

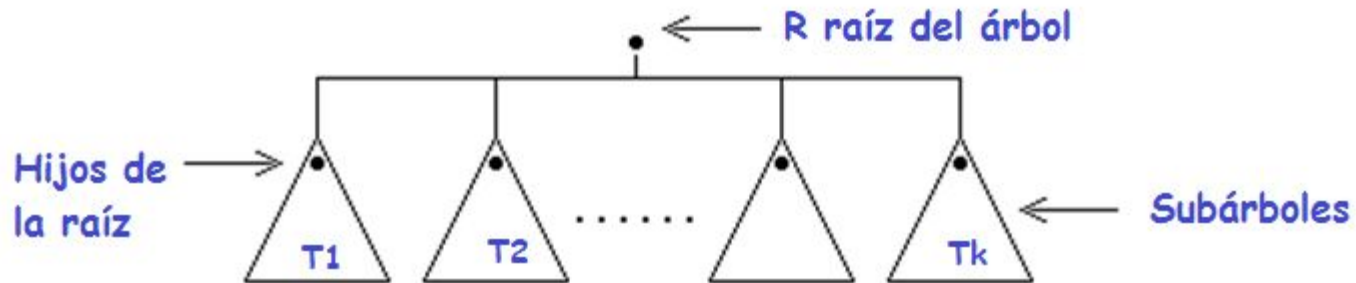
Árboles Generales

Agenda

- Definición
- Descripción y terminología
- Ejemplos
- Representaciones
- Recorridos

Definición

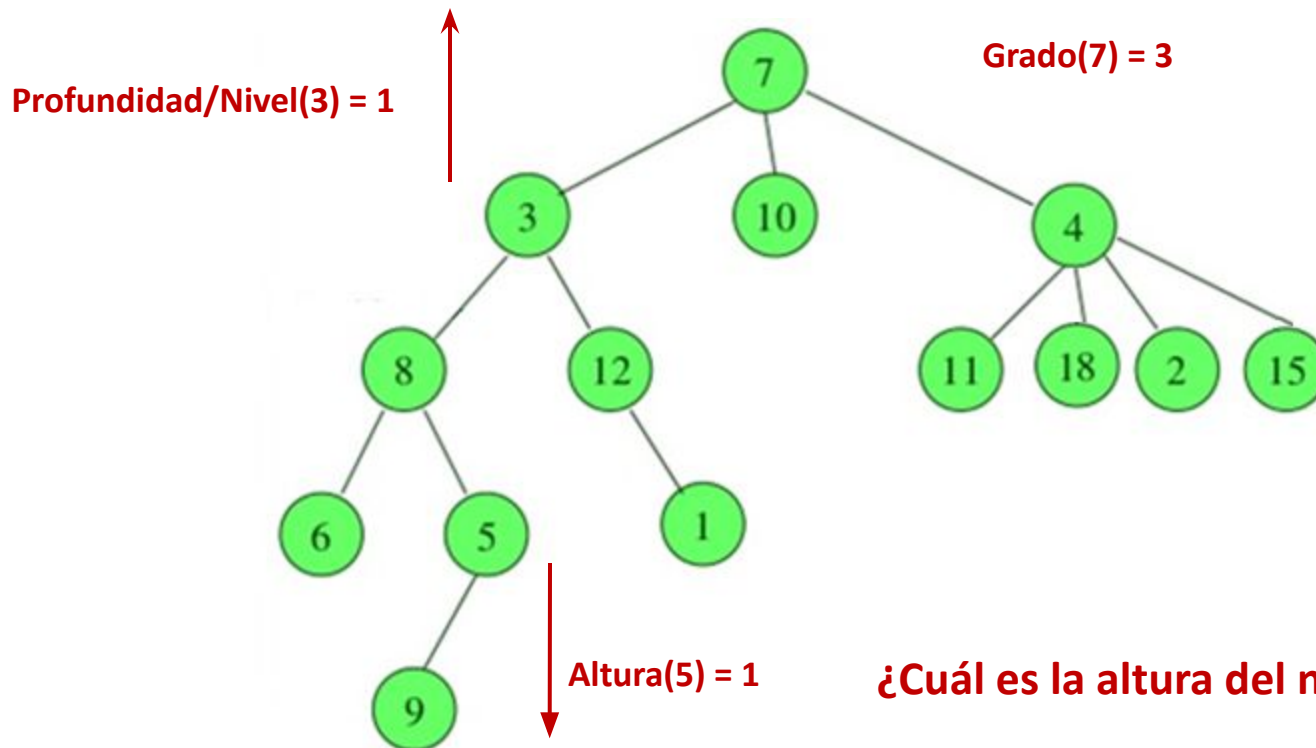
- *Un árbol es una colección de nodos, tal que:*
 - *puede estar vacía. (Árbol vacío)*
 - *puede estar formada por un nodo distinguido R , llamado **raíz** y un conjunto de árboles T_1, T_2, \dots, T_k , $k \geq 0$ (subárboles), donde la raíz de cada subárbol T_i está conectado a R por medio de una arista*



Descripción y terminología

- **Grado** de n_i es el número de hijos del nodo n_i .
 - Grado del árbol es el grado del nodo con mayor grado.
- **Altura** de n_i es la longitud del camino más largo desde n_i hasta una hoja.
 - Las hojas tienen altura **cero**.
 - La altura de un árbol es la altura del nodo raíz.
- **Profundidad / Nivel:** de n_i es la longitud del único camino desde la raíz hasta n_i .
 - La raíz tiene profundidad o nivel **cero**.

Descripción y terminología



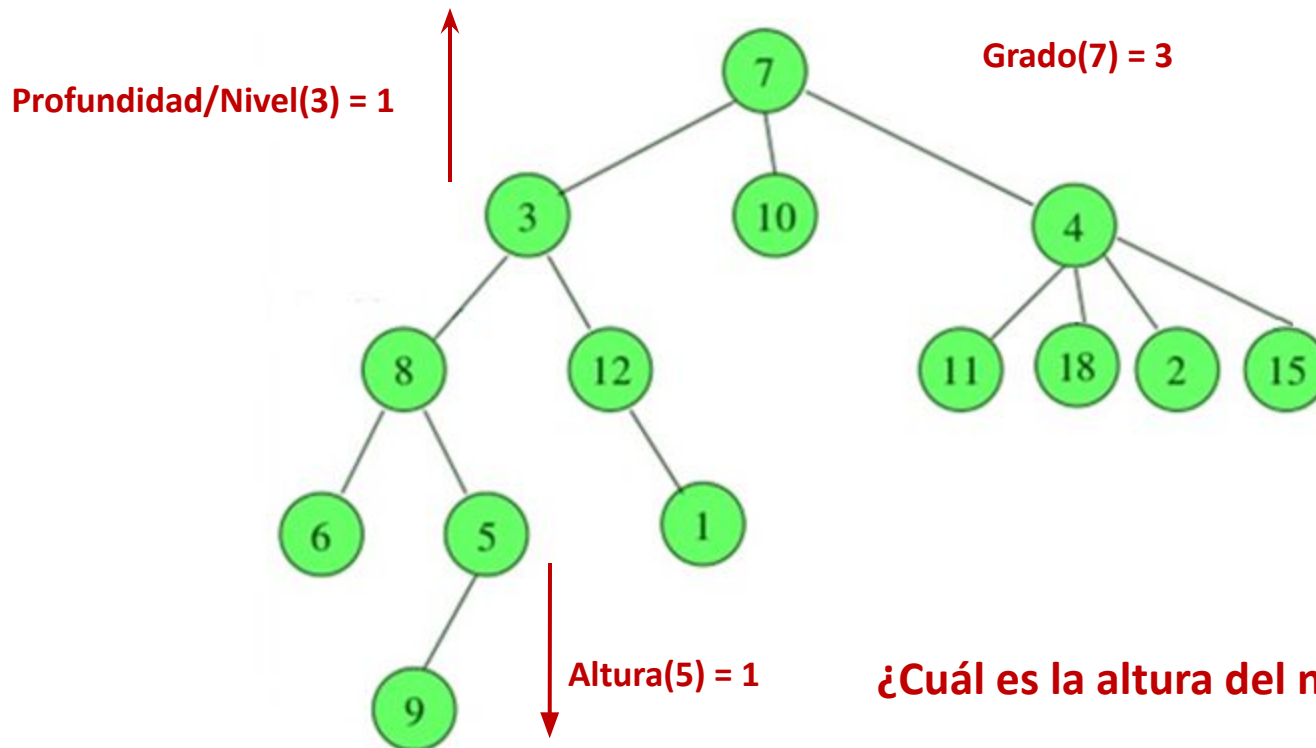
¿Cuál es la altura del nodo 3?

¿Cuál es la profundidad del nodo 12?

¿Cuál es el grado del árbol?

¿Cuál es la altura del árbol?

Descripción y terminología



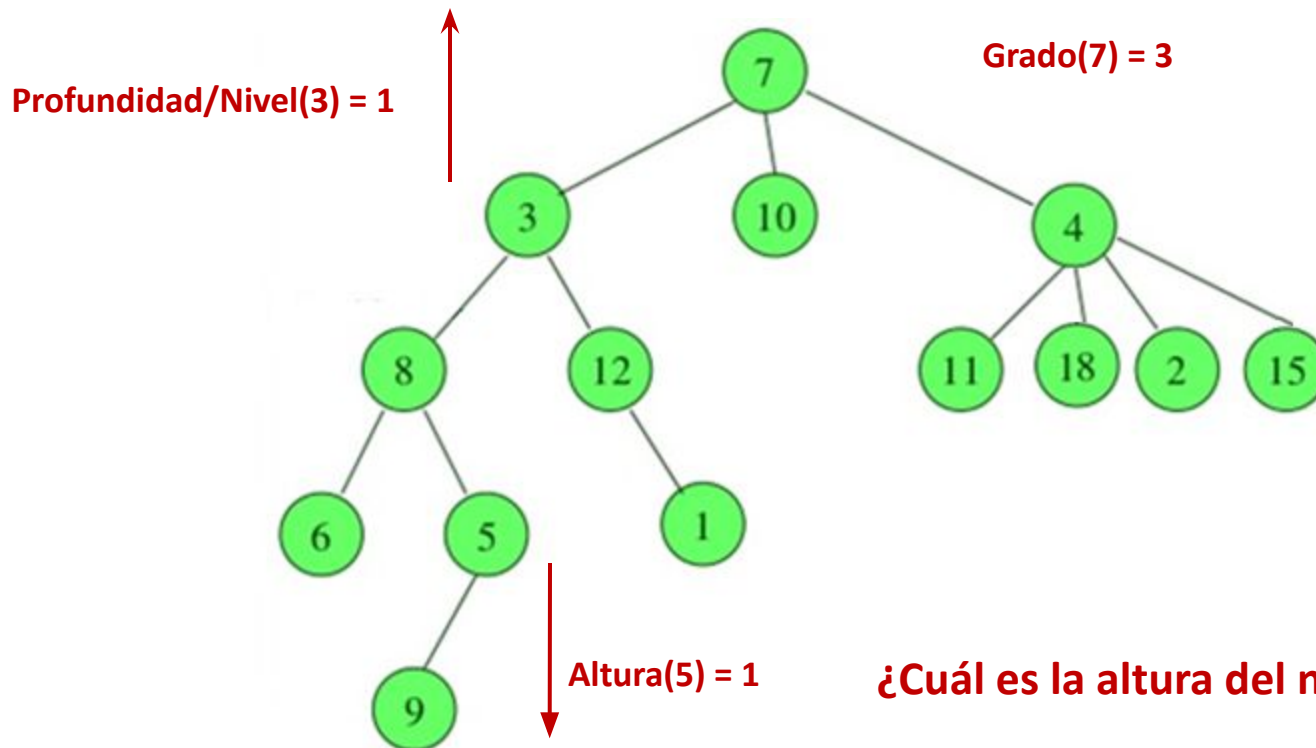
¿Cuál es la altura del nodo 3? **3**

¿Cuál es la profundidad del nodo 12? **2**

¿Cuál es el grado del árbol?

¿Cuál es la altura del árbol?

Descripción y terminología



¿Cuál es la altura del nodo 3? 3

¿Cuál es la profundidad del nodo 12? 2

¿Cuál es el grado del árbol? 4

¿Cuál es la altura del árbol? 4

Descripción y terminología

- **Árbol lleno:** Dado un árbol T de grado k y altura h , diremos que T es *lleno* si cada nodo interno tiene grado k y todas las hojas están en el mismo nivel (h).

Es decir, recursivamente, T es *lleno* si :

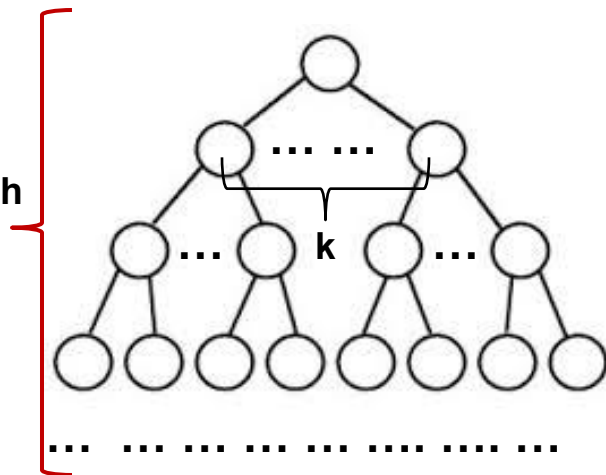
- 1.- T es un nodo simple (árbol lleno de altura 0), o
- 2.- T es de altura h y todos sus sub-árboles son llenos de altura $h-1$.

Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol T de grado k y altura h , diremos que T es *completo* si es lleno de altura $h-1$ y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

Sea T un árbol lleno de grado k y altura h , la cantidad de nodos N es $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$ ya que:

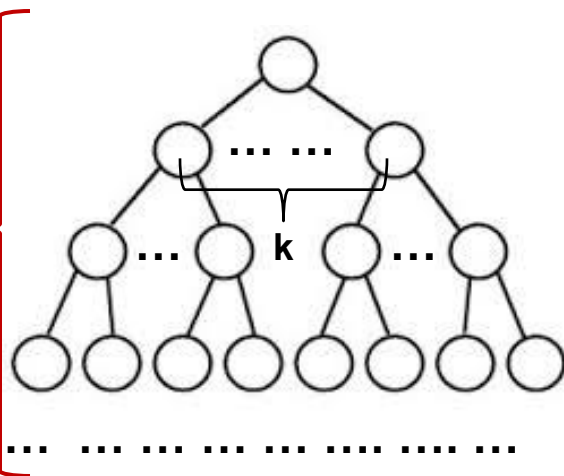


Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol T de grado k y altura h , diremos que T es *completo* si es lleno de altura $h-1$ y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

Sea T un árbol lleno de grado k y altura h , la cantidad de nodos N es $(k^{h+1} - 1) / (k-1)$ ya que:



Nivel 0 $\rightarrow k^0$ nodos

Nivel 1 $\rightarrow k^1$ nodos

Nivel 2 $\rightarrow k^2$ nodos

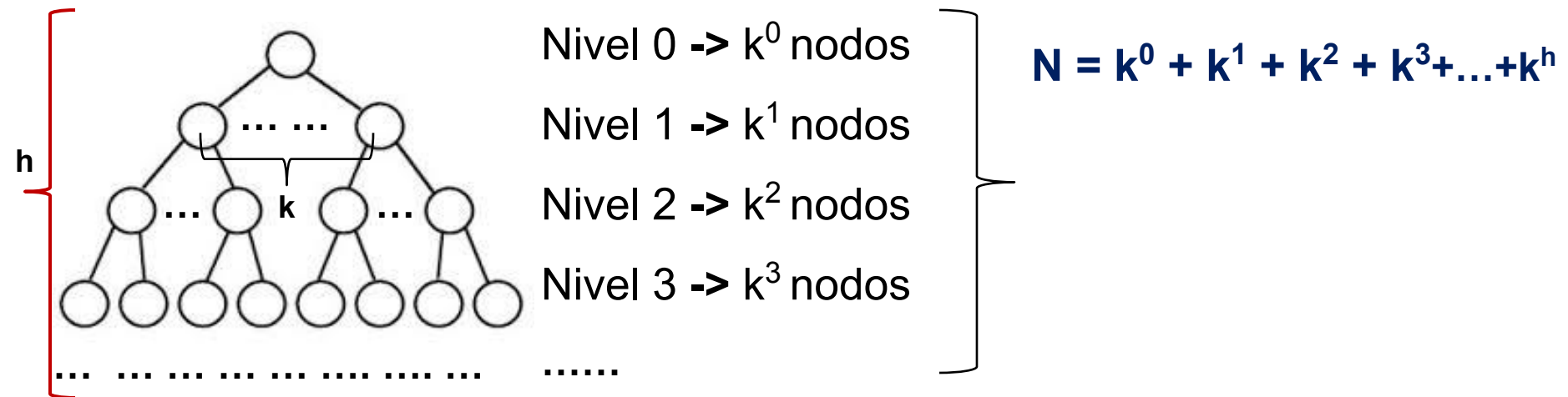
Nivel 3 $\rightarrow k^3$ nodos

Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol T de grado k y altura h , diremos que T es *completo* si es lleno de altura $h-1$ y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

Sea T un árbol lleno de grado k y altura h , la cantidad de nodos N es $(k^{h+1} - 1) / (k-1)$ ya que:

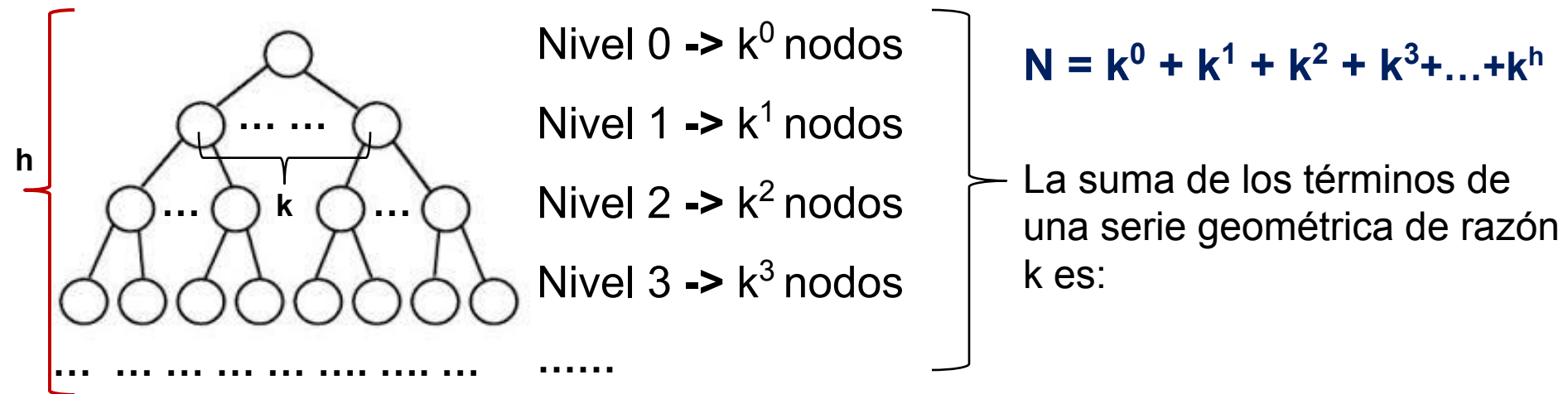


Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol T de grado k y altura h , diremos que T es *completo* si es lleno de altura $h-1$ y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

Sea T un árbol lleno de grado k y altura h , la cantidad de nodos N es $(k^{h+1} - 1) / (k-1)$ ya que:

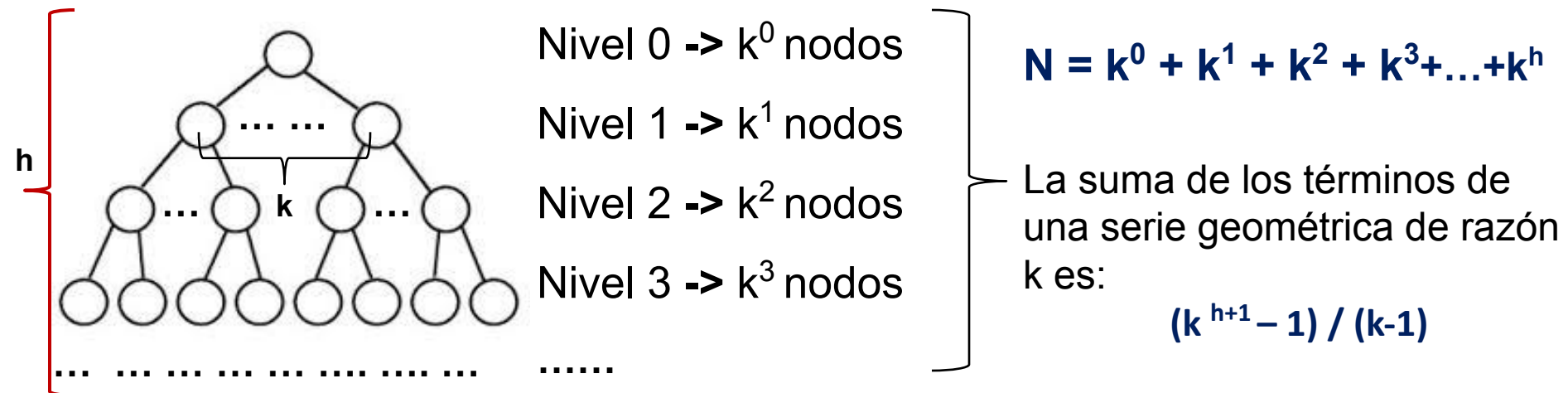


Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol T de grado k y altura h , diremos que T es *completo* si es lleno de altura $h-1$ y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

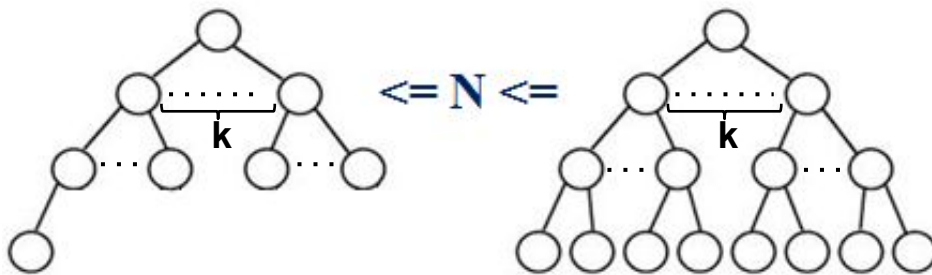
Sea T un árbol lleno de grado k y altura h , la cantidad de nodos N es $(k^{h+1} - 1) / (k-1)$ ya que:



Descripción y terminología

- ***Cantidad de nodos en un árbol completo:***

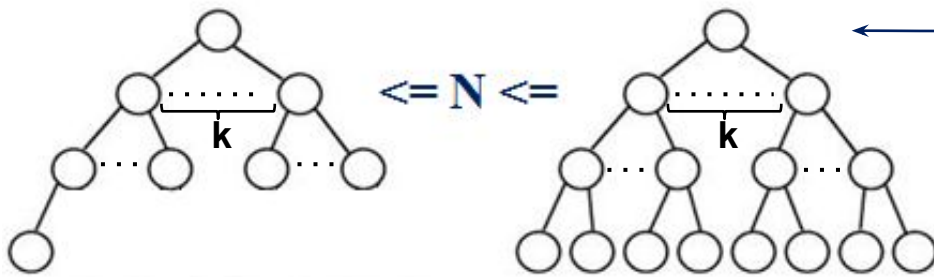
Sea T un árbol completo de grado k y altura h , la cantidad de nodos N varía entre $(k^h + k - 2) / (k - 1)$ y $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$ ya que ...



Descripción y terminología

- ***Cantidad de nodos en un árbol completo:***

Sea T un árbol completo de grado k y altura h , la cantidad de nodos N varía entre $(k^h + k - 2) / (k - 1)$ y $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$ ya que ...

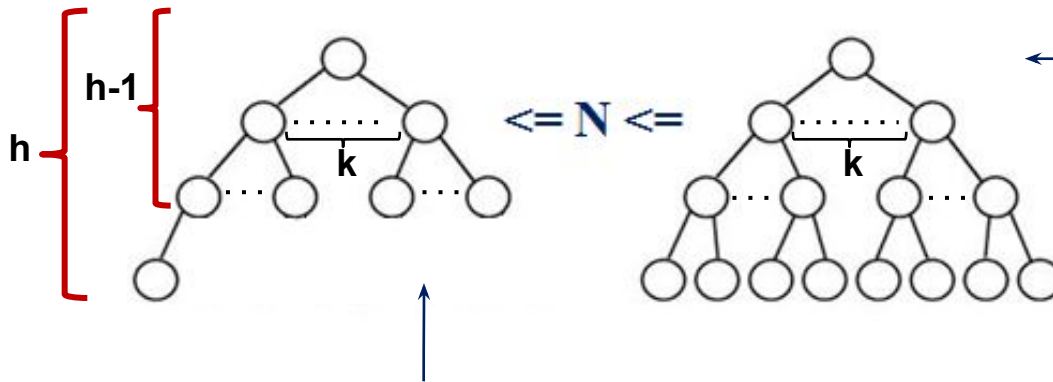


- Si el árbol es lleno
 $N = (k^{h+1} - 1) / (k - 1)$

Descripción y terminología

- ***Cantidad de nodos en un árbol completo:***

Sea T un árbol completo de grado k y altura h , la cantidad de nodos N varía entre $(k^h + k - 2) / (k - 1)$ y $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$ ya que ...

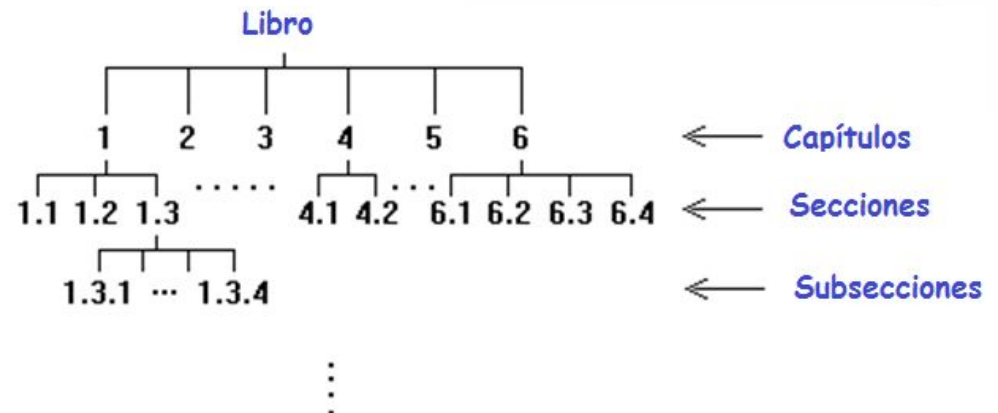
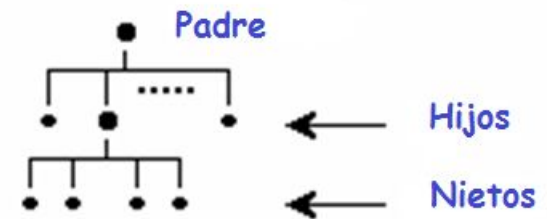
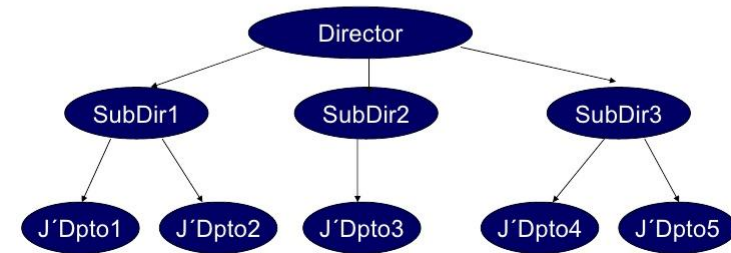


• Si el árbol es lleno
 $N = (k^{h+1} - 1) / (k - 1)$

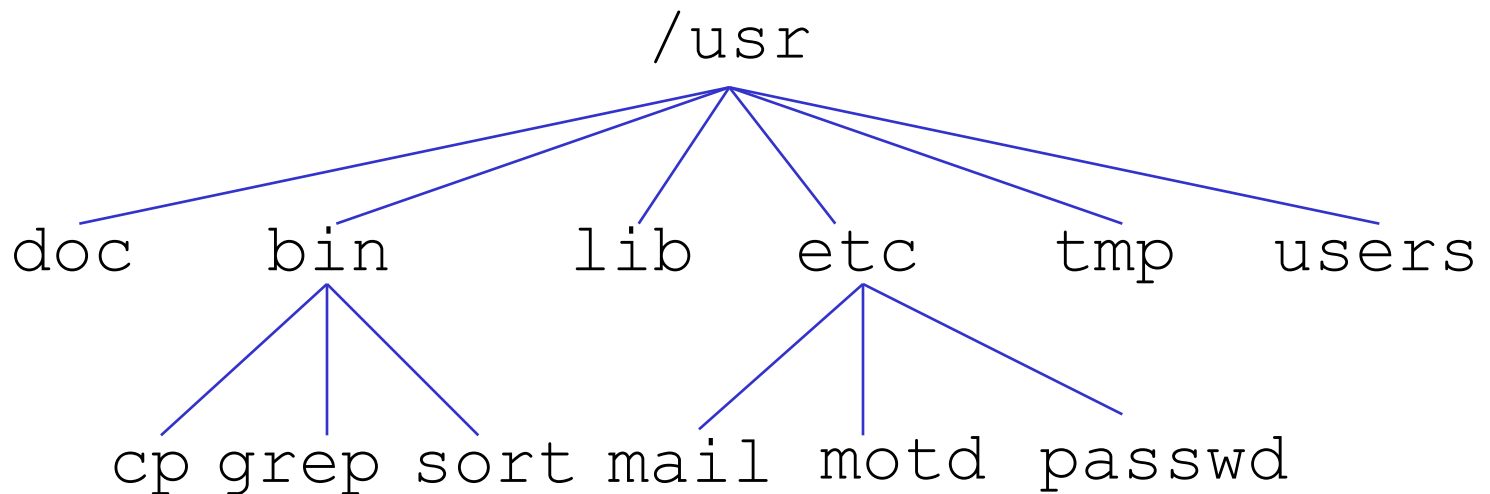
- Si no, el árbol es lleno en la altura $h-1$ y tiene por lo menos un nodo en el nivel h :
 $N = (k^{h-1+1} - 1) / (k - 1) + 1 = (k^h + k - 2) / (k - 1)$

Ejemplos

- ✓ Organigrama de una empresa
- ✓ Árboles genealógicos
- ✓ Taxonomía que clasifica organismos
- ✓ Sistemas de archivos
- ✓ Organización de un libro en capítulos y secciones



Ejemplo: Sistema de archivos



Representaciones

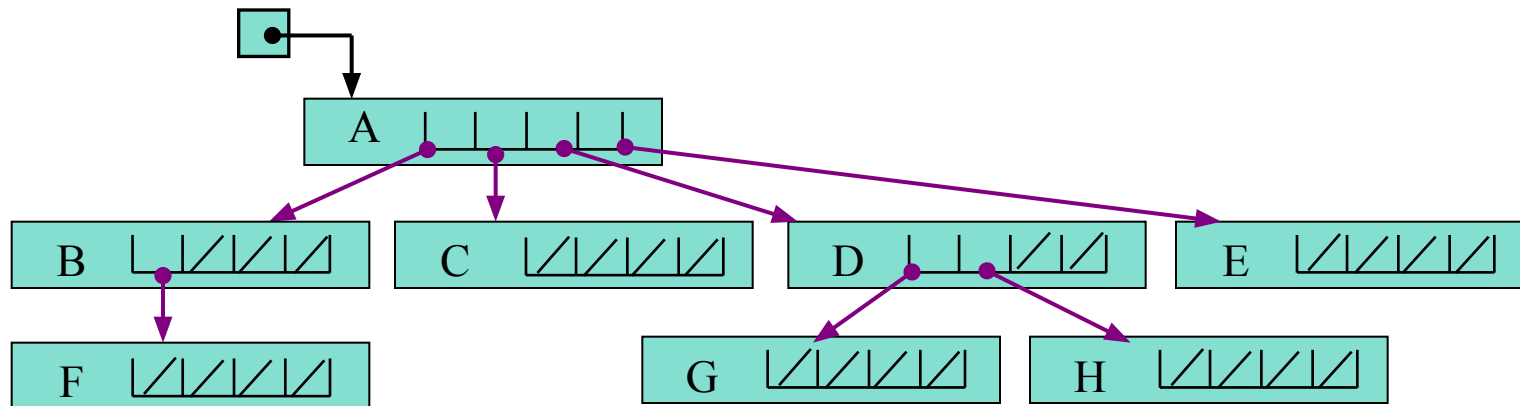
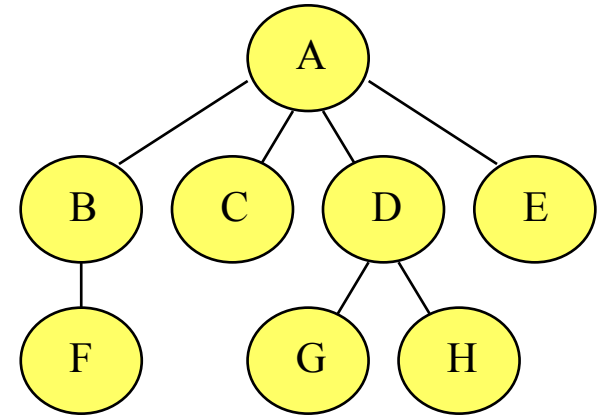
- ✓ Lista de hijos
 - Cada nodo tiene:
 - Información propia del nodo
 - Una lista de todos sus hijos
- ✓ Hijo más izquierdo y hermano derecho
 - Cada nodo tiene:
 - Información propia del nodo
 - Referencia al hijo más izquierdo
 - Referencia al hermano derecho

Representación: Lista de hijos

- ✓ La lista de hijos, puede estar implementada a través de:
 - Arreglos
 - Desventaja: espacio ocupado
 - Listas dinámicas
 - Mayor flexibilidad en el uso

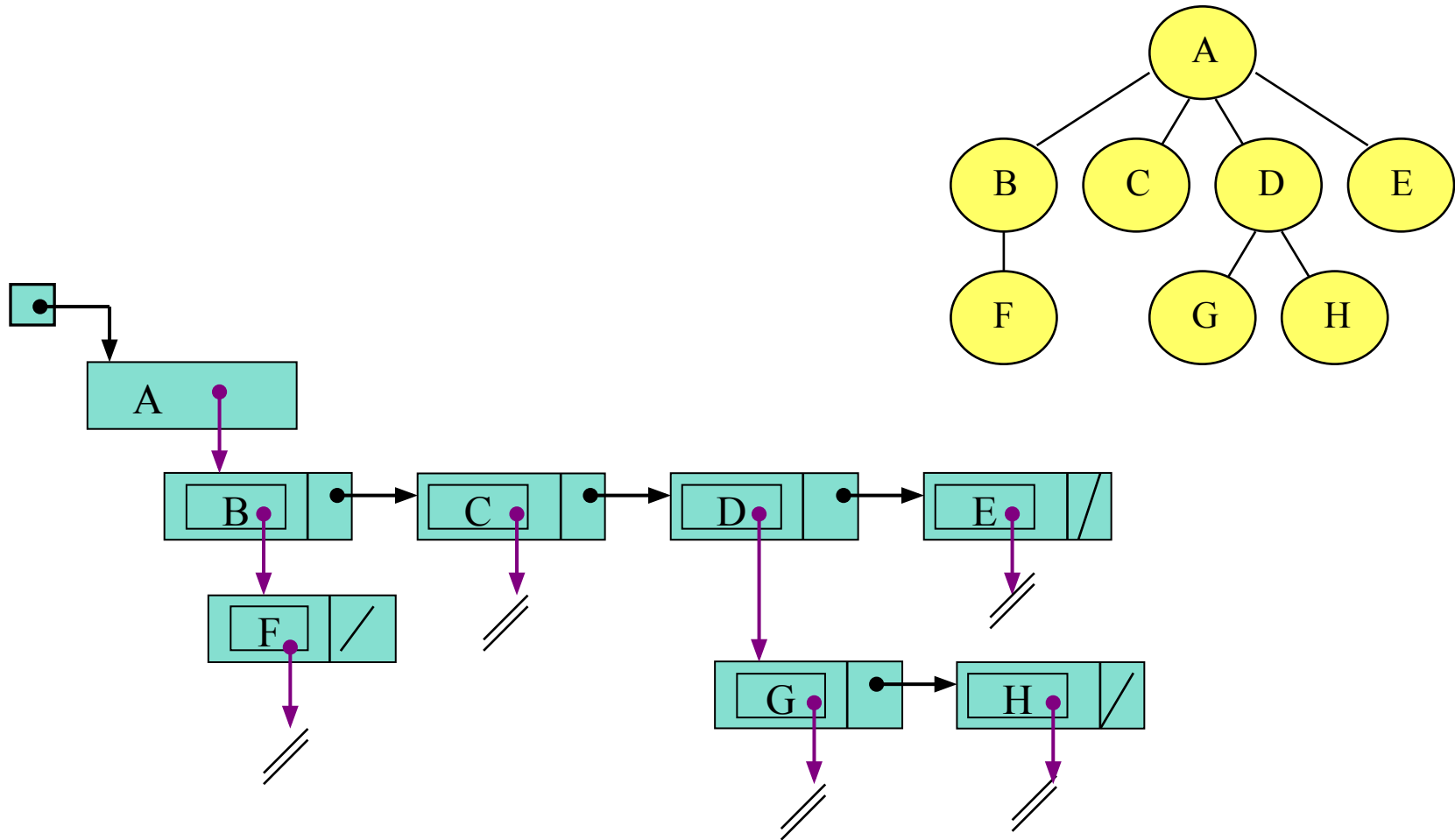
Representación: Lista de hijos

Implementada con Arreglos

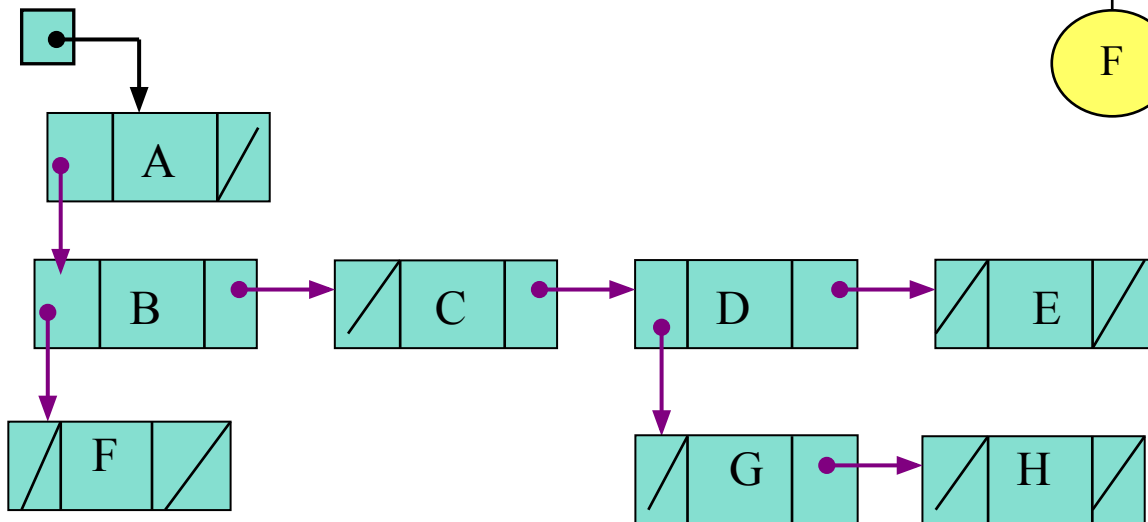
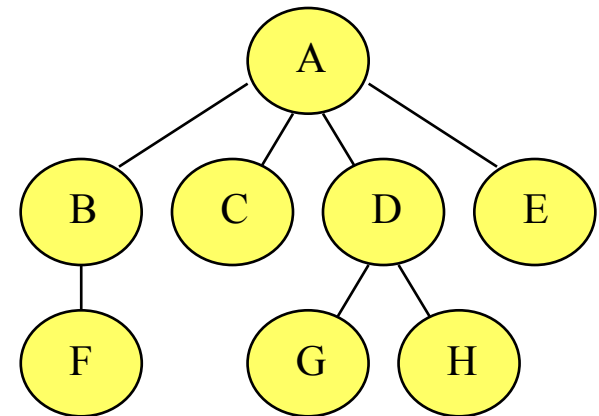


Representación: Lista de hijos

Implementada con Listas enlazadas



Representación: Hijo más izquierdo y hermano derecho



Recorridos

- **Preorden**

Se procesa primero la raíz y luego los hijos

- **Inorden**

Se procesa el primer hijo, luego la raíz y por último los restantes hijos

- **Postorden**

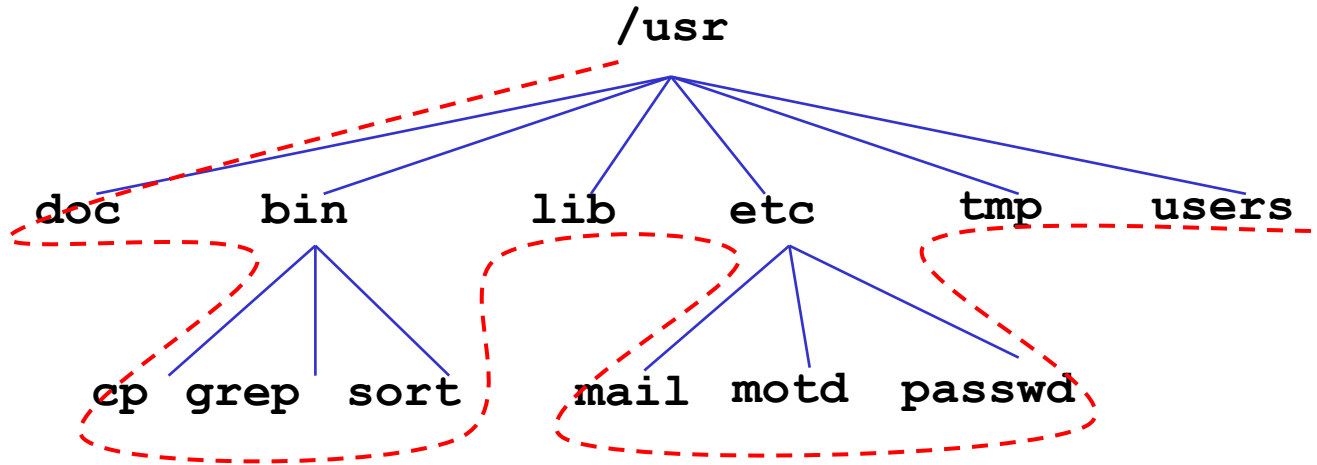
Se procesan primero los hijos y luego la raíz

- **Por niveles**

Se procesan los nodos teniendo en cuenta sus niveles, primero la raíz, luego los hijos, los hijos de éstos, etc.

Árbol General

Recorrido en preorden

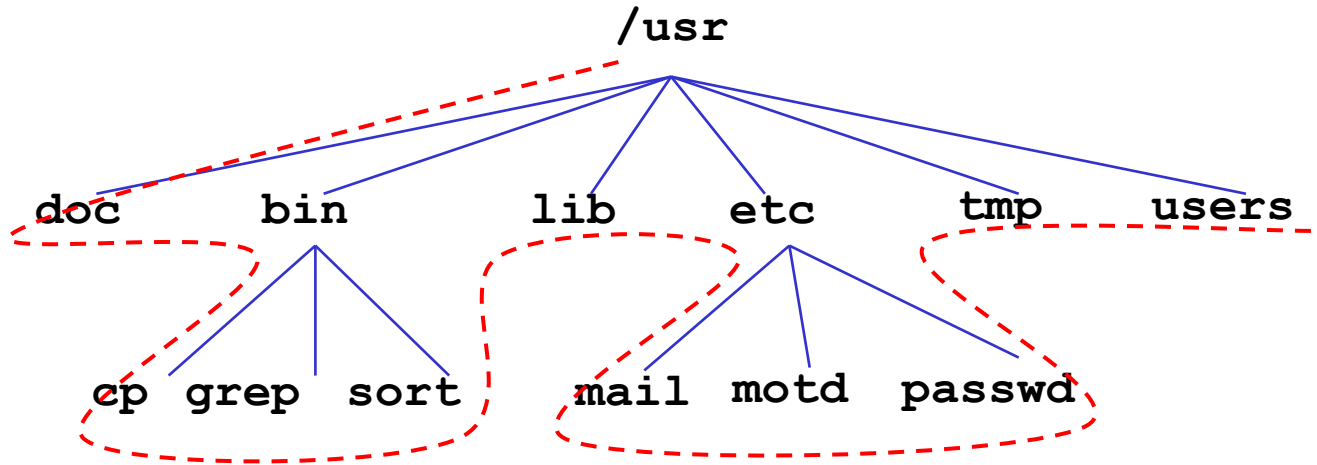


```
public void preOrden() {  
    imprimir (dato);  
    obtener lista de hijos;  
    mientras (lista tenga datos) {  
        hijo ← obtenerHijo;  
        hijo.preOrden();  
    }  
}
```

Ejemplo: Listado del contenido de un directorio

Árbol General

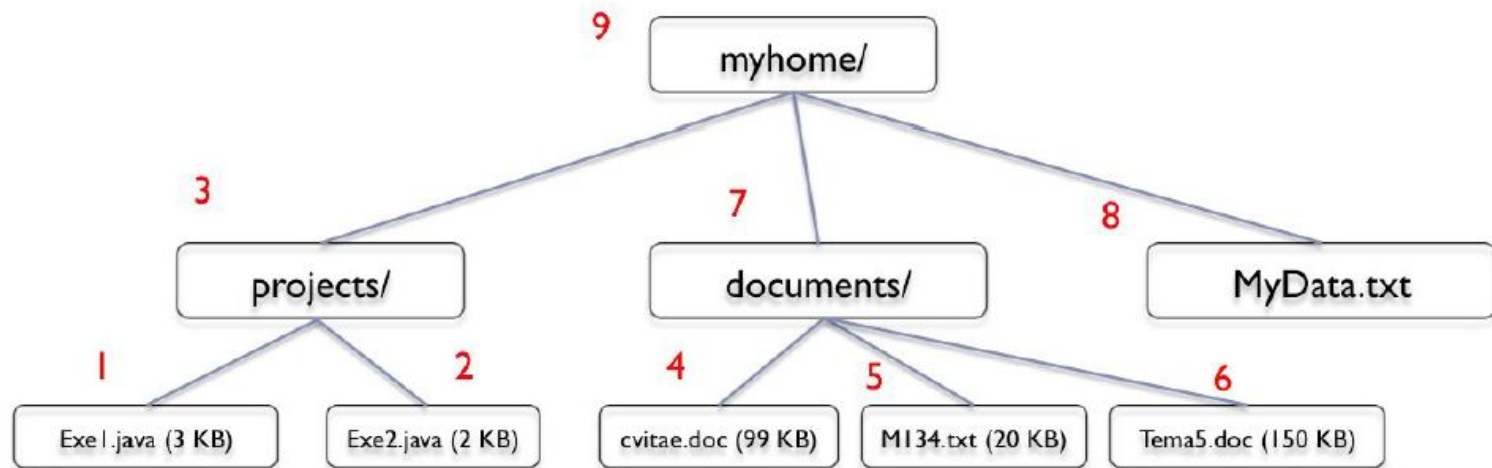
Recorrido en postorden



```
public void postOrden() {  
    obtener lista de hijos;  
    mientras (lista tenga datos) {  
        hijo ← obtenerHijo;  
        hijo.postOrden();  
    }  
    imprimir (dato);  
}
```

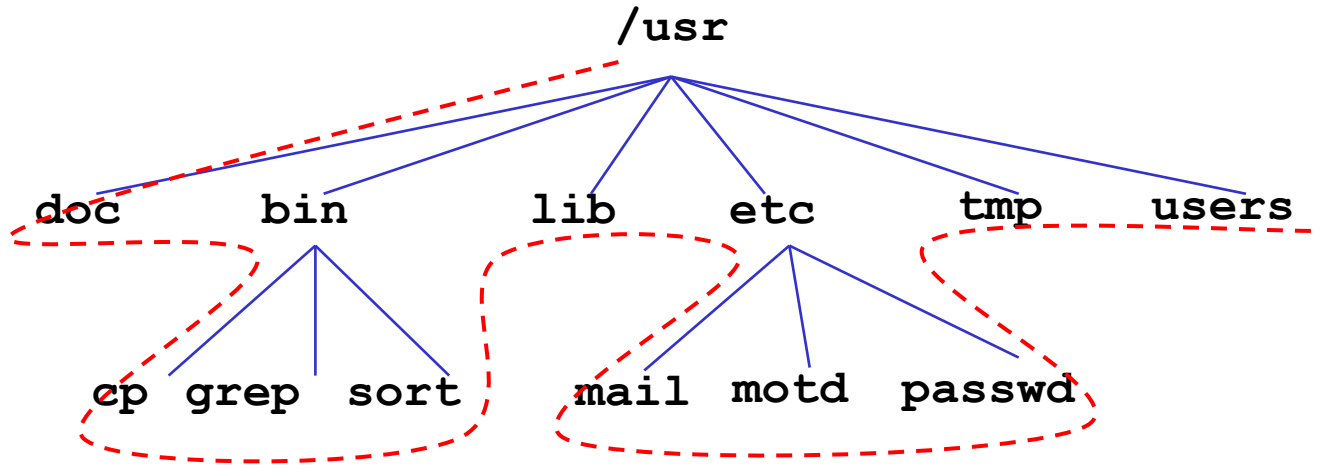
Recorrido: Postorden

Ejemplo: Calcular el tamaño ocupado por un directorio



Árbol General

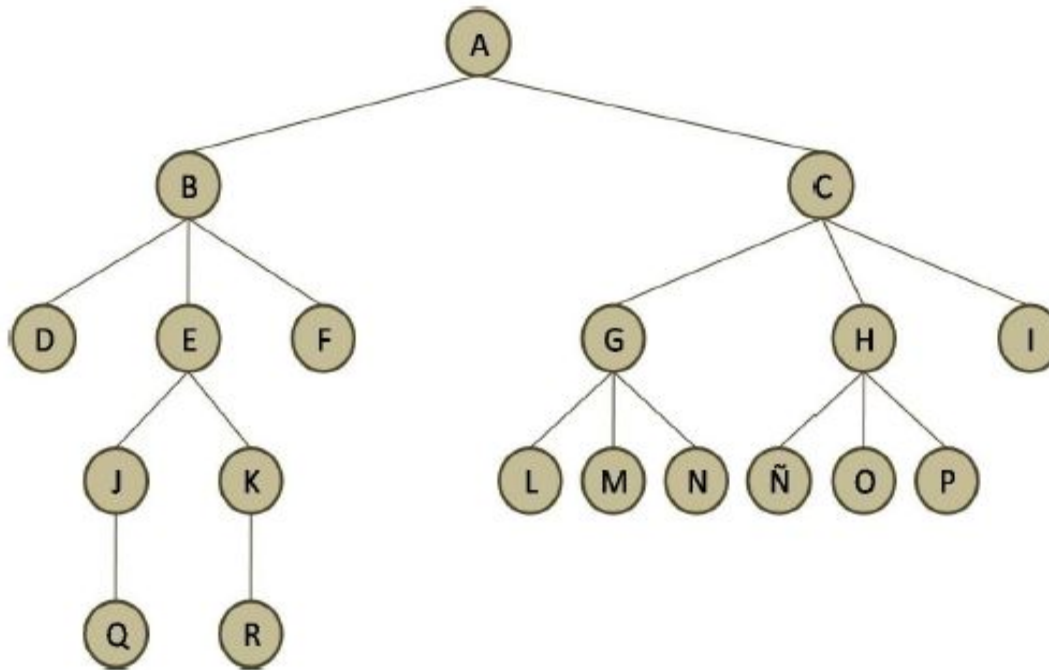
Recorrido por niveles



```
public void porNiveles() {  
    encolar(raíz);  
    mientras cola no se vacíe {  
        v ← desencolar();  
        imprimir (dato de v);  
        para cada hijo de v  
            encolar(hijo);  
    }  
}
```

Ejercicio

Dado el siguiente árbol, escriba los recorridos preorden, inorden y postorden



Ejercicio

Abeto navideño

Problem - B - Codeforces

Considere un árbol general. Recordemos que el vértice **u** se llama hijo del vértice **v** y el vértice **v** se llama padre del vértice **u** si existe una arista dirigida de v a u. El árbol tiene un vértice distinguido llamado raíz, que es el único vértice que no tiene padre. Un vértice se llama hoja si no tiene hijos y tiene padre.

Llamaremos **abeto** a un árbol si cada vértice no hoja tiene al menos 3 hijos hojas.

Dado un árbol general, compruebe si es un abeto.



Input

La primera línea contiene un entero n : el número de vértices en el árbol ($3 \leq n \leq 1000$). Cada una de las siguientes $n - 1$ líneas contiene un entero p_i ($1 \leq i \leq n - 1$) — el índice del padre del $i + 1$ -ésimo vértice ($1 \leq p_i \leq i$).

El vértice 1 es la raíz. Está garantizado que la raíz tiene al menos 2 hijos.

Output

Imprima "Yes" si el árbol es un abeto y "No" de lo contrario.

Ejercicio

Abeto navideño

Problem - B - Codeforces

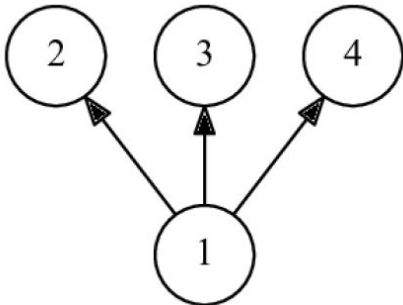
Ejemplo 1

Input

4
1
1
1

Output

Yes



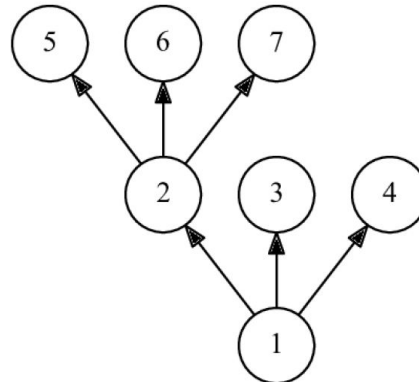
Ejemplo 2

Input

7
1
1
1
2
2
2

Output

No



Ejemplo 3

Input

8
1
1
1
1
3
3
3

Output

Yes

