

# Agenda - Grafos

- Árbol de expansión mínimo

# Agenda – Grafos

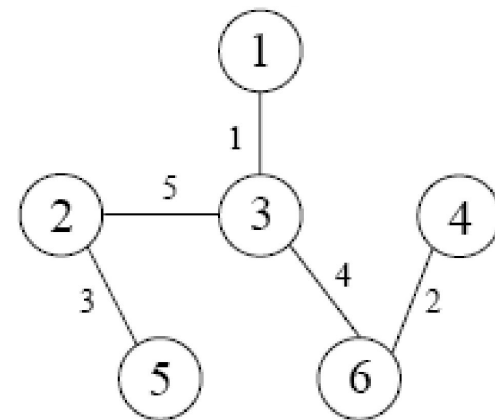
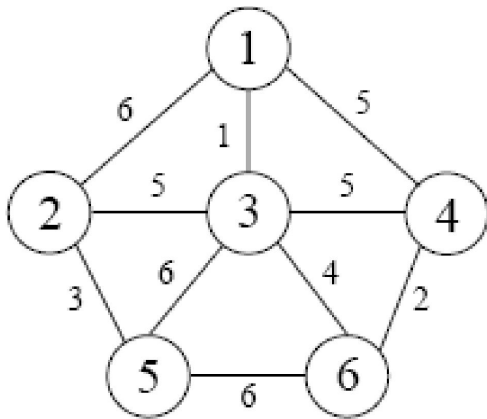
- Árbol de expansión mínimo
  - Definición
  - Aplicaciones
  - Algoritmo de Prim
  - Algoritmo de Kruskal

# Árbol de expansión mínima

## Definición

Dado un grafo  $G=(V, E)$  no dirigido y conexo

*El árbol de expansión mínima es un árbol formado por las aristas de  $G$  que conectan todos los vértices con un costo total mínimo.*



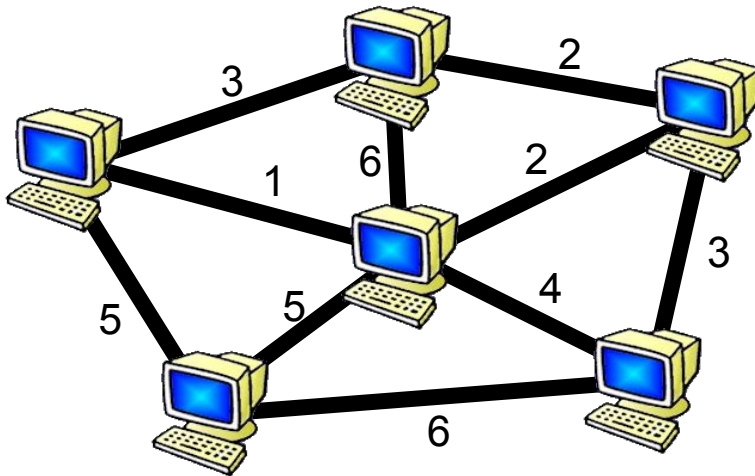
# Árbol de expansión mínima

## Aplicaciones

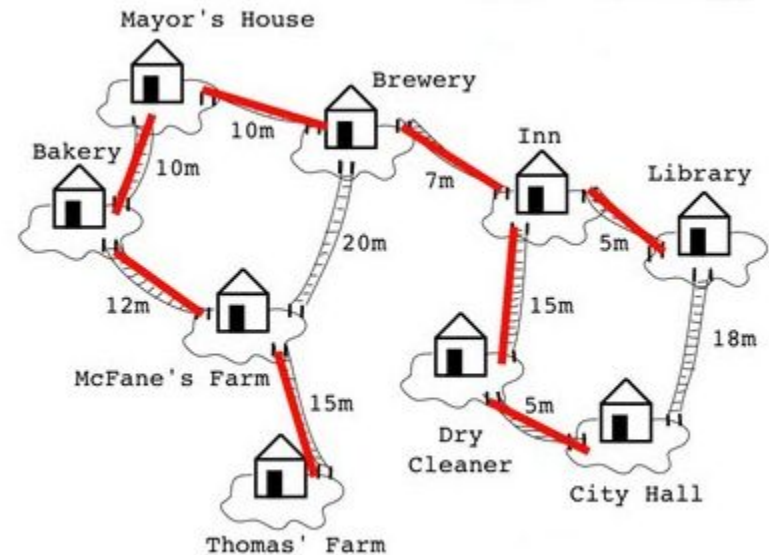
- Construcción de tendidos eléctricos
- Diseño de redes de tuberías
- Cableado de redes de comunicaciones
- Diseño de redes de logística y transporte
- Taxonomías
- . . . . .

# Árbol de expansión mínima

Ejemplo:



Conectar todas las computadoras  
con el **menor costo total**



Conectar todas las ciudades con el  
**menor costo total**

# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Prim

- Construye el árbol haciéndolo crecer por etapas


Se elige un vértice como raíz del árbol.

En las siguientes etapas:


- se selecciona la arista  $(u,v)$  de mínimo costo que cumpla:  $u \in \text{árbol}$  y  $v \notin \text{árbol}$
- se agrega al árbol la arista seleccionada en a) (es decir, ahora el vértice  $v \in \text{árbol}$ )
- se repite a) y b) hasta que se hayan tomado todos los vértices del grafo.

# Algoritmo de Prim

## Implementación

- Para la implementación se usa una tabla (similar a la utilizada en la implementación del algoritmo de Dijkstra).
  - La dinámica del algoritmo consiste en, una vez seleccionado una *arista*  $(u,v)$  de costo mínimo tq  $u \in \text{árbol}$  y  $v \notin \text{árbol}$ :
    - se agrega la arista seleccionada al árbol
    - se actualizan los costos a los adyacentes del vértice  $v$  de la sig. manera :
      - se compara  $\text{Costo}_w$  con  $c(v,w)$
- 

Costo mínimo a  $w$  (costo de la arista entre un vértice perteneciente al árbol y vértice  $w$ )



Costo de la arista  $(v,w)$
- se actualiza si  $\text{Costo}_w > c(v,w)$

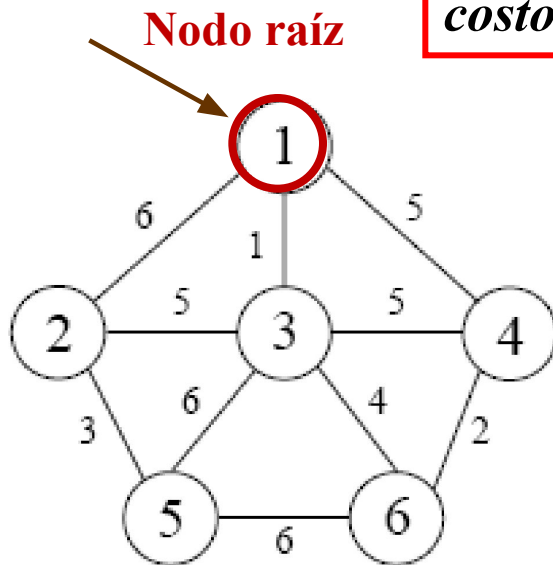
# Algoritmo de Prim

## Implementación

- Construye el árbol haciéndolo crecer por etapas

Ejemplo:

1º Paso



*costo de la arista (v,w)*

Vértice inicial

Vértice elegido

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	0	0	1
2	$\infty$	0	0
3	$\infty$	0	0
4	$\infty$	0	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

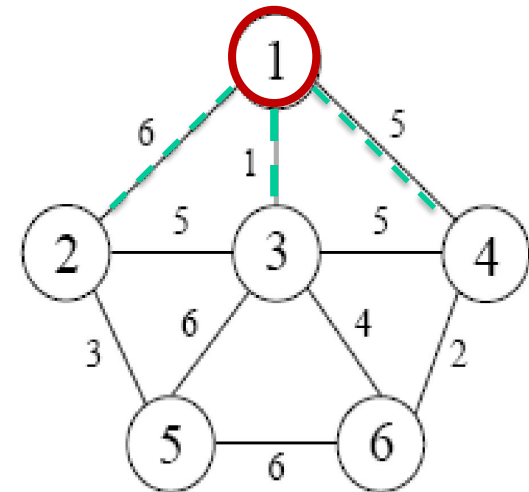


# Algoritmo de Prim

## Implementación

### 1º Paso

Vértice elegido	$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
	1	0	0	1
	2	6	1	0
	3	1	1	0
	4	5	1	0
	5	$\infty$	0	0
	6	$\infty$	0	0



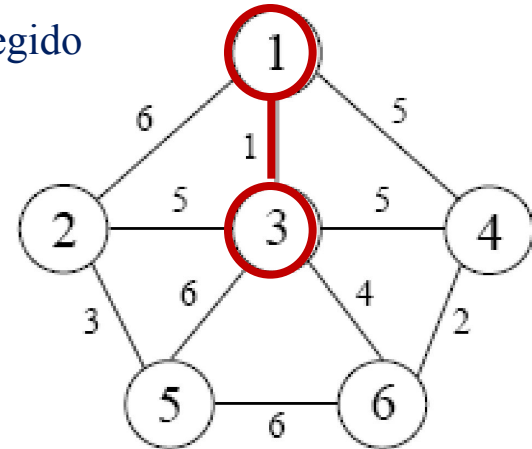
# Algoritmo de Prim

## Implementación

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	0	0	1
2	6	1	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

Vértice elegido

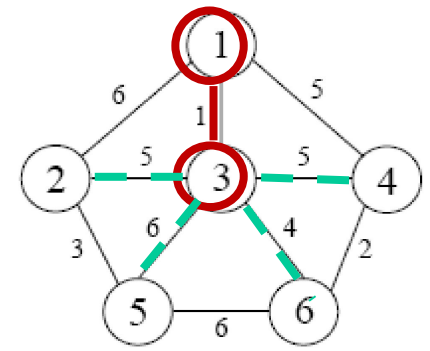
2º Paso



Se agrega la arista  
(1,3) y el vértice 3

# Algoritmo de Prim

## Implementación



### 2º Paso

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	6	1	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

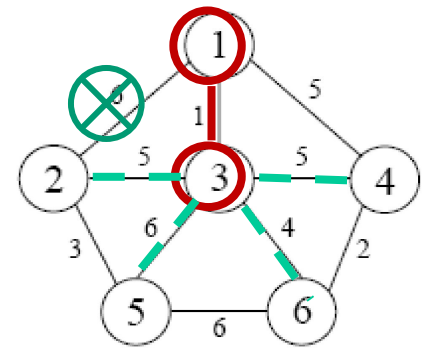
<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	6	3	0
6	4	3	0

Vértice elegido

Vértices actualizados

# Algoritmo de Prim

## Implementación



### 2º Paso

Vértice elegido

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	0	0	1
2	6	1	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

Vértices actualizados

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	0	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	6	3	0
6	4	3	0

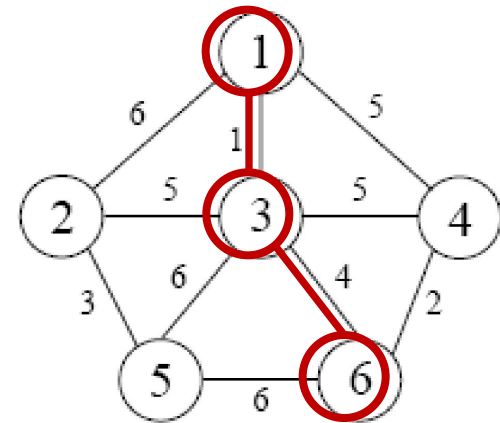
# Algoritmo de Prim

## Implementación

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	$\infty$	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértice elegido

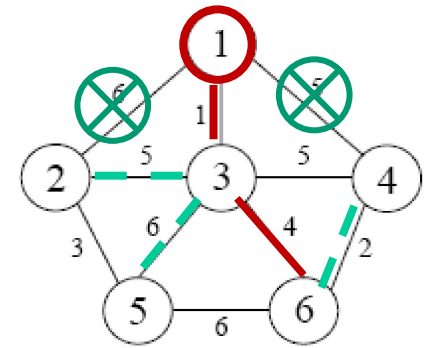
3° Paso



Se agrega la arista  
(3,6) y el vértice 6

# Algoritmo de Prim

## Implementación



### 3° Paso

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	$\infty$	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértices actualizados

Vértice elegido

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	0	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	2	6	0
5	6	3	0
6	4	3	0

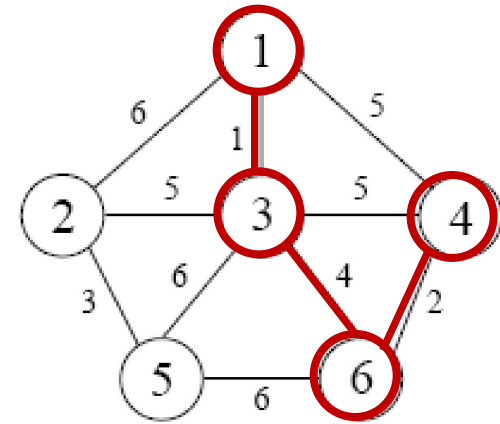
# Algoritmo de Prim

## Implementación

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	0	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	2	6	1
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértice  
elegido

4º Paso



Se agrega la arista  
(6,4) y el vértice 4

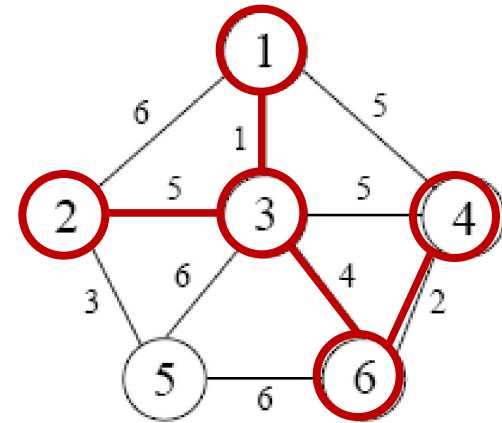
# Algoritmo de Prim

## Implementación

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	0	0	1
2	5	3	1
3	1	1	1
4	2	6	1
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértice elegido

5° Paso



Se agrega la arista  
(3,2) y el vértice 2



# Algoritmo de Prim

## Implementación

### 5° Paso

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	1
3	1	1	1
4	2	6	1
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértice elegido

Vértice actualizado

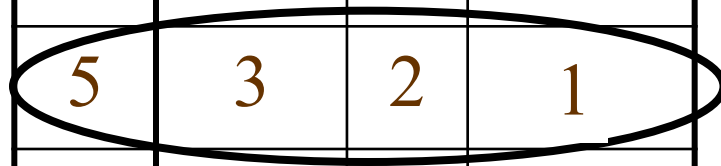
<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	1
3	1	1	1
4	2	6	1
5	3	2	0
6	4	3	1

# Algoritmo de Prim

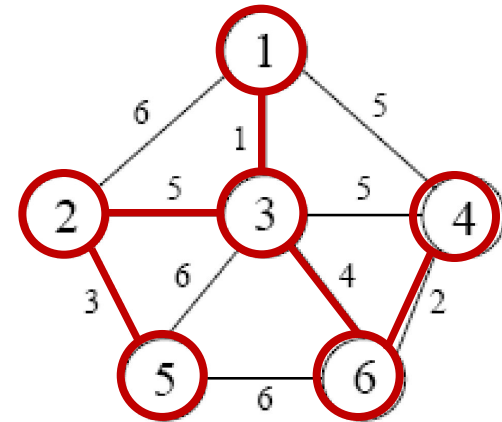
## Implementación

$V$	$Costo$	$W$	$Conoc.$
1	0	0	1
2	5	3	1
3	1	1	1
4	2	6	1
5	3	2	1
6	4	3	1

Vértice elegido



6° Paso



Se agrega la arista  
(2,5) y el vértice 5

# Algoritmo de Prim

## Tiempo de Ejecución

- Se hacen las mismas consideraciones que para el algoritmo de Dijkstra:
  - Si se implementa con una tabla secuencial:
    - El costo total del algoritmo es  $O(|V|^2)$
  - Si se implementa con heap:
    - El costo total del algoritmo es  $O(|E| \log|V|)$

# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal

- Selecciona las aristas en orden creciente según su peso y las acepta si no originan un ciclo.
- El invariante que usa me indica que en cada punto del proceso, dos vértices pertenecen al mismo conjunto si y sólo si están conectados.
- Si dos vértices  $u$  y  $v$  están en el mismo conjunto, la arista  $(u,v)$  es rechazada porque al aceptarla forma un ciclo.

# Árbol de expansión mínima

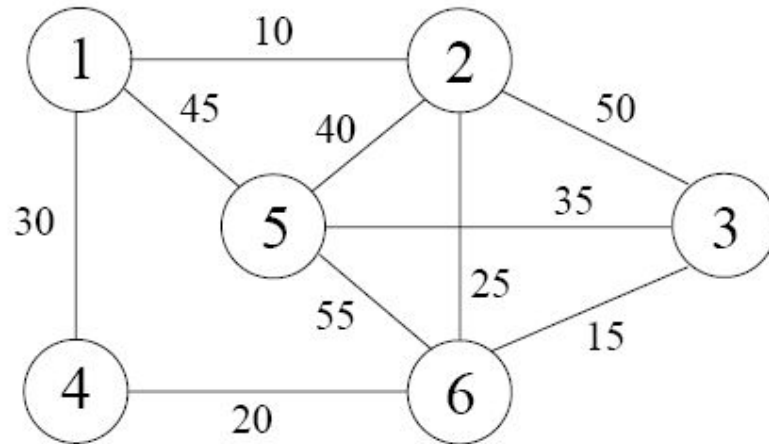
## Algoritmo de Kruskal (cont.)

- Inicialmente cada vértice pertenece a su propio conjunto  
→  $|V|$  conjuntos con un único elemento
- Al aceptar una arista se realiza la Unión de dos conjuntos.
- Las aristas se organizan en una heap, para ir recuperando la de mínimo costo en cada paso.

# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

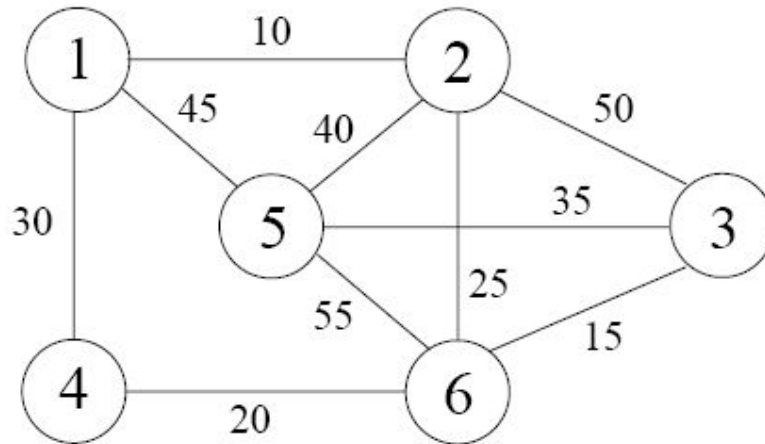
Ejemplo:



# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Ejemplo:



Aristas ordenadas por su costo de menor a mayor:

(1,2)  $\rightarrow$  10

(3,6)  $\rightarrow$  15

(4,6)  $\rightarrow$  20

(2,6)  $\rightarrow$  25

(1,4)  $\rightarrow$  30

(5,3)  $\rightarrow$  35

(5,2)  $\rightarrow$  40

(1,5)  $\rightarrow$  45

(2,3)  $\rightarrow$  50

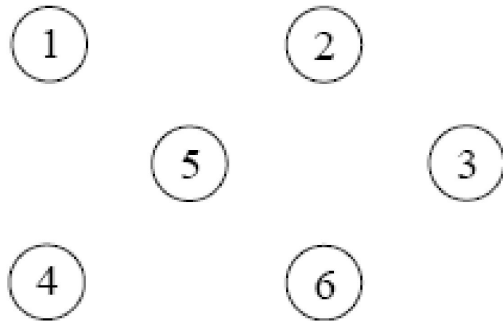
(5,6)  $\rightarrow$  55

- Ordenar las aristas, usando un algoritmo de ordenación
- Construir una min-heap  $\rightarrow$  **más eficiente**

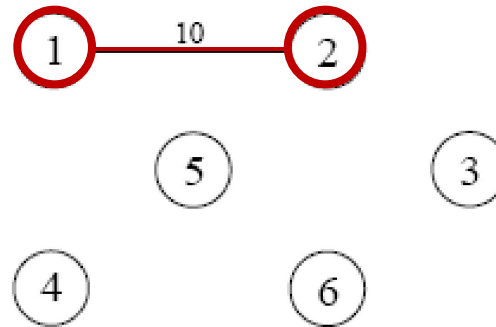
# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Inicialmente cada vértice está en su propio conjunto



Se agrega la arista (1,2)

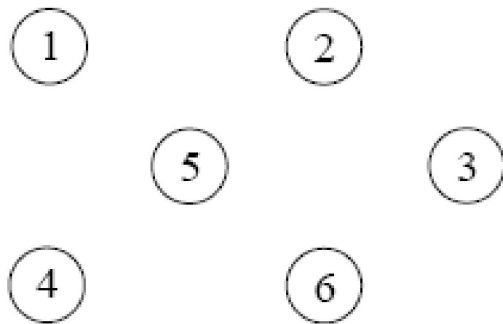




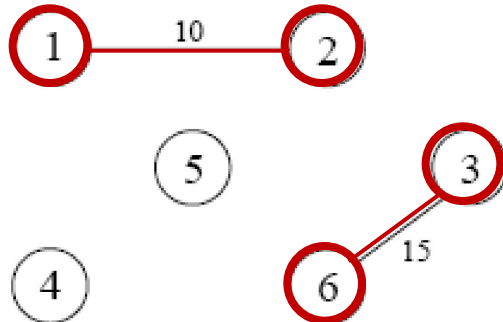
# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

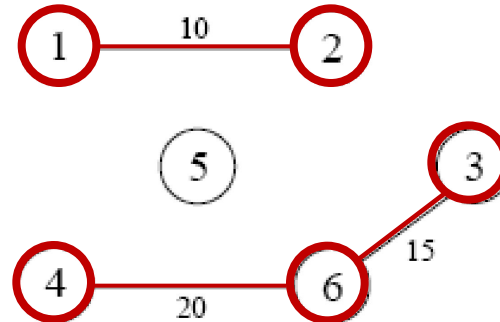
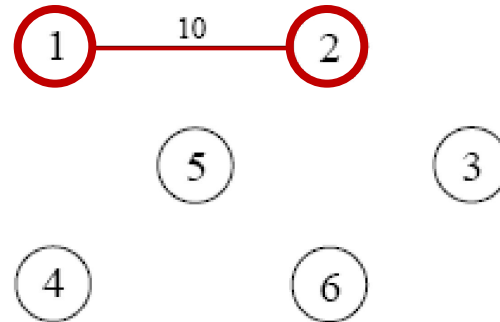
Inicialmente cada vértice está en su propio conjunto



Se  
agrega  
la arista  
(3,6)



Se agrega la arista (1,2)

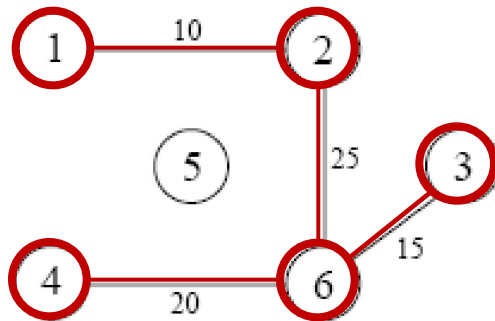


Se  
agrega  
la arista  
(4,6)

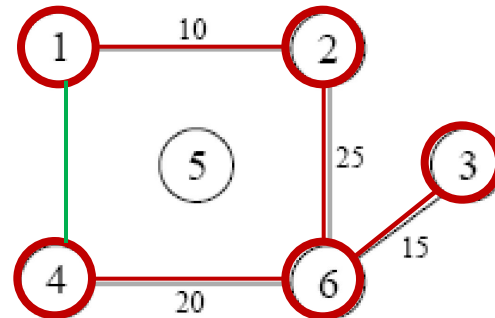
# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Se agrega la arista (2,6)



¿Se agrega la arista (1,4) con costo 30?

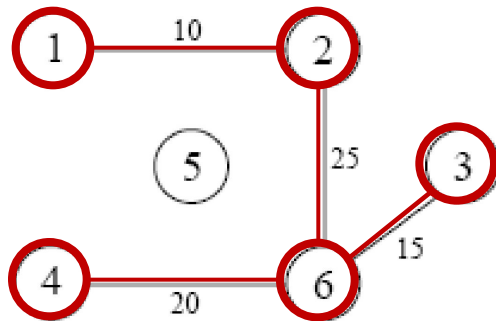


**No, porque forma ciclo, ya que pertenece a la misma componente conexa**

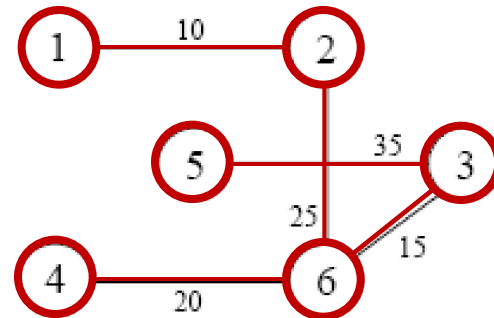
# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Se agrega la arista (2,6)



Se agrega la arista (3,5)



# Algoritmo de Kruskal

## Tiempo de Ejecución

- Se organizan las aristas en una heap, para optimizar la recuperación de la arista de mínimo costo
- El tamaño de la heap es  $|E|$ , y extraer cada arista lleva  $O(\log |E|)$
- El tiempo de ejecución es  $O(|E|\log|E|)$
- Dado que  $|E| \leq |V|^2$ ,  $\log |E| \leq 2 \log |V|$ ,  
→ el costo total del algoritmo es  $O(|E| \log|V|)$

# Grafos

## Conclusiones

- Podemos utilizar grafos para modelar problemas de la “vida real”.
- Los grafos son una herramienta fundamental en resolución de problemas.
- Representación:
  - Tamaño reducido: matrices de adyacencia.
  - Tamaño grande y grafo “disperso”: listas de adyacencia.

# Grafos

## Conclusiones

- Existen muchos algoritmos “clásicos” para resolver diferentes problemas sobre grafos.
- **Nuestro trabajo:** saber modelar los problemas de interés usando grafos y encontrar el algoritmo adecuado para la aplicación que se requiera.
- Es importante el estudio de problemas genéricos sobre grafos.
- La búsqueda primero en profundidad (DFS) y búsqueda en amplitud (BFS) son herramientas básicas, subyacentes en muchos de los algoritmos estudiados

