Relaciones entre conjuntos

Una relación es una estructura discreta utilizada en matemáticas para representar las relaciones entre elementos de dos o más conjuntos.

En este apunte definiremos las relaciones n-arias pero estudiaremos con más detalle las relaciones binarias (de éstas pueden extenderse varias nociones a las primeras).
Además veremos algunas propiedades de las relaciones binarias y dos tipos especiales de ellas que más tarde nos servirán para estudiar algunas aplicaciones.

Definición 0.1. *Una relacion n-aria sobre* $A_1, ...A_n$ *es un subconjunto del producto cartesiano* $A_1 \times ..... \times A_n$

Si R *es una relacion n-aria sobre* $A_1, ...A_n$ *se llama* ***i-ésima proyección*** Π_i *a la aplicación de* R *en* A_i *que a cada n-upla de* R *le asigna su i-ésima coordenada.*

Ejemplo 0.2. *Como todo conjunto, las relaciones están dadas por* extensión*, dando todos las tuplas que la componen, o por* comprensión *dando la propiedad que la caracteriza.*

- $R = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a < b < c\}$ *es una relación 3-aria (o ternaria) definida en el conjunto de los números reales*

- *Supongamos los siguientes conjuntos:*
  $A = \{$*alumnos de mate 4*$\} = \{$*Ana, Pedro, Juan, Lucía,Felipe, ...*$\}$

$D = \{docentes\ de\ mate\ 4\} = \{Antonio, Diego, Eli,\ Mari,\ Franco\ ....\}$

$E = \{evaluaciones\ de\ mate\ 4\} = \{parcial1, parcial2, parcial3, parcial4, ...\}$

$N = \{notas\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Podemos definir una relación 4-aria (o cuaternaria)sobre los conjuntos anteriores donde cada tupla muestre a los alumnos con la nota que alcanzó en determinado examen y el docente que corrigió.

$R = \{(Ana, parcial1, 9, Antonio);\ (Juan,\ parcial2,\ 8,\ Eli);(Lucia,\ parical1, Mari,\ 10);......$
$.....\ (Felipe, parcial2, Diego,\ 7);(Felipe,\ parcial3, 8,\ Eli);......\} \subset A \times E \times N \times D$

Una aplicación de las relaciones n-arias es el análisis de las bases de datos (específicamente las bases de datos relacionales).

Existe una analogía entre *Relación* (conjunto matemático) y *Tabla* .

Los conceptos básicos de una base de datos relacional son:

- Tablas: son las relaciones (que representan las bases de datos).
- Registros: son las n-tuplas
- Campos: son las entradas de las n-tuplas (elementos de los conjuntos).
- Atributos: son las columnas de cada tabla

1 Relaciones Binarias

Las relaciones 2-arias se llaman también ***binarias***, entonces:

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una relación binaria *definida entre los mismos es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, caracterizado por alguna propiedad común a sus elementos*

$$R = \{(x, y)/(x, y) \in A \times B\} \subset A \times B$$

Muchas veces cuando $(x, y) \in R$ escribiremos xRy y diremos que x está relacionado por R con y.

Ejemplos 1.1. *1. Si $A = \{x/x \text{ es vocal}\}$ y $B = \{brisa, sol, mar, nube\}$*

y la relación en $A \times B$ viene definida por: xRy si y sólo si x es letra de y.

Entonces,la relación definida por extensión quedaría:

$R = \{(i, brisa); (a, brisa); (a, mar); (o, sol); (u, nube); (e, nube)\}$

2. Si $A = \{$enteros pares entre -4 y 10 inclusive$\}$, $B = Z$ y la relación viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x

Entonces,la relación definida por extensión quedaría:

$R = \{(-4, 16); (-2, 4); (0, 0); (2, 4); (4, 16); (6, 36); (8, 64); (10, 100)\}$

- **Dominio e Imagen de una Relación**

Sea R una relación de A en B.

Se llama **dominio** de R al conjunto de elementos x de A tales que $(x, y) \in R$

$$Dom_R = \{x \in A : (x, y) \in R\}$$

Se llama **imagen** de R al conjunto de elementos y de B tales que $(x, y) \in R$

$$Im_R = \{y \in B : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo 1.2. *Dados los conjuntos* $A = \{a, e, i\}$ *y* $B = \{sol, nube, cielo\}$ *y la relación* R *en* $A \times B$ *definida por:* xRy *si y sólo si* x *es letra de* y*, esto es:* $R = \{(e, nube), (i, cielo)\}$

Luego,

$$Dom(R) = \{e, i\} \subset A$$

$$Im(R) = \{nube, cielo\} \subset B$$

- **Relación Inversa**

Sea R una relación de A en B. Se llama **relación inversa** de R al subconjunto de $B \times A$ definido por

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo 1.3. *Sean* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ *y* $B = \{-27, -16, -8, -2, -1, 0, 1, 2, 8, 16, 27\}$*, y sea* R *de* A *en* B *definida por :* xRy *si y sólo si* x *es el cubo de* y*; dada por extensión por:*

$R = \{(-8, -2); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (8, 2); (27, 3)\}$

Entonces, $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} = \{(-2, -8); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (2, 8); (3, 27)\}$

es decir, $yR^{-1}x$ *si y sólo si* y *es la raíz cúbica de* x

- **Composición**

Dadas las relaciones R en $A \times B$ y S en $B \times C$ se puede construir la relación composición

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subset A \times C$$

Ejemplo 1.4. *Sean los siguientes subconjuntos de enteros:* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *y* $C = \{-5, -4, -3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Sea R de A en B definida por : xRy si y sólo si x es el opuesto de y, y escrita por extensión: $R = \{(-2, 2); (-1, 1); (0, 0); (1, -1); (2, -2)\}$

Sea S de B en C definida por : xRy si y sólo si y es el doble de x, y escrita por extensión: $S = \{(-2, -4); (-1, -2); (0, 0); (1, 2); (2, 4)\}$

Ahora busquemos la relación compuesta. Observemos que podremos encontrar SoR de A en C pero no RoS.

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} = \{(-2, 4); (-1, 2); (0, 0); (1, -2); (2, -4)\}$$

Ejemplo 1.5. *Sean A un conjunto de alumnos, B un banco de preguntas de un formulario y* $C = \{10, 15, 20, 30\}$.

Sea R de A en B dada por: aRb si y sólo si a contestó correctamente la pregunta b *y sea S la relación de B en C :* bSc si y sólo si c es el puntaje signado a la pregunta b

Entonces la relación compuesta RS está definida de la siguiente forma:
a SoR b si y sólo si a contestó correctamente una pregunta con puntaje asignado c

La matriz de una relación

Es posible representar una relación entre dos conjuntos finitos con una matriz.

Sea R una relación entre $A = \{a_1, ...a_m\}$ y $B = \{b_1, ...b_n\}$, la matriz de representación M_R de la relación está dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_i, b_j) \in R \\ 0 & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ejemplos 1.6.

- *Sea* $R = \{(1, r); (2, s); (3, r)\}$ *una relación entre* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{r, s\}$

  Entonces la matriz de la relación será:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Dada la matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Podemos considerar que existe una relación R *entre algún conjunto* $A = \{a, b, c\}$ *y otro conjunto* $B = \{1, 2, 3, 4\}$ *tal que* $R = \{(a, 1); (a, 4); (b, 2); (b, 3); (c, 1); (c, 3)\}$

2 Relaciones Binarias en un conjunto

Si una relación R es tal que $R \subset A \times A$, se dice que está definida en el conjunto A (o que R es una relación sobre A)

En este tipo de relaciones se pueden definir las siguientes propiedades:

- **Reflexividad**: R será *reflexiva* si para todo $x \in A$ vale que xRx
- **Simetría**: R será *simétrica* si para todo x, y en A vale que xRy implica yRx
- **Antisimetría**: R será *antisimétrica* si para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
- **Transitividad**: R será *transitiva* si para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz

Obs: Vemos que las propiedades están definidas por un condicional entonces para probarlas debemos mirar bien que *si se cumple que el antecedente es Verdadero tiene que ser Verdadero también el consecuente para que todo el condicional sea Verdadero*, es decir los únicos casos **falsos** son los de antecedente Verdadero y consecuente Falso. Recordemos que de igual manera, *antecedente Falso hace que el condicional sea Verdadero, no importa cual sea el valor de verdad del consecuente*, entonces si no encontramos un par no tenemos que buscar su inverso u otro para componer para probar simetría, antisimetría o trannsitividad.

Ejemplos 2.1. *1. Sea $A = \{a, b, c\}$*

- *$R = \{(a, b); (a, a); (b, b)\}$ es transitiva pero no simétrica ni reflexiva. También es antisimétrica.*

  Como no todos los elementos de A están relacionados consigo mismo R no puede ser reflexiva. Tampoco es simétrica porque vemos que tenemos el par (a, b) pero no está el (b, a). Como todos los pares que se pueden componer tienen en el mismo conjunto R su par compuesto decimos que es transitiva. Cada par que tiene su inverso cumple que su primer coordenada es igual a la segunda.

- $R = \{(a,a);(b,b);(c,c)\}$ *es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva*

  Esta relación es bastante trivial, es la Identidad de A que ya antes mencionamos (Δ_A). Se ve fácilmente que cumple con todas las propiedades (claramente todos los elementos se relacionan consigmo mismo; como la primer coordenada es igual a la segunda en todos los casos, tenemos el par inverso, y por lo tanto será simétrica. La transitividad y antisimetría se da al no cumplirse (o cumplirse de manera trivial al relacionar cada par con él mismo) la conjunciíon del antecedente.

- $R = \{(a,b);(b,c);(a,c);(c,b);(a,a);(b,b);(c,c)\}$ *es reflexiva, transitiva pero no es simétrica ni antisimétrica.*

  Como para cada elemento $x \in A$ encontramos el par (x,x) entonces es reflexiva. Si miramos cada par que puede componerse vemos que está también el compuesto (por ejemplo, (a,b) y (b,c) se pueden componer y nos da (a,c) que está; lo mismo con (a,c) y (c,b) que da (a,b), o (b,c) y (c,b) que devuelven (c,c) y (b,b) que están en R).

  Vemos que no es simétrica ya que tenemos al par (a,b) pero no a su inverso el par (b,a) (no importa que otros pares tengan a su inverso, tiene que darse para todos). Tampoco es antisimétrica ya que está el par (b,c) y el par (c,b) pero $b \neq c$.

  Éste es un ejemplo de una relación que no es ni simétrica ni antisiméstrica, mostrando que una propiedad no es " opuesta " a la otra.

2. *La relación $x \leq y$ en el conjunto de los números naturales es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Obviamente no es simétrica .*

   Observemos que si el "menor" es estricto la relación no sería reflexiva ni antisimétrica.

3. *En el conjunto de las rectas del plano, la relación L es paralela a M es reflexiva, simétrica y transitiva (podemos pensarlo geométricamente o recordar que dos rectas del plano son paralelas si tienen igual pendiente).*

4. *La relación de "X es correlativa con Y" , entre las materias de un plan de estudio (de una carrera en particular), es transitiva*

2.1 Relaciones de Orden

Definición 2.2. *Una relación binaria R definida sobre un conjunto A es un* ***preorden*** *en A si es reflexiva y transitiva.*
Y es una ***relación de orden*** *(ó un* **orden** sobre A*) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

Muchas veces diremos que la relación ordena *S y la notaremos por $\leq$ (no confundir este símbolo con el orden de los números reales, el orden de los reales es un ejemplo más de orden).*

Obs: *Si bien nosotros diremos que una relación con estas propiedades es un* orden *muchas veces vamos a encontrar que a este tipo de relaciones se las denomina* **orden parcial**. *Un orden parcial refiere a una relación donde hay elementos que no son comparables.*
Si cada par de elementos en un conjunto es comparable diremos que el orden es ***total*** *o* ***lineal***.

Con esto se pretende formalizar la idea intuitiva de orden de un conjunto.

Ejemplos 2.3. *Varios conjuntos con los que estamos familiarizados o estudiamos antes en este apunte son conjuntos ordenados:*

- *Dado $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, y su orden usual, se puede ver fácilmente que se cumplen las tres propiedades para que sea un conjunto ordenado.*
- *La relación sobre un conjunto A llamada* ***relación Identidad*** *y denotada por Δ_A es una relación de orden.*
- *Dado un conjunto S, sea $P(S)$ el conjunto de "Partes de S", o sea, el conjunto de todos los subconjuntos de S.*

  La inclusión de conjuntos $\subseteq$ en $P(S)$ es una relación de orden (todo subconjunto de S está contenido o es igual a si mismo, entonces tenemos la reflexividad. Si vale la doble inclusión entre conjuntos entonces los dos conjuntos son iguales y la relación es antismétrica. Es fácil ver que también vale la propiedad transitiva de la inclusión entre subconjuntos.
  Si pensamos en la inclusión estricta entonces la relación sería un preorden.

- *Sea* $B = \{B, \wedge, \vee, ', o, 1\}$ *un algebra de Boole y sea* x *la relación dada por* $a \leq b$si y sólo si $a \wedge b = a$ *es un orden en* B.

- *Dado el conjunto de todos los alumnos de la facultad podemos ordenarlo por el número de legajo de cada alumno.*

- *Sea* A *un conjunto de personas y sea* R *la relación sobre* A *dada por* aRb *si y sólo si la estatura de* a *es menor a la estatura de* b

  R *es un preorden y sería un orden sólo si entre todas las personas de* A *no hay personas con la misma estatura.*

Ejemplo 2.4. *La divisibilidad es una relación de orden en* $\mathbb{N}$

Recordemos que a ***divide*** *a b , y se escribe* $a|b$ *si existe un entero* c *tal que* $b = ac$. *Ahora probemos que esta relación entre números naturales cumple las tres propiedades necesarias para ser una relación de orden.*

- *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n|n$ *ya que existe* 1 *tal que* $n = n.1$; *por lo tanto la relación es reflexiva.*

- *para todo par* $n, m \in \mathbb{N}$, *si* $n|m$ *y* $m|n$ *entonces* $n = m$ *ya que* $n|m$ *implica que existe* k *tal que* $m = nk$; *por otro lado, si* $m|n$ *existe* h *tal que* $n = mh$. *Luego,* $n = mh = (nk)h = n(kh)$ *y como son todos números naturales* $kh = 1$ *y* $n = m$. *De esta manera probamos que la relación es antisimétrica.*

- *dados tres números naturales cualesquiera,* n, m, r *tales que* $n|m$ *y* $m|r$, *entonces probaremos que* $n|r$ *para demostrar que la relación es transitiva.*

  Como $n|m$ *existe* k *tal que* $m = nk$ *y como* $m|r$ *existe* h *tal que* $r = mh$;

  luego, $r = mh = (nk)h = n(hk)$ *entonces existe un natural* $t = hk$ *tal que* $r = nt$ *y por lo tanto* $n|r$ *como queríamos probar.*

Observemos que si en lugar del conjunto $\mathbb{N}$ *de los números naturales tomamos el conjunto de los enteros,* $\mathbb{Z}$, *no se cumplirá la propiedad de antisimetría*
(ya que $n| - n$ *y* $-n|n$ *PERO* $n \neq -n$*).*

La divisibilidad en $\mathbb{Z}$ *no es un orden (es un preorden)*

Observemos que mientras en algunos de los ejemplos anteriores todos los elementos están relacionados (dados dos números reales cualesquiera x e y, siempre se da que : $x \leq y$, $x = y$ ó $y \leq x$, todas las personas pueden compararse por su altura, etc), en otros ejemplos hay elementos que no están relacionados (podemos encontrar subconjuntos E y H de S que tengan intersección vacía o que tengan elementos en común pero no se dé ninguna de las dos inlusiones $E \not\subset H$ y $H \not\subset E$. Hay naturales m y n tales que no se cumple $m|n$ ni $n|m$).
Esta diferencia define nuevos tipos de conjuntos ordenados:

Definición 2.5. *Dado un conjunto ordenado (A, R) se dice que dos elementos a, b del conjunto son* ***comparables*** *si se verifica que aRb ó bRa, en caso contrario se dice que son* ***incomparables****.*
Si todos los elementos de A son comparables dos a dos entonces se dice que A está ***totalmente ordenado*** *y que R es un* ***orden total*** *en A. Si existen elementos incomparables se dirá que R es un* ***orden parcial*** *en A.*

Sabemos que los números reales están ordenados por su orden usual $\leq$, es igual con los naturales, enteros y racionales (con el mismo orden usual). Además vimos que los naturales y los enteros pueden ser ordenados (o parcialmente ordenados) por la relación *divide*. Pero, ¿qué pasa con los números complejos? hay alguna forma de ordenarlos?
Si pensamos a los complejos como pares ordenados y definimos una relación entre pares (*serían pares de pares...*) podríamos ver que tipo de orden hay entre ellos.

No sólo podemos pensar en el producto de dos relaciones si no de n relaciones:

Definición 2.6. *Sean (A_1, R_1), (A_2, R_2).... (A_n, R_n) una familia de conjuntos ordenados.*

- *Se llama relación* ***orden producto*** *(estándar) a la relación $R \subset A_1 \times A_2 \times \ \times A_n$ definida por: $(x_1, x_2, , x_n)R(y_1, y_2, , y_n)$ si y sólo si $x_1 R_1 y_1$, $x_2 R_2 y_2 \cdots x_n R_n y_n$ para todo $i = 1....n$*
- *Se llama relación* ***producto lexicográfico*** *a la relación $L \subset A_1 \times A_2 \times \ \times A_n$ definida por: $(x_1, x_2, , x_n)L(y_1, y_2, , y_n)$ si y sólo si $x_i = y_i$ para todo $i = 1....n$, ó $x_j R_j y_j$ siendo j el primer índice tal que $x_j \neq y_j$*

2.1.1 Conjuntos Ordenados

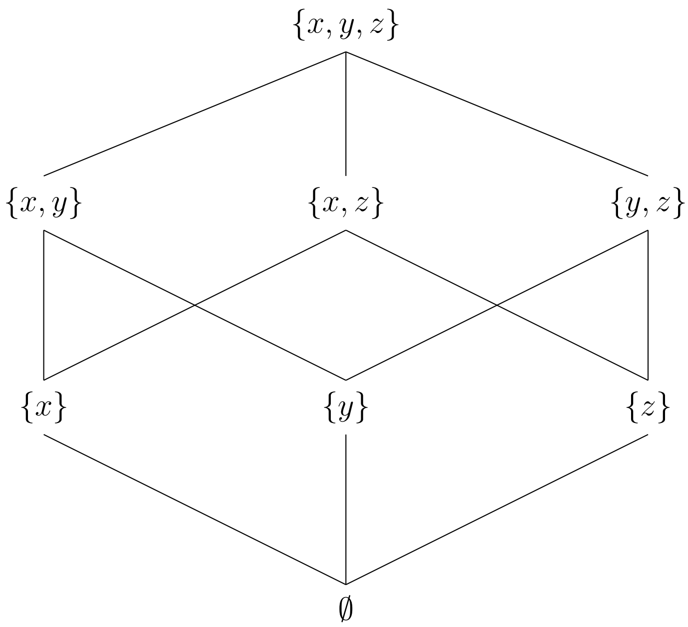
Un conjunto A junto con un orden (parcial/total) R es un ***conjunto ordenado***. (*conjunto parcialmente/totalmente ordenado*).
Generalmente se dice que R ordena al conjunto A y se denota (A, R).

Diagramas de Hasse

Un diagrama de Hasse es una *versión simplificada* de un digrafo. Es una herramienta muy útil ya que describe completamente el orden asociado.

Ejemplo 2.7. *Antes vimos que la inclusión de conjuntos $\subseteq$ en $P(S)$ es una relación de orden para un conjunto S y su conjunto de "Partes de S", $P(S)$, o sea, el conjunto de todos los subconjuntos de S.*

Veamos el diagrama de Hasse para un ejemplo particular de $S = \{x, y, z\}$.



2.1.2 Elementos extremos de conjuntos (parcialmente) ordenados

Algunos elementos de un conjunto ordenado tienen especial importancia para muchas propiedades y aplicaciones de los conjuntos ordenados.

Definición 2.8. *Sea* $(A, <)$ *un conjunto ordenado cualquiera.*
Diremos que un elemento $a \in A$ *es un* ***elemento máximo de A*** *si* $x < a$ *para todo* $x \in A$*. De manera dual, un elemento* $a \in A$ *es un* ***elemento mínimo de A*** *si* $a < x$ *para todo* $x \in A$*.*

Definición 2.9. *Sean* $(A, <)$ *un conjunto ordenado cualquiera y* B *un subconjunto de* A*.*

- *Un elemento* $a \in A$ *es una* ***cota superior de B*** *si* $b < a$ *para todo* $b \in B$
- *Un elemento* $a \in A$ *es una* ***cota inferior de B*** *si* $a < b$ *para todo* $b \in B$*.*
- *Un elemento* $a \in A$ *se llama* **supremo** de B *(mínima cota superior de* B*) si* a *es cota superior de* B *y* $a < c$ *para toda* c *cota superior de* B
- *Un elemento* $a \in A$ *se llama* **ínfimo** de B *(máxima cota inferior de* B*) si* a *es cota inferior de* B *y* $c < a$ *para toda* c *cota inferior de* B

Definición 2.10. *Un* **reticulado** *es un conjunto ordenado* $(L, <)$ *tal que cada subconjunto* $\{a, b\}$ *de dos elementos tiene supremo e ínfimo.*

2.2 Relaciones de Equivalencia

Definición 2.11. *Diremos que una relación R definida sobre un conjunto A reflexiva, simétrica y transitiva es una* ***relación de equivalencia*** *(ó que es un* equivalencia en A*)*

Muchas veces notaremos a una relación de equivalencia R por $\sim$, $\approx$ ó $\equiv$

La idea de equivalencia sobre un conjunto permite establecer una relación entre los elementos del conjunto que comparten cierta característica o propiedad. Esto permitirá reagrupar dichos elementos.

Ejemplos 2.12.

- *La igualdad matemática (ya sean conjuntos numéricos o conjuntos en general) es trivialmente una relación de equivalencia.*
- *La relación sobre un conjunto A llamada* ***relación Identidad*** *y denotada por Δ_A es una relación de equivalencia.*
- *Pensemos en los ángulos (esto ya lo usamos cuando trabajamos con los argumentos de los números complejos en forma trigonométrica, polar o exponencial!!).*

  Decimos que $\alpha \sim \beta$ si y sólo si existe un entero k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$
  Claramente la relación es reflexiva ya que para $k = 0$ todo ángulo está relacionado con sí mismo.
  Supongamos que $\alpha \sim \beta$ entonces existe k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$, luego $\beta = \alpha - 2k\pi = \alpha + 2(-k)\pi$, y por lo tanto $\beta \sim \alpha$ mostrando que la relación es simétrica.

  Por último probemos que $\sim$ es transitiva. Si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \delta$ entonces veremos que $\alpha \sim \delta$
  $\alpha \sim \beta$ entonces existe k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$
  $\beta \sim \delta$ entonces existe h tal que $\beta = \delta + 2h\pi$
  por lo tanto, $\alpha = \beta + 2k\pi = (\delta + 2h\pi) + 2k\pi = \delta + 2(h + k)\pi$ con $h + k$ entero, obtendiendo que $\alpha \sim \delta$

- *Antes vimos que en el conjunto de las rectas del plano, la relación L es paralela a M es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto esta relación es una Equivalencia.*

- *Sea A el conjunto de los alumnos de Mate 4, y sea R la relación definida por $\boldsymbol{a}R\boldsymbol{b}$ si y sólo si el apellido de **a** comienza con la misma letra que el apellido de **b***

- *Sea E un conjunto de conjuntos.*
  *La relación $X \sim Y$ si y sólo si existe una biyección de X en Y es una equivalencia en E. A esta relación se la llama de **coordinabilidad**, y los conjuntos X e Y se dicen **coordinables**. (puede que recuerden (o estudien más adelante) esta relación en otras materias de la carrera)*

Clases de Equivalencia, Conjunto Cociente y Particiones

Definición 2.13. *Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $a \in A$ se denominará **clase de equivalencia de a por R** y se denotará $\bar{a}$ (ó **R(a)**) al conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a por R. Es decir, $\bar{a} = \{x \in A : xRa\}$*

*Cualquier elemento de $\bar{a}$ se llama **representante** de la clase, y en particular, como la relación es reflexiva se da que $a \in \bar{a}$, luego a es representante de la clase $\bar{a}$ para todo $a \in A$.*

Ejemplos 2.14.

- *La relación de equivalencia L es paralela a M en el conjunto de las rectas del plano, podemos tomar como representante de cada* **clase** *a la recta que pasa por el origen*

- *Cuando se trabaja con números racionales sabemos que una propiedad que tienen las fracciones es la siguiente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ac = bd$, entonces por lo general uno toma o "se queda" con la fracción irreducible que la cumpla.*
  Esa fracción irreducible será la representante de la clase bajo la relación de equivalencia dada por esa propiedad característica.

- *En el ejemplo de equivalencia entre ángulos podemos tomar como representante de cada clase a los ángulos dentro del intervalo $[0, 2\pi)$ (como hacíamos con los argumentos de los complejos).*

Definición 2.15. *Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de elementos del conjunto A respecto de la relación R se lo llamará* ***conjunto cociente de A respecto de la relación R*** *y se lo denotará:* $A/R = \{\bar{a} : a \in A\}$

Definición 2.16. *Una* ***partición*** *de un conjunto A es un conjunto de partes no vacías de A, disjuntas dos a dos y tales que su unión coincide con A.*

Esto es, dado A un conjunto, y $P = \{A_i\}$ *con* $i \in I$ *(una familia de subconjuntos de A). Se dice que P es una partición de A si y sólo si se verifican:*

- *Si* $A_i \in P$ *entonces* $A_i \neq \emptyset$
- *Si* $A_i, A_j \in P$ *entonces* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Es decir, una división de un conjunto no vacío en "partes" separadas y no vacías representadas mediante una colección o familia de subconjuntos de dicho conjunto que lo recubren.

Notación: Si bien estamos usando la P para referirnos a las particiones, en general una partición suele anotarse con la letra π

Ejemplos 2.17.

- *El conjunto de los números naturales puede ser "particionado" en pares e impares*
- *El conjunto de alumnos de mate4 puede dividirse en los que aprobaron la entrega 1, los que deben reentregarla y los que no lo hicieron.*

Sea P una partición de un conjunto A.

Definiremos sobre A la siguiente relación R: *aRb si y sólo si existe $X \in P$ tal que $a, b \in X$*

Claramente R es reflexiva ya que al ser P una partición de A todo elemento del conjunto pertenece a algún subconjunto de la familia P.
Es inmediata la simetría de R (si existe $X \in P$ tal que $a, b \in X$, existirá (ese mismo) X tal que $b, a \in X$).
Sólo falta comprobar la transitividad de R para poder afirmar que es una relación de equivalencia: queremos probar que si dados $a, b, c \in A$ tales que aRb y bRc entonces aRc.
Si aRb y bRc entonces existen $X, y \in P$ tales que $a, b \in X$ y $b, c \in Y$, luego $b \in X \cap Y$ pero como $X, y \in P$ pero como P es una partición sus elementos tienen intersección vacía, con lo cual o no existe b o $X = Y$ y por lo tanto $a, c \in Y = X$ y aRc.

La relación R definida de esta forma es llamada ***equivalencia asociada a la partición P***

Ejemplo 2.18. *Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $P = \{\{a\}; \{b, e\}; \{c, d, f\}\}$ una partición de A.*
La relación asociada a la partición está dada por
$R = \{(a, a); (b, b); (e, e); (b, e); (e, b); (c, c); (d, d); (f, f); (c, d); (d, c); (c, f); (f, c); (d, f); (f, d)\}$
y claramente vemos que es de equivalencia.

Ahora veamos unos resultados que nos muestran una propiedad dual para las relaciones de equivalencias y las particiones.

Lema 2.19. *Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces para todos par a, b de elementos de A vale que $\bar{a} = \bar{b}$ si y sólo si aRb*

Supongamos que $\bar{a} = \bar{b}$,como R es reflexiva aRa entonces $a \in \bar{a} = \bar{b}$, luego $a \in \bar{b}$ y aRb
Ahora suponemos que aRb y probaremos que las clases son iguales:
Sea $z \in\in \bar{a}$, entonces zRa pero como R es de equivalencia, por transitividad y la hipótesis general aRb tenemos que zRb, luego $\bar{a} \subset \bar{b}$. De la misma manera podemos ver que vale la otra inclusión y por lo tanto, $\bar{a} = \bar{b}$.

Teorema 2.20. *Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A , el conjunto cociente A/R es una partición de A.*

Demostración: *Queremos mostrar que A/R (el conjunto de todas las clases de equivalencia por R) particiona a A*
Veamos que cumple con la definición, o sea que es un conjunto de partes no vacías de A disjuntas dos a dos y que su unión es A

Como R es reflexiva, para todo $a \in A$ vale que aRa y por lo tanto $\bar{a} = R(a)$ es no vacío.
Supongamos que existe $x \in R(a) \cap R(b)$, luego xRa y xRb. Como R es simétrica y transitiva (por ser de equivalencia) aRb pero esto significa que las clases son iguales. Entonces todas las partes o son iguales o son disjuntas
Por definición todas las clases de equivalencia por R sobre A son subconjuntos de A y por la tanto la unión de todas ellas está incluida en A.
Como todo elemento $a \in A$ pertenece a su propia clase $\bar{a} = R(a)$ (por ser R reflexiva), vemos que todo elemento de A es un elemento en la unión de todas las clases.

Ejemplo 2.21. *Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2); (4, 1); (1, 4)\}$ una relación de equivalencia en A*
El conjunto cociente $A/R = \{\{1, 2, 4\}; \{3\}\}$ es una partición de A

2.2.1 Relación de Congruencia

En su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada en el a no 1801, **Gauss** introdujo el concepto de congruencia.

Definición 2.22. *Dados los enteros a, b y m, se dice que* a es congruente con b módulo m *y se escribe $a \equiv b$ (mod m) (ó $a \equiv_m b$ ó $a \equiv b$ (m)) si y sólo si $m|a-b$, es decir, existe $k \in Z$ tal que $a - b = k.m$*

Ejemplo 2.23. $4 \equiv 10$ (3) *pues* $3|4-10$*, ya que existe* -2 *tal que* $4 - 10 = -6 = -2 \cdot 3$

Proposición 2.24. *La relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia*

Demotración: Para mostrar que la congruencia es una relación de equivalencia tenemos que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Tenemos: *a es congruente con b módulo m* , ó $a \equiv_m b$ si y sólo si $m|a-b$, entonces,

- $\equiv_m$ es reflexiva ya que para a entero vale que $m|a-a$ pues $a - a = 0.m$
- $\equiv_m$ es simétrica.

  Supongamos que $a \equiv_m b$, entonces m divide a $a - b$ y existe k entero tal que $a - b = k.m$, luego existe $-k$ tal que $b - a = -(a - b) = -(k.m) = (-k).m$ y por lo tanto $m|b-a$ y $b \equiv_m a$
- $\equiv_m$ es transitiva: esto es, si $a \equiv_m b$ y $b \equiv_m c$ entonces $a \equiv_m c$

  Supongamos que $a \equiv_m b$ entonces $m|a-b$, existe k entero tal que $a - b = km$,

  por otro lado $b \equiv_m c$ entonces $m|b-c$, existe h entero tal que $b - c = hm$,

  luego $a - c = a + (-b + b) - c = (a - b) + (b - c) = km + hm = (k + h)m$, y existe un entero $t = k + h$ tal que $a - c = tm$ y así m divide a $a - c$ y de esa forma tenemos que $a \equiv_m c$ como queríamos probar.

Por ser la congruencia una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, determina una partición del conjunto de los números enteros en *clases de equivalencia* que se denominan *clases de congruencia módulo m* .

La clase de congruencia módulo m de un número x será el conjunto $\overline{x} = \{y \in \mathbb{Z} : y \equiv_m x\}$

Esto nos permite agrupar a los enteros en familias disjuntas de manera que dos números son congruentes módulo m si y sólo si están en la misma clase de equivalencia.

Esta partición de $\mathbb{Z}$ inducida por la congruencia módulo m es lo que nos determina el conjunto cociente $\mathbb{Z}m = \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/ \equiv_m$ que estaremos estudiando.

Observación 2.25. *Dos números enteros pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si son congruentes módulo m.*
Supongamos que a y b pertenecen a la "clase del x", entonces $a \equiv_m x$ y $b \equiv_m x$. Como la congruencia es una relación simétrica y transitiva tenemos que $a \equiv_m b$.
Por otro lado, si $a \equiv_m b$ es claro que ambos pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Proposición 2.26. *Todo entero es* ***congruente módulo*** *m con su* ***resto*** *en la división por m*

Demostración:

Supongamos que $x \equiv_m y$, sabemos que esto equivale a decir que existe k entero tal que $x - y = km$, entonces podemos escribir $x = km + y$.
Como antes dijimos que dos enteros son congruentes si pertenecen a la misma clase podemos con ésto describir las clases de la siguiente forma:
$\overline{x} = \{y : y \equiv_m x\} = \{y : x = km + y\} = \{y : y = x + k'm\} = \{y : y = x, y = x + 1, y = x + 2.....\}$

Ejemplos 2.27. 1. *Sabemos que $x \equiv_3 y$ si y sólo si $x - y = k \cdot 3$.*
Ahora tomemos por ejemplo al 2, como $y \equiv_3 2$ es lo mismo que $y - 2 = k \cdot 3$ entonces vale $y = k \cdot 3 + 2$ (todos los puntos de "esa recta")

$$\bar{2} = \{y \in Z : y \equiv_3 2\} = \{2, 5, 8, 11, \cdots\}$$

2. *Veamos la congruencia módulo 2, esto es $x \equiv_2 y$ si y sólo si $x - y = 2 \cdot m$*
Tomemos al 1, Como $1 \equiv y(2)$ es lo mismo que $y - 1 = k \cdot 2$ entonces vale $y = k \cdot 2 + 1$

$$\bar{1} = \{y \in Z : 1 \equiv_2 y\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$$

$$\bar{0} = \{y \in Z : 0 \equiv_2 y\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$$

Luego, $Z/\equiv_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

"Partimos" el conjunto de los números enteros en dos clases, la del $\bar{0}$ y la del $\bar{1}$, es decir, los números que tienen resto 0 cuando se los divide por 2, o resto 1.

Esto es, ***los números pares y los impares****.*

Proposición 2.28. *Dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos en su división por m son iguales.*

Demostración:

Supongamos que x e y son dos enteros congruentes módulo m y probemos que tienen el mismo resto en la división por m.

Por el algoritmo de la división, existen (y son únicos) cociente y resto enteros tales que :

$x = k_1m + r_1$ con $0 \leq r_1 < m$

$y = k_2m + r_2$ con $0 \leq r_2 < m$ (Observemos que $|r_1 - r_2| < m$)

Luego, $x - y = (k_1m + r_1) - (k_2m + r_2) = (k_1m - k_2m) + (r_1 - r_2) = (k_1 - k_2)m + (r_1 - r_2)$

Y como $x \equiv_m y$, existe un entero k tal que $x - y = km$, concluimos que debe ser $r_1 - r_2 = 0$ y por lo tanto $r_1 = r_2$.

Ahora supongamos que los restos en la división por m coinciden y veremos que $x \equiv_m y$.

Otra vez usando el algoritmo de la división existen k_1, k_2, r enteros tales que :

$$x = k_1m + r$$

$$y = k_2m + r$$

Así, $x - y = (k_1m + r) - (k_2m + r) = (k_1m - k_2m) + (r - r) = (k_1 - k_2)m = km$

mostrando que $m|x - y$ y por lo tanto, $x \equiv_m y$.

Ejemplo 2.29. *Sea* $m = 5$*, vemos que* $7 \equiv_5 42$ *ya que ambos tienen resto* 2 *en la división por* 5 *(de hecho ambos son congruentes con* 2*)*

Todo entero es congruente con su resto en la división por m, $x \equiv_m r$, ya que por el algoritmo de la división para cualquier entero x existe y es único el resto r en la división por m

También sabemos que dos enteros congruentes pertenecen a la misma clase de equivalencia, y por lo tanto las clases serán iguales, $\bar{x} = \bar{r}$.

Por las propiedades y características de la división entera, tenemos que hay m posibles restos en la división por m. Estos son, 0, ..., $m - 1$.

De esta forma vemos que habrá m clases de equivalencia o congruencia.

Teorema 2.30. *Sea* $m \in N, \mathbb{Z}m = \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/ \equiv_m$ *, el conjunto cociente, tiene* m *clases de equivalencias.*