 2].

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

Ejercicio 39.

Evaluar sin realizar la suma (no dejar de relacionarlo con el Ejercicio 38).

(a) $\sum_{h=10}^{34} 3h$.

$\sum_{h=10}^{34} 3h= \sum_{h=1}^{34} 3h - \sum_{h=1}^{9} 3h$
$\sum_{h=10}^{34} 3h= \frac{3}{2} * 34 (34 + 1) - \frac{3}{2} * 9 (9 + 1)$
$\sum_{h=10}^{34} 3h= 3 * 17 * 35 - \frac{3}{2} * 9 * 10$
$\sum_{h=10}^{34} 3h= 1785 - 135$
$\sum_{h=10}^{34} 3h= 1650$.

(b) $\sum_{i=7}^{50} i^2$.

$\sum_{i=7}^{50} i^2= \sum_{i=1}^{50} i^2 - \sum_{i=1}^{6} i^2$
$\sum_{i=7}^{50} i^2= \frac{50(50+1)(2*50+1)}{6} - \frac{6(6+1)(2*6+1)}{6}$
$\sum_{i=7}^{50} i^2= \frac{50*51(100+1)}{6} - \frac{6*7(12+1)}{6}$
$\sum_{i=7}^{50} i^2= \frac{50*51*101}{6} - \frac{6*7*13}{2}$
$\sum_{i=7}^{50} i^2= \frac{257550}{6} - 7 * 13$
$\sum_{i=7}^{50} i^2= 42925 - 91$
$\sum_{i=7}^{50} i^2= 42834$.

(c) $\sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1}$.

$\sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1}= \sum_{h=1}^{45} 8 * 3^{h-1} - \sum_{h=1}^{18} 8 * 3^{h-1}$
$\sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1}= 4 (3^{45} - 1) - 4 (3^{18} - 1)$
$\sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1}= 4 * 3^{45} - 4 - 4 * 3^{18} + 4$
$\sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1}= 4 * 3^{45} - 4 * 3^{18}$
$\sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1}= 4 (3^{45} - 3^{18})$.

(d) $\sum_{h=4}^{20} 12h - 10$.

$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10= \sum_{h=4}^{20} 2(6h - 5)$
$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10= 2 \sum_{h=4}^{20} 6h - 5$
$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10= 2 (\sum_{h=1}^{20} 6h - 5 - \sum_{h=1}^{3} 6h - 5)$
$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10= 2 [20 (3 * 20 - 2) - 3 (3 * 3 - 2)]$
$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10= 2 [20 (60 - 2) - 3 (9 - 2)]$
$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10= 2 (20 * 58 - 3 * 7)$

$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10$= 2 (1160 - 21)
$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10$= 2 * 1139
$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10$= 2278.

(e) $\sum_{j=21}^{35} 4j^3$.

$\sum_{j=21}^{35} 4j^3$= 4 $\sum_{j=21}^{35} j^3$
$\sum_{j=21}^{35} 4j^3$= 4 ($\sum_{j=1}^{35} j^3$ - $\sum_{j=1}^{20} j^3$)
$\sum_{j=21}^{35} 4j^3$= 4 [$\frac{35^2(35+1)^2}{4}$ - $\frac{20^2(20+1)^2}{4}$]
$\sum_{j=21}^{35} 4j^3$= 4 ($\frac{35^2 36^2}{4}$ - $\frac{20^2 21^2}{4}$)
$\sum_{j=21}^{35} 4j^3$= 4 ($\frac{1225*1226}{4}$ - $\frac{400*441}{4}$)
$\sum_{j=21}^{35} 4j^3$= 4 ($\frac{1501850}{4}$ - $\frac{176400}{4}$)
$\sum_{j=21}^{35} 4j^3$= 4 $\frac{1325450}{4}$
$\sum_{j=21}^{35} 4j^3$= 1325450.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5:
Combinatoria y Métodos de Conteo.

Ejercicio 1.

Un hombre tiene ocho camisas, cuatro pantalones y cinco pares de zapatos. ¿Cuántas combinaciones de ropa puede hacer?

R= 8 * 4 * 5
R= 160.

Por lo tanto, puede hacer 160 combinaciones de ropa.

Ejercicio 2.

¿Cuántas patentes de auto diferentes pueden construirse?

R= $26^3 10^3$
R= 17576000.

Por lo tanto, pueden construirse 17.576.000 patentes de auto diferentes.

Ejercicio 3.

(a) *¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 1100?*

R= $1^4 2^4$
R= 1 * 16
R= 16.

Por lo tanto, 16 cadenas de ocho bits comienzan con 1100.

(b) *¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen el segundo o el cuarto bit igual a 1?*

R= 2 * 1 * 2 * 1 * 2^4 + 2 * 1 * 2 * 1 * 2^4
R= 2 * 1 * 2 * 1 * 16 + 2 * 1 * 2 * 1 * 16
R= 64 + 64
R= 128.

Por lo tanto, 128 cadenas de ocho bits tienen el segundo o el cuarto bit igual a 1.

(c) *¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen, exactamente, un 1?*

R= 8 * 1 * 1^7
R= 8 * 1 * 1
R= 8.

Por lo tanto, 8 cadenas de ocho bits tienen, exactamente, un 1.

(d) *¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen, al menos, un 1?*

R= 2^8 - 1^8
R= 256 - 1
R= 255.

Por lo tanto, 255 cadenas de ocho bits tienen, al menos, un 1.

(e) *¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen, exactamente, dos 1?*

R= 7 * $1^2 1^6$ + 6 * $1^2 1^6$ + 5 * $1^2 1^6$ + 4 * $1^2 1^6$ + 3 * $1^2 1^6$ + 2 * $1^2 1^6$ + 1 * $1^2 1^6$
R= 7 * 1 * 1 + 6 * 1 * 1 + 5 * 1 * 1 + 4 * 1 * 1 + 3 * 1 * 1 + 2 * 1 * 1 + 1 * 1 * 1
R= 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
R= 28.

Por lo tanto, 28 cadenas de ocho bits tienen, exactamente, dos 1.

(f) *¿Cuántas cadenas de ocho bits se leen igual en ambas direcciones?*

R= $1^4 2^4$
R= 1 * 16
R= 16.

Por lo tanto, 16 cadenas de ocho bits se leen igual en ambas direcciones.

Ejercicio 4.

Las letras A B C D E se utilizan para formar cadenas de longitud 3.

(a) *¿Cuál es el número total de cadenas?*

R= 5^3
R= 125.

Por lo tanto, el número total de cadenas es 125.

(b) *¿Cuántas cadenas hay sin letras repetidas?*

R= 5 * 4 * 3
R= 60.

Por lo tanto, hay 60 cadenas sin letras repetidas.

(c) *¿Cuántas cadenas comienzan con A?*

R= 1 * 5^2
R= 1 * 25
R= 25.

Por lo tanto, 25 cadenas comienzan con A.

(d) *¿Cuántas cadenas comienzan con A y no tienen letras repetidas?*

R= 1 * 4 * 3
R= 12.

Por lo tanto, 12 cadenas comienzan con A y no tienen letras repetidas.

(e) *¿Cuántas cadenas comienzan con B o con D?*

R= 1 * 5^2 + 1 * 5^2
R= 1 * 25 + 1 * 25
R= 25 + 25
R= 50.

Por lo tanto, 50 cadenas comienzan con B o con D.

(f) *¿Cuántas cadenas comienzan con B o terminan con D?*

R= 1 * 5 * 4 + 4 * 5 * 1
R= 20 + 20
R= 40.

Por lo tanto, 40 cadenas comienzan con B o terminan con D.

Ejercicio 5.

(a) *¿Cuántos enteros entre el 0 y el 200 inclusive son divisibles por 5?*

R= $1 + \frac{200}{5}$
R= 1 + 40
R= 41.

Por lo tanto, 41 enteros entre el 0 y el 200 inclusive son divisibles por 5.

(b) *¿Cuántos enteros de 3 cifras tienen dígitos distintos?*

R= 9 * 9 * 8
R= 648.

Por lo tanto, 648 enteros de 3 cifras tienen dígitos distintos.

(c) *¿Cuántos enteros de 3 cifras contienen el dígito 7?*

R= $1 * 10^2$ + 9 * 1 * 10 + 9 * 10 * 1 - 10 - 10 - 9 + 1
R= 1 * 100 + 90 + 90 - 10 - 10 - 9 + 1
R= 100 + 90 + 90 - 10 - 10 - 9 + 1
R= 252.

R= $1 * 10^2$ + 8 * 1 * 10 + 8 * 10 * 1 - 8
R= 1 * 100 + 80 + 80 - 8
R= 100 + 80 + 80 - 8
R= 252.

R= $1 * 10^2$ + 8 * 1 * 10 + 8 * 9 * 1
R= 1 * 100 + 80 + 72
R= 100 + 80 + 72
R= 252.

Por lo tanto, 252 enteros de 3 cifras contienen el dígito 7.

(d) *¿Cuántos enteros de 3 cifras no contienen al dígito 0?*

R= 9^3
R= 729.

Por lo tanto, 729 enteros de 3 cifras no contienen al dígito 0.

Ejercicio 6.

Con referencia al ejemplo 2.2, ¿de cuántas maneras pueden ocuparse los cargos si Berta es presidente o Carlos tiene un puesto? (Recordar: se considera el "o inclusivo", es decir, que pueden ocurrir las dos cosas).

R= 1 * 5 * 4 + 1 * 5 * 4 + 5 * 1 * 4 + 5 * 4 * 1 - 4 - 4
R= 20 + 20 + 20 + 20 - 4 - 4
R= 72.

R= 1 * 5 * 4 + 1 * 5 * 4 + 4 * 1 * 4 + 4 * 4 * 1
R= 20 + 20 + 16 + 16
R= 72.

Por lo tanto, si Berta es presidente o Carlos tiene un puesto, pueden ocuparse los cargos de 72 maneras.

Ejercicio 7.

Dados los conjuntos A= {a, b, c, d} y B= {x, y, z, w, t, r, h}, ¿cuántas funciones inyectivas hay con dominio A y codominio B?

R= 7 * 6 * 5 * 4
R= 840.

Por lo tanto, hay 840 funciones inyectivas con dominio A y codominio B.

Ejercicio 8.

(a) *¿Cuántos códigos de cuatro letras se pueden formar con las letras P, D, Q, X sin repeticiones?*

R= 4!
R= 24.

Por lo tanto, se pueden formar 24 códigos de cuatro letras con las letras P, D, Q, X sin repeticiones.

(b) *¿Cuántos números diferentes pueden formarse utilizando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 sin repetirlos?*

R= 5!
R= 120.

Por lo tanto, pueden formarse 120 números diferentes utilizando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 sin repetirlos.

(c) *¿De cuántas maneras pueden estacionar 6 bicicletas en una hilera?*

R= 6!
R= 720.

Por lo tanto, se pueden estacionar de 720 maneras 6 bicicletas en una hilera.

Ejercicio 9.

(a) *¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF? (nos referimos a las permutaciones de las letras dadas que tienen a las letras D, E y F juntas y en ese orden).*

R= 4!
R= 24.

Por lo tanto, 24 permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF.

(b) *¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen las letras D, E y F juntas en cualquier orden?*

R= 4! 3!
R= 24 * 6
R= 144.

Por lo tanto, 144 permutaciones de las letras ABCDEF contienen las letras DEF juntas en cualquier orden.

Ejercicio 10.

¿De cuántas formas pueden sentarse seis personas en torno de una mesa circular? Aclaración: Las formas de sentarse obtenidas mediante rotaciones se consideran idénticas.

R= (6 - 1)!
R= 5!
R= 120.

Por lo tanto, pueden sentarse de 120 formas seis personas en torno de una mesa circular.

Ejercicio 11.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MESA? ¿Y las de la palabra SOL?

R= 4!
R= 24.

R= 3!
R= 6.

Por lo tanto, las letras de la palabra MESA y las de la palabra SOL pueden ordenarse de 24 y 6 maneras, respectivamente.

Ejercicio 12.

¿De cuántas maneras pueden izarse en un mástil 7 banderas entre las que hay 3 rojas, 2 verdes y 2 amarillas? (las del mismo color son idénticas).

R= $\frac{7!}{3!2!2!}$
R= $\frac{5040}{6*2*2}$
R= $\frac{5040}{24}$
R= 210.

Por lo tanto, pueden izarse de 210 maneras en un mástil 7 banderas entre las que hay 3 rojas, 2 verdes y 2 amarillas.

Ejercicio 13.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA?

R= $\frac{10!}{2!3!2!}$
R= $\frac{3628800}{2*6*2}$
R= $\frac{3628800}{24}$
R= 151200.

Por lo tanto, las letras de la palabra MATEMATICA pueden ordenarse de 151.200 maneras.

Ejercicio 14.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 5 libros iguales de matemática, 3 libros iguales de computación y 2 libros iguales de física?

R= $\frac{10!}{5!3!2!}$
R= $\frac{3628800}{120*6*2}$
R= $\frac{3628800}{1440}$
R= 2520.

Por lo tanto, en un estante, 5 libros iguales de matemática, 3 libros iguales de computación y 2 libros iguales de física pueden ordenarse de 2.520 maneras.

Ejercicio 15.

(a) *¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 libros distintos de física?*

R= 10!
R= 3628800.

Por lo tanto, en un estante, 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 libros distintos de física pueden ordenarse de 3.628.800 maneras.

(b) *¿De cuántas maneras puede hacerse si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?*

R= 3! 5! 3! 2!
R= 6 * 120 * 6 * 2
R= 8640.

Por lo tanto, en un estante, 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 libros distintos de física, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí, pueden ordenarse de 8.640 maneras.

(c) *¿De cuántas maneras puede hacerse si sólo los de matemática deben estar juntos entre sí?*

R= 2! 5! 5!
R= 2 * 120 * 120
R= 28800.

Por lo tanto, en un estante, 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 libros distintos de física, si sólo los de matemática deben estar juntos entre sí, pueden ordenarse de 28.800 maneras.

Ejercicio 16.

(a) *¿Cuántas permutaciones existen de 11 objetos distintos?*

P (11, 11)= $\frac{11!}{(11-11)!}$
P (11, 11)= $\frac{39916800}{0!}$
P (11, 11)= $\frac{39916800}{1}$
P (11, 11)= 39916800.

Por lo tanto, existen 39.916.800 permutaciones de 11 objetos distintos.

(b) *¿Cuántas 5-permutaciones existen de 11 objetos distintos?*

P (11, 5)= $\frac{11!}{(11-5)!}$
P (11, 5)= $\frac{11*10*9*8*7*6!}{6!}$
P (11, 5)= 11 * 10 * 9 * 8 * 7
P (11, 5)= 55440.

Por lo tanto, existen 55.440 5-permutaciones de 11 objetos distintos.

Ejercicio 17.

Calcular:

(a) *P (10, 4).*

P (10, 4)= $\frac{10!}{(10-4)!}$
P (10, 4)= $\frac{10*9*8*7*6!}{6!}$
P (10, 4)= 10 * 9 * 8 * 7
P (10, 4)= 5040.

(b) *P (4, 4).*

P (4, 4)= $\frac{4!}{(4-4)!}$
P (4, 4)= $\frac{24}{0!}$
P (4, 4)= $\frac{24}{1}$
P (4, 4)= 24.

(c) *P (n, n-1).*

P (n, n-1)= $\frac{n!}{[n-(n-1)]!}$
P (n, n-1)= $\frac{n!}{(n-n+1)!}$
P (n, n-1)= $\frac{n!}{1!}$
P (n, n-1)= $\frac{n!}{1}$
P (n, n-1)= n!.

(d) *P (n, n-2).*

P (n, n-2)= $\frac{n!}{[n-(n-2)]!}$
P (n, n-2)= $\frac{n!}{(n-n+2)!}$
P (n, n-2)= $\frac{n!}{2!}$
P (n, n-2)= $\frac{n!}{2}$.

Ejercicio 18.

Hallar el valor de n tal que:

(a) *P (n, 5)= 7 P (n, 4).*

P (n, 5)= 7 P (n, 4)

$\frac{n!}{(n-5)!}= 7 \frac{n!}{(n-4)!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}= 7 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$

n (n - 1) (n - 2) (n - 3) (n - 4)= 7 n (n - 1) (n - 2) (n - 3)

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}= 7$

n - 4= 7

n= 7 + 4

n= 11.

(b) *P (n, 5)= 9 P (n-1, 4).*

P (n, 5)= 9 P (n-1, 4)

$\frac{n!}{(n-5)!}= 9 \frac{(n-1)!}{[(n-1)-4)]!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}= 9 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}$

n (n - 1) (n - 2) (n - 3) (n - 4)= 9 (n - 1) (n - 2) (n - 3) (n - 4)

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}= 9$

n= 9.

Ejercicio 19.

(a) *¿Cuántos códigos de 7 letras diferentes pueden formarse con las letras del conjunto {A, B, C, D, E, F, G}?*

P (7, 7)= $\frac{7!}{(7-7)!}$
P (7, 7)= $\frac{5040}{0!}$
P (7, 7)= $\frac{5040}{1}$
P (7, 7)= 5040.

Por lo tanto, pueden formarse 5.040 códigos de 7 letras diferentes con las letras del conjunto {A, B, C, D, E, F, G}.

(b) *¿Cuántos de 5 letras diferentes?*

P (7, 5)= $\frac{7!}{(7-5)!}$
P (7, 5)= $\frac{5040}{2!}$
P (7, 5)= $\frac{5040}{2}$
P (7, 5)= 2520.

Por lo tanto, pueden formarse 2.520 códigos de 5 letras diferentes con las letras del conjunto {A, B, C, D, E, F, G}.

(c) *¿Cuántos de hasta tres letras diferentes?*

R= P (7, 1) + P (7, 2) + P (7, 3)
R= $\frac{7!}{(7-1)!} + \frac{7!}{(7-2)!} + \frac{7!}{(7-3)!}$
R= $\frac{7*6!}{6!} + \frac{7*6*5!}{5!} + \frac{7*6*5*4!}{4!}$
R= 7 + 7 * 6 + 7 * 6 * 5
R= 7 + 42 + 210
R= 259.

Ejercicio 20.

Interpretar la fórmula C (n, r)= $\frac{P(n,r)}{r!}$= $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ *para el caso r= 0.*

C (n, 0)= $\frac{P(n,0)}{0!}$
C (n, 0)= $\frac{n!}{(n-0)!0!}$
C (n, 0)= $\frac{n!}{n!*1}$
C (n, 0)= 1.

Por lo tanto, para el caso r= 0, la fórmula C (n, r) se interpreta como que hay una única combinación posible al seleccionar cero elementos de un conjunto de n elementos, la cual es la combinación vacía.

Ejercicio 21.

Calcular:

(a) $\binom{7}{4}$.

C (7, 4)= $\frac{7!}{(7-4)!4!}$
C (7, 4)= $\frac{7*6*5*4!}{3!4!}$
C (7, 4)= $\frac{7*6*5}{6}$
C (7, 4)= 7 * 5
C (7, 4)= 35.

(b) $\binom{10}{8}$.

C (10, 8)= $\frac{10!}{(10-8)!8!}$
C (10, 8)= $\frac{10*9*8!}{2!8!}$
C (10, 8)= $\frac{10*9}{2}$
C (10, 8)= 5 * 9
C (10, 8)= 45.

(c) $\binom{n}{1}$.

C (n, 1)= $\frac{n!}{(n-1)!1!}$
C (n, 1)= $\frac{n(n-1)!}{(n-1)!*1}$
C (n, 1)= $\frac{n}{1}$
C (n, 1)= n.

(d) $\binom{n}{n-1}$.

C (n, n-1)= $\frac{n!}{[n-(n-1)]!(n-1)!}$
C (n, n-1)= $\frac{n(n-1)!}{(n-n+1)!(n-1)!}$
C (n, n-1)= $\frac{n!}{1!}$
C (n, n-1)= $\frac{n!}{1}$
C (n, n-1)= n!.

(e) $\binom{n}{n}$.

C (n, n)= $\frac{n!}{(n-n)!n!}$
C (n, n)= $\frac{1}{0!*1}$
C (n, n)= $\frac{1}{1*1}$
C (n, n)= $\frac{1}{1}$
C (n, n)= 1.

Ejercicio 22.

Demostrar que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ *cualesquiera sean n y r ≤ n.*

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

C (n, r)= C (n, n-r)

$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!}$

$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!}$

$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!}$

$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Ejercicio 23.

Hallar el valor de n:

(a) $\binom{n+1}{3}= 2\binom{n}{2}$.

$\binom{n+1}{3}= 2\binom{n}{2}$

C (n+1, 3)= 2 C (n, 2)

$\frac{(n+1)!}{[(n+1)-3]!3!}= 2\,\frac{n!}{(n-2)!2!}$

$\frac{(n+1)!}{(n+1-3)!3!}= 2\,\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!*2}$

$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!*6}$= n (n - 1)

$\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$= n (n - 1)

$\frac{(n+1)n(n-1)}{n(n-1)}$= 6

n + 1= 6

n= 6 - 1

n= 5.

(b) $\binom{n}{n-2}= 6$.

$\binom{n}{n-2}$= 6

C (n, n-2)= 6

$\frac{n!}{[n-(n-2)]!(n-2)!}$= 6

$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-n+2)!(n-2)!}$= 6

$\frac{n(n-1)}{2}$= 6

n (n - 1)= 6 * 2

n^2 - n= 12

n^2 - n - 12= 0.

$n_1, n_2= \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4*1(-12)}}{2*1}$

$n_1, n_2= \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}$

$n_1, n_2= \frac{1\pm\sqrt{49}}{2}$

$n_1, n_2= \frac{1\pm 7}{2}$

$n_1= \frac{1+7}{2}= \frac{8}{2}= 4$.

$n_2= \frac{1-7}{2}= \frac{-6}{2}= -3$.

(c) $\binom{n}{3}= \binom{n-1}{1}\binom{n}{1}$.

$\binom{n}{3}= \binom{n-1}{1} \binom{n}{1}$

C (n, 3)= C (n-1, 1) C (n, 1)

$\frac{n!}{(n-3)!3!}= \frac{(n-1)!}{[(n-1)-1]!1!} \frac{n!}{(n-1)!1!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!*6}= \frac{(n-1)!}{(n-1-1)!*1} \frac{n(n-1)!}{(n-1)!*1}$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}= \frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!*1} \frac{n}{1}$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}= \frac{n-1}{1}$ n

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=$ n (n - 1)

$\frac{n(n-1)(n-2)}{n(n-1)}=$ 6

n - 2= 6

n= 6 + 2

n= 8.

Ejercicio 24.

¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen, exactamente, cuatro unos?

C (8, 4)= $\frac{8!}{(8-4)!4!}$
C (8, 4)= $\frac{8*7*6*5*4!}{4!*24}$
C (8, 4)= 2 * 7 * 5
C (8, 4)= 70.

Por lo tanto, 70 cadenas de ocho bits contienen, exactamente, cuatro unos.

Ejercicio 25.

¿De cuantas formas puede elegirse un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres distintas y seis hombres distintos?

R= C (5, 2) C (6, 3)
R= $\frac{5!}{(5-2)!2!} \frac{6!}{(6-3)!3!}$
R= $\frac{5*4*3!}{3!*2} \frac{6*5*4*3!}{3!*6}$
R= 5 * 2 * 2 * 5 * 2
R= 200.

Por lo tanto, un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres distintas y seis hombres distintos puede elegirse de 200 formas.

Ejercicio 26.

¿Cuántos partidos de football se juegan en una liga de 9 equipos si cada uno de ellos debe jugar dos veces contra cada rival?

C (9, 2)= $\frac{9!}{(9-2)!2!}$
C (9, 2)= $\frac{9*8*7!}{7!*2}$
C (9, 2)= 9 * 4
C (9, 2)= 36.

Por lo tanto, en una liga de 9 equipos, si cada uno de ellos debe jugar dos veces contra cada rival, se juegan 36 partidos.

Ejercicio 27.

Una baraja de 52 cartas consta de 4 palos con 13 denominaciones cada uno de ellos y una mano de póquer consta de cinco de esas cartas (sin importar el orden).

(a) *¿Cuántas manos de póquer pueden elegirse?*

C (52, 5)= $\frac{52!}{(52-5)!5!}$
C (52, 5)= $\frac{52*51*50*49*48*47!}{47!*120}$
C (52, 5)= 52 * 51 * 10 *49 * 2
C (52, 5)= 2598960.

Por lo tanto, pueden elegirse 2.598.960 manos de póquer.

(b) *¿Cuántas manos de póquer tienen todas las cartas del mismo palo?*

C (13, 5)= $\frac{13!}{(13-5)!5!}$
C (13, 5)= $\frac{13*12*11*10*9*8!}{8!*120}$
C (13, 5)= 13 * 3 * 11 * 3
C (13, 5)= 1287.

Por lo tanto, 1.287 manos de póquer tienen todas las cartas del mismo palo.

(c) *¿Cuántas manos de póquer tienen tres cartas de una denominación y otras dos de otra denominación?*

R= C (13, 1) C (4, 3) C (12, 1) C (4, 2)
R= $\frac{13!}{(13-1)!1!} \frac{4!}{(4-3)!3!} \frac{12!}{(12-1)!1!} \frac{4!}{(4-2)!2!}$
R= $\frac{13*12!}{12!*1} \frac{4*3!}{1!3!} \frac{12*11!}{11!*1} \frac{4*3*2!}{2!*2}$
R= 13 $\frac{4}{1} \frac{12}{1}$ * 2 * 3
R= 13 * 4 * 12 * 2 * 3
R= 3744.

Por lo tanto, 3.744 manos de póquer tienen tres cartas de una denominación y otras dos de otra denominación.

Ejercicio 28.

Demostrar que $\binom{n}{k+1}= \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$.

$\binom{n}{k+1}= \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$

C (n, k+1)= C (n, k) $\frac{n-k}{k+1}$

$\frac{n!}{[n-(k+1)]!(k+1)!}= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{n-k}{k+1}$

$\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{n-k}{k+1}$

$\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}= \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!(k+1)!}$ (n - k)

$\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}= \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$.

Ejercicio 29.

Si un examen de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 3 opciones de respuesta, ¿de cuántas maneras se puede responder?

R= $[C\ (3,1)]^5$
R= $[\frac{3!}{(3-1)!1!}]^5$
R= $(\frac{3*2!}{2!*1})^5$
R= 3^5
R= 243.

Por lo tanto, si un examen de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 3 opciones de respuesta, se puede responder de 243 maneras.

Ejercicio 30.

¿Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen con 101 o con 111?

R= $2\ [C\ (2,1)]^5$
R= $2\ [\frac{2!}{(2-1)!1!}]^5$
R= $2\ (\frac{2*1!}{1!*1})^5$
R= $2 * 2^5$
R= 2^6
R= 64.

Por lo tanto, hay 64 cadenas de 8 bits que comiencen con 101 o con 111.

Ejercicio 31.

¿Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen o terminen con 1?

R= 2 $[C\ (2,1)]^7$ - $\frac{1}{2}$ $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$
R= 2 $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$ - $\frac{1}{2}$ $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$
R= 2 $(\frac{2*1!}{1!*1})^7$ - $\frac{1}{2}$ $(\frac{2*1!}{1!*1})^7$
R= 2 $*$ 2^7 - $\frac{1}{2}$ $*$ 2^7
R= 2 $*$ 128 - $\frac{1}{2}$ $*$ 128
R= 256 - 64
R= 192.

R= $[C\ (2,1)]^7$ + $\frac{1}{2}$ $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$
R= $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$ + $\frac{1}{2}$ $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^7$
R= $(\frac{2*1!}{1!*1})^7$ + $\frac{1}{2}$ $(\frac{2*1!}{1!*1})^7$
R= 2^7 + $\frac{1}{2}$ $*$ 2^7
R= 128 + $\frac{1}{2}$ $*$ 128
R= 128 + 64
R= 192.

R= $[C\ (2,1)]^8$ - $[C\ (2,1)]^6$
R= $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^8$ - $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^6$
R= $(\frac{2*1!}{1!*1})^8$ - $(\frac{2*1!}{1!*1})^6$
R= 2^8 - 2^6
R= 256 - 64
R= 192.

Por lo tanto, hay 192 cadenas de 8 bits que comiencen o terminen con 1.

Ejercicio 32.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse 5 libros de Matemática, 4 de Física y 6 de Informática, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?

R= P (3, 3) P (5, 5) P (4, 4) P (6, 6)
R= $\frac{3!}{(3-3)!} \frac{5!}{(5-5)!} \frac{4!}{(4-4)!} \frac{6!}{(6-6)!}$
R= $\frac{6}{0!} \frac{120}{0!} \frac{24}{0!} \frac{720}{0!}$
R= $\frac{6}{1} \frac{120}{1} \frac{24}{1} \frac{720}{1}$
R= 6 * 120 * 24 * 720
R= 12441600.

Por lo tanto, 5 libros de Matemática, 4 de Física y 6 de Informática, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí, pueden ordenarse de 12.441.600 maneras.

Ejercicio 33.

En una fiesta con 20 invitados donde todos se saludan entre sí, ¿cuántos saludos hay?

C (20, 2)= $\frac{20!}{(20-2)!2!}$
C (20, 2)= $\frac{20*19*18!}{18!*2}$
C (20, 2)= 10 * 19
C (20, 2)= 190.

Por lo tanto, en una fiesta con 20 invitados, donde todos se saludan entre sí, hay 190 saludos.

Ejercicio 34.

De un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, se quiere formar un grupo de 4 estudiantes.

(a) *¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber 2 de Informática, 1 de Física y 1 de Ingeniería?*

R= C (10, 2) C (5, 1) C (8, 1)
R= $\frac{10!}{(10-2)!2!} \frac{5!}{(5-1)!1!} \frac{8!}{(8-1)!1!}$
R= $\frac{10*9*8!}{8!*2} \frac{5*4!}{4!*1} \frac{8*7!}{7!*1}$
R= 5 * 9 * 5 * 8
R= 1800.

Por lo tanto, si, de un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, debe haber 2 de Informática, 1 de Física y 1 de Ingeniería, puede hacerse de 1.800 maneras.

(b) *¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber, al menos, uno de Ingeniería?*

R= C (8, 1) C (15, 3) + C (8, 2) C (15, 2) + C (8, 3) C (15, 1) + C (8, 4) C (15, 0)
R= $\frac{8!}{(8-1)!1!} \frac{15!}{(15-3)!3!} + \frac{8!}{(8-2)!2!} \frac{15!}{(15-2)!2!} + \frac{8!}{(8-3)!3!} \frac{15!}{(15-1)!1!} + \frac{8!}{(8-4)!4!} \frac{15!}{(15-0)!0!}$
R= $\frac{8*7!}{7!*1} \frac{15*14*13*12!}{12!*6} + \frac{8*7*6!}{6!*2} \frac{15*14*13!}{13!*2} + \frac{8*7*6*5!}{5!*6} \frac{15*14!}{14!*1} + \frac{8*7*6*5*4!}{4!*24} \frac{15!}{15!*1}$
R= 8 * 5 * 7 * 13 + 4 * 7 * 15 * 7 + 8 * 7 * 15 + 2 * 7 * 5
R= 3640 + 2940 + 840 + 70
R= 7490.

Por lo tanto, si, de un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, debe haber, al menos, uno de Ingeniería, puede hacerse de 7.490 maneras.

Ejercicio 35.

¿Cuántos números impares de 4 cifras hay?

R= C (9, 1) C (10, 1) C (10, 1) C (5, 1)
R= $\frac{9!}{(9-1)!1!} \frac{10!}{(10-1)!1!} \frac{10!}{(10-1)!1!} \frac{5!}{(5-1)!1!}$
R= $\frac{9*8!}{8!*1} \frac{10*9!}{9!*1} \frac{10*9!}{9!*1} \frac{5*4!}{4!*1}$
R= 9 * 10 * 10 * 5
R= 4500.

Por lo tanto, hay 4.500 números impares de 4 cifras.

Ejercicio 36.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse 3 libros de Ciencia Ficción, 5 de Novelas Policiales y 7 de Poesía, si los de Ciencia Ficción deben estar juntos entre sí?

R= P (2, 2) P (3, 3) P (12, 12)
R= $\frac{2!}{(2-2)!}\frac{3!}{(3-3)!}\frac{12!}{(12-12)!}$
R= $\frac{2}{0!}\frac{6}{0!}\frac{1479001600}{0!}$
R= $\frac{2}{1}\frac{6}{1}\frac{479001600}{1}$
R= 2 * 6 * 479001600
R= 5748019200.

Por lo tanto, 3 libros de Ciencia Ficción, 5 de Novelas Policiales y 7 de Poesía, si los de Ciencia Ficción deben estar juntos entre sí, pueden ordenarse de 5.748.019.200 maneras.

Ejercicio 37.

Con 21 equipos de futbol, ¿cuántos partidos se juegan si deben jugar una vez todos contra todos?

C (21, 2)= $\frac{21!}{(21-2)!2!}$

C (21, 2)= $\frac{21*20*19!}{19!*2}$

C (21, 2)= 21 * 10

C (21, 2)= 210.

Por lo tanto, con 21 equipos de fútbol, si deben jugar una vez todos contra todos, se juegan 210 partidos.

Ejercicio 38.

En un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una:

(a) *¿De cuántas maneras se puede sacar 0?*

R= $[C\ (2{,}1)]^5$
R= $[\frac{2!}{(2-1)!1!}]^5$
R= $(\frac{2*1!}{1!*1})^5$
R= 2^5
R= 32.

Por lo tanto, en un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una, se puede sacar 0 de 32 maneras.

(b) *¿De cuántas maneras se puede sacar 10?*

R= $[C\ (1{,}1)]^5$
R= $[\frac{1!}{(1-1)!1!}]^5$
R= $(\frac{1}{0!*1})^5$
R= $(\frac{1}{1*1})^5$
R= $(\frac{1}{1})^5$
R= 1^5
R= 1.

Por lo tanto, en un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una, se puede sacar 0 de 1 manera.

(c) *Si se considera que cada pregunta vale 2 puntos, ¿de cuántas maneras se puede sacar 4?*

R= C (5, 2)
R= $\frac{5!}{(5-2)!2!}$
R= $\frac{5*4*3!}{3!*2}$
R= 5 * 2
R= 10.

Por lo tanto, en un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una, si se considera que cada pregunta vale 2 puntos, se puede sacar 4 de 10 maneras.

(d) *¿De cuántas maneras se puede sacar 4 o más?*

R= C (5, 2) + C (5, 3) + C (5, 4) + C (5, 5)
R= $\frac{5!}{(5-2)!2!} + \frac{5!}{(5-3)!3!} + \frac{5!}{(5-4)!4!} + \frac{5!}{(5-5)!5!}$
R= $\frac{5*4*3!}{3!*2} + \frac{5*4*3!}{2!3!} + \frac{5*4!}{1!4!} + \frac{5!}{0!5!}$
R= 5 * 2 + $\frac{5*4}{2} + \frac{5}{1} + \frac{1}{1}$
R= 10 + 5 * 2 + 5 + 1
R= 10 + 10 + 5 + 1
R= 26.

Por lo tanto, en un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una, se puede sacar 4 o más de 26 maneras.

Ejercicio 39.

¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra TELEFONO?

R= $\frac{P(8,8)}{P(2,2)P(2,2)}$

R= $\frac{\frac{8!}{(8-8)!}}{\frac{2!}{(2-2)!}\frac{2!}{(2-2)!}}$

R= $\frac{\frac{40320}{0!}}{\frac{2\ 2}{0!0!}}$

R= $\frac{\frac{40320}{1}}{\frac{22}{11}}$

R= $\frac{40320}{2*2}$

R= $\frac{40320}{4}$

R= 10080.

Por lo tanto, las letras de la palabra TELEFONO pueden ordenarse de 10.080 formas.

Ejercicio 40.

En el Quini 6 los apostadores deben elegir 6 números entre el 0 y el 45, ¿cuántos resultados puede haber?

C (46, 6)= $\frac{46!}{(46-6)!6!}$
C (46, 6)= $\frac{46*45*44*43*42*41*40!}{40!*720}$
C (46, 6)= 23 * 3 * 11 * 43 * 7 * 41
C (46, 6)= 9366819.

Por lo tanto, en el Quini 6, donde se deben elegir 6 números entre el 0 y el 45, puede haber 9.366.819 resultados.

Trabajo Práctico N° 6:
Matrices.

Ejercicio 1.

Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*, B=* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$*, C=* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*, calcular:*

(a) *3A - 2B + C.*

3A - 2B + C= 3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - 2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3A - 2B + C= $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3A - 2B + C= $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) *A - 3 (B - C).*

A - 3 (B - C)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - 3 [$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$]
A - 3 (B - C)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - 3 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
A - 3 (B - C)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$
A - 3 (B - C)= $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) *Hallar una matriz D de 2x2 que cumpla que A - D= B.*

A - D= B
D= A - B
D= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
D= $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) *Hallar una matriz E de 2x2 que cumpla que A + B + E sea una matriz triangular superior.*

A + B + E= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$
E= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ - A - B
E= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

E= $\begin{pmatrix} a_{11}-2 & a_{12}-2 \\ -3 & a_{22}-2 \end{pmatrix}$.

(e) *Hallar una matriz F de 2x2 que sea el opuesto de C - B + A.*

F= -(C - B + A)
F= B - C - A
F= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
F= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

(f) *Hallar una matriz G de 2x2 que cumpla que B - 3G + 4 (A + B)=* 0_{2x2}.

B - 3G + 4 (A + B)= 0_{2x2}
B - 3G + 4A + 4B= 0_{2x2}
-3G + 4A + 5B= 0_{2x2}
3G + 0_{2x2}= 4A + 5B
3G= 4A + 5B
G= $\frac{4A+5B}{3}$
G= $\frac{4}{3}$ A + $\frac{5}{3}$ B
G= $\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
G= $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 5 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$
G= $\begin{pmatrix} 3 & \frac{8}{3} \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2.

Sean $A \in \mathbb{R}^{4x5}$, $B \in \mathbb{R}^{5x7}$, $C \in \mathbb{R}^{4x5}$, $D \in \mathbb{R}^{7x5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles y, en caso afirmativo, cuál es la cantidad de filas y de columnas de la matriz resultado.

(a) *AB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x7}$.

(b) *BA.*

Esta operación no es posible.

(c) *AC.*

Esta operación no es posible.

(d) *CB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x7}$.

(e) *ABD.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x5}$.

Ejercicio 3.

En los casos que sea posible, calcular AB y BA, ¿es AB= BA?

(a) $A= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

AB= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
AB= $\begin{pmatrix} 9 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

BA no es posible calcularlo.

(b) $A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

AB= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
AB= 9.

BA= $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
BA= $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $A= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

AB= $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
AB= $\begin{pmatrix} 18 & 13 & 26 \\ -8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

BA no es posible calcularlo.

Ejercicio 4.

Al igual que en los números reales, se define recursivamente la potencia natural de una matriz $A^n = \begin{cases} I, si\ n = 0 \\ AA^{n-1}, si\ n \geq 1 \end{cases}$, *es decir, que* A^n *no es otra cosa que multiplicar n veces A por sí misma. Dadas A=* $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *B=* $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, *calcular:*

(a) A^2.

A^2= AA

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) B^3.

B^3= BB^2

B^3= BBB

$B^3 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 36 & -10 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 216 & -76 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$.

(c) *AB.*

AB= $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

AB= $\begin{pmatrix} 18 & 13 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) *2*A^2 *+ BA.*

2A^2 + BA= 2AA + BA

2A^2 + BA= 2 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2A^2 + BA= 2 $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2A^2 + BA= $\begin{pmatrix} 10 & 24 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2A^2 + BA= $\begin{pmatrix} 29 & 48 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.

Dadas A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$*, B=* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$*, establecer si es cierto que:*

(a) *(A + B) (A - B)=* A^2 - B^2.

(A + B) (A - B)= A^2 - B^2

A^2 - AB + BA - B^2= A^2 - B^2

A^2 - $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ - B^2= A^2 - B^2

A^2 - $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ - B^2= A^2 - B^2

A^2 - $\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$ - $B^2 \neq A^2$ - B^2.

Por lo tanto, no es cierta esta igualdad.

(b) $(A + B)^2$= A^2 - *2AB* + B^2.

$(A + B)^2$= A^2 - 2AB + B^2

A^2 + 2AB + $B^2 \neq A^2$ - 2AB + B^2.

Por lo tanto, no es cierta esta igualdad.

Ejercicio 6.

Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$*,B=* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$*, C=* $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) *Calcular AB y AC.*

AB= $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
AB= $\begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$.

AC= $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
AC= $\begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$.

(b) *¿Es válida la propiedad cancelativa en el producto de matrices? (Recordar que la propiedad cancelativa de los números reales dice que, si ab= bc, entonces, b= c).*

No, la propiedad cancelativa en el producto de matrices no es válida. Por ejemplo, en el caso anterior, se ve que AB= AC, pero B$\neq$ C.

Ejercicio 7.

Hallar los valores de a y b para que se cumpla la siguiente igualdad:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 5 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 5 = 5 \\ 2a = 2 \\ 10 + 2b = 17 \end{cases}.$$

a= $\frac{2}{2}$
a= 1.

2b= 17 - 10
2b= 7
b= $\frac{7}{2}$.

Ejercicio 8.

Hallar la matriz $X \in \mathbb{R}^{2x3}$ *que cumpla* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ + $3X$= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\text{X}= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$3\text{X}= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{X}= \frac{1}{3} [\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$

$\text{X}= \frac{1}{3} [\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$

$\text{X}= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

$\text{X}= \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9.

Sea A una matriz cuadrada 2x2. Probar que, si A tiene una fila (o una columna) nula, entonces, A no tiene inversa.

A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

AB= I

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \end{cases}.$$

A= $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

BA= I

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ 0 & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 0 \\ 0 = 0 \\ b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto, si A tiene una fila (o una columna) nula, entonces, A no tiene inversa.

Ejercicio 10.

Si A, B, C, D $\in \mathbb{R}^{nxn}$ *tienen inversa, deducir cuál es* $(ABCD)^{-1}$.

$(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Ejercicio 11.

Una empresa que fabrica autos tiene 4 sucursales y fabrica 3 modelos distintos. Tiene guardada en dos matrices, la siguiente información de las ventas del último mes:

$$A=\begin{pmatrix} 30 & 25 & 5 \\ 23 & 20 & 6 \\ 20 & 22 & 4 \\ 15 & 10 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 700 & 100 \\ 900 & 150 \\ 980 & 200 \end{pmatrix}.$$

(a) *¿Qué dimensión tiene el producto AB? ¿Qué información obtiene al realizarlo?*

El producto AB tiene dimensión 4x2 y la información que se obtiene al realizarlo es el precio y la ganancia de cada una de las 4 sucursales.

(b) *Indicar qué representa cada fila y cada columna de la matriz producto.*

Cada fila de la matriz producto representa cada una de las 4 sucursales, mientras que cada columna representa el precio y la ganancia.

Ejercicio 12.

Sea A una matriz cuadrada, que cumple que A^2= 2A - I. Hallar A^{-1}.

A^2= 2A - I
AA= 2A - AA^{-1}
AA^{-1}= 2A - AA
AA^{-1}= A (2I - A)
A^{-1}AA^{-1}= A^{-1}A (2I - A)
IA^{-1}= I (2I - A)
A^{-1}= 2I - A.

Ejercicio 13.

Sea A una matriz cuadrada, que cumple que A^3= 0 (0 es la matriz nula de la misma dimensión que A). Demostrar que I + A + A^2 es la matriz inversa de I - A.

(I - A) (I + A + A^2)= I
(I - A) I + (I - A) A + (I - A) A^2= I
I - A + IA - A^2 + IA^2 - A^3= I
I - A + A - A^2 + A^2 - 0= I
I= I.

(I + A + A^2) (I - A)= I
I (I - A) + A (I - A) + A^2 (I - A)= I
I - AI + AI - A^2 + A^2I - A^3= I
I - A + A - A^2 + A^2 - 0= I
I= I.

Por lo tanto, queda demostrado que I + A + A^2 es la matriz inversa de I - A.

Ejercicio 14.

Llevar las siguientes matrices a la forma escalonada y reducida, indicando las operaciones elementales y el rango de cada una.

(a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 8 & 3 \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}$.

$F_2= F_2 - 2F_1 \quad \Longrightarrow \quad A_R=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}$

$F_2= \frac{1}{2} F_2 \quad \Longrightarrow \quad A_R=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 - 6F_1 \quad \Longrightarrow \quad A_R=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 - 4F_2 \quad \Longrightarrow \quad A_R=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F_1= F_1 - 3F_2 \quad \Longrightarrow \quad A_R=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (A)= 2.

(b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

$F_2= F_2 - 2F_1 \quad \Longrightarrow \quad B_R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

$F_2= \frac{1}{3} F_2 \quad \Longrightarrow \quad B_R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 + 3F_1 \quad \Longrightarrow \quad B_R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 + 3F_2 \quad \Longrightarrow \quad B_R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (A)= 2.

(c) $C= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

$F_1= \frac{-1}{3} F_1 \quad \Longrightarrow \quad C_R= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$F_2= F_2 - 6F_1 \quad \Longrightarrow \quad C_R= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$F_2= \frac{1}{16} F_2 \quad \Longrightarrow \quad C_R= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_1= F_1 + \frac{4}{3} F_2 \quad \Longrightarrow \quad C_R= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

r (A)= 2.

Ejercicio 15.

Hallar la inversa, si existe, de las siguientes matrices, mediante operaciones elementales e indicar el rango de cada una:

(a) $A= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2= F_2 + 8F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 34 & 8 & 1 \end{array}\right)$

$F_2= \frac{1}{34} F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{array}\right)$

$F_1= F_1 - 4F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{17} & \frac{-2}{17} \\ 0 & 1 & \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{array}\right)$.

$A^{-1}= \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{pmatrix}$.

r (A)= r (A^{-1})= 2.

(b) $B= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2= F_2 - 2F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_2= \frac{1}{3} F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_3= F_3 - 2F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{array}\right)$

$F_3= \frac{3}{7} F_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$

$F_1 = F_1 - 3F_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & | & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

$F_2 = F_2 + \frac{2}{3} F_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$

r (B)= r (B^{-1})= 3.

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = \frac{1}{2} F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = F_2 - 5F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{-5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = 2F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = \frac{1}{5} F_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 - \frac{1}{2} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

C^{-1}= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

r (C)= r (C^{-1})= 3.

(d) D= $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 6 & -15 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$

F_1= $\frac{-1}{2}$ F_1 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{-1}{2} & 0 \\ 6 & -15 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$

F_2= F_2 - 6F_1 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, no existe la matriz inversa.

Ejercicio 16.

Dada A= $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$.

(a) *Hallar k para que sea* A^2= 0_{2x2}.

A^2= 0_{2x2}
AA= 0_{2x2}
$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -8-4k \\ 2+k & -4+k^2 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 0=0 \\ -8-4k=0 \\ 2+k=0 \\ -4+k^2=0 \end{cases}.$$

4k= -8
k= $\frac{-8}{4}$
k= -2.

k= -2.

k^2= 4
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{4}$
$|k|$= 2
k= $\pm$2.

Por lo tanto, el valor de k para que sea A^2= 0_{2x2} es -2.

(b) *Hallado k, encontrar el rango de A.*

A= $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

F_1= $\frac{1}{2}$ F_1 $\Rightarrow$ A_R= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
F_2= F_2 - F_1 $\Rightarrow$ A_R= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (A)= 1.

Ejercicio 17.

Sea A una matriz nxn:

(a) *Indicar, justificando la respuesta, si es verdadero o falso que (A - I_n) (A + I_n)= A^2 - I_n.*

(A - I_n) (A + I_n)= AA + AI_n - I_nA + I_n^2
(A - I_n) (A + I_n)= A^2 + A - A + I_n
(A - I_n) (A + I_n)= A^2 - I_n.

Por lo tanto, es VERDADERO.

(b) *Si* A^2= 0_{nxn}, *¿cuál es la inversa de (A + I_n)?*

(A + I_n) $(A + I_n)^{-1}$= I_n
(A - I_n) (A + I_n) $(A + I_n)^{-1}$= (A - I_n) I_n
(A^2 + AI_n - I_nA - I_n^2) $(A + I_n)^{-1}$= AI_n - I_n^2
(0_{nxn} + A - A - I_n) $(A + I_n)^{-1}$= A - I_n
-I_n $(A + I_n)^{-1}$= A - I_n
$(A + I_n)^{-1}$= -(A - I_n)
$(A + I_n)^{-1}$= I_n - A.

$(A + I_n)^{-1}$ (A + I_n)= I_n
$(A + I_n)^{-1}$ (A + I_n) (A - I_n)= I_n (A - I_n)
$(A + I_n)^{-1}$ (A^2 - AI_n + I_nA - I_n^2) = I_nA - I_n^2
$(A + I_n)^{-1}$ (0_{nxn} - A + A - I_n) = A - I_n
$(A + I_n)^{-1}$ (-I_n)= A - I_n
$(A + I_n)^{-1}$= -(A - I_n)
$(A + I_n)^{-1}$= I_n - A.

Ejercicio 18.

Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & 1 \end{pmatrix}$, *B=* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & b \end{pmatrix}$ *y C=* $\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}$.

(a) *Encontrar los números a y b tales que se cumpla AB= C.*

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -3a-9 & 9 \\ 2 & -2 \\ 6a+23 & b-18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -3a-9=-12 \\ 9=9 \\ 2=2 \\ -2=-2 \\ 6a+23=29 \\ b-18=-8 \end{cases}.$$

3a= -9 + 12
3a= 3
a= $\frac{3}{3}$
a= 1.

6a= 29 - 23
6a= 6
a= $\frac{6}{6}$
a= 1.

b= -8 + 18
b= 10.

Por lo tanto, los números a y b tales que se cumpla AB= C son 1 y 10, respectivamente.

(b) *Encontrar, si es que existe, la inversa de A.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 18 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_1=\frac{-1}{3}F_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 18 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_2 = \frac{1}{2}F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 6 & 18 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - 6F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 - 3F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-1}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 19.

(a) *Dada D=* $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$*, encontrar el valor de k para que sea* D^2= 0_{nxn}.

D^2= 0_{nxn}
DD= 0_{nxn}
$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5k+1 & 0 \\ 0 & 5k+1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 5k+1=0 \\ 0=0 \\ 5k+1=0 \\ 0=0 \end{cases}$.

5k= -1
k= $\frac{-1}{5}$.

5k= -1
k= $\frac{-1}{5}$.

Por lo tanto, el valor de k para que sea D^2= 0_{nxn} es $\frac{-1}{5}$.

(b) *Con el valor k encontrado, calcular el rango de D.*

D= $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - 5F_1 $\Longrightarrow$ D_R= $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (D)= 1.

Ejercicio 20.

(a) *Encontrar los números a y b tales que (A + B) C= D, siendo A=* $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, B=* $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*, C=* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *y D=* $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a+6 & 3b+3 \\ a+2 & b+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} a+6=9 \\ 3b+3=6 \\ a+2=5 \\ b+3=4 \end{cases}$.

a= 6 - 3
a= 3.

3b= 6 - 3
3b= 3
b= $\frac{3}{3}$
b= 1.

a= 5 - 2
a= 3.

b= 4 - 3
b= 1.

Por lo tanto, los números a y b tales que (A + B) C= D son 3 y 1, respectivamente.

(b) *Hallar (si existe)* D^{-1}.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 9 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_1 = \frac{1}{9} F_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_2 = F_2 - 5F_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-5}{9} & 1 \end{array}\right)$

$F_2 = \frac{3}{2} F_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & | & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 - \frac{2}{3} F_2 \quad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$

Ejercicio 21.

Demostrar que, si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$*,* $B \in \mathbb{R}^{nxn}$*,* $AB= 0_{nxn}$ *y B tiene inversa, entonces,* $A= 0_{nxn}$*.*

AB= 0_{nxn}
ABB^{-1}= $0_{nxn}B^{-1}$
AI= 0_{nxn}
A= 0_{nxn}.

Por lo tanto, queda demostrado que, si A $\in \mathbb{R}^{nxn}$, B $\in \mathbb{R}^{nxn}$, AB= 0_{nxn} y B tiene inversa, entonces, A= 0_{nxn}.

Ejercicio 22.

Sean las matrices A, B y C de nxn, tales que B tiene inversa. Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando la respuesta: "Si CB= A, entonces, C= $B^{-1}A$*".*

CB= A
CBB^{-1}= AB^{-1}
CI= AB^{-1}
C= AB^{-1}.

Por lo tanto, esta afirmación es FALSA.

Ejercicio 23.

Demostrar que, si una matriz de 2x2 tiene dos filas iguales, entonces, no tiene inversa.

A= $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - F_1 $\Rightarrow$ A_R= $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (A)= 1 < n= 2.

Por lo tanto, queda demostrado que, si una matriz de 2x2 tiene dos filas iguales, entonces, no tiene inversa.

Ejercicio 24.

Sean A, B y C matrices cuadradas de la misma dimensión. Demostrar que, si A tiene inversa y se cumple que AB=AC, entonces, B= C.

AB= AC
A^{-1}AB= A^{-1}AC
IB= IC
B= C.

Por lo tanto, queda demostrado que, si A tiene inversa y se cumple que AB= AC, entonces, B= C.

Trabajo Práctico N° 7:
Sistemas de Ecuaciones y Determinantes.

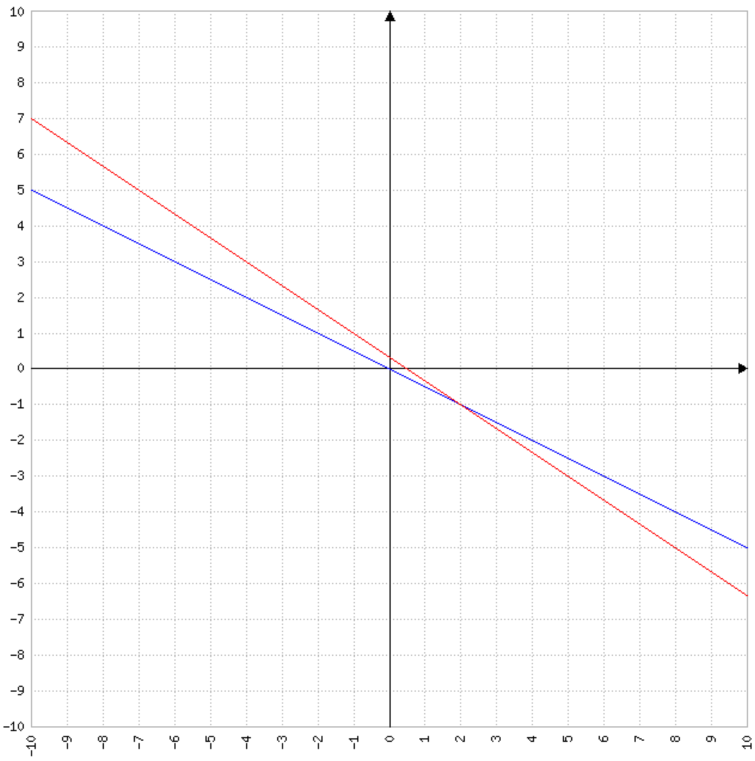
Ejercicio 1.

Representar en el plano los siguientes sistemas, indicar qué tipo de solución hay en cada una:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.

2y= -x
y= $\frac{-1}{2}$ x.

3y= -2x + 1
y= $\frac{-2x+1}{3}$
y= $\frac{-2}{3}$ x + $\frac{1}{3}$.



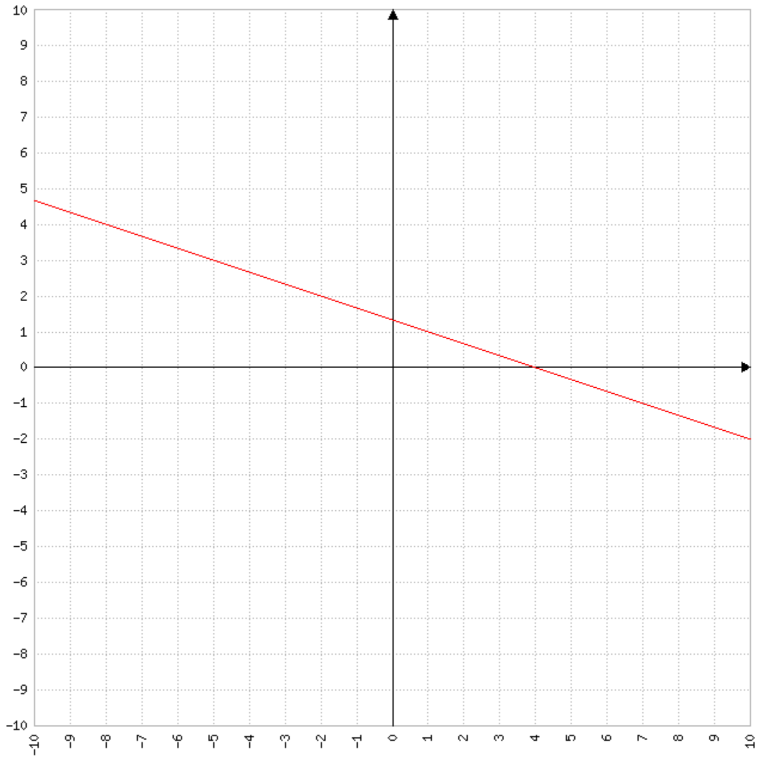
Por lo tanto, este sistema tiene única solución.

(b) $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$.

6y= -2x + 8

y= $\frac{-2x+8}{6}$
y= $\frac{-1}{3}$ x + $\frac{4}{3}$.

3y= -x + 4
y= $\frac{-x+4}{3}$
y= $\frac{-1}{3}$ x + $\frac{4}{3}$.

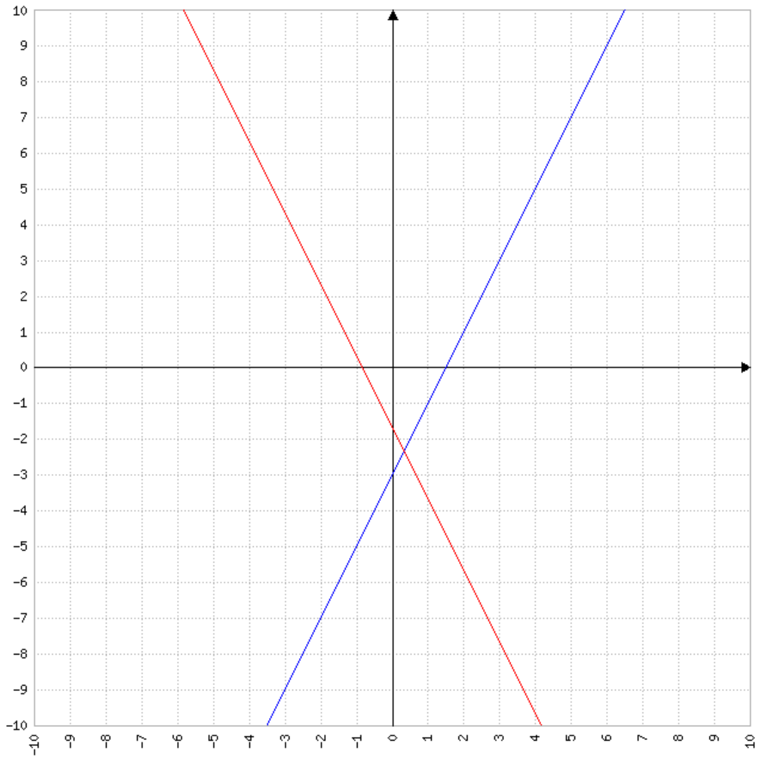


Por lo tanto, este sistema tiene infinitas soluciones.

(c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x + 3y = -5 \end{cases}$.

y= 2x - 3.

3y= -6x - 5
y= $\frac{-6x-5}{3}$
y= -2x - $\frac{5}{3}$.



Por lo tanto, este sistema tiene única solución.

Ejercicio 2.

Verificar que los valores dados son soluciones de los sistemas plateados:

(a) *x= 1, y= 2 para* $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

3 * 1 + 2= 5
3 + 2= 5
5= 5.

1 - 2= -1
-1= -1.

(b) *x= 1, y= 1 para* $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$.

1 - 1= 0
0= 0.

1 + 1= 2
2= 2.

3 * 1 - 1= 2
3 - 1= 2
2= 2.

(c) *{(x, y): x= -3y} para* $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -3x - 9y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases}$.

-3y + 3y= 0
0= 0.

-3 (-3y) - 9y= 0
9y - 9y= 0
0= 0.

2 (-3y) + 6y= 0
-6y + 6y= 0
0= 0.

(d) $x=\frac{15}{9}$, $y=\frac{8}{9}$, $z=\frac{-11}{9}$ *para* $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ y+4z=-4 \\ x-y-z=2 \end{cases}$.

$2\,\frac{15}{9}+\frac{8}{9}+\frac{11}{9}=3$
$\frac{30}{9}+\frac{8}{9}-\frac{11}{9}=3$
$\frac{27}{9}=3$
$3=3$.

$\frac{8}{9}+4\,(\frac{-11}{9})=-4$
$\frac{8}{9}-\frac{44}{9}=-4$
$\frac{-36}{9}=-4$
$-4=-4$.

$\frac{15}{9}-\frac{8}{9}+\frac{11}{9}=2$
$\frac{18}{9}=2$
$2=2$.

(e) *{(x, y, z): x= 1 + y, z= 3y} para* $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y=1 \end{cases}$.

$1 + y + 2y - 3y = 1$
$1=1$.

$1 + y - y = 1$
$1=1$.

Ejercicio 3.

Resolver los siguientes sistemas por operaciones elementales y expresar la o las soluciones, en caso de que existan. Clasificarlos por el teorema de Rouché-Frobenius. En los casos que haya infinitas soluciones, dar dos soluciones particulares.

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 + F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - F_3 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

x_1= 6.
x_2= 4.
x_3= 0.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible determinado, ya que r (A)= r (A_b)= n= 3, y su solución es x_1= 6, x_2= 4 y x_3= 0.

(b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ u_2 - u_3 = 1 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

F_1= F_1 - F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

u_1 + $2u_3$= 0
u_1= -$2u_3$.

u_2 - u_3= 1

u_2= u_3 + 1.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible indeterminado, ya que r (A)= r (A_b)= 2 $<$ n= 3, y dos de sus infinitas soluciones son u_1= -2, u_2= 2, u_3= 1 y u_1= -4, u_2= 3, u_3= 2.

(c) $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=0 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$.

F_1= $\frac{1}{2}$ F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$

F_2= F_2 - F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{-1}{2} \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$

F_2= -2F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & | & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - $\frac{1}{2}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & | & 3 \end{pmatrix}$

F_3= $\frac{1}{5}$ F_3 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $\frac{3}{2}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & -1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - 4F_3 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-17}{5} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$F_2 = F_2 + 3F_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-17}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

x= $\frac{-17}{5}$.
y= $\frac{14}{5}$.
z= $\frac{3}{5}$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible determinado, ya que r (A)= r (A_b)= n= 3, y su solución es x= $\frac{-17}{5}$, y= $\frac{14}{5}$ y z= $\frac{3}{5}$.

(d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & | & 3 \\ 3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

$F_2 = F_2 - F_1 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & | & 2 \\ 3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{-1}{3} F_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-2}{3} \\ 3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - 3F_1 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & -4 & | & -3 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 + 4F_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & | & \frac{-17}{3} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es incompatible, ya que r (A)= 2≠ r (A_b)= 3.

(e) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3x + 5z = 4 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 3 & 0 & 5 & | & 4 \\ 2 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $3F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & -6 & 2 & | & -17 \\ 2 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{-1}{6}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & | & \frac{17}{6} \\ 2 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & | & \frac{17}{6} \\ 0 & -3 & 1 & | & -15 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 + $3F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & | & \frac{17}{6} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $2F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & | & \frac{17}{6} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es incompatible, ya que r (A)= 2$\neq$ r (A_b)= 3.

(f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 9 & -7 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{9}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{2}{9} & | & 0 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 + $2F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{9} & \frac{4}{9} & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{2}{9} & | & 0 \end{pmatrix}$.

x_1 + $\frac{13}{9}$ x_3 + $\frac{4}{9}$ x_4= 1
x_1= $\frac{-13}{9}$ x_3 - $\frac{4}{9}$ x_4 + 1.

x_2 - $\frac{7}{9}$ x_3 + $\frac{2}{9}$ x_4= 0

$x_2= \frac{7}{9} x_3 - \frac{2}{9} x_4$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible indeterminado, ya que r (A)= r (A_b)= 2 $<$ n= 4, y dos de sus infinitas soluciones son $x_1= \frac{-8}{9}$, $x_2= \frac{5}{9}$, x_3= 1, x_4= 1 y $x_1= \frac{-25}{9}$, $x_2= \frac{10}{9}$, x_3= 2, x_4= 2.

(g) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2w = 0 \\ 3x - 7y - 2z + 4w = 0 \\ 4x + 3y + 5z + 2w = 0 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A_b= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 3 & -7 & -2 & 4 & | & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$.

$F_2= F_2 - 3F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -11 & 10 & | & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_2= -F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 - 4F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 10 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 - 11F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & -128 & 120 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_3= \frac{-1}{128} F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-15}{16} & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_1= F_1 + 2F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 25 & -22 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-15}{16} & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_1= F_1 - 25F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{16} & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-15}{16} & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_2= F_2 - 11F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{16} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{16} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-15}{16} & | & 0 \end{pmatrix}$.

x + $\frac{23}{16}$ w= 0

x= $\frac{-23}{16}$ w.

y + $\frac{5}{16}$ w= 0
y= $\frac{-5}{16}$ w.

z - $\frac{15}{16}$ w= 0
z= $\frac{15}{16}$ w.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible indeterminado, ya que r (A)= r (A_b)= 3 $<$ n= 4, y dos de sus infinitas soluciones son x= $\frac{-23}{16}$, y= $\frac{-5}{16}$, z= $\frac{15}{16}$, w= 1 y x= $\frac{-23}{8}$, y= $\frac{-5}{8}$, z= $\frac{15}{8}$, w= 2.

Ejercicio 4.

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Fundamentar la respuesta.

(a) *Todo sistema homogéneo tiene, al menos, una solución.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que los sistemas homogéneos pueden tener sólo la solución trivial o la trivial e infinitas soluciones.

(b) *Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.*

Esta afirmación es FALSA, ya que los sistemas homogéneos pueden tener sólo la solución trivial.

(c) *Un sistema homogéneo que no tiene una única solución, tiene infinitas soluciones.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que los sistemas homogéneos pueden tener sólo la solución trivial o la trivial e infinitas soluciones.

(d) *Si un sistema no homogéneo no tiene solución única, debe tener infinitas soluciones.*

Esta afirmación es FALSA, ya que, si un sistema no homogéneo no tiene solución única, puede tener infinitas soluciones o no tener solución.

(e) *Si un sistema tiene más de una solución, entonces, tiene infinitas.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que un sistema puede tener una única solución o infinitas soluciones.

(f) *La ecuación $x + y = 0$ no tiene solución.*

Esta afirmación es FALSA, ya que tiene infinitas soluciones.

(g) *Si para cada ecuación del sistema hay alguna solución, entonces, el sistema tiene solución.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que es condición suficiente que cada ecuación del sistema alguna solución para concluir que el sistema tiene solución.

(h) *Si un sistema es incompatible, entonces, cada ecuación del mismo tampoco tiene solución.*

Esta afirmación es FALSA, ya que un sistema es incompatible cuando no tiene soluciones que satisfagan todas las ecuaciones simultáneamente, pero esto no necesariamente implica que cada ecuación del mismo no tenga solución, pueden tener soluciones individualmente.

Juan Menduiña

Ejercicio 5.

Determinar (si existen) los valores de b para que los siguientes sistemas sean (i) compatible (en tal caso, resolverlo, expresar la solución en la forma adecuada) e (ii) incompatible.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = b \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 7 & | & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & | & b \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $3F_1$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & | & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & | & b \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{-1}{3}$ F_2 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 2 & -1 & 3 & 4 & | & b \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - $2F_1$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & -3 & 5 & -4 & | & b-2 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 + $3F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b-4 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - F_2 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & | & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b-4 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $\frac{7}{3}$ F_3 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & | & 11-\frac{7}{3}b \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b-4 \end{pmatrix}$

F_2= F_2 - $\frac{5}{3}$ F_3 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & | & 11-\frac{7}{3}b \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & 0 & | & 6-\frac{5}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b-4 \end{pmatrix}$.

x_1 + $\frac{2}{3}$ x_3= 11 - $\frac{7}{3}$ b
x_1= $\frac{-2}{3}$ x_3 + 11 - $\frac{7}{3}$ b.

x_2 - $\frac{5}{3}$ x_3= 6 - $\frac{5}{3}$ b
x_2= $\frac{5}{3}$ x_3 + 6 - $\frac{5}{3}$ b.

x_4= b - 4.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible para b ∈ ℝ, ya que r (A)= r (A_b)= 3, y sus soluciones están dadas por (x_1, x_2, x_3, x_4)= ($\frac{-2}{3}$ x_3 + 11 - $\frac{7}{3}$ b, $\frac{5}{3}$ x_3 + 6 - $\frac{5}{3}$ b, x_3, b - 4); e (ii) incompatible para ningún valor de b.

(b) $\begin{cases} x + 5y - z = 7 \\ 4y + 3z = b \\ -x + 3y + 7z = 5 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 4 & 3 & | & b \\ -1 & 3 & 7 & | & 5 \end{pmatrix}$.

F_2= $\frac{1}{4}$ F_2 $\quad\Rightarrow\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{1}{4}b \\ -1 & 3 & 7 & | & 5 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 + F_1 $\quad\Rightarrow\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{1}{4}b \\ 0 & 8 & 6 & | & 12 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - 8F_2 $\quad\Rightarrow\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{1}{4}b \\ 0 & 0 & 0 & | & 12 - 2b \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - 5F_2 $\quad\Rightarrow\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-19}{4} & | & 7 - \frac{5}{4}b \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{1}{4}b \\ 0 & 0 & 0 & | & 12 - 2b \end{pmatrix}$.

12 - 2b= 0
2b= 12
b= $\frac{12}{2}$
b= 6.

x - $\frac{19}{4}$ z= 7 - $\frac{5}{4}$ b
x= $\frac{19}{4}$ z + 7 - $\frac{5}{4}$ b.

y + $\frac{3}{4}$ z= $\frac{1}{4}$ b
y= $\frac{-3}{4}$ z + $\frac{1}{4}$ b.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible para b= 6, ya que r (A)= r (A_b)= 2, y sus soluciones están dadas por (x, y, z)= ($\frac{19}{4}$ z + 7 - $\frac{5}{4}$ b, $\frac{-3}{4}$ z + $\frac{1}{4}$ b, z); e (ii) incompatible para b ∈ ℝ - {6}, ya que r (A)= 2≠ r (A_b)= 3.

(c) $\begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z - 3w = 8 \\ -2x + 2y - z + 6w = b \end{cases}.$

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -3 & | & 8 \\ -2 & 2 & -1 & 6 & | & b \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 + $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -3 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+16 \end{pmatrix}$.

b + 16= 0
b= -16.

x - y + $\frac{1}{2}$ z - 3w= 8
x= y - $\frac{1}{2}$ z + 3w + 8.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible para b= -16, ya que r (A)= r (A_b)= 1, y sus soluciones están dadas por (x, y, z, w)= (y - $\frac{1}{2}$ z + 3w + 8, y, z, w); e (ii) incompatible para b ∈ ℝ - {-16}, ya que r (A)= 1≠ r (A_b)= 2.

Ejercicio 6.

Determinar qué relación debe haber entre a, b y c para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b. \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 2 & 6 & -11 & | & b \\ 1 & -2 & 7 & | & c \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 2 & -5 & | & b-2a \\ 1 & -2 & 7 & | & c \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{2}F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{1}{2}b-a \\ 1 & -2 & 7 & | & c \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - F_1 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{1}{2}b-a \\ 0 & -4 & 10 & | & c-a \end{pmatrix}$

F_3= $F_3 + 4F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & | & -a+\frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 0 & | & -5a+2b+c \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $2F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3a-b \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & | & -a+\frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 0 & | & -5a+2b-c \end{pmatrix}$

-5a + 2b - c= 0
5a=2b - c
a= $\frac{2b-c}{5}$
a= $\frac{2}{5}$ b - $\frac{1}{5}$ c.

Por lo tanto, para que este sistema sea compatible la relación que debe haber entre a, b y c es a= $\frac{2}{5}$ b - $\frac{1}{5}$ c.

Ejercicio 7.

Si la terna (2, 1, -1) es una solución de $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 = c \end{cases}$ *, hallar todas las soluciones del sistema (pensar dónde se debe reemplazar 2, 1 y -1).*

a= 2 - 1 + (-1)
a= 2 - 1 - 1
a= 0.

b= 2 * 2 + (-1)
b= 4 - 1
b= 3.

c= 2 + 1
c= 3.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{2}$ F_2 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - F_1 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - $2F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 + F_2 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$.

$x_1 + \frac{1}{2}\, x_3 = \frac{3}{2}$
$x_1 = \frac{-1}{2}\, x_3 + \frac{3}{2}$.

x_2 - $\frac{1}{2}\, x_3 = \frac{3}{2}$
$x_2 = \frac{1}{2}\, x_3 + \frac{3}{2}$.

Por lo tanto, todas las soluciones del sistema están dadas por $(x_1, x_2, x_3)= (\frac{-1}{2} x_3 + \frac{3}{2}, \frac{1}{2} x_3 + \frac{3}{2}, x_3)$.

Ejercicio 8.

En cada caso, determinar, si existen, los valores de k tales que el sistema resulte, respectivamente, (i) compatible determinado, (ii) compatible indeterminado e (iii) incompatible.

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + kx_2 = k + 2 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 4 \\ 2 & k & | & k+2 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & k-6 & | & k-6 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{k+6}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $3F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

x_1= 1.
x_2= 1.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible determinado para k ∈ ℝ, ya que r (A)= r (A_b)= 2, y su solución es x_1= 1 y x_2= 1; (ii) compatible indeterminado para ningún valor de k; e (iii) incompatible para ningún valor de k.

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + (k-1)x_2 = k \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k-1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 3 & k-1 & | & k \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $3F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & k-7 & | & k-12 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{k-7}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & \frac{k-12}{k-7} \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $2F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2(k-2)}{k-7} \\ 0 & 1 & | & \frac{k-12}{k-7} \end{pmatrix}$.

x_1= $\frac{2(k-2)}{k-7}$.
x_2= $\frac{k-12}{k-7}$.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible determinado para k ∈ ℝ, ya que r (A)= r (A_b)= 2, y su solución es x_1= $\frac{2(k-2)}{k-7}$ y x_2= $\frac{k-12}{k-7}$; (ii) compatible indeterminado para ningún valor de k; e (iii) incompatible para ningún valor de k.

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & k \\ 1 & k & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & k-1 & 0 & | & 1-k \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{k-1}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & k+1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$.

x_1 + x_3= k + 1
x_1= -x_3 + k + 1.

x_2= -1.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible determinado para ningún valor de k; (ii) compatible indeterminado para k ∈ ℝ, ya que r (A)= r (A_b)= 2 < n= 3, y sus soluciones están dadas por (x_1, x_2, x_3)= (-x_3 + k + 1, -1, x_3); e (iii) incompatible para ningún valor de k.

Ejercicio 9.

Resolver el problema de la Pila de monedas de Fibonacci planteado al principio del capítulo y analizar si la solución hallada por Fibonacci es correcta.

"Tres hombres poseen una sola pila de monedas y sus partes son 1/2, 1/3 y 1/6. Cada uno toma algo de dinero de la pila hasta que no queda nada. El primero regresa 1/2 de lo que tomó, el segundo 1/3 y el tercero 1/6. Cuando el total reintegrado se divide por igual entre los tres, se descubre que cada uno posee lo que le corresponde. ¿Cuánto dinero había en la pila original y cuánto tomó cada uno de esa pila?"

Ejercicio 10.

Calcular los siguientes determinantes:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$= 3 * 1 - 2 * 7

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$= 3 - 14

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$= -11.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= 2 (-2 * 2 - 1 * 0) + 3 [0 * 0 - (-2) * 1]

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= 2 (-4 - 0) + 3 (0 + 2)

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= 2 (-4) + 3 * 2

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= -8 + 6

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= -2.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$= 3 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$= 3 * 2 [1 * 1 - 4 (-2)]

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 * 2\ (1 + 8)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 * 2 * 9$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 54.$$

Ejercicio 11.

Sea A= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *tal que det (A)= 5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices, indicando las propiedades usadas:*

(a) $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$ = -1 * 2 * 3 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$ = -1 * 2 * 3 * 5

$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$ = -30.

(b) $\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = - $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = -5.

(c) $\begin{pmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & g \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & g \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & g \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = 5.

(d) *3A*.

$|3A|= 3^3\ |A|$
$|3A|= 27 * 5$
$|3A|= 135.$

(e) A^2.

$|A^2|= |A|^2$
$|A^2|= 5^2$
$|A^2|= 25.$

(f) $\frac{1}{2}\, A^{-1}$.

$\left|\frac{1}{2} A^{-1}\right|= (\frac{1}{2})^3\ |A^{-1}|$
$\left|\frac{1}{2} A^{-1}\right|= \frac{1}{8}\, \frac{1}{|A|}$
$\left|\frac{1}{2} A^{-1}\right|= \frac{1}{8}\, \frac{1}{5}$
$\left|\frac{1}{2} A^{-1}\right|= \frac{1}{40}.$

Ejercicio 12.

Sea A= $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{pmatrix}$ *una matriz triangular inferior. Demostrar que det (A)= acfj.*

det (A)= $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{vmatrix}$

det (A)= a $\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & j \end{vmatrix}$

det (A)= ac $\begin{vmatrix} f & 0 \\ i & j \end{vmatrix}$

det (A)= acfj.

Ejercicio 13.

Sean A, B, C matrices nxn, tales que C tiene inversa y A= CBC^{-1}. Probar que det (A)= det (B). Fundamentar cada paso de la prueba.

det (A)= det (CBC^{-1})
det (A)= det (C) det (B) det (C^{-1})
det (A)= det (C) det (B) $\frac{1}{det(C)}$
det (A)= det (B).

Ejercicio 14.

Utilizar las propiedades para calcular los siguientes determinantes:

(a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$|A|=-\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$|A|=-\begin{vmatrix} -1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$|A|$= -{-{-[-1 * 5 - (-8) * 2]}}

$|A|$= -{-{-[-5 - (-16)]}}

$|A|$= {-[-(-5 + 16)]}

$|A|$= -[-(-11)]

$|A|$= -11.

(b) $B=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$|B|=\begin{vmatrix} -2 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$|B|=\begin{vmatrix} -7 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$|B|$= -7 (5 * 3 - 1 * 0)

$|B|$= -7 (15 - 0)

$|B|$= -7 * 15

$|B|$= -105.

(c) $C=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$|C|= \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|=$ -2 $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|=$ -2 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -13 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|=$ -2 {-[1 * 1 - (-13) * 2]}
$|C|=$ -2 {-[1 - (-26)]}
$|C|=$ -2 [-(1 + 26)]
$|C|=$ -2 (-27)
$|C|=$ 54.

(d) $D= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$|D|= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
$|D|= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -9 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
$|D|= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 14 & 29 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
$|D|=$ 1 (14 * 3 - 29 * 1)
$|D|=$ 42 - 29
$|D|=$ 13.

Ejercicio 15.

Si A es una matriz de 5x5 y el det (A)= k, hallar y justificar:

(a) *det (8A).*

det (8A)= 8^5 det (A)
det (8A)= 32768k.

(b) *det* ($(6A)^9$).

det ($(6A)^9$)= det ($6^9 A^9$)
det ($(6A)^9$)= $(6^9)^5$ det (A^9)
det ($(6A)^9$)= $(6^9)^5$ $(det\ (A))^9$
det ($(6A)^9$)= $6^{45} k^9$.

Ejercicio 16.

Si B es una matriz de nxn y el det (B)= 10, hallar det ($\frac{3}{4}$ B). Justificar.

det ($\frac{3}{4}$ B)= $(\frac{3}{4})^n$ det (B)
det ($\frac{3}{4}$ B)= 10 $(\frac{3}{4})^n$.

Ejercicio 17.

Si A, B, C son matrices 5x5, det (A)= 3, det (B)= 2 y det (C)= 6, indicar cuánto valen:

(a) *det (*$A\,\frac{1}{3}\,BA^3 5B^{-1}$*).*

det (A $\frac{1}{3}$ B$A^3 5B^{-1}$)= $(\frac{5}{3})^5$ det (ABA^3B^{-1})
det (A $\frac{1}{3}$ B$A^3 5B^{-1}$)= $\frac{5^5}{3^5}$ det (A) det (B) det (A^3) det (B^{-1})
det (A $\frac{1}{3}$ B$A^3 5B^{-1}$)= $\frac{5^5}{3^5}$ det (A) det (B) $(det\ A)^3\ \frac{1}{det(B)}$
det (A $\frac{1}{3}$ B$A^3 5B^{-1}$)= $\frac{5^5}{3^5}\ (det\ A)^4$
det (A $\frac{1}{3}$ B$A^3 5B^{-1}$)= $\frac{5^5}{3^5}\ 3^4$
det (A $\frac{1}{3}$ B$A^3 5B^{-1}$)= $\frac{3125}{3}$.

(b) *det (*$\frac{1}{2}\,BA^4(BA)^{-1}$*).*

det ($\frac{1}{2}$ B$A^4(BA)^{-1}$)= $(\frac{1}{2})^5$ det (B$A^4A^{-1}B^{-1}$)
det ($\frac{1}{2}$ B$A^4(BA)^{-1}$)= $\frac{1}{32}$ det (B) det (A^4) det (A^{-1}) det (B^{-1})
det ($\frac{1}{2}$ B$A^4(BA)^{-1}$)= $\frac{1}{32}$ det (B) $(det\ A)^4\ \frac{1}{det(A)}\ \frac{1}{det(B)}$
det ($\frac{1}{2}$ B$A^4(BA)^{-1}$)= $\frac{1}{32}\ (det\ A)^3$
det ($\frac{1}{2}$ B$A^4(BA)^{-1}$)= $\frac{1}{32}\ 3^3$
det ($\frac{1}{2}$ B$A^4(BA)^{-1}$)= $\frac{27}{32}$.

(c) *det (*$(\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}$*).*

det ($(\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}$)= det ($(\frac{5}{3})^3B^3C^3 2^4B^4(A^{-1})^4A^{-1}B^{-1}C^{-1}$)
det ($(\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}$)= det ($(\frac{5}{3})^3B^3C^3 2^4B^4(A^{-1})^5B^{-1}C^{-1}$)
det ($(\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}$)= $((\frac{5}{3})^3)^5\ (2^4)^5$ det (B^3) det (C^3) det (B^4) det ($(A^{-1})^5$) det (B^{-1}) det (C^{-1})
det ($(\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}$)= $(\frac{5}{3})^{15}\ 2^{20}\ (det\ B)^3\ (det\ C)^3\ (det\ B)^4\ (det\ (A^{-1}))^5\ \frac{1}{det(B)}\ \frac{1}{det(C)}$
det ($(\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}$)= $\frac{5^{15}}{3^{15}}\ 2^{20}\ (det\ B)^6\ (det\ C)^2\ (\frac{1}{det(A)})^5$
det ($(\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}$)= $\frac{5^{15}}{3^{15}}\ 2^{20}\ (det\ B)^6\ (det\ C)^2\ \frac{1}{(det(A))^5}$

det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1})= \frac{5^{15}}{3^{15}}\, 2^{20} 2^6 6^2\, \frac{1}{3^5}$

det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1})= \frac{2^{26}5^{15}6^2}{3^{20}}$.

Ejercicio 18.

Decidir si las siguientes matrices tienen o no inversa:

(a) $A= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$|A|= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$
$|A|$= 2 (-1) - (-3) * 1
$|A|$= -2 - (-3)
$|A|$= -2 + 3
$|A|$= 1.

Por lo tanto, esta matriz tiene inversa.

(b) $B= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$.

$|B|= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix}$
$|B|= \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 12 & -9 \end{vmatrix}$
$|B|$= -[1 * 12 - (-4) (-3)]
$|B|$= -(12 - 12)
$|B|$= -0
$|B|$= 0.

Por lo tanto, esta matriz no tiene inversa.

(c) $C= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$|C|= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
$|C|$= 3 [2 (-1) - 5 * 1]
$|C|$= 3 (-2 - 5)
$|C|$= 3 (-7)
$|C|$= -21.

Por lo tanto, esta matriz tiene inversa.

Ejercicio 19.

Hallar los valores de k para que las siguientes matrices tengan inversa.

(a) $A= \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ -(k-2) & 1 \end{pmatrix}$.

$|A|= 0$
$\begin{vmatrix} 1 & k+2 \\ -(k-2) & 1 \end{vmatrix}= 0$
$\begin{vmatrix} 1 & k+2 \\ -k+2 & 1 \end{vmatrix}= 0$
1 * 1 - (k + 2) (-k + 2)= 0
1 - (-k^2 + 2k - 2k + 4)= 0
1 - (-k^2 + 4)= 0
1 + k^2 - 4= 0
k^2 - 3= 0
k^2= 3
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{3}$
$|k|$= $\sqrt{3}$
k= $\pm\sqrt{3}$.

Por lo tanto, los valores de k para que esta matriz tenga inversa son $\mathbb{R}$ - $\{\pm\sqrt{3}\}$.

(b) $B= \begin{pmatrix} k-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & k+5 \end{pmatrix}$.

$|B|= 0$
$\begin{vmatrix} k-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & k+5 \end{vmatrix}= 0$
(k - 5) [1 (k + 5) - 0 * 0]= 0
(k - 5) (k + 5 - 0)= 0
(k - 5) (k + 5)= 0
k^2 + 5k - 5k - 25= 0
k^2 - 25= 0
k^2= 25
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{25}$
$|k|$= 5
k= ± 5.

Por lo tanto, los valores de k para que esta matriz tenga inversa son $\mathbb{R}$ - $\{\pm 5\}$.

Ejercicio 20.

Sean A, B matrices nxn. Decidir, por propiedades del determinante, si las siguientes afirmaciones son V o F. Justificar.

(a) *Si A no tiene inversa, entonces, AB no tiene inversa.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que $(AB)^{-1}$= $B^{-1}A^{-1}$.

(b) *Si A tiene inversa y B no, entonces, AB no tiene inversa.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que $(AB)^{-1}$= $B^{-1}A^{-1}$.

(c) *Si AB no tiene inversa, entonces, ni A ni B tienen inversa.*

Esta afirmación es FALSA, ya que, si AB no tiene inversa, entonces, al menos, una de las dos matrices, A o B, no tiene inversa.

(d) *Si AB no tiene inversa, entonces, al menos, una de las dos, A o B, no tiene inversa.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que $(AB)^{-1}$= $B^{-1}A^{-1}$.

(e) *Si det (A)= det (B), entonces, A= B.*

Esta afirmación es FALSA, ya que, por ejemplo, si A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, det (A)= det (B)= -2, pero A$\neq$ B.

Ejercicio 21.

Decidir si hay valores de k (y encontrarlos) para los que el siguiente sistema es compatible determinado, justificar la respuesta.

$$\begin{cases} 3(k+5)x_1 + 9x_2 - x_3 = b_1 \\ 6x_2 + 12x_3 = b_2 \\ 5x_1 + (1-k)x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}.$$

AX= b

$$\begin{pmatrix} 3(k+5) & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 5 & 1-k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$|A|$= 0

$$\begin{vmatrix} 3(k+5) & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 5 & 1-k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3k+15 & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 5 & 1-k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(3k + 15) [6 * 1 - 12 (1 - k)] + 5 [9 * 12 - (-1) * 6]= 0
(3k + 15) (6 - 12 + 12k) + 5 [108 - (-6)]= 0
(3k + 15) (-6 + 12k) + 5 (108 + 6)= 0
-18k + $36k^2$ - 90 + 180k + 5 * 114= 0
$36k^2$ - 90 + 162k + 570= 0
$36k^2$ + 162k + 480= 0
36 ($k^2 + \frac{9}{2}$ k + $\frac{40}{3}$)= 0
$k^2 + \frac{9}{2}$ k + $\frac{40}{3} = \frac{0}{36}$
$k^2 + \frac{9}{2}$ k + $\frac{40}{3}$= 0.

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{2})^2 - 4*1\frac{40}{3}}}{2*1}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{160}{3}}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\frac{-397}{12}}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{-1*\frac{397}{12}}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{397}{12}}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\frac{397}{3*4}}i}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{397}{3}}i}{2}$$

$k_1 = \frac{\frac{-9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{397}{3}}i}{2} = \frac{\frac{1}{2}(-9+\sqrt{\frac{397}{3}}i)}{2} = \frac{1}{4}$ (-9 + $\sqrt{\frac{397}{3}}$ i).

$k_2 = \frac{\frac{-9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{397}{3}}i}{2} = \frac{\frac{1}{2}(-9-\sqrt{\frac{397}{3}}i)}{2} = \frac{1}{4}$ (-9 - $\sqrt{\frac{397}{3}}$ i).

Por lo tanto, hay valores de k para los que el sistema es compatible determinado, los cuales son $\mathbb{R}$.

Ejercicio 22.

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$= 3 * 2

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$= 6.

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$= -2 * 5 * 3

$\begin{vmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$= -30.

(c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{vmatrix}$= -2 * 5 * 3

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{vmatrix}$= -30.