

## Trabajo Práctico N° 5.3: Morfismos.

### Ejercicio 1.

Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y, en caso afirmativo, hallar núcleo e imagen:

(a)  $f: G \rightarrow F$  dada por  $f(x) = 2^x$  y siendo los grupos  $G = (\mathbb{R}, +)$  los reales con la suma usual,  $F = (\mathbb{R}_0, *)$  los reales sin el 0 con el producto usual.

Condición de homomorfismo:  $f$  es un homomorfismo si se cumple que, para todo  $x, y \in G$ ,  $f(x + y) = f(x)f(y)$ . En particular,  $f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x 2^y = f(x)f(y)$ , por lo que  $f$  es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de  $f$  está dado por los elementos de  $G$  que se mapean al neutro de  $F$ , el cual es 1, ya que, para cualquier  $a \in F$ ,  $a * 1 = a$ . En particular,  $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$  y, entonces,  $\text{Nu}(f) = \{0\}$ .

Imagen: La imagen de  $f$  está formada por todos los valores que puede tomar  $f(x)$  cuando  $x$  recorre  $G$ . En particular,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R}: y > 0\}$ .

(b)  $f: G \rightarrow F$  dada por  $f(x) = -x$  y siendo los grupos  $G = (\mathbb{Z}, *)$  los enteros con la operación  $a * b = a + b + ab$ ,  $F = (\mathbb{Z}, \circ)$  los enteros con la operación  $a \circ b = a + b - ab$ .

Condición de homomorfismo:  $f$  es un homomorfismo si se cumple que, para todo  $x, y \in G$ ,  $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ . En particular,  $f(x * y) = f(x + y + xy) = -(x + y + xy) = -x - y - xy \Leftrightarrow f(x) \circ f(y) = (-x) \circ (-y) = -x - y - (-x) (-y) = -x - y - xy$ , por lo que  $f$  es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de  $f$  está dado por los elementos de  $G$  que se mapean al neutro de  $F$ , el cual es 0, ya que, para cualquier  $a \in F$ ,  $a \circ 0 = a + 0 - a * 0 = a + 0 - 0 = a$ . En particular,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{-1} \Leftrightarrow x = 0$  y, entonces,  $\text{Nu}(f) = \{0\}$ .

Imagen: La imagen de  $f$  está formada por todos los valores que puede tomar  $f(x)$  cuando  $x$  recorre  $G$ . En particular,  $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$ .

(c)  $f: (P(A), \cup) \rightarrow (P(A), \cap)$  dada por  $f(X) = X^c$  (siendo  $A$  cualquier conjunto,  $P(A)$  indica el conjunto de partes de  $A$  y  $X^c$  el complemento de un conjunto).

Condición de homomorfismo:  $f$  es un homomorfismo si se cumple que, para todo  $X, Y \in (P(A), \cup)$ ,  $f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$ . En particular,  $f(X \cup Y) = (X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c = f(X) \cap f(Y)$ , por lo que  $f$  es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de  $f$  está dado por los conjuntos de  $(P(A), \cup)$  que se mapean al neutro de  $F$ , el cual es  $A$ , ya que, para cualquier  $Y \in (P(A), \cap)$ ,  $Y \cap A = Y$ . En particular,  $f(X) = A \Leftrightarrow X^c = A \Leftrightarrow X = A^c$  y, entonces,  $\text{Nu}(f) = \{A^c\}$ .

Imagen: La imagen de  $f$  está formada por todos los conjuntos que puede tomar  $f(X)$  cuando  $X$  recorre  $(P(A), \cup)$ . En particular,  $\text{Im}(f) = P(A)$ .

## Ejercicio 2.

Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. Demostrar que el núcleo y la imagen de  $f$  son subgrupos de  $G$  y  $H$ , respectivamente.

El núcleo de  $f$ , denotado por  $\text{Nu}(f)$ , se define como:

$\text{Nu}(f) = \{x \in G: f(x) = e_H\}$ , donde  $e_H$  es el elemento neutro de  $H$ .  
 $\text{Nu}(f) \subset G$ .

Cerradura: Para cada  $x, y \in \text{Nu}(f)$ ,  $xy \in \text{Nu}(f)$ . En particular,  $f(xy) = f(x)f(y)$  (por  $f$  homomorfismo)  $= e_He_H = e_H$ , por lo que  $xy \in \text{Nu}(f)$ .

Elemento neutro: El elemento neutro de  $f$  en  $G$  también existe en  $\text{Nu}(f)$ . En particular,  $e_G \in \text{Nu}(f)$ , ya que  $f(e_G) = e_H$ .

Inversos: Un elemento  $x \in \text{Nu}(f)$  tiene inverso si existe  $x^{-1} \in \text{Nu}(f)$  tal que  $xx^{-1} = x^{-1}x = e_G$ . En particular, para  $x \in \text{Nu}(f)$ , su inverso en  $G$  es  $x^{-1}$  y, entonces,  $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$  (por  $f$  homomorfismo)  $= e_H^{-1} = e_H$ , por lo que existe inverso para todo  $x \in \text{Nu}(f)$ , ya que  $x^{-1} \in \text{Nu}(f)$ .

Por lo tanto, queda demostrado que el núcleo de  $f$  es un subgrupo de  $G$ , ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

La imagen de  $f$ , denotada por  $\text{Im}(f)$ , se define como:

$\text{Im}(f) = \{y \in H: \exists x \in G, f(x) = y\}$ .  
 $\text{Im}(f) \subset H$ .

Cerradura: Para cada  $a, b \in \text{Im}(f)$ ,  $ab \in \text{Im}(f)$ . En particular,  $ab = f(x)f(y) = f(xy)$  (por  $f$  homomorfismo), con  $xy \in G$  (por  $(G, *)$  grupo), por lo que  $ab \in \text{Im}(f)$ .

Elemento neutro: El elemento neutro de  $f$  en  $H$  también existe en  $\text{Im}(f)$ . En particular,  $e_H \in \text{Im}(f)$ , ya que  $e_H = f(e_G)$ .

Inversos: Un elemento  $a \in \text{Im}(f)$  tiene inverso si existe  $a^{-1} \in \text{Im}(f)$  tal que  $aa^{-1} = a^{-1}a = e_H$ . En particular, para  $a \in \text{Im}(f)$ , su inverso en  $H$  es  $a^{-1} = [f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$  (por  $f$  homomorfismo), con  $x^{-1} \in G$  (por  $(G, *)$  grupo), por lo que existe inverso para todo  $a \in \text{Im}(f)$ , ya que  $a^{-1} \in \text{Im}(f)$ .

Por lo tanto, queda demostrado que la imagen de  $f$  es un subgrupo de  $H$ , ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

### Ejercicio 3.

Sea  $(G, *)$  un grupo. Demostrar que la función  $f: G \rightarrow G$  definida por  $f(a) = a^2$  es un homomorfismo si y sólo si  $G$  es abeliano (recordar un ejercicio de grupos abelianos del TP5.1).

Si  $f(a) = a^2$  es un homomorfismo, entonces, para todo  $a, b \in G$ ,  $f(ab) = f(a)f(b)$ , lo que implica que  $(ab)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow abab = aabb \Leftrightarrow ba = ab$ . Por lo tanto,  $G$  es abeliano.

Si  $(G, *)$  es abeliano, entonces, para cada  $a, b \in G$ ,  $ab = ba$ . En particular,  $f(ab) = (ab)^2 = abab = aabb$  (por  $(G, *)$  abeliano)  $= a^2b^2 = f(a)f(b)$ , por lo que  $f(ab) = f(a)f(b)$ . Por lo tanto,  $f(a) = a^2$  es un homomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función  $f: G \rightarrow G$  definida por  $f(a) = a^2$  es un homomorfismo si y sólo si  $G$  es abeliano.

### Ejercicio 4.

Si  $H_1, H_2$  son dos subgrupos de un grupo conmutativo  $G$ , probar que la aplicación  $f: H_1 \times H_2 \rightarrow G$  dada por  $f(a, b) = ab$  es un morfismo de grupos.

La aplicación  $f$  es un morfismo de grupos si se cumple que, para todo  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H_1 \times H_2$ ,  $f((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = f(a_1, b_1)f(a_2, b_2)$ . En particular,  $f((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = f(a_1a_2, b_1b_2) = a_1a_2b_1b_2 = a_1b_1a_2b_2$  (por  $(G, *)$  conmutativo) =  $f(a_1, b_1)f(a_2, b_2)$ , por lo que  $f$  es un morfismo de grupos.

Por lo tanto, queda demostrado que la aplicación  $f: H_1 \times H_2 \rightarrow G$  dada por  $f(a, b) = ab$  es un morfismo de grupos.

### Ejercicio 5.

*Si  $f: G_1 \rightarrow G_2$  es un morfismo de grupos, entonces, es monomorfismo si y sólo si  $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$ .*

Sea  $f: G_1 \rightarrow G_2$  un morfismo de grupos, donde  $G_1$  y  $G_2$  son grupos, y  $e_1$  y  $e_2$  son los elementos neutros de  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente.

Se quiere probar que  $f$  es un monomorfismo si y sólo si  $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$ .

Si  $f$  es un monomorfismo, entonces,  $f$  es inyectiva, lo que implica que, si  $f(a) = f(b)$ , entonces,  $a = b$ . En particular, si  $f(a) = e_2$  (por definición de núcleo) y  $f(e_1) = e_2$  (por preservación del neutro de los morfismos), entonces,  $a = e_1$ . Por lo tanto,  $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$ .

Si  $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$  y, suponiendo que  $f(a) = f(b)$  para algunos  $a, b \in G_1$ , entonces,  $f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(a)[f(b)]^{-1} = f(b)[f(b)]^{-1}$  (post-multiplicando por  $[f(b)]^{-1}$ )  $\Leftrightarrow f(a)[f(b)]^{-1} = e_2$  (por  $(G_2, *)$  grupo)  $\Leftrightarrow f(a)f(b^{-1}) = e_2$  (por  $f$  morfismo)  $\Leftrightarrow f(ab^{-1}) = e_2$  (por  $f$  morfismo), lo que implica que  $ab^{-1} \in \text{Nu}(f)$ , por lo que  $ab^{-1} = e_1$  (por hipótesis)  $\Leftrightarrow ab^{-1}b = e_1b$  (post-multiplicando por  $b$ )  $\Leftrightarrow ae_1 = b$  (por  $(G_1, *)$  grupo)  $\Leftrightarrow a = b$  (por  $(G_1, *)$  grupo) y, entonces,  $f$  es inyectiva. Por lo tanto,  $f$  es un monomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que, si  $f: G_1 \rightarrow G_2$  es un morfismo de grupos, entonces, es monomorfismo si y sólo si  $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$ .

### Ejercicio 6.

Sea  $(G, *)$  un grupo. Demostrar que la función  $f: G \rightarrow G$  definida por  $f(a) = a^{-1}$  es un isomorfismo si y sólo si  $G$  es abeliano.

Si  $f(a) = a^{-1}$  es un isomorfismo, entonces, para todo  $a, b \in G$ ,  $f(ab) = f(a)f(b)$ , lo que implica que  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Leftrightarrow (ab)^{-1} = (ba)^{-1} \Leftrightarrow ab = ba$ . Por lo tanto,  $G$  es abeliano.

Si  $(G, *)$  es abeliano, entonces, para cada  $a, b \in G$ ,  $ab = ba$ . Por un lado, se considera  $f(ab) = (ab)^{-1} = (ba)^{-1}$  (por  $(G, *)$  abeliano)  $= a^{-1}b^{-1} = f(a)f(b)$ , por lo que  $f(ab) = f(a)f(b)$  y, entonces,  $f(a) = a^{-1}$  es un homomorfismo. Por otro lado, si  $f(a) = f(b)$ , entonces,  $a^{-1} = b^{-1} \Leftrightarrow a = b$ , por lo que  $f$  es inyectiva; y, para todo  $b \in G$  (codominio), existe  $a \in G$  (dominio) tal que  $f(a) = b$  (en particular,  $a^{-1} = b \Leftrightarrow a = b^{-1} \in G$  (dominio)), por lo que  $f$  es sobreyectiva. Por lo tanto,  $f(a) = a^{-1}$  es un isomorfismo, ya que es un homomorfismo biyectivo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función  $f: G \rightarrow G$  definida por  $f(a) = a^{-1}$  es un isomorfismo si y sólo si  $G$  es abeliano.

### Ejercicio 7.

Sea  $R$  una relación de congruencia sobre un semigrupo  $(S, *)$  y  $(S/R, *)$  el semigrupo cociente correspondiente. Demostrar que la función  $f_R: S \rightarrow S/R$  definida por  $f_R(a) = \bar{a}$  es un homomorfismo.

La función  $f_R$  es un homomorfismo si se cumple que, para todo  $a, b \in S$ ,  $f_R(ab) = f_R(a)f_R(b)$ . En particular,  $f_R(ab) = \bar{ab} = \bar{a}\bar{b}$  (por  $R$  relación de congruencia)  $= f_R(a)f_R(b)$ , por lo que  $f_R$  es un homomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función  $f_R: S \rightarrow S/R$  definida por  $f_R(a) = \bar{a}$  es un homomorfismo.

## Ejercicio 8.

Sea  $z$  un número complejo. ¿Cuándo será un isomorfismo de grupos la aplicación  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , siendo  $\mathbb{C}$  el conjunto de los números complejos, dada por  $f(x) = zx$ ?

Condición de homomorfismo:  $f$  es un homomorfismo si se cumple que, para todo  $x, y \in \mathbb{C}$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . En particular,  $f(x + y) = z(x + y) = zx + zy = f(x) + f(y)$ , por lo que  $f$  es un homomorfismo.

Inyectividad:  $f$  es inyectiva si  $f(x) = f(y)$  implica  $x = y$ . En particular,  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow zx = zy \Leftrightarrow x = y$ , por lo que  $f$  es inyectiva.

Sobreyectividad:  $f$  es sobreyectiva si, para todo  $y \in \mathbb{C}$  (codominio), existe  $x \in \mathbb{C}$  (dominio) tal que  $f(x) = y$ . En particular,  $zx = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{z} \in \mathbb{C}$  (dominio), si  $z \neq 0$ , por lo que  $f$  es sobreyectiva si y sólo si  $z \neq 0$ .

Por lo tanto, dado  $z$  un número complejo, la aplicación  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , siendo  $\mathbb{C}$  el conjunto de los números complejos, dada por  $f(x) = zx$ , será un isomorfismo de grupos (con la operación  $+$ ) cuando  $z \neq 0$ .

## Ejercicio 9.

*Probar que hay un isomorfismo entre el grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales  $\mathbb{R}^4$  con la suma usual.*

Se define la aplicación  $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  que mapea una matriz de 2x2 a una cuaterna de números reales, tomando los elementos de la matriz. Es decir, para una matriz  $A \in M_2(\mathbb{R})$  dada por  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , se define  $f(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$ .

Condición de homomorfismo:  $f$  es un homomorfismo si se cumple que, para todo  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $f(A + B) = f(A) + f(B)$ . En particular, para  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , con cualesquiera  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}\right) = (a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}, a_{21} + b_{21}, a_{22} + b_{22}) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) + (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = f(A) + f(B)$ , por lo que  $f$  es un homomorfismo.

Inyectividad:  $f$  es inyectiva si  $f(A) = f(B)$  implica  $A = B$ . En particular, para  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , con cualesquiera  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $f(A) = f(B) \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) \Leftrightarrow A = B$ , por lo que  $f$  es inyectiva.

Sobreyectividad:  $f$  es sobreyectiva si, para todo  $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$  (codominio), existe  $A \in M_2(\mathbb{R})$  (dominio) tal que  $f(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ . En particular,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  (dominio), con cualesquiera  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2$ , por lo que  $f$  es sobreyectiva.

Por lo tanto, queda demostrado que hay un isomorfismo entre el grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales  $\mathbb{R}^4$  con la suma usual.

## Ejercicio 10.

Probar que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a  $(\mathbb{Z}_m, +)$ .

Sea G un grupo cíclico de orden m con generador  $g \in G$ , es decir:

$G = \langle g \rangle = \{g^x : x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x < m\} = \{e, g, g^2, \dots, g^{m-1}\}$ , con  $g^m = e$ , donde e es el elemento neutro de G.

Sea  $(\mathbb{Z}_m, +)$  el grupo formado por los enteros  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  con la operación + módulo m.

Se define la función  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_m$  como:

$$\varphi(g^k) = k \text{ mod } m, \text{ para } k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Condición de homomorfismo:  $\varphi$  es un homomorfismo si se cumple que, para todo  $g^x, g^y \in G$ ,  $\varphi(g^x g^y) = \varphi(g^x) + \varphi(g^y)$ . En particular,  $\varphi(g^x g^y) = \varphi(g^{x+y}) = (x+y) \text{ mod } m = x \text{ mod } m + y \text{ mod } m = \varphi(g^x) + \varphi(g^y)$ , por lo que  $\varphi$  es un homomorfismo.

Inyectividad:  $\varphi$  es inyectiva si  $\varphi(g^x) = \varphi(g^y)$  implica  $g^x = g^y$ . En particular,  $\varphi(g^x) = \varphi(g^y) \Leftrightarrow x \text{ mod } m = y \text{ mod } m \Leftrightarrow x \text{ mod } m - y \text{ mod } m = 0 \Leftrightarrow (x-y) \text{ mod } m = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow g^x = g^y$ , por lo que  $\varphi$  es inyectiva.

Sobreyectividad:  $\varphi$  es sobreyectiva si, para todo  $k \in \mathbb{Z}_m$  (codominio), existe  $g^k \in G$  (dominio) tal que  $\varphi(g^k) = k \text{ mod } m$ . En particular,  $\varphi(g^k) = k \text{ mod } m$  (por definición de  $\varphi$ ), con  $g^k \in G$  (dominio), por lo que  $\varphi$  es sobreyectiva.

Por lo tanto, queda demostrado que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a  $(\mathbb{Z}_m, +)$ .