

## **Trabajo Práctico N° 4:** **Sucesión e Inducción.**

### **Ejercicio 1.**

*Hallar los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones:*

**(a)**  $a_h = (-1)^h 3^h, h \geq 1.$

$$a_1 = (-1)^1 3^1 = -1 * 3 = -3.$$

$$a_2 = (-1)^2 3^2 = 1 * 9 = 9.$$

$$a_3 = (-1)^3 3^3 = -1 * 27 = -27.$$

$$a_4 = (-1)^4 3^4 = 1 * 81 = 81.$$

**(b)**  $b_j = 2j + 3^j, j \geq 1.$

$$b_1 = 2 * 1 + 3^1 = 2 + 3 = 5.$$

$$b_2 = 2 * 2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

$$b_3 = 2 * 3 + 3^3 = 6 + 27 = 33.$$

$$b_4 = 2 * 4 + 3^4 = 8 + 81 = 89.$$

**(c)**  $c_t = 2^t - 1, t \geq 1.$

$$c_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

$$c_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

$$c_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

$$c_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15.$$

**(d)**  $d_h = h^2, h \geq 1.$

$$d_1 = 1^2 = 1.$$

$$d_2 = 2^2 = 4.$$

$$d_3 = 3^2 = 9.$$

$$d_4 = 4^2 = 16.$$

**(e)**  $e_1 = 4, e_k = -3e_{k-1} + 2, k \geq 2.$

$$e_1 = 4.$$

$$e_2 = -3e_1 = -3 * 4 = -12.$$

$$e_3 = -3e_2 = -3 (-12) = 36.$$

$$e_4 = -3e_3 = -3 * 36 = -108.$$

$$(f) f_1 = -2, f_2 = 1, f_k = 3f_{k-1} - f_{k-2}, k \geq 3.$$

$$f_1 = -2.$$

$$f_2 = 1.$$

$$f_3 = 3f_2 - f_1 = 3 * 1 - (-2) = 3 + 2 = 5.$$

$$f_4 = 3f_3 - f_2 = 3 * 5 - 1 = 15 - 1 = 14.$$

$$(g) g_h = 4, h \geq 1.$$

$$g_1 = 4.$$

$$g_2 = 4.$$

$$g_3 = 4.$$

$$g_4 = 4.$$

$$(h) x_1 = 3, x_{k+1} = x_k - \tan x_k, k \geq 1, \text{ esta sucesión genera aproximaciones del número } \pi.$$

$$x_1 = 3.$$

$$x_2 = x_1 - \tan x_1 = 3 - \tan 3 = 2,95.$$

$$x_3 = x_2 - \tan x_2 = 2,95 - \tan 2,95 = 2,9.$$

$$x_4 = x_3 - \tan x_3 = 2,9 - \tan 2,9 = 2,85.$$

**Ejercicio 2.**

*Hallar una definición, explícita o recursiva, para las siguientes sucesiones:*

**(a)**  $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Explícita:

$$a_n = (-1)^{n+1}, n \geq 1.$$

Recursiva:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1. \\ a_n &= -a_{n-1}, n \geq 2. \end{aligned}$$

**(b)**  $1, 8, 27, 64, 125, \dots$

Explícita:

$$b_n = n^3, n \geq 1.$$

**(c)**  $4, 9, 14, 19, 24, 29, \dots$

Explícita:

$$c_n = 4 + (n - 1) * 5, n \geq 1.$$

Recursiva:

$$\begin{aligned} c_1 &= 4. \\ c_n &= c_{n-1} + 5, n \geq 2. \end{aligned}$$

**(d)**  $-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

Explícita:

$$d_n = -3 + (n - 1) * 2, n \geq 1.$$

Recursiva:

$$\begin{aligned} d_1 &= -3. \\ d_n &= d_{n-1} + 2, n \geq 2. \end{aligned}$$

(e)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Explícita:

$$e_n = \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

(f)  $2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \dots$

Recursiva:

$$f_1 = 2.$$

$$f_2 = 5.$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3.$$

(g)  $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Explícita:

$$g_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1.$$

(h)  $0, 5, 10, 15, 20, \dots$

Explícita:

$$h_n = (n - 1) * 5, n \geq 1.$$

Recursiva:

$$h_1 = 0.$$

$$h_n = h_{n-1} + 5, n \geq 2.$$

**Ejercicio 3.**

(a) Dada la sucesión  $d_h = \frac{h^2}{h+1}$ ,  $h \geq 1$ . Encontrar  $d_3$ ,  $d_5$ ,  $d_j$  y  $d_{h+1}$ .

$$d_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}.$$

$$d_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}.$$

$$d_j = \frac{j^2}{j+1}.$$

$$d_{h+1} = \frac{(h+1)^2}{h+1+1} = \frac{(h+1)^2}{h+2}.$$

(b) Dada la sucesión  $f_1 = -2$ ,  $f_2 = 1$ ,  $f_k = 3f_{k-1} - f_{k-2}$ ,  $k \geq 3$ . Encontrar  $f_t$ ,  $f_{j+2}$ ,  $f_{k-3}$  y  $f_{h+1}$ .

$$f_t = 3f_{t-1} - f_{t-2}.$$

$$f_{j+2} = 3f_{j+1} - f_j.$$

$$f_{k-3} = 3f_{k-4} - f_{k-5}.$$

$$f_{h+1} = 3f_h - f_{h-1}.$$

**Ejercicio 4.**

*Dar una definición explícita para las siguientes sucesiones:*

(a)  $4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$

$$a_n = 4 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, n \geq 1.$$

(b)  $5, 15, 25, 35, 45, \dots$

$$b_n = 5 + (n - 1) * 10, n \geq 1.$$

(c)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \dots$

$$c_n = \frac{1}{3n + (-1)^n}, n = 1.$$

$$c_n = \frac{1}{3n + (-1)^{n+1}}, 1 < n \leq 3.$$

$$c_n = \frac{1}{3n + 5}, n = 4.$$

$$c_n = \frac{1}{3n + 11}, n = 5.$$

...

(d)  $0, -4, 8, -12, 16, -20, \dots$

$$d_n = (-1)^{n+1} (n - 1) * 4, n \geq 1.$$

**Ejercicio 5.**

Algunas calculadoras utilizan un algoritmo similar al siguiente para calcular  $\sqrt{n}$ , para un número  $n$  real positivo:

Sea  $x_1 = \frac{n}{2}$ , encontrar aproximaciones sucesivas  $x_2, x_3, \dots$  mediante la siguiente fórmula:  
 $x_k = \frac{1}{2} \left( x_{k-1} + \frac{n}{x_{k-1}} \right), k \geq 2$ , hasta obtener la precisión deseada.

Utilizar este método para calcular  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{18}$  con una precisión de 6 cifras decimales.

(a)  $\sqrt{5} \cong 2,236068$ .

$$x_1 = \frac{5}{2} = 2,5.$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{5}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} + \frac{5}{\frac{5}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} + 2 \right) = \frac{1}{2} \frac{9}{2} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{5}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{9}{4} + \frac{5}{\frac{9}{4}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{9}{4} + \frac{20}{9} \right) = \frac{1}{2} \frac{161}{36} = \frac{161}{72} = 2,236\hat{1}.$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{5}{x_3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{161}{72} + \frac{5}{\frac{161}{72}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{161}{72} + \frac{360}{161} \right) = \frac{1}{2} \frac{51841}{11592} = \frac{51841}{23184} = 2,236068.$$

(b)  $\sqrt{18} \cong 4,242641$ .

$$x_1 = \frac{18}{2} = 9.$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{18}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 9 + \frac{18}{9} \right) = \frac{1}{2} \frac{86}{9} = \frac{43}{9} = 4,7\hat{7}.$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{18}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{43}{9} + \frac{18}{\frac{43}{9}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{43}{9} + \frac{40}{43} \right) = \frac{1}{2} \frac{2209}{387} = \frac{2209}{774} = 2,854005.$$

**Ejercicio 6.**

*Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar una definición explícita en todos los casos.*

**(a)**  $1, 1, 1, 1, 1, \dots$

$$a_n = 1 + 0n, n \geq 1.$$

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(b)**  $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

$$a_n = (-1)^{n+1}, n \geq 1.$$

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(c)**  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$a_n = 1 + (n - 1), n \geq 1.$$

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(d)**  $4, 5, 6, 7, 8, \dots$

$$a_n = 4 + (n - 1), n \geq 1.$$

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(e)**  $13, 20, 27, 34, 41, \dots$

$$a_n = 13 + (n - 1) * 7, n \geq 1.$$

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(f)**  $8, \frac{2}{3}, \frac{1}{18}, \frac{1}{216}, \dots$

$$a_n = 8 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}, n \geq 1.$$

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

(g)  $a_n = 2n, n \geq 1.$

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

(h)  $a_n = 2^n, n \geq 1.$

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

(i)  $10, \frac{19}{2}, 9, \frac{17}{2}, 8, \frac{15}{2}.$

$$a_n = 10 \left(\frac{95}{10}\right)^{n-1}, n \geq 1.$$

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

(i)  $300, -30, 3, -0,3, ....$

$$a_n = (-1)^{n+1} * 300 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, n \geq 1.$$

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

**Ejercicio 7.**

*Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar el primer término y diferencia o primer término y razón según corresponda.*

**(a)**  $a_n = 7 \left(1 + \frac{3}{7}n\right) + 2, n \geq 1.$

$$a_1 = 7 \left(1 + \frac{3}{7} * 1\right) + 2$$

$$a_1 = 7 \left(1 + \frac{3}{7}\right) + 2$$

$$a_1 = 7 \frac{10}{7} + 2$$

$$a_1 = 10 + 2$$

$$a_1 = 12.$$

$$a_2 = 7 \left(1 + \frac{3}{7} * 2\right) + 2$$

$$a_2 = 7 \left(1 + \frac{6}{7}\right) + 2$$

$$a_2 = 7 \frac{13}{7} + 2$$

$$a_2 = 13 + 2$$

$$a_2 = 15.$$

$$d = a_2 - a_1$$

$$d = 15 - 12$$

$$d = 3.$$

Por lo tanto, esta sucesión es aritmética.

**(b)**  $b_n = 5 * 2^{n-2}, n \geq 1.$

$$b_1 = 5 * 2^{1-2}$$

$$b_1 = 5 * 2^{-1}$$

$$b_1 = \frac{5}{2}.$$

$$b_2 = 5 * 2^{2-2}$$

$$b_2 = 5 * 2^0$$

$$b_2 = 5 * 1$$

$$b_2 = 5.$$

$$r = \frac{b_2}{b_1}$$

$$r = \frac{5}{\frac{5}{2}}$$

$$r = 2.$$

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

(c)  $c_n = 3 \cdot 4^{n+1}, n \geq 1.$

$$c_1 = 3 \cdot 4^{1+1}$$

$$c_1 = 3 \cdot 4^2$$

$$c_1 = 3 \cdot 16$$

$$c_1 = 48.$$

$$c_2 = 3 \cdot 4^{2+1}$$

$$c_2 = 3 \cdot 4^3$$

$$c_2 = 3 \cdot 64$$

$$c_2 = 192.$$

$$r = \frac{c_2}{c_1}$$

$$r = \frac{192}{48}$$

$$r = 4.$$

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

(d)  $d_n = 5 \left( \frac{4}{5} - n \right), n \geq 1.$

$$d_1 = 5 \left( \frac{4}{5} - 1 \right)$$

$$d_1 = 5 \left( \frac{-1}{5} \right)$$

$$d_1 = -1.$$

$$d_2 = 5 \left( \frac{4}{5} - 2 \right)$$

$$d_2 = 5 \left( \frac{-6}{5} \right)$$

$$d_2 = -6.$$

$$d = d_2 - d_1$$

$$d = -6 - (-1)$$

$$d = -6 + 1$$

$$d = -5.$$

Por lo tanto, esta sucesión es aritmética.

(e)  $e_n = 2 \left( \frac{1}{3} \right)^n, n \geq 1.$

$$e_1 = 2 \left( \frac{1}{3} \right)^1$$

$$e_1 = 2 \frac{1}{3}$$

$$e_1 = \frac{2}{3}.$$

$$e_2 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$e_2 = 2 \frac{1}{9}$$

$$e_2 = \frac{2}{9}.$$

$$r = \frac{e_2}{e_1}$$

$$r = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}}$$

$$r = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

**Ejercicio 8.**

*El tercer término de una sucesión aritmética es 85 y el decimocuarto es 30, hallar el primer término y la diferencia.*

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \Leftrightarrow 85 = a_1 + 2d \\ a_{14} = a_1 + 13d \Leftrightarrow 30 = a_1 + 13d \end{cases}$$

$$85 - 30 = (a_1 + 2d) - (a_1 + 13d)$$

$$55 = a_1 + 2d - a_1 - 13d$$

$$55 = -11d$$

$$d = \frac{55}{-11}$$

$$d = -5.$$

$$a_1 = 85 - 2(-5) = 85 + 10 = 95.$$

$$a_1 = 30 - 13(-5) = 30 + 65 = 95.$$

Por lo tanto, el primer término y la diferencia son 95 y -5, respectivamente.

**Ejercicio 9.**

Encontrar tres números  $f$ ,  $g$  y  $h$  tales que 320,  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , 20 sean los 5 primeros términos de una sucesión geométrica.

$$a_5 = a_1 r^4$$

$$20 = 320 r^4$$

$$r^4 = \frac{20}{320}$$

$$r^4 = \frac{1}{16}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$f = a_2$$

$$f = 320 \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$f = 320 \frac{1}{2}$$

$$f = 160.$$

$$g = a_3$$

$$g = 320 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$g = 320 \frac{1}{4}$$

$$g = 80.$$

$$h = a_4$$

$$h = 320 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$h = 320 \frac{1}{8}$$

$$h = 40.$$

Por lo tanto, los tres números  $f$ ,  $g$  y  $h$  son 160, 80, 40, respectivamente.

**Ejercicio 10.**

*Hallar el primer término y la diferencia de una sucesión aritmética sabiendo que la suma del tercer término y el octavo da 75 y la diferencia entre el noveno y el segundo es 49.*

$$a_3 + a_8 = 75$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 7d = 75$$

$$2a_1 + 9d = 75.$$

$$a_9 - a_2 = 49$$

$$(a_1 + 8d) - (a_1 + d) = 49$$

$$a_1 + 8d - a_1 - d = 49$$

$$9d = 49$$

$$d = \frac{49}{9}.$$

$$2a_1 + 9 \frac{49}{9} = 75$$

$$2a_1 + 49 = 75$$

$$2a_1 = 75 - 49$$

$$2a_1 = 26$$

$$a_1 = \frac{26}{2}$$

$$a_1 = 13.$$

Por lo tanto, el primer término y la diferencia son 13 y  $\frac{49}{9}$ , respectivamente.

**Ejercicio 11.**

La superficie de un triángulo rectángulo es  $54 \text{ cm}^2$ . Hallar la longitud de sus lados sabiendo que están en progresión aritmética. (Idea: Plantear la relación pitagórica del triángulo rectángulo y resolver la ecuación cuadrática para  $a_1$  dejando fijo  $d$ ).

$$S = \frac{a_1 a_2}{2}$$

$$S = \frac{a_1(a_1 + d)}{2}$$

$$54 = \frac{a_1^2 + a_1 d}{2}$$

$$a_1^2 + a_1 d = 54 * 2$$

$$a_1^2 + a_1 d = 108$$

$$a_1^2 + a_1 d - 108 = 0.$$

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2d)^2$$

$$a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 d + d^2 = a_1^2 + 4a_1 d + 4d^2$$

$$2a_1^2 + 2a_1 d + d^2 = a_1^2 + 4a_1 d + 4d^2$$

$$2a_1^2 + 2a_1 d + d^2 - a_1^2 - 4a_1 d - 4d^2 = 0$$

$$a_1^2 - 2a_1 d - 3d^2 = 0.$$

$$\left(\frac{a_1}{d}\right)^2 - 2\frac{a_1}{d} - 3 = 0.$$

$$\left(\frac{a_1}{d}\right)_1, \left(\frac{a_1}{d}\right)_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * (-3)}}{2 * 1}$$

$$\left(\frac{a_1}{d}\right)_1, \left(\frac{a_1}{d}\right)_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$\left(\frac{a_1}{d}\right)_1, \left(\frac{a_1}{d}\right)_2 = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\left(\frac{a_1}{d}\right)_1, \left(\frac{a_1}{d}\right)_2 = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\left(\frac{a_1}{d}\right)_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\left(\frac{a_1}{d}\right)_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\frac{a_1}{d} = 3$$

$$a_1 = 3d.$$

$$(3d)^2 + 3dd - 108 = 0$$

$$9d^2 + 3d^2 - 108 = 0$$

$$12d^2 - 108 = 0$$

$$12d^2 = 108$$

$$d^2 = \frac{108}{12}$$

$$d^2 = 9$$

$$d = \sqrt{9}$$

$$d = 3.$$

$$a_1 = 3 * 3$$

$$a_1 = 9.$$

$$a_2 = 9 + 3$$

$$a_2 = 12.$$

Por lo tanto, la longitud de sus lados es 9 cm y 12 cm, respectivamente.

**Ejercicio 12.**

*Se desea construir una escalera de pared de 16 escalones cuyas longitudes decrecen uniformemente de 50 cm en la base a 30 cm en la parte superior. Encontrar una fórmula para saber cuánto mide el escalón  $n$ .*

$$a_{16} = a_1 + 15d$$

$$30 = 50 + 15d$$

$$15d = 30 - 50$$

$$15d = -20$$

$$d = \frac{-20}{15}$$

$$d = \frac{-4}{3}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \left( \frac{-4}{3} \right), n \geq 2.$$

**Ejercicio 13.**

*Hallar el término especificado de la sucesión aritmética a partir de los términos dados:*

**(a)**  $a_{11}$ , siendo  $a_1 = 2 + \sqrt{2}$  y  $a_2 = 3$ .

$$d = a_2 - a_1$$

$$d = 3 - (2 + \sqrt{2})$$

$$d = 3 - 2 - \sqrt{2}$$

$$d = 1 - \sqrt{2}.$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$a_{11} = 2 + \sqrt{2} + 10(1 - \sqrt{2})$$

$$a_{11} = 2 + \sqrt{2} + 10 - 10\sqrt{2}$$

$$a_{11} = 12 - 9\sqrt{2}.$$

**(b)**  $a_1$ , siendo  $a_8 = 47$  y  $a_9 = 53$ .

$$d = a_9 - a_8$$

$$d = 53 - 47$$

$$d = 6.$$

$$a_8 = a_1 + 7d$$

$$47 = a_1 + 7 * 6$$

$$47 = a_1 + 42$$

$$a_1 = 47 - 42$$

$$a_1 = 5.$$

**Ejercicio 14.**

*Encontrar la razón de una sucesión geométrica cuyo primer término es 320 y el séptimo es 5.*

$$a_1 = 320.$$

$$a_7 = a_1 r^6$$

$$5 = 320 r^6$$

$$r^6 = \frac{5}{320}$$

$$r^6 = \frac{1}{64}$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$$

$$r = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la razón es  $\frac{1}{2}$ .

**Ejercicio 15.**

Hallar todos los posibles valores de  $r$  para una sucesión geométrica con los términos dados:

(a)  $a_4 = 3$  y  $a_6 = 9$ .

$$\begin{aligned} a_4 &= 3 \\ a_1 r^3 &= 3 \\ r^3 &= \frac{3}{a_1} \\ r &= \left(\frac{3}{a_1}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 &= 9 \\ a_1 r^5 &= 9 \\ r^5 &= \frac{9}{a_1} \\ r &= \left(\frac{9}{a_1}\right)^{\frac{1}{5}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{a_1}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{9}{a_1}\right)^{\frac{1}{5}} \\ \left[\left(\frac{3}{a_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^5 &= \frac{9}{a_1} \\ \left(\frac{3}{a_1}\right)^{\frac{5}{3}} &= \frac{3^2}{a_1} \\ \frac{3^{\frac{5}{3}}}{a_1^{\frac{5}{3}}} &= \frac{3^2}{a_1} \\ \frac{a_1^{\frac{5}{3}}}{a_1^{\frac{5}{3}}} &= \frac{3^{\frac{5}{3}}}{3^2} \\ a_1^{\frac{2}{3}} &= 3^{\frac{-1}{3}} \\ a_1 &= \left(3^{\frac{-1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \\ a_1 &= 3^{\frac{-1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{3}{\frac{3}{3^{\frac{1}{2}}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}}. \\ r &= \left(\frac{9}{\frac{3}{3^{\frac{1}{2}}}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(b)  $a_3 = 4$  y  $a_7 = \frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} a_3 &= 4 \\ a_1 r^2 &= 4 \\ r^2 &= \frac{4}{a_1} \end{aligned}$$

$$r = \left(\frac{4}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r = \frac{2}{\frac{1}{a_1^2}}.$$

$$a_7 = \frac{1}{4}$$

$$a_1 r^6 = \frac{1}{4}$$

$$r^6 = \frac{1}{4a_1}$$

$$r = \left(\frac{1}{4a_1}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{4^{\frac{1}{6}} a_1^{\frac{1}{6}}}}$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2^{\frac{2}{3}} a_1^{\frac{1}{6}}}}.$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{\frac{2}{3}} a_1^{\frac{1}{6}}}}$$

$$\frac{a_1^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a_1^{\frac{1}{6}}}} = 2 * 2^{\frac{1}{3}}$$

$$a_1^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$a_1 = (2^{\frac{4}{3}})^3$$

$$a_1 = 2^4$$

$$a_1 = 16.$$

$$r = \frac{2}{\frac{1}{16^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2^{\frac{2}{3}} 16^{\frac{1}{6}}}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{2}.$$

**Ejercicio 16.**

*La cantidad de bacterias en cierto cultivo es, inicialmente, 500 y el cultivo se duplica todos los días.*

**(a)** *Encontrar la cantidad de bacterias en el día 2, día 3 y día 4.*

$$a_1 = 500.$$

$$d = 2.$$

$$a_2 = a_1 * 2$$

$$a_2 = 500 * 2$$

$$a_2 = 1000.$$

$$a_3 = a_2 * 2$$

$$a_3 = 1000 * 2$$

$$a_3 = 2000.$$

$$a_4 = a_3 * 2$$

$$a_4 = 2000 * 2$$

$$a_4 = 4000.$$

**(b)** *Dar una fórmula para hallar la población bacteriana en el día  $n$ .*

$$a_n = a_1 2^{n-1}, n \geq 2.$$

**Ejercicio 17.**

Habitualmente, se agrega cloro al agua de las piscinas para controlar los microorganismos. Si el nivel de cloro es mayor de 3 ppm (partes por millón), los nadadores sentirán ardor en los ojos e incomodidad en la piel; si el nivel baja a menos de 1 ppm, existe la posibilidad de que el agua tome color verde por la presencia de algas. El cloro debe agregarse al agua a intervalos regulares. Si no se agrega cloro a una piscina en un periodo de 24 hs, alrededor del 20% del cloro existente se disipará en la atmósfera y el 80% permanecerá en el agua.

(a) Determinar la sucesión  $a_n$  que exprese la cantidad de cloro presente después de  $n$  días, si la piscina tiene  $a_1$  ppm de cloro al principio y no vuelve a agregarse. Expresar la sucesión en forma recursiva y en forma explícita.

Explícita:

$$a_n = a_1 * 0,8^{n-1}, n \geq 2.$$

Recursiva:

$$a_1.$$

$$a_n = 0,8a_{n-1}, n \geq 2.$$

(b) Si al inicio tiene 7 ppm, determinar el primer día en que el nivel de cloro baja de 3 ppm.

$$a_n < 3$$

$$7 * 0,8^{n-1} < 3$$

$$0,8^{n-1} < \frac{3}{7}$$

$$\ln 0,8^{n-1} < \ln \frac{3}{7}$$

$$(n-1) \ln 0,8 < \ln \frac{3}{7}$$

$$n-1 > \frac{\ln \frac{3}{7}}{\ln \frac{8}{10}}$$

$$n-1 > \frac{-0,85}{-0,22}$$

$$n-1 > 3,86$$

$$n > 3,86 + 1$$

$$n > 4,86.$$

Por lo tanto, si al inicio tiene 7ppm, el primer día en que el nivel de cloro baja de 3 ppm es el quinto día.

**Ejercicio 18.***Desarrollar las siguientes sumas:*

(a)  $\sum_{k=1}^7 (2k - 4).$

$$\sum_{k=1}^7 (2k - 4) = (2 * 1 - 4) + (2 * 2 - 4) + (2 * 3 - 4) + (2 * 4 - 4) + (2 * 5 - 4) + (2 * 6 - 4) + (2 * 7 - 4).$$

(b)  $\sum_{t=4}^{10} (3^t - t^2).$

$$\sum_{t=4}^{10} (3^t - t^2) = (3^5 - 5^2) + (3^6 - 6^2) + (3^7 - 7^2) + (3^8 - 8^2) + (3^9 - 9^2) + (3^{10} - 10^2).$$

(c)  $\sum_{h=5}^{14} (2 - \frac{4}{h}).$

$$\sum_{h=5}^{14} (2 - \frac{4}{h}) = (2 - \frac{4}{5}) + (2 - \frac{4}{6}) + (2 - \frac{4}{7}) + (2 - \frac{4}{8}) + (2 - \frac{4}{9}) + (2 - \frac{4}{10}) + (2 - \frac{4}{11}) + (2 - \frac{4}{12}) + (2 - \frac{4}{13}) + (2 - \frac{4}{14}).$$

**Ejercicio 19.**

Completar las siguientes igualdades:

$$(a) \sum_{k=1}^{28} 2k - 4 = \sum_{k=1}^7 2k - 4 + \sum_{k=8}^{28} 2k - 4.$$

$$\sum_{k=1}^{28} 2k - 4 = \sum_{k=1}^7 2k - 4 + \sum_{k=8}^{28} 2k - 4.$$

$$(b) \sum_{t=4}^{10} (3^t - t^2) = \sum_{t=1}^{10} (3^t - t^2) - \sum_{t=1}^3 (3^t - t^2).$$

$$\sum_{t=4}^{10} (3^t - t^2) = \sum_{t=1}^{10} (3^t - t^2) - \sum_{t=1}^3 (3^t - t^2).$$

$$(c) \sum_{h=5}^{14} (2 - \frac{4}{h}) = \sum_{h=1}^{14} (2 - \frac{4}{h}) - \sum_{h=1}^4 (2 - \frac{4}{h}).$$

$$\sum_{h=5}^{14} (2 - \frac{4}{h}) = \sum_{h=1}^{14} (2 - \frac{4}{h}) - \sum_{h=1}^4 (2 - \frac{4}{h}).$$

$$(d) \sum_{i=4}^{10} 2^i + i = 2^4 + 4 + \sum_{i=5}^{10} 2^i + i.$$

$$\sum_{i=4}^{10} 2^i + i = 2^4 + 4 + \sum_{i=5}^{10} 2^i + i.$$

$$(e) \sum_{j=3}^{18} \frac{1+j}{j} = \sum_{j=3}^{17} \frac{1+j}{j} + \frac{1+18}{17}.$$

$$\sum_{j=3}^{18} \frac{1+j}{j} = \sum_{j=3}^{17} \frac{1+j}{j} + \frac{1+18}{17}.$$

$$(f) \sum_{j=2}^{45} \frac{4-j}{j+1} = \sum_{j=2}^{44} \frac{4-j}{j+1} + \dots$$

$$\sum_{j=2}^{45} \frac{4-j}{j+1} = \sum_{j=2}^{44} \frac{4-j}{j+1} + \frac{4-45}{45+1}.$$

$$(g) \sum_{n=3}^h \frac{4}{n+1} = \sum_{n=3}^{h-1} \frac{4}{n+1} + \dots$$

$$\sum_{n=3}^h \frac{4}{n+1} = \sum_{n=3}^{h-1} \frac{4}{n+1} + \frac{4}{h+1}.$$

$$(h) \sum_{t=6}^k \frac{t}{t+2} = \sum_{t=6}^{k-1} \frac{t}{t+2} + \dots$$

$$\sum_{t=6}^k \frac{t}{t+2} = \sum_{t=6}^{k-1} \frac{t}{t+2} + \frac{k}{k+2}.$$

**Ejercicio 20.**

*Escribir las siguientes sumas utilizando la notación sigma:*

(a)  $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots + 81.$

$$\sum_{i=1}^9 i^2.$$

(b)  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1.$

$$\sum_{i=0}^6 (-1)^i.$$

(c)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 46.$

$$\sum_{i=1}^{46} i.$$

(d)  $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 34.$

$$\sum_{i=4}^{34} i.$$

(e)  $13 + 20 + 27 + 34 + 41 + \dots + [13 + (n - 1) * 7].$

$$\sum_{i=1}^n 13 + (i - 1) * 7.$$

(f)  $8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{216} + \dots + 8 \left(\frac{1}{12}\right)^{k-1}.$

$$\sum_{i=1}^k 8 \left(\frac{1}{12}\right)^{k-1}.$$

(g)  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2t.$

$$\sum_{i=1}^t 2i.$$

**Ejercicio 21.***Dar el resultado de las siguientes sumas:*

(a)  $\sum_{i=1}^4 4i^2 + 5$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 4i^2 + 5 &= \sum_{i=1}^4 4i^2 + \sum_{i=1}^4 5 \\
\sum_{i=1}^4 4i^2 + 5 &= 4 \sum_{i=1}^4 i^2 + 4 * 5 \\
\sum_{i=1}^4 4i^2 + 5 &= 4 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 20 \\
\sum_{i=1}^4 4i^2 + 5 &= 4 (1 + 4 + 9 + 16) + 20 \\
\sum_{i=1}^4 4i^2 + 5 &= 4 * 30 + 20 \\
\sum_{i=1}^4 4i^2 + 5 &= 120 + 20 \\
\sum_{i=1}^4 4i^2 + 5 &= 140.
\end{aligned}$$

(b)  $\sum_{j=3}^6 \frac{j-1}{j-2}$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{j=3}^6 \frac{j-1}{j-2} &= \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} \\
\sum_{j=3}^6 \frac{j-1}{j-2} &= \frac{73}{12}.
\end{aligned}$$

(c)  $\sum_{k=3}^8 k(k-1)$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^8 k(k-1) &= 3 * 2 + 4 * 3 + 5 * 4 + 6 * 5 + 7 * 6 + 8 * 7 \\
\sum_{k=3}^8 k(k-1) &= 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 \\
\sum_{k=3}^8 k(k-1) &= 166.
\end{aligned}$$

(d)  $\sum_{t=5}^9 1 + (-1)^t$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{t=5}^9 1 + (-1)^t &= \sum_{t=5}^9 1 + \sum_{t=5}^9 (-1)^t \\
\sum_{t=5}^9 1 + (-1)^t &= 5 * 1 + (-1) \\
\sum_{t=5}^9 1 + (-1)^t &= 5 - 1 \\
\sum_{t=5}^9 1 + (-1)^t &= 4.
\end{aligned}$$

(e)  $\sum_{i=1}^{200} 10$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{200} 10 &= 200 * 10 \\
\sum_{i=1}^{200} 10 &= 2000.
\end{aligned}$$

(f)  $\sum_{j=8}^{70} 20$ .

$$\sum_{j=8}^{70} 20 = 63 * 20$$

$$\sum_{j=8}^{70} 20 = 1260.$$

**Ejercicio 22.**

Calcular las siguientes sumas de dos formas diferentes: a) aplicando la suma de una sucesión aritmética, b) aplicando las propiedades vistas de la sumatoria.

(a)  $\sum_{i=1}^{30} 4i + 5$ .

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= \frac{30[(4 \cdot 1 + 5) + (4 \cdot 30 + 5)]}{2} \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= \frac{30[(4 + 5) + (120 + 5)]}{2} \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= \frac{30(9 + 125)}{2} \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= \frac{30 \cdot 134}{2} \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= \frac{4020}{2} \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= 2010.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= \sum_{i=1}^{30} 4i + \sum_{i=1}^{30} 5 \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= 4 \sum_{i=1}^{30} i + 30 \cdot 5 \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= 4 \cdot 465 + 150 \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= 1860 + 150 \\ \sum_{i=1}^{30} 4i + 5 &= 2010.\end{aligned}$$

(b)  $\sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2$ .

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= \frac{33\{[-3(1 - 1) + 2] + [-3(33 - 1) + 2]\}}{2} \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= \frac{33[(-3 \cdot 0 + 2) + (-3 \cdot 32 + 2)]}{2} \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= \frac{33[(0 + 2) + (-96 + 2)]}{2} \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= \frac{33[2 + (-94)]}{2} \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= \frac{33(2 - 94)}{2} \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= \frac{33(-92)}{2} \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= \frac{-3036}{2} \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= -1518.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + \sum_{j=1}^{33} 2 \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= -3 \sum_{j=1}^{33} j - 1 + 33 \cdot 2 \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= -3 (\sum_{j=1}^{33} j - \sum_{j=1}^{33} 1) + 66 \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= -3 (561 - 33 \cdot 1) + 66 \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= -3 (561 - 33) + 66 \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= -3 \cdot 528 + 66 \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= -1584 + 66 \\ \sum_{j=1}^{33} -3(j - 1) + 2 &= -1518.\end{aligned}$$

(c)  $\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1)$ .

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= \frac{45\{[4+5(1-1)]+[4+5(45-1)]\}}{2} \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= \frac{45[(4+5*0)+(4+5*44)]}{2} \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= \frac{45[(4+0)+(4+220)]}{2} \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= \frac{45(4+224)}{2} \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= \frac{45*228}{2} \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= \frac{10260}{2} \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= 5130.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= \sum_{k=1}^{45} 4 + \sum_{k=1}^{45} 5(k - 1) \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= 45 * 4 + 5 \sum_{k=1}^{45} k - 1 \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= 180 + 5 (\sum_{k=1}^{45} k - \sum_{k=1}^{45} 1) \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= 180 + 5 (1035 - 45 * 1) \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= 180 + 5 (1035 - 45) \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= 180 + 5 * 990 \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= 180 + 4950 \\ \sum_{k=1}^{45} 4 + 5(k - 1) &= 5130.\end{aligned}$$

(d)  $\sum_{t=1}^h 3t + 1$ .

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \frac{h[(3*1+1)+(3h+1)]}{2} \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \frac{h[(3+1)+(3h+1)]}{2} \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \frac{h(4+3h+1)}{2} \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \frac{h(3h+5)}{2} \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \frac{3h^2+5h}{2} \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{2}h.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \sum_{t=1}^h 3t + \sum_{t=1}^h 1 \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= 3 \sum_{t=1}^h t + h * 1 \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= 3 \frac{h(1+h)}{2} + h \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= 3 \frac{h+h^2}{2} + h \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= 3 \left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2\right) + h \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \frac{3}{2}h + \frac{3}{2}h^2 + h \\ \sum_{t=1}^h 3t + 1 &= \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{2}h.\end{aligned}$$

**Ejercicio 23.**

(a) Dada la siguiente sucesión definida en forma recursiva  $c_1=3$  y  $c_n=4+c_{n-1}$ , si  $n \geq 2$ , calcular  $\sum_{k=1}^n c_k$ .

$$\sum_{k=1}^n c_k = \frac{n(3+4+c_{n-1})}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n c_k = \frac{n(7+c_{n-1})}{2}$$

(b) Dar el valor de  $\sum_{k=10}^{67} c_k$ .

$$\sum_{k=10}^{67} c_k = \sum_{k=1}^{67} c_k - \sum_{k=1}^9 c_k$$

$$\sum_{k=10}^{67} c_k = \frac{67(7+c_{66})}{2} - \frac{9(7+c_8)}{2}$$

$$\sum_{k=10}^{67} c_k = \frac{469+67c_{66}}{2} - \frac{63+9c_8}{2}$$

$$\sum_{k=10}^{67} c_k = \frac{469+67c_{66}-63-9c_8}{2}$$

$$\sum_{k=10}^{67} c_k = \frac{403+67c_{66}-9c_8}{2}.$$

**Ejercicio 24.**

(a) Dada la siguiente sucesión definida por sus primeros términos  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = 4$ ,  $s_3 = 9$ ,  $s_4 = 14$ , ..., calcular  $\sum_{j=1}^t s_j$ .

$$\sum_{j=1}^t s_j = \frac{t(-1+5+s_{j-1})}{2}$$

$$\sum_{j=1}^t s_j = \frac{t(4+s_{j-1})}{2}.$$

(b) Dar el valor de  $\sum_{j=21}^{100} 2s_j$ .

$$\sum_{j=21}^{100} s_j = \sum_{j=1}^{100} s_j - \sum_{j=1}^{20} s_j$$

$$\sum_{j=21}^{100} s_j = \frac{100(4+s_{99})}{2} - \frac{20(4+s_{19})}{2}$$

$$\sum_{j=21}^{100} s_j = 50(4+s_{99}) - 10(4+s_{19})$$

$$\sum_{j=21}^{100} s_j = 200 + 50s_{99} - 40 - 10s_{19}$$

$$\sum_{j=21}^{100} s_j = 160 + 50s_{99} - 10s_{19}.$$

**Ejercicio 25.**

*Calcular la suma de los 200 primeros números naturales.*

$$\sum_{i=1}^{200} i = \frac{200(1+200)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{200} i = 100 * 201$$

$$\sum_{i=1}^{200} i = 20100.$$

**Ejercicio 26.**

*Calcular la suma de los 100 primeros números impares.*

$$\sum_{i=0}^{99} 2i + 1 = \frac{100(1+199)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{99} 2i + 1 = 50 * 200$$

$$\sum_{i=0}^{99} 2i + 1 = 10000.$$

**Ejercicio 27.**

*Una pila de troncos tiene 24 troncos en la base, 23 en la segunda hilera, 22 en la tercera, y así siguiendo hasta llegar a la capa superior en la que tiene 10 troncos. Encontrar la cantidad total de troncos en la pila.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=10}^{24} i &= \frac{15(10+24)}{2} \\ \sum_{i=10}^{24} i &= \frac{15 \cdot 34}{2} \\ \sum_{i=10}^{24} i &= \frac{510}{2} \\ \sum_{i=10}^{24} i &= 255.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad total de troncos en la pila es 255.

**Ejercicio 28.**

*Sabiendo que la suma de los 10 primeros términos de una sucesión aritmética es 50 y el primer término es -2. Calcular la diferencia de la sucesión.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10} a_i &= 50 \\ \frac{10(-2 + a_{10})}{2} &= 50 \\ 5(-2 + a_{10}) &= 50 \\ -10 + 5a_{10} &= 50 \\ 5a_{10} &= 50 + 10 \\ 5a_{10} &= 60 \\ a_{10} &= \frac{60}{5} \\ a_{10} &= 12.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{10} &= a_1 + 9d \\ 9d &= a_{10} - a_1 \\ 9d &= 12 - (-2) \\ 9d &= 14 \\ d &= \frac{14}{9}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la diferencia de la sucesión es  $\frac{14}{9}$ .

**Ejercicio 29.**

*Pablo sumó todos los números enteros positivos de 4 dígitos, pero se saltó uno. La suma de Pablo es igual a 8499 veces el número que se saltó Pablo. Hallar el número que se saltó Pablo.*

$$\begin{aligned}
 8499x &= \sum_{i=1000}^{9999} i - x \\
 8499x + x &= \sum_{i=1000}^{9999} i \\
 8500x &= \sum_{i=1000}^{9999} i \\
 8500x &= \frac{9000(1000+9999)}{2} \\
 8500x &= 4500 * 10999 \\
 8500x &= 49495500 \\
 x &= \frac{49495500}{8500} \\
 x &= 5823.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número que se saltó Pablo es el 5823.

**Ejercicio 30.**

*Un ciclista avanza cuesta abajo a razón de 4 pies el primer segundo. En cada segundo sucesivo, avanza 5 pies más que en el segundo anterior. Si el deportista llega a la parte inferior del cerro en 11 segundos, encontrar la distancia total recorrida.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{11} a_i &= \frac{11(4+4+10*5)}{2} \\ \sum_{i=1}^{11} a_i &= \frac{11(4+4+50)}{2} \\ \sum_{i=1}^{11} a_i &= \frac{11*58}{2} \\ \sum_{i=1}^{11} a_i &= \frac{638}{2} \\ \sum_{i=1}^{11} a_i &= 319.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida es 319 pies.

**Ejercicio 31.**

*Si el primero de octubre ahorro 10 centavos, el 2 de octubre ahorro 20, el 3 de octubre ahorro 30 y así sucesivamente.*

**(a)** *¿Cuánto dinero ahorraré el 31 de octubre?*

$$a_{31} = 10 + 30 * 10$$

$$a_{31} = 10 + 300$$

$$a_{31} = 310.$$

Por lo tanto, el 31 de octubre ahorraré 3,10 pesos.

**(b)** *¿Cuánto dinero ahorraré en todo el mes de octubre?*

$$\sum_{i=1}^{31} a_i = \frac{31(10+310)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{31} a_i = \frac{31*320}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{31} a_i = 31 * 160$$

$$\sum_{i=1}^{31} a_i = 4960.$$

Por lo tanto, ahorraré 49,60 pesos en todo el mes de octubre.

**Ejercicio 32.**

Calcular las siguientes sumas:

(a)  $\sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ .

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}]}{1 - \frac{1}{2}} \\ \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}]}{\frac{1}{2}} \\ \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} &= \frac{1 [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}]}{\frac{1}{2}} \\ \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}}{\frac{1}{2}} \\ \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} &= 2 [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}].\end{aligned}$$

(b)  $\sum_{j=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^j$ .

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^j &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}]}{1 - \frac{1}{2}} \\ \sum_{j=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^j &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}]}{\frac{1}{2}} \\ \sum_{j=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^j &= \frac{\frac{1}{2} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}]}{\frac{1}{2}} \\ \sum_{j=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^j &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}.\end{aligned}$$

(c)  $\sum_{k=1}^{45} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ .

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{45} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{45}]}{1 - \frac{1}{2}} \\ \sum_{k=1}^{45} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{45}]}{\frac{1}{2}} \\ \sum_{k=1}^{45} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= \frac{1}{2} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{45}].\end{aligned}$$

(d)  $\sum_{t=1}^h 5 * 2^{t-1}$ .

$$\sum_{t=1}^h 5 * 2^{t-1} = \frac{5 * 2^1 (1 - 2^h)}{1 - 2}$$

$$\sum_{t=1}^h 5 * 2^{t-1} = \frac{5 * 2^{1-2^h}}{-1}$$

$$\sum_{t=1}^h 5 * 2^{t-1} = -10 (1 - 2^h).$$

$$(e) \sum_{k=1}^m 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

$$\sum_{k=1}^m 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4 * \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} [1 - \left(\frac{1}{3}\right)^m]}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\sum_{k=1}^m 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4 * \left(\frac{1}{3}\right)^0 [1 - \left(\frac{1}{3}\right)^m]}{\frac{2}{3}}$$

$$\sum_{k=1}^m 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4 * 1 [1 - \left(\frac{1}{3}\right)^m]}{\frac{2}{3}}$$

$$\sum_{k=1}^m 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4 [1 - \left(\frac{1}{3}\right)^m]}{\frac{2}{3}}$$

$$\sum_{k=1}^m 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 6 [1 - \left(\frac{1}{3}\right)^m].$$

$$(f) \sum_{t=1}^h 2 * 8^t.$$

$$\sum_{t=1}^h 2 * 8^t = \frac{2 * 8^1 (1 - 8^h)}{1 - 8}$$

$$\sum_{t=1}^h 2 * 8^t = \frac{2 * 8 (1 - 8^h)}{-7}$$

$$\sum_{t=1}^h 2 * 8^t = \frac{16 (1 - 8^h)}{-7}$$

$$\sum_{t=1}^h 2 * 8^t = \frac{-16}{7} (1 - 8^h).$$

$$(g) \sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1}.$$

$$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} = \frac{5 * 2^{8-1} (1 - 2^{73})}{1 - 2}$$

$$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} = \frac{5 * 2^7 (1 - 2^{73})}{-1}$$

$$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} = -5 * 2^7 (1 - 2^{73})$$

$$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} = -5 * 2^7 + 5 * 2^{80}$$

$$\sum_{k=8}^{80} 5 * 2^{k-1} = -5 (2^7 - 2^{80}).$$

$$(h) \sum_{j=14}^{94} 8^j.$$

$$\sum_{j=14}^{94} 8^j = \frac{8^{14} (1 - 8^{81})}{1 - 8}$$

$$\sum_{j=14}^{94} 8^j = \frac{8^{14} (1 - 8^{81})}{-7}$$

$$\sum_{j=14}^{94} 8^j = \frac{-8^{14}}{7} (1 - 8^{81})$$

$$\sum_{j=14}^{94} 8^j = \frac{-8^{14}}{7} + \frac{8^{95}}{7}$$

$$\sum_{j=14}^{94} 8^j = \frac{-1}{7} (8^{14} - 8^{95}).$$

**Ejercicio 33.**

Una pelota de ping pong se lanza desde una altura de 16 mts. En cada rebote, se eleva verticalmente  $\frac{1}{4}$  de la altura alcanzada en la caída previa.

(a) ¿A qué altura se elevará en el séptimo rebote?

$$a_7 = 16 \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

$$a_7 = 16 \frac{1}{4096}$$

$$a_7 = \frac{1}{256}.$$

Por lo tanto, a la altura que se elevará en el séptimo rebote es  $\frac{1}{256}$  mts.

(b) ¿Cuál es la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo?

$$\sum_{i=1}^7 a_n = \frac{16[1 - (\frac{1}{4})^7]}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\sum_{i=1}^7 a_n = \frac{16(1 - \frac{1}{16384})}{\frac{3}{4}}$$

$$\sum_{i=1}^7 a_n = \frac{16 \frac{16383}{16384}}{\frac{3}{4}}$$

$$\sum_{i=1}^7 a_n = \frac{16 \frac{16383}{16384}}{\frac{3}{4}}$$

$$\sum_{i=1}^7 a_n = \frac{64}{3}$$

$$\sum_{i=1}^7 a_n = 21, \hat{3}.$$

Por lo tanto, la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo es  $21, \hat{3}$  mts.

**Ejercicio 34.**

*Un mendigo le propuso a un avaro: “... durante este mes, le daré a usted un peso el primer día, dos pesos el segundo día, 3 el tercero y así sucesivamente. A cambio, usted sólo me dará 0,01 pesos el primer día, 0,02 pesos el segundo día, 0,04 pesos el tercero, 0,08 pesos el cuarto y así sucesivamente. El avaro aceptó entusiasmado y convinieron en realizar el pago a fin de mes. ¿Cuánto le deberá cada uno al otro al cabo de ese tiempo?*

$$\sum_{i=1}^{30} m_n = \frac{30(1+1+29*1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{30} m_n = 15 (1 + 1 + 29)$$

$$\sum_{i=1}^{30} m_n = 15 * 31$$

$$\sum_{i=1}^{30} m_n = 465.$$

$$\sum_{i=1}^{30} a_n = \frac{30(0,01+0,01+29*0,01)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{30} a_n = 15 (0,01 + 0,01 + 0,29)$$

$$\sum_{i=1}^{30} a_n = 15 * 0,31$$

$$\sum_{i=1}^{30} a_n = 4,65.$$

Por lo tanto, al cabo de ese tiempo, el mendigo le deberá al avaro 465 pesos, mientras que el avaro le deberá al mendigo 4,65 pesos.

**Ejercicio 35.**

Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, el valor de verdad de  $P(1)$ ,  $P(2)$ ,  $P(3)$  y establecer si los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad:

(a)  $P(n): 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2$ .

$$P(n): \sum_{i=1}^n 4i - 2 = 2n^2.$$

$$P(1): \sum_{i=1}^1 4i - 2 = 2 * 1^2$$

$$P(1): 4 * 1 - 2 = 2 * 1$$

$$P(1): 4 - 2 = 2$$

$$P(1): 2 = 2.$$

$$P(2): \sum_{i=1}^2 4i - 2 = 2 * 2^2$$

$$P(2): 4 * 1 - 2 + 4 * 2 - 2 = 2 * 4$$

$$P(2): 4 - 2 + 8 - 2 = 8$$

$$P(2): 8 = 8.$$

$$P(3): \sum_{i=1}^3 4i - 2 = 2 * 3^2$$

$$P(3): 4 * 1 - 2 + 4 * 2 - 2 + 4 * 3 - 2 = 2 * 9$$

$$P(3): 4 - 2 + 8 - 2 + 12 - 2 = 18$$

$$P(3): 18 = 18.$$

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

(b)  $P(n): 4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n + 1)$ .

$$P(n): \sum_{i=1}^n 4i = 2n(n + 1).$$

$$P(1): \sum_{i=1}^1 4i = 2 * 1(1 + 1)$$

$$P(1): 4 * 1 = 2 * 1 * 2$$

$$P(1): 4 = 4.$$

$$P(2): \sum_{i=1}^2 4i = 2 * 2(2 + 1)$$

$$P(2): 4 * 1 + 4 * 2 = 2 * 2 * 3$$

$$P(2): 4 + 8 = 12$$

$$P(2): 12 = 12.$$

$$P(3): \sum_{i=1}^3 4i = 2 * 3(3 + 1)$$

$$P(3): 4 * 1 + 4 * 2 + 4 * 3 = 2 * 3 * 4$$

$$P(3): 4 + 8 + 12 = 24$$

$$P(3): 24 = 24.$$

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

(c)  $P(n): a^5 a^n = a^{5+n}.$

$$P(n): a^{5+n} = a^{5+n}.$$

$$P(1): a^{5+1} = a^{5+1}$$

$$P(1): a^6 = a^6.$$

$$P(2): a^{5+2} = a^{5+2}$$

$$P(2): a^7 = a^7.$$

$$P(3): a^{5+3} = a^{5+3}$$

$$P(3): a^8 = a^8.$$

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

(d)  $P(n): 9^n - 1$  es divisible por 4.

$$P(n): (9^n - 1) \bmod 4 = 0.$$

$$P(1): (9^1 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(1): (9 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(1): 8 \bmod 4 = 0$$

$$P(1): 0 = 0.$$

$$P(2): (9^2 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(2): (81 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(2): 80 \bmod 4 = 0$$

$$P(2): 0 = 0.$$

$$P(3): (9^3 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(3): (729 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(3): 728 \bmod 4 = 0$$

$$P(3): 0 = 0.$$

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

(e)  $P(n): 4^n - 1$  es divisible por 3.

$$P(n): (4^n - 1) \bmod 3 = 0.$$

$$P(1): (4^1 - 1) \bmod 3 = 0$$

$$P(1): (4 - 1) \bmod 3 = 0$$

$$P(1): 3 \bmod 3 = 0$$

$$P(1): 0 = 0.$$

$$P(2): (4^2 - 1) \bmod 3 = 0$$

$$P(2): (16 - 1) \bmod 3 = 0$$

$$P(2): 15 \bmod 3 = 0$$

$$P(2): 0 = 0.$$

$$P(3): (4^3 - 1) \bmod 3 = 0$$

$$P(3): (64 - 1) \bmod 3 = 0$$

$$P(3): 63 \bmod 3 = 0$$

$$P(3): 0 = 0.$$

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

**Ejercicio 36.**

*Dar dos ejemplos de funciones proposicionales que sean teoremas sobre los números naturales.*

**Ejemplo 1 (Teorema de la suma de los primeros n números naturales):**

“Para todo número natural n, la suma de los primeros n números naturales es igual a  $\frac{n(n+1)}{2}$ ”.

Formalmente, se puede representar como una función proposicional:

$$P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Ejemplo 2 (Teorema del producto de los primeros n números naturales):**

“Para todo número natural n, el producto de los primeros n números naturales es igual a n factorial (n!)”.

Formalmente, se puede representar como una función proposicional:

$$Q(n): 1 * 2 * 3 * \dots * n = n!.$$

**Ejercicio 37.**

*Dar dos ejemplos de funciones proposicionales que no sean teoremas.*

Ejemplo 1:

P (n): “n es un número primo”.

Ejemplo 2:

Q (n):  $n^2 + 2n + 1 = 0$ .

**Ejercicio 38.**

Utilizando el principio de inducción matemática, demostrar las siguientes afirmaciones.

(a)  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$ , para todo  $n$ ,  $n$  natural.

$$P(n): \sum_{i=1}^n 2i = n(n + 1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(1): \sum_{i=1}^1 2i = 1(1 + 1)$$

$$P(1): 2 * 1 = 1 * 2$$

$$P(1): 2 = 2.$$

$$P(n + 1): \sum_{i=1}^{n+1} 2i = \sum_{i=1}^n 2i + 2(n + 1)$$

$$P(n + 1): \sum_{i=1}^{n+1} 2i = n(n + 1) + 2(n + 1)$$

$$P(n + 1): \sum_{i=1}^{n+1} 2i = (n + 1)(n + 2)$$

$$P(n + 1): \sum_{i=1}^{n+1} 2i = (n + 1)[(n + 1) + 1].$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación  $P(n)$ .

(b)  $\sum_{h=1}^n 3h = \frac{3}{2} n(n + 1)$ , para todo  $n$ ,  $n$  natural.

$$P(n): \sum_{h=1}^n 3h = \frac{3}{2} n(n + 1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(1): \sum_{h=1}^1 3h = \frac{3}{2} * 1(1 + 1)$$

$$P(1): 3 * 1 = \frac{3}{2} * 1 * 2$$

$$P(1): 3 = 3.$$

$$P(n + 1): \sum_{h=1}^{n+1} 3h = \sum_{h=1}^n 3h + 3(n + 1)$$

$$P(n + 1): \sum_{h=1}^{n+1} 3h = \frac{3}{2} n(n + 1) + 3(n + 1)$$

$$P(n + 1): \sum_{h=1}^{n+1} 3h = \frac{3}{2} (n + 1)(n + 2)$$

$$P(n + 1): \sum_{h=1}^{n+1} 3h = \frac{3}{2} (n + 1)[(n + 1) + 1].$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación  $P(n)$ .

(c)  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , para todo  $n$ ,  $n$  natural.

$$P(n): \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(1): \sum_{i=1}^1 i^2 = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6}$$

$$P(1): 1^2 = \frac{1 \cdot 2(2+1)}{6}$$

$$P(1): 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

$$P(1): 1 = \frac{6}{6}$$

$$P(1): 1 = 1.$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)[2(n+1)+1]}{6}.$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación  $P(n)$ .

$$(d) \sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ para todo } n, n \text{ natural.}$$

$$P(n): \sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(1): \sum_{j=1}^1 j^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$P(1): 1^3 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$$

$$P(1): 1 = \frac{1 \cdot 4}{4}$$

$$P(1): 1 = \frac{4}{4}$$

$$P(1): 1 = 1.$$

$$P(n+1): \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \sum_{j=1}^n j^3 + (n+1)^3$$

$$P(n+1): \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$P(n+1): \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$P(n+1): \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4}$$

$$P(n+1): \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$P(n+1): \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$P(n+1): \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}.$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación  $P(n)$ .

(e)  $2n + 1 < 5n$ , para todo  $n$ ,  $n$  natural.

$$P(n): 2n + 1 < 5n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(1): 2 * 1 + 1 < 5 * 1$$

$$P(1): 2 + 1 < 5$$

$$P(1): 3 < 5.$$

$$P(n + 1): 2(n + 1) + 1 = 2n + 2 + 1$$

$$P(n + 1): 2(n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2$$

$$P(n + 1): 2(n + 1) + 1 < 5n + 5$$

$$P(n + 1): 2(n + 1) + 1 < 5(n + 1).$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación  $P(n)$ .

(f)  $9^n - 1$  es divisible por 4, para todo  $n$  natural.

$$P(n): (9^n - 1) \bmod 4 = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(1): (9^1 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(1): (9 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(1): 8 \bmod 4 = 0$$

$$P(1): 0 = 0.$$

$$P(n + 1): (9^{n+1} - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(n + 1): (9^n * 9 - 1) \bmod 4 = 0$$

$$P(n + 1): [(9^n - 1) * 9 + 8] \bmod 4 = 0$$

$$P(n + 1): 0 = 0.$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación  $P(n)$ .

(g)  $7^n - 1$  es divisible por 6, para todo  $n$  natural.

$$P(n): (7^n - 1) \bmod 6 = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(1): (7^1 - 1) \bmod 6 = 0$$

$$P(1): (7 - 1) \bmod 6 = 0$$

$$P(1): 6 \bmod 6 = 0$$

$$P(1): 0 = 0.$$

$$P(n + 1): (7^{n+1} - 1) \bmod 6 = 0$$

$$P(n + 1): (7^n * 7 - 1) \bmod 6 = 0$$

$$P(n + 1): [(7^n - 1) * 7 + 6] \bmod 6 = 0$$

$$P(n + 1): 0 = 0.$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(h)  $\sum_{h=1}^n h * h! = (n + 1)! - 1$ , para todo n, n natural.

P (n):  $\sum_{h=1}^n h * h! = (n + 1)! - 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

P (1):  $\sum_{h=1}^1 h * h! = (1 + 1)! - 1$

P (1):  $1 * 1! = 2! - 1$

P (1):  $1 * 1 = 2 - 1$

P (1):  $1 = 1$ .

P (n + 1):  $\sum_{h=1}^{n+1} h * h! = \sum_{h=1}^n h * h! + (n + 1) (n + 1)!$

P (n + 1):  $\sum_{h=1}^{n+1} h * h! = (n + 1)! - 1 + (n + 1) (n + 1)!$

P (n + 1):  $\sum_{h=1}^{n+1} h * h! = (n + 1)! (n + 1 + 1) - 1$

P (n + 1):  $\sum_{h=1}^{n+1} h * h! = (n + 1 + 1)! - 1$ .

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(i)  $\sum_{i=1}^n i(i + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ , para todo n, n natural.

P (n):  $\sum_{i=1}^n i(i + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

P (1):  $\sum_{i=1}^1 i(i + 1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$

P (1):  $1 (1 + 1) = \frac{1*2*3}{3}$

P (1):  $1 * 2 = \frac{6}{3}$

P (1):  $2 = 2$ .

P (n + 1):  $\sum_{i=1}^{n+1} i(i + 1) = \sum_{i=1}^n i(i + 1) + (n + 1) (n + 1 + 1)$

P (n + 1):  $\sum_{i=1}^{n+1} i(i + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n + 1) (n + 2)$

P (n + 1):  $\sum_{i=1}^{n+1} i(i + 1) = \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3}$

P (n + 1):  $\sum_{i=1}^{n+1} i(i + 1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

P (n + 1):  $\sum_{i=1}^{n+1} i(i + 1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1][(n+1)+2]}{3}$ .

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

(j)  $\sum_{h=1}^n 8 * 3^{h-1} = 4 (3^n - 1)$ , para todo n, n natural.

P (n):  $\sum_{h=1}^n 8 * 3^{h-1} = 4 (3^n - 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$P(1): \sum_{h=1}^1 8 * 3^{h-1} = 4(3^1 - 1)$$

$$P(1): 8 * 3^{1-1} = 4(3 - 1)$$

$$P(1): 8 * 3^0 = 4 * 2$$

$$P(1): 8 * 1 = 8$$

$$P(1): 8 = 8.$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1} = \sum_{h=1}^n 8 * 3^{h-1} + 8 * 3^{n+1-1}$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1} = 4(3^n - 1) + 8 * 3^n$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1} = 4 * 3^n - 4 + 8 * 3^n$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1} = 12 * 3^n - 4$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1} = 4 * 3 * 3^n - 4$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1} = 4 * 3^{n+1} - 4$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 8 * 3^{h-1} = 4(3^{n+1} - 1).$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación  $P(n)$ .

**(k)**  $\sum_{h=1}^n 6h - 5 = n(3n - 2)$ , para todo  $n$ ,  $n$  natural.

$$P(n): \sum_{h=1}^n 6h - 5 = n(3n - 2), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P(1): \sum_{h=1}^1 6h - 5 = 1(3 * 1 - 2)$$

$$P(1): 6 * 1 - 5 = 1(3 - 2)$$

$$P(1): 6 - 5 = 1 * 1$$

$$P(1): 1 = 1.$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5 = \sum_{h=1}^n 6h - 5 + 6(n+1) - 5$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5 = n(3n - 2) + 6n + 6 - 5$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5 = 3n^2 - 2n + 6n + 1$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5 = 3n^2 + 4n + 1$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5 = (n+1)(3n+1)$$

$$P(n+1): \sum_{h=1}^{n+1} 6h - 5 = (n+1)[3(n+1) - 2].$$

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación  $P(n)$ .

**Ejercicio 39.**

*Evaluar sin realizar la suma (no dejar de relacionarlo con el Ejercicio 38).*

(a)  $\sum_{h=10}^{34} 3h$ .

$$\begin{aligned}\sum_{h=10}^{34} 3h &= \sum_{h=1}^{34} 3h - \sum_{h=1}^9 3h \\ \sum_{h=10}^{34} 3h &= \frac{3}{2} * 34 (34 + 1) - \frac{3}{2} * 9 (9 + 1) \\ \sum_{h=10}^{34} 3h &= 3 * 17 * 35 - \frac{3}{2} * 9 * 10 \\ \sum_{h=10}^{34} 3h &= 1785 - 135 \\ \sum_{h=10}^{34} 3h &= 1650.\end{aligned}$$

(b)  $\sum_{i=7}^{50} i^2$ .

$$\begin{aligned}\sum_{i=7}^{50} i^2 &= \sum_{i=1}^{50} i^2 - \sum_{i=1}^6 i^2 \\ \sum_{i=7}^{50} i^2 &= \frac{50(50+1)(2*50+1)}{6} - \frac{6(6+1)(2*6+1)}{6} \\ \sum_{i=7}^{50} i^2 &= \frac{50*51(100+1)}{6} - \frac{6*7(12+1)}{6} \\ \sum_{i=7}^{50} i^2 &= \frac{50*51*101}{6} - \frac{6*7*13}{6} \\ \sum_{i=7}^{50} i^2 &= \frac{257550}{6} - 7 * 13 \\ \sum_{i=7}^{50} i^2 &= 42925 - 91 \\ \sum_{i=7}^{50} i^2 &= 42834.\end{aligned}$$

(c)  $\sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1}$ .

$$\begin{aligned}\sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1} &= \sum_{h=1}^{45} 8 * 3^{h-1} - \sum_{h=1}^{18} 8 * 3^{h-1} \\ \sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1} &= 4 (3^{45} - 1) - 4 (3^{18} - 1) \\ \sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1} &= 4 * 3^{45} - 4 - 4 * 3^{18} + 4 \\ \sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1} &= 4 * 3^{45} - 4 * 3^{18} \\ \sum_{h=19}^{45} 8 * 3^{h-1} &= 4 (3^{45} - 3^{18}).\end{aligned}$$

(d)  $\sum_{h=4}^{20} 12h - 10$ .

$$\begin{aligned}\sum_{h=4}^{20} 12h - 10 &= \sum_{h=4}^{20} 2(6h - 5) \\ \sum_{h=4}^{20} 12h - 10 &= 2 \sum_{h=4}^{20} 6h - 5 \\ \sum_{h=4}^{20} 12h - 10 &= 2 (\sum_{h=1}^{20} 6h - 5 - \sum_{h=1}^3 6h - 5) \\ \sum_{h=4}^{20} 12h - 10 &= 2 [20 (3 * 20 - 2) - 3 (3 * 3 - 2)] \\ \sum_{h=4}^{20} 12h - 10 &= 2 [20 (60 - 2) - 3 (9 - 2)] \\ \sum_{h=4}^{20} 12h - 10 &= 2 (20 * 58 - 3 * 7)\end{aligned}$$

$$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10 = 2 (1160 - 21)$$

$$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10 = 2 * 1139$$

$$\sum_{h=4}^{20} 12h - 10 = 2278.$$

$$(e) \sum_{j=21}^{35} 4j^3.$$

$$\sum_{j=21}^{35} 4j^3 = 4 \sum_{j=21}^{35} j^3$$

$$\sum_{j=21}^{35} 4j^3 = 4 (\sum_{j=1}^{35} j^3 - \sum_{j=1}^{20} j^3)$$

$$\sum_{j=21}^{35} 4j^3 = 4 \left[ \frac{35^2(35+1)^2}{4} - \frac{20^2(20+1)^2}{4} \right]$$

$$\sum_{j=21}^{35} 4j^3 = 4 \left( \frac{35^2 36^2}{4} - \frac{20^2 21^2}{4} \right)$$

$$\sum_{j=21}^{35} 4j^3 = 4 \left( \frac{1225 * 1226}{4} - \frac{400 * 441}{4} \right)$$

$$\sum_{j=21}^{35} 4j^3 = 4 \left( \frac{1501850}{4} - \frac{176400}{4} \right)$$

$$\sum_{j=21}^{35} 4j^3 = 4 \frac{1325450}{4}$$

$$\sum_{j=21}^{35} 4j^3 = 1325450.$$