Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 6:
Matrices.

Ejercicio 1.

Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*, B=* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$*, C=* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*, calcular:*

(a) *3A - 2B + C.*

3A - 2B + C= 3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - 2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3A - 2B + C= $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3A - 2B + C= $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) *A - 3 (B - C).*

A - 3 (B - C)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - 3 [$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$]
A - 3 (B - C)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - 3 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
A - 3 (B - C)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$
A - 3 (B - C)= $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) *Hallar una matriz D de 2x2 que cumpla que A - D= B.*

A - D= B
D= A - B
D= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
D= $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) *Hallar una matriz E de 2x2 que cumpla que A + B + E sea una matriz triangular superior.*

A + B + E= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$
E= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ - A - B
E= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

E= $\begin{pmatrix} a_{11}-2 & a_{12}-2 \\ -3 & a_{22}-2 \end{pmatrix}$.

(e) *Hallar una matriz F de 2x2 que sea el opuesto de C - B + A.*

F= -(C - B + A)
F= B - C - A
F= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
F= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

(f) *Hallar una matriz G de 2x2 que cumpla que B - 3G + 4 (A + B)=* 0_{2x2}.

B - 3G + 4 (A + B)= 0_{2x2}
B - 3G + 4A + 4B= 0_{2x2}
-3G + 4A + 5B= 0_{2x2}
3G + 0_{2x2}= 4A + 5B
3G= 4A + 5B
G= $\frac{4A+5B}{3}$
G= $\frac{4}{3}$ A + $\frac{5}{3}$ B
G= $\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
G= $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 5 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$
G= $\begin{pmatrix} 3 & \frac{8}{3} \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2.

Sean $A \in \mathbb{R}^{4x5}$, $B \in \mathbb{R}^{5x7}$, $C \in \mathbb{R}^{4x5}$, $D \in \mathbb{R}^{7x5}$. *Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles y, en caso afirmativo, cuál es la cantidad de filas y de columnas de la matriz resultado.*

(a) *AB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x7}$.

(b) *BA.*

Esta operación no es posible.

(c) *AC.*

Esta operación no es posible.

(d) *CB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x7}$.

(e) *ABD.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x5}$.

Ejercicio 3.

En los casos que sea posible, calcular AB y BA, ¿es AB= BA?

(a) $A= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$AB= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$AB= \begin{pmatrix} 9 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

BA no es posible calcularlo.

(b) $A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$AB= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
AB= 9.

$BA= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$BA= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $A= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$AB= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
$AB= \begin{pmatrix} 18 & 13 & 26 \\ -8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

BA no es posible calcularlo.

Ejercicio 4.

Al igual que en los números reales, se define recursivamente la potencia natural de una matriz $A^n = \begin{cases} I, si\ n = 0 \\ AA^{n-1}, si\ n \geq 1 \end{cases}$, *es decir, que* A^n *no es otra cosa que multiplicar n veces A por sí misma. Dadas* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, *calcular:*

(a) A^2.

A^2= AA

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) B^3.

B^3= BB^2

B^3= BBB

$B^3 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 36 & -10 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 216 & -76 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$.

(c) *AB.*

AB= $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

AB= $\begin{pmatrix} 18 & 13 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $2A^2$ + *BA.*

$2A^2$ + BA= 2AA + BA

$2A^2$ + BA= $2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$2A^2$ + BA= $2 \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$2A^2$ + BA= $\begin{pmatrix} 10 & 24 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$2A^2$ + BA= $\begin{pmatrix} 29 & 48 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.

Dadas A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$*, B=* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$*, establecer si es cierto que:*

(a) *(A + B) (A - B)=* A^2 - B^2.

(A + B) (A - B)= A^2 - B^2
A^2 - AB + BA - B^2= A^2 - B^2
A^2 - $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ - B^2= A^2 - B^2
A^2 - $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ - B^2= A^2 - B^2
A^2 - $\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$ - $B^2 \neq A^2$ - B^2.

Por lo tanto, no es cierta esta igualdad.

(b) $(A + B)^2$= A^2 - *2AB* + B^2.

$(A + B)^2$= A^2 - 2AB + B^2
A^2 + 2AB + $B^2 \neq A^2$ - 2AB + B^2.

Por lo tanto, no es cierta esta igualdad.

Juan Menduiña

Ejercicio 6.

Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$*,B=* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$*, C=* $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) *Calcular AB y AC.*

AB= $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
AB= $\begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$.

AC= $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
AC= $\begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$.

(b) *¿Es válida la propiedad cancelativa en el producto de matrices? (Recordar que la propiedad cancelativa de los números reales dice que, si ab= bc, entonces, b= c).*

No, la propiedad cancelativa en el producto de matrices no es válida. Por ejemplo, en el caso anterior, se ve que AB= AC, pero B$\neq$ C.

Ejercicio 7.

Hallar los valores de a y b para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 5 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 2a & 10+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 5 = 5 \\ 2a = 2 \\ 10 + 2b = 17 \end{cases}.$$

a= $\frac{2}{2}$
a= 1.

2b= 17 - 10
2b= 7
b= $\frac{7}{2}$.

Ejercicio 8.

Hallar la matriz $X \in \mathbb{R}^{2x3}$ *que cumpla* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} [\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

$$X = \frac{1}{3} [\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.

Sea A una matriz cuadrada 2x2. Probar que, si A tiene una fila (o una columna) nula, entonces, A no tiene inversa.

A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

AB= I

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \end{cases}.$$

A= $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

BA= I

$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ 0 & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 0 \\ 0 = 0 \\ b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto, si A tiene una fila (o una columna) nula, entonces, A no tiene inversa.

Ejercicio 10.

Si A, B, C, D $\in \mathbb{R}^{nxn}$ *tienen inversa, deducir cuál es* $(ABCD)^{-1}$.

$(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Ejercicio 11.

Una empresa que fabrica autos tiene 4 sucursales y fabrica 3 modelos distintos. Tiene guardada en dos matrices, la siguiente información de las ventas del último mes:

$$A=\begin{pmatrix} 30 & 25 & 5 \\ 23 & 20 & 6 \\ 20 & 22 & 4 \\ 15 & 10 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 700 & 100 \\ 900 & 150 \\ 980 & 200 \end{pmatrix}.$$

(a) *¿Qué dimensión tiene el producto AB? ¿Qué información obtiene al realizarlo?*

El producto AB tiene dimensión 4x2 y la información que se obtiene al realizarlo es el precio y la ganancia de cada una de las 4 sucursales.

(b) *Indicar qué representa cada fila y cada columna de la matriz producto.*

Cada fila de la matriz producto representa cada una de las 4 sucursales, mientras que cada columna representa el precio y la ganancia.

Juan Menduiña

Ejercicio 12.

Sea A una matriz cuadrada, que cumple que A^2= 2A - I. Hallar A^{-1}.

A^2= 2A - I
AA= 2A - AA^{-1}
AA^{-1}= 2A - AA
AA^{-1}= A (2I - A)
A^{-1}AA^{-1}= A^{-1}A (2I - A)
IA^{-1}= I (2I - A)
A^{-1}= 2I - A.

Ejercicio 13.

Sea A una matriz cuadrada, que cumple que A^3= 0 (0 es la matriz nula de la misma dimensión que A). Demostrar que I + A + A^2 es la matriz inversa de I - A.

(I - A) (I + A + A^2)= I
(I - A) I + (I - A) A + (I - A) A^2= I
I - A + IA - A^2 + IA^2 - A^3= I
I - A + A - A^2 + A^2 - 0= I
I= I.

(I + A + A^2) (I - A)= I
I (I - A) + A (I - A) + A^2 (I - A)= I
I - AI + AI - A^2 + A^2I - A^3= I
I - A + A - A^2 + A^2 - 0= I
I= I.

Por lo tanto, queda demostrado que I + A + A^2 es la matriz inversa de I - A.

Ejercicio 14.

Llevar las siguientes matrices a la forma escalonada y reducida, indicando las operaciones elementales y el rango de cada una.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 8 & 3 \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}$.

$F_2 = F_2 - 2F_1 \quad \Longrightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{1}{2} F_2 \quad \Longrightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - 6F_1 \quad \Longrightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - 4F_2 \quad \Longrightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 - 3F_2 \quad \Longrightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (A)= 2.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

$F_2 = F_2 - 2F_1 \quad \Longrightarrow \quad B_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{1}{3} F_2 \quad \Longrightarrow \quad B_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 + 3F_1 \quad \Longrightarrow \quad B_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 + 3F_2 \quad \Longrightarrow \quad B_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (A)= 2.

(c) $C=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

$F_1=\frac{-1}{3}F_1 \quad \Longrightarrow \quad C_R=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$F_2=F_2 - 6F_1 \quad \Longrightarrow \quad C_R=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$F_2=\frac{1}{16}F_2 \quad \Longrightarrow \quad C_R=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_1=F_1+\frac{4}{3}F_2 \quad \Longrightarrow \quad C_R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

r (A)= 2.

Ejercicio 15.

Hallar la inversa, si existe, de las siguientes matrices, mediante operaciones elementales e indicar el rango de cada una:

(a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2= F_2 + 8F_1 \implies \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 34 & 8 & 1 \end{array}\right)$

$F_2= \frac{1}{34} F_2 \implies \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{array}\right)$

$F_1= F_1 - 4F_2 \implies \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{17} & \frac{-2}{17} \\ 0 & 1 & \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{array}\right)$.

$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{1}{34} \end{pmatrix}$.

r (A)= r (A^{-1})= 2.

(b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2= F_2 - 2F_1 \implies \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_2= \frac{1}{3} F_2 \implies \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$F_3= F_3 - 2F_2 \implies \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{array}\right)$

$F_3= \frac{3}{7} F_3 \implies \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$

$F_1 = F_1 - 3F_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & | & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

$F_2 = F_2 + \frac{2}{3} F_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-9}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$

r (B)= r (B^{-1})= 3.

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = \frac{1}{2} F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = F_2 - 5F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{-5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = 2F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = \frac{1}{5} F_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 - \frac{1}{2} F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

$C^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

r (C)= r (C^{-1})= 3.

(d) $D=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 6 & -15 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_1=\frac{-1}{2}F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{-1}{2} & 0 \\ 6 & -15 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_2=F_2$ - $6F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, no existe la matriz inversa.

Ejercicio 16.

Dada A= $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$.

(a) *Hallar k para que sea* $A^2 = 0_{2x2}$.

$A^2 = 0_{2x2}$
AA= 0_{2x2}
$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -8-4k \\ 2+k & -4+k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 0 = 0 \\ -8-4k = 0 \\ 2+k = 0 \\ -4+k^2 = 0 \end{cases}$.

4k= -8
k= $\frac{-8}{4}$
k= -2.

k= -2.

$k^2 = 4$
$\sqrt{k^2} = \sqrt{4}$
$|k| = 2$
k= ± 2.

Por lo tanto, el valor de k para que sea $A^2 = 0_{2x2}$ es -2.

(b) *Hallado k, encontrar el rango de A.*

A= $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$F_1 = \frac{1}{2} F_1 \quad \Rightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
$F_2 = F_2 - F_1 \quad \Rightarrow \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (A)= 1.

Ejercicio 17.

Sea A una matriz nxn:

(a) *Indicar, justificando la respuesta, si es verdadero o falso que (A - I_n) (A + I_n)= A^2 - I_n.*

(A - I_n) (A + I_n)= AA + AI_n - I_nA + I_n^2
(A - I_n) (A + I_n)= A^2 + A - A + I_n
(A - I_n) (A + I_n)= A^2 - I_n.

Por lo tanto, es VERDADERO.

(b) *Si A^2= 0_{nxn}, ¿cuál es la inversa de (A + I_n)?*

(A + I_n) $(A + I_n)^{-1}$= I_n
(A - I_n) (A + I_n) $(A + I_n)^{-1}$= (A - I_n) I_n
(A^2 + AI_n - I_nA - I_n^2) $(A + I_n)^{-1}$= AI_n - I_n^2
(0_{nxn} + A - A - I_n) $(A + I_n)^{-1}$= A - I_n
-I_n $(A + I_n)^{-1}$= A - I_n
$(A + I_n)^{-1}$= -(A - I_n)
$(A + I_n)^{-1}$= I_n - A.

$(A + I_n)^{-1}$ (A + I_n)= I_n
$(A + I_n)^{-1}$ (A + I_n) (A - I_n)= I_n (A - I_n)
$(A + I_n)^{-1}$ (A^2 - AI_n + I_nA - I_n^2) = I_nA - I_n^2
$(A + I_n)^{-1}$ (0_{nxn} - A + A - I_n) = A - I_n
$(A + I_n)^{-1}$ (-I_n)= A - I_n
$(A + I_n)^{-1}$= -(A - I_n)
$(A + I_n)^{-1}$= I_n - A.

Ejercicio 18.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & b \end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}$.

(a) *Encontrar los números a y b tales que se cumpla AB= C.*

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3a-9 & 9 \\ 2 & -2 \\ 6a+23 & b-18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 2 & -2 \\ 29 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -3a-9=-12 \\ 9=9 \\ 2=2 \\ -2=-2 \\ 6a+23=29 \\ b-18=-8 \end{cases}.$$

3a= -9 + 12
3a= 3
a= $\frac{3}{3}$
a= 1.

6a= 29 - 23
6a= 6
a= $\frac{6}{6}$
a= 1.

b= -8 + 18
b= 10.

Por lo tanto, los números a y b tales que se cumpla AB= C son 1 y 10, respectivamente.

(b) *Encontrar, si es que existe, la inversa de A.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 18 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_1=\frac{-1}{3}F_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 18 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$F_2 = \frac{1}{2} F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 6 & 18 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = F_3 - 6F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = F_1 - 3F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-1}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 19.

(a) *Dada D=* $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$*, encontrar el valor de k para que sea* $D^2 = 0_{nxn}$.

$D^2 = 0_{nxn}$
DD= 0_{nxn}
$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5k+1 & 0 \\ 0 & 5k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 5k+1=0 \\ 0=0 \\ 5k+1=0 \\ 0=0 \end{cases}$.

5k= -1
k= $\frac{-1}{5}$.

5k= -1
k= $\frac{-1}{5}$.

Por lo tanto, el valor de k para que sea $D^2 = 0_{nxn}$ es $\frac{-1}{5}$.

(b) *Con el valor k encontrado, calcular el rango de D.*

D= $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

$F_2 = F_2 - 5F_1 \implies D_R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (D)= 1.

Ejercicio 20.

(a) *Encontrar los números a y b tales que (A + B) C= D, siendo A=* $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, B=* $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*, C=* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *y D=* $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a+6 & 3b+3 \\ a+2 & b+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} a+6=9 \\ 3b+3=6 \\ a+2=5 \\ b+3=4 \end{cases}$.

a= 6 - 3
a= 3.

3b= 6 - 3
3b= 3
b= $\frac{3}{3}$
b= 1.

a= 5 - 2
a= 3.

b= 4 - 3
b= 1.

Por lo tanto, los números a y b tales que (A + B) C= D son 3 y 1, respectivamente.

(b) *Hallar (si existe)* D^{-1}.

$\begin{pmatrix} 9 & 6 & | & 1 & 0 \\ 5 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = \frac{1}{9} F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & | & \frac{1}{9} & 0 \\ 5 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = F_2 - 5F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & | & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & | & \frac{-5}{9} & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{3}{2} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & | & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 - \frac{2}{3} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$

Ejercicio 21.

Demostrar que, si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxn}$, $AB= 0_{nxn}$ y B tiene inversa, entonces, $A= 0_{nxn}$.

AB= 0_{nxn}
ABB^{-1}= $0_{nxn}B^{-1}$
AI= 0_{nxn}
A= 0_{nxn}.

Por lo tanto, queda demostrado que, si A $\in \mathbb{R}^{nxn}$, B $\in \mathbb{R}^{nxn}$, AB= 0_{nxn} y B tiene inversa, entonces, A= 0_{nxn}.

Ejercicio 22.

Sean las matrices A, B y C de nxn, tales que B tiene inversa. Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando la respuesta: "Si CB= A, entonces, C= $B^{-1}A$*".*

CB= A
CBB^{-1}= AB^{-1}
CI= AB^{-1}
C= AB^{-1}.

Por lo tanto, esta afirmación es FALSA.

Ejercicio 23.

Demostrar que, si una matriz de 2x2 tiene dos filas iguales, entonces, no tiene inversa.

A= $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - F_1 $\Rightarrow$ A_R= $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

r (A)= 1 $<$ n= 2.

Por lo tanto, queda demostrado que, si una matriz de 2x2 tiene dos filas iguales, entonces, no tiene inversa.

Ejercicio 24.

Sean A, B y C matrices cuadradas de la misma dimensión. Demostrar que, si A tiene inversa y se cumple que AB=AC, entonces, B= C.

AB= AC
A^{-1}AB= A^{-1}AC
IB= IC
B= C.

Por lo tanto, queda demostrado que, si A tiene inversa y se cumple que AB= AC, entonces, B= C.