Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 1:
Lógica y Conjuntos.

Ejercicio 1.

Indicar cuáles de las siguientes frases son proposiciones:

(a) *Un cuadro tiene 3 lados.*

Esta frase es una proposición.

(b) $x > 2$.

Esta frase no es una proposición.

(c) *Hoy tardé más de una hora en llegar.*

Esta frase es una proposición.

(d) *El mes de abril del 2019.*

Esta frase no es una proposición.

Ejercicio 2.

Expresar las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas y retraducir su negación al lenguaje coloquial:

(a) *Juana no es simpática, pero sabe bailar.*

p: "Juana no es simpática".
q: "Juana sabe bailar".

Forma simbólica Proposición: $p \wedge q$.
Forma simbólica Negación Proposición: $\neg (p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.
Lenguaje coloquial Negación Proposición: "Juana es simpática o no sabe bailar".

(b) *Los alumnos estudian los fines de semana o se divierten.*

p: "Los alumnos estudian los fines de semana".
q: "Los alumnos se divierten".

Forma simbólica Proposición: $p \vee q$.
Forma simbólica Negación Proposición: $\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.
Lenguaje coloquial Negación Proposición: "Los alumnos no estudian los fines de semana y no se divierten".

(c) *Si los alumnos conocen a los simuladores, entonces, los desprecian.*

p: "Los alumnos conocen a los simuladores".
q: "Los alumnos desprecian a los simuladores".

Forma simbólica Proposición: $p \longrightarrow q$.
Forma simbólica Negación Proposición: $\neg (p \longrightarrow q) \leftrightarrow \neg (\neg p \vee q) \leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg q \leftrightarrow p \wedge \neg q$.
Lenguaje coloquial Negación Proposición: "Los alumnos conocen a los simuladores y no los desprecian".

Ejercicio 3.

Construir tablas de verdad de:

(a) ¬ *(p ∧ q).*

p	**q**	**p ∧ q**	**¬ (p ∧ q)**
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

(b) ¬ *(¬p ∧ ¬r) ∧ q.*

¬p	**¬r**	**¬p ∧ ¬r**	**¬ (¬p ∧ ¬r)**	**q**	**¬ (¬p ∧ ¬r) ∧ q**
V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F

(c) *(p ⟶ q) ⟶ r.*

p	**q**	**p ⟶ q**	**r**	**(p ⟶ q) ⟶ r**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

(d) ¬ *(p ∨ q).*

p	**q**	**p ∨ q**	**¬ (p ∨ q)**
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

(e) *¬q ∧ ¬r.*

q	**r**	**¬q**	**¬r**	**¬q ∧ ¬r**
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

(f) *(¬s ∧ p) ∨ (s ∧ ¬p).*

s	**¬s**	**p**	**¬p**	***¬s ∧ p***	***s ∧ ¬p***	***(¬s ∧ p) ∨ (s ∧ ¬p)***
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F

Ejercicio 4.

Se consideran las siguientes proposiciones p, q, r, s:

p: "Tobi es el perro de mi amigo".
q: "Tobi es un caniche".
r: "Tobi es un caniche que ladra todo el tiempo".
s: "Tobi es un perro muy divertido".

Escribir, con palabras del lenguaje coloquial, los resultados de las siguientes operaciones:

(a) $p \wedge q$.

"Tobi es el perro de mi amigo y es un caniche".

(b) $\neg q \vee \neg r$.

"Tobi no es un caniche o no es un caniche que ladra todo el tiempo".

(c) $\neg r \wedge s$.

"Tobi no es un caniche que ladra todo el tiempo y es un perro muy divertido".

(d) $q \vee s$.

"Tobi es un caniche o es un perro muy divertido".

Juan Menduiña

Ejercicio 5.

Simbolizar las siguientes proposiciones:

(a) *Si $5 > 3$, entonces, $5 - 3 \geq 0$.*

p: “$5 > 3$”.
q: “$5 - 3 \geq 0$”.

$p \longrightarrow q$.

(b) *Si A, B y C son números racionales tales que $2A + 3B - 5C= 0$, entonces, $A= B= C= 0$.*

p: “A, B y C son números racionales”.
q: “$2A + 3B - 5C= 0$”
r: “$A= B= C= 0$”.

$(p \wedge q) \longrightarrow r$.

Ejercicio 6.

(a) *Pasar a la forma si … entonces … y simbolizar: "Es necesario ser argentino para ser presidente de la república".*

Proposición:

"Si soy presidente de la república, entonces, soy argentino".

Simbolización:

p: "soy presidente de la república".
q: "soy argentino".
$p \longrightarrow q$.

(b) *Expresar y simbolizar utilizando la palabra suficiente: "Si aprobó el examen, entonces, contestó bien el 40% de sus preguntas".*

Expresión:

"Es suficiente aprobar el examen para haber contestado bien el 40% de sus preguntas".

Simbolización:

p: "aprobó el examen".
q: "contestó bien el 40% de sus preguntas".
$p \longrightarrow q$.

(c) *Expresar y simbolizar utilizando la palabra necesario: "Pedro es argentino sólo si es americano".*

Expresión:

"Es necesario que Pedro sea americano para que sea argentino".

Simbolización:

p: "Pedro es argentino".
q: "Pedro es americano".
$p \longrightarrow q$.

Ejercicio 7.

Establecer si las siguientes fórmulas constituyen tautologías, contradicciones o contingencias.

(a) *(p ∧ q) ∧ (q ∧ p).*

p	q	p ∧ q	q ∧ p	(p ∧ q) ∧ (q ∧ p)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	F	F

Esta fórmula constituye una contingencia, ya que los resultados de las diferentes líneas de la tabla de verdad son V y F.

(b) *(p ∨ q) ⟶ p.*

p	q	p ∨ q	(p ∨ q) ⟶ p
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

Esta fórmula constituye una contingencia, ya que los resultados de las diferentes líneas de la tabla de verdad son V y F.

(c) *(q ⟶ p) ∨ p.*

p	q	q ⟶ p	(q ⟶ p) ∨ p
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Esta fórmula constituye una contingencia, ya que los resultados de las diferentes líneas de la tabla de verdad son V y F.

Ejercicio 8.

Encontrar proposiciones equivalentes usando las leyes de De Morgan y sustituciones adecuadas:

(a) *p ∧ ¬q.*

[p ∧ ¬q] ⟷ [¬ (¬p ∨ q)].

p	**Q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ ¬q**	**¬ (¬p ∨ q)**
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

(b) ¬ *(¬p ∧ q).*

[¬ (¬p ∧ q)] ⟷ [p ∨ ¬q].

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**¬p ∧ q**	**¬ (¬p ∧ q)**	**p ∨ ¬q**
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

(c) *(p ∧ q)* ∨ *q.*

[(p ∧ q) ∨ q] ⟷ [¬ [¬ (p ∧ q) ∧ ¬q]] ⟷ [¬ [(¬p ∨ ¬q) ∧ ¬q]].

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ q**	**(p ∧ q) ∨ *q***	**¬p ∨ ¬q**	**(¬p ∨ ¬q) ∧ ¬q**	**¬ [(¬p ∨ ¬q) ∧ ¬q]**
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V	V	F

(d) *(p ∧ q)* ∧ *(q ∧ ¬p).*

[(p ∧ q) ∧ (q ∧ ¬p)] ⟷ [¬ [¬ (p ∧ q) ∨ ¬ (q ∧ ¬p)]] ⟷ [¬ [(¬p ∨ ¬q) ∨ (¬q ∨ p)]].

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ q**	**q ∧ ¬p**	**(p ∧ q) ∧ (q ∧ ¬p)**	**¬p ∨ ¬q**	**¬q ∨ p**	**(¬p ∨ ¬q) ∨ (¬q ∨ p)**	**¬ [(¬p ∨ ¬q) ∨ (¬q ∨ p)]**
V	V	F	F	V	F	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F

Ejercicio 9.

Determinar, en cada caso, si la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. Justificar la respuesta.

(a) *$(p \wedge q) \longrightarrow r$, r es V.*

r	**p**	**q**	**$p \wedge q$**	**$(p \wedge q) \longrightarrow r$**
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V

Por lo tanto, la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de la proposición.

(b) *$(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee r)$, p es V y r es F.*

p	**r**	**q**	**$p \wedge q$**	**$p \vee r$**	**$(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee r)$**
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V

Por lo tanto, la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de la proposición.

(c) *$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, q es V.*

q	**p**	**$\neg q$**	**$\neg p$**	**$p \vee q$**	**$\neg p \vee \neg q$**	**$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$**
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V

Por lo tanto, la información que se da no es suficiente para conocer el valor de verdad de la proposición.

Ejercicio 10.

Expresar mediante cuantificadores, esquemas proposicionales, conectivos, además usar equivalencias lógicas para expresar, de manera condicional, las siguientes proposiciones:

(a) *Todos los hombres son mortales.*

U: {hombres}.
p (x): "x es hombre".
q (x): "x es mortal".

$\forall$ x $\in$ U: (si p (x) $\Longrightarrow$ q (x)).

(b) *Hay algún número que no es primo.*

U: {conjunto de números naturales}.
p (x): "x es un número primo".
q (x): "x es un número natural".

$\exists$ x $\in$ U: (si p (x) $\Longrightarrow$ q (x)).

Ejercicio 11.

Sean los esquemas p (x): x + 4= 3 y q (x): x^2 *- 1= 0.*

(a) *¿Existe un universo en el cual la proposición ∀ x: (p (x) ∧ q (x)) resulte verdadera? Justificar.*

p (x): x + 4= 3 ⟹ x= -1.
q (x): x^2 - 1= 0 ⟹ x= [-1; 1].

U: {-1}.

(b) *Hallar un universo U en el cual la proposición anterior sea falsa. Justificar.*

U: {conjunto de números reales menos el -1}.

Ejercicio 12.

A partir de los enunciados, simbolizar y obtener conclusiones:

(a) *Si Juan nació en Mendoza, entonces, es argentino.*
Juan nació en Mendoza.

Simbolización:

p: "Juan nació en Mendoza". VERDADERA.
q: "Juan es argentino".
p $\longrightarrow$ q. VERDADERA.

Conclusión:

q: "Juan es argentino".

(b) *Si Juan nació en Mendoza, entonces, es argentino.*
Juan no es argentino.

Simbolización:

p: "Juan nació en Mendoza".
q: "Juan es argentino". FALSA.
p $\longrightarrow$ q. VERDADERA.

Conclusión:

$\neg$p: "Juan no nació en Mendoza".

Ejercicio 13.

Si x es una variable, decir cuáles de las siguientes expresiones son esquemas:

(a) *Juan y x fueron al teatro.*

Esta expresión es un esquema proposicional.

(b) *x es perro.*

Esta expresión es un esquema proposicional.

(c) *Distancia del punto P a x es igual a 2. (El punto P es conocido).*

Esta expresión es un esquema proposicional.

(d) $x \geq 0 \land x \leq 3$.

Esta expresión es un esquema proposicional.

Ejercicio 14.

En cada caso, decir si se trata de esquemas, en tal caso transformarlo en una proposición. Usar constantes adecuadas. Dar un universo y aplicar cuantificadores. Hallar el valor de verdad de la proposición.

(a) *P (n): n + 1 > n.*

Es un esquema proposicional.

U: {conjunto de números reales}.
∀ x ∈ U: (P (n)).

El valor de verdad de la proposición es VERDADERO.

(b) *Q (n):* n^2 *+ 1.*

No es un esquema proposicional.

(c) *R (n):* n^2 *- 3n + 2= 0.*

Es un esquema proposicional.

U: {1, 2}.
∀ x ∈ U: (R (n)).

El valor de verdad de la proposición es VERDADERO.

(d) *S (n): n es un número racional.*

Es un esquema.

U: {conjunto de números racionales}.
∀ x ∈ U: (S (n)).

El valor de verdad de la proposición es VERDADERO.

Ejercicio 15.

Simbolizar utilizando esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos y dar un universo.

(a) *Hay objetos rojos y, además, hay objetos verdes.*

U: {conjunto de objetos rojos; conjunto de objetos verdes}.
p (x): “x es rojo”.
q (x): “x es verde”.

$\forall$ x $\in$ U: (p (x) $\vee$ q (x)).

(b) *Hay números pares o todos los números son múltiplos de 3.*

U: {conjunto de números naturales múltiplos de 2; conjunto de números naturales múltiplos de 3}.
p (x): “x es par”.
q (x): “x es múltiplo de 3”.

[$\exists$ x $\in$ U: (p (x))] $\vee$ [$\forall$ x $\in$ U: (q (x)].

(c) *No todos los números son múltiplos de 5.*

U: {conjunto de números naturales}.
p (x): “x es múltiplo de 5”.

[$\exists$ x $\in$ U: ($\neg$ p (x))] $\Leftrightarrow$ [$\neg$ ($\forall$ x) $\in$ U: ($\neg$ p (x))].

(d) *Todos los números no son múltiplos de 5.*

U: {conjunto de números naturales no múltiplos de 5}.
p (x): “x es múltiplo de 5”.

[$\forall$ x $\in$ U: ($\neg$ p (x))] $\Leftrightarrow$ [$\neg$ ($\exists$ x) $\in$ U: (p (x))].

(e) *Algunos hombres son aburridos.*

U: {hombres}.
p (x): “x no es aburrido”.

[$\exists$ x $\in$ U: ($\neg$ p (x))] $\Leftrightarrow$ [$\neg$ ($\forall$ x) $\in$ U: (p (x))]

(f) *Ninguna persona es perfecta.*

U: {personas}.
p (x): "x es perfecta".

[∀ x ∈ U: (¬ p (x))] ⟺ [¬ (∃ x) ∈ U: (p (x))].

(g) *No todo número real es un número racional.*

U: {conjunto de números reales}.
p (x): "x es un número racional".

[∃ x ∈ U: (¬ p (x))] ⟺ [¬ (∀ x) ∈ U: (p (x))].

(h) *Todos los números primos son impares excepto el 2.*

U: {conjunto de números primos menos el 2}.
p (x): "x no es un número impar".

[∀ x ∈ U: (¬ p (x))] ⟺ [¬ (∃ x) ∈ U: (p (x))].

Ejercicio 16.

Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

(a) *A= {x: x es una letra de la palabra FACULTAD}.*

A= {F, A, C, U, L, T, A, D}.

(b) *B= {x: x es una cifra del número 3.502.332}.*

B= {3, 5, 0, 2}.

(c) *C= {x: x es diptongo de la palabra VOLUMEN}.*

C= {}.

Ejercicio 17.

Dados los conjuntos A= {1, 2, 3}, B= {1, 2, 4, 5} y C= {2, 4}, calcular los conjuntos A ∩ B, A ∪ B, A - B, C_BC, B - A, A ∩ B ∩ C, A - (B - C), (A - B) - C, B - C. Comparar los resultados y obtener conclusiones posibles.

(a) *A ∩ B.*

A ∩ B= {1, 2}.

(b) *A ∪ B.*

A ∪ B= {1, 2, 3, 4, 5}.

(c) *A - B.*

A - B= {3}.

(d) *C_BC.*

C_BC= {1, 5}.

(e) *B - A.*

B - A= {4, 5}.

(f) *A ∩ B ∩ C.*

A ∩ B ∩ C= {2}.

(g) *A - (B - C).*

A - (B - C)= {2, 3}.

(h) *(A - B) - C.*

(A - B) - C= {3}.

(i) *B - C.*

B - C= {1, 5}.

Ejercicio 18.

Considerando como conjunto Universo a aquel comprendido por todas las letras del alfabeto castellano y los siguientes conjuntos A= {x: x es vocal}, B= {a, e, o}, C= {i, u}, D= {x: x es letra de la palabra murciélago} y E= {x: x es consonante}, dar por extensión:

(a) $A \cap B$.

$A \cap B = \{a, e, o\}$.

(b) $A \cup B$.

$A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$.

(c) $A - B$.

$A - B = \{i, u\}$.

(d) $C \cup D$.

$C \cup D = \{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o\}$.

(e) $E - A$.

$E - A = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$.

(f) $E - D$.

$E - D = \{b, d, f, h, j, k, n, p, q, s, t, v, w, x, y, z\}$.

Ejercicio 19.

Completar las proposiciones siguientes con los símbolos $\in$ o $\notin$:

(a)

$2 \notin \{1, 3, 5, 7\}$.

(b)

$5 \in \{2, 4, 5, 6\}$.

(c)

$0 \notin \emptyset$.

(d)

$1 \notin \{1, 2\} - \{1, 6\}$.

(e)

París $\notin$ {x: x es el nombre de un país}.

(f)

$2 \in \{1, 2\} - \{1, 6\}$.

(g)

$2 \notin \{1, 2\} \cap \{1, 6\}$.

(h)

Jujuy $\in$ {x: x es provincia de Argentina}.

(i)

$2 \in \{1, 2\} \cup \{1, 6\}$.

(j)

$a \notin \{\{a\}\}$.

(k)

$\{a\} \in \{\{a\}\}$.

Ejercicio 20.

¿Cómo se puede traducir las leyes de De Morgan con la notación de conjuntos?

$x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cap x \notin B$.
$(A \cup B)^c \Leftrightarrow A^c \cap B^c$.

$x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cup x \notin B$.
$(A \cap B)^c \Leftrightarrow A^c \cup B^c$.

Ejercicio 21.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos tales que $A \subseteq B$. Determinar, si es posible, el valor de verdad de los siguientes enunciados. Justificar la respuesta.

(a) $\exists\, x: (x \in A \wedge x \notin B)$.

El valor de verdad de este enunciado es FALSO, ya que, si x pertenece al conjunto A, entonces, también pertenece al conjunto B.

(b) $\exists\, x: (x \in B \wedge x \notin A)$.

El valor de verdad de este enunciado es VERDADERO, ya que puede existir x perteneciente al conjunto B que no pertenezca al conjunto A.

(c) $\forall\, x: (x \notin B \longrightarrow x \notin A)$.

El valor de verdad de este enunciado es VERDADERO, ya que, si x no pertenece al conjunto B, entonces, tampoco pertenece al conjunto A.

(d) $\forall\, x: (x \notin A \longrightarrow x \notin B)$.

El valor de verdad de este enunciado es FALSO, ya que, si x no pertenece al conjunto A, puede pertenecer al conjunto B.

Ejercicio 22.

Sean A, B y C conjuntos tales que $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$*. Sabiendo que* $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ *y* $f \notin C$*. ¿Cuáles de las siguientes informaciones son ciertas?*

(a) $a \in C$

Esta información es cierta.

(b) $b \notin A$.

Esta información no es cierta.

(c) $b \in A$.

Esta información no es cierta.

(d) $c \notin A$.

Esta información no es cierta.

(e) $e \notin A$.

Esta información es cierta.

(f) $f \notin A$.

Esta información es cierta.

(g) $d \in B$.

Esta información no es cierta.

(h) $f \in C_{\mathcal{U}}C$.

Esta información es cierta.

(i) $c \in C - B$.

Esta información no es cierta.

(j) $a \in C \cap B$.

Esta información es cierta.

(k) $b \in C_B A$.

Esta información no es cierta.

(l) $d \notin A \cap C$.

Esta información es cierta.

Ejercicio 23 (Adicional).

Indicar los valores de verdad de todas las proposiciones que intervienen para que la proposición $p \longrightarrow (q \vee r)$ resulte falsa.

$p \longrightarrow (q \vee r)$	p	$q \vee r$	q	r
F	V	F	F	F

Los valores de verdad de p, q y r son verdadera, verdadera y falsa, respectivamente.

Ejercicio 24 (Adicional).

Marcar las afirmaciones correctas:

- *Una conjunción es verdadera sólo si las dos proposiciones que la componen lo son.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES CORRECTA.

- *Una conjunción es falsa si las dos proposiciones componentes lo son.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES CORRECTA.

- *Una disyunción es falsa sólo si todas las proposiciones que la componen lo son.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES CORRECTA.

- *Una conjunción es falsa si algunas las proposiciones componentes lo son.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES CORRECTA.

- *Una disyunción es verdadera sólo si lo son todas las proposiciones componentes.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES INCORRECTA.

- *Una disyunción es verdadera sólo si lo son algunas las proposiciones componentes.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES INCORRECTA.

- *Un condicional es falso si el antecedente es verdadero y el consecuente es verdadero.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES INCORRECTA.

- *Un condicional es verdadero si el antecedente es falso.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES CORRECTA.

- *Un condicional es falso si el antecedente es verdadero.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES INCORRECTA.

- *Un bicondicional es verdadero si ambos componentes son verdaderos.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES CORRECTA.

- *Un bicondicional es verdadero si ambos componentes tienen el mismo valor de verdad.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES CORRECTA.

- *Un bicondicional es falso si ambos componentes son falsos.*
  ESTA AFIRMACIÓN ES INCORRECTA.

Ejercicio 25 (Adicional).

La proposición $\neg p \longrightarrow (q \vee r)$ es falsa. ¿Qué sucede con las siguientes proposiciones?

$\neg p \longrightarrow (q \vee r)$	$\neg p$	$q \vee r$	p	q	r
F	V	F	F	F	F

(a) $p \longrightarrow q$.

p	q	$p \longrightarrow q$
F	F	V

Esta proposición es VERDEDERA.

(b) $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \vee \neg r$
F	F	F	V	V	F	V

Esta proposición es VERDEDERA.

(c) $(\neg p \vee q) \longrightarrow r$.

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \longrightarrow r$
F	F	F	V	V	F

Esta proposición es FALSA.

(d) $\neg q \longrightarrow p$.

p	q	$\neg q$	$\neg q \longrightarrow p$
F	F	V	F

Esta proposición es FALSA.

Ejercicio 26 (Adicional).

Analizar si las siguientes proposiciones son equivalentes: $\neg (p \wedge q)$ *y* $\neg p \wedge \neg q$.

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ q**	**¬ (p ∧ q)**	**¬p ∧ ¬q**
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V

Por lo tanto, estas proposiciones no son equivalentes.

Ejercicio 27 (Adicional).

Para cada una de las siguientes proposiciones, dar el valor de verdad para un conjunto universal apropiado y simbolizar usando esquemas proposicionales y cuantificadores:

(a) *Todos los números son amigos.*

U: {conjunto de números naturales}.
p (x): "x es amigo".

∀ x ∈ U: (p (x)).

El valor de verdad de esta proposición es FALSO.

(b) *Algunos números son perfectos.*

U: {conjunto de números naturales}.
p (x): "x es perfecto".

∃ x ∈ U: (p (x)).

El valor de verdad de esta proposición es VERDADERO.

(c) *Los números y los matemáticos son irracionales.*

U_x: {conjunto de números irracionales}.
U_y: {matemáticos}.
p (x): "x es irracional".
q (y): "y es irracional".

∀ x ∈ U_x, ∀ y ∈ U_y: (p (x) ∧ q (y)).

El valor de verdad de esta proposición es FALSO.

Ejercicio 28 (Adicional).

(a) *Simbolizar la siguiente proposición, usando proposiciones simples y/o esquemas proposicionales, cuantificadores y dar un universo: "Hay ingresantes que cursan COC pero no cursan EPA".*

U: {ingresantes}.
p (x): "x cursa COC".
q (x): "x cursa EPA".

$\exists$ x $\in$ U: (p (x) $\wedge$ $\neg$ (q (x))).

(b) *Negar la proposición anterior de forma simbólica y coloquial.*

Forma simbólica:

[$\neg$ [$\exists$ x $\in$ U: (p (x) $\wedge$ $\neg$ (q (x)))]] $\Leftrightarrow$ [$\forall$ x $\in$ U: $\neg$ (p (x) $\wedge$ $\neg$ (q (x)))] $\Leftrightarrow$ [$\forall$ x $\in$ U: ($\neg$ (p (x)) $\vee$ q (x))].

Forma coloquial:

"Todos los ingresantes o no cursan COC o cursan EPA".

Ejercicio 29 (Adicional).

Considerando como conjunto Universo a aquel comprendido por todas las letras del alfabeto castellano y los siguientes conjuntos A= {x: x es vocal}, B= {a, e, o}, C= {i, u}, D= {x: x es letra de la palabra "murciélago"} y E= {x: x es consonante}, indicar si las siguientes afirmaciones son correctas.

(a) *La intersección entre B y C es vacía.*

Esta afirmación es CORRECTA.

(b) *La unión entre A y E es igual al Universo.*

Esta afirmación es CORRECTA.

(c) *El complemento de C respecto de A es igual a D.*

Esta afirmación es INCORRECTA.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2: Conjuntos Numéricos.

Ejercicio 1.

(a) *Sea A= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Hallar los elementos primos de A. Justificar.*

Los elementos primos de A son {2, 3, 5, 7}, ya que cada uno tiene, únicamente, tres divisores distintos: la unidad, él mismo y el opuesto.

(b) *Si un número es primo, ¿qué se puede decir de su opuesto?*

Si un número es primo, su opuesto también lo es.

(c) *Hallar la descomposición en primos de los números 340 y 195.*

340 2
170 2
85 5
17 17
1

340= 2^2 * 5 * 17.

195 3
65 5
13 13
1

195= 3 * 5 * 13.

Juan Menduiña

Ejercicio 2.

Ordenar de menor a mayor $\frac{-12}{6}$, *3,* $\frac{2}{5}$, *-1,* $\frac{-3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{4}$.

$\frac{-12}{6}$, $\frac{-3}{2}$, -1, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, 3.

Ejercicio 3.

Sea -4 < m < 2.

(a) *Hallar $m \in \mathbb{Z}$ tal que cumpla lo anterior.*

$m \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

(b) *Ídem si $m \in \mathbb{Q}$.*

$m \in (-4, 2)$.

Ejercicio 4.

Probar que entre dos números racionales distintos hay otro racional. Importante: Esta propiedad muestra que siempre habrá un número racional entre dos, por muy próximos que estén. Por lo tanto, se dice que el conjunto de los racionales es denso.

Sean a, b $\in \mathbb{Q}$, con $a < b$. Entonces:

$a < b$
$a + a < a + b$ sumando "a" a ambos lados de la desigualdad
$2a < a + b$
$a < \frac{a+b}{2}$.

$a < b$
$a + b < b + b$ sumando "b" a ambos lados de la desigualdad
$a + b < 2b$
$\frac{a+b}{2} < b$.

Como se puede ver, se tiene que $a < b$ implica que $a < \frac{a+b}{2} < b$ y, dado que $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$, queda demostrado que entre dos números racionales distintos hay otro racional.

Ejercicio 5.

Dados $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}$. Probar:

(a) *$(a > b) \longrightarrow (a + c > b + c)$.*

$a > b$
$a + c > b + c$. sumando "c" a ambos lados de la desigualdad

(b) *$(a > b \wedge c > 0) \longrightarrow (ac > bc)$.*

$a > b$
$ac > bc$. multiplicando "c" a ambos lados de la desigualdad

(c) *$(a > b \wedge c < 0) \longrightarrow (ac < bc)$.*

$ac > bc$
$ac < bc$. multiplicando "c" a ambos lados de la desigualdad

Ejercicio 6.

Probar que, para todo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $(a > b) \leftrightarrow (aa > bb)$.

$(a > b) \leftrightarrow (a^2 > b^2)$ elevando al cuadrado a ambos lados de la desigualdad
$(a > b) \leftrightarrow (aa > bb)$.

Ejercicio 7.

Analizar la validez de la siguiente afirmación: "Si ab= 0 ⟶ a= 0 ∨ b= 0". ¿Vale la recíproca?

Esta afirmación es válida. La recíproca (si a= 0 ∨ b= 0 ⟶ ab= 0) también es válida.

Ejercicio 8.

En los siguientes cálculos, se han cometido errores al aplicar propiedades. Indicar dichos errores y corregirlos.

(a) $(b^2 b^{-3} b^5)^2 = (b^4)^2 = b^{16}$*, se supone* $b \neq 0$.

$(b^2 b^{-3} b^5)^2 = (b^4)^2$
$(b^2 b^{-3} b^5)^2 = b^8$.

(b) $\frac{(a^2)^4}{(a^{-3})^2} = \frac{a^6}{a^{-6}} = 1$*, se supone* $a \neq 0$.

$\frac{(a^2)^4}{(a^{-3})^2} = \frac{a^8}{a^{-6}}$
$\frac{(a^2)^4}{(a^{-3})^2} = a^8 a^6$
$\frac{(a^2)^4}{(a^{-3})^2} = a^{14}$.

(c) $\frac{7^4(7^2)^6}{(7^9)^2} = \frac{7^4 7^{12}}{7^{18}} = 7^{-2} = 49$.

$\frac{7^4(7^2)^6}{(7^9)^2} = \frac{7^4 7^{12}}{7^{18}}$
$\frac{7^4(7^2)^6}{(7^9)^2} = \frac{7^{16}}{7^{18}}$
$\frac{7^4(7^2)^6}{(7^9)^2} = 7^{-2}$
$\frac{7^4(7^2)^6}{(7^9)^2} = \frac{1}{49}$.

(d) $(7 - 14)^0 + 5^0 = 1$.

$(-7)^0 + 5^0 = 1 + 1$
$(-7)^0 + 5^0 = 2$.

Juan Menduiña

Ejercicio 9.

Aplicando las propiedades de la potencia, probar que:

(a) $\frac{(10*2^{n+1})^3}{(2^{n+1})^3}$= *1000.*

$\frac{(10*2^{n+1})^3}{(2^{n+1})^3}= \frac{10^3(2^{n+1})^3}{(2^{n+1})^3}$
$\frac{(10*2^{n+1})^3}{(2^{n+1})^3}= 10^3$
$\frac{(10*2^{n+1})^3}{(2^{n+1})^3}$= 1000.

(b) 2^{2-m} *(2 * 2^{m+1} + 2^{m+2})= 32.*

2^{2-m} (2 * 2^{m+1} + 2^{m+2})= 2^{2-m} * 2 * 2^{m+1} + $2^{2-m}2^{m+2}$
2^{2-m} (2 * 2^{m+1} + 2^{m+2})= 2^4 + 2^4
2^{2-m} (2 * 2^{m+1} + 2^{m+2})= 16 + 16
2^{2-m} (2 * 2^{m+1} + 2^{m+2})= 32.

Ejercicio 10.

Calcular:

(a) $\frac{(1-\frac{3}{2})(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})^2}{\frac{\frac{1}{3}-1}{(\frac{2}{5}-2)^2}}$.

$$\frac{(1-\frac{3}{2})(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})^2}{\frac{\frac{1}{3}-1}{(\frac{2}{5}-2)^2}}=\frac{\frac{-1}{2}(\frac{-5}{6})^2}{\frac{\frac{-2}{3}}{(\frac{-8}{5})^2}}$$

$$\frac{(1-\frac{3}{2})(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})^2}{\frac{\frac{1}{3}-1}{(\frac{2}{5}-2)^2}}=\frac{\frac{-1}{2}*\frac{25}{36}}{\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{64}{25}}}$$

$$\frac{(1-\frac{3}{2})(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})^2}{\frac{\frac{1}{3}-1}{(\frac{2}{5}-2)^2}}=\frac{\frac{-25}{72}}{\frac{-50}{192}}$$

$$\frac{(1-\frac{3}{2})(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})^2}{\frac{\frac{1}{3}-1}{(\frac{2}{5}-2)^2}}=\frac{\frac{-1}{6}}{\frac{-2}{16}}$$

$$\frac{(1-\frac{3}{2})(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})^2}{\frac{\frac{1}{3}-1}{(\frac{2}{5}-2)^2}}=\frac{\frac{-1}{6}}{\frac{-1}{8}}$$

$$\frac{(1-\frac{3}{2})(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})^2}{\frac{\frac{1}{3}-1}{(\frac{2}{5}-2)^2}}=\frac{4}{3}.$$

(b) $[(1-\frac{3}{2})^2]^{-4}\ \frac{1}{16}+11$.

$$[(1-\frac{3}{2})^2]^{-4}\ \frac{1}{16}+11=[(\frac{-1}{2})^2]^{-4}\ \frac{1}{16}+11$$

$$[(1-\frac{3}{2})^2]^{-4}\ \frac{1}{16}+11=(\frac{-1}{2})^{-8}\ \frac{1}{16}+11$$

$$[(1-\frac{3}{2})^2]^{-4}\ \frac{1}{16}+11=\frac{2^8}{(-1)^8}\ \frac{1}{16}+11$$

$$[(1-\frac{3}{2})^2]^{-4}\ \frac{1}{16}+11=\frac{256}{1}\ \frac{1}{16}+11$$

$$[(1-\frac{3}{2})^2]^{-4}\ \frac{1}{16}+11=16+11$$

$$[(1-\frac{3}{2})^2]^{-4}\ \frac{1}{16}+11=27.$$

(c) $\frac{0,27}{(\frac{16}{25-16})^{\frac{-1}{2}}}-\sqrt{\frac{25}{16}}$.

$\frac{0,27}{(\frac{16}{25-16})^{\frac{-1}{2}}}$ - $\sqrt{\frac{25}{16}}$= $\frac{\frac{27}{100}}{(\frac{16}{9})^{\frac{-1}{2}}}$ - $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}$

$\frac{0,27}{(\frac{16}{25-16})^{\frac{-1}{2}}}$ - $\sqrt{\frac{25}{16}}$= $\frac{27}{100}$ $(\frac{16}{9})^{\frac{1}{2}}$ - $\frac{5}{4}$

$\frac{0,27}{(\frac{16}{25-16})^{\frac{-1}{2}}}$ - $\sqrt{\frac{25}{16}}$= $\frac{27}{100}$ $\frac{4}{3}$ - $\frac{5}{4}$

$\frac{0,27}{(\frac{16}{25-16})^{\frac{-1}{2}}}$ - $\sqrt{\frac{25}{16}}$= $\frac{9}{25}$ - $\frac{5}{4}$

$\frac{0,27}{(\frac{16}{25-16})^{\frac{-1}{2}}}$ - $\sqrt{\frac{25}{16}}$= $\frac{-89}{100}$

$\frac{0,27}{(\frac{16}{25-16})^{\frac{-1}{2}}}$ - $\sqrt{\frac{25}{16}}$= -0,89.

(d) $\frac{\sqrt{7}7^5\sqrt{7^3}}{(7^2)^3}$.

$\frac{\sqrt{7}7^5\sqrt{7^3}}{(7^2)^3}$= $\frac{7^{\frac{1}{2}}7^5 7^{\frac{3}{2}}}{7^6}$

$\frac{\sqrt{7}7^5\sqrt{7^3}}{(7^2)^3}$= $\frac{7^7}{7^6}$

$\frac{\sqrt{7}7^5\sqrt{7^3}}{(7^2)^3}$= 7^1

$\frac{\sqrt{7}7^5\sqrt{7^3}}{(7^2)^3}$= 7.

Ejercicio 11.

Responder si es V o F y justificar:

(a) $\frac{1}{4} < a < 25 \longrightarrow (\frac{1}{4})^2 < a^2 < 25^2$.

Es VERDADERO, ya que las bases son positivas.

(b) $-3 < -a < \frac{-1}{3} \longrightarrow (-3)^2 < (-a)^2 < (\frac{-1}{3})^2$.

Es FALSO, ya que las bases son negativas y se invierten las desigualdades.

Ejercicio 12.

Calcular:

(a) $\sqrt{5}\ \sqrt{5}$ - $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4}$.

$\sqrt{5}\ \sqrt{5}$ - $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4}$= $5^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{2}}$ - $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{2*2}$
$\sqrt{5}\ \sqrt{5}$ - $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4}$= 5 - $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{2}$
$\sqrt{5}\ \sqrt{5}$ - $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4}$= 5 - $2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt{5}\ \sqrt{5}$ - $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4}$= 5 - 2
$\sqrt{5}\ \sqrt{5}$ - $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4}$= 3.

(b) $(1+\sqrt{5})^2$ - $\sqrt{20}$.

$(1+\sqrt{5})^2$ - $\sqrt{20}$= 1^2 + 2 * 1 $\sqrt{5}$ + $(\sqrt{5})^2$ - $\sqrt{4*5}$
$(1+\sqrt{5})^2$ - $\sqrt{20}$= 1 + 2 $\sqrt{5}$ + 5 - $\sqrt{4}\ \sqrt{5}$
$(1+\sqrt{5})^2$ - $\sqrt{20}$= 1 + 2 $\sqrt{5}$ + 5 - 2 $\sqrt{5}$
$(1+\sqrt{5})^2$ - $\sqrt{20}$= 6.

(c) $\sqrt[4]{48}$ - $\sqrt[4]{3}$ *(1 +* $\sqrt[4]{81}$*).*

$\sqrt[4]{48}$ - $\sqrt[4]{3}$ (1 + $\sqrt[4]{81}$)= $\sqrt[4]{16*3}$ - $\sqrt[4]{3}$ (1 + 3)
$\sqrt[4]{48}$ - $\sqrt[4]{3}$ (1 + $\sqrt[4]{81}$)= $\sqrt[4]{16}\ \sqrt[4]{3}$ - $\sqrt[4]{3}$ * 4
$\sqrt[4]{48}$ - $\sqrt[4]{3}$ (1 + $\sqrt[4]{81}$)= 2 $\sqrt[4]{3}$ - 4 $\sqrt[4]{3}$
$\sqrt[4]{48}$ - $\sqrt[4]{3}$ (1 + $\sqrt[4]{81}$)= -2 $\sqrt[4]{3}$.

Ejercicio 13.

¿Son correctas las igualdades?

(a) $\sqrt{50}$= *5* $\sqrt{2}$.

$\sqrt{50}$= $\sqrt{2 * 25}$
$\sqrt{50}$= $\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$.

Por lo tanto, la igualdad es correcta.

(b) $\sqrt{12}$= *3* $\sqrt{2}$.

$\sqrt{12}$= $\sqrt{2 * 6}$
$\sqrt{12}$= $\sqrt{2}$ $\sqrt{6}$.

Por lo tanto, la igualdad es incorrecta.

(c) $\sqrt[5]{64}$= *2* $\sqrt[5]{-2}$.

$\sqrt[5]{64}$= $\sqrt[5]{2 * 32}$
$\sqrt[5]{64}$= $\sqrt[5]{2}$ $\sqrt[5]{32}$
$\sqrt[5]{64}$= 2 $\sqrt[5]{2}$.

Por lo tanto, la igualdad es incorrecta.

Ejercicio 14.

Responder V o F y justificar:

(a) $(ab)^2 = a^2 b^2$.

VERDADERO, ya que la potencia es distributiva respecto al producto.

(b) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.

FALSO, ya que la potencia es distributiva respecto a la resta y habría que aplicar trinomio cuadrado perfecto.

(c) $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$, *con* $b \neq 0$.

VERDADERO, ya que la potencia es distributiva respecto al cociente.

(d) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

VERDADERO, ya que se aplica trinomio cuadrado perfecto.

(e) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

VERDADERO, ya que se aplica, correctamente, la propiedad distributiva.

Ejercicio 15.

Para los siguientes incisos, se va a suponer que están definidas las raíces, es decir, se pueden realizar las operaciones en los reales. Responder V o F. Justificar

(a) $\sqrt{a+b}= \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

FALSO, ya que la raíz no es distributiva respecto a la suma.

(b) $\sqrt[n]{ab}= \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$.

VERDADERO, ya que la raíz es distributiva respecto al producto.

Ejercicio 16 (Adicional).

(a) *Si cada pizza viene cortada en 8 porciones, ¿qué es más, 4 pizzas o 37 porciones?*

4 pizzas= 32 porciones.

Por lo tanto, 37 porciones es mayor a 4 pizzas.

(b) *21 amigos se juntan a comer pizza. Compran 8 pizzas (que vienen cortadas en 8 porciones cada una). ¿Alcanza para que coman 3 porciones cada uno?*

8 pizzas= 64 porciones.
21 amigos = 63 porciones.

Por lo tanto, si compran 8 pizzas, alcanza para que los 21 amigos coman 3 porciones cada uno.

Ejercicio 17 (Adicional).

Demostrar que el número 2520 es el número más pequeño que puede ser dividido, en forma exacta, por los números del 1 al 10.

Fact (1)= 1
Fact (2) ∪ Fact (4) ∪ Fact (8)= Fact (8)= 2^3.
Fact (3) ∪ Fact (6) ∪ Fact (9)= Fact (9)= 3^2.
Fact (5)= 5
Fact (7)= 7.
Fact (10)= 2 * 5.

Fact (1) ∪ Fact (2) ∪ Fact (3) ∪ Fact (4) ∪ Fact (5) ∪ Fact (6) ∪ Fact (7) ∪ Fact (8) ∪ Fact (9) ∪ Fact (10)= 1 * 2^3 * 3^2 * 5 * 7= 2520.

Por lo tanto, queda demostrado que el número 2520 es el número más pequeño que puede ser dividido, en forma exacta, por los números del 1 al 10.

Ejercicio 18 (Adicional).

Hallar el error en el siguiente cálculo:

$4 + \frac{18}{3} = \frac{12}{3} + 6$, pues $\frac{12+18}{3} = \frac{12+18}{3}$, por la definición de suma en $\mathbb{Q}$. Entonces, $4 - \frac{12}{3} = 6 - \frac{18}{3}$ y, luego, $2 (2 - \frac{6}{3}) = 3 (2 - \frac{6}{3})$. Así, resulta $2 = 3$.

El error proviene de que $2 (2 - \frac{6}{3}) = 3 (2 - \frac{6}{3})$ no implica que $2 = 3$.

Juan Menduiña

Ejercicio 19 (Adicional).

En una heladería de Barracas, venden potes de un sexto de kilo, además de los potes comunes de un cuarto de kilo. Extrañamente, tienen como política no poner más de un gusto en un mismo pote, por lo tanto, hay que llevar tantos potes como gustos uno quiera. Un grupo de amigos lleva 7 potes de un sexto y 3 potes de un cuarto. En total, ¿están llevando 2 kilos, más, o menos?

Helado comprado (kg)= $7\,\frac{1}{6} + 3\,\frac{1}{4}$
Helado comprado (kg)= $\frac{7}{6} + \frac{3}{4}$
Helado comprado (kg)= $\frac{23}{12}$
Helado comprado (kg)= $1{,}91\widehat{6}$.

Por lo tanto, si un grupo de amigos lleva 7 potes de un sexto y 3 potes de un cuarto, en total, están llevando menos de 2 kilos.

Ejercicio 20 (Adicional).

Analizar si son válidas las siguientes igualdades:

(a) 2^{2-m} *(2 * 2^{m+1} + 2^{m+2})= 32.*

$2^{2-m}\ (2 * 2^{m+1} + 2^{m+2}) = 2^{2-m} * 2 * 2^{m+1} + 2^{2-m}\ 2^{m+2}$
$2^{2-m}\ (2 * 2^{m+1} + 2^{m+2}) = 2^4 + 2^4$
$2^{2-m}\ (2 * 2^{m+1} + 2^{m+2}) = 16 + 16$
$2^{2-m}\ (2 * 2^{m+1} + 2^{m+2}) = 32.$

Por lo tanto, esta igualdad es válida.

(b) $\frac{2^{m-1}}{2^{3-m}}$ *- (2^m + 2 * 2^{m-1})= 0.*

$\frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - (2^m + 2 * 2^{m-1}) = \frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - 2^m - 2 * 2^{m-1}$
$\frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - (2^m + 2 * 2^{m-1}) = \frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - 2^m\ \ 2^m$
$\frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - (2^m + 2 * 2^{m-1}) = \frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - 2 * 2^m$
$\frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - (2^m + 2 * 2^{m-1}) = \frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - 2^{m+1}$
$\frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - (2^m + 2 * 2^{m-1}) = \frac{2^{m-1} - 2^{3+1}}{2^{3-m}}.$

Por lo tanto, esta igualdad no es válida.

(c) 3^{-4-m} *($3^2 3^{m+1}$ + 3^{m+3} + 3 * 3^{m+2})= 0.*

$3^{-4-m}\ (3^2 3^{m+1} + 3^{m+3} + 3 * 3^{m+2}) = 3^2 3^{m+1} + 3^{m+3} + 3 * 3^{m+2}$
$3^{-4-m}\ (3^2 3^{m+1} + 3^{m+3} + 3 * 3^{m+2}) = 3^{m+3} + 3^{m+3} + 3^{m+3}$
$3^{-4-m}\ (3^2 3^{m+1} + 3^{m+3} + 3 * 3^{m+2}) = 3^3\ (3^m + 3^m + 3^m)$
$3^{-4-m}\ (3^2 3^{m+1} + 3^{m+3} + 3 * 3^{m+2}) = 3^3$
$3^{-4-m}\ (3^2 3^{m+1} + 3^{m+3} + 3 * 3^{m+2}) = 9.$

Por lo tanto, esta igualdad no es válida.

(d) $(2k+3k)^2= 13k^2$.

$(2k+3k)^2= 4k^2 + 12k^2 + 9k^2$
$(2k+3k)^2= 25k^2$.

Por lo tanto, esta igualdad no es válida.

(e) $\sqrt{a+b}= \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Por lo tanto, esta igualdad no es válida.

Ejercicio 21 (Adicional).

Escribir fracciones equivalentes a las dadas, racionalizando los denominadores:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

(b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt{5}}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt{5}}\frac{\sqrt[4]{3}-\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{5}}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt[4]{3}-5}{\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}\sqrt{5}+\sqrt{5}\sqrt[4]{3}-5}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt[4]{3}-5}{\sqrt{3}-5}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt[4]{3}-5}{\sqrt{3}-5}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt[4]{3}-5}{\sqrt{3}-5}\frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}+5}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt[4]{3}\sqrt{3}+5\sqrt{5}\sqrt[4]{3}-5\sqrt{3}-25}{3+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}-25}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt[4]{3^3}+\sqrt{5^3}\sqrt[4]{3}-5\sqrt{3}-25}{-22}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}=\frac{-\sqrt{5}\sqrt[4]{3^3}-\sqrt{5^3}\sqrt[4]{3}+5\sqrt{3}+25}{22}.$$

(c) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-\sqrt{7}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{7}-3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}.$$

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 3:
Expresiones Algebraicas. Ecuaciones, Sistemas de Ecuaciones Lineales y Mixtos.

Ejercicio 1.

Indicar, en cada caso, cuál/cuáles expresiones algebraicas es/son equivalentes a la dada (justificar).

(a) $\frac{2x}{2+x}$.

(i) $\frac{x}{1+x}$.

(ii) $\frac{2}{3}$.

(iii) $\frac{2x}{2+x}$. Esta expresión es equivalente a la dada.

(b) $x^2 x^n$.

(i) x^{2-n}.

(ii) x^{2+n}. Esta expresión es equivalente a la dada.

(iii) $(x^2)^n$.

(c) $\frac{h^n}{h^2}$.

(i) $h^{\frac{n}{2}}$.

(ii) h^{2-n}.

(iii) h^{n-2}. Esta expresión es equivalente a la dada.

(d) x^2 - $x^2 x$ * *2* + *2*.

(i) -x^2 + 1.

(ii) $x^{(2+2)}$ + 2.

(iii) -x^2 + 2.

(e) $\frac{2}{x^2-5x}+\frac{1}{x-5}$.

(i) $\frac{3}{x^2-5x}$.

(ii) $\frac{2+x}{x(x-5)}$. Esta expresión es equivalente a la dada.

(iii) $\frac{3}{x-5}$.

(f) *3*xy^2 - x^2y *+ 5y(xy).*

(i) 3$(xy)^2$ + 5xy + 5y^2.

(ii) 7xy.

(iii) 8xy^2 - yx^2. Esta expresión es equivalente a la dada.

Ejercicio 2.

Resolver justificando cada paso:

(a) *10 - 3x= x - 2.*

$10 - 3x = x - 2$
$x + 3x = 10 + 2$
$4x = 12$
$x = \frac{12}{4}$
$x = 3.$

(b) *a - x= 3 (x - a).*

$a - x = 3 (x - a)$
$a - x = 3x - 3a$
$3x + x = a + 3a$
$4x = 4a$
$x = \frac{4a}{4}$
$x = a.$

(c) $3 (2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2} (1 - x) + \frac{x+3}{2}.$

$3 (2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2} (1 - x) + \frac{x+3}{2}$
$6 - 3x + 1 = -x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} x + \frac{1}{2} x + \frac{3}{2}$
$-3x + 7 = -3x + 4$
$7 \neq 4.$

(d) $\frac{1}{3} x - x = \frac{1}{4} x + 1.$

$\frac{1}{3} x - x = \frac{1}{4} x + 1$
$\frac{1}{3} x - x - \frac{1}{4} x = 1$
$\frac{11}{12} x = 1$
$x = \frac{1}{\frac{11}{12}}$
$x = \frac{12}{11}$
$x = 1,\widehat{09}.$

(e) *$5x + 2 = 8x - \frac{1}{2} - 3x$.*

$5x + 2 = 8x - \frac{1}{2} - 3x$

$5x - 8x + 3x = \frac{-1}{2} - 2$

$0 \neq \frac{-5}{2}$.

Ejercicio 3.

Resolver las ecuaciones e indicar el conjunto numérico al que pertenecen.

(a) *10= x - 2.*

10= x - 2
x= 10 + 2
x= 12 $\in \mathbb{N}$.

(b) *x= 3 (x - 5).*

x= 3 (x - 5)
x= 3x - 15
3x - x= 15
2x= 15
x= $\frac{15}{2}$
x= 7,5 $\in \mathbb{Q}$.

(c) $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$.

$\frac{3}{2}$ x - $\frac{1}{2}$= -x + $\frac{5}{2}$
$\frac{3}{2}$ x + x= $\frac{5}{2}$ + $\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$ x= 6
x= $\frac{6}{\frac{5}{2}}$
x= $\frac{12}{5}$
x= 2,4 $\in \mathbb{Q}$.

(d) $\sqrt{5} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x + 1$.

$\sqrt{5}$ - $\frac{1}{3}$ x= $\frac{1}{4}$ x + 1
$\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{3}$ x= $\sqrt{5}$ - 1
$\frac{7}{12}$ x= 1,24
x= $\frac{1,24}{\frac{7}{12}}$
x= 2,118973 … $\in I$.

(e) $5\pi x + 2\pi = 8x - \frac{5}{2}$.

$5\pi x + 2\pi = 8x - \frac{5}{2}$
$5\pi x - 8x = \frac{-5}{2}\pi$
$x(5\pi - 8) = \frac{-5}{2}\pi$
$x = \frac{\frac{-5}{2}\pi}{5\pi - 8}$
$x = -1{,}018943 \ldots \in I$.

(f) $x + 3 - \frac{2}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}(x + 5) + 2$.

$x + 3 - \frac{2}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}(x + 5) + 2$
$x + 3 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} + 2$
$x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x = \frac{5}{3} + 2 - 3 - \frac{2}{3}$
$0 = 0 \in \mathbb{N}$.

(g) $3(2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2}(1 - x) + \frac{1}{2}(x + 3)$.

$3(2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2}(1 - x) + \frac{1}{2}(x + 3)$
$6 - 3x + 1 = -x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
$-3x + x + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} - 6 - 1$
$\frac{1}{2}x = -3$
$x = \frac{-3}{\frac{1}{2}}$
$x = -6 \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 4.

Resolver:

(a) $\begin{cases} 3x-y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=3x-\frac{1}{2} \\ 2x-3y=\frac{-5}{6} \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{18} \end{cases}$.

3x - $\frac{1}{2}$= $\frac{2}{3}$ x + $\frac{5}{18}$
3x - $\frac{2}{3}$ x= $\frac{5}{18}$ + $\frac{1}{2}$
$\frac{7}{3}$ x= $\frac{7}{9}$
x= $\frac{\frac{7}{9}}{\frac{7}{3}}$
x^*= $\frac{1}{3}$.

y^*= 3 $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{2}$= 1 - $\frac{1}{2}$= $\frac{1}{2}$.
y^*= $\frac{2}{3}\frac{1}{3}$ + $\frac{5}{18}$= $\frac{2}{9}$ + $\frac{5}{18}$= $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, existe una única solución: x^*= $\frac{1}{3}$, y^*= $\frac{1}{2}$.

(b) $\begin{cases} 2x+y=4 \Leftrightarrow y=-2x+4 \\ 4x+2y=5 \Leftrightarrow y=-2x+\frac{5}{2} \end{cases}$.

-2x + 4= -2x + $\frac{5}{2}$
4≠ $\frac{5}{2}$.

Por lo tanto, no existe solución.

(c) $\begin{cases} x=2y \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{3}=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x \end{cases}$.

Por lo tanto, existen infinitas soluciones, en donde se cumpla y^*= $\frac{1}{2}$ x^*.

(d) $\begin{cases} x-y=1 \Leftrightarrow x=y+1 \\ y+z=1 \Leftrightarrow y=z+1 \\ z-3x=1 \Leftrightarrow z=3x+1 \end{cases}$.

y= 3x + 1 + 1
y= 3x + 2.

x= 3x + 2 + 1
x= 3x + 3
3x - x= -3
$x^*= \frac{-3}{2}$.

y= 3 $(\frac{-3}{2})$ + 2
y= $\frac{-9}{2}$ + 2
$y^*= \frac{-5}{2}$.

z= 3 $(\frac{-3}{2})$ + 1
z= $\frac{-9}{2}$ + 1
$z^*= \frac{-7}{2}$.

Por lo tanto, existe una única solución: $x^*= \frac{-3}{2}$, $y^*= \frac{-5}{2}$, $z^*= \frac{-7}{2}$.

(e) $\begin{cases} x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = -x - y + 1 \\ x - 2y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \\ -5x + y = -7 \Leftrightarrow y = 5x - 7 \end{cases}$.

$\frac{1}{2}$ x - $\frac{5}{2}$= 5x - 7
5x - $\frac{1}{2}$ x= $\frac{-5}{2}$ + 7
$\frac{9}{2}$ x= $\frac{9}{2}$
x= $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}}$
x^*= 1.

y^*= 5 * 1 - 7
y^*= 5 - 7
y^*= -2.

z^*= -1 - (-2) + 1
z^*= -1 + 2 + 1
z^*= 2.

Por lo tanto, existe una única solución: x^*= 1, y^*= -2, z^*= 2.

(f) $\begin{cases} x-2y+3z=-4 \Leftrightarrow x=2y-3z-4 \\ 3x-4y+2z=-1 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}. \\ 2x+y+2z=6 \Leftrightarrow z=-x-\frac{1}{2}y+3 \end{cases}$

$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}(-x-\frac{1}{2}y+3)+\frac{1}{4}$
$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$
$y+\frac{1}{4}y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$
$\frac{5}{4}y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$
$y=\frac{\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}}{\frac{5}{4}}$
$y=\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}.$

$z=-x-\frac{1}{2}(\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}z+\frac{1}{4})+3$
$z=-x-\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}+3$
$z+\frac{1}{4}z=\frac{-11}{8}x+\frac{23}{8}$
$\frac{5}{4}z=\frac{-11}{8}x+\frac{23}{8}$
$z=\frac{\frac{-11}{8}x+\frac{23}{8}}{\frac{5}{4}}$
$z=\frac{-11}{10}x+\frac{23}{10}.$

$x=2(\frac{1}{5}x+\frac{7}{5})-3(\frac{-11}{10}x+\frac{23}{10})-4$
$x=\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}+\frac{33}{10}x-\frac{69}{10}-4$
$x-\frac{14}{5}x-\frac{33}{10}x=\frac{-81}{10}$
$\frac{-27}{10}x=\frac{-81}{10}$
$x=\frac{\frac{-81}{10}}{\frac{-27}{10}}$
$x^*=3.$

$y^*=\frac{1}{5}*3+\frac{7}{5}$
$y^*=\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$
$y^*=2.$

$z^*=\frac{-11}{10}*3+\frac{23}{10}.$
$z^*=\frac{-33}{10}+\frac{23}{10}$
$z^*=\frac{-10}{10}$
$z^*=-1.$

Por lo tanto, existe una única solución: $x^*=3$, $y^*=2$, $z^*=-1$.

(g) $\begin{cases} y = \sqrt{3}\,x + 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

$x^2 + (\sqrt{3}\,x + 4)^2 = 4$
$x^2 + (\sqrt{3}\,x)^2 + 8\sqrt{3}\,x + 16 = 4$
$x^2 + 3x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 16 - 4 = 0$
$4x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 12 = 0$
$x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 3 = 0$.

$x_1, x_2 = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4*1*3}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{4*3-12}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-12}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{-2\sqrt{3} \pm 0}{2}$
$x^* = \frac{-2\sqrt{3}}{2}$
$x^* = -\sqrt{3}$.

$y^* = \sqrt{3}\,(-\sqrt{3}) + 4$
$y^* = -3 + 4$
$y^* = 1$.

Por lo tanto, existe una única solución: $x^* = -\sqrt{3}$, $y^* = 1$.

(h) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1 \end{cases}$.

$x^2 - (x-1)^2 = 2$
$x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 2$
$x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$
$2x - 1 = 2$
$2x = 2 + 1$
$2x = 3$
$x^* = \frac{3}{2}$.

$y^* = \frac{3}{2} - 1$
$y^* = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, existe una única solución: $x^*= \frac{3}{2}$, $y^*= \frac{1}{2}$.

(i) $\begin{cases} -x + y = 2 \Leftrightarrow y = x + 2 \\ x^2 - 6x + 8 = y \end{cases}$.

x^2 - 6x + 8= x + 2
x^2 - 6x + 8 - x - 2= 0
x^2 - 7x + 6= 0.

$x_1, x_2= \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4*1*6}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{7\pm\sqrt{25}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{7\pm5}{2}$
$x_1^*= \frac{7+5}{2}= \frac{12}{2}= 6$.
$x_2^*= \frac{7-5}{2}= \frac{2}{2}= 1$.

$y_1^*= 6 + 2= 8$.
$y_2^*= 1 + 2= 3$.

Por lo tanto, existen dos soluciones: $x_1^*= 6$, $y_1^*= 8$; $x_2^*= 1$, $y_2^*= 3$.

Ejercicio 5.

Un cartel en una mueblería dice "lleve los dos por $655". Si una silla cuesta $55 más que una banqueta, ¿cuánto cuesta la silla?

$s + b = 655.$
$s = b + 55.$

$b + 55 + b = 655$
$2b = 655 - 55$
$2b = 600$
$b = \frac{600}{2}$
$b = 300.$

$s = 300 + 55$
$s = 355.$

Por lo tanto, una silla cuesta $355.

Ejercicio 6.

Resolver despejando la incógnita:

(a) m^2 *- 12= 0.*

m^2 - 12= 0
m^2= 12
$\sqrt{m^2}$= $\sqrt{12}$
$|m|$= $\sqrt{4 * 3}$
$|m|$= 2 $\sqrt{3}$
m= $\pm$2 $\sqrt{3}$.

(b) n^2 *+ 25= 0.*

n^2 + 25= 0
n^2= -25
$\sqrt{n^2}$= $\sqrt{-25}$
$|n|$= $\sqrt{-1 * 25}$
$|n|$= $\sqrt{-1}$ $\sqrt{5}$
$|n|$= 5i
n= $\pm$5i.

(c) *3*y^2 *- 45= 0.*

3y^2 - 45= 0
3y^2= 45
y^2= $\frac{45}{3}$
y^2= 15
$\sqrt{y^2}$= $\sqrt{15}$
$|y|$= $\sqrt{15}$
y= $\pm$ $\sqrt{15}$.

(d) *4*u^2 *- 9= 0.*

4u^2 - 9= 0
4u^2= 9
u^2= $\frac{9}{4}$
$\sqrt{u^2}$= $\sqrt{\frac{9}{4}}$

$|u|= \frac{3}{2}$
u= $\pm\frac{3}{2}$.

(e) $(d-3)^2$ - $\frac{1}{2}$= *0.*

$(d-3)^2$ - $\frac{1}{2}$= 0
d^2 - 6d + 9 - $\frac{1}{2}$= 0
d^2 - 6d + $\frac{17}{2}$= 0.

$d_1, d_2= \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4*1\frac{17}{2}}}{2*1}$
$d_1, d_2= \frac{6\pm\sqrt{36-34}}{2}$
$d_1, d_2= \frac{6\pm\sqrt{2}}{2}$
$d_1= \frac{6+\sqrt{2}}{2}$= 3 + $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
$d_2= \frac{6-\sqrt{2}}{2}$= 3 - $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(f) $(y+1)^2$ - *9= 0.*

$(y+1)^2$ - 9= 0
y^2 + 2y + 1 - 9= 0
y^2 + 2y - 8= 0.

$y_1, y_2= \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4*1(-8)}}{2*1}$
$y_1, y_2= \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}$
$y_1, y_2= \frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}$
$y_1, y_2= \frac{-2\pm 6}{2}$
$y_1= \frac{-2+6}{2}= \frac{4}{2}$= 2.
$y_2= \frac{-2-6}{2}= \frac{-8}{2}$= -4.

(g) $\frac{3}{2}z^2$ - $\frac{1}{2}$= *0.*

$\frac{3}{2}z^2$ - $\frac{1}{2}$= 0
$\frac{3}{2}z^2= \frac{1}{2}$

$z^2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$
$z^2 = \frac{1}{3}$
$\sqrt{z^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$
$|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$
z= $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(h) *w^2 - 25= 0.*

w^2 - 25= 0
w^2= 25
$\sqrt{w^2} = \sqrt{25}$
$|w|$= 5
w= $\pm$5.

(i) $\frac{49}{4} d^2$= *1.*

$\frac{49}{4} d^2$= 1
$d^2 = \frac{1}{\frac{49}{4}}$
$d^2 = \frac{4}{49}$
$\sqrt{d^2} = \sqrt{\frac{4}{49}}$
$|d| = \frac{2}{7}$
d= $\pm \frac{2}{7}$.

Ejercicio 7.

Resolver sacando factor común:

(a) $12m^2 + m = 0$.

$12m^2 + m = 0$
$m\ (12m + 1) = 0$
$12m + 1 = 0$
$12m = -1$
$m = \frac{-1}{12}$.

(b) $9n^2 + 9n = 0$.

$9n^2 + 9n = 0$
$9n\ (n + 1) = 0$
$n + 1 = 0$
$n = -1$.

(c) $7y^2 = -4y$.

$7y^2 = -4y$
$7y^2 + 4y = 0$
$y\ (7y + 4) = 0$
$7y + 4 = 0$
$7y = -4$
$y = \frac{-4}{7}$.

(d) $6u^2 - u = 0$.

$6u^2 - u = 0$
$u\ (6u - 1) = 0$
$6u - 1 = 0$
$6u = 1$
$u = \frac{1}{6}$.

(e) $x^2 = 2x$.

$x^2 = 2x$

x^2 - 2x= 0
x (x - 2)= 0
x - 2= 0
x= 2.

(f) $(\frac{y}{2})^2$ - $\frac{1}{2}$ *y= 0.*

$(\frac{y}{2})^2$ - $\frac{1}{2}$ y= 0
$\frac{1}{4}$ y^2 - $\frac{1}{2}$ y= 0
$\frac{1}{2}$ y ($\frac{1}{2}$ y - 1)= 0
$\frac{1}{2}$ y - 1= 0
$\frac{1}{2}$ y = 1
y= $\frac{1}{\frac{1}{2}}$
y= 2.

Ejercicio 8.

Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

(a) $(x-3)^2=\frac{1}{2}$.

$(x-3)^2=\frac{1}{2}$
x^2 - 6x + 9 - $\frac{1}{2}$= 0
x^2 - 6x + $\frac{17}{2}$= 0.

$x_1, x_2=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4*1\frac{17}{2}}}{2*1}$
$x_1, x_2=\frac{6\pm\sqrt{36-34}}{2}$
$x_1, x_2=\frac{6\pm\sqrt{2}}{2}$
$x_1=\frac{6+\sqrt{2}}{2}$= 3 + $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
$x_2=\frac{6-\sqrt{2}}{2}$= 3 - $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) $(1-x)^2=\sqrt{2}$.

$(1-x)^2=\sqrt{2}$
1 - 2x + x^2 - $\sqrt{2}$= 0
x^2 - 2x + (1 - $\sqrt{2}$)= 0.

$x_1, x_2=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4*1(1-\sqrt{2})}}{2*1}$
$x_1, x_2=\frac{2\pm\sqrt{4-4+4\sqrt{2}}}{2}$
$x_1, x_2=\frac{2\pm\sqrt{4\sqrt{2}}}{2}$
$x_1, x_2=\frac{2\pm 2*2^{\frac{1}{4}}}{2}$
$x_1=\frac{2+2*2^{\frac{1}{4}}}{2}$= 1 + $2^{\frac{1}{4}}$.
$x_2=\frac{2-2*2^{\frac{1}{4}}}{2}$= 1 - $2^{\frac{1}{4}}$.

(c) $(2x+1)^2=$ *4*.

$(2x+1)^2$= 4
$4x^2$ + 4x + 1 - 4= 0

$4x^2$ + 4x - 3= 0
4 (x^2 + x - $\frac{3}{4}$)= 0
x^2 + x - $\frac{3}{4}$= 0.

x_1, x_2= $\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4*1(\frac{-3}{4})}}{2*1}$
x_1, x_2= $\frac{-1\pm\sqrt{1+3}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{-1\pm\sqrt{4}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{-1\pm 2}{2}$
x_1= $\frac{-1+2}{2}$= $\frac{1}{2}$.
x_2= $\frac{-1-2}{2}$= $\frac{-3}{2}$.

(d) $(3-2x)^2$= *0.*

$(3-2x)^2$= 0
9 - 12x + $4x^2$= 0
$4x^2$ - 12x + 9= 0
4 (x^2 - 3x + $\frac{9}{4}$)= 0
x^2 - 3x + $\frac{9}{4}$= 0.

x_1, x_2= $\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1\frac{9}{4}}}{2*1}$
x_1, x_2= $\frac{3\pm\sqrt{9-9}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{3\pm\sqrt{0}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{3\pm 0}{2}$
x= $\frac{3}{2}$.

Ejercicio 9.

Resolver completando cuadrados:

(a) $x^2 + 6x = 7$.

$x^2 + 6x= 7$
$x^2 + 6x - 7= 0$
$(x+3)^2 - 16= 0$
$(x+3)^2= 16$
$\sqrt{(x+3)^2}= \sqrt{16}$
$|x+3|= 4$
$x_{1,2} + 3= \pm 4$.
$x_{1,2}= \pm 4 - 3$
$x_1= 1$.
$x_2= -7$.

(b) $x^2 - 8x + 11= 0$.

$x^2 - 8x + 11= 0$
$(x-4)^2 - 5= 0$
$(x-4)^2= 5$
$\sqrt{(x-4)^2}= \sqrt{5}$
$|x-4|= \sqrt{5}$
$x_{1,2} - 4= \pm \sqrt{5}$
$x_{1,2}= \pm \sqrt{5} + 4$
$x_1= \sqrt{5} + 4$
$x_2= -\sqrt{5} + 4$.

(c) $4x^2= 12x + 11$.

$4x^2= 12x + 11$
$4x^2 - 12x - 11= 0$
$4\ (x^2 - 3x - \frac{11}{4})= 0$
$x^2 - 3x - \frac{11}{4}= 0$
$(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}= 0$
$(x-\frac{3}{2})^2= \frac{-1}{2}$
$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2}= \sqrt{\frac{-1}{2}}$
$\left|x-\frac{3}{2}\right|= \frac{i}{\sqrt{2}}$

$x_{1,2}$ - $\frac{3}{2}$= $\pm$ $\frac{i}{\sqrt{2}}$
$x_{1,2}$= $\pm$ $\frac{i}{\sqrt{2}}$ + $\frac{3}{2}$
x_1= $\frac{i}{\sqrt{2}}$ + $\frac{3}{2}$.
x_2= $\frac{-i}{\sqrt{2}}$ + $\frac{3}{2}$.

(d) x^2 *- 10x + 5= -20.*

x^2 - 10x + 5= -20
x^2 - 10x + 5 + 20= 0
x^2 - 10x + 25= 0
$(x-5)^2$= 0
$\sqrt{(x-5)^2}$= $\sqrt{0}$
$|x-5|$= 0
x - 5= $\pm$0
x - 5= 0
x= 5.

(e) *(x - 1) (x - 3)= 1.*

(x - 1) (x - 3)= 1
x^2 - 3x - x + 3 - 1= 0
x^2 - 4x + 2= 0
$(x-2)^2$ - 2= 0
$(x-2)^2$= 2
$\sqrt{(x-2)^2}$= $\sqrt{2}$
$|x-2|$= $\sqrt{2}$
$x_{1,2}$ - 2= $\pm$ $\sqrt{2}$
$x_{1,2}$= $\pm$ $\sqrt{2}$ + 2
x_1= $\sqrt{2}$ + 2.
x_2= -$\sqrt{2}$ + 2.

(f) $\frac{5}{3}$ x^2 *+ x -* $\frac{2}{3}$*= 0.*

$\frac{5}{3}$ x^2 + x - $\frac{2}{3}$= 0
$\frac{5}{3}$ (x^2 + $\frac{3}{5}$ x - $\frac{2}{5}$)= 0
x^2 + $\frac{3}{5}$ x - $\frac{2}{5}$= 0
$(x+\frac{3}{10})^2$ - $\frac{49}{100}$= 0

$(x+\frac{3}{10})^2=\frac{49}{100}$

$\sqrt{(x+\frac{3}{10})^2}=\sqrt{\frac{49}{100}}$

$\left|x+\frac{3}{10}\right|=\frac{7}{10}$

$x_{1,2}+\frac{3}{10}=\pm\frac{7}{10}$

$x_{1,2}=\pm\frac{7}{10}-\frac{3}{10}$

$x_1=\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$.

$x_2=\frac{-7}{10}-\frac{3}{10}=-1$.

Ejercicio 10.

Utilizar el discriminante para completar la siguiente tabla:

Ecuación	Discriminante	Cantidad de soluciones
$\frac{x^2}{3}$ - 2x + 6= 0	$(-2)^2$ - 4 $\frac{1}{3}$ * 6 $<$ 0	0
$2x^2$ - 6x + 3= 0	$(-6)^2$ - 4 * 2 * 3 $>$ 0	2
$\sqrt{3}x^2$= -x - 2	1^2 - 4 $\sqrt{3}$ * 2 $<$ 0	0
$2x^2$= 2x + 1	$(-2)^2$ - 4 * 2 (-1) $>$ 0	2
0,32x^2 - 0,75x - 0,66= 0	$(-0{,}75)^2$ - 4 * 0,32 (-0,66) $>$ 0	2
ax^2= -bx	b^2 - 4a * 0 $>$ 0	2
x^2= (a + b) x - ab	$[-(a+b)]^2$ - 4 * 1ab $\lesseqgtr$ 0	0, 1, 2

(a) $\frac{x^2}{3}$ *- 2x + 6= 0.*

$\frac{x^2}{3}$ - 2x + 6= 0

$\frac{1}{3}$ (x^2 - 6 x + 18)= 0

x^2 - 6 x + 18= 0.

$x_1, x_2= \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4*1*18}}{2*1}$

$x_1, x_2= \frac{6\pm\sqrt{36-72}}{2}$

$x_1, x_2= \frac{6\pm\sqrt{-36}}{2}$

$x_1, x_2= \frac{6\pm\sqrt{-1*36}}{2}$

$x_1, x_2= \frac{6\pm\sqrt{-1}\sqrt{36}}{2}$

$x_1, x_2= \frac{6\pm 6i}{2}$

$x_1= \frac{6+6i}{2}$= 3 + 3i.

$x_2= \frac{6-6i}{2}$= 3 - 3i.

(b) *$2x^2$ - 6x + 3= 0.*

$2x^2$ - 6x + 3= 0

2 (x^2 - 3x + $\frac{3}{2}$)= 0

x^2 - 3x + $\frac{3}{2}$= 0.

$x_1, x_2= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1\frac{3}{2}}}{2*1}$

$x_1, x_2= \frac{3\pm\sqrt{9-6}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$
$x_1= \frac{3+\sqrt{3}}{2}= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$x_2= \frac{3-\sqrt{3}}{2}= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) $\sqrt{3}x^2$= *-x - 2.*

$\sqrt{3}x^2$= -x - 2
$\sqrt{3}x^2$ + x + 2= 0
$\sqrt{3}$ ($x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ x + $\frac{2}{\sqrt{3}}$)= 0
$x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ x + $\frac{2}{\sqrt{3}}$= 0.

$x_1, x_2= \frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}\pm\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2-4*1\frac{2}{\sqrt{3}}}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}\pm\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{8}{\sqrt{3}}}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}-24}{3\sqrt{3}}}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}\pm\frac{\sqrt{\sqrt{3}-24}}{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}}}}{2} \notin \mathbb{R}$.

(d) *2*x^2= *2x + 1.*

2x^2= 2x + 1
2x^2 - 2x - 1= 0
2 (x^2 - x - $\frac{1}{2}$)= 0
x^2 - x - $\frac{1}{2}$= 0.

$x_1, x_2= \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4*1(\frac{-1}{2})}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{1\pm\sqrt{1+2}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$
$x_1= \frac{1+\sqrt{3}}{2}= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$x_2= \frac{1-\sqrt{3}}{2}= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(e) *0,32*x^2 *- 0,75x - 0,66= 0.*

$0{,}32x^2$ - 0,75x - 0,66= 0.

$x_1, x_2 = \frac{-(-0{,}75) \pm \sqrt{(-0{,}75)^2 - 4*0{,}32(-0{,}66)}}{2*0{,}32}$
$x_1, x_2 = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625+0{,}8448}}{0{,}64}$
$x_1, x_2 = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625+0{,}8448}}{0{,}64}$
$x_1, x_2 = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{1{,}4073}}{0{,}64}$
$x_1, x_2 = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{1{,}4073}}{0{,}64}$
$x_1, x_2 = \frac{0{,}75 \pm 1{,}19}{0{,}64}$
$x_1 = \frac{0{,}75+1{,}19}{0{,}64} = \frac{1{,}94}{0{,}64} = 3{,}03.$
$x_2 = \frac{0{,}75-1{,}19}{0{,}64} = \frac{-0{,}44}{0{,}64} = -0{,}69.$

(f) ax^2= *-bx.*

ax^2= -bx
ax^2 + bx= 0.

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a*0}}{2a}$
$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 0}}{2a}$
$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a}.$

Si b $>$ 0:

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm b}{2a}$
$x_1 = \frac{-b+b}{2a} = \frac{0}{2a} = 0.$
$x_2 = \frac{-b-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$

Si b $<$ 0:

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm (-b)}{2a}$
$x_1 = \frac{-b-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$
$x_2 = \frac{-b-(-b)}{2a} = \frac{-b+b}{2a} = \frac{0}{2a} = 0.$

(g) x^2= *(a + b) x - ab.*

x^2= (a + b) x - ab
x^2 - (a + b) x + ab= 0.

x_1, x_2= $\frac{-[-(a+b)]\pm\sqrt{[-(a+b)]^2-4*1ab}}{2*1}$
x_1, x_2= $\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4ab}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2-4ab}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{2}$.

Si a^2 - 2ab + $b^2 < 0$, se tienen 0 soluciones.
Si a^2 - 2ab + b^2= 0, se tiene 1 solución.
Si a^2 - 2ab + $b^2 > 0$, se tienen 2 soluciones.

Ejercicio 11.

Resolver las siguientes ecuaciones, indicar el/los valor/es de x no permitidos:

(a) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-2x}$.

$\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-2x}$

$\frac{2}{(x+2)(x-2)}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{x(x-2)}$

$\frac{2+x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x(x-2)}$

$\frac{2+x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x(x-2)}$

$\frac{x}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x(x-2)}$

$\frac{xx(x-2)}{(x+2)(x-2)}=1$

$\frac{x^2}{x+2}=1$

$x^2=$ x + 2

x^2 - x - 2= 0.

$x_1, x_2=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4*1(-2)}}{2*1}$

$x_1, x_2=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$

$x_1, x_2=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}$

$x_1, x_2=\frac{1\pm 3}{2}$

$x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$.

$x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$.

(b) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=1$.

$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=1$

$\frac{x+3+x-1}{(x-1)(x+3)}=1$

$\frac{2x+2}{x^2+3x-x-3}=1$

$\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=1$

2x + 2= x^2 + 2x - 3

x^2 + 2x - 2x= 2 + 3

$x^2=5$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{5}$

$|x|=\sqrt{5}$

x= $\pm\sqrt{5}$.

(c) *$1 + \frac{1}{x}$= x (1 - $\frac{x+1}{x}$).*

$1 + \frac{1}{x}$= x (1 - $\frac{x+1}{x}$)
$1 + \frac{1}{x}$= x - x - 1
$1 + \frac{1}{x}$= -1
$\frac{1}{x}$= -1 - 1
$\frac{1}{x}$= -2
-2x= 1
x= $\frac{-1}{2}$.

(d) $\frac{6}{x^2-9}$= *3.*

$\frac{6}{x^2-9}$= 3
x^2 - 9= $\frac{6}{3}$
x^2 - 9= 2
x^2= 2 + 9
x^2= 11
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{11}$
$|x|$= $\sqrt{11}$
x= $\pm$ $\sqrt{11}$.

(e) $\frac{2x}{x^2+1}$= $\frac{1}{x+1}$.

$\frac{2x}{x^2+1}$= $\frac{1}{x+1}$
2x (x + 1)= x^2 + 1
2x^2 + 2x= x^2 + 1
2x^2 - x^2 + 2x= 1
x^2 + 2x - 1= 0.

x_1, x_2= $\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4*1(-1)}}{2*1}$
x_1, x_2= $\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{-2\pm\sqrt{2*4}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}$
x_1= $\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}$= -1 + $\sqrt{2}$.

$x_2 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$.

(f) $\frac{3x-3}{x^2-1} = 2x$.

$\frac{3x-3}{x^2-1} = 2x$

$\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = 2x$

$\frac{3}{x+1} = 2x$

$2x\ (x + 1) = 3$

$2x^2 + 2x = 3$

$2x^2 + 2x - 3 = 0$

$2\ (x^2 + x - \frac{3}{2}) = 0$

$x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$.

$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4*1(\frac{-3}{2})}}{2*1}$

$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+6}}{2}$

$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$.

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$.

Ejercicio 12.

De acuerdo a la definición, ¿cuáles de las siguientes expresiones son polinomios?

(a) $P(x) = 7x^4 + 5x - 2$.

Esta expresión es un polinomio.

(b) $Q(x) = \frac{5}{3}x^2 + \ln(2)\, x$.

Esta expresión es un polinomio.

(c) $P(x) = \frac{1}{3}x^{-2} + 5x^2 - 2$.

Esta expresión no es un polinomio.

(d) $S(x) = x^7 + 5x^{\frac{3}{2}} - 2x^5$.

Esta expresión no es un polinomio.

Ejercicio 13.

Sean P (x)= 2x - 8x^3 + 5x^2 y Q (x)= -x^6 + x - 4x^2 - 2x^7 + 7x^3. Hallar Q (x) + P (x) y Q (x) - P (x).

Q (x) - P (x)= (-x^6 + x - 4x^2 - 2x^7 + 7x^3) - (2x - 8x^3 + 5x^2)
Q (x) - P (x)= -x^6 + x - 4x^2 - 2x^7 + 7x^3 - 2x + 8x^3 - 5x^2
Q (x) - P (x)= -x^6 - x - 9x^2 - 2x^7 + 15x^3
Q (x) - P (x)= -2x^7 - x^6 + 15x^3 - 9x^2 - x.

Q (x) + P (x)= (-x^6 + x - 4x^2 - 2x^7 + 7x^3) + (2x - 8x^3 + 5x^2)
Q (x) + P (x)= -x^6 + x - 4x^2 - 2x^7 + 7x^3 + 2x - 8x^3 + 5x^2
Q (x) + P (x)= -x^6 + 3x + x^2 - 2x^7 - x^3
Q (x) + P (x)= -2x^7 - x^6 - x^3 + x^2 + 3x.

Ejercicio 14.

Sean S (x)= $4x^3$ - 2, T (x)= -$4x^3$ + x y W (x)= 6 - x. Colocar el símbolo de <, =, >, según corresponda:

(a)

gr (S (x)) > gr (S (x) + T (x)).

(b)

gr (S (x)) > gr (S (x) + T (x) + W (x)).

(c)

gr (S (x)) + gr (T (x)) > gr (S (x) + T (x)).

(d)

gr (S (x)) = gr (T (x)).

(e)

gr (W (x)) = gr (S (x) + T (x)).

Ejercicio 15.

Hallar el opuesto de P (x)= $x^3 + 8 - (-x^2 + 2x^4)$.

P (x)= $x^3 + 8 - (-x^2 + 2x^4)$
P (x)= $x^3 + 8 + x^2 - 2x^4$
P (x)= $-2x^4 + x^3 + x^2 + 8$.

Q (x)= -P (x)
Q (x)= $-(-2x^4 + x^3 + x^2 + 8)$
Q (x)= $-2x^4 - x^3 - x^2 - 8$.

Ejercicio 16.

*Dados P (x)= $2x^6$ - $3x^4$ + $2x^2$ - 4 y Q (x)= 8 - $3x^2$ - 5x. Hallar P (x) * Q (x).*

P (x) * Q (x)= ($2x^6$ - $3x^4$ + $2x^2$ - 4) (8 - $3x^2$ - 5x)
P (x) * Q (x)= $16x^6$ - $62x^8$ - $10x^7$ - $24x^4$ + $9x^6$ + $15x^5$ + $16x^2$ - $6x^4$ - $10x^3$ - 32 + $12x^2$ + 20x
P (x) * Q (x)= $25x^6$ - $62x^8$ - $10x^7$ - $30x^4$ + $15x^5$ + $28x^2$ - $10x^3$ - 32 + 20x
P (x) * Q (x)= -$62x^8$ - $10x^7$ + $25x^6$ + $15x^5$ - $30x^4$ - $10x^3$ + $28x^2$ 20x - 32.

Ejercicio 17.

Decidir si es Verdadero o Falso: "El grado del polinomio producto es siempre mayor que cada uno de los grados de los factores". Justificar.

Es FALSO, ya que, cuando uno de los dos factores es un monomio, el grado del polinomio producto es igual al grado del factor de mayor grado.

Ejercicio 18.

*Hallar el grado, el coeficiente principal y el término independiente del polinomio W (x)= P (x) * Q (x), sabiendo que son ordenados y completos, que sus expresiones comienzan así y que sus coeficientes cumplen con la secuencia que se evidencia en sus primeros términos.*

P (x)= x^{50} - x^{49} + x^{49} - x^{47} + ...
$\wedge$
*Q (x)= 2*x^{23} + *4*x^{22} + *8*x^{21} + *16*x^{20} ...

W (x)= P (x) * Q (x)
W (x)= (x^{50} - x^{49} + x^{49} - x^{47} + …) * (2x^{23} + 4x^{22} + 8x^{21} + 16x^{20} + …).

gr (W (x))= 73.
Coeficiente principal= 2.
Término independiente= 8388608.

Ejercicio 19.

Sean S (x)= $2x^3$ - x + 2, T (x)= x - 3 y W (x)= -x^2 - x - 1. Hallar:

(a) *2 [(S (x) + T (x)) * W (x)].*

2 [(S (x) + T (x)) * W (x)]= 2 [(2x^3 - x + 2) + (x - 3) (-x^2 - x - 1)]
2 [(S (x) + T (x)) * W (x)]= 2 (2x^3 - x + 2 - x^3 - x^2 - x + 3x^2 + 3x + 3)
2 [(S (x) + T (x)) * W (x)]= 2 (x^3 + x + 5 + 2x^2)
2 [(S (x) + T (x)) * W (x)]= 2x^3 + 2x + 4x^2 + 10
2 [(S (x) + T (x)) * W (x)]= 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10.

(b) $\frac{1}{3}$ *[T (x) * T (x)] - 4 [W (x) * S (x)].*

$\frac{1}{3}$ [T (x) * T (x)] - 4 [W (x) * S (x)]= $\frac{1}{3}$ [(x - 3) (x - 3)] - 4 [(-x^2 - x - 1) (2x^3 - x + 2)]
$\frac{1}{3}$ [T (x) * T (x)] - 4 [W (x) * S (x)]= $\frac{1}{3}$ (x^2 - 6x + 9) - 4 (-2x^5 + x^3 - 2x^2 - 2x^4 + x^2 - 2x - 2x^3 + x - 2)
$\frac{1}{3}$ [T (x) * T (x)] - 4 [W (x) * S (x)]= $\frac{1}{3}$ x^2 - 2x + 3 - 4 (-2x^5 - x^3 - x^2 - 2x^4 - x - 2)
$\frac{1}{3}$ [T (x) * T (x)] - 4 [W (x) * S (x)]= $\frac{1}{3}$ x^2 - 2x + 3 + 8x^5 + 4x^3 + 4x^2 + 8x^4 + 4x + 8
$\frac{1}{3}$ [T (x) * T (x)] - 4 [W (x) * S (x)]= $\frac{13}{3}$ x^2 + 2x + 11 + 8x^5 + 4x^3 + 8x^4
$\frac{1}{3}$ [T (x) * T (x)] - 4 [W (x) * S (x)]= 8x^5 + 8x^4 + 4x^3 + $\frac{13}{3}$ x^2 + 2x + 11.

Ejercicio 20.

Sean P (x)= $2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$ y Q (x)= $2x^2 + 3x$. Hallar el cociente y el resto de la división entre P (x) y Q (x).

$2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$ | $2x^2 + 3x$
-($2x^7 + 3x^6 + 0x^3 + 0x + 0$) $x^5 + 9x - \frac{27}{2}$
$18x^3 + 29x + 10$
-($18x^3 + 27x^2 + 0x + 10$)
$-27x^2 + 29x + 10$
-($-27x^2 - \frac{81}{2}x + 0$)
$\frac{139}{2}x + 10$.

C (x)= $x^5 + 9x - \frac{27}{2}$.
R (x)= $\frac{139}{2}x + 10$.

Ejercicio 21.

¿Existe un polinomio T (x) tal que 6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15= T (x) (2x^2 - 3)?

T (x)= $\frac{6x^6-9x^4+10x^2-15}{2x^2-3}$.

$6x^6$ - $9x^4$ + $10x^2$ - 15	| $2x^2$ - 3
-($6x^6$ - $9x^4$ + $0x^2$ + 0)	$3x^4$ + 5
$10x^2$ - 15	
-($10x^2$ - 15)	
0.	

Por lo tanto, existe un polinomio T (x)= $3x^4$ + 5 tal que cumple con lo solicitado.

Ejercicio 22.

Hallar S (x), si es posible, tal que $9x^5 + x^2 - 5x = (4x^2 - 5)\, S(x) + (x - 8)$.

$9x^5 + x^2 - 5x = (4x^2 - 5)$ S (s) + (x - 8)
$(4x^2 - 5)$ S (x)= $9x^5 + x^2 - 5x - x + 8$
$(4x^2 - 5)$ S (x)= $9x^5 + x^2 - 6x + 8$
S (x)= $\frac{9x^5+x^2-6x+8}{4x^2-5}$.

$9x^5 + x^2 - 6x + 8$	$\mid 4x^2 - 5$
$-(9x^5 - \frac{45}{4}x^3 + 0x^2 + 0x + 0)$	$\frac{9}{4}x^3 - \frac{45}{16}x + \frac{1}{4}$
$\frac{-45}{4}x^3 + x^2 - 6x + 8$	
$-(\frac{-45}{4}x^3 + 0x^2 + \frac{225}{16}x + 0)$	
$x^2 + \frac{129}{16}x + 8$	
$-(x^2 - \frac{5}{4})$	
$\frac{129}{16}x + \frac{27}{4}$.	

Por lo tanto, no es posible hallar S (x) tal que cumple con lo solicitado.

Ejercicio 23.

Sean P (x)= x^3 + 2x + 12, Q (x)= x - 2 y S (x)= x + 2. Hallar el resto de las divisiones entre (a) P (x) y Q (x); (b) P (x) y S (x). Sacar conclusiones, relacionado con el concepto de raíz.

(a) $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

x^3 + 2x + 12 | x - 2
-(x^3 - 2x^2 + 0x + 0) x^2 + 2x + 6
2x^2 + 2x + 12
-(2x^2 - 4x + 0)
6x + 12
-(6x - 12)
24.

R (x)= 24.

(b) $\frac{P(x)}{S(x)}$.

x^3 + 2x + 12 | x + 2
-(x^3 + 2x^2 + 0x + 0) x^2 - 2x + 6
-2x^2 + 2x + 12
-(-2x^2 - 4x + 0)
6x + 12
-(6x + 12)
0.

R (x)= 0.

Ejercicio 24.

Calcular el valor de k ∈ ℝ tal que Q (x)= 3x - 2 divida a P (x)= kx^3 + x^2 - k.

kx^3 + x^2 - k | 3x - 2
-(kx^3 + $\frac{2k}{3}$ x^2 + 0) $\frac{k}{3}$ x^2 + $\frac{3-2k}{9}$ x + $\frac{6-4k}{27}$
$\frac{3-2k}{3}$ x^2 - k
-($\frac{3-2k}{3}$ x^2 - $\frac{6-4k}{9}$ x + 0)
$\frac{6-4k}{9}$ x - k
-($\frac{6-4k}{27}$ x - $\frac{12-8k}{27}$)
$\frac{-35}{27}$ k + $\frac{12}{27}$.

$\frac{-35}{27}$ k + $\frac{12}{27}$= 0
$\frac{35}{27}$ k= $\frac{12}{27}$
k= $\frac{\frac{12}{27}}{\frac{35}{27}}$
k= $\frac{12}{35}$.

Por lo tanto, el valor de k tal que Q (x) divida a P (x) es $\frac{12}{35}$.

Ejercicio 25.

Expresar los siguientes polinomios como producto usando la técnica que corresponda o más de una de ellas:

(a) $P(x)= 2x^4 - x^3 + 6x^2$.

$P(x)= 2x^4 - x^3 + 6x^2$
$P(x)= 2x^2 (x^2 - \frac{3}{2} x + 3)$.

(b) $P(x)= x^6 - x^2$.

$P(x)= x^6 - x^2$
$P(x)= x^2 (x^4 - 1)$.

(c) $P(x)= x^3 - x^2 + x + 1$.

$P(x)= x^3 - x^2 + x + 1$
$P(x)= x (x^2 - x + 1) + 1$.

(d) $P(x)= 2x^3 - 6x^2 + x - 3$.

$P(x)= 2x^3 - 6x^2 + x - 3$
$P(x)= 2x^2 (x - 3) + (x - 3)$
$P(x)= (2x^2 + 1) (x - 3)$
$P(x)= 2 (x^2 + \frac{1}{2}) (x - 3)$.

(e) $P(x)= x^{10} - x^6 - x^4 + 1$.

$P(x)= x^{10} - x^6 - x^4 + 1$
$P(x)= x^6 (x^4 - 1) - (x^4 + 1)$.

(f) $P(x)= 4x^2 + 4x + 1$.

$P(x)= 4x^2 + 4x + 1$
$P(x)= 4 (x^2 + x + \frac{1}{4})$
$P(x)= 4 (x + \frac{1}{2})^2$.

(g) *P (x)=* x^4 - $\frac{3}{2}$ x^2 + $\frac{9}{16}$.

P (x)= x^4 - $\frac{3}{2}$ x^2 + $\frac{9}{16}$
P (x)= x^2 (x^2 - $\frac{3}{2}$) + $\frac{9}{16}$
P (x)= x^2 (x + $\sqrt{\frac{3}{2}}$) (x - $\sqrt{\frac{3}{2}}$) + $\frac{9}{16}$.

(h) *P (x)=* x^5 - x^4 + $6x^3$ - $6x^2$ + *9x - 9.*

P (x)= x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9
P (x)= x^4 (x - 1) + 6x^2 (x - 1) + 9 (x - 1)
P (x)= (x^4 + 6x^2 + 9) (x - 1)
P (x)= $(x^2 + 3)^2$ (x - 1).

Ejercicio 26 (Adicional).

Encontrar dos números consecutivos y positivos enteros cuyo producto sea 168.

x (x + 1)= 168
x^2 + x= 168
x^2 + x - 168= 0.

$x_1, x_2= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4*1(-168)}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{-1 \pm \sqrt{1+672}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{-1 \pm \sqrt{673}}{2}$
$x_1^*= \frac{-1+\sqrt{673}}{2} \notin \mathbb{N}$.
$x_2^*= \frac{-1-\sqrt{673}}{2} \notin \mathbb{N}$.

Por lo tanto, no existen dos números consecutivos y positivos enteros cuyo producto sea 168.

Ejercicio 27 (Adicional).

En cada caso, elegir la opción correcta:

(a) *Si $9x + 12= 15$, entonces:*

(i) $3x + 4= 5$. Opción correcta.

(ii) $3x + 12=5$.

(iii) $9x + 4=5$.

(b) *Si $6x + 12y - 10= 0$, entonces:*

(i) $3x + 6y= 0$.

(ii) $3x + 6y= 10$.

(iii) $3x + 6y= 5$. Opción correcta.

Ejercicio 28 (Adicional).

Encontrar la base y la altura de un triángulo cuya área es de $2m^2$ si su base es 3m más larga que su altura.

A= $\frac{bh}{2}$
$2m^2$= $\frac{bh}{2}$.

b= h + 3m.

$2m^2$= $\frac{(h+3m)h}{2}$
$4m^2$= (h + 3m) h
$4m^2$= h^2 + 3h
h^2 + 3mh - $4m^2$= 0.

$h_1, h_2 = \frac{-3m \pm \sqrt{(3m)^2 - 4*1(-4m^2)}}{2*1}$
$h_1, h_2 = \frac{-3m \pm \sqrt{9m^2 + 16m^2}}{2}$
$h_1, h_2 = \frac{-3m \pm \sqrt{25m^2}}{2}$
$h_1, h_2 = \frac{-3m \pm 5m}{2}$
$h_1 = \frac{-3m+5m}{2} = \frac{2m}{2}$= 1m.
$h_2 = \frac{-3m-5m}{2} = \frac{-8m}{2}$= -4m.

b_1= 1m + 3m= 4m.
b_2= -4m + 3m= -1m.

Por lo tanto, la base y la altura son 4 metros y 1 metro, respectivamente.

Ejercicio 29 (Adicional).

La suma de un número y su recíproco es $\frac{10}{3}$*. Encontrar el número. (Recíproco de a es* $\frac{1}{a}$*, cuando a ≠ 0).*

$a + \frac{1}{a} = \frac{10}{3}$

$\frac{a^2+1}{a} = \frac{10}{3}$

$a^2 + 1 = \frac{10}{3} a$

$a^2 - \frac{10}{3} a + 1 = 0.$

$a_1, a_2 = \frac{-(\frac{-10}{3}) \pm \sqrt{(\frac{-10}{3})^2 - 4*1*1}}{2*1}$

$a_1, a_2 = \frac{\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - 4}}{2}$

$a_1, a_2 = \frac{\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9}}}{2}$

$a_1, a_2 = \frac{\frac{10}{3} \pm \frac{8}{3}}{2}$

$a_1 = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = \frac{\frac{18}{3}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

$a_2 = \frac{\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$

Por lo tanto, los números son 3 y $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 30 (Adicional).

Cuarenta alumnos deben ser distribuidos para prácticas de Linux o de Java. En cada grupo de Linux, hay 8 alumnos, mientras que, en los de Java, 2; el número de grupos de Java supera en 10 a los de Linux. ¿Cuántos grupos de Linux y cuántos de Java se realizarán?

$40 = 8l + 2j.$
$j = l + 10.$

$40 = 8l + 2(l + 10)$
$40 = 8l + 2l + 20$
$10l = 40 - 20$
$10l = 20$
$l = \frac{20}{10}$
$l^* = 2.$

$j^* = 2 + 10$
$j^* = 12.$

Por lo tanto, se realizarán 2 grupos de Linux y 12 grupos de Java.

Ejercicio 31 (Adicional).

Dos personas están acomodando una gran cantidad de sillas en un patio de manera de formar un cuadrado. Una sugiere una manera, pero le sobran 39 sillas. La otra, entonces, propone sumarle una silla más a cada fila, pero le faltan 50 sillas. ¿Cuántas sillas teníàn?

x^2= s - 39.
$(x+1)^2$= s + 50.

s= x^2 + 39.

x^2 + 2x + 1= x^2 + 39 + 50
2x + 1= 89
2x= 89 - 1
2x= 88
x= $\frac{88}{2}$
x^*= 44.

s^*= 44^2 + 39
s^*= 1936 + 39
s^*= 1975.

Por lo tanto, tenían 1975 sillas.

Ejercicio 32 (Adicional).

Encontrar todos los valores de k tales que P (x) sea divisible por el polinomio lineal dado en cada caso:

(a) *P (x)=* $kx^3 + x^2 + k^2x + 11$*; x + 2.*

$kx^3 + x^2 + k^2x + 11$ | x + 2
-($kx^3 + 2kx^2 + 0x + 0$) $kx^2 + (1 - 2k)\, x - 2\,(1 - 2k)$
$(1 - 2k)\, x^2 + k^2x + 11$
$-[(1 - 2k)\, x^2 + 2x\,(1 - 2k) + 0]$
$-2x\,(1 - 2k) + 11$
$-[-2\,(1 - 2k) - 4\,(1 - 2k)]$
$11 + 4\,(1 - 2k)$.

$11 + 4\,(1 - 2k)= 0$
$11 + 4 - 8k= 0$
$15 - 8k= 0$
$8k= 15$
$k= \frac{15}{8}$.

Por lo tanto, el valor de k tal que P (x) sea divisible por el polinomio lineal dado es $\frac{15}{8}$.

(b) *P (x)=* $k^2x^3 - 4kx + 3$*; x - 2.*

$k^2x^3 - 4kx + 3$ | x - 2
-($k^2x^3 - 2k^2x^2 + 0x + 0$) $k^2x^2 + 2k^2x + (4k^2 + 4k)$
$2k^2x^2 - 4kx + 3$
$-(2k^2x^2 - 4k^2x + 0)$
$(4k^2 - 4k)\, x + 3$
$-[(4k^2 - 4k) - 2\,(4k^2 - 4k)]$
$3 + 2\,(4k^2 - 4k)$.

$3 + 2\,(4k^2 - 4k)= 0$
$3 + 8k^2 - 8k= 0$
$8\,(k^2 - k + \frac{3}{8})= 0$
$k^2 - k + \frac{3}{8}= 0.$

$$k_1, k_2= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 1\frac{3}{8}}}{2*1}$$
$$k_1, k_2= \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{2}}}{2}$$
$$k_1, k_2= \frac{1 \pm \sqrt{\frac{-1}{2}}}{2}$$

k_1, k_2= $\frac{1 \pm \sqrt{-1\frac{1}{2}}}{2}$

k_1, k_2= $\frac{1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$

k_1, k_2= $\frac{1 \pm \frac{i}{\sqrt{2}}}{2}$

k_1= $\frac{1+\frac{i}{\sqrt{2}}}{2}$= $\frac{1}{2}$ + $\frac{i}{2^{\frac{3}{2}}}$.

k_2= $\frac{1-\frac{i}{\sqrt{2}}}{2}$= $\frac{1}{2}$ - $\frac{i}{2^{\frac{3}{2}}}$.

Por lo tanto, los valores de k tal que P (x) sea divisible por el polinomio lineal dado son ($\frac{1}{2}$ + $\frac{i}{2^{\frac{3}{2}}}$) y ($\frac{1}{2}$ - $\frac{i}{2^{\frac{3}{2}}}$).