

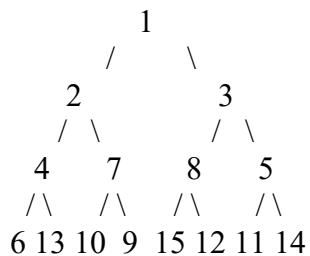
Ejercitación Teórica N° 2: Cola de Prioridades - *Heap*.

Ejercicio 1.

A partir de una heap inicialmente vacía, insertar, de a uno, los siguientes valores: 6, 4, 15, 2, 10, 11, 8, 1, 13, 7, 9, 12, 5, 3, 14.

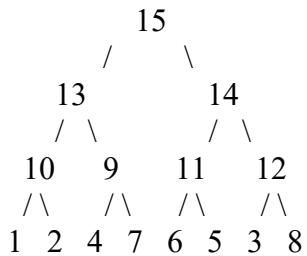
[6] - Insert(6)
[6, 4] - Insert(4)
[4, 6]
[4, 6, 15] - Insert(15)
[4, 6, 15, 2] - Insert(2)
[4, 2, 15, 6]
[2, 4, 15, 6]
[2, 4, 15, 6, 10] - Insert(10)
[2, 4, 15, 6, 10, 11] - Insert(11)
[2, 4, 11, 6, 10, 15]
[2, 4, 11, 6, 10, 15, 8] - Insert(8)
[2, 4, 8, 6, 10, 15, 11]
[2, 4, 8, 6, 10, 15, 11, 1] - Insert(1)
[2, 4, 8, 1, 10, 15, 11, 6]
[2, 1, 8, 4, 10, 15, 11, 6]
[1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6]
[1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6, 13] - Insert(13)
[1, 2, 8, 4, 10, 15, 11, 6, 13, 7] - Insert(7)
[1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10]
[1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10, 9] - Insert(9)
[1, 2, 8, 4, 7, 15, 11, 6, 13, 10, 9, 12] - Insert(12)
[1, 2, 8, 4, 7, 12, 11, 6, 13, 10, 9, 15]
[1, 2, 8, 4, 7, 12, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 5] - Insert(5)
[1, 2, 8, 4, 7, 5, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12]
[1, 2, 5, 4, 7, 8, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12]
[1, 2, 5, 4, 7, 8, 11, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 3] - Insert(3)
[1, 2, 5, 4, 7, 8, 3, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11]
[1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11]
[1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11, 14] - Insert(14)

Min-Heap: [1, 2, 3, 4, 7, 8, 5, 6, 13, 10, 9, 15, 12, 11, 14].



[6] - *Insert(6)*
 [6, 4] - *Insert(4)*
 [6, 4, 15] - *Insert(15)*
 [15, 4, 6]
 [15, 4, 6, 2] - *Insert(2)*
 [15, 4, 6, 2, 10] - *Insert(10)*
 [15, 10, 6, 2, 4]
 [15, 10, 6, 2, 4, 11] - *Insert(11)*
 [15, 10, 11, 2, 4, 6]
 [15, 10, 11, 2, 4, 6, 8] - *Insert(8)*
 [15, 10, 11, 2, 4, 6, 8, 1] - *Insert(1)*
 [15, 10, 11, 2, 4, 6, 8, 1, 13] - *Insert(13)*
 [15, 10, 11, 13, 4, 6, 8, 1, 2]
 [15, 13, 11, 10, 4, 6, 8, 1, 2]
 [15, 13, 11, 10, 4, 6, 8, 1, 2, 7] - *Insert(7)*
 [15, 13, 11, 10, 7, 6, 8, 1, 2, 4]
 [15, 13, 11, 10, 7, 6, 8, 1, 2, 4, 9] - *Insert(9)*
 [15, 13, 11, 10, 9, 6, 8, 1, 2, 4, 7]
 [15, 13, 11, 10, 9, 6, 8, 1, 2, 4, 7, 12] - *Insert(12)*
 [15, 13, 11, 10, 9, 12, 8, 1, 2, 4, 7, 6]
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6]
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5] - *Insert(5)*
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3] - *Insert(3)*
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 8, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 14] - *Insert(14)*
 [15, 13, 12, 10, 9, 11, 14, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8]
 [15, 13, 14, 10, 9, 11, 12, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8].

Max-Heap: [15, 13, 14, 10, 9, 11, 12, 1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 8].



6, 4, 15, 2, 10, 11, 8, 1, 13, 7, 9, 12, 5, 3, 14

La raíz está almacenada en la posición 1. Para un elemento que está en la posición i, se tiene:

- El hijo izquierdo está en la posición 2i.
- El hijo derecho está en la posición 2i + 1.
- El padre está en la posición $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.

Ejercicio 2.

(a) ¿Cuántos elementos hay, al menos, en una heap de altura h ?

En una *heap* de altura h , hay, al menos, 2^h elementos.

(b) ¿Dónde se encuentra ubicado el elemento mínimo en una max-heap?

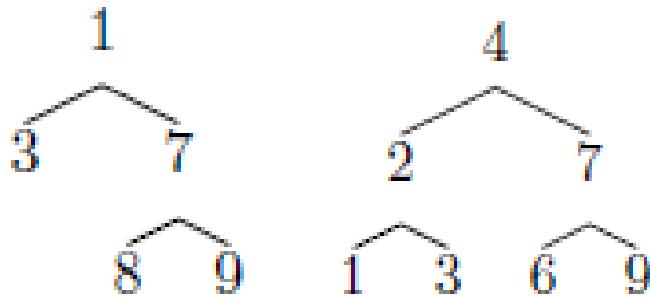
El elemento mínimo en una *max-heap* se encuentra ubicado en alguna de las hojas.

(c) ¿El siguiente arreglo es una max-heap: [23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12]?

No, este arreglo no es una *max-heap*, ya que el nodo con valor 6 es padre del nodo con valor 7, no cumpliendo con que cada nodo sea mayor o igual que sus hijos.

Ejercicio 3.

Dados los siguientes árboles, indicar si representan una heap. Justificar la respuesta.



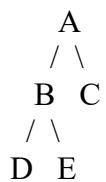
El primer árbol no es una *heap*, ya que no es un árbol binario completo.

El segundo árbol no es una *heap*, ya que, si bien es completo, cada nodo no es menor o igual (o mayor o igual) que sus hijos.

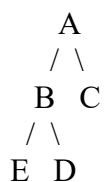
Ejercicio 4.

Dibujar todas las min-heaps posibles para este conjunto de claves: {A, B, C, D, E}.

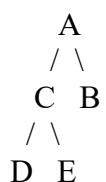
Opción 1:



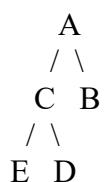
Opción 2:



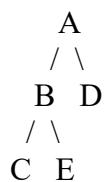
Opción 3:



Opción 4:



Opción 5:



Opción 6:



/ \
E C

Opción 7:

A
/ \
B E
/ \
C D

Opción 8:

A
/ \
B E
/ \
D C

Ejercicio 5.

A partir de una min-heap inicialmente vacía, dibujar la evolución del estado de la heap al ejecutar las siguientes operaciones:

Insert(5), Insert(4), Insert(7), Insert(1), DeleteMin(), Insert(3), Insert(6), DeleteMin(), DeleteMin(), Insert(8), DeleteMin(), Insert(2), DeleteMin(), DeleteMin().

Insert(5):

5

Insert(4):

5
/
4

4
/
5

Insert(7):

4
/ \
5 7

Insert(1):

4
/ \
5 7
/
1

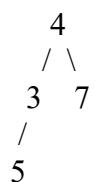
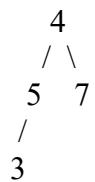
4
/ \
1 7
/
5

1
/ \
4 7
/
5

DeleteMin():



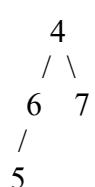
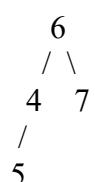
Insert(3):

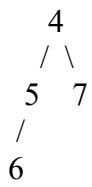


Insert(6):



DeleteMin():





DeleteMin():



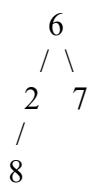
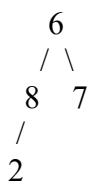
Insert(8):



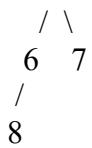
DeleteMin():



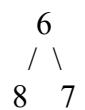
Insert(2):



2



DeleteMin():



DeleteMin():



Ejercicio 6.

Aplicar el algoritmo BuildHeap para construir una min-heap en tiempo lineal, con los siguientes valores: {150, 80, 40, 10, 70, 110, 30, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 20, 90}.

Se parte de:

[150, 80, 40, 10, 70, 110, 30, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 20, 90].

Se empieza en la posición $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 7$ del arreglo, el 30, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 70, 110, 20, 120, 140, 60, 50, 130, 100, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 110, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 70, 100, 20, 120, 140, 60, 50, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 70, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 50, 100, 20, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 10, y se filtra:

[150, 80, 40, 10, 50, 100, 20, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 40, y se filtra:

[150, 80, 20, 10, 50, 100, 40, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 30, 90]
[150, 80, 20, 10, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90].

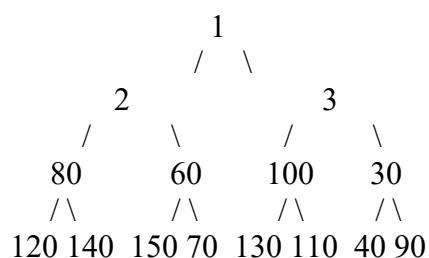
Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 80, y se filtra:

[150, 10, 20, 80, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 150, y se filtra:

[10, 150, 20, 80, 50, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90]
[10, 50, 20, 80, 150, 100, 30, 120, 140, 60, 70, 130, 110, 40, 90]
[10, 50, 20, 80, 60, 100, 30, 120, 140, 150, 70, 130, 110, 40, 90].

Min-Heap: [10, 50, 20, 80, 60, 100, 30, 120, 140, 150, 70, 130, 110, 40, 90].



Ejercicio 7.

Aplicar el algoritmo HeapSort para ordenar, descendente, los siguientes elementos: $\{15, 18, 40, 1, 7, 10, 33, 2, 140, 500, 11, 12, 13, 90\}$. Mostrar, paso a paso, la ejecución del algoritmo sobre los datos.

Se parte de:

Min-Heap: [1, 2, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13, 90].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 90:

[90, 2, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]
[2, 90, 10, 7, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]
[2, 7, 10, 90, 11, 12, 33, 18, 140, 500, 15, 40, 13 | 1]
[2, 7, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40, 13 | 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 13:

[13, 7, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1]
[7, 13, 10, 18, 11, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1]
[7, 11, 10, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15, 40 | 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 40:

[40, 11, 10, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1]
[10, 11, 40, 18, 13, 12, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1]
[10, 11, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500, 15 | 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 15:

[15, 11, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1]
[11, 15, 12, 18, 13, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1]
[11, 13, 12, 18, 15, 40, 33, 90, 140, 500 | 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 13, 12, 18, 15, 40, 33, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1]
[12, 13, 500, 18, 15, 40, 33, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1]
[12, 13, 33, 18, 15, 40, 500, 90, 140 | 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 13, 33, 18, 15, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[13, 140, 33, 18, 15, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[13, 15, 33, 18, 140, 40, 500, 90 | 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 90:

[90, 15, 33, 18, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[15, 90, 33, 18, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[15, 18, 33, 90, 140, 40, 500 | 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 18, 33, 90, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[18, 500, 33, 90, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[18, 90, 33, 500, 140, 40 | 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 40:

[40, 90, 33, 500, 140 | 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[33, 90, 40, 500, 140 | 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 90, 40, 500 | 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[40, 90, 140, 500 | 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 500:

[500, 90, 140 | 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1]
[90, 500, 140 | 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 140:

[140, 500 | 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño:

[500 | 140, 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Arreglo ordenado descendente:

[500, 140, 90, 40, 33, 18, 15, 13, 12, 11, 10, 7, 2, 1].

Ejercicio 8.

Construir una max-heap con los siguientes datos: {5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4}.

(a) Insertándolos de a uno.

[5] - Insert(5)
[5, 8] - Insert(8)
[8, 5]
[8, 5, 12] - Insert(12)
[12, 5, 8]
[12, 5, 8, 9] - Insert(9)
[12, 9, 8, 5]
[12, 9, 8, 5, 7] - Insert(7)
[12, 9, 8, 5, 7, 10] - Insert(10)
[12, 9, 10, 5, 7, 8]
[12, 9, 10, 5, 7, 8, 21] - Insert(21)
[12, 9, 21, 5, 7, 8, 10]
[21, 9, 12, 5, 7, 8, 10]
[21, 9, 12, 5, 7, 8, 10, 6] - Insert(6)
[21, 9, 12, 6, 7, 8, 10, 5]
[21, 9, 12, 6, 7, 8, 10, 5, 14] - Insert(14)
[21, 9, 12, 14, 7, 8, 10, 5, 6]
[21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6]
[21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6, 4] - Insert(4)

Max-Heap: [21, 14, 12, 9, 7, 8, 10, 5, 6, 4].

(b) Usando el algoritmo BuildHeap.

Se parte de:

[5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4].

Se empieza en la posición $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 5$ del arreglo, el 7, y se filtra:

[5, 8, 12, 9, 7, 10, 21, 6, 14, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 9, y se filtra:

[5, 8, 12, 14, 7, 10, 21, 6, 9, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 12, y se filtra:

[5, 8, 21, 14, 7, 10, 12, 6, 9, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 8, y se filtra:

[5, 14, 21, 8, 7, 10, 12, 6, 9, 4]
[5, 14, 21, 9, 7, 10, 12, 6, 8, 4].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 5, y se filtra:

[21, 14, 5, 9, 7, 10, 12, 6, 8, 4]
[21, 14, 12, 9, 7, 10, 5, 6, 8, 4].

Max-Heap: [21, 14, 12, 9, 7, 10, 5, 6, 8, 4].

Ejercicio 9.

Suponer que una heap que representa una cola de prioridades está almacenada en el arreglo A (se comienza de la posición $A[1]$). Si se inserta la clave 16, ¿en qué posición quedará?

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A[i]$	11	21	27	37	36	34	32	43	44	42	51	62

- (a) $A[2]$. (b) $A[3]$. (c) $A[6]$. (d) $A[7]$. (e) $A[12]$.

[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62]

[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 16] - Insert(16)

[11, 21, 27, 37, 36, 16, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 34]

[11, 21, 16, 37, 36, 27, 32, 43, 44, 42, 51, 62, 34].

Ejercicio 10.

Suponer que una heap que representa una cola de prioridades está almacenada en el arreglo A (se comienza de la posición $A[1]$). Si se aplica un delete-min, ¿en qué posición quedará la clave 62?

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A[i]$	11	21	27	37	36	34	32	43	44	42	51	62

- (a) $A[1]$. (b) $A[2]$. (c) $A[10]$. (d) $A[11]$. (e) $A[12]$.

[11, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51, 62]
[62, 21, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51] - DeleteMin()
[21, 62, 27, 37, 36, 34, 32, 43, 44, 42, 51]
[21, 36, 27, 37, 62, 34, 32, 43, 44, 42, 51]
[21, 36, 27, 37, 42, 34, 32, 43, 44, 62, 51].

Ejercicio 11.

(a) Ordenar, en forma creciente, los datos del ejercicio anterior, usando el algoritmo HeapSort.

Se parte de:

Max-Heap: [62, 51, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21, 11].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 51, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]
[51, 11, 42, 44, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]
[51, 44, 42, 11, 43, 32, 34, 37, 36, 27, 21 | 62]
[51, 44, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27, 21 | 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 44, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]
[44, 21, 42, 37, 43, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]
[44, 43, 42, 37, 21, 32, 34, 11, 36, 27 | 51, 62]
[44, 43, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36, 21 | 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 43, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]
[43, 21, 42, 37, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]
[43, 37, 42, 21, 27, 32, 34, 11, 36 | 44, 51, 62]
[43, 37, 42, 36, 27, 32, 34, 11, 21 | 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 37, 42, 36, 27, 32, 34, 11 | 43, 44, 51, 62]
[42, 37, 21, 36, 27, 32, 34, 11 | 43, 44, 51, 62]
[42, 37, 34, 36, 27, 32, 21, 11 | 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 37, 34, 36, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62]
[37, 11, 34, 36, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62]
[37, 36, 34, 11, 27, 32, 21 | 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 36, 34, 11, 27, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[36, 21, 34, 11, 27, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[36, 27, 34, 11, 21, 32 | 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 32:

[32, 27, 34, 11, 21 | 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[34, 27, 32, 11, 21 | 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 27, 32, 11 | 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[32, 27, 21, 11 | 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 11:

[11, 27, 21 | 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62]
[27, 11, 21 | 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 21:

[21, 11 | 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño:

[11 | 21, 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

Arreglo ordenado ascendente:

[11, 21, 27, 32, 34, 36, 37, 42, 43, 44, 51, 62].

(b) ¿Cuáles serían los pasos a seguir si se quiere ordenar en forma decreciente?

Los pasos a seguir si se quiere ordenar en forma decreciente sería partir de una *Min-Heap*, intercambiar el primer con el último elemento del arreglo, decrementar el tamaño de éste y filtrar, correspondientemente, en cada caso.

Ejercicio 12.

¿Cuáles de los siguientes arreglos representan una max-heap, min-heap o ninguna de las dos?

(a) arreglo 1: 0 1 2 0 4 5 6 7 8 9.

Ninguna de las dos.

(b) arreglo 2: 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0.

Max-Heap.

(c) arreglo 3: 5 5 5 6 6 6 6 7 7 1.

Ninguna de las dos.

(d) arreglo 4: 9 3 9 2 1 6 7 1 2 1.

Max-Heap.

(e) arreglo 5: 8 7 6 1 2 3 4 2 1 2.

Ninguna de las dos.

Ejercicio 13.

Un arreglo de 7 enteros se ordena ascendente usando el algoritmo HeapSort. Luego de la fase inicial del algoritmo (la construcción de la heap), ¿cuál de los siguientes es un posible orden del arreglo?

- (a) 85 78 45 51 53 47 49.
- (b) 85 49 78 45 47 51 53.
- (c) 85 78 49 45 47 51 53.
- (d) 45 85 78 53 51 49 47.
- (e) 85 51 78 53 49 47 45.

Ejercicio 14.

En una Heap, ¿para un elemento que está en la posición i , su hijo derecho está en la posición ...?

- (a) $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
- (b) $2i$.
- (c) $2i + 1$.
- (d) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 15.

¿Siempre se puede decir que un árbol binario lleno es una Heap?

- (a) Sí. (b) No.

Ejercicio 16.

La operación que agrega un elemento a la heap que tiene n elementos, en el peor caso, es de ...

- (a) $O(n)$. (b) $O(n \log n)$. (c) $O(\log n)$. (d) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 17.

Se construyó una Max-Heap con las siguientes claves: 13, 21, 87, 30, 25, 22, 18. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al resultado de realizar la construcción insertando las claves una a una?

- (a) 87, 30, 25, 22, 21, 18, 13.
- (b) 87, 30, 22, 21, 25, 13, 18.
- (c) 87, 30, 25, 13, 22, 18, 21.
- (d) 87, 30, 22, 13, 25, 21, 18.**

[13] - Insert(13)
[13, 21] - Insert(21)
[21, 13]
[21, 13, 87] - Insert(87)
[87, 13, 21]
[87, 13, 21, 30] - Insert(30)
[87, 30, 21, 13]
[87, 30, 21, 13, 25] - Insert(25)
[87, 30, 21, 13, 25, 22] - Insert(22)
[87, 30, 22, 13, 25, 21]
[87, 30, 22, 13, 25, 21, 18] - Insert(18)

Max-Heap: [87, 30, 22, 13, 25, 21, 18].

Ejercicio 18.

Se construyó una Max-Heap con las siguientes claves: 13, 21, 87, 30, 25, 22, 18. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al resultado de realizar la construcción aplicando el algoritmo Build-Heap?

- (a) 87, 30, 25, 22, 21, 18, 13.
- (b) 87, 30, 22, 21, 25, 13, 18.**
- (c) 87, 30, 25, 13, 22, 18, 21.
- (d) 87, 30, 22, 13, 25, 21, 18.

Se parte de:

[13, 21, 87, 30, 25, 22, 18].

Se empieza en la posición $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 3$ del arreglo, el 87, y se filtra:

[13, 21, 87, 30, 25, 22, 18].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 21, y se filtra:

[13, 30, 87, 21, 25, 22, 18].

Se avanza a la posición anterior del arreglo, el 13, y se filtra:

[87, 30, 13, 21, 25, 22, 18]
[87, 30, 22, 21, 25, 13, 18].

Max-Heap: [87, 30, 22, 21, 25, 13, 18].

Ejercicio 19.

El algoritmo HeapSort consta de dos etapas:

- (1) Se construye una heap y
- (2) Se realizan los intercambios necesarios para dejar ordenados los datos.

Asumir que la heap ya está construida y es la siguiente: 58 38 53 23 28 40 35 18.

¿Cómo quedan los datos en el arreglo después de ejecutar sólo 2 pasos de la segunda etapa del HeapSort?

- (a) 40 38 23 28 35 18 53 58.
- (b) 53 38 40 23 28 18 35 58.
- (c) 40 38 23 35 28 18 53 58.
- (d) 40 38 35 23 28 18 53 58.

Se parte de:

Max-Heap: [58, 38, 53, 23, 28, 40, 35, 18].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 18:

[18, 38, 53, 23, 28, 40, 35 | 58]
[53, 38, 18, 23, 28, 40, 35 | 58]
[53, 38, 40, 23, 28, 18, 35 | 58].

Intercambiar el primero con el último, decrementar el tamaño y filtrar el 35:

[35, 38, 40, 23, 28, 18, 35 | 53, 58]
[40, 38, 35, 23, 28, 18 | 53, 58].

Ejercicio 20.

Dada la Min-Heap 3, 8, 5, 15, 10, 7, 19, 28, 16, 25, 12. ¿En qué posición está ubicado el hijo derecho de la clave 15?

- (a) 7.
- (b) 8.
- (c) 9.
- (d) 10.

$$2i + 1 = 2 * 4 + 1$$

$$2i + 1 = 8 + 1$$

$$2i + 1 = 9.$$

Ejercicio 21.

Construir una min-heap con las siguientes claves: 15, 25, 23, 13, 18, 2, 19, 20, 17, insertándose una a una. Indicar en qué posiciones quedaron ubicadas las claves: 2, 18 y 25.

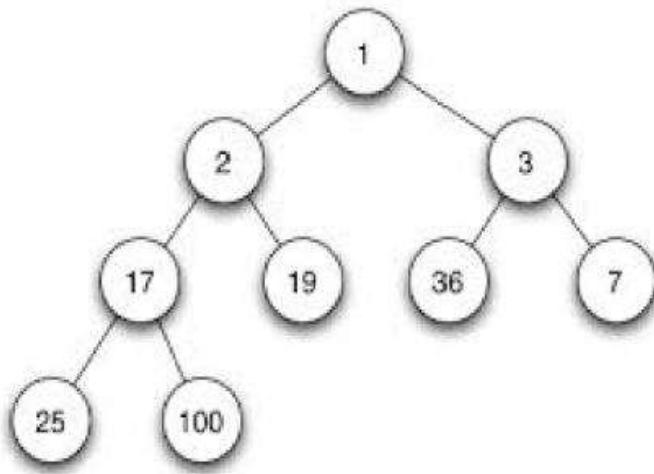
[15] - Insert(15)
[15, 25] - Insert(25)
[15, 25, 23] - Insert(23)
[15, 25, 23, 13] - Insert(13)
[13, 15, 23, 25]
[13, 15, 23, 25, 18] - Insert(18)
[13, 15, 23, 25, 18, 2] - Insert(2)
[13, 15, 2, 25, 18, 23]
[2, 15, 13, 25, 18, 23]
[2, 15, 13, 25, 18, 23, 19] - Insert(19)
[2, 15, 13, 25, 18, 23, 19, 20] - Insert(20)
[2, 15, 13, 20, 18, 23, 19, 25]
[2, 15, 13, 20, 18, 23, 19, 25, 17] - Insert(17)
[2, 15, 13, 17, 18, 23, 19, 25, 20].

Min-Heap: [2, 15, 13, 17, 18, 23, 19, 25, 20].

Las claves 2, 18 y 25 quedaron ubicadas en las posiciones 1, 5 y 8, respectivamente.

Ejercicio 22.

Luego de insertar la clave 15 en la siguiente min-heap, ¿cuántas de las claves que ya estaban en la heap han mantenido su lugar (es decir, ocupan en la min-heap resultante la misma posición que ocupaban antes de la inserción)?

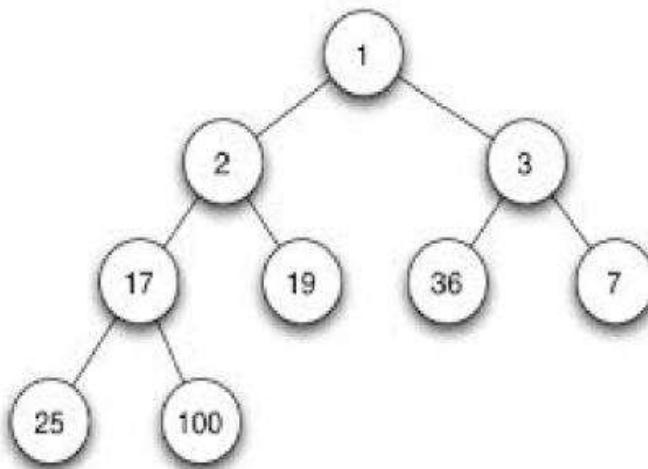


- (a) Ninguna.
- (b) Seis.
- (c) Ocho.
- (d) Nueve.

[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100]
[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100, 15] - Insert(15)
[1, 2, 3, 17, 15, 36, 7, 25, 100, 19].

Ejercicio 23.

Luego de una operación de borrado del mínimo en la siguiente min-heap, ¿cuántas claves han cambiado de lugar (es decir, ocupan en la min-heap resultante un lugar diferente al que ocupaban en la min-heap antes del borrado) ? (No contar la clave borrada, ya que no pertenece más a la heap).



- (a) Ninguna.
- (b) Dos.
- (c) Tres.
- (d) Cuatro.

[1, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25, 100]
[100, 2, 3, 17, 19, 36, 7, 25] - DeleteMin()
[2, 100, 3, 17, 19, 36, 7, 25]
[2, 17, 3, 100, 19, 36, 7, 25]
[2, 17, 3, 25, 19, 36, 7, 100].