

Trabajo Práctico N° 6: Matrices.

Ejercicio 1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

(a) $3A - 2B + C$.

$$3A - 2B + C = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B + C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B + C = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $A - 3(B - C)$.

$$A - 3(B - C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$A - 3(B - C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 3(B - C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - 3(B - C) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Hallar una matriz D de 2×2 que cumpla que $A - D = B$.

$$A - D = B$$

$$D = A - B$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Hallar una matriz E de 2×2 que cumpla que $A + B + E$ sea una matriz triangular superior.

$$A + B + E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} - A - B$$

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} - 2 & a_{12} - 2 \\ -3 & a_{22} - 2 \end{pmatrix}.$$

(e) Hallar una matriz F de 2×2 que sea el opuesto de $C - B + A$.

$$F = -(C - B + A)$$

$$F = B - C - A$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) Hallar una matriz G de 2×2 que cumpla que $B - 3G + 4(A + B) = 0_{2 \times 2}$.

$$B - 3G + 4(A + B) = 0_{2 \times 2}$$

$$B - 3G + 4A + 4B = 0_{2 \times 2}$$

$$-3G + 4A + 5B = 0_{2 \times 2}$$

$$3G + 0_{2 \times 2} = 4A + 5B$$

$$3G = 4A + 5B$$

$$G = \frac{4A + 5B}{3}$$

$$G = \frac{4}{3}A + \frac{5}{3}B$$

$$G = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 5 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & \frac{8}{3} \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.

Sean $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$, $C \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$, $D \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles y, en caso afirmativo, cuál es la cantidad de filas y de columnas de la matriz resultado.

(a) AB .

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4 \times 7}$.

(b) BA .

Esta operación no es posible.

(c) AC .

Esta operación no es posible.

(d) CB .

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4 \times 7}$.

(e) ABD .

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4 \times 5}$.

Ejercicio 3.

En los casos que sea posible, calcular AB y BA , ¿es $AB = BA$?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

BA no es posible calcularlo.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = 9.$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 13 & 26 \\ -8 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

BA no es posible calcularlo.

Ejercicio 4.

Al igual que en los números reales, se define recursivamente la potencia natural de una matriz $A^n = \begin{cases} I, & \text{si } n = 0 \\ AA^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$, es decir, que A^n no es otra cosa que multiplicar n veces A por sí misma. Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcular:

(a) A^2 .

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) B^3 .

$$\begin{aligned} B^3 &= BB^2 \\ B^3 &= BBB \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 36 & -10 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 216 & -76 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) AB .

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 18 & 13 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) $2A^2 + BA$.

$$\begin{aligned} 2A^2 + BA &= 2AA + BA \\ 2A^2 + BA &= 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2A^2 + BA &= 2 \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2A^2 + BA &= \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2A^2 + BA &= \begin{pmatrix} 29 & 48 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, establecer si es cierto que:

(a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

$$A^2 - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - B^2 = A^2 - B^2$$

$$A^2 - \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} - B^2 = A^2 - B^2$$

$$A^2 - \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} - B^2 \neq A^2 - B^2.$$

Por lo tanto, no es cierta esta igualdad.

(b) $(A + B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$(A + B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 + 2AB + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2.$$

Por lo tanto, no es cierta esta igualdad.

Ejercicio 6.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular AB y AC .

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$AC = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$AC = \begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

(b) ¿Es válida la propiedad cancelativa en el producto de matrices? (Recordar que la propiedad cancelativa de los números reales dice que, si $ab = bc$, entonces, $b = c$).

No, la propiedad cancelativa en el producto de matrices no es válida. Por ejemplo, en el caso anterior, se ve que $AB = AC$, pero $B \neq C$.

Ejercicio 7.

Hallar los valores de a y b para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 5 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10 + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10 + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10 + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 5 = 5 \\ 2a = 2 \\ 10 + 2b = 17 \end{cases}.$$

$$a = \frac{2}{2}$$

$$a = 1.$$

$$2b = 17 - 10$$

$$2b = 7$$

$$b = \frac{7}{2}.$$

Ejercicio 8.

Hallar la matriz $X \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ que cumpla $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3X &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ X &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ X &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.

Sea A una matriz cuadrada 2×2 . Probar que, si A tiene una fila (o una columna) nula, entonces, A no tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$AB = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$BA = I$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ 0 & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 0 \\ 0 = 0 \\ b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto, si A tiene una fila (o una columna) nula, entonces, A no tiene inversa.

Ejercicio 10.

Si $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tienen inversa, deducir cuál es $(ABCD)^{-1}$.

$$(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Ejercicio 11.

Una empresa que fabrica autos tiene 4 sucursales y fabrica 3 modelos distintos. Tiene guardada en dos matrices, la siguiente información de las ventas del último mes:

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 25 & 5 \\ 23 & 20 & 6 \\ 20 & 22 & 4 \\ 15 & 10 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 700 & 100 \\ 900 & 150 \\ 980 & 200 \end{pmatrix}.$$

(a) *¿Qué dimensión tiene el producto AB ? ¿Qué información obtiene al realizarlo?*

El producto AB tiene dimensión 4×2 y la información que se obtiene al realizarlo es el precio y la ganancia de cada una de las 4 sucursales.

(b) *Indicar qué representa cada fila y cada columna de la matriz producto.*

Cada fila de la matriz producto representa cada una de las 4 sucursales, mientras que cada columna representa el precio y la ganancia.

Ejercicio 12.

Sea A una matriz cuadrada, que cumple que $A^2 = 2A - I$. Hallar A^{-1} .

$$A^2 = 2A - I$$

$$AA = 2A - AA^{-1}$$

$$AA^{-1} = 2A - AA$$

$$AA^{-1} = A(2I - A)$$

$$A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}A(2I - A)$$

$$IA^{-1} = I(2I - A)$$

$$A^{-1} = 2I - A.$$

Ejercicio 13.

Sea A una matriz cuadrada, que cumple que $A^3 = 0$ (0 es la matriz nula de la misma dimensión que A). Demostrar que $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

$$\begin{aligned} (I - A)(I + A + A^2) &= I \\ (I - A)I + (I - A)A + (I - A)A^2 &= I \\ I - A + IA - A^2 + IA^2 - A^3 &= I \\ I - A + A - A^2 + A^2 - 0 &= I \\ I &= I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I + A + A^2)(I - A) &= I \\ I(I - A) + A(I - A) + A^2(I - A) &= I \\ I - AI + AI - A^2 + A^2I - A^3 &= I \\ I - A + A - A^2 + A^2 - 0 &= I \\ I &= I. \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

Ejercicio 14.

Llevar las siguientes matrices a la forma escalonada y reducida, indicando las operaciones elementales y el rango de cada una.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 8 & 3 \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$F_2 = F_2 - 2F_1 \Rightarrow A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} F_2 \Rightarrow A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = F_3 - 6F_1 \Rightarrow A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = F_3 - 4F_2 \Rightarrow A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = F_1 - 3F_2 \Rightarrow A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(A) = 2.$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$F_2 = F_2 - 2F_1 \Rightarrow B_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{3} F_2 \Rightarrow B_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = F_3 + 3F_1 \Rightarrow B_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = F_3 + 3F_2 \Rightarrow B_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(A) = 2.$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$F_1 = \frac{-1}{3} F_1 \quad \Rightarrow \quad C_R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_2 - 6F_1 \quad \Rightarrow \quad C_R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{16} F_2 \quad \Rightarrow \quad C_R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = F_1 + \frac{4}{3} F_2 \quad \Rightarrow \quad C_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$r(A) = 2.$$

Ejercicio 15.

Hallar la inversa, si existe, de las siguientes matrices, mediante operaciones elementales e indicar el rango de cada una:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 = F_2 + 8F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 34 & 8 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 = \frac{1}{34} F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{array} \right)$$

$$F_1 = F_1 - 4F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{17} & \frac{-2}{17} \\ 0 & 1 & \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{array} \right).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{pmatrix}.$$

$$r(A) = r(A^{-1}) = 2.$$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 = F_2 - 2F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 = \frac{1}{3} F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 = F_3 - 2F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 = \frac{3}{7} F_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right)$$

$$F_1 = F_1 - 3F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & | & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_2 + \frac{2}{3}F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

$$r(B) = r(B^{-1}) = 3.$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \frac{1}{2}F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_2 - 5F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{-5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = 2F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \frac{1}{5}F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$F_1 = F_1 - \frac{1}{2}F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$$r(C) = r(C^{-1}) = 3.$$

$$(d) D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 6 & -15 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \frac{-1}{2} F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{-1}{2} & 0 \\ 6 & -15 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_2 - 6F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, no existe la matriz inversa.

Ejercicio 16.

Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$.

(a) Hallar k para que sea $A^2 = 0_{2 \times 2}$.

$$A^2 = 0_{2 \times 2}$$

$$AA = 0_{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 - 4k \\ 2 + k & -4 + k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -8 - 4k = 0 \\ 2 + k = 0 \\ -4 + k^2 = 0 \end{cases}.$$

$$4k = -8$$

$$k = \frac{-8}{4}$$

$$k = -2.$$

$$k = -2.$$

$$k^2 = 4$$

$$\sqrt{k^2} = \sqrt{4}$$

$$|k| = 2$$

$$k = \pm 2.$$

Por lo tanto, el valor de k para que sea $A^2 = 0_{2 \times 2}$ es -2 .

(b) Hallado k , encontrar el rango de A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$F_1 = \frac{1}{2} F_1 \quad \Rightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_2 - F_1 \quad \Rightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(A) = 1.$$

Ejercicio 17.

Sea A una matriz $n \times n$:

(a) Indicar, justificando la respuesta, si es verdadero o falso que $(A - I_n)(A + I_n) = A^2 - I_n$.

$$(A - I_n)(A + I_n) = AA + AI_n - I_nA + I_n^2$$

$$(A - I_n)(A + I_n) = A^2 + A - A + I_n$$

$$(A - I_n)(A + I_n) = A^2 - I_n.$$

Por lo tanto, es VERDADERO.

(b) Si $A^2 = 0_{n \times n}$, ¿cuál es la inversa de $(A + I_n)$?

$$(A + I_n)(A + I_n)^{-1} = I_n$$

$$(A - I_n)(A + I_n)(A + I_n)^{-1} = (A - I_n)I_n$$

$$(A^2 + AI_n - I_nA - I_n^2)(A + I_n)^{-1} = AI_n - I_n^2$$

$$(0_{n \times n} + A - A - I_n)(A + I_n)^{-1} = A - I_n$$

$$-I_n(A + I_n)^{-1} = A - I_n$$

$$(A + I_n)^{-1} = -(A - I_n)$$

$$(A + I_n)^{-1} = I_n - A.$$

$$(A + I_n)^{-1}(A + I_n) = I_n$$

$$(A + I_n)^{-1}(A + I_n)(A - I_n) = I_n(A - I_n)$$

$$(A + I_n)^{-1}(A^2 - AI_n + I_nA - I_n^2) = I_nA - I_n^2$$

$$(A + I_n)^{-1}(0_{n \times n} - A + A - I_n) = A - I_n$$

$$(A + I_n)^{-1}(-I_n) = A - I_n$$

$$(A + I_n)^{-1} = -(A - I_n)$$

$$(A + I_n)^{-1} = I_n - A.$$

Ejercicio 18.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}$.

(a) Encontrar los números a y b tales que se cumpla $AB = C$.

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3a - 9 & 9 \\ 2 & -2 \\ 6a + 23 & b - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -3a - 9 = -12 \\ 9 = 9 \\ 2 = 2 \\ -2 = -2 \\ 6a + 23 = 29 \\ b - 18 = -8 \end{cases}.$$

$$3a = -9 + 12$$

$$3a = 3$$

$$a = \frac{3}{3}$$

$$a = 1.$$

$$6a = 29 - 23$$

$$6a = 6$$

$$a = \frac{6}{6}$$

$$a = 1.$$

$$b = -8 + 18$$

$$b = 10.$$

Por lo tanto, los números a y b tales que se cumpla $AB = C$ son 1 y 10, respectivamente.

(b) Encontrar, si es que existe, la inversa de A .

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 18 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \frac{-1}{3} F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 18 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} F_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 6 & 18 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 = F_3 - 6F_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_1 = F_1 - 3F_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 19.

(a) Dada $D = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, encontrar el valor de k para que sea $D^2 = 0_{n \times n}$.

$$D^2 = 0_{n \times n}$$

$$DD = 0_{n \times n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5k+1 & 0 \\ 0 & 5k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 5k+1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 5k+1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

$$5k = -1$$

$$k = \frac{-1}{5}.$$

$$5k = -1$$

$$k = \frac{-1}{5}.$$

Por lo tanto, el valor de k para que sea $D^2 = 0_{n \times n}$ es $\frac{-1}{5}$.

(b) Con el valor k encontrado, calcular el rango de D .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$F_2 = F_2 - 5F_1 \Rightarrow D_R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(D) = 1.$$

Ejercicio 20.

(a) Encontrar los números a y b tales que $(A + B) C = D$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+6 & 3b+3 \\ a+2 & b+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a+6=9 \\ 3b+3=6 \\ a+2=5 \\ b+3=4 \end{cases}.$$

$$a = 6 - 3$$

$$a = 3.$$

$$3b = 6 - 3$$

$$3b = 3$$

$$b = \frac{3}{3}$$

$$b = 1.$$

$$a = 5 - 2$$

$$a = 3.$$

$$b = 4 - 3$$

$$b = 1.$$

Por lo tanto, los números a y b tales que $(A + B) C = D$ son 3 y 1, respectivamente.

(b) Hallar (si existe) D^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 9 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_1 = \frac{1}{9} F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 = F_2 - 5F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 = \frac{3}{2} F_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & | & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

$$F_1 = F_1 - \frac{2}{3} F_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{array} \right).$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 21.

Demostrar que, si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $AB = 0_{n \times n}$ y B tiene inversa, entonces, $A = 0_{n \times n}$.

$$\begin{aligned} AB &= 0_{n \times n} \\ ABB^{-1} &= 0_{n \times n} B^{-1} \\ AI &= 0_{n \times n} \\ A &= 0_{n \times n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que, si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $AB = 0_{n \times n}$ y B tiene inversa, entonces, $A = 0_{n \times n}$.

Ejercicio 22.

Sean las matrices A , B y C de $n \times n$, tales que B tiene inversa. Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando la respuesta: “Si $CB = A$, entonces, $C = B^{-1}A$ ”.

$$CB = A$$

$$CBB^{-1} = AB^{-1}$$

$$CI = AB^{-1}$$

$$C = AB^{-1}.$$

Por lo tanto, esta afirmación es FALSA.

Ejercicio 23.

Demostrar que, si una matriz de 2x2 tiene dos filas iguales, entonces, no tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

$$F_2 = F_2 - F_1 \quad \Rightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(A) = 1 < n = 2.$$

Por lo tanto, queda demostrado que, si una matriz de 2x2 tiene dos filas iguales, entonces, no tiene inversa.

Ejercicio 24.

Sean A , B y C matrices cuadradas de la misma dimensión. Demostrar que, si A tiene inversa y se cumple que $AB=AC$, entonces, $B= C$.

$$AB= AC$$

$$A^{-1}AB= A^{-1}AC$$

$$IB= IC$$

$$B= C.$$

Por lo tanto, queda demostrado que, si A tiene inversa y se cumple que $AB= AC$, entonces, $B= C$.