Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 1: Cálculo en Dos o Más Variables.

Ejercicio 1.

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y)= \frac{1}{x^2+y^2}$.

$x^2 + y^2 \neq 0$.

$x^2= 0$
$\sqrt{x^2}= \sqrt{0}$
$|x|= 0$
x= 0.

$y^2= 0$
$\sqrt{y^2}= \sqrt{0}$
$|y|= 0$
y= 0.

$Dom_f= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x, y) \neq (0, 0)\}$.

(b) $f(x, y, z)= x^2 + 2y^2 - z^2$.

$Dom_f= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

(c) $f(x, y)= \frac{x}{x^2+y^2-9}$.

$x^2 + y^2 - 9 \neq 0$
$x^2 + y^2 \neq 9$.

$Dom_f= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \neq 9\}$.

(d) $f(x, y)= \frac{y}{x^2+y^2+1}$.

$x^2 + y^2 + 1 \neq 0$
$x^2 + y^2 + 1 > 0$.

$Dom_f= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(e) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y^2 - z^2}$.

$y^2 - z^2 \neq 0$
$y^2 \neq z^2$
$\sqrt{y^2} \neq \sqrt{z^2}$
$|y| \neq z$
$y \neq \pm z$.

$Dom_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq \pm z\}$.

(f) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$9 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 9$.

$Dom_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

(g) $f(x, y) = e^{-x^2 + y^2}$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

(h) $f(x, y) = log(16 - x^2 - 16y^2)$.

$16 - x^2 - 16y^2 > 0$
$x^2 + 16y^2 < 16$
$\frac{x^2 + 16y^2}{16} < 1$
$\frac{x^2}{16} + y^2 < 1$.

$Dom_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + y^2 < 1\}$.

Ejercicio 2.

Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

(a) *f (x, y)= log (9 - x^2 - $9y^2$) en (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1).*

f (1, 0)= log (9 - 1^2 - 9 * 0^2)
f (1, 0)= log (9 - 1 - 9 * 0)
f (1, 0)= log (9 - 1 - 0)
f (1, 0)= log (8)
f (1, 0)= 0,903.

(1, 1) $\notin Dom_f$.

(0, 1) $\notin Dom_f$.

(-1, 1) $\notin Dom_f$.

(b) *f (x, y)=* $\sqrt{4-x^2-4y^2}$ *en (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (2, 2).*

f (1, 0)= $\sqrt{4-1^2-4*0^2}$
f (1, 0)= $\sqrt{4-1-4*0}$
f (1, 0)= $\sqrt{4-1-0}$
f (1, 0)= $\sqrt{3}$
f (1, 0)= 1,732.

(1, 1) $\notin Dom_f$.

f (0, 1)= $\sqrt{4-0^2-4*1^2}$
f (0, 1)= $\sqrt{4-0-4*1}$
f (0, 1)= $\sqrt{4-0-4}$
f (0, 1)= $\sqrt{0}$
f (0, 1)= 0.

(-1, 1) $\notin Dom_f$.

(2, 2) $\notin Dom_f$.

(c) *f (x, y)=* $e^{x^2+y^2}$ *en (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1).*

f (1, 0)= $e^{1^2+0^2}$

f (1, 0)= e^{1+0}
f (1, 0)= e^{1}
f (1, 0)= e.

f (1, 1)= $e^{1^2+1^2}$
f (1, 1)= e^{1+1}
f (1, 1)= e^{2}.

f (0, 1)= $e^{0^2+1^2}$
f (0, 1)= e^{0+1}
f (0, 1)= e^{1}
f (0, 1)= e.

f (-1, 1)= $e^{(-1)^2+1^2}$
f (-1, 1)= e^{1+1}
f (-1, 1)= e^{2}.

Ejercicio 3.

Calcular los siguientes límites o demostrar que no existen:

(a) $\lim_{(x,y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2$.

$\lim_{(x.y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2$= 5 * 3 - 3^2 + 3 * 1^2= 15 - 9 + 3 * 1= 15 - 9 + 3= 9.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1 = \frac{7*0^2-2*0^2}{0^2+0^2} + 1 = \frac{7*0-2*0}{0+0} + 1 = \frac{0-0}{0} + 1 = (\frac{0}{0}) + 1$.

Por límites iterados:

$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{x\to0} \frac{7x^2-2*0^2}{x^2+0^2} + 1$$
$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{x\to0} \frac{7x^2-2*0}{x^2+0} + 1$$
$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{x\to0} \frac{7x^2-0}{x^2+0} + 1$$
$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{x\to0} \frac{7x^2}{x^2} + 1$$
$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{x\to0} 7 + 1$$
$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{x\to0} 8 = 8.$$

$$\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{y\to0} \frac{7*0^2-2y^2}{0^2+y^2} + 1$$
$$\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{y\to0} \frac{7*0-2y^2}{0+y^2} + 1$$
$$\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{y\to0} \frac{0-2y^2}{0+y^2} + 1$$
$$\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{y\to0} \frac{-2y^2}{y^2} + 1$$
$$\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{y\to0} -2 + 1$$
$$\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim_{y\to0} -1 = -1.$$

Por lo tanto, no existe el límite.

(c) $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z}$.

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z}= e^{1+1^2-0}= e^{1+1-0}= e^2$.

(d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} sen\ (x+y+z)$.

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} sen\ (x+y+z)$= sen (0 + 0 + 0)= sen 0= 0.

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4}$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4}= \frac{0^4}{0^4+0^4}= \frac{0}{0+0}= (\frac{0}{0})$.

<u>Por límites iterados:</u>

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+0^4}$
$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+0}$
$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4}$
$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim\limits_{x\to 0} 1= 1$.

$\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim\limits_{y\to 0} \frac{0^4}{0^4+y^4}$
$\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{0+y^4}$
$\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y^4}$
$\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim\limits_{y\to 0} 0= 0$.

Por lo tanto, no existe el límite.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{0*0}{\sqrt{0^2+0^2}}= \frac{0}{\sqrt{0+0}}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0})$.

<u>Por límites iterados:</u>

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x*0}{\sqrt{x^2+0^2}}$
$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt{x^2+0}}$

$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{x\to 0}\frac{0}{\sqrt{x^2}}$
$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{x\to 0} 0= 0.$

$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{y\to 0}\frac{0*y}{\sqrt{0^2+y^2}}$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{0+y^2}}$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{y^2}}$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{y\to 0} 0= 0.$

<u>Por la recta y= mx:</u>

$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{xmx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+m^2}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{m\sqrt{x^3}}{\sqrt{1+m^2}}= \frac{m\sqrt{0^3}}{\sqrt{1+m^2}}= \frac{m\sqrt{0}}{\sqrt{1+m^2}}= \frac{m*0}{\sqrt{1+m^2}}= \frac{0}{\sqrt{1+m^2}}= 0.$

<u>Por Teorema del Encaje:</u>

$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|= \frac{|xy|}{\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|}$
$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|= \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|= \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2}}= \frac{|x||y|}{|x|}= |y|.$
$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|.$

$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \min(|x|, |y|)$
$-\min(|x|, |y|) \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \min(|x|, |y|).$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\min(|x|, |y|)= -\min(|0|, |0|)= -\min(0, 0)= 0.$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \min(|x|, |y|)= \min(|0|, |0|)= \min(0, 0)= 0.$

Por lo tanto, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\min(|x|, |y|)= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \min(|x|, |y|)= 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= 0.$

Juan Menduiña

(g) $\lim\limits_{(x,y) \to (2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$.

$\lim\limits_{(x,y) \to (2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \frac{2^2-2*2*2+2^2}{2-2} = \frac{4-8+4}{0} = (\frac{0}{0})$.

$\lim\limits_{(x,y) \to (2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim\limits_{(x,y) \to (2,2)} \frac{(x-y)^2}{x-y}$

$\lim\limits_{(x,y) \to (2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim\limits_{(x,y) \to (2,2)} x - y = 2 - 2 = 0$.

Ejercicio 4.

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo $\mathbb{R}^2$, redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

(a) $f(x, y)= \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Dominio:

$Dom_f= \mathbb{R}^2$.

Límite (coordenadas polares):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{0^3}{\sqrt{0^2+0^2}}= \frac{0}{\sqrt{0+0}}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0}).$$

x= r cos θ; y= r sen θ.

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{(r\cos\theta)^3}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\ sen\ \theta)^2}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{\sqrt{r^2 cos^2\ \theta+r^2 sen^2\ \theta}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{\sqrt{r^2(cos^2\ \theta+sen^2\ \theta)}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{\sqrt{r^2 * 1}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{\sqrt{r^2}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{r}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= r^2\ cos^3\ \theta.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{r\to 0} r^2 cos^3\ \theta= 0^2\ cos^3\ \theta= 0\ cos^3\ \theta= 0.$$

f (x, y) es discontinua en (x, y)= (0, 0), ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\ (x,y) \neq$ f (0, 0). Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

(b) $f(x, y)= \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Dominio:

$Dom_f= \mathbb{R}^2$.

Límite (coordenadas polares):

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{0}{\sqrt{0^2+0^2}}= \frac{0}{\sqrt{0+0}}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0})$.

x= r cos θ; y= r sen θ.

$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\,sen\,\theta)^2}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2cos^2\,\theta+r^2sen^2\,\theta}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2(cos^2\,\theta+sen^2\,\theta)}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2*1}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{r}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \cos\theta$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{r\to 0} \cos\theta= \cos\theta$.

f (x, y) es discontinua en (x, y)= (0, 0), ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y) \neq$ f (0, 0). Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

(c) *f (x, y)*= $\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Dominio:

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

Límite (coordenadas polares):

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{0^2}{\sqrt{0^2+0^2}}= \frac{0}{\sqrt{0+0}}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0})$.

x= r cos θ; y= r sen θ.

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{(r\cos\theta)^2}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\,sen\,\theta)^2}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2cos^2\,\theta}{\sqrt{r^2cos^2\,\theta+r^2sen^2\,\theta}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2cos^2\,\theta}{\sqrt{r^2(cos^2\,\theta+sen^2\,\theta)}}$

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2cos^2\,\theta}{\sqrt{r^2*1}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2cos^2\,\theta}{\sqrt{r^2}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2cos^2\,\theta}{r}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ r $cos^2\,\theta.$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{r\to 0} r\,cos^2\,\theta$= 0 $cos^2\,\theta$= 0.

f (x, y) es continua en (x, y)= (0, 0), ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y)$= f (0, 0). Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$.

(d) *f (x, y)=* $\frac{xy}{x^2+y^2}$.

<u>Dominio:</u>

$x^2+y^2\neq 0$.

x^2= 0
$\sqrt{x^2}= \sqrt{0}$
$|x|$= 0
x= 0.

y^2= 0
$\sqrt{y^2}= \sqrt{0}$
$|y|$= 0
y= 0.

Dom_f= $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

<u>Límite (coordenadas polares):</u>

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{0*0}{0^2+0^2}= \frac{0}{0+0}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0})$.

x= r cos θ; y= r sen θ.

$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r\cos\theta\; r\;sen\;\theta}{(r\cos\theta)^2+(r\;sen\;\theta)^2}$
$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r^2\cos\theta\;sen\;\theta}{r^2cos^2\,\theta+r^2sen^2\,\theta}$
$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r^2\cos\theta\;sen\;\theta}{r^2(cos^2\,\theta+sen^2\,\theta)}$
$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r^2\cos\theta\;sen\;\theta}{r^2*1}$

$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r^2 \cos\theta \, sen\, \theta}{r^2}$
$\frac{xy}{x^2+y^2}= \cos\theta$ sen θ.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}= \lim_{r\to 0} \cos\theta \, sen\, \theta= \cos\theta$ sen θ.

f (x, y) es discontinua en (x, y)= (0, 0), ya que ∄ f (0, 0) y ∄ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y)$. Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}. No es posible extender su continuidad, ya que ∄ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y)$.

(e) *f (x, y)=* $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

Dominio:

$x^2 + y^2 \neq 0$.

$x^2= 0$
$\sqrt{x^2}= \sqrt{0}$
$|x|= 0$
x= 0.

$y^2= 0$
$\sqrt{y^2}= \sqrt{0}$
$|y|= 0$
y= 0.

$Dom_f= \mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Límite (coordenadas polares):

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}= \frac{0*0^2}{0^2+0^2}= \frac{0*0}{0+0}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0})$.

x= r cos θ; y= r sen θ.

$\frac{xy^2}{x^2+y^2}= \frac{r\cos\theta\,(r\, sen\,\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\, sen\,\theta)^2}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}= \frac{r\cos\theta\, r^2 sen^2\,\theta}{r^2 cos^2\,\theta+r^2 sen^2\,\theta}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}= \frac{r^3\cos\theta\, sen^2\,\theta}{r^2(cos^2\,\theta+sen^2\,\theta)}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}= \frac{r^3\cos\theta\, sen^2\,\theta}{r^2*1}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}= \frac{r^3\cos\theta\, sen^2\,\theta}{r^2}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}=$ r cos θ $sen^2\,\theta$.

$\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}= \lim\limits_{r\longrightarrow 0} r \cos\theta\, sen\, \theta= 0 \cos\theta\, sen^2\, \theta= 0 \cos\theta\, sen^2\, \theta= 0.$

f (x, y) es discontinua en (x, y)= (0, 0), ya que ∄ f (0, 0). Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}. Sin embargo, de manera de poder extender su continuidad, ya que ∃ $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f\,(x,y)$, f (x, y), se puede redefinir de la siguiente manera:

f (x, y)= $\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Ejercicio 5.

Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

(a) $f(x, y)= 3x^2y + y^3$.

$Dom_f= \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= 6xy$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= 3x^2 + 3y^2$.

(b) $f(x, y, z)= x^2y + y^2z + z^2x$.

$Dom_f= \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}= 2xy + z^2$.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}= x^2 + 2yz$.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}= y^2 + 2zx$.

(c) $f(x, y)= e^{xy} + sen\ (x^2 + y)$.

$Dom_f= \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= ye^{xy} + 2x \cos (x^2 + y)$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= xe^{xy} + \cos (x^2 + y)$.

(d) $f(x, y)= \frac{xy}{x^2+y^2}$.

$Dom_f= \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{y(x^2+y^2)-xy2x}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2y+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2)-xy2y}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3+xy^2-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

(e) $f(x, y) = x^2 \log(x + y)$.

$Dom_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \log(x + y) + x^2 \frac{1}{x+y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \log(x + y) + \frac{x^2}{x+y}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \log(x + y) + x^2 \frac{1}{x+y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + \frac{x^2}{x+y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{x+y}$.

(f) $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (x + yx_i)]^2$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} [y_i-(x+yx_i)]^2}{\partial x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i-x-yx_i)^2}{\partial x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i-x-yx_i)^2}{\partial x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - x - yx_i)(-1)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - x - yx_i)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2 \sum_{i=1}^{n} y_i - x - yx_i$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} [y_i-(x+yx_i)]^2}{\partial x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - x - yx_i)^2}{\partial y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - x - yx_i)^2}{\partial y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - x - yx_i)(-x_i)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - x - yx_i)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - x - yx_i)$.

Ejercicio 6.

Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) *f (x, y)=* xe^{x^2y} *en (1, ln 2).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= e^{x^2y} + \text{x}e^{x^2y}\text{2xy}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= e^{x^2y} + 2x^2\text{y}e^{x^2y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= (1 + 2x^2\text{y})\ e^{x^2y}.$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= 0e^{x^2y} + \text{x}e^{x^2y}x^2$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= 0 + x^3e^{x^2y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= x^3e^{x^2y}.$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= (1 + 2 * 1^2 \ln 2)\ e^{1^2 \ln 2}$
$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= (1 + 2 * 1 \ln 2)\ e^{1 \ln 2}$
$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= (1 + 2 \ln 2)\ e^{\ln 2}$
$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= (1 + 2 \ln 2) * 2$
$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= 2 + 4 \ln 2.$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial y}= 1^3\ e^{1^2 \ln 2}$
$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial y}= 1e^{\ln 2}$
$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial y}= e^{\ln 2}$
$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial y}= 2.$

(b) *f (x, y)=* $\sqrt{x^2+y^2}$ *en (-4, 3).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} * 2\text{x}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} * 2\text{y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial x}= \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial x}= \frac{-4}{\sqrt{16+9}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial x}= \frac{-4}{\sqrt{25}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial x}= \frac{-4}{5}.$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial y}= \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial y}= \frac{3}{\sqrt{16+9}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial y}= \frac{3}{\sqrt{25}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial y}= \frac{3}{5}.$

Ejercicio 7.

Analizar diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones:

(a) *f (x, y)= sen ($x^2 + y^2$).*

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$, ya que es una composición de funciones continuas.

Continuidad de derivadas parciales:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= cos ($x^2 + y^2$) 2x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x cos ($x^2 + y^2$).

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= cos ($x^2 + y^2$) 2y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 2y cos ($x^2 + y^2$).

Ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$.

Por lo tanto, f (x, y) es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales también son continuas en $\mathbb{R}^2$.

(b) *f (x, y)=* $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$, ya que es una composición de funciones continuas.

Continuidad de derivadas parciales:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ * 2x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ * 2y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Por lo tanto, f (x, y) no es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$, pero sus derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

(c) $f(x, y)= \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Por lo tanto, f (x, y) no es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

(d) $f(x, y)= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$.

Continuidad de derivadas parciales:

Para (x, y)$\neq$ (0, 0):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2)-xy^2 2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2y^2+y^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^2)-xy^2 2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y+2xy^3-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Para (x, y)= (0, 0):

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0.

Ambas derivadas parciales son continuas en (0, 0).

Por lo tanto, f (x, y) es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales también son continuas en $\mathbb{R}^2$.

(e) *f (x, y)=* $\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$.

Continuidad de derivadas parciales:

Para (x, y)≠ (0, 0):

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{\frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{x^2y+y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= \frac{x\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= \frac{x\sqrt{x^2+y^2}-\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\frac{x(x^2+y^2)-xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2)-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3+xy^2-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Para (x, y)= (0, 0):

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$.

Ambas derivadas parciales son continuas en (0, 0).

Por lo tanto, f (x, y) es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales también son continuas en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 8.

Hallar, en caso de que exista, el plano tangente a la gráfica de la función f (x, y)= $e^{x^2+y^2}$ *en el punto (-1, 1, f (-1, 1)). De ser posible, con ayuda de software a elección, mostrar las gráficas de la función y el plano tangente.*

f (-1, 1)= $e^{(-1)^2+1^2}$
f (-1, 1)= e^{1+1}
f (-1, 1)= e^2.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= $e^{x^2+y^2} * 2$x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x$e^{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= $e^{x^2+y^2} * 2$y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 2y$e^{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x}$= 2 (-1) $e^{(-1)^2+1^2}$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x}$= -2$e^{1+1}$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x}$= -2$e^2$.

$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y}$= $2 * 1e^{(-1)^2+1^2}$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y}$= $2e^{1+1}$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y}$= $2e^2$.

Π_T: z= $\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x}$ [x - (-1)] + $\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y}$ (y - 1) + f (-1, 1)
Π_T: z= -2e^2 (x + 1) + 2e^2 (y - 1) + e^2
Π_T: z= -2xe^2 - 2e^2 + 2ye^2 - 2e^2 + e^2
Π_T: z= -2xe^2 + 2ye^2 - 3e^2
Π_T: z= (-2x + 2y - 3) e^2.

Ejercicio 9.

Encontrar la aproximación lineal de la función f (x, y)= $x^2 + y^4 + e^{xy}$ *en (1, 0) y utilizarla para estimar, aproximadamente, f (0,98; 0,05). Graficar, con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.*

f (1, 0)= $1^2 + 0^4 + e^{1*0}$
f (1, 0)= 1 + 0 + e^0
f (1, 0)= 1 + 0 + 1
f (1, 0)= 2.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + e^{xy}y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + y$e^{xy}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= $4y^3 + e^{xy}$x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= $4y^3$ + xe^{xy}.

$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2 * 1 + 0$e^{1*0}$
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2 + 0$e^0$
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2 + 0 * 1
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2 + 0
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2.

$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 4 * 0^3 + 1e^{1*0}
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 4 * 0 + 1$e^0$
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 4 * 0 + 1 * 1
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 0 + 1
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 1.

L (x, y)= f (1, 0) + $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$ (x - 1) + $\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$ (y - 0)
L (x, y)= 2 + 2 (x - 1) + 1y
L (x, y)= 2 + 2x - 2 + y
L (x, y)= 2x + y.

f (0,98, 0,05)≈ L (0,98, 0,05)= 2 * 0,98 + 0,05
f (0,98, 0,05)≈ L (0,98, 0,05)= 1,96 + 0,05
f (0,98, 0,05)≈ L (0,98, 0,05)= 2,01.

Ejercicio 10.

Calcular los vectores gradientes de las siguientes funciones:

(a) *f (x, y)=* $e^{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= e^{x^2+y^2} * 2x$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= 2xe^{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= e^{x^2+y^2} * 2y$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= 2ye^{x^2+y^2}$.

∇ f (x, y)= $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$
∇ f (x, y)= $(2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2})$.

(b) *f (x, y, z)= xyz.*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=$ yz.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$ xz.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial z}=$ xy.

∇ f (x, y, z)= $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial z})$
∇ f (x, y, z)= (yz, xz, xy).

Ejercicio 11.

Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos y dirección de los vectores dados:

(a) *f (x, y)=* x^2 *+ 3*xy^2*; p= (1, 2) y* $\vec{v}$*= (-1, -2).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + $3y^2$.
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 6xy.

∇ f (x, y)= (2x + $3y^2$, 6xy).

$\|\vec{v}\|= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}$
$\|\vec{v}\|= \sqrt{1 + 4}$
$\|\vec{v}\|= \sqrt{5}$.

$\vec{u}= \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
$\vec{u}= (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$

D f (x, y)= ∇ f (x, y) $\vec{u}$
D f (x, y)= (2x + $3y^2$, 6xy) $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$
D f (x, y)= $\frac{-2x-3y^2}{\sqrt{5}}$ - $\frac{12xy}{\sqrt{5}}$
D f (x, y)= $\frac{-2x-3y^2-12xy}{\sqrt{5}}$.

D f (1, 2)= $\frac{-2*1-3*2^2-12*1*2}{\sqrt{5}}$
D f (1, 2)= $\frac{-2-3*4-24}{\sqrt{5}}$
D f (1, 2)= $\frac{-2-12-24}{\sqrt{5}}$
D f (1, 2)= $\frac{-38}{\sqrt{5}}$.

(b) *f (x, y)=* xy^2*; p= (1, 1) y* $\vec{v}$*=* $(\frac{1}{2}$*, -1).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= y^2.
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 2xy.

∇ f (x, y)= (y^2, 2xy).

$\|\vec{v}\|= \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-1)^2}$

$||\vec{v}||= \sqrt{\frac{1}{4}+1}$

$||\vec{v}||= \sqrt{\frac{5}{4}}$

$||\vec{v}||= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$

$||\vec{v}||= \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\vec{u}= \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$

$\vec{u}= (\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}, \frac{-1}{\frac{\sqrt{5}}{2}})$

$\vec{u}= (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$.

D f (x, y)= ∇ f (x, y) $\vec{u}$

D f (x, y)= (y^2, 2xy) $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$

D f (x, y)= $\frac{y^2}{\sqrt{5}}$ - $\frac{4xy}{\sqrt{5}}$

D f (x, y)= $\frac{3y^2-4xy}{\sqrt{5}}$.

D f (1, 1)= $\frac{1^2-4*1*1}{\sqrt{5}}$

D f (1, 1)= $\frac{1-4}{\sqrt{5}}$

D f (1, 1)= $\frac{-3}{\sqrt{5}}$.

Ejercicio 12.

Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto (1, 0) de f (x, y)= x^2 + sen xy tiene el valor 1.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + cos xy * y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + y cos xy.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0 + cos xy * x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= x cos xy.

∇ f (x, y)= (2x + y cos xy, x cos xy).

∇ f (1, 0)= (2 * 1 + 0 cos (1 * 0), 1 cos (1 * 0))
∇ f (1, 0)= (2 + 0 cos 0, 1 cos 0)
∇ f (1, 0)= (2 + 0 * 1, 1 * 1)
∇ f (1, 0)= (2 + 0, 1)
∇ f (1, 0)= (2, 1).

D f (1, 0)= ∇ f (1, 0) $\vec{u}$
D f (1, 0)= (2, 1) (u_1, u_2)
D f (1, 0)= $2u_1$ + u_2.

$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 1 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{cases}$.

u_2= 1 - $2u_1$.

u_1^2 + $(1 - 2u_1)^2$= 1
u_1^2 + 1^2 - $4u_1$ + $4u_1^2$= 1
$5u_1^2$ + 1 - $4u_1$= 1
$5u_1^2$ - $4u_1$= 1 - 1
u_1 ($5u_1$ - 4)= 0.

u_1= 0; u_1= $\frac{4}{5}$.

u_2= 1 - 2 * 0
u_2= 1 - 0
u_2= 1.

u_2= 1 - 2 * $\frac{4}{5}$
u_2= 1 - $\frac{8}{5}$
u_2= $\frac{-3}{5}$.

Por lo tanto, las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto (1, 0) de f (x, y) tiene el valor 1 son $\vec{u}$= (0, 1) y $\vec{u}$= $(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$.

Ejercicio 13.

Encontrar la dirección de máximo crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:

(a) *f (x, y)=* xe^y *+ 3y; p= (1, 0).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= e^y$.
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= xe^y + 3$.

∇ f (x, y)= (e^y, xe^y + 3).

∇ f (1, 0)= (e^0, 1e^0 + 3)
∇ f (1, 0)= (1, 1 * 1 + 3)
∇ f (1, 0)= (1, 1 + 3)
∇ f (1, 0)= (1, 4).

(b) *f (x, y)= 4*x^2yz^3*; p= (1, 2, 1).*

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}= 8xyz^3$.
$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}= 4x^2z^3$.
$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}= 12x^2yz^2$.

∇ f (x, y, z)= (8xyz^3, 4x^2z^3, 12x^2yz^2).

∇ f (1, 2, 1)= (8 * 1 * 2 * 1^3, 4 * 1^2 * 1^3, 12 * 1^2 * 2 * 1^2)
∇ f (1, 2, 1)= (8 * 1 * 2 * 1, 4 * 1 * 1, 12 * 1 * 2 * 1)
∇ f (1, 2, 1)= (16, 4, 24).

Ejercicio 14.

Hallar máximos, mínimos y puntos silla de las siguientes funciones. Además, calcular el valor de la misma en cada uno esos puntos.

(a) $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$.

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
-2 - 2x= 0
-2 (1 + x)= 0
1 + x= $\frac{0}{2}$
1 + x= 0
x= -1.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
4 - 8y= 0
4 (1 - 2y)= 0
1 - 2y= $\frac{0}{4}$
1 - 2y= 0
2y= 1
y= $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (-1, $\frac{1}{2}$).

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= -2.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= -8.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= 0.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(-1, \frac{1}{2}) & f_{xy}(-1, \frac{1}{2}) \\ f_{yx}(-1, \frac{1}{2}) & f_{yy}(-1, \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

det (H)= -2 (-8) - 0 * 0
det (H)= 16 - 0
det (H)= 16.

Determinar los valores máximos y mínimo relativos:

f $(-1, \frac{1}{2})$= 9 - 2 (-1) + 4 $\frac{1}{2}$ - $(-1)^2$ - 4 $(\frac{1}{2})^2$
f $(-1, \frac{1}{2})$= 9 + 2 + 2 - 1 - 4 $\frac{1}{4}$
f $(-1, \frac{1}{2})$= 9 + 2 + 2 - 1 - 1
f $(-1, \frac{1}{2})$= 11.

Por lo tanto, ya que det (H) $>$ 0 y $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$ $(-1, \frac{1}{2}) < 0$, entonces, f (x, y) tiene un máximo relativo en $(-1, \frac{1}{2}, 11)$.

(b) *f (x, y)= xy - 2x - y.*

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
y - 2= 0
y= 2.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
x - 1= 0
x= 1.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (1, 2).

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= 1.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= 1.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(1,2) & f_{xy}(1,2) \\ f_{yx}(1,2) & f_{yy}(1,2) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

det (H)= 0 * 0 - 1 * 1
det (H)= 0 - 1
det (H)= -1.

Determinar los valores máximos y mínimo relativos:

f (1, 2)= 1 * 2 - 2 * 1 - 2
f (1, 2)= 2 - 2 - 2
f (1, 2)= -2.

Por lo tanto, ya que det (H) $<$ 0, entonces, f (x, y) tiene un punto silla en (1, 2, -2).

(c) *f (x, y)= x sen y.*

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
sen y= 0
y= nπ.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
x cos y= 0
x= 0.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (0, nπ), con n ∈ ℤ.

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= -x sen y.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= cos y.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= cos y.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(0, n\pi) & f_{xy}(0, n\pi) \\ f_{yx}(0, n\pi) & f_{yy}(0, n\pi) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} 0 & \cos n\pi \\ \cos n\pi & 0 \end{pmatrix}$.

det (H)= 0 * 0 - cos nπ cos nπ
det (H)= 0 - cos^2 nπ
det (H)= -cos^2 nπ.

Determinar los valores máximos y mínimo relativos:

f (0, nπ)= 0 sen nπ
f (0, nπ)= 0.

Por lo tanto, ya que det (H) $<$ 0, entonces, f (x, y) tiene un punto silla en (0, nπ, 0).

Ejercicio 15.

El criterio de las derivadas segundas, ¿permite clasificar los puntos estacionarios de f (x, y)= x^2y? En caso afirmativo, hallarlos y analizarlos.

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
2xy= 0
xy= $\frac{0}{2}$
xy= 0.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
x^2= 0
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{0}$
$|x|$= 0
x= 0.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (0, y).

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= y.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= 2x.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= 2x.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(0,y) & f_{xy}(0,y) \\ f_{yx}(0,y) & f_{yy}(0,y) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

det (H)= y * 0 - 0 * 0
det (H)= 0 - 0
det (H)= 0.

Por lo tanto, ya que det (H)= 0, el criterio de las derivadas segundas no permite clasificar los puntos estacionarios (0, y) de f (x, y).

Ejercicio 16.

Dada la función f (x, y)= $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y$ *- 2.*

(a) *Hallar el mínimo de la función de dos formas: (i) Analítica: Calculando los punto estacionarios; (ii) Numérica: Mediante el método de descenso del gradiente. Utilizar tolerancia de 0,0001, tamaño de paso 0,4 y punto de inicio* x_0*= (10, 2).*

(i) Analítica:

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
2x= 0
x= $\frac{0}{2}$
x= 0.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
2y + $\frac{1}{2}$= 0
2y= $\frac{-1}{2}$
y= $\frac{\frac{-1}{2}}{2}$
y= $\frac{-1}{4}$.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (0, $\frac{-1}{4}$).

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= 2.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= 2.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= 0.

$$H= \begin{pmatrix} f_{xx}(0, \frac{-1}{4}) & f_{xy}(0, \frac{-1}{4}) \\ f_{yx}(0, \frac{-1}{4}) & f_{yy}(0, \frac{-1}{4}) \end{pmatrix}$$
$$H= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

det (H)= 2 * 2 - 0 * 0
det (H)= 4 - 0
det (H)= 4.

Determinar los valores máximos y mínimo relativos:

f $(0, \frac{-1}{4})$= 0^2 + $(\frac{-1}{4})^2$ + $\frac{1}{2}$ $(\frac{-1}{4})$ - 2
f $(0, \frac{-1}{4})$= 0 + $\frac{1}{16}$ - $\frac{1}{8}$ - 2
f $(0, \frac{-1}{4})$= $\frac{-33}{16}$.

Por lo tanto, ya que det (H) $>$ 0 y $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$ $(0, \frac{-1}{4})$ $>$ 0, entonces, f (x, y) tiene un mínimo relativo en $(0, \frac{-1}{4}, \frac{-33}{16})$.

(ii) Numérica:

∇ f (x, y)= (2x, 2y + $\frac{1}{2}$).

Iteración 1:

x_0= (10, 2).

∇ f (10, 2)= (2 * 10, 2 * 2 + $\frac{1}{2}$)
∇ f (10, 2)= (20, 4 + $\frac{1}{2}$)
∇ f (10, 2)= (20, 4,5).

x_1= x_0 - η ∇ f (10, 2)
x_1= (10, 2) - 0,4 (20, 4,5)
x_1= (10, 2) - (8, 1,8)
x_1= (2, 0,2).

f (10, 2)= 10^2 + 2^2 + $\frac{1}{2}$ * 2 - 2
f (10, 2)= 100 + 4 + 1 - 2
f (10, 2)= 103.

f (2, 0,2)= 2^2 + $0{,}2^2$ + $\frac{1}{2}$ * 0,2 - 2
f (2, 0,2)= 4 + 0,04 + 0,1 - 2
f (2, 0,2)= 2,14.

$|f(2{,}0{,}2) - f(10{,}2)|$= $|2{,}14 - 103|$
$|f(2{,}0{,}2) - f(10{,}2)|$= $|-100{,}86|$
$|f(2{,}0{,}2) - f(10{,}2)|$= 100,86.

Como 100,86 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

Iteración 2:

x_1= (2, 0,2).

∇ f (2, 0,2)= (2 * 2, 2 * 0,2 + $\frac{1}{2}$)
∇ f (2, 0,2)= (4, 0,4 + $\frac{1}{2}$)
∇ f (2, 0,2)= (4, 0,9).

x_2= x_1 - η ∇ f (2, 0,2)
x_2= (2, 0,2) - 0,4 (4, 0,9)
x_2= (2, 0,2) - (1,6, 0,36)
x_2= (0,4, -0,16).

f (2, 0,2)= 2,14.

f (0,4, -0,16)= $0{,}4^2$ + $(-0{,}16)^2$ + $\frac{1}{2}$ (-0,16) - 2
f (0,4, -0,16)= 0,16 + 0,0256 - 0,08 - 2
f (0,4, -0,16)= -1,8944.

$|f(0{,}4, -0{,}16) - f(2{,}0{,}2)|$= $|-1{,}8944 - 2{,}14|$
$|f(0{,}4, -0{,}16) - f(2{,}0{,}2)|$= $|-4{,}0344|$
$|f(0{,}4, -0{,}16) - f(2{,}0{,}2)|$= 4,0344.

Como 4,0344 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

<u>Iteración 3:</u>

x_2= (0,4, -0,16).

∇ f (0,4, -0,16)= (0,8, 0,18).

x_3= (0,08, -0,232).

f (0,4, -0,16)= -1,8944.

f (0,08, -0,232)= -2,055776.

$|f(0{,}08, -0{,}232) - f(0{,}4, -0{,}16)|$= 0,161376.

Como 0,161376 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

<u>Iteración 4:</u>

x_3= (0,08, -0,232).

∇ f (0,08, -0,232)= (0,16, -0,036).

x_4= (0,016, -0,2464).

f (0,08, -0,232)= -2,055776.

f (0,016, -0,2464)= -2,062231.

$|f(0{,}016, -0{,}2464) - f(0{,}08, -0{,}232)|$= 0,006455.

Como 0,006455 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

Iteración 5:

x_4= (0,016, -0,2464).

∇ f (0,016, -0,2464)= (0,032, 0,0072).

x_5= (0,0032, -0,24928).

f (0,016, -0,2464)= -2,062231.

f (0,0032, -0,24928)= -2,062489.

$|f(0{,}0032, -0{,}24928) - f(0{,}016, -0{,}2464)|$= 0,000258.

Como 0,000258 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

Iteración 6:

x_5= (0,0032, -0,24928).

∇ f (0,032, -0,24928)= (0,0064, 0,00144).

x_6= (0,00064, -0,249856).

f (0,0032, -0,24928)= -2,062489.

f (0,00064, -0,249856)= -2,0624996.

$|f(0{,}00064, -0{,}249856) - f(0{,}0032, -0{,}24928)|$= 0,00001.

Por lo tanto, ya que 0,00001 $<$ 0,0001, entonces, f (x, y) tiene un mínimo relativo aproximado en (0,00064, -0,249856, -2,0624996).

(b) *¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia del método del gradiente? Realizar la búsqueda nuevamente, pero con tamaño de paso 0,1 ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia en este caso?*

Para la convergencia del método del gradiente, fueron necesarias 6 iteraciones. Con tamaño de paso 0,1, para la convergencia, fueron necesarias 30 iteraciones.

(c) *¿Qué ocurre si se utiliza el mismo tamaño de paso (0,4) de este ejercicio para hallar el mínimo de la función del ejercicio anterior?*

Si se utiliza el mismo tamaño de paso (0,4) de este ejercicio para hallar el mínimo de la función del ejercicio anterior, ocurre que, con una tolerancia de 0,0001 y un punto de inicio x_0= (1, 1), para la convergencia del método de gradiente, son necesarias 7 iteraciones. En particular, ya que 0,00003 $<$ 0,0001, entonces, f (x, y) tiene un mínimo relativo aproximado en (0,004613, 0,577981, 0,000012).

(d) *(Para pensar) A raíz del inciso anterior, ¿siempre se puede elegir el mismo tamaño de paso para cualquier función que se estudie? ¿Qué ocurre cuando este parámetro es muy grande o muy pequeño?*

Elegir el tamaño de paso (también conocido como tasa de aprendizaje, η) es crucial en el algoritmo de descenso del gradiente. El tamaño de paso afecta, directamente, la convergencia y el comportamiento del algoritmo:

- **Tamaño de paso muy grande:**
    - Desviación oscilante o divergencia: Si el tamaño de paso es demasiado grande, el algoritmo puede saltar demasiado lejos en cada iteración. Esto puede hacer que el algoritmo no converja y, en lugar de acercarse al mínimo, puede oscilar alrededor del mínimo o, incluso, alejarse de él. En casos extremos, el algoritmo puede diverger, moviéndose hacia valores infinitos.
    - Pérdida de precisión: Los grandes tamaños de paso pueden hacer que el algoritmo pase por alto el mínimo de la función, resultando en una búsqueda ineficiente y una pérdida de precisión en la optimización.
- **Tamaño de paso muy pequeño:**
    - Convergencia lenta: Si el tamaño de paso es demasiado pequeño, el algoritmo avanzará muy lentamente hacia el mínimo. Esto puede hacer que el proceso de optimización sea muy lento y requiera un gran número de iteraciones para alcanzar una convergencia aceptable.
    - Riesgo de quedarse atascado: En algunos casos, un tamaño de paso muy pequeño puede hacer que el algoritmo quede atrapado en un mínimo local o no se mueva lo suficiente para salir de un área donde la función cambia muy lentamente.
- **Selección del tamaño de paso:**
    - Tamaño adaptativo: En la práctica, se utilizan técnicas como el método de descenso del gradiente con tasa de aprendizaje adaptativa (por ejemplo, Adam, RMSprop), que ajustan el tamaño de paso durante el proceso de optimización para mejorar la convergencia.
    - Experimentación y validación: A menudo, se elige un tamaño de paso inicial basado en experimentación y se ajusta en función del comportamiento observado. Se pueden usar técnicas de validación cruzada para elegir el tamaño de paso que mejor funciona para el problema específico.
    - Pruebas de tamaño de paso: Realizar pruebas con diferentes tamaños de paso para observar cómo afecta la convergencia puede ser una buena práctica. También se pueden usar gráficos de la función objetivo en función del número de iteraciones para ajustar el tamaño de paso.

En resumen, el tamaño de paso es un parámetro crítico en el método de descenso del gradiente. Elegir un tamaño de paso adecuado es importante para garantizar una convergencia eficiente y efectiva. Un tamaño de paso adecuado puede variar dependiendo de la función objetivo y de la naturaleza del problema.