

Trabajo Práctico N° 1: Geometría.

Ejercicio 1.

Representar en el plano los siguientes puntos y decir a qué cuadrante pertenecen: $P (2, -1)$, $Q (3, \frac{1}{2})$, $R (-2, -4)$, $S (0, -2)$, $T (-3, 0)$.

Gráfico.

P pertenece al 4to. cuadrante.

Q pertenece al 1er. cuadrante.

R pertenece al 3er. cuadrante.

S no pertenece a ningún cuadrante.

T no pertenece a ningún cuadrante.

Ejercicio 2.

Representar en el plano los puntos abscisa negativa y ordenada mayor que 2.

Gráfico.

Ejercicio 3.

Representar en el plano los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 1 \leq x < 2 \wedge y \geq 0\}$.

Gráfico.

(b) $B = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge xy < 0\}$.

Gráfico.

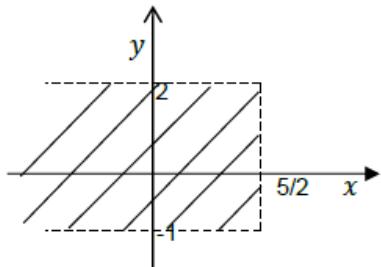
(c) $C = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x = y\}$.

Gráfico.

Ejercicio 4.

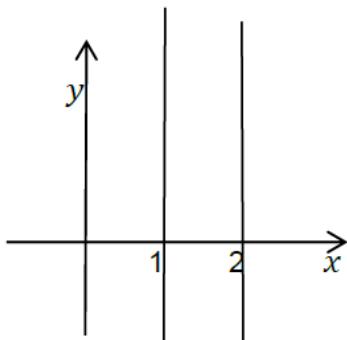
Definir, mediante condiciones, los siguientes subconjuntos del plano:

(a)



$$A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x < \frac{5}{2} \wedge -1 < y < 2\}.$$

(b)



$$B = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x=1 \vee x=2)\}.$$

Ejercicio 5.

Calcular la distancia entre $P_1 (3, 2)$ y $P_2 (-1, 4)$.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (4 - 2)^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-4)^2 + 2^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{16 + 4}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{20}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{4 * 5}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{4} \sqrt{5}$$

$$d(P_1, P_2) = 2 \sqrt{5}.$$

Ejercicio 6.

Representar y hallar el perímetro del triángulo de vértices A (-1,2), B (4,5) y C (5,0).

Gráfico.

$$\text{Perímetro} = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A)$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{(4+1)^2 + (5-2)^2} + \sqrt{(5-4)^2 + (0-5)^2} + \sqrt{(-1-5)^2 + (2-0)^2}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{5^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + (-5)^2} + \sqrt{(-6)^2 + 2^2}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{25+9} + \sqrt{1+25} + \sqrt{36+4}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{34} + \sqrt{26} + \sqrt{40}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{2 * 17} + \sqrt{2 * 13} + \sqrt{2 * 20}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{2} \sqrt{17} + \sqrt{2} \sqrt{13} + \sqrt{2} \sqrt{20}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{2} (\sqrt{17} + \sqrt{13} + \sqrt{20}).$$

Ejercicio 7.

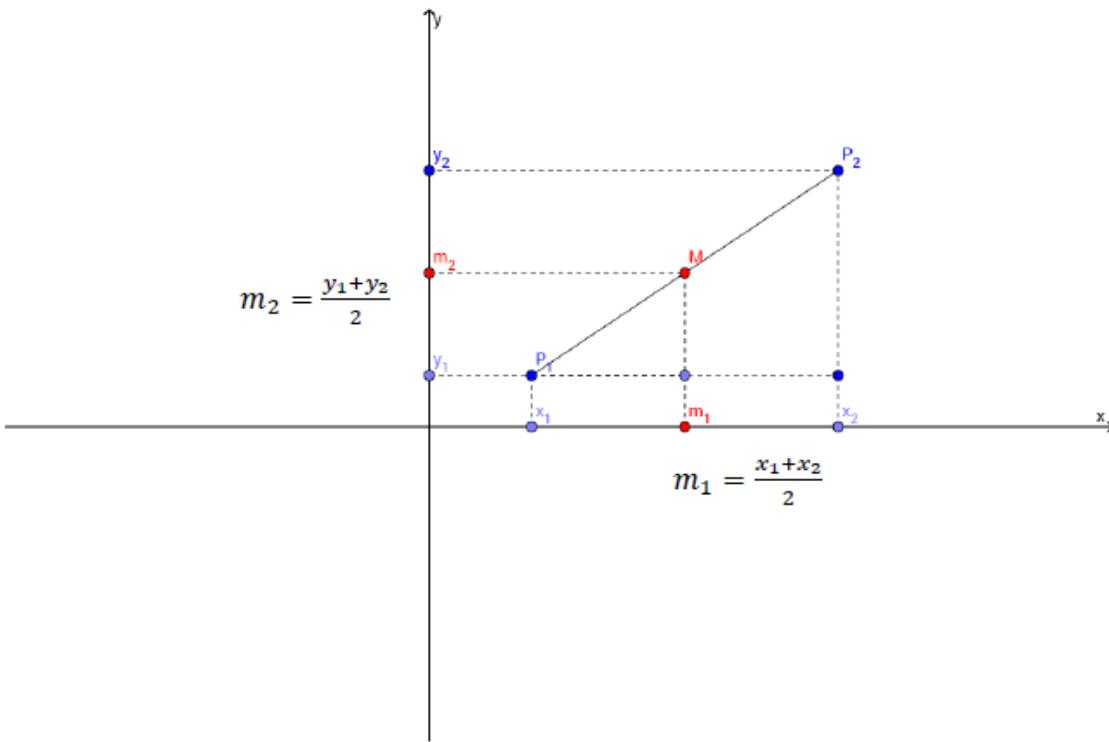
Determinar un punto sobre el eje y que equidiste de (2,5) y (3,3).

$$\begin{aligned} d((0, y), (2, 5)) &= d((0, y), (3, 3)) \\ \sqrt{(2 - 0)^2 + (5 - y)^2} &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (3 - y)^2} \\ \sqrt{2^2 + (5 - y)^2} &= \sqrt{3^2 + (3 - y)^2} \\ \sqrt{4 + (5 - y)^2} &= \sqrt{9 + (3 - y)^2} \\ 4 + (5 - y)^2 &= 9 + (3 - y)^2 \\ 4 + 25 - 10y + y^2 &= 9 + 9 - 6y + y^2 \\ 29 - 10y &= 18 - 6y \\ -6y + 10y &= 29 - 18 \\ 4y &= 11 \\ y &= \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto sobre el eje y que equidista de (2, 5) y (3, 3) es $(0, \frac{11}{4})$.

Ejercicio 8.

El punto medio entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dado por el punto $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ como se muestra en el gráfico:



Determinar las coordenadas del punto medio entre $A (-3, 8)$ y $B (5, -4)$.

$$\begin{aligned} M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) &= M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{8-4}{2}\right) \\ M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) &= M\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) \\ M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) &= M(1, 2). \end{aligned}$$

Ejercicio 9.

Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos dados:

(a) (2, 5) y (4, 3).

$$\begin{cases} 5 = 2m + b \Leftrightarrow b = 5 - 2m \\ 3 = 4m + b \Leftrightarrow b = 3 - 4m \end{cases}$$

$$5 - 2m = 3 - 4m$$

$$-2m + 4m = 3 - 5$$

$$2m = -2$$

$$m = \frac{-2}{2}$$

$$m = -1.$$

$$b = 5 - 2(-1) = 5 + 2 = 7.$$

$$b = 3 - 4(-1) = 3 + 4 = 7.$$

$$y = -x + 7. \quad \text{Ecuación explícita de la recta.}$$

(b) (-1, 3) y (-2, -3).

$$\begin{cases} 3 = -m + b \Leftrightarrow b = 3 + m \\ -3 = -2m + b \Leftrightarrow b = -3 + 2m \end{cases}$$

$$3 + m = -3 + 2m$$

$$2m - m = 3 + 3$$

$$m = 6.$$

$$b = 3 + 6 = 9.$$

$$b = -3 + 2 * 6 = 9.$$

$$y = 6x + 9. \quad \text{Ecuación explícita de la recta.}$$

(c) $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(-\frac{1}{2}, -2)$.

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}m + b \Leftrightarrow b = \frac{-1}{2}m \\ -2 = \frac{-1}{2}m + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{1}{2}m \end{cases}$$

$$\frac{-1}{2}m = -2 + \frac{1}{2}m$$

$$\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = 2$$

$$m = 2.$$

$$b = \frac{-1}{2} * 2 = -1.$$

$$b = -2 + \frac{1}{2} * 2 = -2 + 1 = -1.$$

$y = 2x - 1$. Ecuación explícita de la recta.

Ejercicio 10.

Determinar el valor de k para el cual los puntos $(-1, 2)$, $(3, 1)$ y $(2, -k+1)$ están alineados.

$$\begin{aligned} \frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ \frac{y-2}{x-(-1)} &= \frac{3-(-1)}{2-1} \\ \frac{y-2}{x+1} &= \frac{1}{4} \\ y-2 &= \frac{1}{4}(x+1) \\ y-2 &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \\ y &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + 2 \\ y &= \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -k+1 &= \frac{1}{4} * 2 + \frac{9}{4} \\ -k+1 &= \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \\ k &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{9}{4} \\ k &= \frac{-7}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de k para el cual los puntos $(-1, 2)$, $(3, 1)$ y $(2, -k+1)$ están alineados es $\frac{-7}{4}$.

Ejercicio 11.

Hallar la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas y representarlas gráficamente.

(a) $L: 5x + y - 3 = 0$.

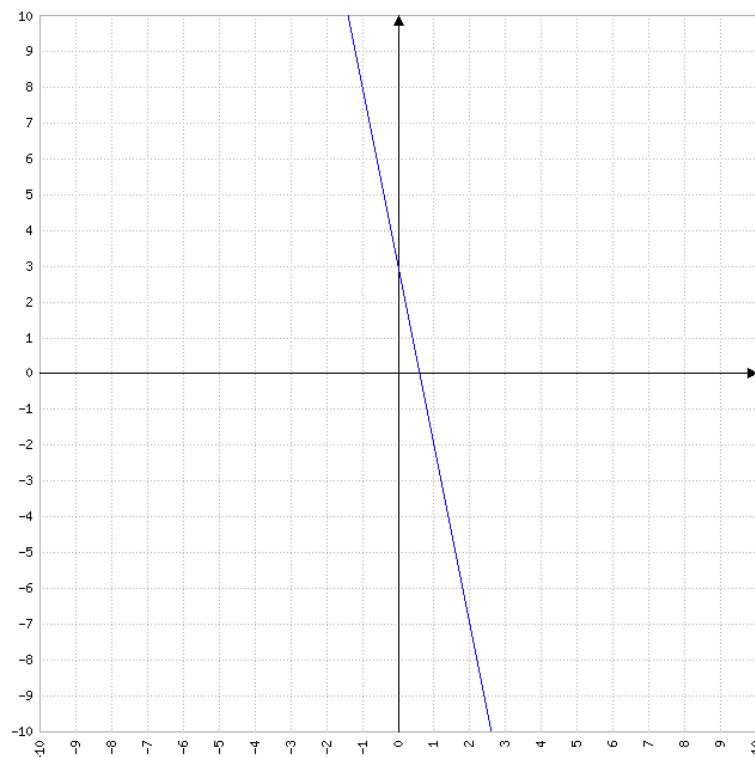
$$y = -5x + 3.$$

$$m = -5.$$

Pendiente.

$$b = 3.$$

Ordenada al origen.



(b) $S: 4x - 3y = 6$.

$$3y = 4x - 6$$

$$y = \frac{4x - 6}{3}$$

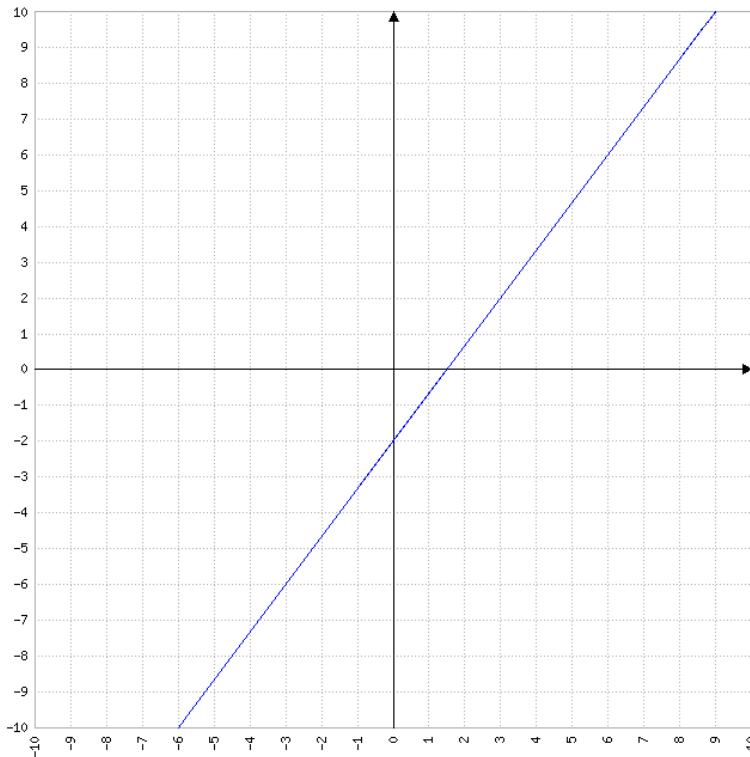
$$y = \frac{4}{3}x - 2.$$

$$m = \frac{4}{3}.$$

Pendiente.

$$b = -2.$$

Ordenada al origen.



(c) $M: 3x - 6 = 0.$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

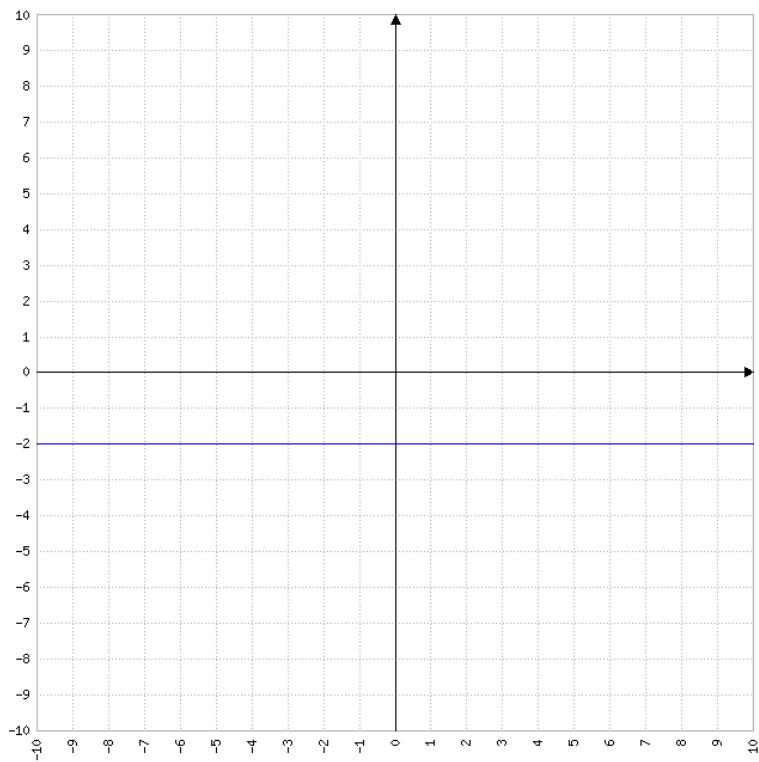
$$x = 2.$$

(d) $H: y + 2 = 0.$

$$y = -2.$$

$$\begin{aligned} m &= 0. \\ b &= -2. \end{aligned}$$

Pendiente.
Ordenada al origen.



Ejercicio 12.

Escribir la ecuación explícita de la recta que:

- (a) tiene pendiente -2 y pasa por el origen de coordenadas.

$$y = -2x. \quad \text{Ecuación explícita de la recta.}$$

- (b) tiene pendiente -2 y pasa por $(-2, -3)$.

$$-3 = -2(-2) + b$$

$$-3 = 4 + b$$

$$b = -3 - 4$$

$$b = -7.$$

$$y = -2x - 7. \quad \text{Ecuación explícita de la recta.}$$

Ejercicio 13.

(a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que tiene pendiente $\frac{3}{5}$ y pasa por P (12, 5).

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{3}{5} * 12 + b \\ 5 &= 9 + b \\ b &= 5 - 9 \\ b &= -4. \end{aligned}$$

$$y = \frac{3}{5}x - 4. \quad \text{Ecuación explícita de la recta L.}$$

(b) Hallar una paralela a L que pase por Q (3, 12).

$$\begin{aligned} 12 &= \frac{3}{5} * 3 + b \\ 12 &= \frac{9}{5} + b \\ b &= 12 - \frac{9}{5} \\ b &= \frac{51}{5}. \end{aligned}$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{51}{5}. \quad \text{Ecuación explícita de recta paralela a L.}$$

(c) Hallar una perpendicular a L que pase por T (3, 6).

$$\begin{aligned} 6 &= -\frac{5}{3} * 3 + b \\ 6 &= -5 + b \\ b &= 6 + 5 \\ b &= 11. \end{aligned}$$

$$y = -\frac{5}{3}x + 11. \quad \text{Ecuación explícita de recta perpendicular a L.}$$

Ejercicio 14.

(a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que tiene pendiente $\frac{-5}{12}$ y pasa por P (9, 6).

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{-5}{12} * 9 + b \\ 6 &= \frac{-15}{4} + b \\ b &= 6 + \frac{15}{4} \\ b &= \frac{39}{4}. \end{aligned}$$

$$y = \frac{-5}{12} x + \frac{39}{4}. \quad \text{Ecuación explícita de la recta L.}$$

(b) Hallar una paralela a L que pase por Q (-5, 1).

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-5}{12} (-5) + b \\ 1 &= \frac{25}{12} + b \\ b &= 1 - \frac{25}{12} \\ b &= \frac{-13}{12}. \end{aligned}$$

$$y = \frac{-5}{12} x - \frac{13}{12}. \quad \text{Ecuación explícita de recta paralela a L.}$$

(c) Hallar una perpendicular a L que pase por T (-8, 4).

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{12}{5} (-8) + b \\ 4 &= \frac{-96}{5} + b \\ b &= 4 - \frac{96}{5} \\ b &= \frac{-76}{5}. \end{aligned}$$

$$y = \frac{12}{5} x - \frac{76}{5}. \quad \text{Ecuación explícita de recta perpendicular a L.}$$

Ejercicio 15.

(a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que pasa por los puntos P (-1, 5) y Q (5, 9).

$$\begin{aligned} \frac{y-5}{x-(-1)} &= \frac{5-9}{-1-5} \\ \frac{y-5}{x+1} &= \frac{-4}{-6} \\ \frac{y-5}{x+1} &= \frac{2}{3} \\ y - 5 &= \frac{2}{3}(x + 1) \\ y - 5 &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 5 \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Ecuación explícita de la recta L.

(b) Hallar una perpendicular a L que pase por S (-8, 5).

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{-3}{2}(-8) + b \\ 5 &= 12 + b \\ b &= 5 - 12 \\ b &= -7. \end{aligned}$$

$$y = \frac{-3}{2}x - 7.$$

Ecuación explícita de recta perpendicular a L.

(c) Hallar una paralela a L que pase por Q (-9, 15).

$$\begin{aligned} 15 &= \frac{2}{3}(-9) + b \\ 15 &= -6 + b \\ b &= 15 + 6 \\ b &= 21. \end{aligned}$$

$$y = \frac{2}{3}x + 21.$$

Ecuación explícita de recta paralela a L.

Ejercicio 16.

(a) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por $P(-1, \frac{1}{3})$ y es paralela a la recta de ecuación $-x + 2y - 1 = 0$.

$$-x + 2y - 1 = 0$$

$$2y = x + 1$$

$$y = \frac{x+1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}(-1) + b$$

$$\frac{1}{3} = \frac{-1}{2} + b$$

$$b = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$$

Ecuación explícita de la recta.

(b) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por $P(2, \frac{-1}{2})$ y es perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$.

$$3x - 2y + 1 = 0$$

$$2y = 3x + 1$$

$$y = \frac{3x+1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{3} * 2 + b$$

$$\frac{-1}{2} = \frac{-4}{3} + b$$

$$b = \frac{-1}{2} + \frac{4}{3}$$

$$b = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{6}$$

Ecuación explícita de la recta.

Ejercicio 17.

Hallar las pendientes de las siguientes rectas y expresarlas por sus ecuaciones explícitas. Para cada una de ellas, hallar una recta paralela y una perpendicular que pasen por el origen:

(a) $L: 3x - 2y + 6 = 0$.

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$2y = 3x + 6$$

$$y = \frac{3x+6}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 3.$$

Ecuación explícita de la recta con pendiente $m = \frac{3}{2}$.

$$y = \frac{3}{2}x.$$

Ecuación explícita de recta paralela.

$$y = \frac{-2}{3}x.$$

Ecuación explícita de recta perpendicular.

(b) $S: 2x + y = 6$.

$$2x + y = 6$$

$$y = -2x + 6.$$

Ecuación explícita de la recta con pendiente $m = -2$.

$$y = -2x.$$

Ecuación explícita de recta paralela que pasa por el origen.

$$y = \frac{-1}{2}x.$$

Ecuación explícita de recta perpendicular que pasa por el origen.

(c) $T: 6y - x - 2 = 0$.

$$6y - x - 2 = 0$$

$$6y = x + 2$$

$$y = \frac{x+2}{6}$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}.$$

Ecuación explícita de la recta con pendiente $m = \frac{1}{6}$.

$$y = \frac{1}{6}x.$$

Ecuación explícita de recta paralela que pasa por el origen.

$$y = -6x.$$

Ecuación explícita de recta perpendicular que pasa por el origen.

Ejercicio 18.

Decidir si los siguientes pares de rectas son transversales, paralelas o coincidentes y determinar, cuando corresponda, las coordenadas del punto en el que se cortan.

(a) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -6x + 3y = -6 \end{cases}$

$$y = 2x + 3.$$

$$3y = 6x - 6$$

$$y = \frac{6x - 6}{3}$$

$$y = 2x - 2.$$

Por lo tanto, estas rectas son paralelas, ya que tienen la misma pendiente ($m = 2$).

(b) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$$y = -2x - 1.$$

$$y = x - 2.$$

$$-2x - 1 = x - 2$$

$$x + 2x = -1 + 2$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

$$y = -2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} - 1 = \frac{-5}{3}.$$

$$y = \frac{1}{3} - 2 = \frac{-5}{3}.$$

Por lo tanto, estas rectas son transversales, ya que se cortan en un punto pero sin formar un ángulo recto de 90° , y las coordenadas del punto en el que se cortan son $(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3})$.

(c) $\begin{cases} 4x - 8y = -12 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

$$8y = 4x + 12$$

$$y = \frac{4x + 12}{8}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

$$2y = x + 3$$

$$y = \frac{x+3}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, estas rectas son paralelas, ya que tienen la misma pendiente ($m = \frac{1}{2}$).

Ejercicio 19.

(a) Escribir la ecuación estándar de la circunferencia de centro $C (-3, 4)$ y radio $3^{\frac{1}{2}}$. Graficar.

$$[x - (-3)]^2 + (y - 4)^2 = (3^{\frac{1}{2}})^2$$
$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 3. \quad \text{Ecuación estándar de la circunferencia.}$$

Gráfico.

(b) Escribir la ecuación estándar de la circunferencia de centro $C (-2, 5)$ y que pasa por el punto de coordenadas $(1, 2)$. Graficar.

$$[x - (-2)]^2 + (y - 5)^2 = r^2$$
$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = r^2.$$

$$r^2 = (1 + 2)^2 + (2 - 5)^2$$
$$r^2 = 3^2 + (-3)^2$$
$$r^2 = 9 + 9$$
$$r^2 = 18.$$

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 18. \quad \text{Ecuación estándar de la circunferencia.}$$

Gráfico.

Ejercicio 20.

Hallar las ecuaciones estándar de las siguientes circunferencias con centro P y que pasa por Q, y con centro Q que pasa por P:

(a) P (2, 5) y Q (4, 3).

Con centro P y que pasa por Q:

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = r^2.$$

$$r^2 = (4 - 2)^2 + (3 - 5)^2$$

$$r^2 = 2^2 + (-2)^2$$

$$r^2 = 4 + 4$$

$$r^2 = 8.$$

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 8. \quad \text{Ecuación estándar de la circunferencia.}$$

Con centro Q y que pasa por P:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = r^2.$$

$$r^2 = (2 - 4)^2 + (5 - 3)^2$$

$$r^2 = (-2)^2 + 2^2$$

$$r^2 = 4 + 4$$

$$r^2 = 8.$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8. \quad \text{Ecuación estándar de la circunferencia.}$$

(b) P (-1, 3) y Q (-2, -3).

Con centro P y que pasa por Q:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2.$$

$$r^2 = (-2 + 1)^2 + (-3 - 3)^2$$

$$r^2 = (-1)^2 + (-6)^2$$

$$r^2 = 1 + 36$$

$$r^2 = 37.$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 37. \quad \text{Ecuación estándar de la circunferencia.}$$

Con centro Q y que pasa por P:

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2.$$

$$r^2 = (-1 + 2)^2 + (3 + 3)^2$$

$$\begin{aligned}r^2 &= 1^2 + 6^2 \\r^2 &= 1 + 36 \\r^2 &= 37.\end{aligned}$$

$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 37.$ Ecuación estándar de la circunferencia.

(c) $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $Q\left(-\frac{1}{2}, -2\right).$

Con centro P y que pasa por Q:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = r^2.$$

$$\begin{aligned}r^2 &= \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 \\r^2 &= (-1)^2 + 4 \\r^2 &= 1 + 4 \\r^2 &= 5.\end{aligned}$$

$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 5.$ Ecuación estándar de la circunferencia.

Con centro Q y que pasa por P:

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = r^2.$$

$$\begin{aligned}r^2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (0 + 2)^2 \\r^2 &= 1^2 + 2^2 \\r^2 &= 1 + 4 \\r^2 &= 5.\end{aligned}$$

$(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = 5.$ Ecuación estándar de la circunferencia.

Ejercicio 21.

Analizar si las siguientes ecuaciones corresponden o no a una circunferencia, indicando, en caso afirmativo, los elementos de la misma y graficar:

(a) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$.

$$\begin{aligned}2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 &= 0 \\2(x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4) &= 0 \\x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 &= \frac{0}{2} \\x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 &= 0 \\x^2 + y^2 + 2x - 4y &= 4 \\(x + 1)^2 + (y - 2)^2 &= 4 + 1^2 + (-2)^2 \\(x + 1)^2 + (y - 2)^2 &= 4 + 1 + 4 \\(x + 1)^2 + (y - 2)^2 &= 9.\end{aligned}$$

Centro: C (-1, 2).

Radio: r= 3.

Gráfico.

(b) $x^2 + y^2 - 2x = 1$.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x &= 1 \\(x - 1)^2 + y^2 &= 1 + (-1)^2 \\(x - 1)^2 + y^2 &= 1 + 1 \\(x - 1)^2 + y^2 &= 2.\end{aligned}$$

Centro: C (1, 0).

Radio: r= $\sqrt{2}$.

Gráfico.

(c) $3x^2 + 3y^2 + 9x - 3y + 21 = 0$.

$$\begin{aligned}3x^2 + 3y^2 + 9x - 3y + 21 &= 0 \\3(x^2 + y^2 + 3x - y + 7) &= 0 \\x^2 + y^2 + 3x - y + 7 &= \frac{0}{3} \\x^2 + y^2 + 3x - y + 7 &= 0 \\x^2 + y^2 + 3x - y &= -7 \\(x + \frac{3}{2})^2 + (y - 1)^2 &= -7 + (\frac{3}{2})^2 + (-1)^2 \\(x + \frac{3}{2})^2 + (y - 1)^2 &= -7 + \frac{9}{4} + 1\end{aligned}$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{-3}{2}.$$

Por lo tanto, esta ecuación no corresponde a una circunferencia.

(d) $x^2 + y^2 + 3x - 5y - \frac{1}{2} = 0.$

$$x^2 + y^2 + 3x - 5y - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 5y = \frac{1}{2}$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{2} + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{-5}{2})^2$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = 9.$$

Centro: C $(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}).$

Radio: r= 3.

Gráfico.

Ejercicio 22.

Llevar la ecuación $6x^2 + 6y^2 - 12x + 12y - 6 = 0$ a la forma estándar e indicar sus elementos. Graficar.

$$6(x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = \frac{0}{6}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 1$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 + (-1)^2 + 1^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 + 1 + 1$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 3. \quad \text{Ecuación estándar de la circunferencia.}$$

Centro: C (1, -1).

Radio: r = $\sqrt{3}$.

Gráfico.

Ejercicio 23.

(a) Hallar la intersección de la circunferencia del ejercicio anterior con el eje x.

$$(0 - 1)^2 + (y + 1)^2 = 3$$

$$(-1)^2 + (y + 1)^2 = 3$$

$$1 + (y + 1)^2 = 3$$

$$(y + 1)^2 = 3 - 1$$

$$(y + 1)^2 = 2$$

$$\sqrt{(y + 1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|y + 1| = \sqrt{2}$$

$$y + 1 = \pm \sqrt{2}$$

$$y = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Por lo tanto, la circunferencia del ejercicio anterior intersecciona con el eje x en los puntos $(0, -1 + \sqrt{2})$ y $(0, -1 - \sqrt{2})$.

(b) Hallar la intersección de dicha circunferencia con el eje y.

$$(x - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 3$$

$$(x - 1)^2 + 1^2 = 3$$

$$(x - 1)^2 + 1 = 3$$

$$(x - 1)^2 = 3 - 1$$

$$(x - 1)^2 = 2$$

$$\sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|x - 1| = \sqrt{2}$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Por lo tanto, dicha circunferencia intersecciona con el eje y en los puntos $(1 + \sqrt{2}, 0)$ y $(1 - \sqrt{2}, 0)$.

(c) Hallar la intersección de dicha circunferencia con la recta de ecuación $y = x - 1$.

$$(x - 1)^2 + (x - 1 + 1)^2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 = 3$$

$$2x^2 - 2x + 1 = 3$$

$$2x^2 - 2x + 1 - 3 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$2(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x^2 - x - 1 = \frac{0}{2}$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1*(-1)}}{2*1}$$

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$y_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Por lo tanto, dicha circunferencia intersecciona con el eje y en los puntos $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ y $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$.

Ejercicio 24.

Escribir la ecuación canónica de las paráolas:

- (a) con foco en (0, 6) y directriz $y + 6 = 0$.

$$(x - 0)^2 = 4 * 6 (y - 0)$$
$$x^2 = 24y.$$

Ecuación estándar de la parábola.

- (b) con vértice en el origen y foco en (-4, 0).

$$(y - 0)^2 = 4 (-4) (x - 0)$$
$$y^2 = -16x.$$

Ecuación estándar de la parábola.

- (c) con vértice en (3, 2) y foco en (5, 2).

$$(y - 2)^2 = 4 * 2 (x - 3)$$
$$(y - 2)^2 = 8 (x - 3).$$

Ecuación estándar de la parábola.

- (d) con vértice en (0, 0) y que contiene a los puntos (2, -3) y (-2, -3).

$$(x - 0)^2 = 4c (y - 0)$$
$$x^2 = 4cy.$$

$$2^2 = 4c (-3)$$
$$4 = -12c$$
$$c = \frac{4}{-12}$$
$$c = \frac{-1}{3}.$$

$$(-2)^2 = 4c (-3)$$
$$4 = -12c$$
$$c = \frac{4}{-12}$$
$$c = \frac{-1}{3}.$$

$$x^2 = 4 \left(\frac{-1}{3}\right) y$$
$$x^2 = \frac{-4}{3} y.$$

Ecuación estándar de la parábola.

Ejercicio 25.

Graficar y dar los elementos de las paráolas definidas por las siguientes ecuaciones:

(a) $3y^2 = 8x$.

Vértice: V (0, 0).

Foco: F ($\frac{2}{3}$, 0).

Directriz: x= $-\frac{2}{3}$.

Gráfico.

(b) $y^2 = -12x$.

Vértice: V (0, 0).

Foco: F (-3, 0).

Directriz: x= 3.

Gráfico.

(c) $x^2 = 4(y + 1)$.

Vértice: V (0, -1).

Foco: F (0, 0).

Directriz: y= -2.

Gráfico.

(d) $(y - 3)^2 = -20(x + 2)$.

Vértice: V (-2, 3).

Foco: F (-7, 3).

Directriz: x= 3.

Gráfico.

Ejercicio 26.

Encontrar la ecuación estándar y los elementos de las paráolas:

(a) $2x^2 + 12x + 8y + 10 = 0$.

$$2x^2 + 12x + 8y + 10 = 0$$

$$2(x^2 + 6x + 4y + 5) = 0$$

$$x^2 + 6x + 4y + 5 = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$$

$$x^2 + 6x = -4y - 5$$

$$(x + 3)^2 = -4y - 5 + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = -4y - 5 + 9$$

$$(x + 3)^2 = -4y + 4$$

$$(x + 3)^2 = -4(y - 1)$$

Ecuación estándar de la parábola.

Vértice: V (-3, 1).

Foco: F (-3, 2).

Directriz: y = 0.

(b) $3y^2 + 18y - 24x = 93$.

$$3y^2 + 18y - 24x = 93$$

$$3(y^2 + 6y - 8x) = 93$$

$$y^2 + 6y - 8x = \frac{93}{3}$$

$$y^2 + 6y - 8x = 31$$

$$y^2 + 6y = 8x + 31$$

$$(y + 3)^2 = 8x + 31 + 3^2$$

$$(y + 3)^2 = 8x + 31 + 9$$

$$(y + 3)^2 = 8x + 40$$

$$(y + 3)^2 = 8(x + 5)$$

Ecuación estándar de la parábola.

Vértice: V (-5, -3).

Foco: F (-3, -3).

Directriz: x = -7.

(c) $y = x^2 + 6x + 10$.

$$y = x^2 + 6x + 10$$

$$x^2 + 6x = y - 10$$

$$(x + 3)^2 = y - 10$$

Ecuación estándar de la parábola.

Vértice: V (-3, 10).

Foco: $F(-3, \frac{41}{4})$.

Directriz: $y = \frac{39}{4}$.

Ejercicio 27.

(a) Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice $V(1,3)$, eje focal paralelo al eje x y que pasa por el punto $P(6, 13)$. Graficar y dar los restantes elementos.

$$(y - 3)^2 = 4c(x - 1).$$

$$(13 - 3)^2 = 4c(6 - 1)$$

$$10^2 = 4c * 5$$

$$100 = 20c$$

$$c = \frac{100}{20}$$

$$c = 5.$$

$$(y - 3)^2 = 4 * 5(x - 1)$$

$$(y - 3)^2 = 20(x - 1).$$

Ecuación estándar de la parábola.

Foco: $F(6, 3)$.

Directriz: $x = -4$.

Gráfico.

(b) Hallar una ecuación de una recta vertical que corte a la parábola. Dar el punto de corte.

$$x = 6.$$

$$(y - 3)^2 = 20(6 - 1)$$

$$(y - 3)^2 = 20 * 5$$

$$(y - 3)^2 = 100$$

$$\sqrt{(y - 3)^2} = \sqrt{100}$$

$$|y - 3| = 10$$

$$y - 3 = \pm 10$$

$$y = 3 \pm 10$$

$$y_1 = 3 + 10 = 13.$$

$$y_2 = 3 - 10 = -7.$$

Por lo tanto, los puntos de corte son $(6, 13)$ y $(6, -7)$.

(c) Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice $V(-5, 1)$, eje focal paralelo al eje y y que pasa por el punto $P(1, 0)$. Graficar y dar los restantes elementos.

$$(x + 5)^2 = 4c(y - 1).$$

$$(1 + 5)^2 = 4c(0 - 1)$$

$$6^2 = 4c (-1)$$

$$36 = -4c$$

$$c = \frac{36}{-4}$$

$$c = -9.$$

$$(x + 5)^2 = 4(-9)(y - 1)$$

$$(x + 5)^2 = -36(y - 1).$$

Ecuación estándar de la parábola.

Foco: F (-5, -8).

Directriz: y= 10.

Gráfico.

(d) Hallar una ecuación de una recta horizontal que corte a la parábola. Dar el punto de corte.

$$y = -8.$$

$$(x + 5)^2 = -36(-8 - 1)$$

$$(x + 5)^2 = -36(-9)$$

$$(x + 5)^2 = 324$$

$$\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{324}$$

$$|x + 5| = 18$$

$$x + 5 = \pm 18$$

$$x = -5 \pm 18$$

$$x_1 = -5 + 18 = 13.$$

$$x_2 = -5 - 18 = -23.$$

Por lo tanto, los puntos de corte son (13, -8) y (-23, -8).

Ejercicio 28.

(a) Hallar las ecuaciones estándar de las paráolas con vértice $V(3, 2)$ y foco $F(7, 2)$, y otra con vértice $V(7, 2)$ y foco $F(3, 2)$.

$$(y - 2)^2 = 16(x - 3). \quad \text{Ecuación estándar de la parábola con } V(3, 2) \text{ y } F(7, 2).$$
$$(y - 2)^2 = -16(x - 7). \quad \text{Ecuación estándar de la parábola con } V(7, 2) \text{ y } F(3, 2).$$

(b) Hallar las ecuaciones estándar de las paráolas con vértice $V(-3, 3)$ y foco $F(-3, -1)$, y otra con vértice $V(-3, -1)$ y foco $F(-3, 3)$.

$$(x + 3)^2 = -16(y - 3). \quad \text{Ecuación estándar de la parábola con } V(-3, 3) \text{ y } F(-3, -1).$$
$$(x + 3)^2 = 16(y + 1). \quad \text{Ecuación estándar de la parábola con } V(-3, -1) \text{ y } F(-3, 3).$$