

## **Trabajo Práctico N° 3:** **Álgebra de Boole.**

### **Ejercicio 1.**

*En  $\mathbb{R}$ , se define la operación  $\$$  como  $a\$b = a - b + ab$ . Analizar si la operación es cerrada y conmutativa en  $\mathbb{R}$ .*

Cerrada:

Dado que  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  tiene estructura de Anillo, entonces,  $a\$b \in \mathbb{R}$ .

Conmutativa:

$$a\$b = a - b + ab$$

$\neq$

$$b\$a = b - a + ba.$$

Por lo tanto, la operación es cerrada, pero no es conmutativa.

## Ejercicio 2.

Analizar si  $(\mathbb{N}, \cdot)$  es un grupo conmutativo.

Para que  $(\mathbb{N}, \cdot)$  sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en  $\mathbb{N}$ :

### Cerrada:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da un número natural:

Si  $a, b \in \mathbb{N}$ , entonces,  $ab \in \mathbb{N}$ .

### Asociativa:

Para cualquier terna de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , entonces,  $(ab)c = a(bc)$ .

### Existencia de elemento neutro:

Existe un único número natural tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en  $\mathbb{N}$  tal que:

$$a * 1 = 1 * a = a.$$

### Existencia de elemento opuesto:

Para todo número natural no existe otro, único, que sumado a él dé como resultado el elemento neutro.

### Comutativa:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in \mathbb{N}$ , entonces,  $ab = ba$ .

Por lo tanto,  $(\mathbb{N}, \cdot)$  no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

### Ejercicio 3.

Sea  $H$  un conjunto y  $(P(H), \cap)$  el conjunto de Partes de  $H$  con la operación intersección. Analizar si  $(P(H), \cap)$  es un grupo conmutativo.

Para que  $(P(H), \cap)$  sea un grupo conmutativo, la operación  $\cap$  debe cumplir las siguientes propiedades en  $P(H)$ :

#### Cerrada:

Para cualquier par de elementos de  $P(H)$ , el resultado de realizar su intersección es un elemento de  $P(H)$ :

Si  $A, B \in P(H)$ , entonces,  $A \cap B \in P(H)$ .

#### Asociativa:

Para cualquier terna de elementos de  $P(H)$ , el resultado de realizar su intersección da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $A, B, C \in P(H)$ , entonces,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

#### Existencia de elemento neutro:

Existe un único elemento de  $P(H)$  tal que realizando su intersección con cualquier otro da como resultado el mismo elemento. El elemento neutro es  $H$ , ya que existe  $H$  en  $P(H)$  tal que:

$A \cap H = H \cap A = A$ .

#### Existencia de elemento opuesto:

Para todo elemento de  $P(H)$  no existe otro, único, que realizando la intersección con él dé como resultado el elemento neutro.

#### Comutativa:

Para cualquier par de elementos de  $P(H)$ , el resultado de realizar su intersección da lo mismo en cualquier orden:

Si  $A, B \in P(H)$ , entonces,  $A \cap B = B \cap A$ .

Por lo tanto,  $(P(H), \cap)$  no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

## Ejercicio 4.

Demostrar que  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  es un grupo conmutativo. Indicar por qué  $(\mathbb{R}, \cdot)$  no es un grupo.

Para que  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en  $\mathbb{R} - \{0\}$ :

### Cerrada:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da un número real distinto de cero:

Si  $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces,  $ab \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

### Asociativa:

Para cualquier terna de números reales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces,  $(ab)c = a(bc)$ .

### Existencia de elemento neutro:

Existe un único número real distinto de cero tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en  $\mathbb{R} - \{0\}$  tal que:

$$a * 1 = 1 * a = a.$$

### Existencia de elemento opuesto:

Para todo número real distinto de cero existe otro, único, que multiplicado a él da como resultado el elemento neutro:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ entonces, } a \frac{1}{a} = \frac{1}{a} a = 1.$$

### Comutativa:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces,  $ab = ba$ .

Por lo tanto,  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  es un grupo conmutativo. Por otra parte,  $(\mathbb{R}, \cdot)$  no es un grupo porque no se cumple la propiedad de existencia de elemento opuesto (no existe elemento opuesto para el 0).

## Ejercicio 5.

Sea  $E = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x \text{ es par}\}$ . Demostrar que  $(E, +, \cdot)$  es un anillo.

Para que  $(E, +, \cdot)$  sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en E:

### Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da un número entero par:

Si  $a, b \in E$ , entonces,  $a + b \in E$ .

### Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in E$ , entonces,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

### Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en E tal que:

$a + 0 = 0 + a = a$ .

### Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si  $a \in E$ , entonces,  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

### Comutativa:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in E$ , entonces,  $a + b = b + a$ .

Para que  $(E, +, \cdot)$  sea un anillo, por otro lado, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en E:

### Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da un número entero par:

Si  $a, b \in E$ , entonces,  $ab \in E$ .

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in E$ , entonces,  $(ab)c = a(bc)$ .

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros pares, es posible distribuir la multiplicación respecto a la suma:

Si  $a, b, c \in E$ , entonces,  $a(b + c) = ab + ac$  y  $(b + c)a = ba + ca$ .

Por lo tanto,  $(E, +, \cdot)$  es un anillo.

## Ejercicio 6.

Sea  $\otimes$ , la operación definida sobre los números enteros como  $a \otimes b = 2ab$ . Demostrar que  $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$  es un anillo.

Para que  $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$  sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en  $\mathbb{Z}$ :

### Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a + b \in \mathbb{Z}$ .

### Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

### Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en  $\mathbb{Z}$  tal que:

$a + 0 = 0 + a = a$ .

### Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si  $a \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

### Commutativa:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a + b = b + a$ .

Para que  $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$  sea un anillo, por otro lado, la operación  $\otimes$  debe cumplir las siguientes propiedades en  $\mathbb{Z}$ :

### Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de realizar la operación  $\otimes$  da un número entero:

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a \otimes b \in \mathbb{Z}$ .

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de realizar la operación  $\otimes$  da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , entonces,

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c &= a \otimes (b \otimes c) \\ 2ab \otimes c &= a \otimes (2bc) \\ 2 * 2ab * c &= 2a * (2bc) \\ 4abc &= 4abc.\end{aligned}$$

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros, es posible distribuir la operación  $\otimes$  respecto a la suma:

Si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , entonces,

$$\begin{aligned}a \otimes (b + c) &= a \otimes b + a \otimes c \\ 2a(b + c) &= 2ab + 2ac \\ 2ab + 2ac &= 2ab + 2ac\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(b + c) \otimes a &= b \otimes a + c \otimes a \\ 2(b + c)a &= 2ba + 2ca \\ 2ba + 2ca &= 2ba + 2ca.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$  es un anillo.

## Ejercicio 7.

En el conjunto  $P$  de los números pares se definen dos operaciones, una de ellas es la suma usual y la otra ( $\#$ ) está definida en la forma: si  $x, y \in P$ ,  $x \# y = \frac{xy}{2}$ . Demostrar que  $(P, +, \#)$  tiene estructura de anillo.

Para que  $(P, +, \#)$  sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en  $P$ :

### Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si  $a, b \in P$ , entonces,  $a + b \in P$ .

### Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in P$ , entonces,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

### Existencia de elemento neutro:

Existe un único número par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en  $P$  tal que:

$a + 0 = 0 + a = a$ .

### Existencia de elemento opuesto:

Para todo número par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si  $a \in P$ , entonces,  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

### Comutativa:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si  $a, b \in P$ , entonces,  $a + b = b + a$ .

Para que  $(P, +, \#)$  sea un anillo, por otro lado, la operación  $\#$  debe cumplir las siguientes propiedades en  $P$ :

### Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de realizar la operación  $\#$  da un número entero:

Si  $a, b \in P$ , entonces,  $a \# b \in P$ .

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de realizar la operación  $\#$  da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si  $a, b, c \in P$ , entonces,

$$\begin{aligned} (a \# b) \# c &= a \# (b \# c) \\ \frac{ab}{2} \# c &= a \# \frac{bc}{2} \\ \frac{\frac{ab}{2} * c}{2} &= \frac{a * \frac{bc}{2}}{2} \\ \frac{abc}{4} &= \frac{abc}{4}. \end{aligned}$$

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números pares, es posible distribuir la operación  $\#$  respecto a la suma:

Si  $a, b, c \in P$ , entonces,

$$\begin{aligned} a \# (b + c) &= a \# b + a \# c \\ \frac{a(b+c)}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \\ \frac{ab+ac}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \\ \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (b + c) \# a &= b \# a + c \# a \\ \frac{(b+c)a}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} \\ \frac{ba+ca}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} \\ \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2} &= \frac{ba}{2} + \frac{ca}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(P, +, \#)$  tiene estructura de anillo.

### Ejercicio 8.

Sean  $A, B, C$  elementos de un álgebra de Boole  $G = (F, +, ., ', 0, 1)$ , indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, señalando los axiomas usados:

(a)  $A + (AC) = (A + A)(A + C)$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B4) de distributividad de la suma con respecto a la multiplicación.

(b)  $AB + 0 = AB$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(c)  $CB1 = CB$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B6) de existencia de elemento neutro (1) de la multiplicación.

(d)  $(AB)' + AB = 0$ .

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B7),  $(AB)' + AB = 1$ .

(e)  $CA(CA)' + B = B$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B8) y (B5),  $CA(CA)' = 0$  y  $0 + B = B$ .

(f)  $CA + 0 = 0$ .

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

(g)  $(AB)' + AB + CC' = 1$ .

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B7) y (B8),  $(AB)' + AB = 1$ ,  $CC' = 0$ ,  $1 + 0 = 1$ .

### Ejercicio 9.

Sea  $H = \{a, b, c, d, e\}$  y sean  $\Pi = (P(H), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, H)$  el álgebra de Boole de partes de  $H$ . Los siguientes conjuntos son elementos de  $P(H)$ :  $\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}$ . Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.

$\{b, c, d\}$	$\{b, c, d, e\}$
$\{b, c\}$	$\{b, d, e\}$
$\{b\}$	$\{c\}$
$\{c\}$	$\{d\}$
$\{d\}$	$\{e\}$

### Ejercicio 10.

Sea  $W$  el conjunto formado por las clases de 3 letras proposicionales  $[p]$ ,  $[q]$ ,  $[r]$  y sus conjunciones, disyunciones y negaciones. Sea  $\Lambda = (W, \vee, \wedge, \sim, \perp, \top)$  del álgebra de Boole del cálculo proposicional. Las siguientes proposiciones son elementos de  $W$ :  $[p \wedge q]$ ,  $[q \wedge r]$ ,  $[p]$ ,  $[q]$ ,  $[r]$ ,  $[q \vee r]$ . Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.

$[q \vee r]$   
 $[p] [q] [r]$   
 $[p \wedge q] [q \wedge r]$

### Ejercicio 11.

Sean  $B = \mathbb{Z}$ , + la suma usual de enteros, . el producto usual de enteros y, para cada  $a \in \mathbb{Z}$ , se define  $a' = -a$ . ¿Es  $H = (B, +, ., ', 0, 1)$  un álgebra booleana?

Para que  $H = (B, +, ., ', 0, 1)$  sea un álgebra booleana, se deben cumplir las siguientes propiedades en  $B$ . Sean  $x, y, z \in B$ :

- |                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| (B1) $x + y = y + x$ .           | Se cumple. |
| (B2) $xy = yx$ .                 | Se cumple. |
| (B3) $x(y + z) = xy + xz$ .      | Se cumple. |
| (B4) $x + yz = (x + y)(x + z)$ . | Se cumple. |
| (B5) $x + 0 = x$ .               | Se cumple. |
| (B6) $x1 = x$ .                  | Se cumple. |
| (B7) $x + x' = 1$ .              | Se cumple. |
| (B8) $xx' = 0$ .                 | Se cumple. |

Por lo tanto,  $H = (B, +, ., ', 0, 1)$  es un álgebra booleana.

## Ejercicio 12.

*Demostrar que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces,  $1' = 0$  y  $0' = 1$ .*

Por el axioma (B7), se cumple que:

$$0 + 0' = 1 \text{ y}$$
$$1 + 1' = 1.$$

Además, por el axioma (B5), se cumple que:

$$0' = 1 \text{ y}$$
$$1' = 0.$$

Por lo tanto, queda demostrado que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces,  $1' = 0$  y  $0' = 1$ .

### Ejercicio 13.

(a) Probar la Ley de De Morgan:  $(xy)' = x' + y'$ .

Teniendo en cuenta que el complemento es único, se debe tener que:

- (i)  $(xy) + (x' + y') = 1$  y
- (ii)  $(xy)(x' + y') = 0$ .

Si esto se cumple, quiere decir que  $(x' + y')$  es el complemento de  $(xy)$ .

(i)

$$\begin{aligned}(xy) + (x' + y') &= [(x' + y') + x] [(x' + y') + y] && \text{por axioma (B4)} \\(xy) + (x' + y') &= [(x' + x) + y'] [(y' + y) + x'] && \text{por axioma (B1) y asociatividad} \\(xy) + (x' + y') &= (1 + y') (1 + x') && \text{por axioma (B7)} \\(xy) + (x' + y') &= 1 * 1 && \text{por ley de acotación} \\(xy) + (x' + y') &= 1.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(xy)(x' + y') &= [x' (xy)] [y' (xy)] && \text{por axioma (B5)} \\(xy)(x' + y') &= [(x' x) y] [(y' y) x] && \text{por axioma (B2) y asociatividad} \\(xy)(x' + y') &= (0 * y) (0 * x) && \text{por axioma (B8)} \\(xy)(x' + y') &= 0 * 0 && \text{por ley de acotación} \\(xy)(x' + y') &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado la Ley de De Morgan  $(xy)' = x' + y'$ , ya que  $(x' + y')$  es el complemento de  $(xy)$ .

(b) Expresar las Leyes de De Morgan en los conjuntos y en el cálculo proposicional, con los símbolos y operaciones que corresponden en cada caso.

Leyes de De Morgan en teoría de conjuntos:

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c. \\(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c.\end{aligned}$$

Leyes de De Morgan en teoría de lógica proposicional:

$$\begin{aligned}\neg(p \vee q) &= \neg p \wedge \neg q. \\ \neg(p \wedge q) &= \neg p \vee \neg q.\end{aligned}$$

### Ejercicio 14.

*Si  $x, y, z, w$  son variables de un Álgebra de Boole, simplificar (hasta su mínima expresión) las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas:*

**(a)**  $x + xy + x(x + y).$

$$\begin{aligned} x + xy + x(x + y) &= x + xy + xx + xy \\ x + xy + x(x + y) &= x + xy + x + xy \\ x + xy + x(x + y) &= x(1 + y) + x(1 + y) \\ x + xy + x(x + y) &= x * 1 + x * 1 \\ x + xy + x(x + y) &= x + x \\ x + xy + x(x + y) &= x. \end{aligned}$$

por axioma (B5)  
por ley de idempotencia  
por axiomas (B6) y (B3)  
por ley de acotación  
por axioma (B6)  
por ley de idempotencia

**(b)**  $x' + [(xx')'].$

$$\begin{aligned} x' + [(xx')'] &= x' + (x' + x) \\ x' + [(xx')'] &= x' + 1 \\ x' + [(xx')'] &= x'. \end{aligned}$$

por Ley de De Morgan  
por (B7)  
por ley de acotación

**(c)**  $x(y + x').$

$$\begin{aligned} x(y + x') &= x(y'x) \\ x(y + x') &= xxy' \\ x(y + x') &= xy'. \end{aligned}$$

por Ley de De Morgan  
por asociatividad  
por ley de idempotencia

**(d)**  $[x(y'y)] + [y(x + x')].$

$$\begin{aligned} [x(y'y)] + [y(x + x')] &= (x * 0) + (y * 1) \\ [x(y'y)] + [y(x + x')] &= 0 + y \\ [x(y'y)] + [y(x + x')] &= y. \end{aligned}$$

por axiomas (B8) y (B7)  
por ley de acotación y axioma (B6)  
por axioma (B5).

**(e)**  $y'xy + y'x + ywx' + yww.$

$$\begin{aligned} y'xy + y'x + ywx' + yww &= y'yx + y'x + ywx' + yw \\ y'xy + y'x + ywx' + yww &= 0 * x + y'x + ywx' + yw \\ y'xy + y'x + ywx' + yww &= 0 + y'x + ywx' + yw \\ y'xy + y'x + ywx' + yww &= y'x + ywx' + yw \\ y'xy + y'x + ywx' + yww &= y'x + yw(x' + 1) \\ y'xy + y'x + ywx' + yww &= y'x + yw * 1 \end{aligned}$$

por asociatividad y ley de  
idempotencia  
por axioma (B8)  
por ley de acotación  
por axiomas (B6) y (B3)  
por ley de acotación

$$y'xy + y'x + ywx' + yww = y'x + yw.$$

por axioma (B6)

(f)  $[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')']$ .

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = [(x'y') + z'] [z' + (x'yz)] \quad \text{por Leyes de De Morgan e involución}$$

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = (z' + x'y') (z' + x'yz) \quad \text{por axioma (B1)}$$

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + (x'y') (x'yz) \quad \text{por axioma (B4)}$$

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + [(x'x') (y'y) z] \quad \text{por axioma (B2)}$$

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + (x' * 0 * z) \quad \text{por ley de idempotencia y por axioma (B8)}$$

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z' + 0 \quad \text{por ley de acotación}$$

$$[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] = z'. \quad \text{por axioma (B5)}$$

### Ejercicio 15.

Si  $x, y, z$  son variables de un Álgebra de Boole, demostrar que:

(a)  $x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = z + xy.$

$$x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = x'z(y' + y) + xy'z + xy(z + z')$$

$$x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = x'z * 1 + xy'z + xy * 1$$

$$x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = x'z + xy'z + xy$$

$$x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = z(x' + xy') + xy.$$

(b)  $x + (y + 0)' + y'z = x + y'.$

$$x + (y + 0)' + y'z = x + y' + y'z$$

$$x + (y + 0)' + y'z = x + y'(1 + z)$$

$$x + (y + 0)' + y'z = x + y' * 1$$

$$x + (y + 0)' + y'z = x + y'.$$

(c)  $x + y' + (xy + 0)' = I.$

$$x + y' + (xy + 0)' = x + y' + (xy + 0)'$$

$$x + y' + (xy + 0)' = x + y' + (xy)'$$

$$x + y' + (xy + 0)' = x + y' + x' + y'$$

$$x + y' + (xy + 0)' = (x + x') + (y' + y')$$

$$x + y' + (xy + 0)' = 1 + y'$$

$$x + y' + (xy + 0)' = 1.$$

(d)  $x + (y + I)' + xy = x.$

$$x + (y + 1)' + xy = x + y' * 0 + xy$$

$$x + (y + 1)' + xy = x + 0 + xy$$

$$x + (y + 1)' + xy = x + xy$$

$$x + (y + 1)' + xy = x(1 + y)$$

$$x + (y + 1)' + xy = x * 1$$

$$x + (y + 1)' + xy = x.$$

(e)  $[(zx)' zx]' + xy + xy' = I.$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = [(zx) + (zx)'] + x(y + y')$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = [(zx) + (z' + x')] + x * 1$$

$$[(zx)' zx]' + xy + xy' = zx + (z' + x') + x$$

$$\begin{aligned}[(zx)' zx]' + xy + xy' &= (z' + x') + x(1 + z) \\[(zx)' zx]' + xy + xy' &= (z' + x') + x * 1 \\[(zx)' zx]' + xy + xy' &= (z' + x') + x \\[(zx)' zx]' + xy + xy' &= z' + (x' + x) \\[(zx)' zx]' + xy + xy' &= z' + 1 \\[(zx)' zx]' + xy + xy' &= 1.\end{aligned}$$

(f)  $x [(y' + x)' + (y' + y)'] = 0.$

$$\begin{aligned}x [(y' + x)' + (y' + y)'] &= x(yx' + yy') \\x [(y' + x)' + (y' + y)'] &= x(yx' + 0) \\x [(y' + x)' + (y' + y)'] &= xy'x' \\x [(y' + x)' + (y' + y)'] &= xx'y \\x [(y' + x)' + (y' + y)'] &= 0 * y \\x [(y' + x)' + (y' + y)'] &= 0.\end{aligned}$$

### Ejercicio 16.

(a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	F (A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F(A, B, C) = A'B'C' + AB'C' + ABC'$$

(b) Simplificar la expresión hallada.

$$F(A, B, C) = A'B'C' + AB'C' + ABC'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + AB' + AB)C'$$

$$F(A, B, C) = [(A' + A)B' + AB]C'$$

$$F(A, B, C) = (1 * B' + AB)C'$$

$$F(A, B, C) = (B' + AB)C'.$$

$$F(A, B, C) = [A'B' + A(B' + B)]C'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + A * 1)C'$$

$$F(A, B, C) = (A'B' + A)C'.$$

### Ejercicio 17.

(a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	D	F (A, B, C, D)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$F(A, B, C, D) = A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + ABC'D + ABCD.$$

(b) Simplificar la expresión hallada.

$$F(A, B, C, D) = A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + ABC'D + ABCD$$

$$F(A, B, C, D) = A'B'D'(C' + C) + A'BC'(D' + D) + A'BC(D' + D) + ABD(C' + C)$$

$$F(A, B, C, D) = A'B'D' * 1 + A'BC' * 1 + A'BC * 1 + ABD * 1$$

$$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'BC' + A'BC + ABD$$

$$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B(C' + C) + ABD$$

$$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B * 1 + ABD$$

$$F(A, B, C, D) = A'B'D' + A'B + ABD$$

$$F(A, B, C, D) = A'(B'D' + B) + ABD.$$

$$F(A, B, C, D) = A'B'D' + B(A' + AD).$$

### Ejercicio 18.

Sea  $f: B_1 \rightarrow B_2$  un isomorfismo de álgebras booleanas. Si se llama  $0_1$  y  $0_2$  al 0 de  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente, y  $1_1$  y  $1_2$  al 1 de  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente, demostrar que  $f(0_1) = 0_2$  y  $f(1_1) = 1_2$ .

Para cualquier elemento  $b$  de  $B_1$ ,  $b + 0_1 = b$ . Como  $f$  es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que  $f(b + 0_1) = f(b) + f(0_1)$ . Pero, debido a que  $0_2$  es el elemento identidad aditivo en  $B_2$ ,  $f(b + 0_1) = f(b) + 0_2 = f(b)$ , lo que implica que  $f(0_1) = 0_2$ . Por lo tanto, queda demostrado que  $f(0_1) = 0_2$ .

Para cualquier elemento  $b$  de  $B_1$ ,  $b * 1_1 = b$ . Como  $f$  es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que  $f(b * 1_1) = f(b) * f(1_1)$ . Pero, debido a que  $1_2$  es el elemento identidad multiplicativo en  $B_2$ ,  $f(b * 1_1) = f(b) * 1_2 = f(b)$ , lo que implica que  $f(1_1) = 1_2$ . Por lo tanto, queda demostrado que  $f(1_1) = 1_2$ .

## Ejercicio 19.

(a) Hallar un isomorfismo entre  $\Omega = \{B^2, \vee, \wedge, ', (0, 0), (1, 1)\}$  y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.

Para encontrar un isomorfismo entre  $\Omega$  y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva  $f$  que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto  $A = \{a, b\}$  y se considera el álgebra de Boole de partes de  $A$ , denotada por  $P(A)$ . Entonces, se tiene:

- $B^2$  representa el conjunto de subconjuntos de  $A$ , es decir,  $B^2 = P(A)$ .
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto  $A$  se corresponde con su complemento relativo en  $A$ , es decir,  $A' = \{x \in A : x \notin A\}$ .
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función  $f: \Omega \rightarrow P(A)$  como sigue:

- Para cada par ordenado  $(0, 0)$  en  $B^2$ ,  $f$  lo mapea al conjunto vacío  $\emptyset$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 1)$  en  $B^2$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $A$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(0, 1)$  en  $B^2$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{b\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 0)$  en  $B^2$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{a\}$  en  $P(A)$ .

Se puede verificar que  $f$  es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función  $f$  es inyectiva porque cada par ordenado en  $\Omega$  se mapea a un único subconjunto en  $P(A)$  y  $f$  es suryectiva porque todo subconjunto de  $A$  se puede representar como un par ordenado en  $\Omega$ .
- La función  $f$  preserva la disyunción, ya que  $f((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) = f((1, 1))$  si y sólo si  $(x_1, y_1) = (1, 1)$  o  $(x_2, y_2) = (1, 1)$ , lo que implica que  $f((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) = A$  si y sólo si  $f((x_1, y_1)) = A$  o  $f((x_2, y_2)) = A$ .
- La función  $f$  preserva la conjunción, ya que  $f((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) = f((1, 1))$  si y sólo si  $(x_1, y_1) = (1, 1)$  y  $(x_2, y_2) = (1, 1)$ , lo que implica que  $f((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) = A$  si y sólo si  $f((x_1, y_1)) = A$  y  $f((x_2, y_2)) = A$ .
- La función  $f$  preserva el complemento, ya que  $f((x, y)') = f((1, 1))$  si y sólo si  $(x, y)' = (1, 1)$ , lo que implica que  $f((x, y)') = A$  si y sólo si  $f((x, y)) = \emptyset$ .
- La función  $f$  preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ , entonces  $f((x_1, y_1)) \subseteq f((x_2, y_2))$ .

Por lo tanto,  $f$  es un isomorfismo entre  $\Omega$  y el álgebra de Boole de partes de  $A$  ( $P(A)$ ).

Diagrama de Hasse de  $\Omega$ :

$(1, 1)$   
 $(1, 0) (0, 1)$   
 $(0, 0)$

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

A  
 $\{a\}$   $\{b\}$   
 $\emptyset$

**(b)** Hallar un isomorfismo entre  $\Omega = \{B^3, \vee, \wedge, ', (0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$  y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.

Para encontrar un isomorfismo entre  $\Omega$  y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva  $f$  que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto  $A = \{a, b, c\}$  y se considera el álgebra de Boole de partes de  $A$ , denotada por  $P(A)$ . Entonces, se tiene:

- $B^3$  representa el conjunto de subconjuntos de  $A$ , es decir,  $B^3 = P(A)$ .
- La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
- El complemento de un subconjunto  $A$  se corresponde con su complemento relativo en  $A$ , es decir,  $A' = \{x \in A : x \notin A\}$ .
- La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función  $f: \Omega \rightarrow P(A)$  como sigue:

- Para cada par ordenado  $(0, 0, 0)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto vacío  $\emptyset$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 1, 1)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $A$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(0, 0, 1)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{c\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(0, 1, 0)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{b\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 0, 0)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{a\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(0, 1, 1)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{b, c\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 0, 1)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{a, c\}$  en  $P(A)$ .
- Para cada par ordenado  $(1, 1, 0)$  en  $B^3$ ,  $f$  lo mapea al conjunto  $\{a, b\}$  en  $P(A)$ .

Se puede verificar que  $f$  es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

- La función  $f$  es inyectiva porque cada par ordenado en  $\Omega$  se mapea a un único subconjunto en  $P(A)$  y  $f$  es suryectiva porque todo subconjunto de  $A$  se puede representar como un par ordenado en  $\Omega$ .

- La función f preserva la disyunción, ya que  $f((x_1, y_1, z_1) \vee (x_2, y_2, z_2)) = f((1, 1, 1))$  si y sólo si  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$  o  $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1)$ , lo que implica que  $f((x_1, y_1, z_1) \vee (x_2, y_2, z_2)) = A$  si y sólo si  $f((x_1, y_1, z_1)) = A$  o  $f((x_2, y_2, z_2)) = A$ .
- La función f preserva la conjunción, ya que  $f((x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2)) = f((1, 1, 1))$  si y sólo si  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$  y  $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1)$ , lo que implica que  $f((x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2)) = A$  si y sólo si  $f((x_1, y_1, z_1)) = A$  y  $f((x_2, y_2, z_2)) = A$ .
- La función f preserva el complemento, ya que  $f((x, y, z)') = f((1, 1, 1))$  si y sólo si  $(x, y, z)' = (1, 1, 1)$ , lo que implica que  $f((x, y, z)') = A$  si y sólo si  $f((x, y, z)) = \emptyset$ .
- La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si  $(x_1, y_1, z_1) \leq (x_2, y_2, z_2)$ , entonces  $f((x_1, y_1, z_1)) \subseteq f((x_2, y_2, z_2))$ .

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre  $\Omega$  y el álgebra de Boole de partes de A ( $P(A)$ ).

Diagrama de Hasse de  $\Omega$ :

(1, 1, 1)  
(1, 1, 0) (1, 0, 1) (0, 1, 1)  
(1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1)  
(0, 0, 0)

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

A  
{a, b} {a, c} {b, c}  
{a} {b} {c}  
 $\emptyset$