

Agenda - Grafos

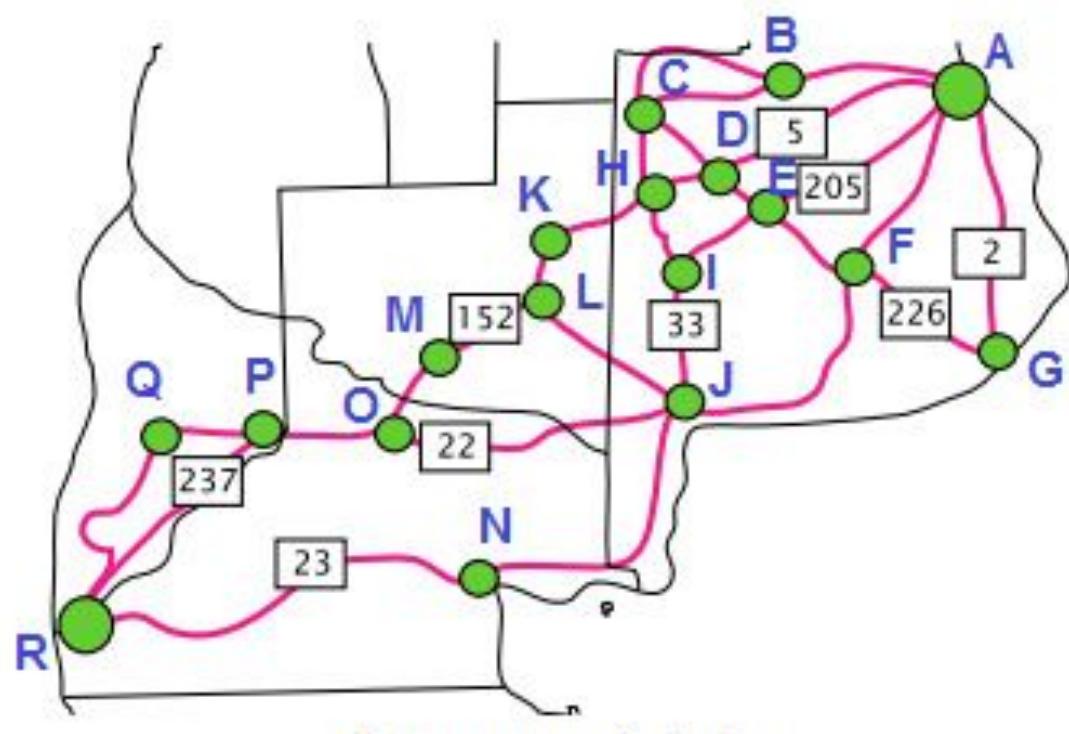
1. Ejemplos y terminología
2. Conectividad
3. Representaciones

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Conectividad
3. Representaciones

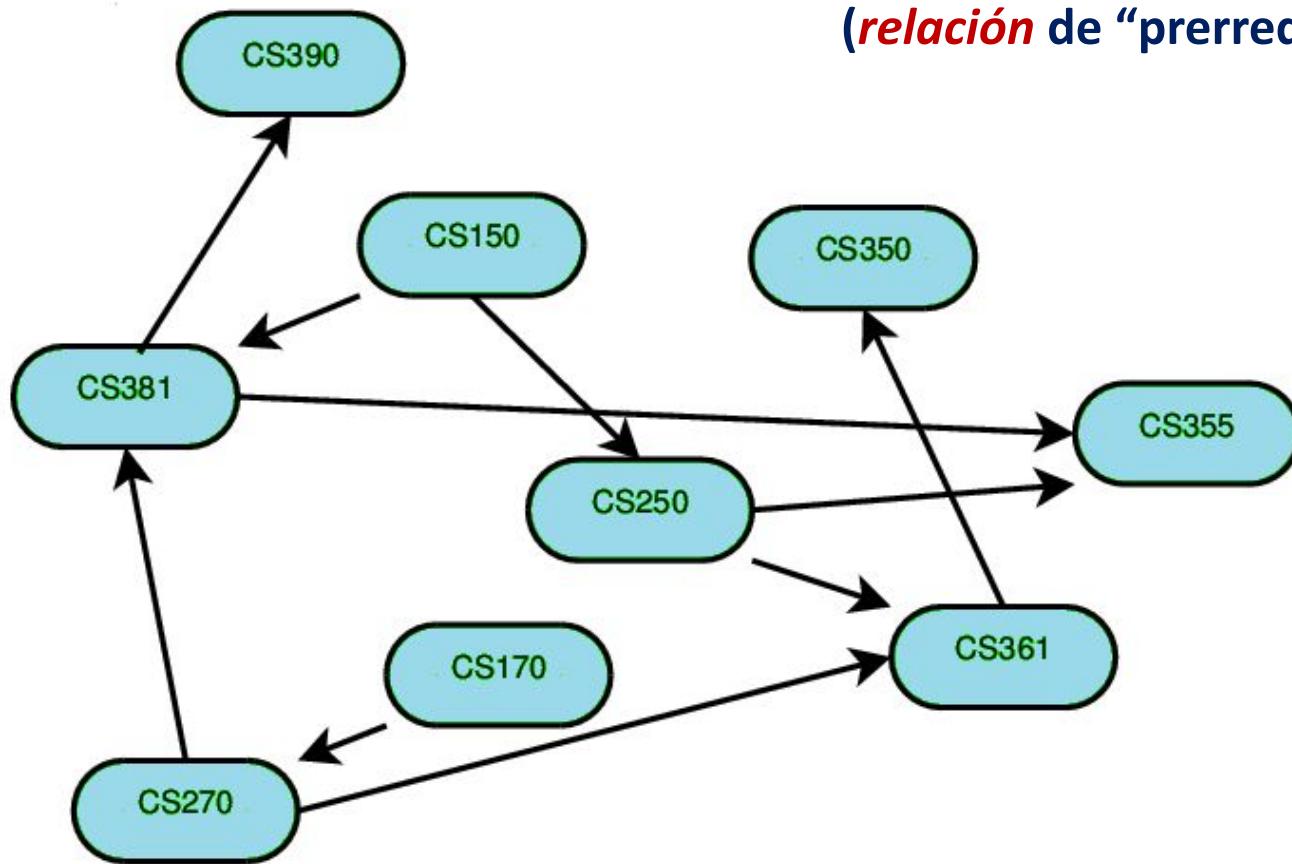
Ejemplo 1: Mapa de ciudades

Ciudades conectadas por Rutas



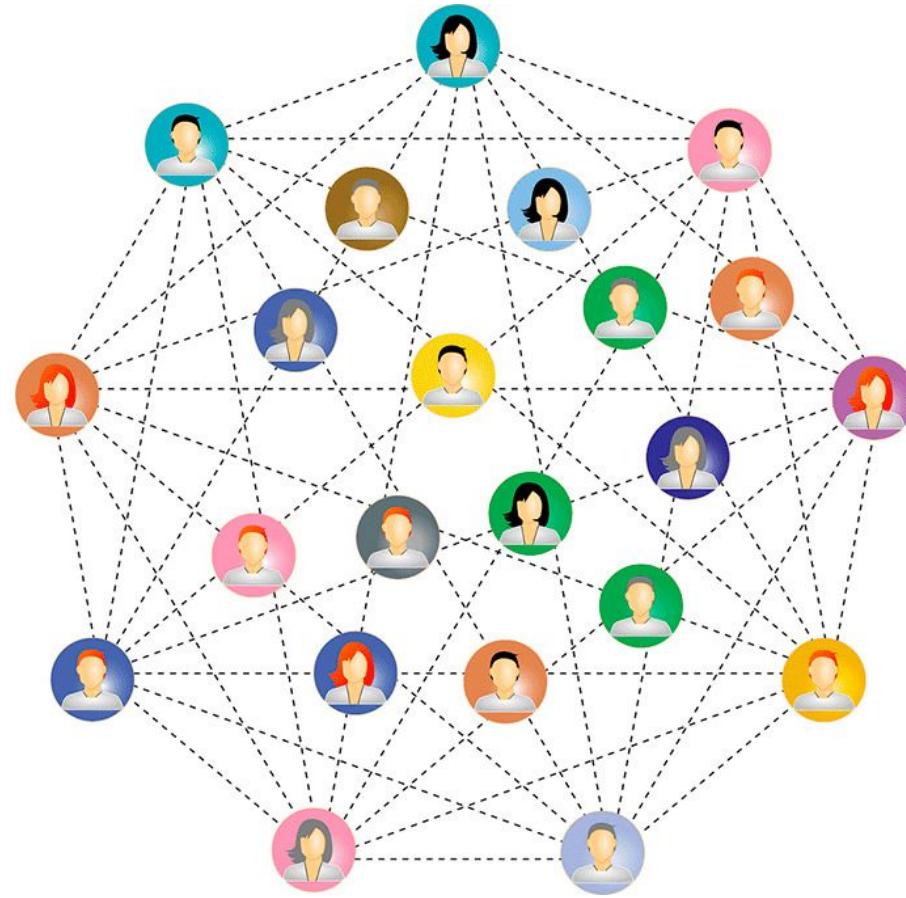
Ejemplo 2: Prerrequisitos de un curso

*Cursos conectados por sus correlativas
(relación de “prerrequisito”)*

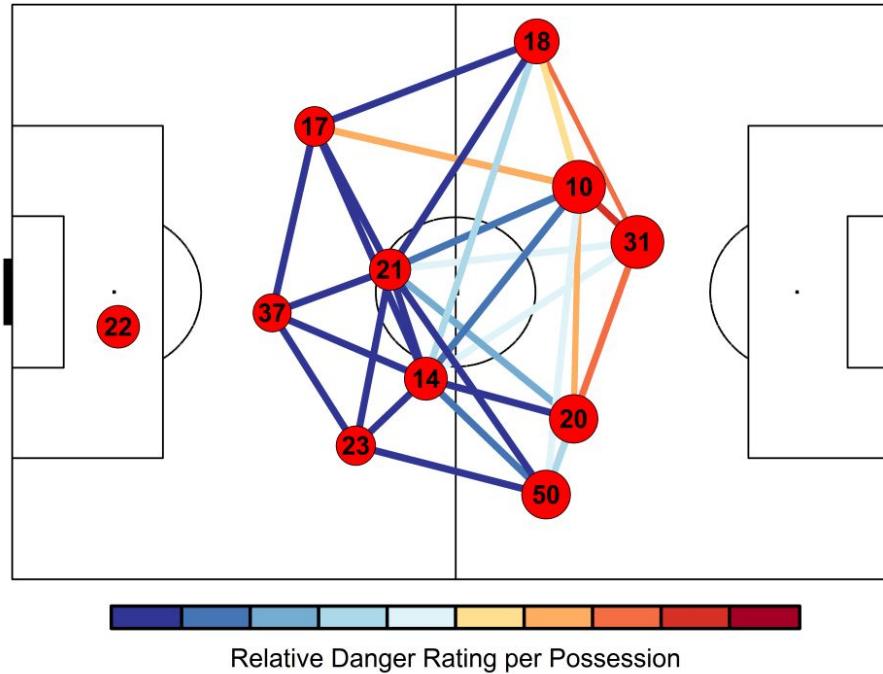


Ejemplo 3: Redes sociales

**Personas conectadas
en una red social**



Ejemplo 4: Red de pases de un partido de fútbol



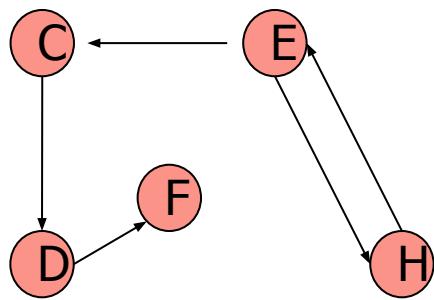
Red de pases para el Barcelona y el AC Milan de un partido de Liga de Campeones.
Las flechas más oscuras y gruesas indican más pases entre cada jugador.

Terminología

- **Grafo** → modelo para representar relaciones entre elementos de un conjunto.
- **Grafo:** (V,E) , V es un conjunto de vértices o nodos, con una relación entre ellos; E es un conjunto de pares (u,v) , $u,v \in V$, llamados aristas o arcos.
- **Grafo dirigido:** la relación sobre V no es simétrica. Arista ≡ par ordenado (u,v) . (Ejemplo 3)
- **Grafo no dirigido:** la relación sobre V es simétrica. Arista ≡ par no ordenado $\{u,v\}$, $u,v \in V$ y $u \neq v$. (Ejemplos 1 y 2)

Terminología (cont. 1)

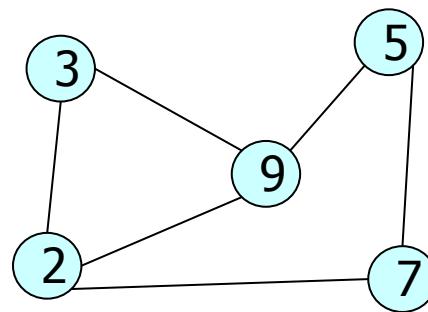
Ejemplos



Grafo dirigido $G(V,E)$.

$$V = \{C, D, E, F, H\}$$

$$E = \{(C,D), (D,F), (E,C), (E,H), (H,E)\}$$



Grafo no dirigido $G(V,E)$.

$$V = \{2, 3, 5, 7, 9\}$$

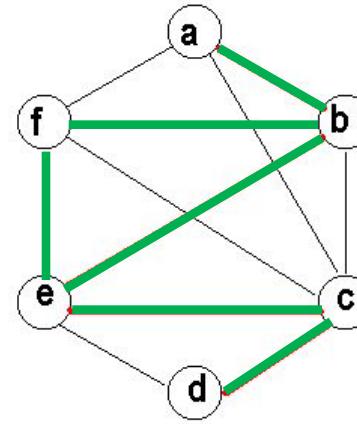
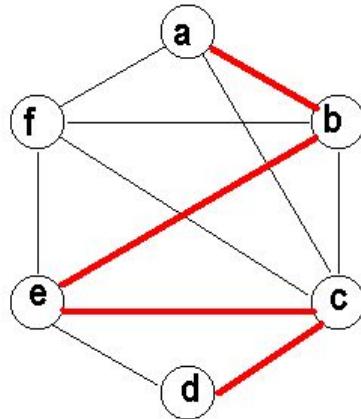
$$E = \{\{2,3\}, \{2,7\}, \{2,9\}, \{3,9\}, \{5,7\}, \{5,9\}\}$$

Terminología (cont. 2)

- ***v es adyacente a u si existe una arista $(u,v) \in E$.***
 - en un grafo no dirigido, $(u,v) \in E$ incide en los nodos u, v .
 - en un grafo dirigido, $(u,v) \in E$ incide en v , y parte de u .
- ***En grafos no dirigidos:***
 - El **grado** de un nodo: número de arcos que inciden en él.
- ***En grafos dirigidos:***
 - existen el grado de salida (**grado_out**) y el grado de entrada (**grado_in**).
 - el **grado_out** es el número de arcos que parten de él y
 - el **grado_in** es el número de arcos que inciden en él.
 - El **grado** del vértice será la suma de los grados de entrada y de salida.
- ***Grado de un grafo:*** máximo grado de sus vértices.

Terminología (cont. 3)

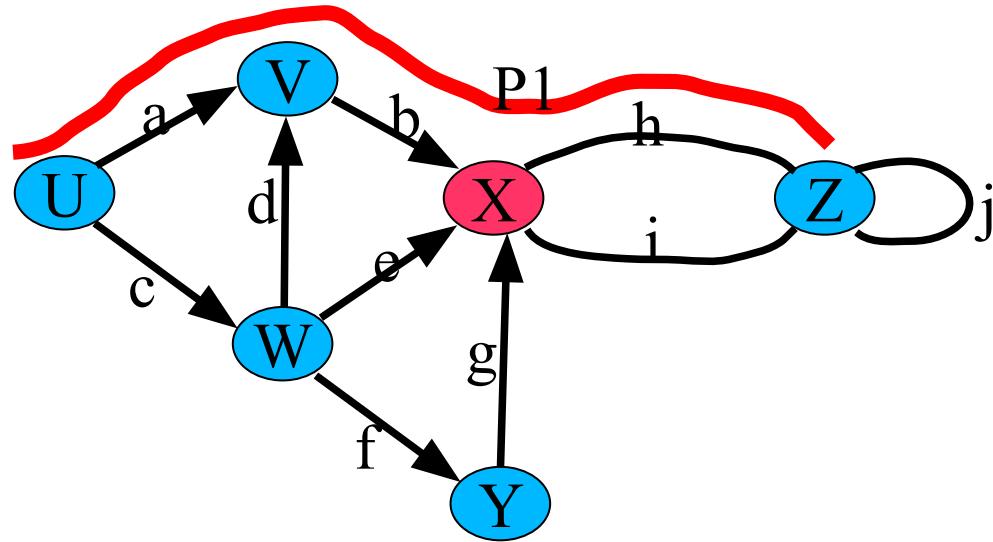
- **Camino** desde $u \in V$ a $v \in V$: secuencia v_1, v_2, \dots, v_k tal que $u=v_1, v=v_k$ y $(v_{i-1}, v_i) \in E$, para $i = 2, \dots, k$.
Ej: camino desde **a** a **d** $\rightarrow < a, b, e, c, d >$.



- **Longitud de un camino:** número de arcos del camino.
Ejs: long. del camino desde **a** a **d** $\rightarrow < a, b, e, c, d >$ es 4. (a)
long. del camino desde **a** a **d** $\rightarrow < a, b, e, f, b, e, c, d >$ es 7. (b)

Terminología (cont. 4)

- **Camino simple:** camino en el que todos sus vértices, excepto, tal vez, el primero y el último, son distintos. P_1 es un camino simple desde U a Z .

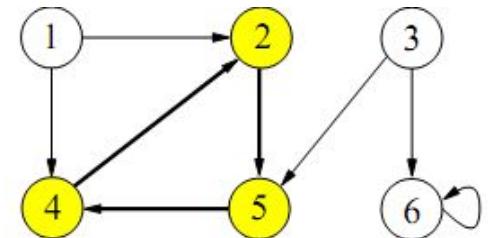


Ejemplos anteriores: (a) es camino simple , (b) no lo es.

Terminología (cont. 5)

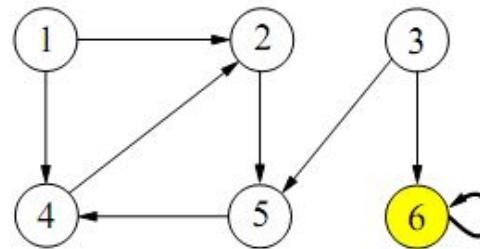
- **Ciclo:** camino desde v_1, v_2, \dots, v_k tal que $v_1 = v_k$

Ej: $<2,5,4,2>$ es un ciclo de longitud 3.

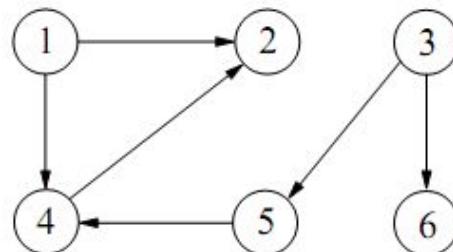


El ciclo es simple si el camino es simple.

- **Bucle:** ciclo de longitud 1.

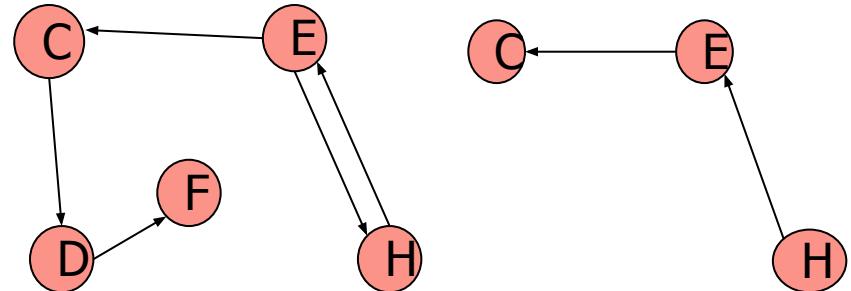
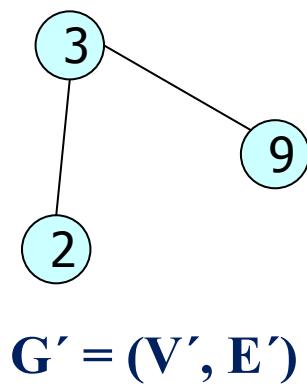
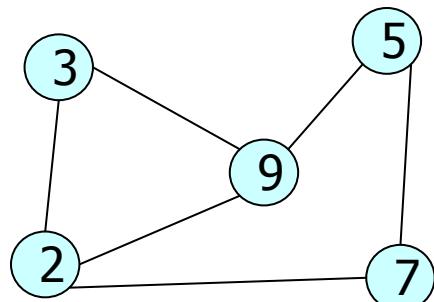


- **Grafo acíclico:** grafo sin ciclos.



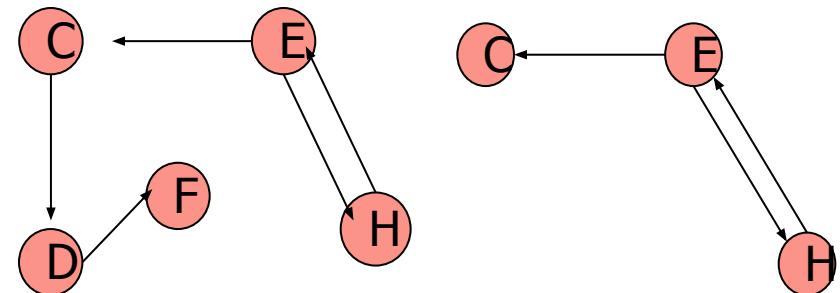
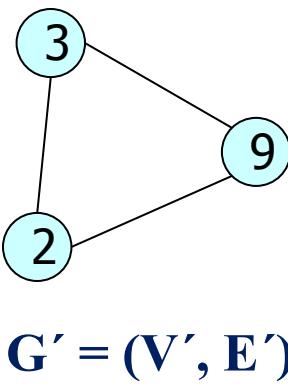
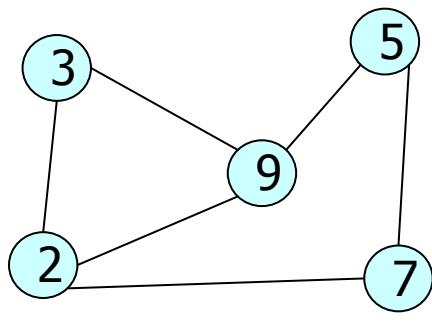
Terminología (cont. 6)

- Dado un grafo $G = (V, E)$, se dice que $G' = (V', E')$ es un **subgrafo** de G , si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.



Terminología (cont. 7)

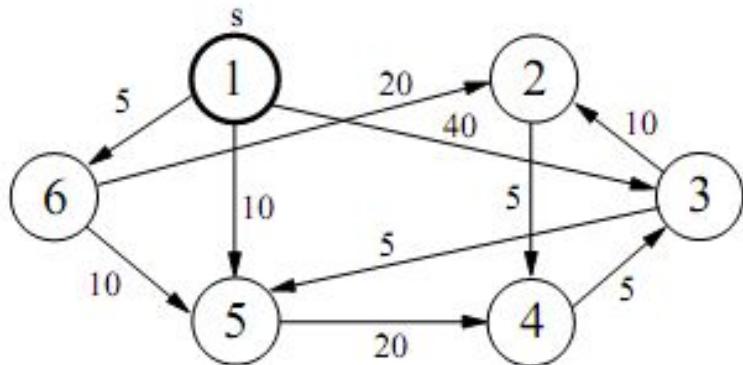
- Un **subgrafo inducido** por $V' \subseteq V$: $G' = (V', E')$ tal que $E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}$.



$G' = (V', E')$

Terminología (cont. 8)

- **Un grafo ponderado, pesado o con costos:** cada arco o arista tiene asociado un valor o etiqueta. (Ejemplos 2 y 4)

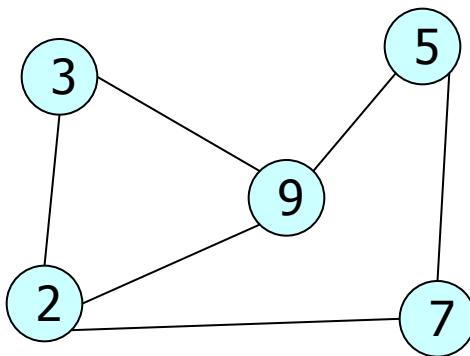


Agenda - Grafos

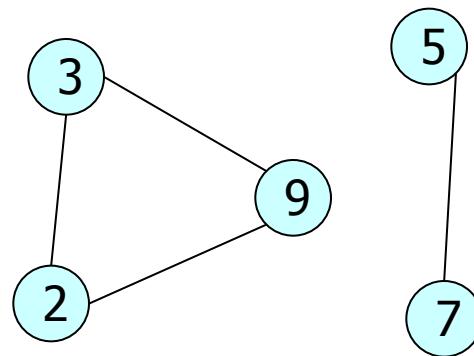
1. Ejemplos y terminología
2. Conectividad
3. Representaciones

Conectividad en grafos no dirigidos

- *Un grafo no dirigido es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices.*



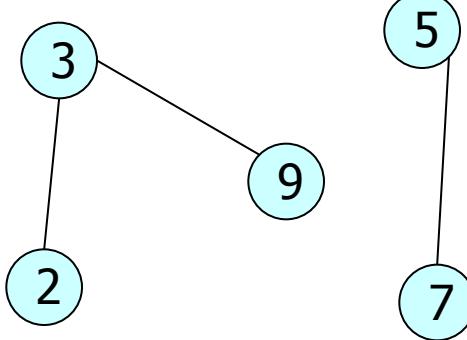
Conexo



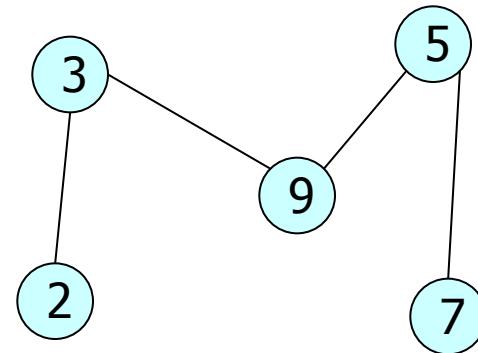
No Conexo

Conectividad: bosque y árbol

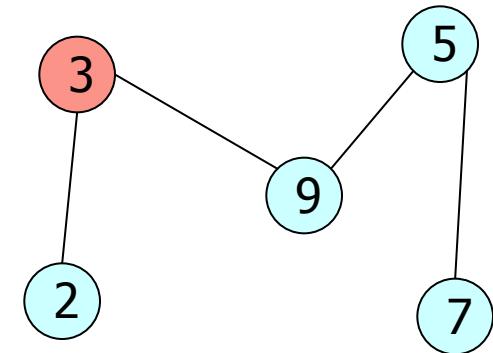
- *Un bosque es un grafo sin ciclos.*
- *Un árbol libre es un bosque conexo.*
- *Un árbol es un árbol libre en el que un nodo se ha designado como raíz.*



Bosque



Árbol libre



Árbol

Propiedades

- Sea G un grafo no dirigido con n vértices y m arcos, entonces

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2*m$$

○ Siempre: $m \leq (n * (n-1)) / 2$

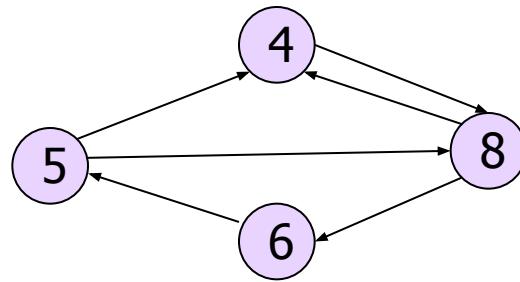
○ Si G conexo: $m \geq n-1$

○ Si G árbol: $m = n-1$

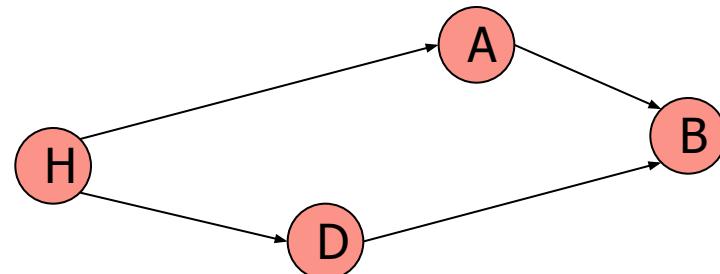
○ Si G bosque: $m \leq n-1$

Conectividad en grafos dirigidos

- *v es alcanzable desde u, si existe un camino de u a v.*
- *Un grafo dirigido se denomina fuertemente conexo si existe un camino desde cualquier vértice a cualquier otro vértice*



Fuertemente Conexo



No Fuertemente Conexo
Débilmente Conexo

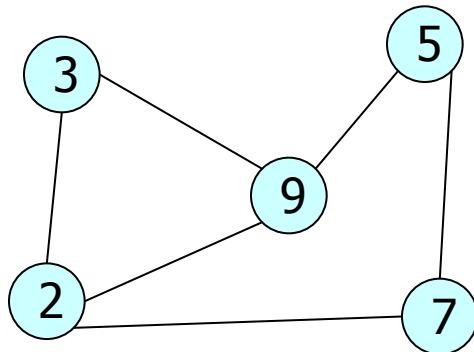
- *Si un grafo dirigido no es fuertemente conexo, pero el grafo subyacente (sin sentido en los arcos) es conexo, el grafo es débilmente conexo.*

Componentes conexas

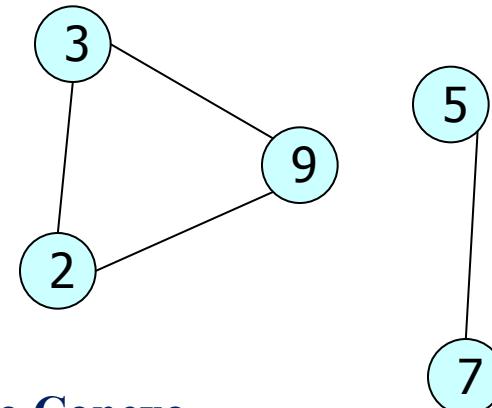
En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.

Es un subgrafo conexo maximal.

Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.



Conexo



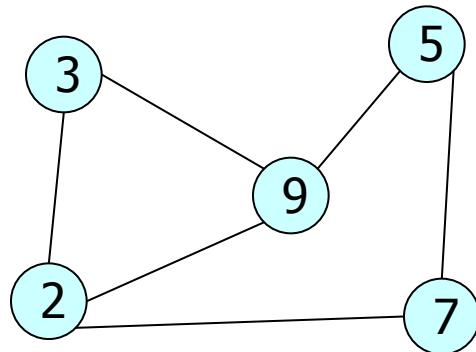
No Conexo

Componentes conexas

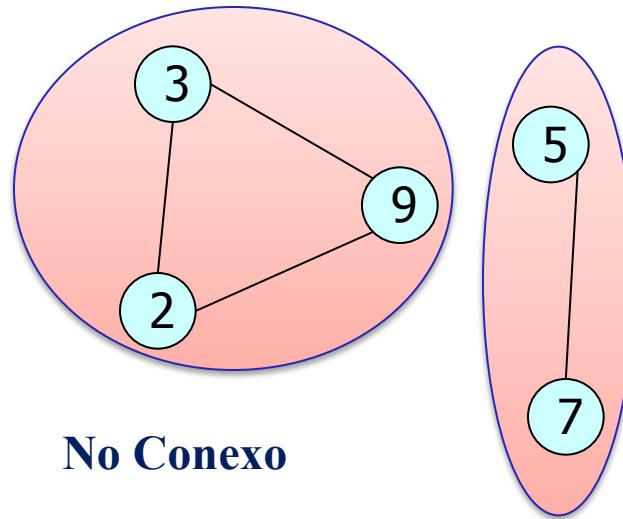
En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.

Es un subgrafo conexo maximal.

Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.



Conexo



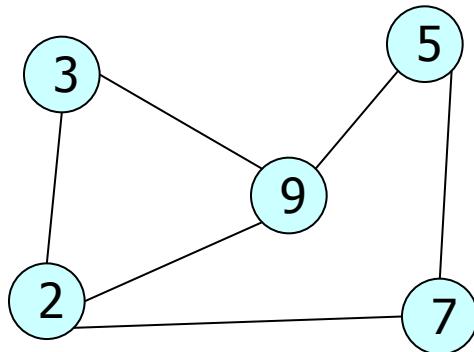
No Conexo

Componentes conexas

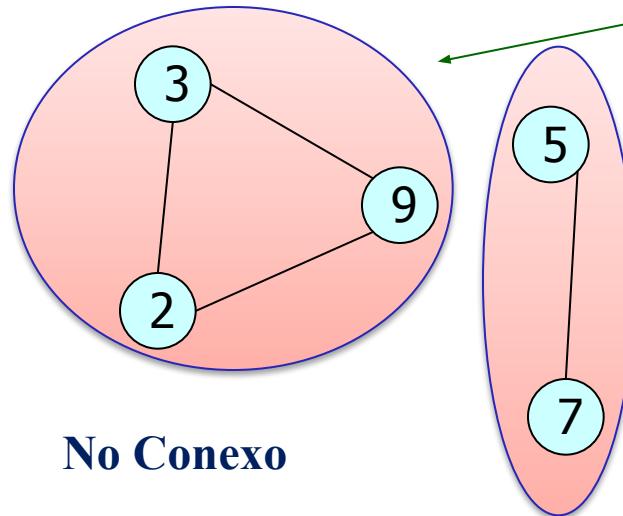
En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.

Es un subgrafo conexo maximal.

Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.



Conexo



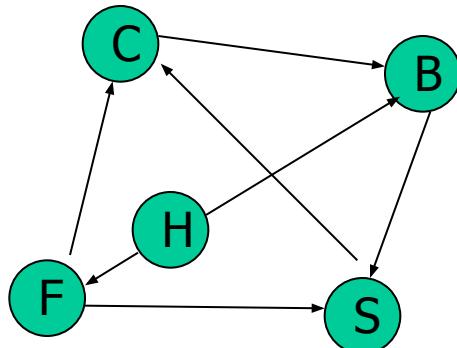
No Conexo

Componentes conexas:
entre ellas son conexas

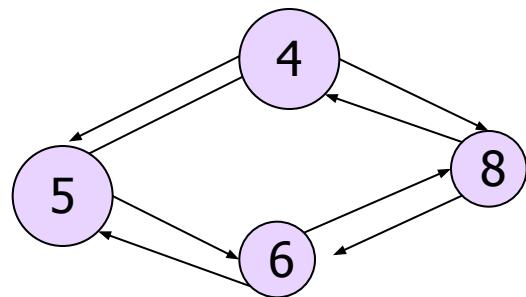
Componentes fuertemente conexas

En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.

Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.



No Fuertemente Conexo

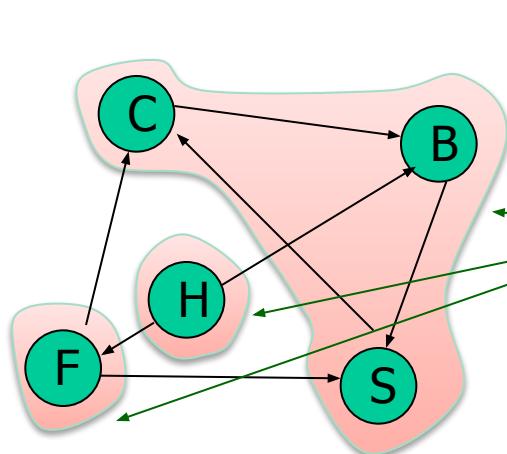


Fuertemente Conexo

Componentes fuertemente conexas

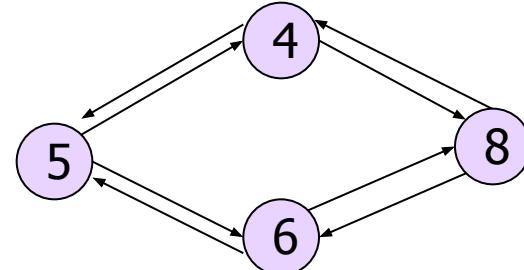
En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.

Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.



Componentes
fuertemente conexas

No Fuertemente Conexo



Fuertemente Conexo

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Conectividad
3. Representaciones

Agenda - Grafos

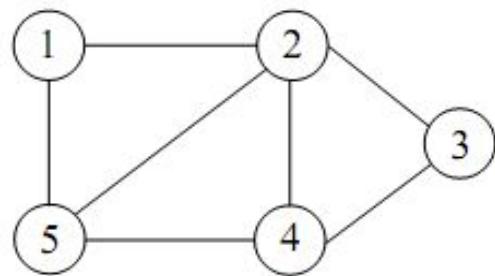
- Representaciones
 - Matriz de Adyacencias
 - Lista de Adyacencias

Representaciones: Matriz de Adyacencias

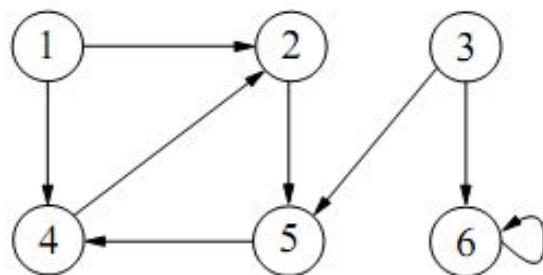
- $G = (V, E)$: matriz A de dimensión $|V| \times |V|$.

- Valor a_{ij} de la matriz:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

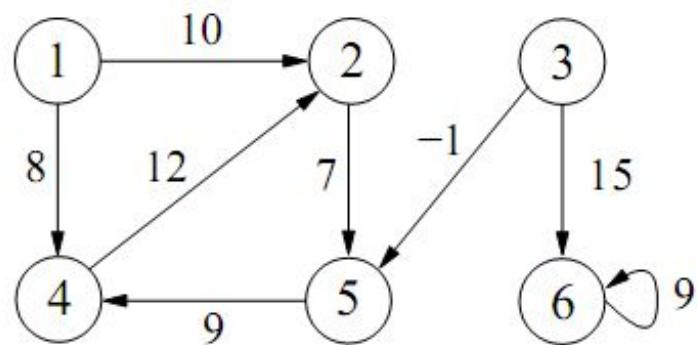
Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *Costo espacial: $O(|V|^2)$*
- *Representación es útil para grafos con número de vértices pequeño, o grafos densos ($|E| \approx |V| \times |V|$)*
- *Comprobar si una arista (u,v) pertenece a $E \rightarrow$ consultar posición $A(u,v)$*
 - *Costo de tiempo $T(|V|, |E|) = O(1)$*

Representaciones: Matriz de Adyacencias

- Representación aplicada a Grafos pesados
- El peso de (i,j) se almacena en $A(i, j)$

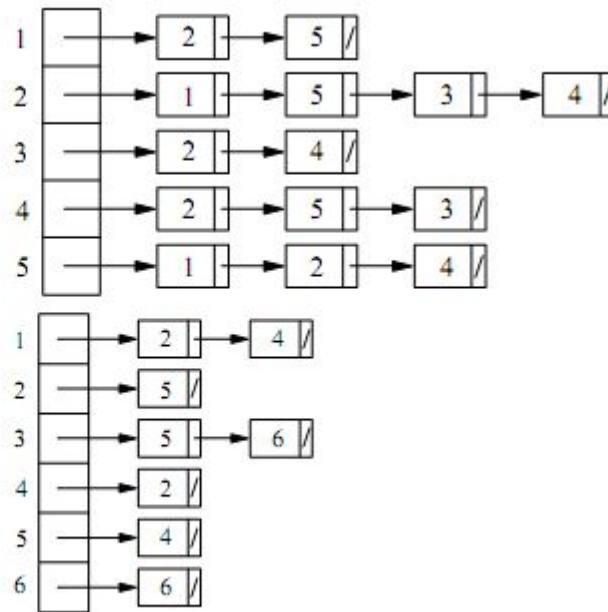
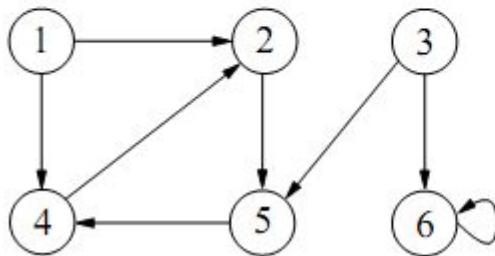
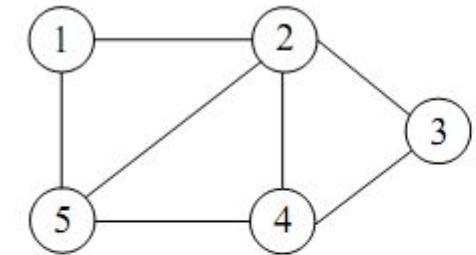
$$a_{ij} = \begin{cases} w(i, j) & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 \text{ o } \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5	6
1	0	10	0	8	0	0
2	0	0	0	0	7	0
3	0	0	0	0	-1	15
4	0	12	0	0	0	0
5	0	0	0	9	0	0
6	0	0	0	0	0	9

Representaciones: Lista de Adyacencias

- $G = (V, E)$: vector de tamaño $|V|$.
- Posición $i \rightarrow$ puntero a una lista enlazada de elementos (lista de adyacencia).
Los elementos de la lista son los vértices adyacentes a i



Representaciones: Lista de Adyacencias

- Si G es dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $|E|$.
- Si G es no dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $2|E|$.
- Costo espacial, sea dirigido o no: $O(|V|+|E|)$.
- Representación apropiada para grafos con $|E|$ menor que $|V|^2$.
- **Desventaja:** si se quiere comprobar si una arista (u,v) pertenece a $E \Rightarrow$ buscar v en la lista de adyacencia de u .
 - Costo temporal $T(|V|,|E|)$ será $O(\text{Grado } G) \subseteq O(|V|)$.

Representaciones: Lista de Adyacencias

- Representación aplicada a Grafos pesados
- El **peso** de (u,v) se almacena en el nodo de v de la lista de adyacencia de u .

