

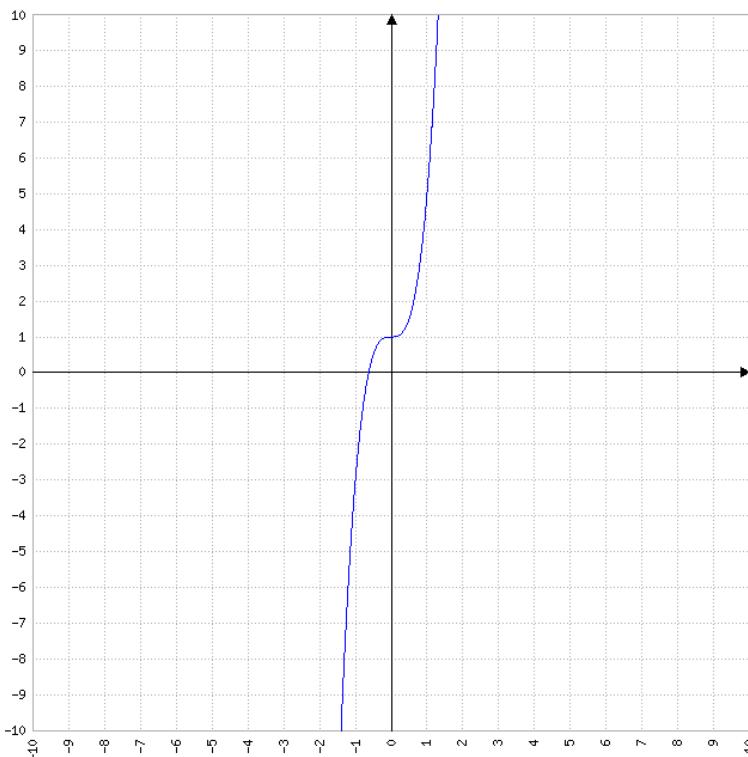
Trabajo Práctico N° 7: **Ejercicios de Repaso.**

Ejercicio 1.

Para cada una de las siguientes funciones:

- i. Determinar el dominio de la función.
- ii. Estudiar la continuidad: indicar el conjunto donde la función es continua, señalar y clasificar sus discontinuidades si las hay.
- iii. Estudiar la existencia de asíntotas verticales y horizontales.
- iv. Determinar el conjunto donde es derivable.

(a) $f(x) = 4x^3 + 1$.



(i) Dominio:

$$Dom_f = \mathbb{R}$$

(ii) Continuidad:

Al ser una función polinómica, $f(x)$ es continua en todo su dominio. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en \mathbb{R} .

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 + 1 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 + 1 = -\infty.$$

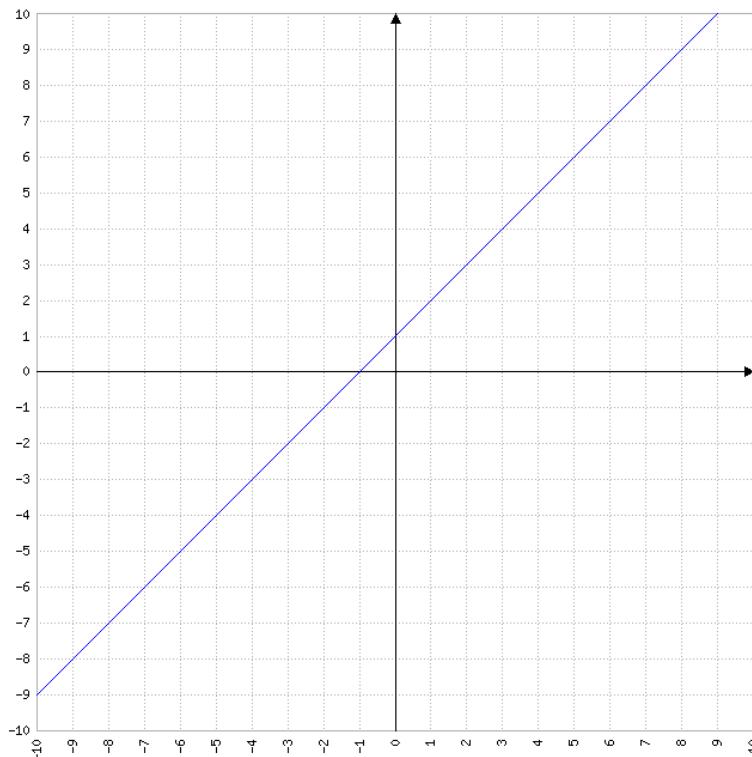
Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

(iv) Derivabilidad:

$$\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en \mathbb{R} .

(b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.



(i) Dominio:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

$$Dom_f = \mathbb{R} - \{1\}.$$

(ii) Continuidad:

$f(x)$ es discontinua evitable en $x=1$, ya que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ y, entonces, $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene una asíntota vertical en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = +\infty.$$

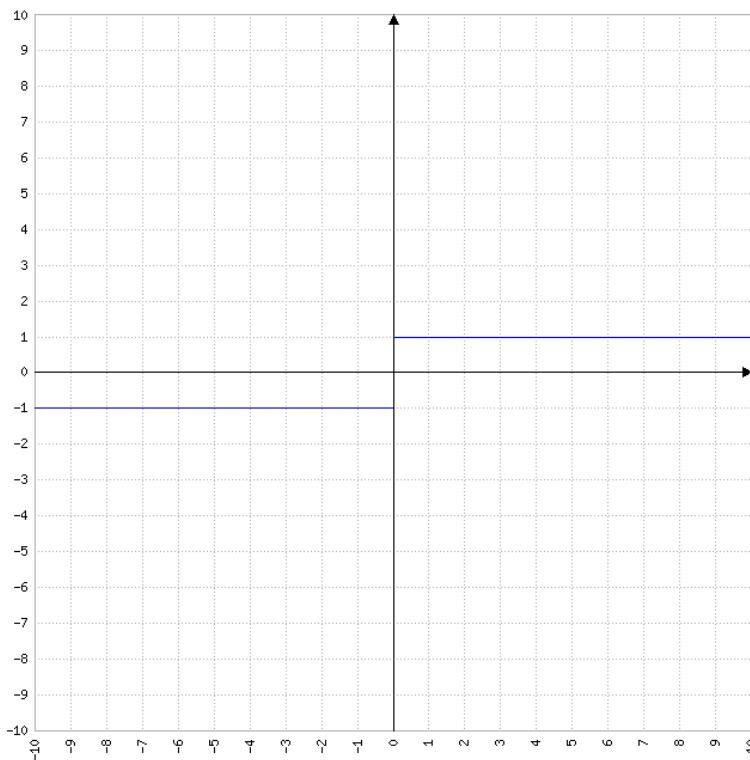
Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

(iv) Derivabilidad:

$$\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \forall x_0 \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

(c) $f(x) = \frac{x}{|x|}$



(i) Dominio:

$$|x|=0 \\ x=0.$$

$$Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

(ii) Continuidad:

$f(x)$ es discontinua inevitable en $x=0$, ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y, entonces, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene una asíntota vertical en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = 1.$$

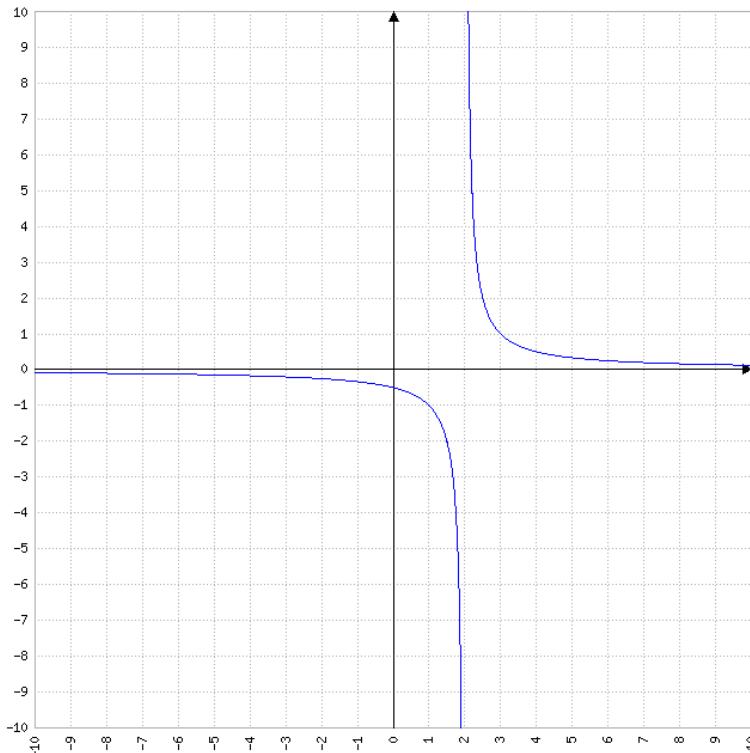
Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

(iv) Derivabilidad:

$$\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \forall x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

(d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$.



(i) Dominio:

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4*1*2}}{2*1}$$

$$x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$Dom_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

(ii) Continuidad:

$f(x)$ es discontinua evitable en $x=1$, ya que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ y, entonces, $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. $f(x)$ es discontinua inevitable en $x=2$, ya que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0.$$

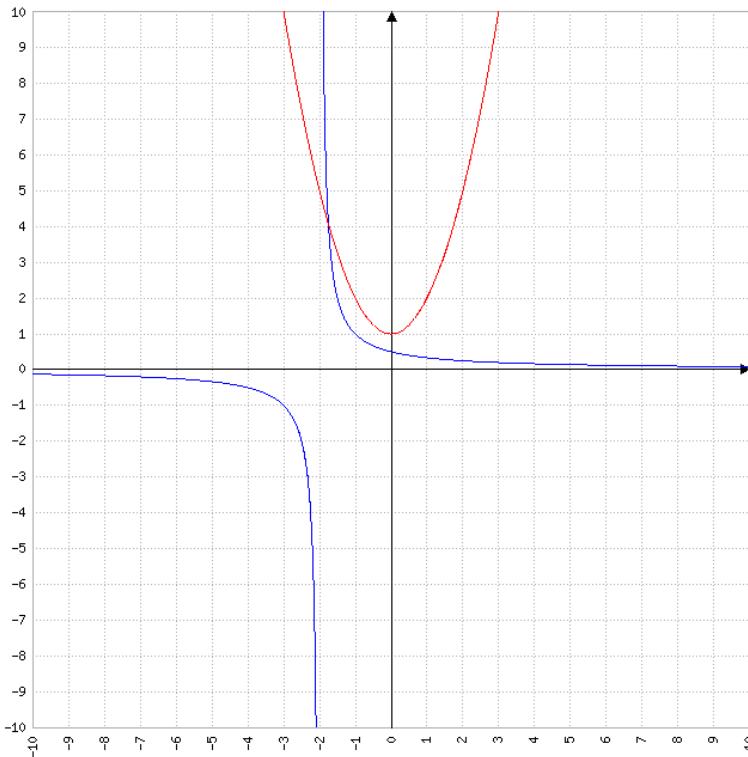
Por lo tanto, $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=0$.

(iv) Derivabilidad:

$$\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \forall x_0 \in \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{si } x \geq -1 \\ x^2 + 1, & \text{si } x < -1 \end{cases}.$$



(i) Dominio:

$$Dom_f = \mathbb{R}.$$

(ii) Continuidad:

$f(x)$ es discontinua inevitable en $x = -1$, ya que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$

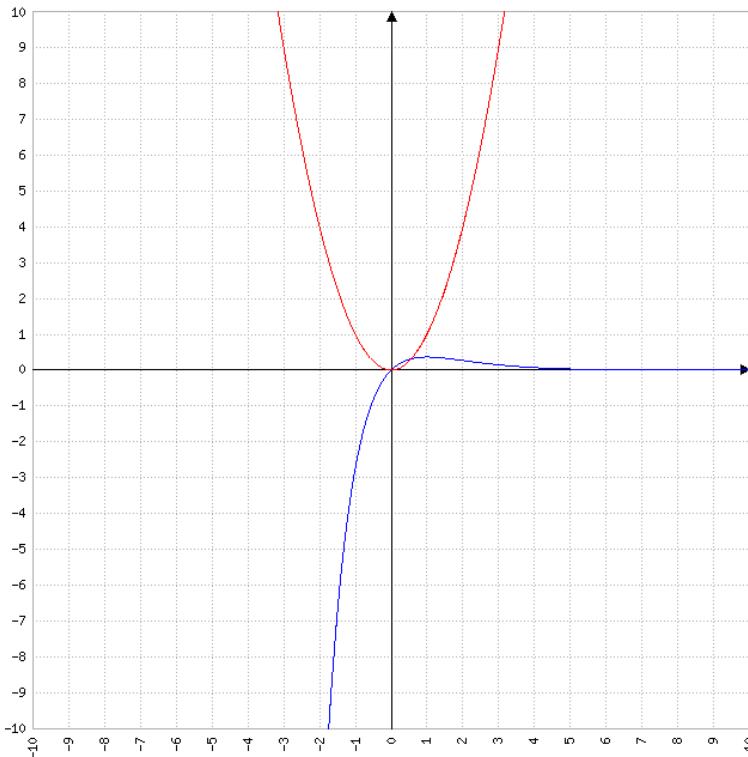
Por lo tanto, $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

(iv) Derivabilidad:

$$\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \forall x_0 \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x}, & \text{si } x \geq 0 \\ x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



(i) Dominio:

$$Dom_f = \mathbb{R}.$$

(ii) Continuidad:

$f(x)$ es continua en $x=0$, ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y, entonces, $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en \mathbb{R} .

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=0$.

(iv) Derivabilidad:

$$\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en \mathbb{R} .

Ejercicio 2.

Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 3 + 2 = 5. \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^2 - 3 - 6}{3 - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - 3 - 6}{0} = \left(\frac{0}{0}\right). \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} \quad (*)\end{aligned}$$

(*) $x_1, x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{1+5}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{6}{2} = 3.$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^2 \operatorname{sen} \frac{2}{2-x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^2 \operatorname{sen} \frac{2}{2-x} = (2-2)^2 \operatorname{sen} \frac{2}{2-2} = 0^2 \operatorname{sen} \frac{2}{0} = 0 * \operatorname{sen} \frac{2}{0} = 0.$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 \cdot 4 - 4^2}{2 - \sqrt{4}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - 16}{2 - 2} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-2x}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} -8\sqrt{x} + 4\sqrt{x^3} = -8\sqrt{4} + 4\sqrt{4^3} = -8 * 2 + 4 * 8 = -16 + 32 = 16.$$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^4}{3x^3}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^4}{3x^3} = -\infty.$$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = \frac{x^2(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2-\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = \frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{5+0+0}{2-0} = \frac{5}{2}.$$

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6+1}{2x^4-x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6+1}{2x^4-x^2} = +\infty.$$

Ejercicio 3.

Calcular las derivadas de las siguientes funciones utilizando reglas de derivación.

(a) $a(x) = \tan 2\pi x$.

$$a(x) = \frac{\sin 2\pi x}{\cos 2\pi x}.$$

$$a'(x) = \frac{\cos 2\pi x * \cos 2\pi x - \sin 2\pi x (-\sin 2\pi x)}{(\cos 2\pi x)^2}$$

$$a'(x) = \frac{(\cos 2\pi x)^2 + (\sin 2\pi x)^2}{(\cos 2\pi x)^2}$$

$$a'(x) = \frac{2\pi}{(\cos 2\pi x)^2}$$

$$a'(x) = (\sec 2\pi x)^2.$$

(b) $b(x) = e^{x^2+1}$.

$$b'(c) = e^{x^2+1} * 2x$$

$$b'(c) = 2x e^{x^2+1}.$$

(c) $c(x) = \frac{3x}{2x+10}$.

$$c'(x) = \frac{3(2x+10) - 3x * 2}{(2x+10)^2}$$

$$c'(x) = \frac{6x+30 - 6x}{(2x+10)^2}$$

$$c'(x) = \frac{30}{(2x+10)^2}.$$

(d) $d(x) = \ln(x^2 + 1)$.

$$d'(x) = \frac{1}{x^2+1} 2x$$

$$d'(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

(e) $e(x) = \cos 2x \sin x$.

$$e'(x) = -\sin 2x * 2 \sin x + \cos 2x \cos x$$

$$e'(x) = -2\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x.$$

(f) $f(x) = \sqrt{1+x^4} - 1.$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}} \cdot 4x^3$$
$$f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}.$$

(g) $g(x) = \frac{e^{2x}}{x-1}.$

$$g'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2(x-1) - e^{2x} \cdot 1}{(x-1)^2}$$
$$g'(x) = \frac{2xe^{2x} - 2e^{2x} - e^{2x}}{(x-1)^2}$$
$$g'(x) = \frac{2xe^{2x} - 3e^{2x}}{(x-1)^2}$$
$$g'(x) = \frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

(h) $h(x) = \frac{\ln x + 2}{\sin x}.$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x+2} \sin x - \ln(x+2) \cos x}{(\sin x)^2}.$$

Ejercicio 4.

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes de las siguientes funciones en los puntos indicados.

(a) $f(x) = e^x + 1$ en $x = 0$.

$$f'(x) = e^x.$$

$$f(0) = e^0 + 1$$

$$f(0) = 1 + 1$$

$$f(0) = 2.$$

$$f'(0) = e^0$$

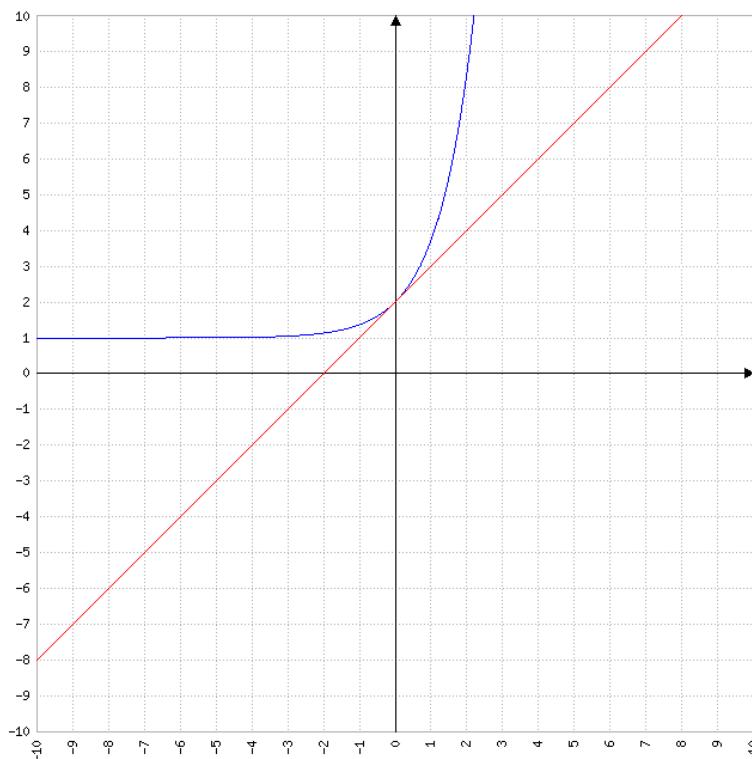
$$f'(0) = 1.$$

$$y - 2 = 1(x - 0)$$

$$y - 2 = 1x$$

$$y - 2 = x$$

$$y = x + 2.$$



(b) $g(x) = -x^4 + 2x + 1$ en $x = 2$.

$$g'(x) = -4x^3 + 2.$$

$$\begin{aligned}g(2) &= -2^4 + 2 * 2 + 1 \\g(2) &= -16 + 4 + 1 \\g(2) &= -11.\end{aligned}$$

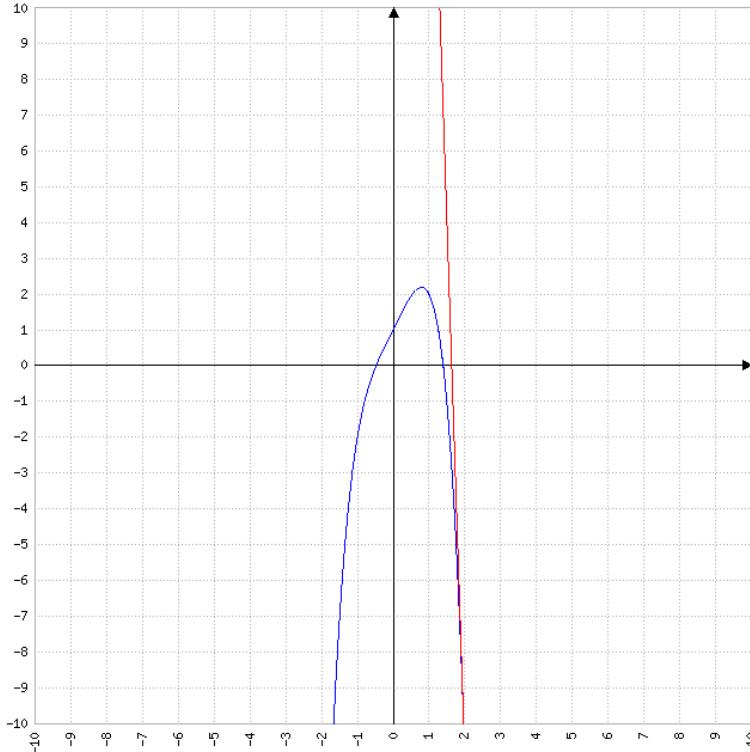
$$\begin{aligned}g'(2) &= -4 * 2^3 + 2 \\g'(2) &= -4 * 8 + 2 \\g'(2) &= -32 + 2 \\g'(2) &= -30.\end{aligned}$$

$$y - (-11) = -30(x - 2)$$

$$y + 11 = -30x + 60$$

$$y = -30x + 60 - 11$$

$$y = -30x + 49.$$



$$(c) h(x) = 2 \ln(x^2 + 2) \text{ en } x = 1.$$

$$\begin{aligned}h'(x) &= 2 \frac{1}{x^2+1} * 2x \\h'(x) &= \frac{4x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(1) &= 2 \ln(1^2 + 2) \\h(1) &= 2 \ln(1 + 2) \\h(1) &= 2 \ln 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h'(1) &= \frac{4*1}{1^2+1} \\h'(1) &= \frac{4}{1+1}\end{aligned}$$

$$h'(1) = \frac{4}{2}$$

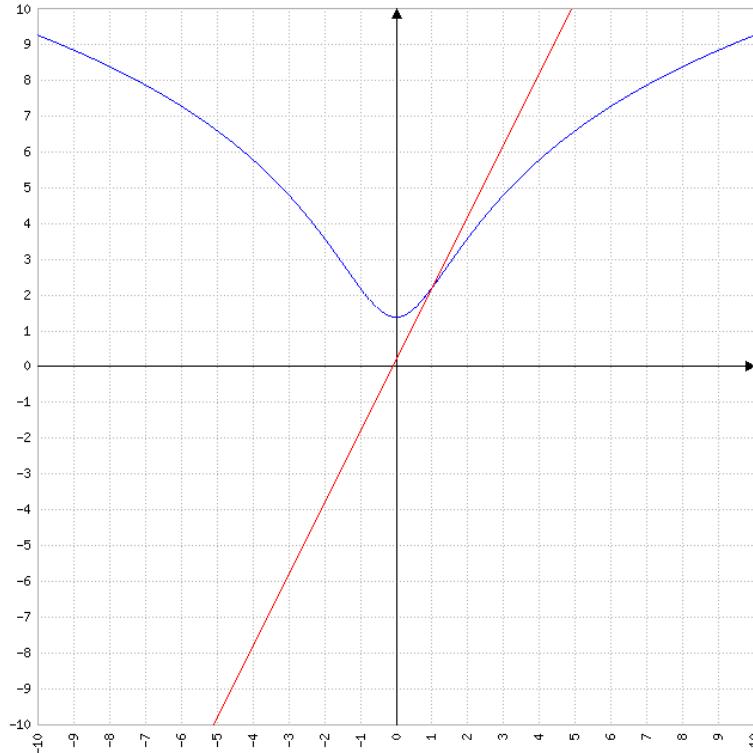
$$h'(1) = 2.$$

$$y - 2 \ln 3 = 2(x - 1)$$

$$y - 2 \ln 3 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 2 \ln 3$$

$$y = 2x + 2(\ln 3 - 1).$$



(d) $i(x) = \sin 2x$ en $x = \pi$.

$$i'(x) = \cos 2x * 2$$

$$i'(x) = 2 \cos 2x.$$

$$i(\pi) = \sin 2\pi$$

$$i(\pi) = 0.$$

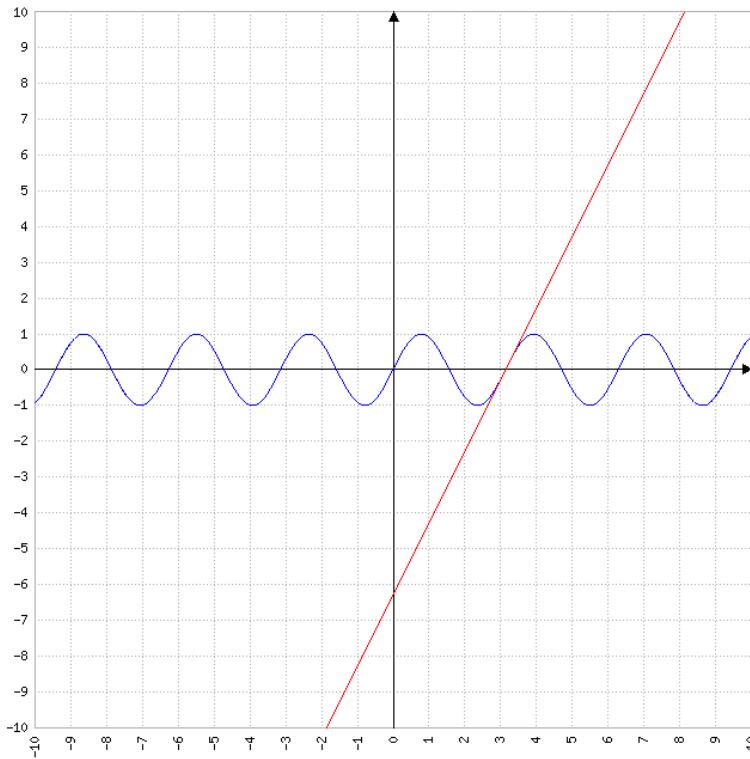
$$i'(\pi) = 2 \cos 2\pi$$

$$i'(\pi) = 2 * 1$$

$$i'(\pi) = 2.$$

$$y - 0 = 2(x - \pi)$$

$$y = 2x - 2\pi.$$



$$(e) j(x) = \frac{x^2+x-2}{x} \text{ en } x=1.$$

$$j'(x) = \frac{(2x+1)x - (x^2+x-2)*1}{x^2}$$

$$j'(x) = \frac{2x^2+x-x^2-x+2}{x^2}$$

$$j'(x) = \frac{x^2+2}{x^2}.$$

$$j(1) = \frac{1^2+1-2}{1}$$

$$j(1) = \frac{1+1-2}{1}$$

$$j(1) = \frac{0}{1}$$

$$j(1) = 0.$$

$$j'(1) = \frac{1^2+2}{1^2}$$

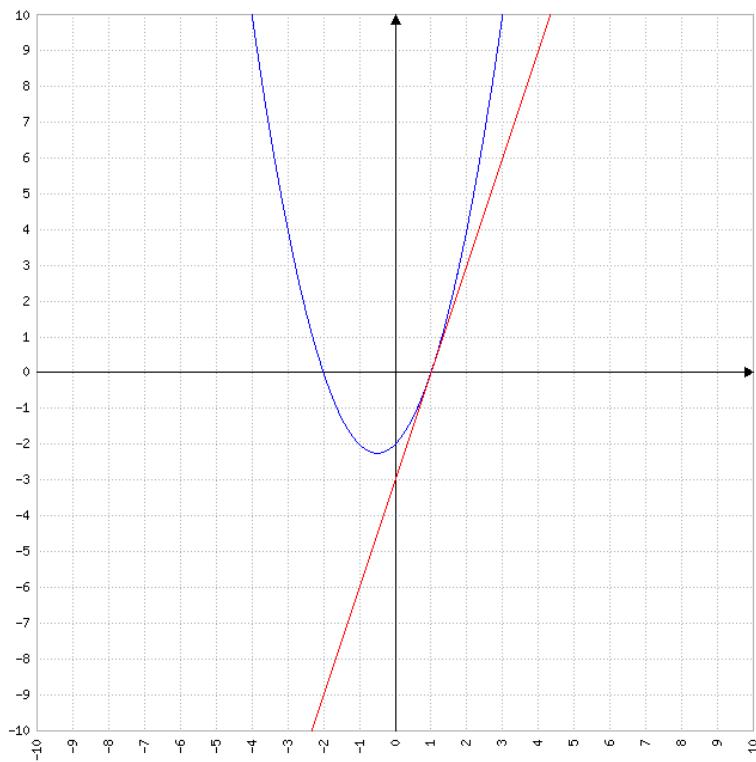
$$j'(1) = \frac{1+2}{1}$$

$$j'(1) = \frac{3}{1}$$

$$j'(1) = 3.$$

$$y - 0 = 3(x - 1)$$

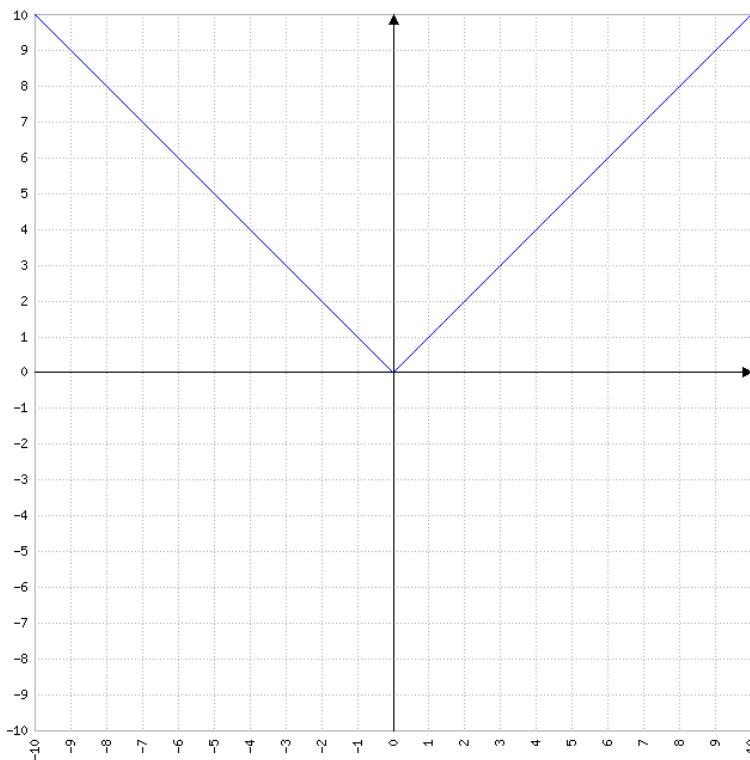
$$y = 3x - 3.$$



Ejercicio 5.

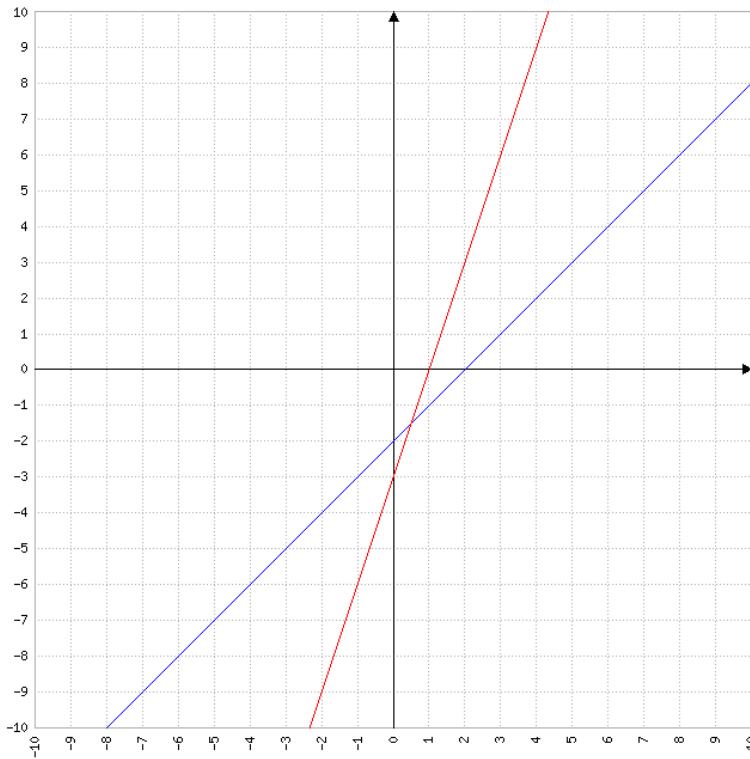
Graficar las siguientes funciones a trozos. ¿Para qué valores de x las funciones no son derivables?

(a) $a(x) = |x|$.



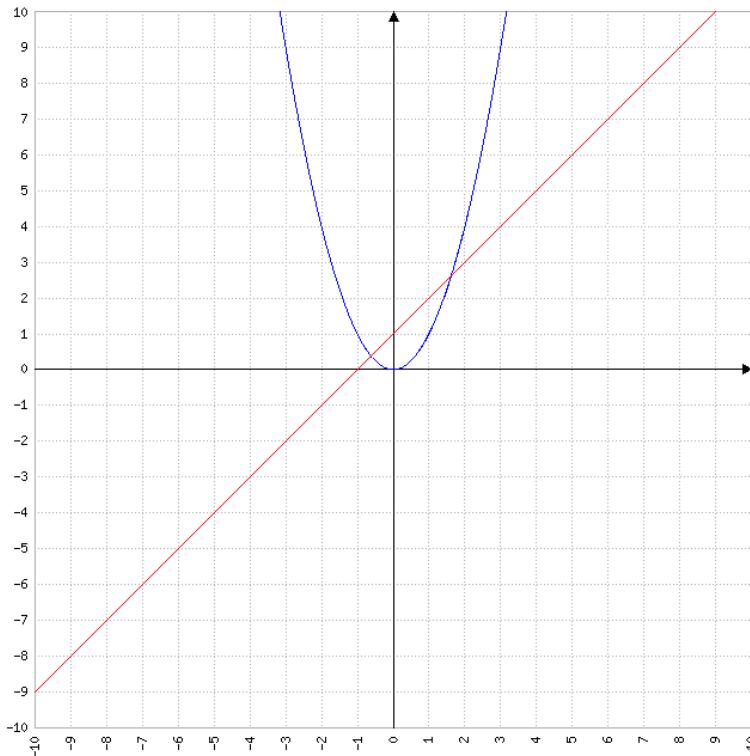
La función $a(x)$ no es derivable para $x = 0$.

(b) $b(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 3, & \text{si } x > 2 \end{cases}$



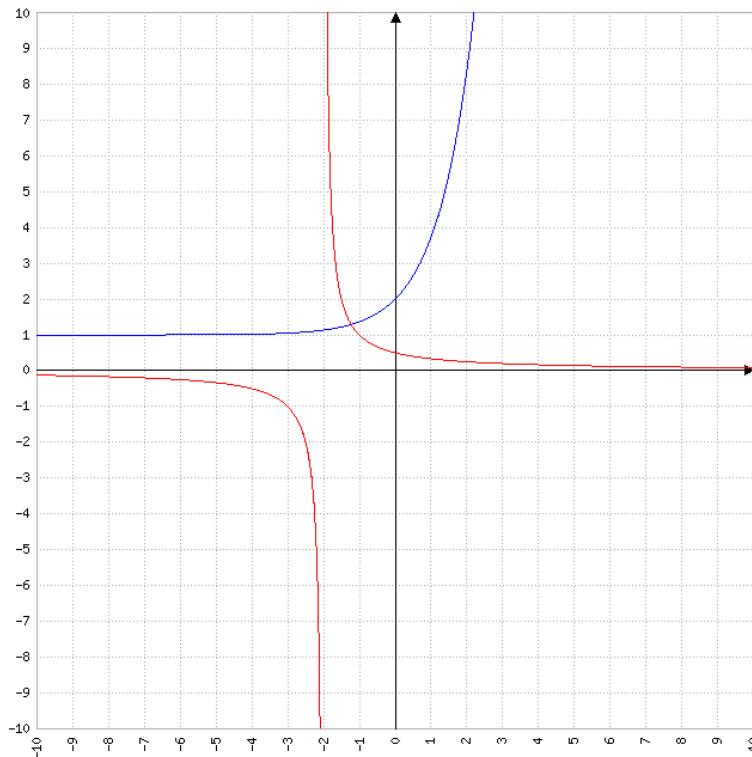
La función b (x) no es derivable para x= 2.

(c) $c(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$



La función $c(x)$ no es derivable para $x=0$.

$$(d) d(x) = \begin{cases} e^x + 1, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x+2}, & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$



La función $d(x)$ no es derivable para $x=-1$.

Ejercicio 6.

Realizar el estudio de las siguientes funciones y graficar.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$.

(1) Determinar el dominio de la función:

$$Dom_f = \mathbb{R}.$$

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

Las funciones polinómicas son continuas en \mathbb{R} . Por lo tanto, $f(x)$ es continua en \mathbb{R} .

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x = +\infty.$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 1).$$

$$\exists f'(x) \forall x \in Dom_f.$$

$$f'(x) = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = \frac{0}{3}$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$|x| = 1$$

$$x = \pm 1.$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene puntos críticos en $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$x = -1$	$(-1, 1)$	$x = 1$	$(1, +\infty)$
VP	-2	---	0	---	2
$f'(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0
$f(x)$	creciente	máximo relativo	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ son $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y $(-1, 1)$, respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)$$

$$f(-1) = -1 + 3$$

$$f(-1) = 2.$$

$$f(1) = 1^3 - 3 * 1$$

$$f(1) = 1 - 3$$

$$f(1) = -2.$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene puntos máximo y mínimo relativos en $(-1, 2)$ y $(1, -2)$, respectivamente.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde $f''(x) = 0$ o donde f'' no existe:

$$f''(x) = 6x.$$

$$\exists f''(x) \forall x \in Dom_f.$$

$$f''(x) = 0$$

$$6x = 0$$

$$x = \frac{0}{6}$$

$$x = 0.$$

Por lo tanto, $f''(x) = 0$ en $x = 0$.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, +\infty)$
VP	-1	---	1
$f''(x)$	< 0	0	> 0
$f(x)$	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

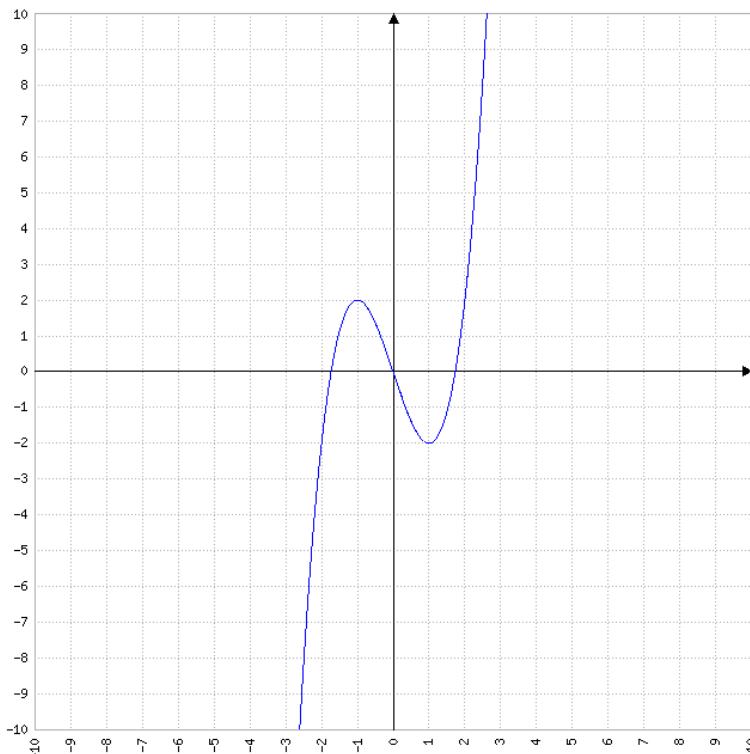
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de $f(x)$ son $(0, +\infty)$ y $(-\infty, 0)$, respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

$$\begin{aligned}f(0) &= 0^3 - 3 * 0 \\f(0) &= 0 - 0 \\f(0) &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(b) $h(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

(1) Determinar el dominio de la función:

$$\begin{aligned}x - 1 &= 0 \\x &= 1.\end{aligned}$$

$$Dom_h = \mathbb{R} - \{1\}.$$

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

$h(x)$ es discontinua inevitable en $x = 0$, ya que $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} h(x)$. Por lo tanto, $h(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

Por lo tanto, $h(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty.$$

Por lo tanto, $h(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

$$h'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

$\exists h'(x) \forall x \in Dom_h$.

$$h'(x) = 0$$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (x-1)^2$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4*1*(-1)}}{2*1}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4*2}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4\sqrt{2}}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Por lo tanto, $h(x)$ tiene puntos críticos en $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ y $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	$(-\infty, 1 - \sqrt{2})$	$x = 1 - \sqrt{2}$	$(1 - \sqrt{2}, 1)$	$x = 1$	$(1, 1 + \sqrt{2})$	$x = 1 + \sqrt{2}$	$(1 + \sqrt{2}, +\infty)$
VP	-1	---	0	---	2	---	3
$h'(x)$	> 0	0	< 0	---	< 0	0	> 0
$h(x)$	creciente	máximo relativo	decreciente	asíntota vertical	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ son $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$ y $(1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$, respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

$$h(1 - \sqrt{2}) = \frac{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}{1 - \sqrt{2} - 1}$$

$$h(1 - \sqrt{2}) = \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1}{-\sqrt{2}}$$

$$h(1 - \sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}}$$

$$h(1 - \sqrt{2}) = \frac{2(\sqrt{2} - 2)}{\sqrt{2}}$$

$$h(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 2)$$

$$h(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$h(1 - \sqrt{2}) = 2(1 - \sqrt{2}).$$

$$h(1 + \sqrt{2}) = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 1}{1 + \sqrt{2} - 1}$$

$$h(1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1}{\sqrt{2}}$$

$$h(1 + \sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} + 4}{\sqrt{2}}$$

$$h(1 + \sqrt{2}) = \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{\sqrt{2}}$$

$$h(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 2)$$

$$h(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$h(1 + \sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2}).$$

Por lo tanto, $h(x)$ tiene puntos máximo y mínimo relativos en $(1 - \sqrt{2}, 2(1 - \sqrt{2}))$ y $(1 + \sqrt{2}, 2(1 + \sqrt{2}))$, respectivamente.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde $f''(x) = 0$ o donde f'' no existe:

$$h''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$h''(x) = \frac{2(x-1)(x^2-2x+1) - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}$$

$$h''(x) = \frac{2(x-1)[(x^2-2x+1) - (x^2-2x-1)]}{(x-1)^4}$$

$$h''(x) = \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3}$$

$$h''(x) = \frac{2*2}{(x-1)^3}$$

$$h''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

$\exists h''(x) \forall x \in Dom_h.$

$$\begin{aligned} h''(x) &= 0 \\ \frac{4}{(x-1)^3} &= 0 \\ 4 &= 0 * (x-1)^3 \\ 4 &\neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h''(x) \neq 0 \forall x \in Dom_h$.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

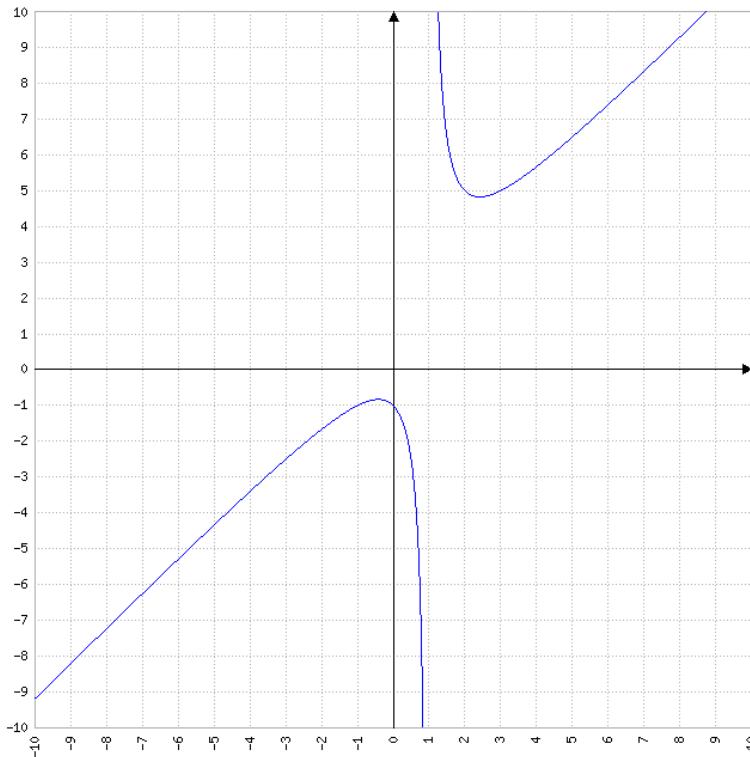
Intervalo	$(-\infty, 1)$	$x=1$	$(1, +\infty)$
VP	0	---	2
$h''(x)$	< 0	0	> 0
$h(x)$	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de $h(x)$ son $(1, +\infty)$ y $(-\infty, 1)$, respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

Por lo tanto, $h(x)$ no tiene puntos de inflexión.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(c) $g(x) = x^2 + \ln x.$

(1) Determinar el dominio de la función:

$$Dom_g = (0, +\infty).$$

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

Las funciones logarítmicas son continuas en sus dominios. Por lo tanto, $g(x)$ es continua en $(0, +\infty)$.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + \ln x = -\infty.$$

Por lo tanto, $g(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + \ln x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \ln x = +\infty.$$

Por lo tanto, $g(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}.$$

$\exists g'(x) \forall x \in Dom_g.$

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{2x^2 + 1}{x} = 0$$

$$2x^2 + 1 = 0x$$

$$2x^2 + 1 = 0$$

$$2x^2 = -1$$

$$x^2 = \frac{-1}{2}.$$

$\nexists x \in \mathbb{R} / x^2 = \frac{-1}{2}.$

Por lo tanto, $g(x)$ no tiene puntos críticos.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	(0, $+\infty$)
VP	1
$g'(x)$	> 0
$g(x)$	creciente

Por lo tanto, $g(x)$ es crece en todo su dominio.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

Dado que decrece en todo su dominio, $g(x)$ no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde $f''(x) = 0$ o donde f'' no existe:

$$g''(x) = \frac{4x*x - (2x^2 + 1)}{x^2}$$

$$g''(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 1}{x^2}$$

$$g''(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2}.$$

$\exists g''(x) \forall x \in Dom_g.$

$$g''(x) = 0$$

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2} = 0$$

$$2x^2 - 1 = 0 * x^2$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, $g''(x) = 0$ en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
VP	$\frac{1}{2}$	---	1
$g''(x)$	< 0	0	> 0
$g(x)$	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de $g(x)$ son $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ y $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, respectivamente.

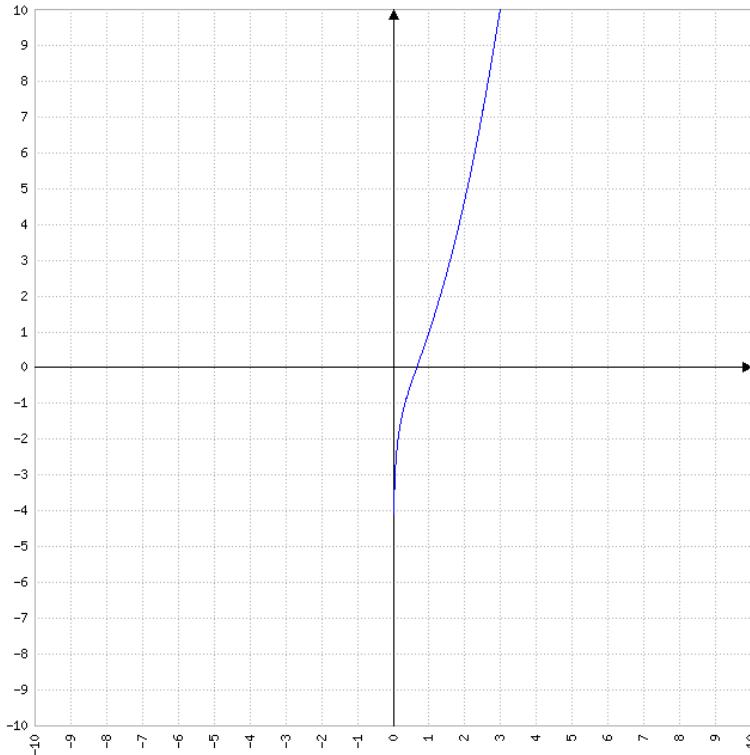
(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, $g(x)$ tiene un punto de inflexión en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(d) $j(x) = xe^x$.

(1) Determinar el dominio de la función:

$$Dom_j = \mathbb{R}$$

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

La función identidad ($y = x$) y las funciones exponenciales son continuas en \mathbb{R} . Por lo tanto, $j(x)$ es continua en \mathbb{R} .

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} j(x) = \pm\infty, \forall a \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, $j(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

Por lo tanto, $j(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

$$\begin{aligned} j'(x) &= e^x + xe^x \\ j'(x) &= e^x(x+1). \end{aligned}$$

$\exists j'(x) \forall x \in Dom_j.$

$$\begin{aligned} j'(x) &= 0 \\ e^x(x+1) &= 0 \\ x+1 &= \frac{0}{e^x} \\ x+1 &= 0 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $j(x)$ tiene un punto crítico en $x = -1$.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$x = -1$	$(-1, +\infty)$
VP	-2	---	0
$j'(x)$	< 0	0	> 0
$j(x)$	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $j(x)$ son $(-1, +\infty)$ y $(-\infty, -1)$, respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

$$\begin{aligned} j(-1) &= -1e^{-1} \\ j(-1) &= \frac{-1}{e}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $j(x)$ tiene un punto mínimo relativo en $(-1, \frac{-1}{e})$.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde $f''(x) = 0$ o donde f'' no existe:

$$\begin{aligned} j''(x) &= e^x(x+1) + e^x x \\ j''(x) &= e^x x + e^x + e^x x \\ j''(x) &= 2e^x x + e^x \\ j''(x) &= e^x(2x+1). \end{aligned}$$

$\exists j''(x) \forall x \in Dom_j.$

$$\begin{aligned} j''(x) &= 0 \\ e^x(2x+1) &= 0 \\ 2x+1 &= \frac{0}{e^x} \\ 2x+1 &= 0 \\ 2x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $j'''(x) = 0$ en $x = \frac{-1}{2}$.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	$(-\infty, \frac{-1}{2})$	$x = \frac{-1}{2}$	$(\frac{-1}{2}, +\infty)$
VP	-1	---	1
$j''(x)$	< 0	0	> 0
$j(x)$	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de $j(x)$ son $(\frac{-1}{2}, +\infty)$ y $(-\infty, \frac{-1}{2})$, respectivamente.

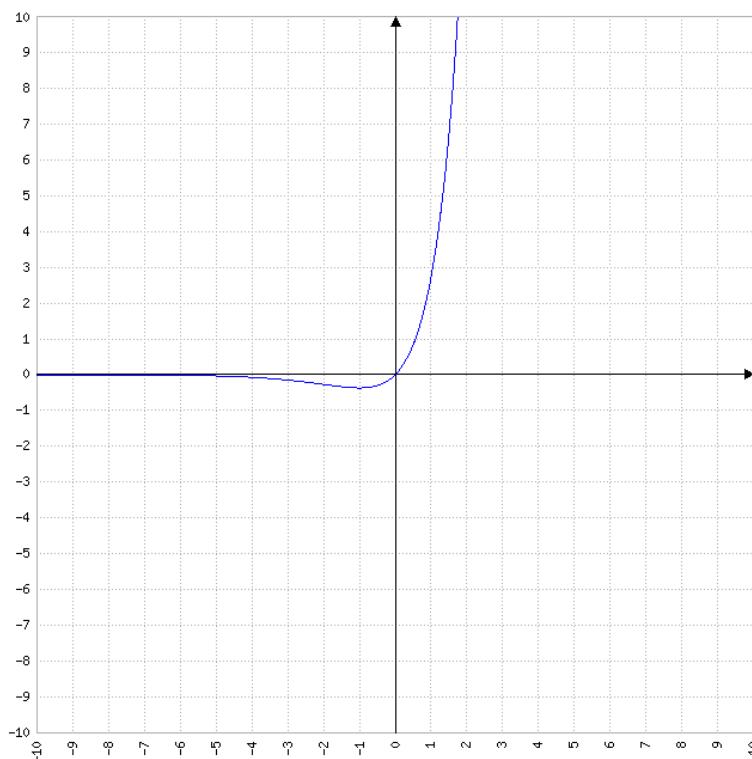
(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

$$j\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2} e^{\frac{-1}{2}}$$

$$j\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{e}}$$

Por lo tanto, $j(x)$ tiene un punto de inflexión en $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{e}})$.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



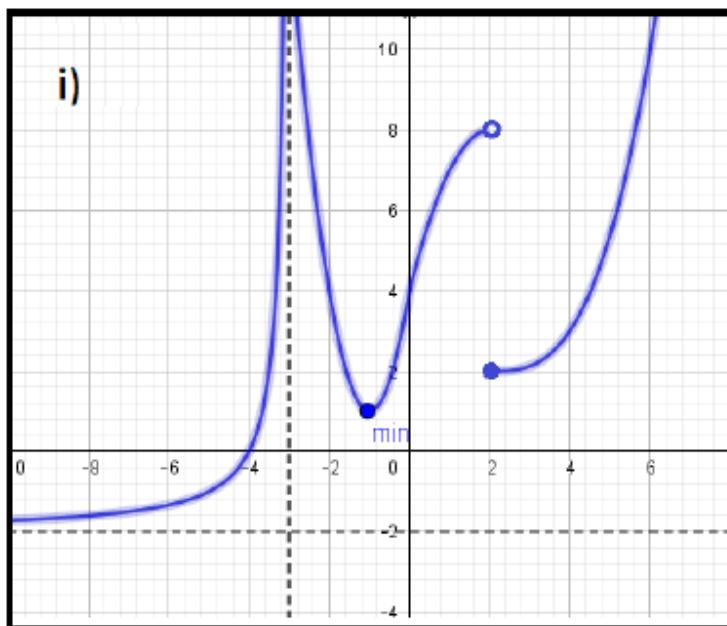
Ejercicio 7.

En cada caso, realizar el gráfico de una función $f(x)$ que cumpla con los siguientes requisitos:

(a)

- Dominio de $f(x)$: $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.
- Continuidad: $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$.
- Discontinuidad inevitable en $x = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$.
- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ en $(-3, -1)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (2, +\infty)$.
- $f''(x) < 0$ en $(0, 2)$.

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+	-	+
$f(x)$	creciente y convexa	decreciente y convexa	creciente y convexa	creciente y cóncava	creciente y convexa

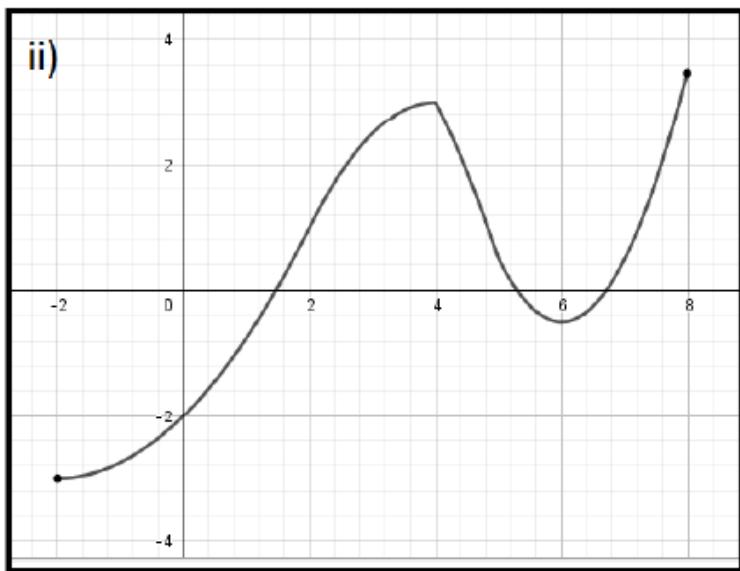


(b)

- Dominio de $f(x)$: $[-2, 8]$.
- Creciente en $(-2, 4) \cup (6, 8)$ y decreciente en el intervalo $(4, 6)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-2, 2) \cup (5, 8)$ y $f''(x) < 0$ en $(2, 5)$.

- ¿Esta función tiene máximo absoluto? Sí, tiene máximo absoluto (por teorema de Weierstrass).

Intervalo	(-2, 2)	(2, 4)	(4, 5)	(5, 6)	(6, 8)
$f'(x)$	+	+	-	-	+
$f''(x)$	+	-	-	+	+
$f(x)$	creciente y cóncava	creciente y convexa	decreciente y convexa	decreciente y cóncava	creciente y cóncava



Ejercicio 8.

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int \frac{\pi}{2} \cos x \, dx.$

$$\begin{aligned}\int \frac{\pi}{2} \cos x \, dx &= \frac{\pi}{2} \int \cos x \, dx \\ \int \frac{\pi}{2} \cos x \, dx &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

(b) $\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx.$

$$\begin{aligned}\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx &= \int 2x^8 \, dx + \int \frac{-1}{x} \, dx \\ \int 2x^8 - \frac{1}{x} dx &= 2 \int x^8 \, dx - \int \frac{1}{x} \, dx \\ \int 2x^8 - \frac{1}{x} dx &= 2 \frac{x^9}{9} - \ln x \\ \int 2x^8 - \frac{1}{x} dx &= \frac{2}{9} x^9 - \ln x + C.\end{aligned}$$

(c) $\int \cos 3x \, dx.$

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \, dx &= \int \cos u \frac{du}{3} && (*) \\ \int \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} \int \cos u \, du \\ \int \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} \operatorname{sen} u \\ \int \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C.\end{aligned}$$

(*) $u = 3x; du = 3 \, dx.$

(d) $\int x \operatorname{sen} x \, dx.$

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x \, dx &= x (-\cos x) - \int -\cos x \, dx && (*) \\ \int x \operatorname{sen} x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ \int x \operatorname{sen} x \, dx &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

(*) $u = x; du = dx; dv = \operatorname{sen} x \, dx; v = -\cos x.$

(e) $\int x^2 e^x \, dx.$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int e^x 2x dx && (*) \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) && (**) \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C. \end{aligned}$$

(*) $u = x^2$; $du = 2x dx$; $dv = e^x dx$; $v = e^x$.
 (**) $u = x$; $du = dx$; $dv = e^x dx$; $v = e^x$.

(f) $\int x^2(1+x^3) dx.$

$$\begin{aligned} \int x^2(1+x^3) dx &= \int x^2 + x^5 dx \\ \int x^2(1+x^3) dx &= \int x^2 dx + \int x^5 dx \\ \int x^2(1+x^3) dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + C. \\ \int x^2(1+x^3) dx &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^6 + C. \end{aligned}$$

(g) $\int (e^x - 3x^3)^5(e^x - 9x^2) dx.$

$$\begin{aligned} \int (e^x - 3x^3)^5(e^x - 9x^2) dx &= \int u^5 du && (*) \\ \int (e^x - 3x^3)^5(e^x - 9x^2) dx &= \frac{u^6}{6} \\ \int (e^x - 3x^3)^5(e^x - 9x^2) dx &= \frac{1}{6}(e^x - 3x^3)^6 + C. \end{aligned}$$

(*) $u = e^x - 3x^3$; $du = (e^x - 9x^2) dx$.

(h) $\int \sin x \cos x dx.$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int u du && (*) \\ \int \sin x \cos x dx &= \frac{u^2}{2} \\ \int \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C. \end{aligned}$$

(*) $u = \sin x$; $du = \cos x dx$.

(i) $\int \frac{x}{x+1} dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1} dx &= \int \frac{u-1}{u} du && (*) \\ \int \frac{x}{x+1} dx &= \int 1 - \frac{1}{u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x+1} dx &= \int du + \int \frac{-1}{u} du \\ \int \frac{x}{x+1} dx &= u - \int \frac{1}{u} du \\ \int \frac{x}{x+1} dx &= u - \ln|u| \\ \int \frac{x}{x+1} dx &= x + 1 - \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

(*) $u = x + 1$; $du = dx$.

(j) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx.$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{u} du && (*) \\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \ln|u| \\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \ln|x^2 + x + 1| + C.\end{aligned}$$

(*) $u = x^2 + x + 1$; $du = (2x + 1) dx$.

(k) $\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx.$

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx &= \int \frac{4}{u^3} du && (*) \\ \int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx &= 4 \int \frac{1}{u^3} du \\ \int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx &= 4 \int u^{-3} du \\ \int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx &= 4 \frac{u^{-2}}{-2} \\ \int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx &= \frac{-2}{u^2} \\ \int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx &= \frac{-2}{(\ln x)^2} + C.\end{aligned}$$

(*) $u = \ln x$; $du = \frac{1}{x} dx$.

Ejercicio 9.

Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_1^3 (2x + 3)^2 dx.$

$$\begin{aligned} \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \int_1^3 u^2 \frac{du}{2} && (*) \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{2*1+3}^{2*3+3} u^2 du \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} \Big|_{2*3+3}^{2*3+3} \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{1}{6} (2x + 3)^3 \Big|_1^3 \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{1}{6} [(2 * 3 + 3)^3 - (2 * 1 + 3)^3] \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{1}{6} [(6 + 3)^3 - (2 + 3)^3] \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{1}{6} (9^3 - 5^3) \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{1}{6} (729 - 125) \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{1}{6} * 604 \\ \int_1^3 (2x + 3)^2 dx &= \frac{302}{3}. \end{aligned}$$

(*) $u = 2x + 3; du = 2 dx.$

(b) $\int_0^\pi \sin x dx.$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x dx &= -\cos x \Big|_0^\pi \\ \int_0^\pi \sin x dx &= -(\cos \pi - \cos 0) \\ \int_0^\pi \sin x dx &= -(-1 - 1) \\ \int_0^\pi \sin x dx &= -(-2) \\ \int_0^\pi \sin x dx &= 2. \end{aligned}$$

(c) $\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx.$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx &= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^1 \\ \int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx &= \frac{3}{4} [1^{\frac{4}{3}} - (-1)^{\frac{4}{3}}] \\ \int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx &= \frac{3}{4} (1 - 1) \\ \int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx &= \frac{3}{4} * 0 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx = 0.$$

(d) $\int_0^\pi \cos x + 3x^4 dx.$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos x + 3x^4 dx &= \int_0^\pi \cos x dx + \int_0^\pi 3x^4 dx \\ \int_0^\pi \cos x + 3x^4 dx &= \sin x \Big|_0^\pi + 3 \int_0^\pi x^4 dx \\ \int_0^\pi \cos x + 3x^4 dx &= (\sin \pi - \sin 0) + 3 \frac{x^5}{5} \Big|_0^\pi \\ \int_0^\pi \cos x + 3x^4 dx &= (0 - 0) + \frac{3}{5} (\pi^5 - 0^5) \\ \int_0^\pi \cos x + 3x^4 dx &= (0 - 0) + \frac{3}{5} (\pi^5 - 0) \\ \int_0^\pi \cos x + 3x^4 dx &= 0 + \frac{3}{5} \pi^5 \\ \int_0^\pi \cos x + 3x^4 dx &= \frac{3}{5} \pi^5.\end{aligned}$$

(e) $\int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx.$

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx &= \int_{1^2+1}^{e^2+1} \frac{1}{u} du && (*) \\ \int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx &= \ln |u| \Big|_{1^2+1}^{e^2+1} \\ \int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx &= \ln |x^2 + 1| \Big|_1^e \\ \int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx &= \ln(e^2 + 1) - \ln(1^2 + 1) \\ \int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx &= \ln(e^2 + 1) - \ln(1 + 1) \\ \int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx &= \ln(e^2 + 1) - \ln 2 \\ \int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx &= \ln \frac{e^2+1}{2}.\end{aligned}$$

(*) $u = x^2 + 1$; $du = 2x dx.$

(f) $\int_0^4 e^x x^3 dx.$

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^x x^3 dx &= (x^3 e^x - \int e^x 3x^2 dx) \Big|_0^4 && (*) \\ \int_0^4 e^x x^3 dx &= (x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx) \Big|_0^4 \\ \int_0^4 e^x x^3 dx &= [x^3 e^x - 3(x^2 e^x - \int e^x 2x dx)] \Big|_0^4 && (**) \\ \int_0^4 e^x x^3 dx &= [x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2 \int x e^x dx)] \Big|_0^4 \\ \int_0^4 e^x x^3 dx &= \{x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)]\} \Big|_0^4 && (***) \\ \int_0^4 e^x x^3 dx &= \{x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)]\} \Big|_0^4 \\ \int_0^4 e^x x^3 dx &= [x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x)] \Big|_0^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 e^x x^3 dx &= (x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x) \Big|_0^4 \\
 \int_0^4 e^x x^3 dx &= (4^3 e^4 - 3 * 4^2 e^4 + 6 * 4e^4 - 6e^4) - (0^3 e^0 - 3 * 0^2 e^0 + 6 * 0e^0 - 6e^0) \\
 \int_0^4 e^x x^3 dx &= (64e^4 - 3 * 16e^4 + 24e^4 - 6e^4) - (0 * 1 - 3 * 0 * 1 + 6 * 0 * 1 - 6 * 1) \\
 \int_0^4 e^x x^3 dx &= (64e^4 - 48e^4 + 24e^4 - 6e^4) - (0 - 0 + 0 - 6) \\
 \int_0^4 e^x x^3 dx &= 34e^4 - (-6) \\
 \int_0^4 e^x x^3 dx &= 34e^4 + 6.
 \end{aligned}$$

(*) $u = x^3$; $du = 3x^2 dx$; $dv = e^x dx$; $v = e^x$.

(**) $u = x^2$; $du = 2x dx$; $dv = e^x dx$; $v = e^x$.

(***) $u = x$; $du = dx$; $dv = e^x$; $v = e^x$.

(g) $\int_1^4 \sqrt{2x+3} dx.$

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= \int_{2*1+3}^{2*4+3} \sqrt{u} \frac{du}{2} && (*) \\
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= \frac{1}{2} \int_{2*1+3}^{2*4+3} u^{\frac{1}{2}} du \\
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{2*1+3}^{2*4+3} \\
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= \frac{1}{3} (2x+3)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 \\
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= \frac{1}{3} [(2 * 4 + 3)^{\frac{3}{2}} - (2 * 1 + 3)^{\frac{3}{2}}] \\
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= \frac{1}{3} [(8+3)^{\frac{3}{2}} - (2+3)^{\frac{3}{2}}] \\
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= \frac{1}{3} (11^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}) \\
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= \frac{1}{3} (11^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}) \\
 \int_1^4 \sqrt{2x+3} dx &= 8,434.
 \end{aligned}$$

(*) $u = 2x + 3$; $du = 2 dx$.

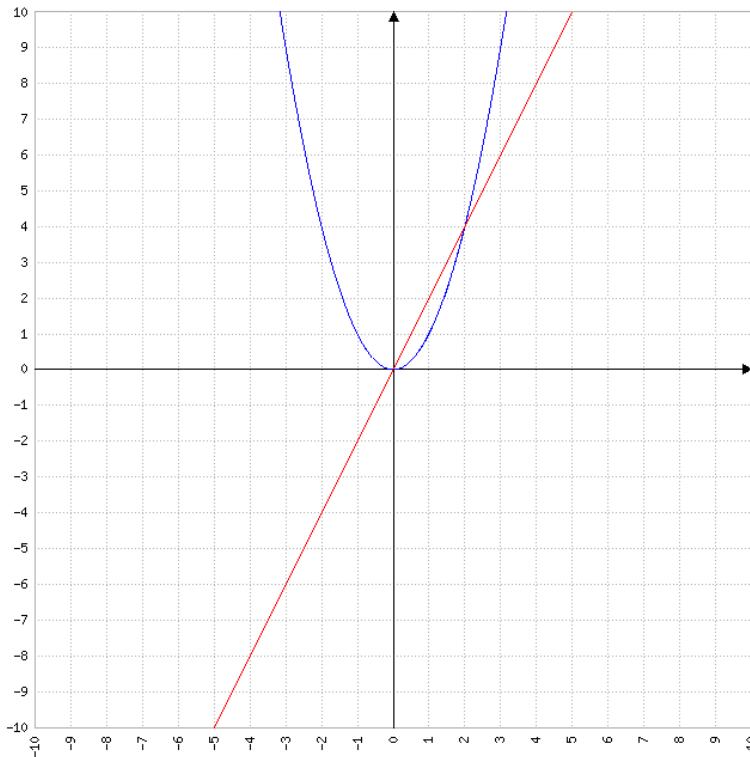
(h) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^3 x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^3 \\
 \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2 (3^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}) \\
 \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2 (\sqrt{3} - 1).
 \end{aligned}$$

Ejercicio 10.

Graficar las curvas y hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de esas curvas.

(a) $y = x^2$; $y = 2x$.



$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0.$$

$$x_1 = 0; x_2 = 2.$$

Intervalo	(0, 2)
VP	1
$f(x)$	1
$g(x)$	2

$$A = \int_0^2 g(x) - f(x) dx$$

$$A = \int_0^2 2x - x^2 dx$$

$$A = \int_0^2 2x dx + \int_0^2 -x^2 dx$$

$$A = 2 \int_0^2 x dx - \int_0^2 x^2 dx$$

$$A = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2$$

$$A = (2^2 - 0^2) - \frac{1}{3} (2^3 - 0^3)$$

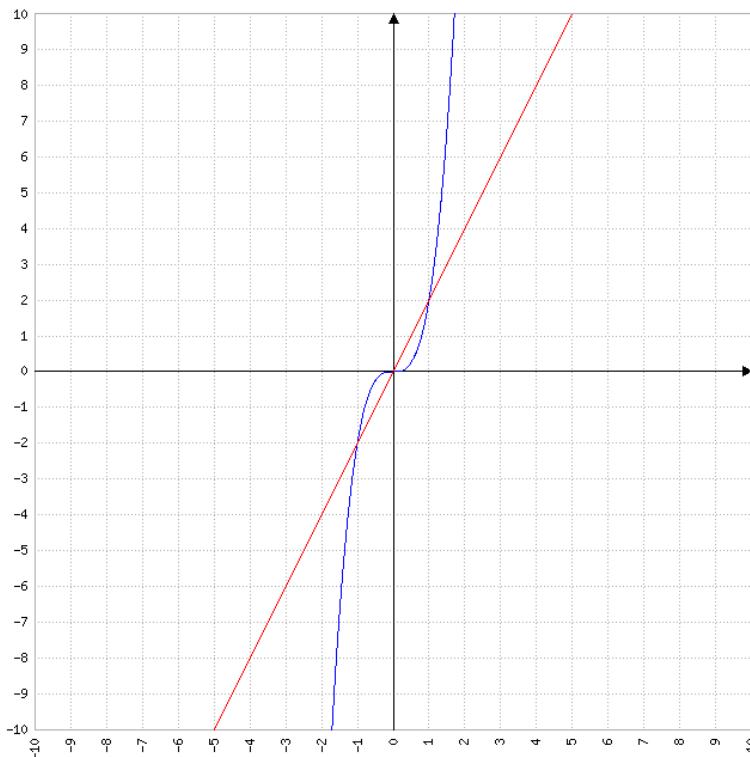
$$A = (2^2 - 0^2) - \frac{1}{3}(8 - 0)$$

$$A = (4 - 0) - \frac{1}{3} * 8$$

$$A = 4 - \frac{8}{3}$$

$$A = \frac{4}{3}$$

(b) $y = 2x^3$; $y = 2x$.



$$f(x) = g(x)$$

$$2x^3 = 2x$$

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0.$$

$$x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 1.$$

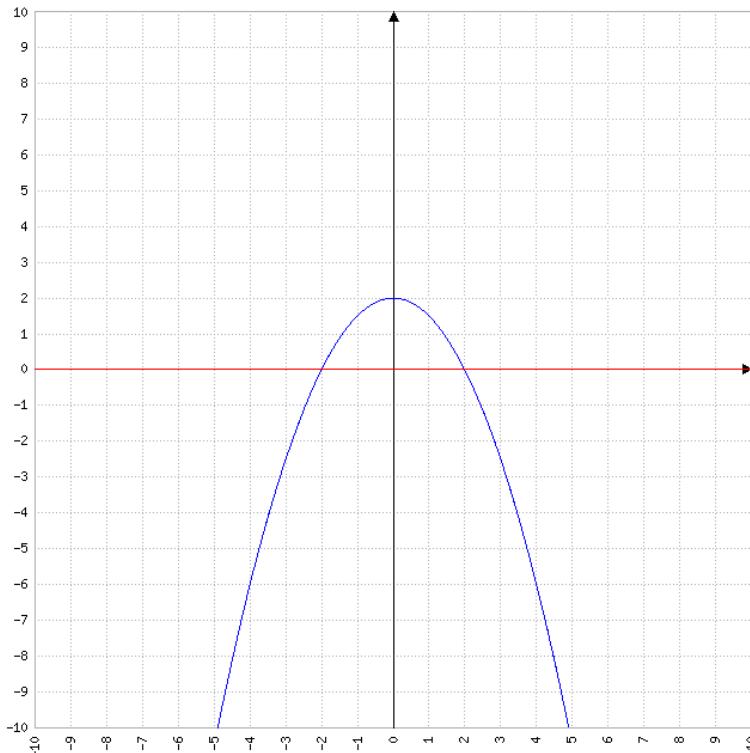
Intervalo	(-1, 0)	(0, 1)
VP	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f(x)	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$
g(x)	-1	1

$$A = \int_{-1}^0 f(x) - g(x) dx + \int_0^1 g(x) - f(x) dx$$

$$A = \int_{-1}^0 2x^3 - 2x dx + \int_0^1 2x - 2x^3 dx$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^0 2(x^3 - x) dx + \int_0^1 2(x - x^3) dx \\
 A &= 2 \int_{-1}^0 x^3 - x dx + 2 \int_0^1 x - x^3 dx \\
 A &= 2(\int_{-1}^0 x^3 - x dx + \int_0^1 x - x^3 dx) \\
 A &= 2(\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx + \int_0^1 -x^3 dx) \\
 A &= 2\left(\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 x dx + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 dx\right) \\
 A &= 2\left\{\frac{1}{4}[0^4 - (-1)^4] - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right\} \\
 A &= 2\left\{\frac{1}{4}(0 - 1) - \frac{1}{2}[0^2 - (-1)^2] + \frac{1}{2}(1 - 0) - \frac{1}{4}(1^4 - 0^4)\right\} \\
 A &= 2\left[\frac{1}{4}(-1) - \frac{1}{2}(0 - 1) + \frac{1}{2} * 1 - \frac{1}{4}(1 - 0)\right] \\
 A &= 2\left[\frac{-1}{4} - \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} * 1\right] \\
 A &= 2\left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\
 A &= 2\frac{1}{2} \\
 A &= 1.
 \end{aligned}$$

(c) $y = \frac{-x^2}{2} + 2$; $y = 0$



$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 \frac{-x^2}{2} + 2 &= 0 \\
 \frac{x^2}{2} &= 2 \\
 x^2 &= 2 * 2 \\
 x^2 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2.$$

Intervalo	(-2, 2)
VP	0
f(x)	2
g(x)	0

$$A = \int_{-2}^2 f(x) - g(x) dx$$

$$A = \int_{-2}^2 \frac{-x^2}{2} + 2 - 0 dx$$

$$A = \int_{-2}^2 \frac{-x^2}{2} + 2 dx$$

$$A = \int_{-2}^2 \frac{-x^2}{2} dx + \int_{-2}^2 2 dx$$

$$A = \frac{-1}{2} \int_{-2}^2 x^2 dx + 2 \int_{-2}^2 dx$$

$$A = \frac{-1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 + 2x \Big|_{-2}^2$$

$$A = \frac{-1}{6} [2^3 - (-2)^3] + 2 [2 - (-2)]$$

$$A = \frac{-1}{6} [8 - (-8)] + 2 (2 + 2)$$

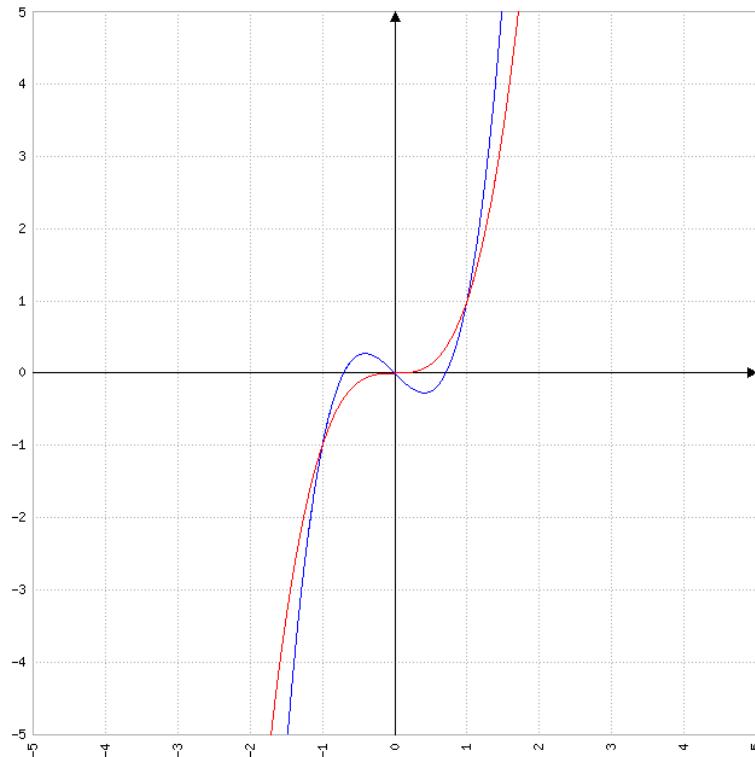
$$A = \frac{-1}{6} (8 + 8) + 2 * 4$$

$$A = \frac{-1}{6} * 16 + 8$$

$$A = \frac{-16}{6} + 8$$

$$A = \frac{16}{3}.$$

(d) $y = 2x^3 - x$; $y = x^3$.



$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 2x^3 - x &= x^3 \\
 2x^3 - x - x^3 &= 0 \\
 x^3 - x &= 0 \\
 x(x^2 - 1) &= 0.
 \end{aligned}$$

$$x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 1.$$

Intervalo	(-1, 0)	(0, 1)
VP	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f(x)	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
g(x)	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^0 f(x) - g(x) dx + \int_0^1 g(x) - f(x) dx \\
 A &= \int_{-1}^0 2x^3 - x - x^3 dx + \int_0^1 x^3 - (2x^3 - x) dx \\
 A &= \int_{-1}^0 x^3 - x dx + \int_0^1 x^3 - 2x^3 + x dx \\
 A &= \int_{-1}^0 x^3 - x dx + \int_0^1 -x^3 + x dx \\
 A &= \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 -x^3 dx + \int_0^1 x dx \\
 A &= \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 x dx - \int_0^1 x^3 dx + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \\
 A &= \frac{1}{4} [0^4 - (-1)^4] - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) \\
 A &= \frac{1}{4} (0 - 1) - \frac{1}{2} [0^2 - (-1)^2] - \frac{1}{4} (1^4 - 0^4) + \frac{1}{2} (1 - 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}(-1) - \frac{1}{2}(0 - 1) - \frac{1}{4}(1 - 0) + \frac{1}{2} * 1 \\ A &= \frac{-1}{4} - \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{2} \\ A &= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ A &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$