Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 1: Cálculo en Dos o Más Variables.

Ejercicio 1.

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y)= \frac{1}{x^2+y^2}$.

$x^2 + y^2 \neq 0$.

$x^2= 0$
$\sqrt{x^2}= \sqrt{0}$
$|x|= 0$
x= 0.

$y^2= 0$
$\sqrt{y^2}= \sqrt{0}$
$|y|= 0$
y= 0.

$Dom_f= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x, y) \neq (0, 0)\}$.

(b) $f(x, y, z)= x^2 + 2y^2 - z^2$.

$Dom_f= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

(c) $f(x, y)= \frac{x}{x^2+y^2-9}$.

$x^2 + y^2 - 9 \neq 0$
$x^2 + y^2 \neq 9$.

$Dom_f= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \neq 9\}$.

(d) $f(x, y)= \frac{y}{x^2+y^2+1}$.

$x^2 + y^2 + 1 \neq 0$
$x^2 + y^2 + 1 > 0$.

$Dom_f= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(e) *f (x, y, z)=* $\frac{x^2}{y^2-z^2}$.

y^2 - $z^2 \neq 0$
$y^2 \neq z^2$
$\sqrt{y^2} \neq \sqrt{z^2}$
$|y| \neq$ z
y$\neq \pm$z.

Dom_f= {(x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$: y$\neq \pm$z}.

(f) *f (x, y)=* $\sqrt{9-x^2-y^2}$.

9 - x^2 - $y^2 \geq 0$
x^2 + $y^2 \leq 9$.

Dom_f= {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$: x^2 + $y^2 \leq 9$}.

(g) *f (x, y)=* $e^{-x^2+y^2}$.

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

(h) *f (x, y)= log (16 -* x^2 *- 16*y^2*).*

16 - x^2 - 16$y^2 > 0$
x^2 + 16$y^2 < 16$
$\frac{x^2+16y^2}{16} < 1$
$\frac{x^2}{16} + y^2 < 1$.

Dom_f= {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$: $\frac{x^2}{16} + y^2 < 1$}.

Ejercicio 2.

Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

(a) *f (x, y)= log (9 - x^2 - 9y^2) en (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1).*

f (1, 0)= log (9 - 1^2 - 9 $*$ 0^2)
f (1, 0)= log (9 - 1 - 9 * 0)
f (1, 0)= log (9 - 1 - 0)
f (1, 0)= log (8)
f (1, 0)= 0,903.

(1, 1) $\notin Dom_f$.

(0, 1) $\notin Dom_f$.

(-1, 1) $\notin Dom_f$.

(b) *f (x, y)=* $\sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ *en (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (2, 2).*

f (1, 0)= $\sqrt{4 - 1^2 - 4 * 0^2}$
f (1, 0)= $\sqrt{4 - 1 - 4 * 0}$
f (1, 0)= $\sqrt{4 - 1 - 0}$
f (1, 0)= $\sqrt{3}$
f (1, 0)= 1,732.

(1, 1) $\notin Dom_f$.

f (0, 1)= $\sqrt{4 - 0^2 - 4 * 1^2}$
f (0, 1)= $\sqrt{4 - 0 - 4 * 1}$
f (0, 1)= $\sqrt{4 - 0 - 4}$
f (0, 1)= $\sqrt{0}$
f (0, 1)= 0.

(-1, 1) $\notin Dom_f$.

(2, 2) $\notin Dom_f$.

(c) *f (x, y)=* $e^{x^2+y^2}$ *en (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1).*

f (1, 0)= $e^{1^2+0^2}$

f (1, 0)= e^{1+0}
f (1, 0)= e^{1}
f (1, 0)= e.

f (1, 1)= $e^{1^2+1^2}$
f (1, 1)= e^{1+1}
f (1, 1)= e^{2}.

f (0, 1)= $e^{0^2+1^2}$
f (0, 1)= e^{0+1}
f (0, 1)= e^{1}
f (0, 1)= e.

f (-1, 1)= $e^{(-1)^2+1^2}$
f (-1, 1)= e^{1+1}
f (-1, 1)= e^{2}.

Ejercicio 3.

Calcular los siguientes límites o demostrar que no existen:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2$.

$\lim\limits_{(x.y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2$= 5 * 3 - 3^2 + 3 * 1^2= 15 - 9 + 3 * 1= 15 - 9 + 3= 9.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1 = \frac{7*0^2-2*0^2}{0^2+0^2} + 1 = \frac{7*0-2*0}{0+0} + 1 = \frac{0-0}{0} + 1 = (\frac{0}{0}) + 1$.

<u>Por límites iterados:</u>

$\lim\limits_{x\to0} (\lim\limits_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-2*0^2}{x^2+0^2} + 1$

$\lim\limits_{x\to0} (\lim\limits_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-2*0}{x^2+0} + 1$

$\lim\limits_{x\to0} (\lim\limits_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-0}{x^2+0} + 1$

$\lim\limits_{x\to0} (\lim\limits_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2}{x^2} + 1$

$\lim\limits_{x\to0} (\lim\limits_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{x\to0} 7 + 1$

$\lim\limits_{x\to0} (\lim\limits_{y\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{x\to0} 8$= 8.

$\lim\limits_{y\to0} (\lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{y\to0} \frac{7*0^2-2y^2}{0^2+y^2} + 1$

$\lim\limits_{y\to0} (\lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{y\to0} \frac{7*0-2y^2}{0+y^2} + 1$

$\lim\limits_{y\to0} (\lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{y\to0} \frac{0-2y^2}{0+y^2} + 1$

$\lim\limits_{y\to0} (\lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{y\to0} \frac{-2y^2}{y^2} + 1$

$\lim\limits_{y\to0} (\lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{y\to0} -2 + 1$

$\lim\limits_{y\to0} (\lim\limits_{x\to0} \frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) = \lim\limits_{y\to0} -1$= -1.

Por lo tanto, no existe el límite.

(c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z}$.

$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z}= e^{1+1^2-0}= e^{1+1-0}= e^2.$

(d) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} sen\ (x+y+z).$

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} sen\ (x+y+z)$= sen (0 + 0 + 0)= sen 0= 0.

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4}.$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4}= \frac{0^4}{0^4+0^4}= \frac{0}{0+0}= (\frac{0}{0}).$

<u>Por límites iterados:</u>

$\lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+0^4}$
$\lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+0}$
$\lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4}$
$\lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim_{x\to 0} 1= 1.$

$\lim_{y\to 0} (\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim_{y\to 0} \frac{0^4}{0^4+y^4}$
$\lim_{y\to 0} (\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^4}$
$\lim_{y\to 0} (\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4}$
$\lim_{y\to 0} (\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+y^4})= \lim_{y\to 0} 0= 0.$

Por lo tanto, no existe el límite.

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{0*0}{\sqrt{0^2+0^2}}= \frac{0}{\sqrt{0+0}}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0}).$

<u>Por límites iterados:</u>

$\lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{x\to 0} \frac{x*0}{\sqrt{x^2+0^2}}$
$\lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt{x^2+0}}$

$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{x\to 0}\frac{0}{\sqrt{x^2}}$
$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{x\to 0} 0= 0.$

$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{y\to 0}\frac{0*y}{\sqrt{0^2+y^2}}$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{0+y^2}}$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{y^2}}$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})= \lim_{y\to 0} 0= 0.$

Por la recta y= mx:

$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{xmx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+m^2}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{x\to 0}\frac{m\sqrt{x^3}}{\sqrt{1+m^2}}= \frac{m\sqrt{0^3}}{\sqrt{1+m^2}}= \frac{m\sqrt{0}}{\sqrt{1+m^2}}= \frac{m*0}{\sqrt{1+m^2}}= \frac{0}{\sqrt{1+m^2}}= 0.$

Por Teorema del Encaje:

$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|= \frac{|xy|}{\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|}$
$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|= \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|= \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2}}= \frac{|x||y|}{|x|}= |y|.$
$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|.$

$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \min(|x|, |y|)$
$-\min(|x|, |y|) \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \min(|x|, |y|).$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\min(|x|, |y|)= -\min(|0|, |0|)= -\min(0, 0)= 0.$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \min(|x|, |y|)= \min(|0|, |0|)= \min(0, 0)= 0.$

Por lo tanto, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\min(|x|, |y|)= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \min(|x|, |y|)= 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}= 0.$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}= \frac{2^2-2*2*2+2^2}{2-2}= \frac{4-8+4}{0}= (\frac{0}{0})$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}= \lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)^2}{x-y}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}= \lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} x-y$= 2 - 2= 0.

Ejercicio 4.

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo $\mathbb{R}^2$, redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

(a) $f(x, y)= \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Dominio:

$Dom_f= \mathbb{R}^2$.

Límite (coordenadas polares):

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{0^3}{\sqrt{0^2+0^2}}= \frac{0}{\sqrt{0+0}}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0}).$$

x= r cos θ; y= r sen θ.

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{(r\cos\theta)^3}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\ sen\ \theta)^2}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{\sqrt{r^2 cos^2\ \theta+r^2 sen^2\ \theta}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{\sqrt{r^2(cos^2\ \theta+sen^2\ \theta)}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{\sqrt{r^2 * 1}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{\sqrt{r^2}}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^3 cos^3\ \theta}{r}$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= r^2\ cos^3\ \theta.$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{r\longrightarrow 0} r^2 cos^3\ \theta= 0^2\ cos^3\ \theta= 0\ cos^3\ \theta= 0.$$

f (x, y) es discontinua en (x, y)= (0, 0), ya que $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f\ (x,y) \neq$ f (0, 0). Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

(b) $f(x, y)= \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Dominio:

$Dom_f= \mathbb{R}^2$.

Límite (coordenadas polares):

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{0}{\sqrt{0^2+0^2}}= \frac{0}{\sqrt{0+0}}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0})$.

x= r cos θ; y= r sen θ.

$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\,sen\,\theta)^2}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2cos^2\,\theta+r^2sen^2\,\theta}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2(cos^2\,\theta+sen^2\,\theta)}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2*1}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r\cos\theta}{r}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ cos θ.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{r\to 0} \cos\theta= \cos\theta$.

f (x, y) es discontinua en (x, y)= (0, 0), ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y) \neq$ f (0, 0). Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

(c) *f (x, y)=* $\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Dominio:

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

Límite (coordenadas polares):

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{0^2}{\sqrt{0^2+0^2}}= \frac{0}{\sqrt{0+0}}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0})$.

x= r cos θ; y= r sen θ.

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{(r\cos\theta)^2}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\,sen\,\theta)^2}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2cos^2\,\theta}{\sqrt{r^2cos^2\,\theta+r^2sen^2\,\theta}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2cos^2\,\theta}{\sqrt{r^2(cos^2\,\theta+sen^2\,\theta)}}$

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2 cos^2\,\theta}{\sqrt{r^2 * 1}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2 cos^2\,\theta}{\sqrt{r^2}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \frac{r^2 cos^2\,\theta}{r}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ r $cos^2\,\theta$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}= \lim_{r\to 0} r\, cos^2\,\theta$= 0 $cos^2\,\theta$= 0.

f (x, y) es continua en (x, y)= (0, 0), ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y)$= f (0, 0). Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$.

(d) *f (x, y)=* $\frac{xy}{x^2+y^2}$.

<u>Dominio:</u>

$x^2 + y^2 \neq 0$.

x^2= 0
$\sqrt{x^2}= \sqrt{0}$
$|x|$= 0
x= 0.

y^2= 0
$\sqrt{y^2}= \sqrt{0}$
$|y|$= 0
y= 0.

Dom_f= $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

<u>Límite (coordenadas polares):</u>

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{0*0}{0^2+0^2}= \frac{0}{0+0}= \frac{0}{\sqrt{0}}= (\frac{0}{0})$.

x= r cos θ; y= r sen θ.

$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r\cos\theta\, r\, sen\,\theta}{(r\cos\theta)^2+(r\, sen\,\theta)^2}$
$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r^2\cos\theta\, sen\,\theta}{r^2 cos^2\,\theta+r^2 sen^2\,\theta}$
$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r^2\cos\theta\, sen\,\theta}{r^2(cos^2\,\theta+sen^2\,\theta)}$
$\frac{xy}{x^2+y^2}= \frac{r^2\cos\theta\, sen\,\theta}{r^2 * 1}$

$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos\theta\, sen\,\theta}{r^2}$
$\frac{xy}{x^2+y^2}=\cos\theta$ sen θ.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\cos\theta\, sen\,\theta=\cos\theta$ sen θ.

f (x, y) es discontinua en (x, y)= (0, 0), ya que $\nexists$ f (0, 0) y $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}. No es posible extender su continuidad, ya que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(e) *f (x, y)=* $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

<u>Dominio:</u>

$x^2+y^2\neq 0$.

$x^2=0$
$\sqrt{x^2}=\sqrt{0}$
$|x|=0$
x= 0.

$y^2=0$
$\sqrt{y^2}=\sqrt{0}$
$|y|=0$
y= 0.

$Dom_f=\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

<u>Límite (coordenadas polares):</u>

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\frac{0*0^2}{0^2+0^2}=\frac{0*0}{0+0}=\frac{0}{\sqrt{0}}=(\frac{0}{0})$.

x= r cos θ; y= r sen θ.

$\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\theta\,(r\,sen\,\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\,sen\,\theta)^2}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\theta\, r^2 sen^2\,\theta}{r^2cos^2\,\theta+r^2sen^2\,\theta}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\frac{r^3\cos\theta\, sen^2\,\theta}{r^2(cos^2\,\theta+sen^2\,\theta)}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\frac{r^3\cos\theta\, sen^2\,\theta}{r^2*1}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\frac{r^3\cos\theta\, sen^2\,\theta}{r^2}$
$\frac{xy^2}{x^2+y^2}=$ r cos θ $sen^2\,\theta$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$= $\lim\limits_{r\to 0} r \cos\theta \, sen\, \theta$= 0 cos θ sen^2 θ= 0 cos θ sen^2 θ= 0.

f (x, y) es discontinua en (x, y)= (0, 0), ya que ∄ f (0, 0). Por lo tanto, f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}. Sin embargo, de manera de poder extender su continuidad, ya que ∃ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\ (x, y)$, f (x, y), se puede redefinir de la siguiente manera:

f (x, y)= $\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, si\ (x, y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Ejercicio 5.

Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

(a) $f(x, y) = 3x^2y + y^3$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6xy$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$.

(b) $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$.

$Dom_f = \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy + z^2$.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 + 2yz$.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = y^2 + 2zx$.

(c) $f(x, y) = e^{xy} + sen(x^2 + y)$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = ye^{xy} + 2x \cos(x^2 + y)$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^{xy} + \cos(x^2 + y)$.

(d) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2)-xy2x}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2y+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2)-xy2y}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3+xy^2-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

(e) $f(x, y) = x^2 \log(x + y)$.

$Dom_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y > 0\}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \log(x + y) + x^2 \frac{1}{x+y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \log(x + y) + \frac{x^2}{x+y}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \log(x + y) + x^2 \frac{1}{x+y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + \frac{x^2}{x+y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{x+y}$.

(f) $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (x + yx_i)]^2$.

$Dom_f = \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n}[y_i-(x+yx_i)]^2}{\partial x}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y_i-x-yx_i)^2}{\partial x}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i-x-yx_i)^2}{\partial x}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - x - yx_i)(-1)$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - x - yx_i)$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2 \sum_{i=1}^{n} y_i - x - yx_i$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n}[y_i-(x+yx_i)]^2}{\partial x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y_i - x - yx_i)^2}{\partial y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - x - yx_i)^2}{\partial y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - x - yx_i)(-x_i)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - x - yx_i)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - x - yx_i)$.

Ejercicio 6.

Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) *f (x, y)=* xe^{x^2y} *en (1, ln 2).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= e^{x^2y} + \text{x}e^{x^2y}2\text{xy}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= e^{x^2y} + 2x^2\text{y}e^{x^2y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= (1 + 2x^2\text{y})\ e^{x^2y}.$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= 0e^{x^2y} + \text{x}e^{x^2y}x^2$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= 0 + x^3e^{x^2y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= x^3e^{x^2y}.$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= (1 + 2 * 1^2 \ln 2)\ e^{1^2 \ln 2}$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= (1 + 2 * 1 \ln 2)\ e^{1 \ln 2}$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= (1 + 2 \ln 2)\ e^{\ln 2}$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= (1 + 2 \ln 2) * 2$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial x}= 2 + 4 \ln 2.$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial y}= 1^3\ e^{1^2 \ln 2}$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial y}= 1e^{\ln 2}$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial y}= e^{\ln 2}$

$\frac{\partial f(1,\ln 2)}{\partial y}= 2.$

(b) *f (x, y)=* $\sqrt{x^2 + y^2}$ *en (-4, 3).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} * 2\text{x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} * 2\text{y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial x}= \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial x}= \frac{-4}{\sqrt{16+9}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial x}= \frac{-4}{\sqrt{25}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial x}= \frac{-4}{5}.$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial y}= \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial y}= \frac{3}{\sqrt{16+9}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial y}= \frac{3}{\sqrt{25}}$

$\frac{\partial f(-4,3)}{\partial y}= \frac{3}{5}.$

Ejercicio 7.

Analizar diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones:

(a) *f (x, y)= sen (x^2 + y^2).*

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$, ya que es una composición de funciones continuas.

Continuidad de derivadas parciales:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= cos ($x^2$ + y^2) 2x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x cos ($x^2$ + y^2).

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= cos ($x^2$ + y^2) 2y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 2y cos ($x^2$ + y^2).

Ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$.

Por lo tanto, f (x, y) es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales también son continuas en $\mathbb{R}^2$.

(b) *f (x, y)=* $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$, ya que es una composición de funciones continuas.

Continuidad de derivadas parciales:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= $\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ * 2x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= $\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ * 2y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Por lo tanto, f (x, y) no es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$, pero sus derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

(c) *f (x, y)=* $\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Por lo tanto, f (x, y) no es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

(d) *f (x, y)=* $\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

Continuidad de f (x, y):

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$.

Continuidad de derivadas parciales:

Para (x, y)≠ (0, 0):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2)-xy^2 2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2y^2+y^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^2)-xy^2 2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y+2xy^3-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Para (x, y)= (0, 0):

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0.

Ambas derivadas parciales son continuas en (0, 0).

Por lo tanto, f (x, y) es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales también son continuas en $\mathbb{R}^2$.

(e) *f (x, y)*= $\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Dom_f= $\mathbb{R}^2$.

<u>Continuidad de f (x, y):</u>

f (x, y) es continua en $\mathbb{R}^2$.

<u>Continuidad de derivadas parciales:</u>

Para (x, y)≠ (0, 0):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2y+y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}-\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\frac{x(x^2+y^2)-xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{x(x^2+y^2)-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{x^3+xy^2-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ - {(0, 0)}.

Para (x, y)= (0, 0):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= 0.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= 0.$$

Ambas derivadas parciales son continuas en (0, 0).

Por lo tanto, f (x, y) es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ya que es continua en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales también son continuas en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 8.

Hallar, en caso de que exista, el plano tangente a la gráfica de la función f (x, y)= $e^{x^2+y^2}$ *en el punto (-1, 1, f (-1, 1)). De ser posible, con ayuda de software a elección, mostrar las gráficas de la función y el plano tangente.*

f (-1, 1)= $e^{(-1)^2+1^2}$
f (-1, 1)= e^{1+1}
f (-1, 1)= e^2.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= $e^{x^2+y^2} * 2$x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x$e^{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= $e^{x^2+y^2} * 2$y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 2y$e^{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x}$= 2 (-1) $e^{(-1)^2+1^2}$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x}$= -2$e^{1+1}$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x}$= -2$e^2$.

$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y}$= $2 * 1e^{(-1)^2+1^2}$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y}$= $2e^{1+1}$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y}$= $2e^2$.

Π_T: z= $\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x}$ [x - (-1)] + $\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y}$ (y - 1) + f (-1, 1)
Π_T: z= -2e^2 (x + 1) + 2e^2 (y - 1) + e^2
Π_T: z= -2xe^2 - 2e^2 + 2ye^2 - 2e^2 + e^2
Π_T: z= -2xe^2 + 2ye^2 - 3e^2
Π_T: z= (-2x + 2y - 3) e^2.

Ejercicio 9.

Encontrar la aproximación lineal de la función f (x, y)= $x^2 + y^4 + e^{xy}$ en (1, 0) y utilizarla para estimar, aproximadamente, f (0,98; 0,05). Graficar, con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.

f (1, 0)= $1^2 + 0^4 + e^{1*0}$
f (1, 0)= 1 + 0 + e^0
f (1, 0)= 1 + 0 + 1
f (1, 0)= 2.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + e^{xy}y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + y$e^{xy}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= $4y^3 + e^{xy}$x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= $4y^3$ + xe^{xy}.

$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2 * 1 + 0$e^{1*0}$
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2 + 0$e^0$
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2 + 0 * 1
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2 + 0
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$= 2.

$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 4 * 0^3 + 1e^{1*0}
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 4 * 0 + 1$e^0$
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 4 * 0 + 1 * 1
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 0 + 1
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$= 1.

L (x, y)= f (1, 0) + $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$ (x - 1) + $\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$ (y - 0)
L (x, y)= 2 + 2 (x - 1) + 1y
L (x, y)= 2 + 2x - 2 + y
L (x, y)= 2x + y.

f (0,98, 0,05)≈ L (0,98, 0,05)= 2 * 0,98 + 0,05
f (0,98, 0,05)≈ L (0,98, 0,05)= 1,96 + 0,05
f (0,98, 0,05)≈ L (0,98, 0,05)= 2,01.

Ejercicio 10.

Calcular los vectores gradientes de las siguientes funciones:

(a) *f (x, y)=* $e^{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= e^{x^2+y^2} * 2x$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= 2xe^{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= e^{x^2+y^2} * 2y$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= 2ye^{x^2+y^2}$.

∇ f (x, y)= ($\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$)

∇ f (x, y)= ($2xe^{x^2+y^2}$, $2ye^{x^2+y^2}$).

(b) *f (x, y, z)= xyz.*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=$ yz.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$ xz.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial z}=$ xy.

∇ f (x, y, z)= ($\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial z}$)

∇ f (x, y, z)= (yz, xz, xy).

Ejercicio 11.

Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos y dirección de los vectores dados:

(a) *f (x, y)=* x^2 *+* $3xy^2$*; p= (1, 2) y* $\vec{v}$*= (-1, -2).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + $3y^2$.
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 6xy.

∇ f (x, y)= (2x + $3y^2$, 6xy).

$\|\vec{v}\|$= $\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}$
$\|\vec{v}\|$= $\sqrt{1+4}$
$\|\vec{v}\|$= $\sqrt{5}$.

$\vec{u}$= $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
$\vec{u}$= $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$

D f (x, y)= ∇ f (x, y) $\vec{u}$
D f (x, y)= (2x + $3y^2$, 6xy) $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$
D f (x, y)= $\frac{-2x-3y^2}{\sqrt{5}}$ - $\frac{12xy}{\sqrt{5}}$
D f (x, y)= $\frac{-2x-3y^2-12xy}{\sqrt{5}}$.

D f (1, 2)= $\frac{-2*1-3*2^2-12*1*2}{\sqrt{5}}$
D f (1, 2)= $\frac{-2-3*4-24}{\sqrt{5}}$
D f (1, 2)= $\frac{-2-12-24}{\sqrt{5}}$
D f (1, 2)= $\frac{-38}{\sqrt{5}}$.

(b) *f (x, y)=* xy^2*; p= (1, 1) y* $\vec{v}$*=* $(\frac{1}{2}$*, -1).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= y^2.
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 2xy.

∇ f (x, y)= (y^2, 2xy).

$\|\vec{v}\|$= $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-1)^2}$

$\|\vec{v}\|= \sqrt{\frac{1}{4}+1}$

$\|\vec{v}\|= \sqrt{\frac{5}{4}}$

$\|\vec{v}\|= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$

$\|\vec{v}\|= \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\vec{u}= \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

$\vec{u}= (\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}, \frac{-1}{\frac{\sqrt{5}}{2}})$

$\vec{u}= (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$.

D f (x, y)= ∇ f (x, y) $\vec{u}$

D f (x, y)= (y^2, 2xy) ($\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}$)

D f (x, y)= $\frac{y^2}{\sqrt{5}}$ - $\frac{4xy}{\sqrt{5}}$

D f (x, y)= $\frac{3y^2-4xy}{\sqrt{5}}$.

D f (1, 1)= $\frac{1^2-4*1*1}{\sqrt{5}}$

D f (1, 1)= $\frac{1-4}{\sqrt{5}}$

D f (1, 1)= $\frac{-3}{\sqrt{5}}$.

Ejercicio 12.

Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto (1, 0) de f (x, y)= x^2 + sen xy tiene el valor 1.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + cos xy * y
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 2x + y cos xy.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0 + cos xy * x
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= x cos xy.

∇ f (x, y)= (2x + y cos xy, x cos xy).

∇ f (1, 0)= (2 * 1 + 0 cos (1 * 0), 1 cos (1 * 0))
∇ f (1, 0)= (2 + 0 cos 0, 1 cos 0)
∇ f (1, 0)= (2 + 0 * 1, 1 * 1)
∇ f (1, 0)= (2 + 0, 1)
∇ f (1, 0)= (2, 1).

D f (1, 0)= ∇ f (1, 0) $\vec{u}$
D f (1, 0)= (2, 1) (u_1, u_2)
D f (1, 0)= $2u_1$ + u_2.

$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 1 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{cases}$.

u_2= 1 - $2u_1$.

u_1^2 + $(1 - 2u_1)^2$= 1
u_1^2 + 1^2 - $4u_1$ + $4u_1^2$= 1
$5u_1^2$ + 1 - $4u_1$= 1
$5u_1^2$ - $4u_1$= 1 - 1
u_1 ($5u_1$ - 4)= 0.

u_1= 0; u_1= $\frac{4}{5}$.

u_2= 1 - 2 * 0
u_2= 1 - 0
u_2= 1.

u_2= 1 - 2 * $\frac{4}{5}$
u_2= 1 - $\frac{8}{5}$
u_2= $\frac{-3}{5}$.

Por lo tanto, las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto (1, 0) de f (x, y) tiene el valor 1 son $\vec{u}$= (0, 1) y $\vec{u}$= ($\frac{4}{5}$, $\frac{-3}{5}$).

Ejercicio 13.

Encontrar la dirección de máximo crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:

(a) *f (x, y)=* xe^y *+ 3y; p= (1, 0).*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= e^y.
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= x$e^y$ + 3.

∇ f (x, y)= (e^y, xe^y + 3).

∇ f (1, 0)= (e^0, 1e^0 + 3)
∇ f (1, 0)= (1, 1 * 1 + 3)
∇ f (1, 0)= (1, 1 + 3)
∇ f (1, 0)= (1, 4).

(b) *f (x, y)= 4*x^2yz^3*; p= (1, 2, 1).*

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$= 8xy$z^3$.
$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$= 4$x^2z^3$.
$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$= 12$x^2yz^2$.

∇ f (x, y, z)= (8xyz^3, 4x^2z^3, 12x^2yz^2).

∇ f (1, 2, 1)= (8 * 1 * 2 * 1^3, 4 * 1^2 * 1^3, 12 * 1^2 * 2 * 1^2)
∇ f (1, 2, 1)= (8 * 1 * 2 * 1, 4 * 1 * 1, 12 * 1 * 2 * 1)
∇ f (1, 2, 1)= (16, 4, 24).

Ejercicio 14.

Hallar máximos, mínimos y puntos silla de las siguientes funciones. Además, calcular el valor de la misma en cada uno esos puntos.

(a) *f (x, y)= 9 - 2x + 4y -* x^2 *-* $4y^2$.

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
-2 - 2x= 0
-2 (1 + x)= 0
1 + x= $\frac{0}{2}$
1 + x= 0
x= -1.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
4 - 8y= 0
4 (1 - 2y)= 0
1 - 2y= $\frac{0}{4}$
1 - 2y= 0
2y= 1
y= $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (-1, $\frac{1}{2}$).

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= -2.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= -8.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= 0.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(-1, \frac{1}{2}) & f_{xy}(-1, \frac{1}{2}) \\ f_{yx}(-1, \frac{1}{2}) & f_{yy}(-1, \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

det (H)= -2 (-8) - 0 * 0
det (H)= 16 - 0
det (H)= 16.

Determinar los valores máximos y mínimo relativos:

f $(-1, \frac{1}{2})$= 9 - 2 (-1) + 4 $\frac{1}{2}$ - $(-1)^2$ - 4 $(\frac{1}{2})^2$
f $(-1, \frac{1}{2})$= 9 + 2 + 2 - 1 - 4 $\frac{1}{4}$
f $(-1, \frac{1}{2})$= 9 + 2 + 2 - 1 - 1
f $(-1, \frac{1}{2})$= 11.

Por lo tanto, ya que det (H) $>$ 0 y $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$ $(-1, \frac{1}{2})$ $<$ 0, entonces, f (x, y) tiene un máximo relativo en $(-1, \frac{1}{2}, 11)$.

(b) *f (x, y)= xy - 2x - y.*

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
y - 2= 0
y= 2.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
x - 1= 0
x= 1.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (1, 2).

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= 1.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= 1.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(1,2) & f_{xy}(1,2) \\ f_{yx}(1,2) & f_{yy}(1,2) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

det (H)= 0 * 0 - 1 * 1
det (H)= 0 - 1
det (H)= -1.

Determinar los valores máximos y mínimo relativos:

f (1, 2)= 1 * 2 - 2 * 1 - 2
f (1, 2)= 2 - 2 - 2
f (1, 2)= -2.

Por lo tanto, ya que det (H) $<$ 0, entonces, f (x, y) tiene un punto silla en (1, 2, -2).

(c) *f (x, y)= x sen y.*

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
sen y= 0
y= nπ.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
x cos y= 0
x= 0.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (0, nπ), con n ∈ ℤ.

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= -x sen y.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= cos y.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= cos y.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(0, n\pi) & f_{xy}(0, n\pi) \\ f_{yx}(0, n\pi) & f_{yy}(0, n\pi) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} 0 & \cos n\pi \\ \cos n\pi & 0 \end{pmatrix}$.

det (H)= 0 * 0 - cos nπ cos nπ
det (H)= 0 - cos^2 nπ
det (H)= -cos^2 nπ.

Determinar los valores máximos y mínimo relativos:

f (0, nπ)= 0 sen nπ
f (0, nπ)= 0.

Por lo tanto, ya que det (H) $<$ 0, entonces, f (x, y) tiene un punto silla en (0, nπ, 0).

Ejercicio 15.

El criterio de las derivadas segundas, ¿permite clasificar los puntos estacionarios de f (x, y)= x^2y? En caso afirmativo, hallarlos y analizarlos.

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
2xy= 0
xy= $\frac{0}{2}$
xy= 0.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
x^2= 0
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{0}$
$|x|$= 0
x= 0.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (0, y).

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= y.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= 2x.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= 2x.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(0,y) & f_{xy}(0,y) \\ f_{yx}(0,y) & f_{yy}(0,y) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

det (H)= y * 0 - 0 * 0
det (H)= 0 - 0
det (H)= 0.

Por lo tanto, ya que det (H)= 0, el criterio de las derivadas segundas no permite clasificar los puntos estacionarios (0, y) de f (x, y).

Ejercicio 16.

Dada la función f (x, y)= x^2 *+* y^2 *+* $\frac{1}{2}$*y - 2.*

(a) *Hallar el mínimo de la función de dos formas: (i) Analítica: Calculando los punto estacionarios; (ii) Numérica: Mediante el método de descenso del gradiente. Utilizar tolerancia de 0,0001, tamaño de paso 0,4 y punto de inicio* x_0*= (10, 2).*

(i) Analítica:

Puntos críticos:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$= 0
2x= 0
x= $\frac{0}{2}$
x= 0.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$= 0
2y + $\frac{1}{2}$= 0
2y= $\frac{-1}{2}$
y= $\frac{\frac{-1}{2}}{2}$
y= $\frac{-1}{4}$.

Por lo tanto, f (x, y) tiene un punto crítico en (0, $\frac{-1}{4}$).

Criterio de las derivadas segundas:

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$= 2.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}$= 2.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$= 0.
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$= 0.

H= $\begin{pmatrix} f_{xx}(0, \frac{-1}{4}) & f_{xy}(0, \frac{-1}{4}) \\ f_{yx}(0, \frac{-1}{4}) & f_{yy}(0, \frac{-1}{4}) \end{pmatrix}$
H= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

det (H)= 2 * 2 - 0 * 0
det (H)= 4 - 0
det (H)= 4.

Determinar los valores máximos y mínimo relativos:

f $(0, \frac{-1}{4})$= 0^2 + $(\frac{-1}{4})^2$ + $\frac{1}{2}$ $(\frac{-1}{4})$ - 2
f $(0, \frac{-1}{4})$= 0 + $\frac{1}{16}$ - $\frac{1}{8}$ - 2
f $(0, \frac{-1}{4})$= $\frac{-33}{16}$.

Por lo tanto, ya que det (H) $>$ 0 y $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}$ $(0, \frac{-1}{4})$ $>$ 0, entonces, f (x, y) tiene un mínimo relativo en $(0, \frac{-1}{4}, \frac{-33}{16})$.

(ii) Numérica:

∇ f (x, y)= (2x, 2y + $\frac{1}{2}$).

Iteración 1:

x_0= (10, 2).

∇ f (10, 2)= (2 * 10, 2 * 2 + $\frac{1}{2}$)
∇ f (10, 2)= (20, 4 + $\frac{1}{2}$)
∇ f (10, 2)= (20, 4,5).

x_1= x_0 - η ∇ f (10, 2)
x_1= (10, 2) - 0,4 (20, 4,5)
x_1= (10, 2) - (8, 1,8)
x_1= (2, 0,2).

f (10, 2)= 10^2 + 2^2 + $\frac{1}{2}$ * 2 - 2
f (10, 2)= 100 + 4 + 1 - 2
f (10, 2)= 103.

f (2, 0,2)= 2^2 + $0{,}2^2$ + $\frac{1}{2}$ * 0,2 - 2
f (2, 0,2)= 4 + 0,04 + 0,1 - 2
f (2, 0,2)= 2,14.

$|f(2{,}0{,}2) - f(10{,}2)|$= $|2{,}14 - 103|$
$|f(2{,}0{,}2) - f(10{,}2)|$= $|-100{,}86|$
$|f(2{,}0{,}2) - f(10{,}2)|$= 100,86.

Como 100,86 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

Iteración 2:

x_1= (2, 0,2).

∇ f (2, 0,2)= (2 * 2, 2 * 0,2 + $\frac{1}{2}$)
∇ f (2, 0,2)= (4, 0,4 + $\frac{1}{2}$)
∇ f (2, 0,2)= (4, 0,9).

x_2= x_1 - η ∇ f (2, 0,2)
x_2= (2, 0,2) - 0,4 (4, 0,9)
x_2= (2, 0,2) - (1,6, 0,36)
x_2= (0,4, -0,16).

f (2, 0,2)= 2,14.

f (0,4, -0,16)= $0{,}4^2$ + $(-0{,}16)^2$ + $\frac{1}{2}$ (-0,16) - 2
f (0,4, -0,16)= 0,16 + 0,0256 - 0,08 - 2
f (0,4, -0,16)= -1,8944.

$|f(0{,}4, -0{,}16) - f(2{,}0{,}2)|$= $|-1{,}8944 - 2{,}14|$
$|f(0{,}4, -0{,}16) - f(2{,}0{,}2)|$= $|-4{,}0344|$
$|f(0{,}4, -0{,}16) - f(2{,}0{,}2)|$= 4,0344.

Como 4,0344 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

<u>Iteración 3:</u>

x_2= (0,4, -0,16).

∇ f (0,4, -0,16)= (0,8, 0,18).

x_3= (0,08, -0,232).

f (0,4, -0,16)= -1,8944.

f (0,08, -0,232)= -2,055776.

$|f(0{,}08, -0{,}232) - f(0{,}4, -0{,}16)|$= 0,161376.

Como 0,161376 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

<u>Iteración 4:</u>

x_3= (0,08, -0,232).

∇ f (0,08, -0,232)= (0,16, -0,036).

x_4= (0,016, -0,2464).

f (0,08, -0,232)= -2,055776.

f (0,016, -0,2464)= -2,062231.

$|f(0{,}016, -0{,}2464) - f(0{,}08, -0{,}232)|$= 0,006455.

Como 0,006455 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

Iteración 5:

x_4= (0,016, -0,2464).

∇ f (0,016, -0,2464)= (0,032, 0,0072).

x_5= (0,0032, -0,24928).

f (0,016, -0,2464)= -2,062231.

f (0,0032, -0,24928)= -2,062489.

$|f(0{,}0032, -0{,}24928) - f(0{,}016, -0{,}2464)|$= 0,000258.

Como 0,000258 $>$ 0,0001, se continúa iterando.

Iteración 6:

x_5= (0,0032, -0,24928).

∇ f (0,032, -0,24928)= (0,0064, 0,00144).

x_6= (0,00064, -0,249856).

f (0,0032, -0,24928)= -2,062489.

f (0,00064, -0,249856)= -2,0624996.

$|f(0{,}00064, -0{,}249856) - f(0{,}0032, -0{,}24928)|$= 0,00001.

Por lo tanto, ya que 0,00001 $<$ 0,0001, entonces, f (x, y) tiene un mínimo relativo aproximado en (0,00064, -0,249856, -2,0624996).

(b) *¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia del método del gradiente? Realizar la búsqueda nuevamente, pero con tamaño de paso 0,1 ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia en este caso?*

Para la convergencia del método del gradiente, fueron necesarias 6 iteraciones. Con tamaño de paso 0,1, para la convergencia, fueron necesarias 30 iteraciones.

(c) *¿Qué ocurre si se utiliza el mismo tamaño de paso (0,4) de este ejercicio para hallar el mínimo de la función del ejercicio anterior?*

Si se utiliza el mismo tamaño de paso (0,4) de este ejercicio para hallar el mínimo de la función del ejercicio anterior, ocurre que, con una tolerancia de 0,0001 y un punto de inicio x_0= (1, 1), para la convergencia del método de gradiente, son necesarias 7 iteraciones. En particular, ya que 0,00003 $<$ 0,0001, entonces, f (x, y) tiene un mínimo relativo aproximado en (0,004613, 0,577981, 0,000012).

(d) *(Para pensar) A raíz del inciso anterior, ¿siempre se puede elegir el mismo tamaño de paso para cualquier función que se estudie? ¿Qué ocurre cuando este parámetro es muy grande o muy pequeño?*

Elegir el tamaño de paso (también conocido como tasa de aprendizaje, η) es crucial en el algoritmo de descenso del gradiente. El tamaño de paso afecta, directamente, la convergencia y el comportamiento del algoritmo:

- **Tamaño de paso muy grande:**
  - Desviación oscilante o divergencia: Si el tamaño de paso es demasiado grande, el algoritmo puede saltar demasiado lejos en cada iteración. Esto puede hacer que el algoritmo no converja y, en lugar de acercarse al mínimo, puede oscilar alrededor del mínimo o, incluso, alejarse de él. En casos extremos, el algoritmo puede diverger, moviéndose hacia valores infinitos.
  - Pérdida de precisión: Los grandes tamaños de paso pueden hacer que el algoritmo pase por alto el mínimo de la función, resultando en una búsqueda ineficiente y una pérdida de precisión en la optimización.
- **Tamaño de paso muy pequeño:**
  - Convergencia lenta: Si el tamaño de paso es demasiado pequeño, el algoritmo avanzará muy lentamente hacia el mínimo. Esto puede hacer que el proceso de optimización sea muy lento y requiera un gran número de iteraciones para alcanzar una convergencia aceptable.
  - Riesgo de quedarse atascado: En algunos casos, un tamaño de paso muy pequeño puede hacer que el algoritmo quede atrapado en un mínimo local o no se mueva lo suficiente para salir de un área donde la función cambia muy lentamente.
- **Selección del tamaño de paso:**
  - Tamaño adaptativo: En la práctica, se utilizan técnicas como el método de descenso del gradiente con tasa de aprendizaje adaptativa (por ejemplo, Adam, RMSprop), que ajustan el tamaño de paso durante el proceso de optimización para mejorar la convergencia.
  - Experimentación y validación: A menudo, se elige un tamaño de paso inicial basado en experimentación y se ajusta en función del comportamiento observado. Se pueden usar técnicas de validación cruzada para elegir el tamaño de paso que mejor funciona para el problema específico.
  - Pruebas de tamaño de paso: Realizar pruebas con diferentes tamaños de paso para observar cómo afecta la convergencia puede ser una buena práctica. También se pueden usar gráficos de la función objetivo en función del número de iteraciones para ajustar el tamaño de paso.

En resumen, el tamaño de paso es un parámetro crítico en el método de descenso del gradiente. Elegir un tamaño de paso adecuado es importante para garantizar una convergencia eficiente y efectiva. Un tamaño de paso adecuado puede variar dependiendo de la función objetivo y de la naturaleza del problema.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2: Regresión Lineal.

Ejercicio 1.

Suponer que (x_1, y_1), ... , (x_n, y_n) son pares observados generados por los siguientes modelos y deducir los estimadores de mínimos cuadrados de β_1 y β_0.

(a) *y*= $\beta_1 x + \varepsilon$.

f (β_1)= $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_1 x_i)^2$.

$\frac{\partial f(\beta_1)}{\partial \beta_1}$= 0
$\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \beta_1 x_i)(-x_i)$= 0
-2 $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_1 x_i)\ x_i$= 0
$\sum_{i=1}^{n}(y_i x_i - \beta_1 x_i^2)$= $\frac{0}{-2}$
$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ - $\sum_{i=1}^{n} \beta_1 x_i^2$= 0
$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ - $\beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$= 0
$\beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$= $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$
$\hat{\beta}_1$= $\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

(b) *y*= β_1 *(ax + c)* + β_0 + ε.

f (β_0, β_1)= $\sum_{i=1}^{n}\{y_i - [\beta_1(ax_i + c) + \beta_0]\}^2$
f (β_0, β_1)= $\sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_1(ax_i + c) - \beta_0]^2$.

$\frac{\partial f(\beta_0)}{\partial \beta_0}$= 0
$\sum_{i=1}^{n} 2\ [y_i - \beta_1(ax_i + c) - \beta_0]\ (-1)$= 0
-2 $\sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_1(ax_i + c) - \beta_0]$= 0
$\sum_{i=1}^{n} y_i$ - $\sum_{i=1}^{n} \beta_1(ax_i + c)$ - $\sum_{i=1}^{n} \beta_0$= $\frac{0}{-2}$
n$\overline{y}$ - $\beta_1 \sum_{i=1}^{n}(ax_i + c)$ - nβ_0= 0
n$\overline{y}$ - β_1 ($\sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} c$) - n$\beta_0$= 0
n$\overline{y}$ - β_1 (a $\sum_{i=1}^{n} x_i$ + nc) - nβ_0= 0
n$\overline{y}$ - β_1 (an$\overline{x}$ + nc) - nβ_0= 0
n$\overline{y}$ - nβ_1 (a$\overline{x}$ + c) - nβ_0= 0
n [$\overline{y}$ - β_1 (a$\overline{x}$ + c) - β_0]= 0
$\overline{y}$ - β_1 (a$\overline{x}$ + c) - β_0= $\frac{0}{n}$
$\overline{y}$ - β_1 (a$\overline{x}$ + c) - β_0= 0
$\hat{\beta}_0$= $\overline{y}$ - $\hat{\beta}_1$ (a$\overline{x}$ + c).

$\frac{\partial f(\beta_1)}{\partial \beta_1}$= 0

$\sum_{i=1}^{n} 2 \{y_i - \beta_1 (ax_i + c) - [\overline{y} - \beta_1 (a\overline{x} + c)]\} [-(ax_i + c)]= 0$
$-2 \sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_1 (ax_i + c) - \overline{y} + \beta_1 (a\overline{x} + c)] (ax_i + c)= 0$
$\sum_{i=1}^{n}\{(y_i - \overline{y}) - \beta_1 [(ax_i + c) - (a\overline{x} + c)]\} (ax_i + c)= \frac{0}{-2}$
$\sum_{i=1}^{n}\{(y_i - \overline{y})(ax_i + c) - \beta_1 [(ax_i + c) - (a\overline{x} + c)](ax_i + c)\}= 0$
$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(ax_i + c)$ - $\sum_{i=1}^{n} \beta_1 [(ax_i + c) - (a\overline{x} + c)](ax_i + c)= 0$
$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(ax_i + c)$ - $\beta_1 \sum_{i=1}^{n}[(ax_i + c) - (a\overline{x} + c)](ax_i + c)= 0$
$\beta_1 \sum_{i=1}^{n}[(ax_i + c) - (a\overline{x} + c)](ax_i + c)= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(ax_i + c)$
$\hat{\beta}_1= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(ax_i+c)}{\sum_{i=1}^{n}[(ax_i+c)-(a\overline{x}+c)](ax_i+c)}$
$\hat{\beta}_1= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})[(ax_i+c)-(a\overline{x}+c)]}{\sum_{i=1}^{n}[(ax_i+c)-(a\overline{x}+c)]^2}$
$\hat{\beta}_1= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(ax_i+c-a\overline{x}-c)}{\sum_{i=1}^{n}(ax_i+c-a\overline{x}-c)^2}$
$\hat{\beta}_1= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(ax_i-a\overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(ax_i-a\overline{x})^2}$
$\hat{\beta}_1= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})[a(x_i-\overline{x})]}{\sum_{i=1}^{n}[a(x_i-\overline{x})]^2}$.

<u>Ejercicio 2.</u>

Una cadena de supermercados financia un estudio sobre los gastos mensuales en alimentos, de familias de 4 miembros. La investigación se limitó a familias con ingresos netos entre \$688.000 y \$820.000, con lo cual se obtuvo la siguiente recta de estimación $\hat{y}$= 0,85x - 18.000, con y= gastos; x= ingresos.

(a) *Estimar los gastos en alimentos en un mes para una familia de 4 miembros con un ingreso de \$700.000.*

$\hat{y}$= 0,85 * 700000 - 18000
$\hat{y}$= 595000 - 18000
$\hat{y}$= 577000.

Por lo tanto, los gastos en alimentos en un mes para una familia de 4 miembros con un ingreso de \$700.000 son \$577.000.

(b) *Uno de los directivos de la compañía se preocupa por el hecho de que la ecuación, aparentemente, indica que una familia que tiene un ingreso de \$12.000 no gastaría nada en alimentos ¿Cuál sería la respuesta?*

La respuesta sería que la estimación fue realizada con familias con ingresos netos entre \$688.000 y \$820.000, por lo que la recta de regresión no es adecuada para ingresos fuera de este rango considerado en la investigación.

Ejercicio 3.

La empresa META quiere pronosticar el precio de sus acciones en función de los días en el período del 03/09/23 al 30/08/24, pero durante las fechas del 02/02/24 al 24/04/24 implementaron una serie de actualizaciones en sus distintas plataformas que dispararon el precio de sus acciones y querían saber en qué porcentaje afectaron dichas actualizaciones al ajuste y a la linealidad. Utilizando los datos proporcionados en el archivo "META", hacer los cálculos necesarios y responder. Sugerencia: Realizar dos análisis diferentes y, para una de ellos, desestimar los datos del período de actualización.

Estimación para período 03/09/23-01/02/24:

```
Linear regression                               Number of obs     =        106
                                                F(1, 104)         =     432.68
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.8279
                                                Root MSE          =      11.99

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
   PrecioUSD | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        Dias |   .8513341   .0409277    20.80   0.000     .7701729    .9324954
       _cons |   285.4107   2.142445   133.22   0.000     281.1622    289.6592
------------------------------------------------------------------------------
```

Estimación para período 25/04/24-30/08/24:

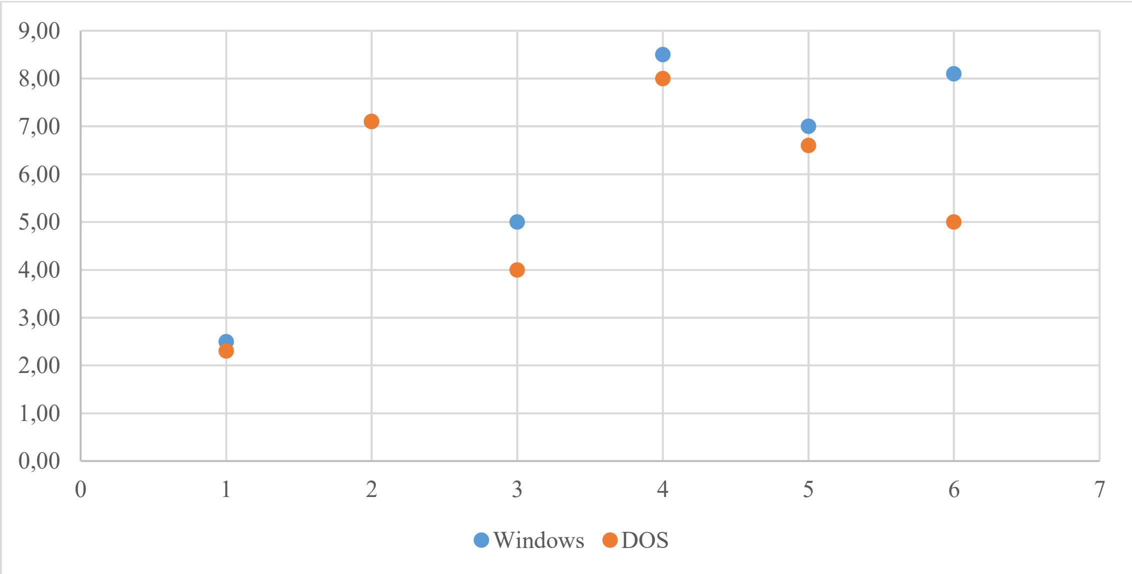
```
Linear regression                               Number of obs     =        106
                                                F(1, 104)         =     432.68
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.8279
                                                Root MSE          =      11.99

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
   PrecioUSD | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        Dias |   .8513341   .0409277    20.80   0.000     .7701729    .9324954
       _cons |   285.4107   2.142445   133.22   0.000     281.1622    289.6592
------------------------------------------------------------------------------
```

Ejercicio 4.

Los siguientes datos corresponden a los tiempos relativos en segundos que tardaron en ejecutarse seis programas elegidos al azar en el entorno Windows y en DOS:

Windows	*2,5*	*7,1*	*5*	*8,5*	*7*	*8,1*
DOS	*2,3*	*7,1*	*4*	*8*	*6,6*	*5*

(a) *Realizar el gráfico de dispersión de los puntos.*



(b) *Si un programa tarda 6 segundos en ejecutarse en Windows, ¿cuánto tardará en ejecutarse en DOS?*

Recta de regresión:

DOS= 0,28 + 0,82 Windows.

Si un programa tarda 6 segundos en ejecutarse en Windows, tardará 5,2 segundos en ejecutarse en DOS.

(c) *Se estima que los tiempos de Windows mejoraran reduciéndose en un 10% en los próximos años, estimar la recta de regresión considerando esta mejora. Suponer que los tiempos DOS no se modifican.*

Nueva recta de regresión:

DOS= 0,28 + 0,91 Windows.

Ejercicio 5.

En la tabla siguiente, se muestran la variable y, rendimiento de un sistema informático, respecto a la variable x, numero de buffer:

x	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*
y	*9,6*	*20,1*	*29,9*	*39,1*	*50,0*	*9,6*	*19,4*	*29,7*	*40,3*	*49,9*	*10,7*	*21,3*	*30,7*	*41,8*	*51,2*

A partir de la tabla anterior, se quiere ajustar la variable y como función de x.

(a) *Realizar el análisis de regresión de los datos (Estimación de la recta, Test de Hipótesis, Indicadores).*

```
Linear regression                               Number of obs     =         15
                                                F(1, 13)          =    6050.94
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.9974
                                                Root MSE          =     .38961

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
           y | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |   .4940731   .0063516    77.79   0.000     .4803514    .5077948
       _cons |   .0691115   .1932975     0.36   0.726    -.3484823    .4867054
------------------------------------------------------------------------------
```

(b) *Comentar los resultados siguientes:*

- *Recta de regresión del rendimiento del sistema informático frente al número de buffers e interpretación de los coeficientes.*
- *Contraste de hipótesis sobre la pendiente de la recta.*
- *Coeficiente de determinación y correlación lineal.*

<u>Recta de regresión:</u>

y= 0,691115 + 0,4940731 x.

<u>Contraste de hipótesis sobre la pendiente de la recta:</u>

La pendiente de la recta es estadísticamente significativa al 1%.

<u>Coeficiente de determinación y correlación lineal:</u>

R^2= 0,9974.
r= 0,9987.

Ejercicio 6.

Determinar si las siguientes relaciones son posibles o no y justificar la respuesta:

(a) $\hat{\sigma}^2$= *0,2; n= 102;* R^2= *0,8;* S_{yy}= *100.*

R^2= 1 - $\frac{SCE}{S_{yy}}$
0,8= 1 - $\frac{SCE}{100}$
$\frac{SCE}{100}$= 1 - 0,8
$\frac{SCE}{100}$= 0,2
SCE= 0,2 * 100
SCE= 20.

$\hat{\sigma}^2$= $\frac{SCE}{n-2}$
$\hat{\sigma}^2$= $\frac{20}{102-2}$
$\hat{\sigma}^2$= $\frac{20}{100}$
$\hat{\sigma}^2$= 0,2.

Por lo tanto, es una relación posible.

(b) $\hat{y}$= *7x + 4;* $\bar{x}$= *10;* $\bar{y}$= *64; r= -0,8.*

$\hat{\beta}_0$= $\bar{y}$ - $\hat{\beta}_1\bar{x}$
$\hat{\beta}_0$= 64 - 7 * 10
$\hat{\beta}_0$= 64 - 70
$\hat{\beta}_0$= -6.

Por lo tanto, no es una relación posible.

(c) $\hat{\beta}_0$= *10,073;* $\hat{\beta}_1$= *-2,06;* $\bar{x}$= *8,5;* $\bar{y}$= *8,325.*

$\hat{\beta}_0$= $\bar{y}$ - $\hat{\beta}_1\bar{x}$
$\hat{\beta}_0$= 8,325 - (-2,06) * 8,5
$\hat{\beta}_0$= 8,325 - (-17,51)
$\hat{\beta}_0$= 8,325 + 17,51
$\hat{\beta}_0$= 25,835.

Por lo tanto, no es una relación posible.

Ejercicio 7.

Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Justificar la respuesta:

(a) $SS_R = S_{yy} - \hat{\beta}_0 S_{xy}$.

SCR= $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$.

SCR= STC - SCE
SCR= $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ - $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$
SCR= S_{yy} - $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$.

La afirmación es INCORRECTA.

(b) *El error del intervalo de predicción es $\sqrt{n+1}$ veces mayor que el intervalo confianza para la respuesta media cuando $x^* = \bar{x}$ e igual (1 - α).*

Considerando $x^* = \bar{x}$, se tiene:

$$\frac{SE(y)}{SE(\hat{y})} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1+\frac{1}{n})}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\frac{1}{n}}}$$
$$\frac{SE(y)}{SE(\hat{y})} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}\sqrt{\frac{1}{n}}}$$
$$\frac{SE(y)}{SE(\hat{y})} = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}}$$
$$\frac{SE(y)}{SE(\hat{y})} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
$$\frac{SE(y)}{SE(\hat{y})} = \frac{\sqrt{n+1}}{1}$$
$$\frac{SE(y)}{SE(\hat{y})} = \sqrt{n+1}.$$

La afirmación es CORRECTA.

(c) *El coeficiente de determinación R^2 indica el grado de relación lineal que existe entre la variable independiente y dependiente.*

La afirmación es INCORRECTA, ya que R^2 indica la proporción de variación observada de la variable dependiente que puede ser explicada por la variación de la variable independiente y el coeficiente de correlación lineal (r) es el que indica el grado de relación lineal que existe entre la variable independiente y la dependiente y.

(d) *El principio de mínimos cuadrados consiste en minimizar la suma de los residuos al cuadrado considerando la distancia perpendicular entre el valor observado y el estimado.*

La afirmación es INCORRECTA, ya que el principio de mínimos cuadrados consiste en minimizar la suma de los residuos al cuadrado considerando la distancia vertical (no perpendicular) entre el valor observado y el estimado.

Ejercicio 8.

En un departamento de informática, un grupo de investigación dedicado al estudio de las comunicaciones por la red desea conocer la relación entre el tiempo de transmisión de un fichero y la información útil del mismo. Para ello, se han hecho algunos experimentos en los que se enviaban paquetes de distintas longitudes (bytes) de información útil y se medían los tiempos (en milisegundos) que tardaban desde el momento en que se enviaban hasta que llegaban al servidor. Los resultados del experimento se resumen en los siguientes estadísticos:

S_{xx}= *47,990;* $\bar{x}$= *194;* $\hat{\beta}_0$= *27,3275;*
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ = *424,350;* $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$= *183,760;* $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$= *81,715.*

Se pide estudiar la relación entre las variables tiempo (y) y longitud (x) de los ficheros. Para ello, se pide:

(a) *Obtener la recta de regresión del tiempo en función de la longitud de los ficheros. Interpretar los resultados obtenidos.*

$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$

$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{S_{xx}}$

$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} y_i}{S_{xx}}$.

$\hat{\beta}_1 = \frac{183{,}76 - 194 * \sum_{i=1}^{n} y_i}{47{,}99}$

$\hat{\beta}_1 = \frac{183{,}76 -}{47{,}99}$

$\hat{\beta}_1 = \frac{}{47{,}99}$

$\hat{\beta}_1$= .

y= $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1$x

y= 27,3275 + $\hat{\beta}_1$x.

Por lo tanto, $\hat{\beta}_0$= 27,3275 indica que el tiempo (en milisegundos) de transmisión del fichero, en promedio, independientemente de la longitud (bytes) de éste, es de 27,3275 milisegundos, mientras que $\hat{\beta}_1$= XXX indica que un aumento de 1 byte en la longitud del fichero aumenta, en promedio, en XXX milisegundos el tiempo de transmisión del fichero.

(b) *Indicar el valor que toma el coeficiente de determinación y correlación lineal. Interpretar los resultados.*

R^2= 1 - $\frac{SCE}{SCT}$

R^2= 1 - $\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$

R^2= 1 - $\frac{S_{yy}-\frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}}{S_{yy}}$

R^2= 1 - $\frac{S_{yy}-\frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}}{S_{yy}}$

R^2= 1 - [1 - $\frac{(S_{xy})^2 S_{yy}}{S_{xx}}$]

R^2= 1 - 1 + $\frac{(S_{xy})^2 S_{yy}}{S_{xx}}$

R^2= $\frac{(S_{xy})^2 S_{yy}}{S_{xx}}$

R^2= $\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{S_{xx}}$

R^2= $\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 (\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2)}{S_{xx}}$

R^2= $\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 [\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n})^2]}{S_{xx}}$

R^2= $\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 [\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n^2}]}{S_{xx}}$

R^2= $\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 [\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}]}{S_{xx}}$.

R^2= $\frac{(183{,}76-194\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 [81{,}715-\frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}]}{47{,}99}$

R^2= $\frac{(183{,}76-)^2 (81{,}715-\frac{}{n})}{47{,}99}$

R^2= $\frac{()^2 (81{,}715-)}{47{,}99}$

R^2= $\frac{*}{47{,}99}$

R^2= $\frac{}{47{,}99}$

R^2= .

r= $\sqrt{R^2}$

r= √[redacted]

r= .

Por lo tanto, el coeficiente de determinación es R^2= XXX y el coeficiente de correlación lineal es r= XXX.

(c) *Estudiar la significación del modelo.*

$\hat{\sigma}^2$= $\frac{SCE}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2$= $\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n})^2}{S_{xx}}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2) - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{S_{xx}}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n})^2] - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{S_{xx}}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n^2}] - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{S_{xx}}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}] - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{S_{xx}}}{n-2}$.

$\hat{\sigma}^2 = \frac{[81{,}715 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}] - \frac{(183{,}76 - 194\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{47{,}99}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{(81{,}715 - \frac{}{n}) - \frac{(183{,}76-)^2}{47{,}99}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{(81{,}715-) - \frac{()^2}{47{,}99}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{- \frac{}{47{,}99}}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{-}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{}{n-2}$

$\hat{\sigma}^2 =$.

- Test de hipótesis sobre β_0:

Hipótesis:

H_0: $\beta_0 = 0$.
H_1: $\beta_0 \neq 0$.

Estadístico de prueba:

$T = \frac{\hat{\beta}_0 - (\beta_0)_0}{SE(\hat{\beta}_0)} = \frac{\hat{\beta}_0 - (\beta_0)_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}})}} \sim t_{n-2}$ bajo H_0.

Valor observado:

$t_0 = \frac{27{,}3275 - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\frac{1}{n} + \frac{194^2}{47{,}99})}}$

$t_0 = \frac{27{,}3275}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(+\frac{37636}{47{,}99})}}$

$t_0 = \frac{27{,}3275}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(+784{,}2467)}}$

$t_0 = \frac{27{,}3275}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 *}}$
$t_0 = \frac{27{,}3275}{\sqrt{\ }}$
$t_0 = \frac{27{,}3275}{}$
$t_0 = .$

Valor crítico:

$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{\frac{0{,}05}{2},n-2}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{0{,}025,n-2}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = .$

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la constante del modelo es estadísticamente significativa, ya que $|t_0| = |\quad| =$ XXX $< t_{\frac{\alpha}{2},n-2} =$ XXX.

- Test de hipótesis sobre β_1:

Hipótesis:

H_0: $\beta_1 = 0$.
H_1: $\beta_1 \neq 0$.

Estadístico de prueba:

$T = \frac{\hat{\beta}_1 - (\beta_1)_0}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{\hat{\beta}_1 - (\beta_1)_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$ bajo H_0.

Valor observado:

$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{47{,}99}}}$
$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\ }}$
$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{}$
$t_0 = .$

Valor crítico:

$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{\frac{0{,}05}{2},n-2}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{0{,}025,n-2}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = .$

<u>Conclusión:</u>

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,05, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la pendiente del modelo es estadísticamente significativa, ya que $|t_0|$= | |= XXX $<$ $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$= XXX.

(d) *Obtener el intervalo de confianza, al 95%, para la pendiente de la recta.*

$IC_{\beta_1}^{95\%}$= [$\hat{\beta}_1$ - $t_{0,025,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_1$); $\hat{\beta}_1$ + $t_{0,025,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_1$)]
$IC_{\beta_1}^{95\%}$= [$\hat{\beta}_1$ - $t_{0,025,n-2}$ $\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}$; $\hat{\beta}_1$ + $t_{0,025,n-2}$ $\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}$].

$IC_{\beta_1}^{95\%}$= [$\hat{\beta}_1$ - $t_{0,025,n-2}$ $\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{47,99}}$; $\hat{\beta}_1$ + $t_{0,025,n-2}$ $\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{47,99}}$]
$IC_{\beta_1}^{95\%}$= [$\hat{\beta}_1$ - $t_{0,025,n-2}$ $\sqrt{\quad}$; $\hat{\beta}_1$ + $t_{0,025,n-2}$ $\sqrt{\quad}$]
$IC_{\beta_1}^{95\%}$= [$\hat{\beta}_1$ - $t_{0,025,n-2}$ * ; $\hat{\beta}_1$ + $t_{0,025,n-2}$ *]
$IC_{\beta_1}^{95\%}$= [$\hat{\beta}_1$ - ; $\hat{\beta}_1$ +]
$IC_{\beta_1}^{95\%}$= [;].

(e) *¿Cuál será el tiempo de transmisión para un fichero que tiene una longitud de 250 bytes?*

y= 27,3275 + $\hat{\beta}_1$ * 250
y= 27,3275 +
y= .

Por lo tanto, el tiempo de transmisión para un fichero que tiene una longitud de 250 bytes será XXX.

Ejercicio 9.

De un análisis de regresión realizada sobre un Dataset, el cual consiste en un pequeño relevamiento del tiempo que demandan las llamadas a servicio técnico de una empresa (x) y la cantidad de unidades de hardware reparadas (y), se sabe que el IC (β_0)= (−0,4348; −0,4248), que la estimación de la pendiente es 12 veces el error que se comete al estimar la verdadera ordenada al origen con $\hat{\beta}_0$ y que la proporción de variación total observada no explicada por el modelo de regresión lineal es tan solo del 2%. A partir de los datos proporcionados determinar:

(a) *El error que se comete al estimar la verdadera ordenada al origen con $\hat{\beta}_0$.*

$\frac{L}{2}= \frac{-0,4248-(-0,4348)}{2}$
$\frac{L}{2}= \frac{-0,4248+0,4348}{2}$
$\frac{L}{2}= \frac{0,01}{2}$
$\frac{L}{2}=$ 0,005.

Por lo tanto, el error (máximo) que se comete al estimar la verdadera ordenada al origen con $\hat{\beta}_0$ es 0,005.

(b) *La recta de regresión estimada.*

$\hat{\beta}_0= \frac{-0,4248+(-0,4348)}{2}$
$\hat{\beta}_0= \frac{-0,4248-0,4348}{2}$
$\hat{\beta}_0= \frac{-0,8596}{2}$
$\hat{\beta}_0=$ -0,4298.

$\hat{\beta}_1=$ 12 $\frac{L}{2}$
$\hat{\beta}_1=$ 12 * 0,005
$\hat{\beta}_1=$ 0,06.

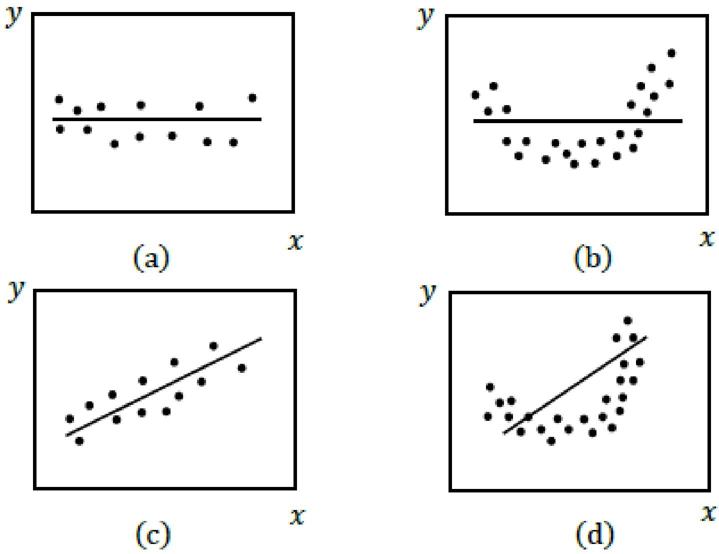
y= $\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1$x
y= -0,4298 + 0,06x.

(c) *La bondad del ajuste.*

$R^2=$ 1 - $\frac{SCE}{SCT}$
$R^2=$ 1 - 0,02
$R^2=$ 0,98.

Ejercicio 10.

Observando los siguientes gráficos de regresión y considerando las hipótesis H_0: $\beta_1 = 0$ vs H_1: $\beta_1 \neq 0$. Indicar, para cada uno, si se acepta o no H_0 y la implicancia de ésta.



En (a) y (b), no se rechaza H_0 (no existe suficiente evidencia para indicar que hay una relación lineal entre x e y), mientras que, en (c) y (d), sí se rechaza H_0 (existe suficiente evidencia para indicar que hay una relación lineal entre x e y). Sin embargo, en (b) y (d), hay una posible relación no lineal.

Ejercicio 11.

La autoridad aeronáutica argentina realizó un estudio de operaciones de aerolíneas, en 18 compañías, que reveló que la relación entre el número de pilotos empleados y el número de aviones en servicio tenía una pendiente de 4,3. Estudios anteriores indicaban que la pendiente de esta relación era 4,0. Si se calculó que la desviación estándar de la de pendiente de regresión es 0,17, ¿hay razones para creer, a un nivel de significancia de 0,05, que la pendiente verdadera ha cambiado?

Hipótesis:

H_0: β_1= 4,0.
H_1: $\beta_1 \neq$ 4,0.

Estadístico de prueba:

T= $\frac{\hat{\beta}_1-(\beta_1)_0}{SE(\hat{\beta}_1)} \sim t_{16}$, bajo H_0.

Valor observado:

t_0= $\frac{4,3-4}{0,17}$
t_0= $\frac{0,3}{0,17}$
t_0= 1,765.

Valor crítico:

$t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$= $t_{\frac{0,05}{2},16}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$= $t_{0,025,16}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$= 2,12.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,05, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la pendiente verdadera ha cambiado, ya que $|t_0|$= $|1,765|$= 1,765 $< t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$= 2,12.

Ejercicio 12.

Un horticultor inventó una escala para medir la frescura de rosas que fueron empacadas y almacenadas durante períodos variables antes de trasplantarlas. La medición y de frescura y el tiempo x en días que la rosa está empacada y almacenada antes de trasplantarla, se dan a continuación.

x	*5*	*5*	*10*	*10*	*15*	*15*	*20*	*20*	*25*	*25*
y	*15,3*	*16,8*	*13,6*	*13,8*	*9,8*	*8,7*	*5,5*	*4,7*	*1,8*	*1,0*

(a) *¿Hay suficiente evidencia para indicar que la frescura está linealmente relacionada con el tiempo de almacenaje?*

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$.

```
Linear regression                               Number of obs     =         10
                                                F(1, 8)           =     425.18
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.9840
                                                Root MSE          =     .76305

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
           y | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |      -.758   .0367607   -20.62   0.000    -.8427703   -.6732297
       _cons |      20.47   .7174111    28.53   0.000     18.81565    22.12435
------------------------------------------------------------------------------
```

Por lo tanto, hay suficiente evidencia para indicar que la frescura está linealmente relacionada con el tiempo de almacenaje (p-value= 0,000).

(b) *Estimar, mediate un intervalo de 98%, el descenso de frescura de las rosas por cada día que pasa.*

$IC_{\beta_1}^{98\%}$= [$\hat{\beta}_1$ - $t_{0,01,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_1$); $\hat{\beta}_1$ + $t_{0,01,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_1$)]
$IC_{\beta_1}^{98\%}$= [-0,758 - 2,896 * 0,0367; -0,758 + 2,896 * 0,0367]
$IC_{\beta_1}^{98\%}$= [-0,758 - 0,106; -0,758 + 0,106]
$IC_{\beta_1}^{98\%}$= [-0,864; -0,652].

(c) *Estimar, mediante un intervalo de 98%, la frescura de las rosas cuando no han sido almacenadas ni empacadas.*

$IC_{\beta_0}^{98\%}$= [$\hat{\beta}_0$ - $t_{0,01,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_0$); $\hat{\beta}_0$ + $t_{0,01,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_0$)]
$IC_{\beta_0}^{98\%}$= [20,47 - 2,896 * 0,717; 20,47 + 2,896 * 0,717]
$IC_{\beta_0}^{98\%}$= [20,47 - 2,078; 20,47 + 2,078]

$IC_{\beta_0}^{98\%}$= [18,392; 22,548].

(d) *Estimar la medición de frescura media para un tiempo de almacenaje de 14 días con un intervalo de confianza de 95%.*

$IC_{\beta_0+\beta_1 x^*}^{95\%}$= [$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ - $t_{0,025,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$); $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ + $t_{0,025,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$)]
$IC_{\beta_0+\beta_1 x^*}^{95\%}$= [9,858 - 2,306 * 0,2437; 9,858 + 2,306 * 0,2437]
$IC_{\beta_0+\beta_1 x^*}^{95\%}$= [9,858 - 0,562; 9,858 + 0,562]
$IC_{\beta_0+\beta_1 x^*}^{95\%}$= [9,296; 10,42].

Ejercicio 13.

Un fabricante de teléfonos celulares está probando dos tipos de baterías para ver cuánto duran con una utilización normal. La siguiente tabla contiene los datos provisionales:

Horas de uso diario	*2*	*1,5*	*1*	*0,5*
Vida aproximada (meses) Litio	*3,1*	*4,2*	*5,1*	*6,3*
Vida aproximada (meses) Alcalina	*1,3*	*1,6*	*1,8*	*2,2*

(a) *Desarrollar dos ecuaciones de estimación lineales, una para pronosticar la vida del producto basada en el uso diario con las baterías de litio y otra para las baterías alcalinas.*

$vida\_litio_i = \beta_0 + \beta_1 horas_i + \varepsilon_i$.
$vida\_alcalina_i = \beta_0 + \beta_1 horas_i + \varepsilon_i$.

(b) *¿Cuál de las dos estimaciones anteriores se ajusta mejor a los datos?*

Estimación con "vida_litio":

```
Linear regression                               Number of obs     =          4
                                                F(1, 2)           =    1575.00
                                                Prob > F          =     0.0006
                                                R-squared         =     0.9973
                                                Root MSE          =      .0866

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
  vida_litio | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       horas |       -2.1   .0529151   -39.69   0.001    -2.327675   -1.872325
       _cons |        7.3   .1000001    73.00   0.000     6.869734    7.730266
------------------------------------------------------------------------------
```

Estimación con "vida_alcalina":

```
Linear regression                               Number of obs     =          4
                                                F(1, 2)           =     204.13
                                                Prob > F          =     0.0049
                                                R-squared         =     0.9836
                                                Root MSE          =     .05916

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
vida_alcal~a | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       horas |       -.58   .0405956   -14.29   0.005    -.7546688   -.4053313
       _cons |       2.45   .0754984    32.45   0.001     2.125157    2.774843
------------------------------------------------------------------------------
```

(c) *Encontrar un intervalo para la estimación del 90% para la vida (en meses) con 1,25 horas de uso diario, para cada tipo de batería. ¿Puede la compañía asegurar algo respecto a qué batería proporciona la vida más larga según estos números?*

Intervalo de confianza para "vida_litio":

$IC^{90\%}_{\beta_0+\beta_1 horas^*}$= [$\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1 x^*$ - $t_{0,025,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1 x^*$); $\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1 x^*$ + $t_{0,025,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1 x^*$)]
$IC^{90\%}_{\beta_0+\beta_1 horas^*}$= [4,675 - 2,92 * 0,0433; 4,675 + 2,92 * 0,0433]
$IC^{90\%}_{\beta_0+\beta_1 horas^*}$= [4,675 - 0,1264; 4,675 + 0,1264]
$IC^{90\%}_{\beta_0+\beta_1 horas^*}$= [4,5486; 4,8014].

Intervalo de confianza para "vida_alcalina":

$IC^{90\%}_{\beta_0+\beta_1 horas^*}$= [$\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1 x^*$ - $t_{0,025,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1 x^*$); $\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1 x^*$ + $t_{0,025,n-2}$ SE ($\hat{\beta}_0$ + $\hat{\beta}_1 x^*$)]
$IC^{90\%}_{\beta_0+\beta_1 horas^*}$= [1,725 - 2,92 * 0,0296; 1,725 + 2,92 * 0,0296]
$IC^{90\%}_{\beta_0+\beta_1 horas^*}$= [1,725 - 0,0864; 1,725 + 0,0864]
$IC^{90\%}_{\beta_0+\beta_1 horas^*}$= [1,6386; 1,8114].

Por lo tanto, la compañía puede asegurar, con un 90% de confianza, que la batería que la batería que proporciona la vida más larga es la de litio.

(d) *El fabricante considera realizar una batería compuesta por los dos tipos de batería y pide, para ello, que se estime la ecuación lineal para pronosticar las horas de uso diario basada en el vida aproximada (en meses).*

$horas_i$= β_0 + $\beta_1 vida_i$ + ε_i.

```
Linear regression                               Number of obs     =          4
                                                F(1, 2)           =    1028.00
                                                Prob > F          =     0.0010
                                                R-squared         =     0.9953
                                                Root MSE          =     .05395

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
       horas | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        vida |  -.7427937   .0231671   -32.06   0.001    -.8424737   -.6431137
       _cons |    3.62694   .0617199    58.76   0.000     3.361381    3.892499
------------------------------------------------------------------------------
```

(e) *Mejorar la estimación utilizando los dos tipos de batería juntas que por separado. Explicar.*

$horas_i$= β_0 + $\beta_1 vida\_litio_i$ + $\beta_2 vida\_alcalina_i$ + ε_i.

```
Linear regression                               Number of obs     =          4
                                                F(2, 1)           =    2789.87
                                                Prob > F          =     0.0134
                                                R-squared         =     0.9997
                                                Root MSE          =      .0208

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
       horas | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
   vida_litio |  -.7698965   .0522349   -14.74   0.043    -1.433603   -.1061896
vida_alcalina |   1.064015    .173853     6.12   0.103    -1.144996    3.273027
        _cons |    3.01384   .0595881    50.58   0.013     2.256701    3.770979
------------------------------------------------------------------------------
```

Ejercicio 14.

Una empresa de desarrollo de software pide relacionar sus Ventas en función del número de pedidos de los tipos de software que desarrolla (Sistemas, Educativos y Automatizaciones Empresariales), para atender 10 proyectos en el presente año. En la Tabla, se representa Y (Ventas miles de S/.) y X (N° pedidos de Sistemas), W (N° de pedidos de Aplicaciones Educativas) y Z (N° de pedidos de Automatizaciones empresariales).

y	*440*	*455*	*470*	*510*	*506*	*480*	*460*	*500*	*490*	*450*
x	*50*	*40*	*35*	*45*	*51*	*55*	*53*	*48*	*38*	*44*
w	*105*	*140*	*110*	*130*	*125*	*115*	*100*	*103*	*118*	*98*
z	*75*	*68*	*70*	*64*	*67*	*72*	*70*	*73*	*69*	*74*

(a) *Mediante un software a elección, estimar la ecuación de regresión múltiple para cumplir con el requerimiento de la empresa.*

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 w_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$.

```
Linear regression                               Number of obs     =         10
                                                F(3, 6)           =       2.98
                                                Prob > F          =     0.1179
                                                R-squared         =     0.4498
                                                Root MSE          =     22.558

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
           y | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |    .681508   .8131731     0.84   0.434    -1.308255    2.671271
           w |  -.4462964   .9988882    -0.45   0.671    -2.890488    1.997895
           z |  -6.252611   3.414964    -1.83   0.117    -14.60873    2.103504
       _cons |   934.8084   324.3938     2.88   0.028     141.0453    1728.571
------------------------------------------------------------------------------
```

(b) *La empresa quiere tener indicadores para asegurarse que la ecuación estimada se ajusta bien a los datos y si la relación lineal es la más correcta. ¿Cuáles se recomendarían? Calcular los mismos y comentar.*

Por un lado, se puede observar que ninguna variable de pedidos de los tipos de software es estadísticamente significativa. Por otro lado, se observa que el test F de significatividad conjunta indica que las variables explicativas no son, en conjunto, estadísticamente significativas (Prob > F= 0,1179). Por último, se ve que el coeficiente de determinación es R^2= 0,4498.

Ejercicio 15.

En la Facultad de Sistemas Informáticos, se quiere entender los factores de aprendizaje de los alumnos que cursan la asignatura de PHP, para lo cual se escoge al azar una muestra de 15 alumnos y ellos registran notas promedios en las asignaturas correlativas de Algoritmos, Base de Datos y Programación como se muestran en el siguiente cuadro.

PHP	Algoritmos	Base de Datos	Programación
13	15	15	13
13	14	13	12
13	16	13	14
15	20	14	16
16	18	18	17
15	16	17	15
12	13	15	11
13	16	14	15
13	15	14	13
13	14	13	10
11	12	12	10
14	16	11	14
15	17	16	15
15	19	14	16
15	13	15	10

(a) *Construir un modelo para determinar la dependencia que exista de aprendizaje reflejada en las notas de la asignatura de PHP, conociendo las notas de las asignaturas Algoritmos, Base de Datos y Programación.*

$php_i = \beta_0 + \beta_1 algoritmos_i + \beta_2 basededatos_i + \beta_3 programacion_i + \varepsilon_i$.

```
Linear regression                               Number of obs     =         15
                                                F(3, 11)          =      12.31
                                                Prob > F          =     0.0008
                                                R-squared         =     0.6970
                                                Root MSE          =     .86126

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
         php | Coefficient  std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
  algoritmos |   .5826896   .2270632     2.57   0.026     .0829268    1.082452
 basededatos |   .3734826   .2100417     1.78   0.103    -.0888161    .8357813
programacion |  -.2415261    .310188    -0.78   0.453    -.9242452    .4411931
       _cons |   2.551474   2.400433     1.06   0.311    -2.731843    7.834791
------------------------------------------------------------------------------
```

(b) *Si más del 80% del aprendizaje del curso de PHP no puede ser explicado mediante las notas obtenidas por las asignaturas de Algoritmos, Base de Datos y Programación, se destinarán más recursos a estas asignaturas para obtener mejores resultados. ¿Cuál sería la respuesta?*

La respuesta sería que, dado que menos del 80% del aprendizaje del curso de PHP puede ser explicado mediante las notas obtenidas por las asignaturas de Algoritmos, Base de Datos y Programación (R^2= 0,697), es necesario destinar más recursos a estas asignaturas para obtener mejores resultados, ya que éstas no están contribuyendo lo suficiente al aprendizaje de PHP.

Trabajo Práctico N° 3: Números.

Ejercicio 1.

Probar que no hay enteros, simultáneamente, pares e impares.

Número par: Un número entero n es par si existe un número entero k tal que n= 2k, es decir, n es divisible por 2.

Número impar: Un número entero n es par si existe un número entero k tal que n= 2k + 1, es decir, n no es divisible por 2.

Ahora, para que un número sea, simultáneamente, par e impar, tendría que cumplir ambas definiciones al mismo tiempo. Es decir, existirían enteros tales que:

n= $2k_1$, con $k_1 \in \mathbb{Z}$,
n= $2k_2$ + 1, con $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Esto implica que:

$2k_1$= $2k_2$ + 1
$2k_1$ - $2k_2$= 1
2 (k_1 - k_2)= 1.

Aquí, se llega una contradicción, ya que el lado izquierdo de la ecuación es, claramente, un número par (ya que es múltiplo de 2), mientras que el lado derecho es 1, que es impar. No hay ningún par de enteros k_1 y k_2 que satisfagan esta ecuación.

Por lo tanto, no hay enteros, simultáneamente, pares e impares.

Ejercicio 2.

Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) *Si a|1, entonces, a= 1 o a= -1.*

1= ak, con k $\in \mathbb{Z}$
k= $\frac{1}{a}$.

Para que esta ecuación sea verdadera, k debe ser igual a $\frac{1}{a}$. Pero, para que k sea un entero, a debe ser un divisor de 1. Los divisores de 1 son aquellos números enteros que, multiplicados por otro entero, dan como resultado 1. Estos divisores son, únicamente, a= 1 y a= -1, ya que 1= 1 * 1 y 1= (-1) (-1).

La afirmación es VERDADERA.

(b) *a|b y b|c, entonces, a|c.*

b= ak_1, con $k_1 \in \mathbb{Z}$.
c= bk_2, con $k_2 \in \mathbb{Z}$.

c= a$k_1 k_2$
c= ak_3, con $k_3 \equiv k_1 k_2 \in \mathbb{Z}$.

La afirmación es VERDADERA.

(c) *a (a - 1) es par.*

Si a es par, (a - 1) es impar y, entonces, el producto es par.
Si a es impar, (a - 1) es par y, entonces, el producto es par.

La afirmación es VERDADERA.

(d) *x|y y y|z, entonces, x|yz.*

y= xk_1, con $k_1 \in \mathbb{Z}$.
z= yk_2, con $k_2 \in \mathbb{Z}$.

yz= xk_1z
yz= xk_3, con $k_3 \equiv k_1$z $\in \mathbb{Z}$.

La afirmación es VERDADERA.

Ejercicio 3.

Si a un número se lo divide por 5, el resto es 3 y, si se lo divide por 7, el resto es 4. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 35?

x= $5k_1$ + 3, con $k_1 \in \mathbb{Z}$.
x= $7k_2$ + 4, con $k_2 \in \mathbb{Z}$.

$5k_1$ + 3= $7k_2$ + 4
$5k_1$= $7k_2$ + 4 - 3
$5k_1$= $7k_2$ + 1.

k_1= 3; k_2= 2.

x= 5 * 3 + 3
x= 15 + 3
x= 18.

x= 7 * 2 + 4
x= 14 + 4
x= 18.

x= $35k_3$ + 18, con $k_3 \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, si se lo divide por 35, el resto es 18.

Ejercicio 4.

Sean a y b dos números enteros que tienen restos 4 y 7, respectivamente, en la división por 11. Hallar los restos de la división por 11 de $(a+b)^2$.

a= $11k_1$ + 4, con $k_1 \in \mathbb{Z}$.
b= $11k_2$ + 7, con $k_2 \in \mathbb{Z}$.

a + b= $11k_1$ + 4 + $11k_2$ + 7
a + b= 11 (k_1 + k_2) + 11
a + b= 11 (k_1 + k_2 + 1)
a + b= $11k_3$, con $k_3 \equiv (k_1 + k_2 + 1) \in \mathbb{Z}$.

$(a+b)^2$= $(11k_3)^2$
$(a+b)^2$= 11 * $11k_3^2$
$(a+b)^2$= $11k_4$, con $k_4 \equiv 11k_3^2 \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, el resto de la división por 11 de $(a+b)^2$ es 0.

Ejercicio 5.

Convertir los siguientes números de base 10 a base 8:

(a) *98.*

98= 8 * 12 + 2.
12= 8 * 1 + 4.
1= 8 * 0 + 1.

98= $(142)_8$.

(b) *44.*

44= 8 * 5 + 4.
5= 8 * 0 + 5.

44= $(54)_8$.

(c) *20.*

20= 8 * 2 + 4.
2= 8 * 0 + 2.

20= $(24)_8$.

Ejercicio 6.

Calcular el máximo común divisor entre:

(a) *(16, 24).*

(24, 16)= (16, 8)= (8, 0)= 8.

mcd (16, 24)= 8.

(b) *(70, 50).*

(70, 50)= (50, 20)= (20, 10)= (10, 0)= 10.

mcd (70, 50)= 10.

(c) *(121, 88).*

(121, 88)= (88, 33)= (33, 22)= (22, 11)= (11, 0)= 11.

mcd (121, 88)= 11.

(d) *(-90, 90).*

(-90, 90)= (90, 0).

mcd (-90, 90)= 90.

(e) *(980, 224).*

(980, 224)= (224, 84)= (84, 56)= (56, 28)= (28, 0)= 28.

mcd (980, 224).

Ejercicio 7.

Probar que, si a y b son enteros:

(a) *a + b es coprimo con a.*

a= dk_1, con d, $k_1 \in \mathbb{Z}$.
a + b= dk_2, con d, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

dk_1 + b= dk_2
b= dk_2 - dk_1
b= d (k_2 - k_1)
b= dk_3, $k_3 \equiv$ (k_2 - k_1) $\in \mathbb{Z}$.

No hay razón para que a y b tengan un divisor común que no sea d= 1, entonces, (a + b, a)= 1.

(b) *si a es no nulo, (a, 0)=* $|a|$.

a= $|a|k_1$, con $k_1 \in \mathbb{Z}$.
0= $|a|k_2$, con $k_2 \in \mathbb{Z}$.

No hay divisores comunes entre a y 0 que sean mayores a $|a|$, entonces, (a, 0)= $|a|$.

(c) *(a, b)= 1, entonces, ma + nb= k, con m, n y k enteros.*

ma + nb= 1.

Ejercicio 8.

Hallar mcd (5k + 3, 3k + 2) para cualquier k entero.

$(5k + 3, 3k + 2)= (3k + 2, 2k + 1)= (2k + 1, k + 1)= (k + 1, k)= (k, 1)= (1, 0).$

mcd $(5k + 3, 3k + 2)= 1$.

Ejercicio 9.

Sean a, b ∈ ℤ y sea p primo. Demostrar que, si p|ab, entonces, p|a o p|b. Mostrar que esto no se cumple si p no es primo.

a= $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\ldots p_m^{e_m}$, con p_i ∈ ℤ, i= 1, 2, … , m.
b= $q_1^{f_1}\ q_2^{f_2}\ldots q_n^{f_n}$, con q_i ∈ ℤ, i= 1, 2, … , n.

ab= p^sk, con k ∈ ℤ,

donde k es el producto de los factores primos que no son p y s es el número de veces que p divide el producto ab.

Dado que p es primo y que ab se compone de factores primos, p debe aparecer en la factorización de, al menos, uno de los factores a o b.

Esto no se cumple si p no es primo. Considerar un contraejemplo:

p= 6, a= 2 y b= 3.
p|ab= 6|6, pero p∤a= 6∤2 y p∤b= 6∤3.

Ejercicio 10.

Hallar, si existe, un número entero q tal que 7290q es el cubo de un entero.

7290= 3645 * 2
7290= 1215 * 3 * 2
7290= 405 * 3^2 * 2
7290= 135 * 3^3 * 2
7290= 45 * 3^4 * 2
7290= 15 * 3^5 * 2
7290= 5 * 3^6 * 2.

q= $5^2 2^2$
q= 25 * 4
q= 100.

n^3= 7290 * 100
n^3= 5 * 3^6 * 2 * 5^2 * 2^2
n^3= $5^3 3^6 2^3$
n= $(5^3 3^6 2^3)^{\frac{1}{3}}$
n= 5 * 3^2 * 2
n= 5 * 9 * 2
n= 90.

Ejercicio 11.

Demostrar que, dados a y b en $\mathbb{Q}$ tales que $a < b$, existe otro número racional x tal que $a < x < b$.

$a + a < a + b$
$2a < a + b$
$a < \frac{a+b}{2}$.

$a + b < b + b$
$a + b < 2b$
$\frac{a+b}{2} < b$.

$a < \frac{a+b}{2} < b$.

Ejercicio 12.

Probar que no existe un número racional cuyo cubo sea igual a 2.

Se supone que existe un número racional $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $\frac{p}{q}$ está en su forma más simple, q$\neq$ 0, tal que:

$(\frac{p}{q})^3$= 2.

$\frac{p^3}{q^3}$= 2
p^3= $2q^3$.

Esto implica que p^3 es un número par y esto, a su vez, implica que p también debe ser par. Entonces, se tiene que p= 2k, donde k es un número entero.

$(2k)^3$= $2q^3$
$8k^3$= $2q^3$
q^3= $\frac{8}{2}$ k^3
q^3= $4k^3$
q^3= 2 * $2k^3$.

Esto implica que q^3 es un número par y esto, a su vez, implica que q también debe ser par.

Sin embargo, esto contradice la suposición inicial de que $\frac{p}{q}$ está en su forma más simple (es decir, p y q son coprimos).

Por lo tanto, queda demostrado que no existe un número racional cuyo cubo sea igual a 2.

Ejercicio 13.

Indicar la parte real Re(z) y la parte imaginaria Im(z) de los siguientes complejos:

(a) *z*= $\sqrt{-49}$.

z= $\sqrt{-1 * 49}$
z= $\sqrt{49}\,\sqrt{-1}$
z= $7\,\sqrt{-1}$
z= 7i.

Re(z)= 0.
Im(z)= 7.

(b) *z*= $\sqrt{-20}$.

z= $\sqrt{-1 * 20}$
z= $\sqrt{20}\,\sqrt{-1}$
z= $\sqrt{20}$i.

Re(z)= 0.
Im(z)= $\sqrt{20}$.

(c) *z*= $\sqrt{\frac{-9}{16}}$.

z= $\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{16}}$
z= $\frac{\sqrt{-1*9}}{4}$
z= $\frac{\sqrt{9}\sqrt{-1}}{4}$
z= $\frac{3\sqrt{-1}}{4}$
z= $\frac{3}{4}$ i.

Re(z)= 0.
Im(z)= $\frac{3}{4}$.

(d) *z*= *-8*.

Re(z)= -8.

Im(z)= 0.

(e) *z= 7i.*

Re(z)= 0.
Im(z)= 7.

(f) *z= (3 + i) + (5 - 4i).*

z= 3 + i + 5 - 4i
z= 8 - 3i.

Re(z)= 8.
Im(z)= -3.

(g) *z= 3i - (5 - 2i).*

z= 3i - 5 + 2i
z= -5 + 5i.

Re(z)= -5.
Im(z)= 5.

(h) $z= \frac{1+3i}{3-i}$.

z= $\frac{1+3i}{3-i}\frac{3+i}{3+i}$
z= $\frac{3+i+9i+3i^2}{9+3i-3i-i^2}$
z= $\frac{3+10i+3(-1)}{9-(-1)}$
z= $\frac{3+10i-3}{9+1}$
z= $\frac{10}{10}$ i
z= i.

Re(z)= 0.
Im(z)= 1.

(i) $z= \frac{1-i}{(1+i)^2}$.

z= $\frac{1-i}{(1+i)^2}$
z= $\frac{1-i}{(1+i)(1+i)}$
z= $\frac{1-i}{1+i+i+i^2}$
z= $\frac{1-i}{1+2i+(-1)}$
z= $\frac{1-i}{1+2i-1}$
z= $\frac{1-i}{2i}$
z= $\frac{1-i}{2i}$ $(\frac{-2i}{-2i})$
z= $\frac{-2i+2i^2}{-4i^2}$
z= $\frac{-2i+2(-1)}{-4(-1)}$
z= $\frac{-2i-2}{4}$
z= $\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}$ i.

Re(z)= $\frac{-1}{2}$.
Im(z)= $\frac{-1}{2}$.

Ejercicio 14.

La suma de un número complejo y su conjugado es -8 y la suma de sus módulos es 10. ¿De qué números complejos se trata?

z= a + ib.
$\bar{z}$= a - ib.

z + $\bar{z}$= -8
a + ib + a - ib= -8
2a= -8
a= $\frac{-8}{2}$
a= -4.

$|z|$ + $|\bar{z}|$= 10
$|z|$ + $|z|$= 10
2$|z|$= 10
$|z|$= $\frac{10}{2}$
$|z|$= 5
$\sqrt{a^2 + b^2}$= 5
$\sqrt{(-4)^2 + b^2}$= 5
$\sqrt{16 + b^2}$= 5
16 + b^2= 5^2
16 + b^2= 25
b^2= 25 - 16
b^2= 9
$\sqrt{b^2}$= $\sqrt{9}$
$|b|$= 3
b= $\pm$3.

z_1= -4 + 3i.
z_2= -4 - 3i.

Ejercicio 15.

Hallar, si existe, x real tal que Re(z)= Im(z), siendo z= $\frac{x+2i}{4-3i}$.

z= $\frac{x+2i}{4-3i}$

z= $\frac{x+2i}{4-3i}\frac{4+3i}{4+3i}$

z= $\frac{4x+3xi+8i+6i^2}{16+12i-12i-9i^2}$

z= $\frac{4x+3xi+8i+6(-1)}{16-9(-1)}$

z= $\frac{4x+3xi+8i-6}{16+9}$

z= $\frac{(4x-6)+(3x+8)i}{25}$

z= $\frac{4x-6}{25}+\frac{3x+8}{25}$ i.

$\frac{4x-6}{25}=\frac{3x+8}{25}$

4x - 6= 3x + 8

4x - 3x= 8 + 6

x= 14.

z= $\frac{4*14-6}{25}+\frac{3*14+8}{25}$ i

z= $\frac{56-6}{25}+\frac{42+8}{25}$ i

z= $\frac{50}{25}+\frac{50}{25}$ i

z= 2 + 2i

Ejercicio 16.

Encontrar, si existe, un valor de k real para que el complejo z= $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ *sea un número real.*

z= $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$
z= $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}\,\frac{1+ki}{1+ki}$
z= $\frac{2+2ki-(1+k)i-(1+k)ki^2}{1-ki-ki-k^2i^2}$
z= $\frac{2+2ki-(1+k)i-(1+k)k(-1)}{1-k^2(-1)}$
z= $\frac{2+2ki-(1+k)i+(1+k)k}{1+k^2}$
z= $\frac{2+k+k^2+[2k-(1+k)]i}{1+k^2}$
z= $\frac{2+k+k^2+(2k-1-k)i}{1+k^2}$
z= $\frac{2+k+k^2+(k-1)i}{1+k^2}$
z= $\frac{(2+k+k^2)+(k-1)i}{1+k^2}$
z= $\frac{2+k+k^2}{1+k^2}+\frac{k-1}{1+k^2}$ i.

$\frac{k-1}{1+k^2}$= 0
k - 1= 0 (1 + k^2)
k - 1= 0
k= 1.

z= $\frac{2+1+1^2}{1+1^2}+\frac{1-1}{1+1^2}$ i
z= $\frac{2+1+1}{1+1}+\frac{0}{1+1}$ i
z= $\frac{4}{2}+\frac{0}{2}$ i
z= 2 + 0i
z= 2 + 0
z= 2.

Ejercicio 17.

Calcular las siguientes potencias:

(a) i^{489}.

$i^{489}= i^{4*122+1}$
$i^{489}= i^{4*122}i^1$
$i^{489}= (i^4)^{123}$i
$i^{489}= 1^{123}$i
$i^{489}=$ 1i
$i^{489}=$ i.

(b) -i^{1026}.

-$i^{1026}=$ -$i^{4*256+2}$
-$i^{1026}=$ -$i^{4*256}i^2$
-$i^{1026}=$ -$(i^4)^{256}$ (-1)
-$i^{1026}=$ -1^{256} (-1)
-$i^{1026}=$ -1 (-1)
-$i^{1026}=$ 1.

(c) $(3i)^{168}$.

$(3i)^{168}= 3^{168}i^{168}$
$(3i)^{168}= 3^{168}i^{4*42+0}$
$(3i)^{168}= 3^{168}i^{4*42}i^0$
$(3i)^{168}= 3^{168}\ (i^4)^{42} * 1$
$(3i)^{168}= 3^{168}\ 1^{42} * 1$
$(3i)^{168}= 3^{168} * 1 * 1$
$(3i)^{168}= 3^{168}$.

Ejercicio 18.

Dados los siguientes números complejos, encontrar la forma más adecuada para realizar las operaciones pedidas:

z_1= *3 + 3i;*
z_2= *-1 + i;*
z_3= *5 + 4i;*
z_4= *9;*
z_5= *5i;*
z_6= *-7;*
z_7= *-4 - 4i;*
z_8= *-8i;*
z_9= *2 - 2i;*
z_{10}= *3 - 4i.*

(a) $z_1 + z_7$.

$z_1 + z_7$= (3 + 3i) + (-4 - 4i)
$z_1 + z_7$= 3 + 3i - 4 - 4i
$z_1 + z_7$= -1 - i.

(b) $z_5 - z_3$.

$z_5 - z_3$= 5i - (5 + 4i)
$z_5 - z_3$= 5i - 5 - 4i
$z_5 - z_3$= -5 + i.

(c) $z_9 z_6$.

$z_9 z_6$= (2 - 2i) (-7)
$z_9 z_6$= -14 + 14i.

(d) $\frac{z_8}{z_{10}}$.

$\frac{z_8}{z_{10}} = \frac{-8i}{3-4i}$
$\frac{z_8}{z_{10}} = \frac{-8i}{3-4i} \frac{3+4i}{3+4i}$
$\frac{z_8}{z_{10}} = \frac{-24i-32i^2}{9+4i-4i-16i^2}$
$\frac{z_8}{z_{10}} = \frac{-24i-32(-1)}{9-16(-1)}$

$\frac{z_8}{z_{10}}= \frac{-24i+32}{9+16}$
$\frac{z_8}{z_{10}}= \frac{32-24i}{25}$
$\frac{z_8}{z_{10}}= \frac{32}{25}$ - $\frac{24}{25}$ i.

(e) z_3 + z_6.

z_3 + z_6= (5 + 4i) + (-7)
z_3 + z_6= 5 + 4i - 7
z_3 + z_6= -2 + 4i.

(f) z_2 - z_6.

z_2 - z_6= (-1 + i) - (-7)
z_2 - z_6= -1 + i + 7
z_2 - z_6= 6 + i.

(g) $z_3 z_{10}$.

$z_3 z_{10}$= (5 + 4i) (3 - 4i)
$z_3 z_{10}$= 15 - 20i + 12i - 16i^2
$z_3 z_{10}$= 15 - 8i - 16 (-1)
$z_3 z_{10}$= 15 - 8i + 16
$z_3 z_{10}$= 31 - 8i.

(h) z_1^3.

z_1^3= $(3 + 3i)^3$
z_1^3= 3^3 + 3 * 3^2 * 3i + 3 * 3 $(3i)^2$ + $(3i)^3$
z_1^3= 27 + 81i + 9 * 9i^2 + 27i^3
z_1^3= 27 + 81i + 81 (-1) + 27 (-i)
z_1^3= 27 + 81i - 81 - 27i
z_1^3= -54 + 54i.

$|z_1|$= $\sqrt{3^2 + 3^2}$
$|z_1|$= $\sqrt{9 + 9}$
$|z_1|$= $\sqrt{9 * 2}$
$|z_1|$= $\sqrt{9}$ $\sqrt{2}$
$|z_1|$= 3 $\sqrt{2}$.

$\alpha= tan^{-1} (\frac{3}{3})$
$\alpha= tan^{-1}$ (1)
$\alpha= \frac{\pi}{4}$.

$z_1^3= |z_1|^3\ e^{i3\alpha}$
$z_1^3= (3\sqrt{2})^3\ e^{i3\frac{\pi}{4}}$
$z_1^3= 27 * 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{3}{4}\pi}$
$z_1^3= 54\sqrt{2}\ e^{i\frac{3}{4}\pi}$
$z_1^3= 54\sqrt{2}$ (cos $\frac{3}{4}\pi$ + i sen $\frac{3}{4}\pi$)
$z_1^3= 54\sqrt{2}$ ($\frac{-3}{3\sqrt{2}}$ + i $\frac{3}{3\sqrt{2}}$)
$z_1^3= 54\sqrt{2}$ ($\frac{-1}{\sqrt{2}}$ + i $\frac{1}{\sqrt{2}}$)
$z_1^3=$ -54 + 54i.

$z_1^3= (|z_1|)^3$ (cos 3α + i sen 3α)
$z_1^3= (3\sqrt{2})^3$ [cos (3 $\frac{\pi}{4}$) + i sen (3 $\frac{\pi}{4}$)]
$z_1^3= 27 * 2\sqrt{2}$ (cos $\frac{3}{4}\pi$ + i sen $\frac{3}{4}\pi$)
$z_1^3= 54\sqrt{2}$ ($\frac{-3}{3\sqrt{2}}$ + i $\frac{3}{3\sqrt{2}}$)
$z_1^3= 54\sqrt{2}$ ($\frac{-1}{\sqrt{2}}$ + i $\frac{1}{\sqrt{2}}$)
$z_1^3=$ -54 + 54i.

(i) z_9^9.

$z_9^9= (2-2i)^9$.

$|z_9|= \sqrt{2^2+(-2)^2}$
$|z_9|= \sqrt{4+4}$
$|z_9|= \sqrt{8}$
$|z_9|= \sqrt{4*2}$
$|z_9|= \sqrt{4}\sqrt{2}$
$|z_9|= 2\sqrt{2}$.

$\alpha= tan^{-1} (\frac{-2}{2})$
$\alpha= tan^{-1}$ (-1)
$\alpha= \frac{-\pi}{4}$.

$z_9^9= |z_9|^9\ e^{i9\alpha}$
$z_9^9= (2\sqrt{2})^9\ e^{i9(\frac{-\pi}{4})}$
$z_9^9= 2^9\ (\sqrt{2})^9\ e^{\frac{-\pi}{4}i}$
$z_9^9= 2^9 2^4\ \sqrt{2}\ e^{\frac{-\pi}{4}i}$

z_9^9= 2^{13} $\sqrt{2}$ $e^{\frac{-\pi}{4}i}$
z_9^9= 2^{13} $\sqrt{2}$ [cos ($\frac{-\pi}{4}$) + i sen ($\frac{-\pi}{4}$)]
z_9^9= 2^{13} $\sqrt{2}$ [$\frac{2}{2\sqrt{2}}$ + i ($\frac{-2}{2\sqrt{2}}$)]
z_9^9= 2^{13} $\sqrt{2}$ [$\frac{1}{\sqrt{2}}$ + i ($\frac{-1}{\sqrt{2}}$)]
z_9^9= 2^{13} $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ - i $\frac{1}{\sqrt{2}}$)
z_9^9= 2^{13} - 2^{13}i.

z_9^9= $(|z_9|)^9$ (cos 9α + i sen 9α)
z_9^9= $(2\sqrt{2})^9$ {cos [9 ($\frac{-\pi}{4}$)] + i sen [9 ($\frac{-\pi}{4}$)]}
z_9^9= $2^9(\sqrt{2})^9$ [cos ($\frac{-\pi}{4}$) + i sen ($\frac{-\pi}{4}$)]
z_9^9= $2^9 2^4$ $\sqrt{2}$ [$\frac{2}{2\sqrt{2}}$ + i ($\frac{-2}{2\sqrt{2}}$)]
z_9^9= 2^{13} $\sqrt{2}$ [$\frac{1}{\sqrt{2}}$ + i ($\frac{-1}{\sqrt{2}}$)]
z_9^9= 2^{13} $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ - i $\frac{1}{\sqrt{2}}$)
z_9^9= 2^{13} - 2^{13}i.

(j) z_5^{15}.

z_5^{15}= $(5i)^{15}$
z_5^{15}= $5^{15}i^{15}$
z_5^{15}= $5^{15}i^{4*3+3}$
z_5^{15}= $5^{15}(i^4)^3 i^3$
z_5^{15}= $5^{15}1^3$ (-i)
z_5^{15}= 5^{15} * 1 (-i)
z_5^{15}= -5^{15}i.

(k) z_{10}^3.

z_{10}^3= $(3-4i)^3$
z_{10}^3= 3^3 - 3 * 3^2 * 4i + 3 * 3 * $4i^2$ - $(4i)^3$
z_{10}^3= 27 - 3 * 9 * 4i + 3 * 3 * $16i^2$ - $64i^3$
z_{10}^3= 27 - 108i + 144 (-1) - 64 (-i)
z_{10}^3= 27 - 108i - 144 + 64i
z_{10}^3= -117 - 44i.

$|z_{10}|$= $\sqrt{3^2+(-4)^2}$
$|z_{10}|$= $\sqrt{9+16}$
$|z_{10}|$= $\sqrt{25}$
$|z_{10}|$= 5.

$\alpha= tan^{-1} (\frac{-4}{3})$
$\alpha=$ -0,927.

$z_{10}^3= |z_{10}|^3\ e^{i3\alpha}$
$z_{10}^3= 5^3\ e^{i3(-0,927)}$
$z_{10}^3= 125e^{-2,782i}$
$z_{10}^3=$ 125 [cos (-2,782) + i sen (-2,782)]
$z_{10}^3=$ 125 [-0,936 + i (-0,352)]
$z_{10}^3=$ 125 (-0,936 - 0,352i)
$z_{10}^3=$ -117 - 44i.

$z_{10}^3= (|z_{10}|)^3$ (cos 3α + i sen 3α)
$z_{10}^3= 5^3$ {cos [3 (-0,927)] + i sen [3 (-0,927)]}
$z_{10}^3=$ 125 [cos (-2,782) + i sen (-2,782)]
$z_{10}^3=$ 125 [-0,936 + i (-0,352)]
$z_{10}^3=$ 125 (-0,936 - 0,352i)
$z_{10}^3=$ -117 - 44i.

(l) *Hallar las raíces cuartas de* z_2.

$z_2=$ -1 + i.

$|z_2|= \sqrt{(-1)^2+1^2}$
$|z_2|= \sqrt{1+1}$
$|z_2|= \sqrt{2}$.

$\alpha= tan^{-1} (\frac{1}{-1})$
$\alpha= tan^{-1}$ (-1)
$\alpha= \frac{-\pi}{4}$.

$z_2= \sqrt{2}\ e^{i(\frac{-\pi}{4})}$.

$|w|= \sqrt[4]{|z_2|}$
$|w|= \sqrt[4]{\sqrt{2}}$
$|w|= \sqrt[8]{2}$.

$\varphi_k= \frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{4}$.

$\varphi_0= \frac{\frac{-\pi}{4}+2*0\pi}{4}$
$\varphi_0= \frac{\frac{-\pi}{4}+0}{4}$
$\varphi_0= \frac{\frac{-\pi}{4}}{4}$

$\varphi_0=\frac{-\pi}{16}$.

$\varphi_1=\frac{\frac{-\pi}{4}+2*1\pi}{4}$
$\varphi_1=\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi}{4}$
$\varphi_1=\frac{\frac{7}{4}\pi}{4}$
$\varphi_1=\frac{7}{16}\pi$.

$\varphi_2=\frac{\frac{-\pi}{4}+2*2\pi}{4}$
$\varphi_2=\frac{\frac{-\pi}{4}+4\pi}{4}$
$\varphi_2=\frac{\frac{15}{4}\pi}{4}$
$\varphi_2=\frac{15}{16}\pi$.

$\varphi_3=\frac{\frac{-\pi}{4}+2*3\pi}{4}$
$\varphi_3=\frac{\frac{-\pi}{4}+6\pi}{4}$
$\varphi_3=\frac{\frac{23}{4}\pi}{4}$
$\varphi_3=\frac{23}{16}\pi$.

$w_k=|w|\ e^{i\varphi_k}$
$w_k=\sqrt[8]{2}\ e^{i(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{4})}$.

$w_0=\sqrt[8]{2}\ e^{i(\frac{-\pi}{16})}$.
$w_1=\sqrt[8]{2}\ e^{i(\frac{7}{16}\pi)}$.
$w_2=\sqrt[8]{2}\ e^{i(\frac{15}{16}\pi)}$.
$w_3=\sqrt[8]{2}\ e^{i(\frac{23}{16}\pi)}$.

(m) *Hallar las raíces cúbicas de* z_4.

$z_4=9$.

$|z_4|=\sqrt{9^2}$
$|z_4|=9$.

$\alpha=tan^{-1}\ (\frac{0}{9})$
$\alpha=tan^{-1}\ (0)$
$\alpha=0$.

$z_4 = 9e^{i*0}$
$z_4 = 9e^{0}$
$z_4 = 9 * 1$
$z_4 = 9.$

$|w| = \sqrt[3]{|z_4|}$
$|w| = \sqrt[3]{9}.$

$\varphi_k = \frac{0+2k\pi}{3}$
$\varphi_k = \frac{2k\pi}{3}.$

$\varphi_0 = \frac{2*0\pi}{3}$
$\varphi_0 = \frac{0}{3}$
$\varphi_0 = 0.$

$\varphi_1 = \frac{2*1\pi}{3}$
$\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi.$

$\varphi_2 = \frac{2*2\pi}{3}$
$\varphi_2 = \frac{4}{3}\pi.$

$w_k = |w|\ e^{i\varphi_k}$
$w_k = \sqrt[3]{9}\ e^{i\frac{2k\pi}{3}}.$

$w_0 = \sqrt[3]{9}\ e^{i*0} = \sqrt[3]{9}\ e^{0} = \sqrt[3]{9} * 1 = \sqrt[3]{9}.$
$w_1 = \sqrt[3]{9}\ e^{i(\frac{2}{3}\pi)}.$
$w_2 = \sqrt[3]{9}\ e^{i(\frac{4}{3}\pi)}.$

(n) *Hallar las raíces séptimas de i.*

z= i.

$|z| = \sqrt{1^2}$
$|z| = 1.$

$\alpha = \frac{\pi}{2}.$

z= $1e^{i\frac{\pi}{2}}$
z= $e^{i\frac{\pi}{2}}.$

$|w| = \sqrt[7]{|z|}$

$|w|=\sqrt[7]{1}$
$|w|=1.$

$\varphi_k=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{7}.$

$\varphi_0=\frac{\frac{\pi}{2}+2*0\pi}{7}$
$\varphi_0=\frac{\frac{\pi}{2}+0}{7}$
$\varphi_0=\frac{\frac{\pi}{2}}{7}$
$\varphi_0=\frac{\pi}{14}.$

$\varphi_1=\frac{\frac{\pi}{2}+2*1\pi}{7}$
$\varphi_1=\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{7}$
$\varphi_1=\frac{\frac{5}{2}\pi}{7}$
$\varphi_1=\frac{5}{14}\pi.$

$\varphi_2=\frac{\frac{\pi}{2}+2*2\pi}{7}$
$\varphi_2=\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{7}$
$\varphi_2=\frac{\frac{9}{2}\pi}{7}$
$\varphi_2=\frac{9}{14}\pi.$

$\varphi_3=\frac{\frac{\pi}{2}+2*3\pi}{7}$
$\varphi_3=\frac{\frac{\pi}{2}+6\pi}{7}$
$\varphi_3=\frac{\frac{13}{2}\pi}{7}$
$\varphi_3=\frac{13}{14}\pi.$

$\varphi_4=\frac{\frac{\pi}{2}+2*4\pi}{7}$
$\varphi_4=\frac{\frac{\pi}{2}+8\pi}{7}$
$\varphi_4=\frac{\frac{17}{2}\pi}{7}$
$\varphi_4=\frac{17}{14}\pi.$

$\varphi_5=\frac{\frac{\pi}{2}+2*5\pi}{7}$
$\varphi_5=\frac{\frac{\pi}{2}+10\pi}{7}$

$\varphi_5 = \frac{\frac{21}{2}\pi}{7}$

$\varphi_5 = \frac{3}{2}\pi.$

$\varphi_6 = \frac{\frac{\pi}{2}+2*6\pi}{7}$

$\varphi_6 = \frac{\frac{\pi}{2}+12\pi}{7}$

$\varphi_6 = \frac{\frac{25}{2}\pi}{7}$

$\varphi_6 = \frac{25}{14}\pi.$

$w_k = |w|\ e^{i\varphi_k}$

$w_k = \sqrt[6]{1}\ e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{7}}$

$w_k = 1e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{7}}$

$w_k = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{7}}.$

$w_0 = e^{i\frac{\pi}{14}}.$

$w_1 = e^{i\frac{5}{14}\pi}.$

$w_2 = e^{i\frac{8}{14}\pi}.$

$w_3 = e^{i\frac{13}{14}\pi}.$

$w_4 = e^{i\frac{17}{14}\pi}.$

$w_5 = e^{i\frac{3}{2}\pi}.$

$w_6 = e^{i\frac{25}{14}\pi}.$

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 4:
Relaciones entre Conjuntos.

Ejercicio 1.

Sean los conjuntos A= {1, 0, -1} y B= {4, 3, 2, 1}. Decidir si las siguientes corresponden a relaciones de A en B. Justificar.

(a) *R= {(1, 1); (0, 2)}.*

R corresponde a una relación de A en B.

(b) *R= {(-1, 1); (1, -1)}.*

R no corresponde a una relación de A en B, ya que el segundo elemento de la segunda tupla -1 $\notin$ B.

(c) *R= {(-1, 1); (-1, 2); (-1, 3)}.*

R corresponde a una relación de A en B.

(d) *R= {(4, 1)}.*

R no corresponde a una relación de A en B, ya que el primer elemento de la primera tupla 4 $\notin$ A.

(e) *R= $\emptyset$.*

R corresponde a una relación de A en B.

Ejercicio 2.

Sea A= {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, B= ℤ y la relación de A en B que viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x. Escribir R por extensión. Definir R^{-1} por comprensión y por extensión.

R= {(-3, 9); (-2, 4); (-1, 1); (0, 0); (1, 1); (2, 4); (3, 9)}.

R^{-1}= {(y, x): (x, y) ∈ R}.
R^{-1}= {(9, -3); (4, -2); (1, -1); (0, 0); (1, 1); (4, 2); (9, 3)}.

Ejercicio 3.

Sean los conjuntos A= {a, b, c, d, e}, V= {vocales} y B= {1, 2, 3}. Decidir si las siguientes corresponden a relaciones. Justificar.

(a) *R= {(a, a, a); (a, b, c); (b, c, d)} en A x A x A.*

R corresponde a una relación en A x A x A.

(b) *R= {(a, a, a); (c, e, 2); (a, b, 1)} en A x V x B.*

R no corresponde a una relación en A x V x B, ya que el segundo elemento de la tercera tupla b $\notin$ V.

(c) *R= {(a, b, 1); (e, c, 2); (i, j, 3)} en V x A x B.*

R no corresponde a una relación en V x A x B, ya que el segundo elemento de la tercera tupla j $\notin$ A.

(d) *R= {(a, z, 3); (b, i, 2); (c, x, 1)} en A x V x B.*

R no corresponde a una relación en A x V x B, ya que el segundo elemento de la primera tupla z $\notin$ V y el segundo elemento de la tercera tupla x $\notin$ V.

Ejercicio 4.

Sea A= {1, 2, 3} y la relación R en A x A x A definida de la forma: (x, y, z) ∈ R si y sólo si x < y e y < z, siendo < el "menor" usual entre números reales. Escribir R por extensión.

R= {(1, 2, 3)}.

Ejercicio 5.

Para cada una de las siguientes relaciones, dar tres pares que pertenezcan y tres pares que no. Indicar si son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

(a) *En el conjunto de los números reales:*

- *xRy si y sólo si $x \geq 4$ e $y \geq 5$.*

(4, 5), (5, 6), (6, 7) $\in$ R.
(1, 2), (2, 3), (3, 4) $\notin$ R.

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x $\in$ A, (x, x) $\in$ R. En particular, (4, 4) $\notin$ R.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R, entonces, (y, x) $\in$ R. En particular, (4, 5) $\in$ R pero (5, 4) $\notin$ R.

R no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R y (y, x) $\in$ R, entonces, x= y. En particular, (5, 6) $\in$ R y (6, 5) $\in$ R pero $5 \neq 6$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z $\in$ A, si (x, y) $\in$ R y (y, z) $\in$ R, entonces, (x, z) $\in$ R. En particular, si $x \geq 4$, $y \geq 5$ e $y \geq 4$, $z \geq 5$, entonces, $x \geq 4$, $z \geq 5$.

Por lo tanto, R transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica ni antisimétrica.

- *xRy si y sólo si $y \leq x \leq y + 3$.*

(1, 1), (2, 2), (3, 3) $\in$ R.
(4, 0), (5, 1), (6, 2) $\notin$ R.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x $\in$ A, (x, x) $\in$ R. En particular, $x \leq x \leq x + 3$.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R, entonces, (y, x) $\in$ R. En particular, si $y \leq x \leq y + 3$, entonces, no necesariamente $x \leq y \leq x + 3$ (excepto que x= y).

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R y (y, x) $\in$ R, entonces, x= y. En particular, si $y \leq x \leq y + 3$ y $x \leq y \leq x + 3$, entonces, x= y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z $\in$ A, si (x, y) $\in$ R y (y, z) $\in$ R, entonces, (x, z) $\in$ R. En particular, si $y \leq x \leq y + 3$ e $z \leq y \leq z + 3$, entonces, $z \leq x \leq z + 3$.

Por lo tanto, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

(b) *Sean A= {1, 2, 3, 4} y P (A) el conjunto de partes de A:*

- *en P (A), XRY si y sólo si X ∩ Y= ∅.*

P (A)= {∅, {1}; {2}; {3}; {4}; {1, 2}; {1, 3}; {1, 4}; {2, 3}; {2, 4}; {3, 4}; {1, 2, 3}; {1, 2, 4}; {1, 3, 4}; {2, 3, 4}; {1, 2, 3, 4}}.

({1}; {2}), ({2}; {3}), ({3}; {4}) ∈ R.
({1}; {1, 2}), ({2}; {2, 3}), ({3}; {3, 4}) ∉ R.

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo X ∈ P (A), (X, X) ∈ R. En particular, X ∩ X≠ ∅.

R es simétrica porque se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R, entonces, (Y, X) ∈ R. En particular, si X ∩ Y= ∅, entonces, Y ∩ X= ∅.

R no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R y (Y, X) ∈ R, entonces, X= Y. En particular, ({1}, {2}) ∈ R y ({2}, {1}) ∈ R pero {1}≠ {2}.

R no es transitiva porque no se cumple que, para cada X, Y, Z ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R y (Y, Z) ∈ R, entonces, (X, Z) ∈ R. En particular, ({1}, {2}) ∈ R y ({2}, {1, 3}) ∈ R pero ({1}, {1, 3}) ∉ R.

Por lo tanto, R es simétrica, pero no es reflexiva ni antisimétrica ni transitiva.

- *en P (A), XRY si y sólo si X ⊂ Y.*

P (A)= {∅, {1}; {2}; {3}; {4}; {1, 2}; {1, 3}; {1, 4}; {2, 3}; {2, 4}; {3, 4}; {1, 2, 3}; {1, 2, 4}; {1, 3, 4}; {2, 3, 4}; {1, 2, 3, 4}}.

({1}; {1, 2}), ({2}; {2, 3}), ({3}; {3, 4}) ∈ R.
({1}; {2}), ({2}; {3}), ({3}; {4}) ∉ R.

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo X ∈ P (A), (X, X) ∈ R. En particular, X ⊄ X.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R, entonces, (Y, X) ∈ R. En particular, si X ⊂ Y, entonces, Y ⊄ X.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R y (Y, X) ∈ R, entonces, X= Y. En particular, si X ⊂ Y, entonces, Y ⊄ X.

R es transitiva porque se cumple que, para cada X, Y, Z ∈ P (A), si (X, Y) ∈ R y (Y, Z) ∈ R, entonces, (X, Z) ∈ R. En particular, si X ⊂ Y e Y ⊂ Z, entonces, X ⊂ Z.

Por lo tanto, R es antisimétrica y transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica.

Ejercicio 6.

Determinar si las siguientes relaciones definidas en A= {a, b, c, d} son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas:

(a) R_0= ∅.

R_0 no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_0.

R_0 es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_0, entonces, (y, x) ∈ R_0.

R_0 es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_0 y (y, x) ∈ R_0, entonces, x= y.

R_0 es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_0 y (y, z) ∈ R_0, entonces, (x, z) ∈ R_0.

Por lo tanto, R_0 es simétrica, antisimétrica y transitiva, pero no es reflexiva.

(b) R_1= *{(a, a); (a, b); (d, c); (c, d)}*.

R_1 no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_1. En particular, (b, b) ∉ R_1, (c, c) ∉ R_1 y (d, d) ∉ R_1.

R_1 no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_1, entonces, (y, x) ∈ R_1. En particular, (a, b) ∈ R_1 pero (b, a) ∉ R_1.

R_1 no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_1 y (y, x) ∈ R_1, entonces, x= y. En particular, (d, c) ∈ R_1 y (c, d) ∈ R_1 pero d≠ c.

R_1 no es transitiva porque no se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_1 y (y, z) ∈ R_1, entonces, (x, z) ∈ R_1. En particular, (c, d) ∈ R_1 y (d, c) ∈ R_1 pero (c, c) ∉ R_1 y (d, c) ∈ R_1 y (c, d) ∈ R_1 pero (d, d) ∉ R_1.

Por lo tanto, R_1 no es reflexiva ni simétrica ni antisimétrica ni transitiva.

(c) R_2= *{(a, a); (b, b); (a, b); (b, a); (d, d); (c, c)}*.

R_2 es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_2.

R_2 es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_2, entonces, (y, x) ∈ R_2.

R_2 no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_2 y (y, x) ∈ R_2, entonces, x= y. En particular, (a, b) ∈ R_2 y (b, a) ∈ R_2 pero a≠ b.

R_2 es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_2 y (y, z) ∈ R_2, entonces, (x, z) ∈ R_2.

Por lo tanto, R_2 es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica.

(d) R_3= *{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)}.*

R_3 no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_3. En particular, (c, c) ∉ R_3 y (d, d) ∉ R_3.

R_3 es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_3, entonces, (y, x) ∈ R_3.

R_3 no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_3 y (y, x) ∈ R_3, entonces, x= y. En particular, (a, b) ∈ R_3 y (b, a) ∈ R_3 pero a≠ b.

R_3 no es transitiva porque no se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_3 y (y, z) ∈ R_3, entonces, (x, z) ∈ R_3. En particular, (a, b) ∈ R_3 y (b, c) ∈ R_3 pero (a, c) ∉ R_3 y (c, b) ∈ R_3 y (b, c) ∈ R_3 pero (c, c) ∉ R_3.

Por lo tanto, R_3 es simétrica, pero no es ni reflexiva ni antisimétrica ni transitiva.

(e) R_4= *A x A.*

R_4 es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R_4.

R_4 es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_4, entonces, (y, x) ∈ R_4.

R_4 no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R_4 y (y, x) ∈ R_4, entonces, x= y. En particular, (a, b) ∈ R_4 y (b, a) ∈ R_4 pero a≠ b.

R_4 es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R_4 y (y, z) ∈ R_4, entonces, (x, z) ∈ R_4.

Por lo tanto, R_4 es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica.

Ejercicio 7.

Escribir la matriz y los dígrafos asociados a las relaciones anteriores.

(a) $R_0 = \emptyset$.

$$M_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) R_1 = *{(a, a); (a, b); (d, c); (c, d)}.*

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) R_2 = *{(a, a); (b, b); (a, b); (b, a); (d, d); (c, c)}.*

$$M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) R_3 = *{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)}.*

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) R_4 = *A x A.*

$$M_{R_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8.

Sea A= {a, b, c, d}.

(a) *Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A.*

R= {(a, a)}.

(b) *Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A.*

R= {(a, b); (b, a)}.

(c) *Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A.*

R= {(a, b); (b, c)}.

(d) *Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A.*

R= {(a, b)}.

(e) *Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A.*

R= {(a, b)}.

Ejercicio 9.

Demostrar que, si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b, entonces, aRa y bRb.

aRb $\Longrightarrow$ bRa (por simétrica)
aRb $\land$ bRa $\Longrightarrow$ aRa (por transitiva).
bRa $\land$ aRb $\Longrightarrow$ bRb (por transitiva).

Ejercicio 10.

Sea A un conjunto arbitrario. Sea R= Δ_A (diagonal de A). Analizar qué propiedades tiene R.

R= Δ_A
R= {(x, x) | x ∈ A}.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R.

R es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R.

Por lo tanto, R es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

Ejercicio 11.

Proponer una relación en el conjunto de los números naturales. Mostrar qué propiedades tiene (reflexividad, simetría, antisimetría, transitividad).

A= $\mathbb{N}$.

xRy si y sólo $x \leq y$, con x, y $\in$ A.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x $\in$ A, (x, x) $\in$ R. En particular, $x \leq x$.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R, entonces, (y, x) $\in$ R. En particular, si $x \leq y$, entonces, no necesariamente $y \leq x$ (excepto que x= y).

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R y (y, x) $\in$ R, entonces, x= y. En particular, si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces, x= y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z $\in$ A, si (x, y) $\in$ R y (y, z) $\in$ R, entonces, (x, z) $\in$ R. En particular, si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces, $x \leq z$.

Por lo tanto, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

Ejercicio 12.

Proponer una relación en el conjunto de los alumnos de informática. Mostrar qué propiedades tiene (reflexividad, simetría, antisimetría, transitividad).

A= conjunto de los alumnos de informática.

xRy si y sólo si el apellido de x está antes, en orden alfabético, que el de y.

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. En particular, no es posible que un apellido esté antes, en orden alfabético, que sí mismo.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$. En particular, si el apellido de x está antes que el de y, entonces, el de y no está antes que el de x.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces, $x= y$. En particular, si el apellido de x está antes que el de y y el de y está antes que el de x, entonces, el apellido de x es el mismo que el de y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces, $(x, z) \in R$. En particular, si el apellido de x está antes que el de y y el apellido de y está antes que el de z, entonces, el apellido de x está antes que el de z.

Por lo tanto, R es antisimétrica y transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica.

Ejercicio 13.

Dada una relación binaria R sobre un conjunto A, se define la relación complemento de R, $\bar{R}$, por: a$\bar{R}$b si y sólo si a no está relacionada con b por R.

(a) *Dar un ejemplo de una relación R y su complemento.*

A= {1, 2, 3}.
R= {(1, 1); (2, 2); (3, 3)}.
$\bar{R}$= {(1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 2)}.

(b) *Probar que, si R ⊂ S, entonces, $\bar{S} \subset \bar{R}$.*

Para todo (a, b) ∈ R:

Si (a, b) ∈ R, (a, b) ∈ S ⟺ Si (a, b) ∉ S, (a, b) ∉ R.
Si (a, b) ∈ R, (a, b) ∈ S ⟺ Si (a, b) ∈ $\bar{S}$, (a, b) ∈ $\bar{R}$.

Ejercicio 14.

Dada R una relación binaria sobre A, probar que:

(a) *R es reflexiva si y sólo si* R^{-1} *también lo es.*

Si R es reflexiva, entonces, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R, lo que implica que (x, x) ∈ R^{-1}, ya que el par (x, x) es su propio inverso. Por lo tanto, R^{-1} es reflexiva, ya que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R^{-1}.

Si R^{-1} es reflexiva, entonces, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R^{-1}, lo que implica que (x, x) ∈ R, ya que el par (x, x) es su propio inverso. Por lo tanto, R es reflexiva, ya que, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R.

Por lo tanto, queda demostrado que R es reflexiva si y sólo si R^{-1} también lo es.

(b) *R es simétrica si y sólo si* R^{-1}*= R.*

Si R es simétrica, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R, lo que implica que, si (y, x) ∈ R^{-1}, entonces, (x, y) ∈ R^{-1}. Por lo tanto, R^{-1}= R.

Si R^{-1}= R, entonces, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. Por lo tanto, R es simétrica.

Por lo tanto, queda demostrado que R es simétrica si y sólo si R^{-1}= R.

(c) *R es simétrica si y sólo si* R^{-1} *y* $\bar{R}$ *también lo son.*

Si R es simétrica, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R, lo que implica, por un lado, que, si (y, x) ∈ R^{-1}, entonces, (x, y) ∈ R^{-1}; y, por otro lado, que, si (y, x) ∉ R (∈ $\bar{R}$), entonces, (x, y) ∉ R (∈ $\bar{R}$). Por lo tanto, R^{-1} y $\bar{R}$ son simétricas.

Si R^{-1} y $\bar{R}$ son simétricas, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R^{-1}, entonces, (y, x) ∈ R^{-1} y, si (x, y) ∈ $\bar{R}$, entonces, (y, x) ∈ $\bar{R}$, respectivamente, lo que implica que, si (y, x) ∈ R, entonces, (x, y) ∈ R. Por lo tanto, R es simétrica.

Por lo tanto, queda demostrado que R es simétrica si y sólo si R^{-1} y $\bar{R}$ también lo son.

(d) *R es antisimétrica si y sólo si R ∩* $R^{-1} \subset \Delta_A$*.*

Si R es antisimétrica, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y, lo que implica que, en R ∩ R^{-1}, no existen pares (x, y) con x≠ y. Por lo tanto, R ∩ $R^{-1} \subset \Delta_A$.

Si R ∩ R^{-1} ⊂ Δ_A, entonces, para cada (x, y) ∈ R ∩ R^{-1}, x= y, lo que implica que, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. Por lo tanto, R es antisimétrica.

Por lo tanto, queda demostrado que R es antisimétrica si y sólo si R ∩ R^{-1} ⊂ Δ_A.

Ejercicio 15.

Se dice que una relación R sobre un conjunto A es asimétrica si, cada vez que a está relacionado con b, no se da que b esté relacionado con a. Dar un ejemplo de una relación asimétrica.

A= $\mathbb{N}$.
aRb si y sólo si a $<$ b.

Si (a, b) $\in$ R, a $<$ b y, por lo tanto, b $\nless$ a, es decir, (b, a) $\notin$ R.

Ejercicio 16.

Probar que, dada una relación R sobre un conjunto A, R es asimétrica si y sólo si R $\cap$ R^{-1}= $\emptyset$.

Si R es asimétrica, entonces, para cada x, y $\in$ A, si (x, y) $\in$ R ($\notin R^{-1}$), entonces, (y, x) $\notin$ R ($\in R^{-1}$), lo que implica que, en R y R^{-1}, no existen pares (x, y) comunes. Por lo tanto, R $\cap$ R^{-1}= $\emptyset$.

Si R $\cap$ R^{-1}= $\emptyset$, entonces, en R y R^{-1}, no existen pares (x, y) comunes, lo que implica que, si (x, y) $\in$ R ($\notin R^{-1}$), entonces, (y, x) $\notin$ R ($\in R^{-1}$). Por lo tanto, R es asimétrica.

Por lo tanto, queda demostrado que R es asimétrica si y sólo si R $\cap$ R^{-1}= $\emptyset$.

Ejercicio 17.

Sean R y S dos relaciones en A. Probar que:

(a) *Si R ⊂ S, entonces,* $R^{-1} \subset S^{-1}$.

Si R ⊂ S, entonces, para cada (a, b) ∈ R, (a, b) ∈ S, lo que implica que, para cada (b, a) ∈ R^{-1}, (b, a) ∈ S^{-1}. Por lo tanto, $R^{-1} \subset S^{-1}$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si R ⊂ S, entonces, $R^{-1} \subset S^{-1}$.

(b) *Si R y S son reflexivas, entonces, R ∪ S y R ∩ S también lo son.*

Si R y S son reflexivas, entonces, para todo x ∈ A, (x, x) ∈ R y (x, x) ∈ S, lo que implica que (x, x) ∈ R ∪ S y (x, x) ∈ R ∩ S. Por lo tanto, R ∪ S y R ∩ S son reflexivas.

Por lo tanto, queda demostrado que, si R y S son reflexivas, entonces, R ∪ S y R ∩ S también lo son.

(c) *Si R y S son simétricas, entonces, R ∪ S y R ∩ S también lo son.*

Si R y S son simétricas, entonces, para cada x, y ∈ A, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R y, si (x, y) ∈ S, entonces, (y, x) ∈ S, respectivamente, lo que implica, por un lado, que, si (x, y) ∈ R ∪ S, entonces, (y, x) ∈ R ∪ S; y, por otro lado, que, si (x, y) ∈ R ∩ S, entonces, (y, x) ∈ R ∩ S. Por lo tanto, R ∪ S y R ∩ S son simétricas.

Por lo tanto, queda demostrado que, si R y S son simétricas, entonces, R ∪ S y R ∩ S también lo son.

Ejercicio 18.

Establecer las propiedades de las siguientes relaciones en H (conjunto de los seres humanos):

(a) *Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hermano de y.*

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ H, (x, x) ∈ R. En particular, x no puede ser hermano de x.

R es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x es hermano de y, entonces, y es hermano de x.

R no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. En particular, x es hermano de y e y es hermano de x pero x≠ y.

R no es transitiva porque no se cumple que, para cada x, y, z ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R. En particular, si x es hermano de y e y es hermano de z, no necesariamente x es hermano de z.

Por lo tanto, R es simétrica, pero no es reflexiva ni antisimétrica ni transitiva.

(b) *Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hijo de y.*

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ H, (x, x) ∈ R. En particular, x no puede ser hijo de x.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x es hijo de y, entonces, y no es hijo de x.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. En particular, si x es hijo de y, entonces, y no es hijo de x.

R no es transitiva porque no se cumple que, para cada x, y, z ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R. En particular, si x es hijo de y e y es hijo de z, entonces, x no es hijo de z.

Por lo tanto, R es antisimétrica, pero no es reflexiva ni simétrica ni transitiva.

(c) *Se dice que una persona a es descendiente de una persona b si es hijo, nieto, bisnieto, etc. R es la relación en H definida por xRy si y sólo si x es descendiente de y.*

R no es reflexiva porque no se cumple que, para todo x ∈ H, (x, x) ∈ R. En particular, x no puede ser descendiente de x.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x es descendiente de y, entonces, y no es descendiente de x.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. En particular, si x es descendiente de y, entonces, y no es descendiente de x.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ H, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R. En particular, si x es descendiente de y e y es descendiente de z, entonces, x es descendiente de z.

Por lo tanto, R es antisimétrica y transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica.

Ejercicio 19.

Establecer las propiedades de las siguientes relaciones:

(a) *Sea ℕ el conjunto de los números naturales. Sea ≤ la relación en ℕ dada por x ≤ y si y sólo si x es menor o igual a y.*

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ ℕ, (x, x) ∈ R. En particular, x ≤ x.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ ℕ, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x ≤ y, entonces, no necesariamente y ≤ x (excepto que x= y).

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ ℕ, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. En particular, si x ≤ y e y ≤ x, entonces, x= y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ ℕ, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R. En particular, si x ≤ y e y ≤ z, entonces, x ≤ z.

Por lo tanto, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

(b) *Sea ℕ el conjunto de los números naturales. Sea | la relación en ℕ dada por x|y si y sólo si x divide a y.*

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ ℕ, (x, x) ∈ R. En particular, x|x.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ ℕ, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x|y, entonces, y∤x.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ ℕ, si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R, entonces, x= y. En particular, si x|y e y|x, entonces, x= y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ ℕ, si (x, y) ∈ R y (y, z) ∈ R, entonces, (x, z) ∈ R. En particular, si x|y e y|z, entonces, x|z.

Por lo tanto, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

(c) *Igual al anterior, pero en el conjunto de los números enteros.*

R es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ ℤ, (x, x) ∈ R. En particular, x|x.

R no es simétrica porque no se cumple que, para cada x, y ∈ ℤ, si (x, y) ∈ R, entonces, (y, x) ∈ R. En particular, si x|y, entonces, y∤x.

R no es antisimétrica porque no se cumple que, para cada x, y $\in \mathbb{Z}$, si (x, y) $\in$ R y (y, x) $\in$ R, entonces, x= y. En particular, si x|y e y|x, entonces, no necesariamente x= y (puede ser que x= -y).

R es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z $\in \mathbb{Z}$, si (x, y) $\in$ R y (y, z) $\in$ R, entonces, (x, z) $\in$ R. En particular, si x|y e y|z, entonces, x|z.

Por lo tanto, R es reflexiva y transitiva, pero no es simétrica ni antisimétrica.

Ejercicio 20.

Dado un conjunto de números reales A, probar que la relación sobre A x A dada por (a, b)R(c, d) si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$ es un orden. ¿Es total?

R es reflexiva porque se cumple que, para todo (a, b) $\in$ A x A, ((a, b); (a, b)) $\in$ R. En particular, $x \leq x$ e $y \leq y$.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada (a, b), (c, d) $\in$ A x A, si ((a, b); (c, d)) $\in$ R y ((c, d); (a, b)) $\in$ R, entonces, a= c y b= d. En particular, si $a \leq c$, $b \leq d$ y $c \leq a$, $d \leq b$, entonces, a=c y b= d.

R es transitiva porque se cumple que, para cada (a, b), (c, d), (e, f) $\in$ A x A, si ((a, b); (c, d)) $\in$ R y ((c, d); (e, f)) $\in$ R, entonces, ((a, b); (e, f)) $\in$ R. En particular, si $a \leq c$, $b \leq d$ y $c \leq e$, $d \leq f$, entonces, $a \leq e$, $b \leq f$.

R no es un orden total porque no se cumple que, para cada (a, b) y (c, d) $\in$ A x A, se tiene que ((a, b); (c, d)) $\in$ R o ((c, d); (a, b)) $\in$ R. En particular, si (a, b)= (1, 2) y (c, d)= (2, 1), entonces, $a=1 \leq c=2$, $b=2 \nleq d=1$ y $c=2 \nleq a=1$, $d=1 \leq b=2$.

Por lo tanto, la relación sobre A x A dada es un orden parcial, ya que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es un orden total, ya que no todos los pares de elementos del conjunto son comparables.

Ejercicio 21.

Analizar qué tipo de orden es el usual en el conjunto de los números reales. ¿Qué pasa con los números complejos? ¿Están ordenados?

El tipo de orden que es usual en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es $\leq$, que es un orden total, ya que todos los elementos del conjunto son comparables.

En cambio, el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ no tiene un orden total compatible con su estructura algebraica, ya que no existe una manera de comparar todos los elementos de este conjunto de manera que se mantengan las propiedades del orden.

Ejercicio 22.

Probar que el orden lexicográfico es un orden total.

Dado un conjunto A que está totalmente ordenado por la relación $\leq$, el orden lexicográfico en el producto cartesiano A x A, se define de la siguiente manera:

Para (a_1, b_1), (a_2, b_2) ∈ A x A, se dice que:

$(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$

si y sólo si

$a_1 < a_2$ o
$a_1 = a_2$ y $b_1 \leq b_2$.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo (a_1, b_1) ∈ A x A, $((a_1, b_1); (a_1, b_1))$ ∈ R. En particular, $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_1, b_1)$.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada (a_1, b_1), (a_2, b_2) ∈ A x A, si $((a_1, b_1); (a_2, b_2))$ ∈ R y $((a_2, b_2); (a_1, b_1))$ ∈ R, entonces, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. En particular, si $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ y $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_1, b_1)$, entonces, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) ∈ A x A, si $((a_1, b_1); (a_2, b_2))$ ∈ R y $((a_2, b_2); (a_3, b_3))$ ∈ R, entonces, $((a_1, b_1); (a_3, b_3))$ ∈ R. En particular, si $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ y $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_3, b_3)$, entonces, $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_3, b_3)$.

R es un orden total porque se cumple que, para cada (a_1, b_1) y (a_2, b_2) ∈ A x A, se tiene que $((a_1, b_1); (a_2, b_2))$ ∈ R o $((a_2, b_2); (a_1, b_1))$ ∈ R. En particular, si $a_1 < a_2$, entonces, $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$; o, si $a_2 < a_1$, entonces, $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_1, b_1)$; o, si $a_1 = a_2$, la relación lexicográfica se reduce a la comparación de b_1 y b_2 y, dado que $\leq$ es un orden total en A, $b_1 \leq b_2$ o $b_2 \leq b_1$.

Por lo tanto, el orden lexicográfico es un orden total.

Ejercicio 23.

Sea S= {a, b, c} y sea A= P (S) el conjunto de partes de S. Mostrar que A está parcialmente ordenado por el orden ⊆ (inclusión de conjuntos). Hallar el diagrama de Hasse.

S= {a, b, c}.

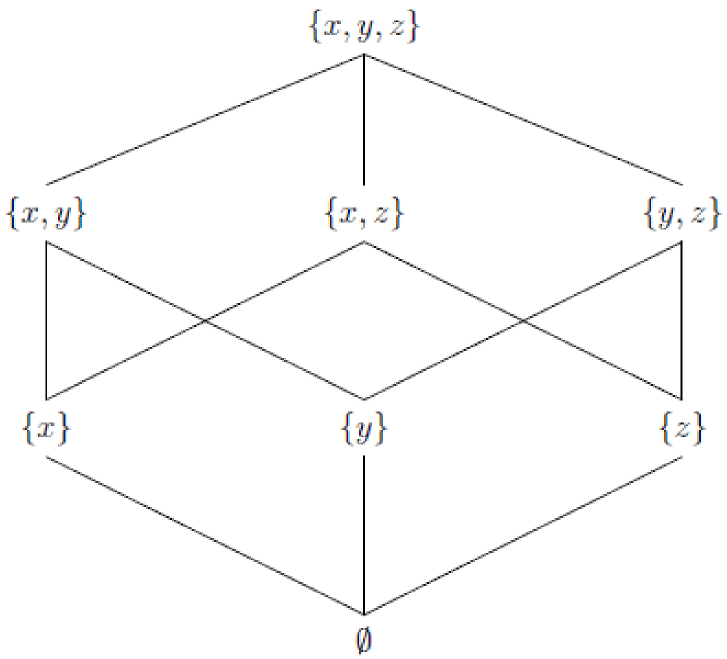
A= P (S)
A= {∅; {a}; {b}; {c}; {a, b}; {a, c}; {b, c}; {a, b, c}}.

R es reflexiva porque se cumple que, para todo X ∈ A, (X, X) ∈ R. En particular, X ⊆ X.

R es antisimétrica porque se cumple que, para cada X, Y ∈ A, si (X, Y) ∈ R y (Y, X) ∈ R, entonces, X= Y. En particular, si X ⊆ Y e Y ⊆ X, entonces, X= Y.

R es transitiva porque se cumple que, para cada X, Y, Z ∈ A, si (X, Y) ∈ R y (Y, Z) ∈ R, entonces, (X, Z) ∈ R. En particular, si X ⊆ Y e Y ⊆ Z, entonces, X ⊆ Z.

Por lo tanto, A está parcialmente ordenado por el orden ⊆.



Ejercicio 24.

Sea D_{12}= {1, 2, 3, 4, 6, 12} (el conjunto de los divisores de 12). Hallar el diagrama de Hasse de D_{12} con la relación "divide".

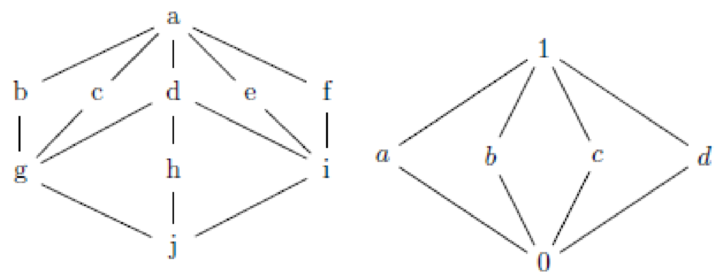
Las relaciones de división entre los elementos de D_{12} son:

- 1 divide a 2, 3, 4, 6, 12.
- 2 divide a 4, 6, 12.
- 3 divide a 6, 12.
- 4 divide a 12.
- 6 divide a 12
- 12 divide a 12.

```
    12
   /   \
 4       6
   \    / \
     2     3
        \/
        1
```

Ejercicio 25.

Describir las parejas ordenadas por las relaciones de cada uno de los siguientes diagramas de Hasse. Determinar, si existen, los elementos máximo, mínimo y cotas inferiores y superiores.



R_1= {(a, b); (a, c); (a, d); (a, e); (a, f); (b, g); (c, g); (d, g); (d, h); (d, i); (e, i); (f, i); (g, j); (h, j); (i, j); (a, g); (a, h); (a, i); (a, j); (b, j); (c, j); (d, j); (e, j); (f, j)}.
$Máximo_1$= a.
$Mínimo_1$= j.
$Cotas\ inferiores_1$: j es cota inferior de a, b, c, d, e, f, g, h, i; g es cota inferior de a, b, c, d; h es cota inferior de a, d; i es cota inferior de a, d, e, f; b, c, d, e, f son cotas inferiores de a.
$Cotas\ superiores_1$: a es cota superior de b, c, d, e, f, g, h, i, j; b es cota superior de g, j; c es cota superior de g, j; d es cota superior de g, h, i, j; e es cota superior de i, j; f es cota superior de i, j; g, h, i son cotas superiores de j.

R_2= {(1, a); (1, b); (1, c); (1, d); (a, 0); (b, 0); (c, 0); (d, 0); (1, 0)}.
$Máximo_2$= 1.
$Mínimo_2$= 0.
$Cotas\ inferiores_2$: 0 es cota inferior de 1, a, b, c, d; a, b, c, d son cotas inferiores de 1.
$Cotas\ superiores_2$: 1 es cota superior de a, b, c, d, 0; a, b, c, d son cotas superiores de 0.

Ejercicio 26.

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Sean a, b ∈ A, entonces, [a]= [b] si y sólo si aRb.

Si [a]= [b], entonces, a ∈ [a] (por relación de equivalencia - reflexividad) y a ∈ [b] (por [a]= [b]), lo que implica que aRb.

Si aRb, entonces, todos los elementos que estén relacionados con a también lo están con b y viceversa (por relación de equivalencia - transitividad), lo que implica que [a]= [b].

Por lo tanto, queda demostrado que [a]= [b] si y sólo si aRb.

Ejercicio 27.

Determinar si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es una partición para el conjunto A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

(a) *{{4, 5, 6}; {1, 8}; {2, 3, 7}}.*

Esta colección de conjuntos es una partición para el conjunto A, ya que se cumple que no hay conjuntos vacíos, la unión de todos los conjuntos es A y los conjuntos son disjuntos (no tienen elementos en común).

(b) *{{4, 5}; {1, 3, 4}; {6, 8}; {2, 7}}.*

Esta colección de conjuntos no es una partición para el conjunto A, ya que no se cumple que todos los conjuntos son disjuntos (el elemento 4 se encuentra en {4, 5} y en {1, 3, 4}).

(c) *{{1, 3, 4}; {2, 6}; {5, 8}}.*

Esta colección de conjuntos no es una partición para el conjunto A, ya que no se cumple que cada elemento de A esté incluído en algún conjunto (el elemento 7 no está incluído en ningún conjunto).

Ejercicio 28.

Considerando el conjunto A de los alumnos que cursan Mate 4, indicar cuáles de las siguientes son particiones de A.

(a) *P= {{alumnos que aprobaron CADP}; {alumnos que aprobaron OC}; {alumnos que no aprobaron ISO ni Redes}}.*

P no es una partición de A, ya que no se cumple que todos los subconjuntos son disjuntos.

(b) *P= {{alumnos que están cursando Programación Distribuida}; {alumnos que cursan Sistemas y Organización}; {alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial}}.*

P no es una partición de A, ya que no se cumple que todos los subconjuntos son disjuntos y que cada elemento de A esté incluído en algún conjunto.

Ejercicio 29.

Sean A= {1, 2, 3, 4} y R= {(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4)}. Mostrar que R es una relación de equivalencia y hallar las clases de equivalencia. ¿Cuál es la partición que induce R sobre A?

R es reflexiva porque se cumple que, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.

R es simétrica porque se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces, $(x, z) \in R$.

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Las clases de equivalencia son:

$[1]= \{x \in A \mid 1Rx\}= \{1, 2\}$.
$[2]= \{x \in A \mid 2Rx\}= \{1, 2\}$.
$[3]= \{x \in A \mid 3Rx\}= \{3, 4\}$.
$[4]= \{x \in A \mid 4Rx\}= \{3, 4\}$.

La partición que induce R sobre A es $\{\{1, 2\}; \{3, 4\}\}$, donde cada subconjunto es una clase de equivalencia.

Ejercicio 30.

Dado el conjunto A= {a, b, c, d, e} y una partición P= {{a, c}; {b}; {d, e}}. Escribir, por extensión, la relación de equivalencia sobre A inducida por P.

[a]= $\{x \in A \mid aRx\}$= {a, c}.
[b]= $\{x \in A \mid bRx\}$= {b}.
[c]= $\{x \in A \mid cRx\}$= {a, c}.
[d]= $\{x \in A \mid dRx\}$= {d, e}.
[d]= $\{x \in A \mid eRx\}$= {d, e}.

La relación de equivalencia sobre A inducida por P se expresa como el conjunto de pares ordenados donde xRy si y sólo si x e y pertenecen a la misma clase de equivalencia:

R= {(a, a); (a, c); (c, a); (c, c); (b, b); (d, d); (d, e); (e, d); (e, e)}.

Ejercicio 31.

Sean A= {1, 2, 3, 4, 5, 6} y R= {(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (4, 5); (5, 4); (5, 5); (6, 6)}. Mostrar que R es una relación de equivalencia y determinar las clases de equivalencia. ¿Qué partición de A induce R?

R es reflexiva porque se cumple que, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.

R es simétrica porque se cumple que, para cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$, entonces, $(y, x) \in R$.

R es transitiva porque se cumple que, para cada $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces, $(x, z) \in R$.

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Las clases de equivalencia son:

$[1]= \{x \in A \mid 1Rx\}= \{1, 2\}$.
$[2]= \{x \in A \mid 2Rx\}= \{1, 2\}$.
$[3]= \{x \in A \mid 3Rx\}= \{3\}$.
$[4]= \{x \in A \mid 4Rx\}= \{4, 5\}$.
$[5]= \{x \in A \mid 5Rx\}= \{4, 5\}$.
$[6]= \{x \in A \mid 6Rx\}= \{6\}$.

La partición de A que induce R es $\{\{1, 2\}; \{3\}; \{4, 5\}; \{6\}\}$, donde cada subconjunto es una clase de equivalencia.

Ejercicio 32.

Sea ~ una relación definida en $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}_0$ dada por: (a, b) ~ (c, d) si y sólo si ad= bc. Probar que es de equivalencia. Hallar la clase de equivalencia del elemento (1, 4). Mostrar que puede identificarse cada clase de equivalencia con un número racional. (Ésta es la forma de construir al conjunto de los racionales como conjunto cociente).

~ es reflexiva porque se cumple que, para todo (a, b) $\in \mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}_0$, ((a, b); (a, b)) $\in$ ~. En particular, ab= ba.

~ es simétrica porque se cumple que, para cada (a, b), (c, d) $\in \mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}_0$, si ((a, b); (c, d)) $\in$ ~, entonces, ((c, d); (a, b)) $\in$ ~. En particular, si ad= bc, entonces, cb= da.

~ es transitiva porque se cumple que, para cada (a, b), (c, d), (e, f) $\in \mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}_0$, si ((a, b); (c, d)) $\in$ ~ y ((c, d); (e, f)) $\in$ ~, entonces, ((a, b); (e, f)) $\in$ ~. En particular, si ad= bc y cf= de, entonces, adcf= bcde $\Leftrightarrow$ af= be.

Por lo tanto, queda demostrado que ~ es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

La clase de equivalencia del elemento (1, 4) es:

[(1, 4)]= {(c, d) $\in \mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}_0$ | (1, 4) ~ (c, d)}
[(1, 4)]= {(c, d) $\in \mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}_0$ | 1d= 4c}
[(1, 4)]= {(c, d) $\in \mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}_0$ | d= 4c}
[(1, 4)]= {(c, 4c) | c $\in \mathbb{Z}$}.

Se puede identificar cada clase de equivalencia [(a, b)] con el número racional $\frac{a}{b}$, ya que, si (a, b) ~ (c, d), entonces, ad= bc, lo que implica que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. De esta manera, cada clase de equivalencia [(a, b)] puede ser representada por un único número racional $\frac{a}{b}$, lo que permite construir al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ como el conjunto cociente ($\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}_0$) / ~.

Ejercicio 33.

Hallar las clases de equivalencia módulo 3 y 5 de los números:

(a) *387.*

$387 \equiv 0 \pmod 3$.

$[387]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod 3\}$
$[387]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3n + 0, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[387]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3n, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[387]_3 = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$.

$387 \equiv 2 \pmod 5$.

$[387]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 \pmod 5\}$
$[387]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n + 2, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[387]_5 = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$.

(b) *25.*

$25 \equiv 1 \pmod 3$.

$[25]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod 3\}$
$[25]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3n + 1, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[25]_3 = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$.

$25 \equiv 0 \pmod 5$.

$[25]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod 5\}$
$[25]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n + 0, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[25]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[25]_5 = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$.

(c) *649.*

$649 \equiv 1 \pmod 3$.

$[649]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod 3\}$
$[649]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3n + 1, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[649]_3 = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$.

$649 \equiv 4 \pmod 5$.

$[649]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 4 \pmod 5\}$

$[649]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n + 4, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[649]_5 = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}$.

Ejercicio 34.

Hallar las respectivas clases módulo 4 de:

(a) *13.*

$13 \equiv 1 \pmod 4$.

$[13]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod 4\}$
$[13]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n + 1, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[13]_4 = \{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$.

(b) *6.*

$6 \equiv 2 \pmod 4$.

$[6]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 \pmod 4\}$
$[6]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n + 2, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[6]_4 = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$.

(c) *11.*

$11 \equiv 3 \pmod 4$.

$[11]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \pmod 4\}$
$[11]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n + 3, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[11]_4 = \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$.

(d) *-49.*

$-49 \equiv 3 \pmod 4$.

$[-49]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \pmod 4\}$
$[-49]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n - 1, \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$
$[-49]_4 = \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$.

Ejercicio 35.

Averiguar si son congruentes módulo 3 entre sí los siguientes pares de números:

(a) *(2, 1024).*

2 - 1024= 3k
-1022= 3k
k= $\frac{-1022}{3}$
k= 340,$\hat{6}$ $\notin \mathbb{Z}$.

$3 \nmid (2-1024) \Leftrightarrow 2 \not\equiv_3 1024$.

Por lo tanto, 2 y 1024 no son congruentes.

(b) *(101, 512).*

101 - 512= 3k
-411= 3k
k= $\frac{-411}{3}$
k= -137 $\in \mathbb{Z}$.

$3 | (101-512) \Leftrightarrow 101 \equiv_3 512$.

Por lo tanto, 101 y 512 son congruentes.

(c) *(1501, 1348).*

1501 - 1348= 3k
153= 3k
k= $\frac{153}{3}$
k= 51 $\in \mathbb{Z}$.

$3 | (1501-1348) \Leftrightarrow 1501 \equiv_3 1348$.

Por lo tanto, 1501 y 1348 son congruentes.

Ejercicio 36.

Analizar para qué valores de m se hacen verdaderas las siguientes congruencias:

(a) *5*$\equiv_m$ *4.*

5 - 4= km, con k, m ∈ ℤ
1= km
m= $\frac{1}{k}$.

m= 1.

(b) *1*$\equiv_m$ *0.*

1 - 0= km, con k, m ∈ ℤ
1= km
m= $\frac{1}{k}$.

m= 1.

(c) *1197*$\equiv_m$ *286.*

1197 - 286= km, con k, m ∈ ℤ
911= km
m= $\frac{911}{k}$.

m_1= 911 (con k= 1 ∈ ℤ).
m_2= 1 (con k= 911 ∈ ℤ).

(d) *3*$\equiv_m$ *-3.*

3 - (-3)= km, con k, m ∈ ℤ
3 + 3= km
6= km
m= $\frac{6}{k}$.

m_1= 6 (con k= 1 ∈ ℤ).
m_2= 3 (con k= 2 ∈ ℤ).
m_3= 2 (con k= 3 ∈ ℤ).
m_4= 1 (con k= 6 ∈ ℤ).

Ejercicio 37.

Probar que la relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia.

$\equiv_m$ es reflexiva porque se cumple que, para todo x ∈ ℤ, (x, x) ∈ $\equiv_m$. En particular, m|(x-x), ya que x - x= km ⟺ 0= km (con k= 0 ∈ ℤ).

$\equiv_m$ es simétrica porque se cumple que, para cada x, y ∈ ℤ, si (x, y) ∈ $\equiv_m$, entonces, (y, x) ∈ $\equiv_m$. En particular, si m|(x-y), entonces, x - y= km ⟺ -(x - y)= -km ⟺ y - x= -km (con -k ∈ ℤ) y, por lo tanto, m|(y-x).

$\equiv_m$ es transitiva porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ ℤ, si (x, y) ∈ $\equiv_m$ y (y, z) ∈ $\equiv_m$, entonces, (x, z) ∈ $\equiv_m$. En particular, si m|(x-y) y m|(y-z), entonces, x - y= k_1m e y - z= k_2m ⟹ x - y + y - z= k_1m + k_2m ⟺ x - z= $(k_1 + k_2)$ m ⟺ x - z= km (con k= $(k_1 + k_2)$ ∈ ℤ) y, por lo tanto, m|(x-z).

Por lo tanto, queda demostrado que $\equiv_m$ es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejercicio 38.

Probar que todo número entero es congruente, módulo n, con el resto de su división por n.

a= kn + r, con k, n, r $\in \mathbb{Z}$ y $0 \leq$ r $< |n|$
a - r= kn.

m|(a-r) $\Leftrightarrow$ a$\equiv_n$ r.

Por lo tanto, queda demostrado que todo número entero es congruente, módulo n, con el resto de su división por n.

Ejercicio 39.

Probar que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.

Por un lado, se supone que x e y son dos números enteros congruentes módulo m:

x= k_1m + r_1, con k_1, m, $r_1 \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r_1 < |m|$.
y= k_2m + r_2, con k_2, m, $r_2 \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r_2 < |m|$.

m|(x-y) $\Leftrightarrow$ x$\equiv_m$ y.

x - y= km
(k_1m + r_1) - (k_2m + r_2)= km
k_1m + r_1 - k_2m - r_2= km
(k_1 - k_2) m + (r_1 - r_2)= km
(k_1 - k_2) m + 0= km
(k_1 - k_2) m= km, con k$\equiv$ (k_1 - k_2) $\in \mathbb{Z}$.

Entonces, si dos números enteros son congruentes módulo m, entonces, los respectivos restos de su división por m son iguales.

Por otro lado, se supone que r_1= r_2= r:

x= k_1m + r, con k_1, m, r $\in \mathbb{Z}$ y $0 \leq$ r $< |m|$.
y= k_2m + r, con k_2, m, r $\in \mathbb{Z}$ y $0 \leq$ r $< |m|$.

x - y= (k_1m + r) - (k_2m + r)
x - y= k_1m + r - k_2m - r
x - y= (k_1 - k_2) m
x - y= km, con k$\equiv$ (k_1 - k_2) $\in \mathbb{Z}$.

m|(x-y) $\Leftrightarrow$ x$\equiv_m$ y.

Entonces, si los respectivos restos de la división de dos números enteros por m son iguales, entonces, estos dos números enteros son congruentes módulo m.

Por lo tanto, queda demostrado que dos números enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.

Ejercicio 40.

Probar las siguientes propiedades para todo a, b, c $\in \mathbb{Z}$:

(a) $a \equiv_n a$.

a - a= kn, con k, n $\in \mathbb{Z}$
0= kn, con k= 0 $\in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, queda demostrado que a$\equiv_n$ a.

(b) $a \equiv_n b \Longrightarrow b \equiv_n a$.

a - b= kn, con k, n $\in \mathbb{Z}$
-(a - b)= -kn
b - a= -kn, con -k $\in \mathbb{Z}$.

n|(b-a) $\Leftrightarrow$ b$\equiv_n$ a.

Por lo tanto, queda demostrado que, si a$\equiv_n$ b, entonces, b$\equiv_n$ a.

(c) $a \equiv_n b$ *y* $b \equiv_n c \Longrightarrow a \equiv_n c$.

a - b= k_1n, con k_1, n $\in \mathbb{Z}$.
b - c= k_2n, con k_2, n $\in \mathbb{Z}$.

a - b + b - c= k_1n + k_2n
a - c= $(k_1 + k_2)$ n
a - c= kn, con k$\equiv$ $(k_1 + k_2)$ $\in \mathbb{Z}$.

n|(a-c) $\Leftrightarrow$ a$\equiv_n$ c.

Por lo tanto, queda demostrado que, si a$\equiv_n$ b y b$\equiv_n$c, entonces, a$\equiv_n$ c.

(d) $a \equiv_n b \Leftrightarrow a + c \equiv_n b + c$.

Si a$\equiv_n$ b, entonces, a - b= kn $\Leftrightarrow$ a - b + c - c= kn $\Leftrightarrow$ (a - c) - (b - c)= kn. Por lo tanto, a + c$\equiv_n$ b + c.

Si a + c $\equiv_n$ b + c, entonces, (a + c) - (b + c)= kn $\Leftrightarrow$ a + c - b - c= kn $\Leftrightarrow$ a - b= kn. Por lo tanto, a$\equiv_n$ b.

Por lo tanto, queda demostrado que a$\equiv_n$ b $\Leftrightarrow$ a + c$\equiv_n$ b + c.

(e) *$a \equiv_n b \Longrightarrow ac \equiv_n bc$.*

a - b= kn, con k, n $\in \mathbb{Z}$
(a - b) c= knc
ac - bc= ln, con l$\equiv$ kc $\in \mathbb{Z}$.

n|(ac-bc) $\Leftrightarrow$ ac$\equiv_n$ bc.

Por lo tanto, queda demostrado que, si a$\equiv_n$ b, entonces, ac$\equiv_n$ bc.

(f) *$a \equiv_n b \Longrightarrow (a, n)= (b, n)$.*

Si a$\equiv_n$ b, entonces:

a - b= kn, con k, n $\in \mathbb{Z}$.
a= b + kn.
b= a - kn.

Por un lado, se supone d= (a, n) y, por definición, esto significa que d es el mayor entero que divide tanto a como n:

d|a y d|n.

Dado a, se tiene:

d | (b + kn).

Dado que d|a y d|n, se tiene que:

d|b.

Por otro lado, se supone e= (b, n) y, por definición, esto significa que e es el mayor entero que divide tanto b como n:

e|b y e|n.

Dado b, se tiene:

e | (a - kn).

Dado que e|b y e|n, se tiene que:

e|a.

En conclusión, se tiene que d $\geq$ e (dado que e divide a a) y e $\geq$ d (dado que d divide a b), por lo que d= e $\Leftrightarrow$ (a, n)= (b, n).

Por lo tanto, queda demostrado que, si a$\equiv_n$ b, entonces, (a, n)= (b, n).

(g) $a \equiv_n 0 \Leftrightarrow n|a$.

Si a$\equiv_n$ 0, entonces, a - 0= kn, con k, n $\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ a= kn. Por lo tanto, n|a.

Si n|a, entonces, a= kn, , con k, n $\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ a - 0= kn. Por lo tanto, a$\equiv_n$ 0.

Por lo tanto, queda demostrado que a$\equiv_n$ 0 si y sólo si n|a.

Trabajo Práctico N° 5.1:
Estructuras Algebraicas - Teoría de Grupos.

Ejercicio 1.

Determinar cuáles de las siguientes operaciones están bien definidas sobre el conjunto A dado. Analizar las propiedades en los casos afirmativos:

(a) $A= \mathbb{N}$, $a*b= 3ab$.

Esta operación está bien definida sobre el conjunto A dado, ya que, para cada a, b ∈ A, 3ab ∈ A.

Conmutatividad: La operación * en A es conmutativa porque se cumple que, para cada a, b ∈ A, a*b= b*a. En particular, 3ab= 3ba.

Asociatividad: La operación * en A es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ A, (a*b)*c= a*(b*c). En particular, 3 (3ab) c= 3a (3bc) ⟺ 9abc= 9abc.

Elemento neutro: No existe un elemento e ∈ A tal que, para todo a ∈ A, se cumple que a*e= e*a= a. En particular, 3ae= 3ea= a ⟺ 3e= $\frac{a}{a}$ ⟺ 3e= 1 ⟺ e= $\frac{1}{3}$ ∉ A.

Inversos: Un elemento a ∈ A tiene inverso si existe a´ ∈ A tal que a*a´= a´*a= e. En particular, no existe elemento neutro, por lo que no existen inversos.

(b) $A= \mathbb{Z}$, $a*b= \frac{a+b}{3+ab}$.

Esta operación no está bien definida sobre el conjunto A dado, ya que no se cumple que, para cada a, b ∈ A, $\frac{a+b}{3+ab}$ ∉ A.

(c) $A= \mathbb{R}$, $x*y= x + y - xy$.

Esta operación está bien definida sobre el conjunto A dado, ya que, para cada x, y ∈ A, x + y - xy ∈ A.

Conmutatividad: La operación * en A es conmutativa porque se cumple que, para cada x, y ∈ A, x*y= y*x. En particular, x + y - xy= y + x - yx.

Asociatividad: La operación * en A es asociativa porque se cumple que, para cada x, y, z ∈ A, (x*y)*z= x*(y*z). En particular, (x + y - xy) + z - (x + y - xy) z= x + (y + z - yz) - x (y + z - yz) ⟺ x + y - xy + z - xz - yz + xyz= x + y + z - yz - xy - xz + xyz.

Elemento neutro: Existe un elemento e ∈ A tal que, para todo x ∈ A, se cumple que x*e= e*x= x. En particular, x + e - xe= e + x - ex= x ⟺ e - xe= x - x ⟺ e (1 - x)= 0 ⟺ e= $\frac{0}{1-x}$ ⟺ e= 0 ∈ A.

Inversos: Un elemento x ∈ A tiene inverso si existe x´ ∈ A tal que x*x´= x´*x= e. En particular, x + x´ - xx´= x´ + x - x´x= 0 ⟺ x´ - xx´= -x ⟺ x´ (1 - x)= -x ⟺ x´= $\frac{-x}{1-x}$, por lo que existe inverso para todo x ∈ A \ {1}, ya que x´= $\frac{-x}{1-x}$ ∈ A.

(d) *A= {0, 1, 2, 3},*

*	***0***	***1***	***2***	***3***
0	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*2*	*3*
2	*1*	*2*	*0*	*2*
3	*2*	*3*	*1*	*1*

Esta operación está bien definida sobre el conjunto A dado, ya que, para cada a, b ∈ A, a*b ∈ A.

Conmutatividad: La operación * en A no es conmutativa porque no se cumple que, para cada a, b ∈ A, a*b= b*a. En particular, 0*2≠ 2*0 ⟺ 0≠ 1.

Asociatividad: La operación * en A no es asociativa porque no se cumple que, para cada a, b, c ∈ A, (a*b)*c= a*(b*c). En particular, para a= 2, b= 3, c= 2, (2*3)*2≠ 2*(3*2) ⟺ 2*2≠ 2*1 ⟺ 0≠ 2.

Elemento neutro: Existe un elemento e ∈ A tal que, para todo a ∈ A, se cumple que a*e= e*a= a. En particular, 1 es el elemento neutro ∈ A, ya que 0*1= 1*0= 0, 1*1= 1*1= 1, 2*1= 1*2= 2, 3*1= 1*3= 3.

Inversos: Un elemento a ∈ A tiene inverso si existe a´ ∈ A tal que a*a´= a´*a= e. En particular, esto sólo se cumple para 1 (cuyo inverso es 1 ∈ A) y 3 (cuyo inverso es 3 ∈ A), ya que 1*1=1*1= 1 y 3*3= 3*3= 1, por lo que no existe inverso para todo a ∈ A.

Ejercicio 2.

Demostrar que:

(a) *Dado M= {m ∈ ℕ: m > 0}, (M, +) es un semigrupo pero no es un monoide.*

Cerradura: Para cada a, b ∈ M, a + b ∈ M.

Asociatividad La operación + en M es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ M, (a + b) + c= a + (b + c) (por asociatividad en ℕ).

Elemento neutro: No existe un elemento e ∈ M tal que, para todo m ∈ M, se cumple que m + e= e + m= m. En particular, 0 es el elemento neutro ∈ ℕ pero ∉ M.

Por lo tanto, queda demostrado que (M, +) es un semigrupo pero no es un monoide.

(b) *El conjunto de un solo elemento M= {e} con la operación definida por e*e= e es un monoide.*

Cerradura: Para cada a, b ∈ M, a*b ∈ M. En particular, considerando que e es el único elemento posible, e*e= e ∈ M.

Asociatividad: La operación * en M es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ M, (a*b)*c= a*(b*c). En particular, considerando que e es el único elemento posible, (e*e)*e= e*(e*e) ⇔ e*e= e*e ⇔ e= e.

Elemento neutro: Existe un elemento e ∈ M tal que, para todo a ∈ M, se cumple que a*e= e*a= a. En particular, considerando que e es el único elemento posible, e es el elemento neutro ∈ M, ya que e*e= e*e= e.

Por lo tanto, queda demostrado que (M, *) es un monoide.

(c) *Dado un conjunto no vacío A, el conjunto de las partes de A, P (A), con la operación intersección de conjuntos es un monoide conmutativo.*

Cerradura: Para cada X, Y ∈ P (A), X ∩ Y ∈ P (A).

Asociatividad: La operación ∩ en P (A) es asociativa porque se cumple que, para cada X, Y, Z ∈ P (A), (X ∩ Y) ∩ Z= X ∩ (Y ∩ Z) (por asociatividad de ∩ en conjuntos).

Elemento neutro: Existe un elemento E ∈ P (A) tal que, para todo X ∈ P (A), se cumple que X ∩ E= E ∩ X= X. En particular, A es el elemento neutro ∈ P (A), ya que X ∩ A= A ∩ X= X.

<u>Conmutatividad:</u> La operación ∩ en P (A) es conmutativa porque se cumple que, para cada X, Y ∈ P (A), X ∩ Y= Y ∩ X (por conmutatividad de ∩ en conjuntos).

Por lo tanto, queda demostrado que (M, *) es un monoide conmutativo.

Ejercicio 3.

Demostrar que, si, para una operación asociativa $*$ en A, existe un elemento neutro e y un elemento del conjunto, a, tiene inverso, entonces, éste es único.

Se supone que b y c son dos inversos de a en A, lo que significa que:

a*b= b*a= e.
a*c= c*a= e.

Se quiere probar que b= c.

Se considera el siguiente producto:

b= b*e.

Sustituyendo e por a*c, se tiene:

b= b*(a*c).

Usando la propiedad asociativa, se tiene:

b= (b*a)*c.

Usando que b es un inverso de a, se tiene:

b= e*c.

Usando la propiedad del neutro, se tiene:

b= c.

Por lo tanto, queda demostrado que, cuando la operación es asociativa y existe un elemento neutro, el inverso de a es único.

Ejercicio 4.

Sea R una relación de congruencia sobre un semigrupo (S, ∗), demostrar que (S/R, ⊗) (el conjunto cociente y la operación inducida por ∗ sobre las clases de equivalencia) es un semigrupo llamado Semigrupo Cociente.

Dado que R es una relación de congruencia sobre un semigrupo (S, *), se tiene que:

- R es una relación de equivalencia, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva; y
- Si aRb y cRd, entonces, (a*c)R(b*d).

Se define el conjunto cociente S/R como el conjunto de clases de equivalencia de S bajo la relación R como:

S/R= {[a]: a ∈ S}, donde [a]= {x ∈ S: xRa} es la clase de equivalencia de a bajo R.

Para cada [a], [b] ∈ S/R, se define la operación ⊗ en S/R como:

[a] ⊗ [b]= [a*b].

Esto es posible porque R es una relación de congruencia y, por lo tanto, la clase de equivalencia de a*b depende sólo de las clases de equivalencia de a y b, independientemente de los representantes que se elijan en cada clase.

<u>Cerradura:</u> Para que la operación ⊗ sea cerrada en S/R, se necesita que el resultado de [a] ⊗ [b] sólo dependa de las clases de equivalencia de a y b, y no de los representantes específicos seleccionados de estas clases. Es decir, si se toman otros elementos c ∈ [a] y d ∈ [b] tales que cRa y dRb, se quiere que [a*b]= [c*d]. Dado que R es una relación de congruencia, si aRc y bRd, entonces, (a*b)R(c*d), lo que implica que [a*b]= [c*d].

<u>Asociatividad:</u> Como (S, *) es un semigrupo, se sabe que la operación * en S es asociativa, es decir, se cumple que, para cada a, b, c ∈ S, (a*b)*c= a*(b*c). La operación ⊗ en S/R es asociativa porque se cumple que, para cada [a], [b], [c] ∈ S/R, ([a] ⊗ [b]) ⊗ [c]= [a] ⊗ ([b] ⊗ [c]) ⟺ [a*b] ⊗ [c]= [a] ⊗ [b*c] ⟺ [(a*b)*c]= [a*(b*c)] (por ser (S, *) un semigrupo).

Por lo tanto, queda demostrado que (S/R, ⊗) es un semigrupo (Semigrupo Cociente).

Ejercicio 5.

Analizar si las siguientes son estructuras de grupo:

(a) *(ℤ, +), los enteros con la suma usual.*

Cerradura: Para cada a, b ∈ ℤ, a + b ∈ ℤ.

Asociatividad: La operación + en ℤ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ ℤ, (a + b) + c= a + (b + c).

Elemento neutro: Existe un elemento e ∈ ℤ tal que, para todo a ∈ ℤ, se cumple que a + e= e + a= a. En particular, 0 es el elemento neutro ∈ ℤ, ya que a + 0= 0 + a= a ⟺ a= a= a.

Inversos: Un elemento a ∈ ℤ tiene inverso si existe a´ ∈ ℤ tal que a + a´= a´ + a= e. En particular, a + (-a)= (-a) + a= 0 ⟺ a - a= -a + a= 0 ⟺ 0= 0= 0, por lo que existe inverso para todo a ∈ ℤ, ya que -a ∈ ℤ.

Por lo tanto, (ℤ, +) es un grupo, ya que satisface cerradura, asociatividad, elemento neutro e inversos.

(b) *(ℤ, *), los enteros con el producto usual.*

Cerradura: Para cada a, b ∈ ℤ, a*b ∈ ℤ.

Asociatividad: La operación * en ℤ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ ℤ, (a*b)*c= a*(b*c).

Elemento neutro: Existe un elemento e ∈ ℤ tal que, para todo a ∈ ℤ, se cumple que a*e= e*a= a. En particular, 1 es el elemento neutro ∈ ℤ, ya que a*1= 1*a= a ⟺ a= a= a.

Inversos: Un elemento a ∈ ℤ tiene inverso si existe a´ ∈ ℤ tal que a*a´= a´*a= e. En particular, esto sólo se cumple para 1 (cuyo inverso es 1 ∈ ℤ) y -1 (cuyo inverso es -1 ∈ ℤ), ya que 1*1=1*1= 1 y (-1) (-1)= (-1) (-1)= 1, por lo que no existe inverso para todo a ∈ ℤ.

Por lo tanto, (ℤ, +) no es un grupo, ya que satisface cerradura, asociatividad y elemento neutro, pero no satisface inversos.

(c) *($\mathbb{R}^2$, +), los pares ordenados de reales con la suma usual.*

Cerradura: Para cada (a_1, b_1), (a_2, b_2) ∈ $\mathbb{R}^2$, (a_1, b_1) + (a_2, b_2)= (a_1+a_2, b_1+b_2) ∈ $\mathbb{R}^2$.

Asociatividad: La operación + en $\mathbb{R}^2$ es asociativa porque se cumple que, para cada (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) ∈ $\mathbb{R}^2$, [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3)= (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3,

b_3)]. En particular, (a_1+a_2, b_1+b_2) + (a_3, b_3)= (a_1, b_1) + (a_2+a_3, b_2+b_3) $\Leftrightarrow$ (a_1+a_2+a_3, b_1+b_2+b_3)= (a_1+a_2+a_3, b_1+b_2+b_3).

Elemento neutro: Existe un elemento (e_1, e_2) $\in \mathbb{R}^2$ tal que, para todo (a, b) $\in \mathbb{R}^2$, se cumple que (a, b) + (e_1, e_2)= (e_1, e_2) + (a, b)= (a, b). En particular, (0, 0) es el elemento neutro $\in \mathbb{R}^2$, ya que (a, b) + (0, 0)= (0, 0) + (a, b)= (a, b) $\Leftrightarrow$ (a+0, b+0)= (0+a, 0+b)= (a, b) $\Leftrightarrow$ (a, b)= (a, b)= (a, b).

Inversos: Un elemento (a, b) $\in \mathbb{R}^2$ tiene inverso si existe (a´, b´) $\in \mathbb{R}^2$ tal que (a, b) + (a´, b´)= (a´, b´) + (a, b)= (e_1, e_2). En particular, (a, b) + (-a, -b)= (-a, -b) + (a, b)= (0, 0) $\Leftrightarrow$ (a-b, b-b)= (-a+a, -b+b)= (0, 0) $\Leftrightarrow$ (0, 0)= (0, 0)= (0, 0), por lo que existe inverso para todo (a, b) $\in \mathbb{R}^2$, ya que (-a, -b) $\in \mathbb{R}^2$.

Por lo tanto, ($\mathbb{R}^2$, +) es un grupo, ya que satisface cerradura, asociatividad, elemento neutro e inversos.

(d) *(M_{2x2}, +), las matrices de 2x2 con la suma usual de matrices.*

Cerradura: Para cada A, B $\in M_{2x2}$, A + B $\in M_{2x2}$. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\in M_{2x2}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ $\in M_{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij} $\in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, A + B= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$, por lo que A + B $\in M_{2x2}$.

Asociatividad: La operación + en M_{2x2} es asociativa porque se cumple que, para cada A, B, C $\in M_{2x2}$, (A + B) + C= A + (B + C). En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ $\in M_{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $\in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
(A + B) + C= A + (B + C) $\Leftrightarrow$
$(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}) \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{pmatrix}$.

Elemento neutro: Existe un elemento E $\in M_{2x2}$ tal que, para todo A $\in M_{2x2}$, se cumple que A + E= E + A= A. En particular, $0_{M_{2x2}}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro $\in M_{2x2}$, ya que, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\in M_{2x2}$, con cualesquiera a_{ij} $\in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
A + $0_{M_{2x2}}$= $0_{M_{2x2}}$ + A= A $\Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

<u>Inversos:</u> Un elemento A $\in M_{2x2}$ tiene inverso si existe A´ $\in M_{2x2}$ tal que A + A´= A´ + A= E. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, A + (-A)= (-A) + A= $0_{M_{2x2}} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{11} & -a_{12} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{21} & -a_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que existe inverso para todo A $\in M_{2x2}$, ya que -A $\in M_{2x2}$.

Por lo tanto, ($\mathbb{R}^2$, +) es un grupo, ya que satisface cerradura, asociatividad, elemento neutro e inversos.

(e) *(P (A), ∪), A cualquier conjunto y P (A) indica el conjunto de partes de A.*

<u>Cerradura:</u> Para cada X, Y ∈ P (A), X ∪ Y ∈ P (A).

<u>Asociatividad:</u> La operación ∪ en P (A) es asociativa porque se cumple que, para cada X, Y, Z ∈ P (A), (X ∪ Y) ∪ Z= X ∪ (Y ∪ Z) (por asociatividad de ∪ en conjuntos).

<u>Elemento neutro:</u> Existe un elemento E ∈ P (A) tal que, para todo X ∈ P (A), se cumple que X ∪ E= E ∪ X= X. En particular, ∅ es el elemento neutro ∈ P (A), ya que X ∪ ∅= ∅ ∪ X= X ⇔ X= X= X.

<u>Inversos:</u> Un elemento X ∈ P (A) tiene inverso si existe X´ ∈ P (A) tal que X ∪ X´= X´ ∪ X= E. En particular, esto sólo se cumple para ∅ (cuyo inverso es ∅ ∈ P (A)), ya que ∅ ∪ ∅= ∅ ∪ ∅= ∅ ⇔ ∅= ∅= ∅, por lo que no existe inverso para todo X ∈ P (A).

Por lo tanto, (P (A), ∪) no es un grupo, ya que satisface cerradura, asociatividad y elemento neutro, pero no satisface inversos.

Ejercicio 6.

Probar que, en todo grupo, el único elemento idempotente es el neutro.

Dado un grupo G con una operación *, se dice que un elemento e ∈ G es idempotente si cumple que:

e*e= e.

Se quiere probar que el único elemento idempotente es el elemento neutro.

Sea G un grupo con elemento neutro e, es decir, e ∈ G tal que, para todo a ∈ G, se cumple que a*e= e*a= a.

Se supone que a ∈ G es un elemento idempotente, es decir, cumple que:

a*a= a.

Se quiere probar que a= e, el elemento neutro.

Pre-multiplicando a ambos lados de la ecuación anterior por el inverso de a (en un grupo, cada elemento tiene inverso), se tiene:

a´*(a*a)= a´*a.

Usando la propiedad asociativa (en un grupo, la operación es asociativa), se tiene:

(a´*a)*a= a´*a.

Usando la propiedad de inversos (en un grupo, cada elemento tiene inverso), se tiene:

e*a= e.

Usando la propiedad del elemento neutro (en un grupo, existe elemento neutro para la operación), se tiene:

a= e.

Por lo tanto, queda demostrado que, en todo grupo, el único elemento idempotente es el neutro.

Ejercicio 7.

Mostrar que, en todo grupo, vale la propiedad cancelativa.

Dado un grupo G con una operación *, la propiedad cancelativa establece que:

- Por la izquierda: Si a*b= a*c, entonces, b= c, para cada a, b, c ∈ G.
- Por la derecha: Si b*a= c*a, entonces, b= c, para cada a, b, c ∈ G.

<u>Por la izquierda:</u>

Se supone que, en el grupo G, se cumple que:

a*b= a*c, para algunos a, b, c ∈ G.

Se quiere probar que b= c.

Pre-multiplicando a ambos lados de la ecuación anterior por el inverso de a (en un grupo, cada elemento tiene inverso), se tiene:

a´*(a*b)= a´*(a*c).

Usando la propiedad asociativa (en un grupo, la operación es asociativa), se tiene:

(a´*a)*b= (a´*a)*c.

Usando la propiedad de inversos (en un grupo, cada elemento tiene inverso), se tiene:

e*b= e*c.

Usando la propiedad del elemento neutro (en un grupo, existe elemento neutro para la operación), se tiene:

b= c.

Por lo tanto, queda demostrado que, si a*b= a*c, entonces, b= c, para cada a, b, c ∈ G.

<u>Por la derecha:</u>

Se supone que, en el grupo G, se cumple que:

b*a= c*a, para algunos a, b, c ∈ G.

Se quiere probar que b= c.

Post-multiplicando a ambos lados de la ecuación anterior por el inverso de a (en un grupo, cada elemento tiene su inverso), se tiene:

(b*a)*a´= (c*a)*a´.

Usando la propiedad asociativa (en un grupo, la operación es asociativa), se tiene:

b*(a*a´)= c*(a*a´).

Usando la propiedad de inversos (en un grupo, cada elemento tiene inverso), se tiene:

b*e= c*e.

Usando la propiedad del elemento neutro (en un grupo, existe elemento neutro para la operación), se tiene:

b= c.

Por lo tanto, queda demostrado que, si b*a= c*a, entonces, b= c, para cada a, b, c $\in$ G.

Por lo tanto, queda demostrado que, en todo grupo, vale la propiedad cancelativa.

Ejercicio 8.

*Sea (G, *) un grupo tal que todo elemento es su propio inverso, probar que G es abeliano.*

Dado que, en (G, *), todo elemento es su propio inverso, para todo a ∈ G, se cumple que:

a*a= e.

Se quiere probar que la operación * en G es conmutativa, es decir, que se cumple que, para cada a, b ∈ G, a*b= b*a.

Se considera el siguiente producto:

(a*b)*(a*b).

Usando que todo elemento en (G, *) es su propio inverso, se tiene:

(a*b)*(a*b)= e.

Usando la propiedad asociativa (en un grupo, la operación es asociativa), se tiene:

a*(b*a)*b= e.

Pre-multiplicando por el inverso de a (a´= a) y post-multiplicando por el inverso de b (b´= b) a ambos lados de la ecuación (en un grupo, cada elemento tiene su inverso), se tiene:

a*a*(b*a)*b*b= a*e*b.

Usando la propiedad de inversos (en un grupo, cada elemento tiene inverso), se tiene:

e*(b*a)*e= a*e*b.

Usando la propiedad del elemento neutro (en un grupo, existe elemento neutro para la operación), se tiene:

b*a= a*b.

Por lo tanto, queda demostrado que, dado (G, *) un grupo tal que todo elemento es su propio inverso, G es abeliano.

Ejercicio 9.

*Dado un grupo (G, *), probar que G es abeliano si y sólo si, para cualquier x, y en G, vale que* $(x * y)^2= x^2 * y^2$.

Dado un grupo (G, *), si G es abeliano, entonces, para cada x, y ∈ G, x*y= y*x, lo que implica que $(x * y)^2$= (x*y)*(x*y)= x*(y*x)*y (por asociatividad)= x*(x*y)*y (por conmutatividad)= (x*x)*(y*y) (por asociatividad)= $x^2 * y^2$. Por lo tanto, dado un grupo (G, *), si G es abeliano, entonces, para cada x, y ∈ G, $(x * y)^2= x^2 * y^2$.

Dado un grupo (G, *), si, para cada x, y ∈ G, $(x * y)^2= x^2 * y^2$, entonces, (x*y)*(x*y)= $x^2 * y^2$, lo que implica que x´*(x*y)*(x*y)*y´= x´*(x*x)*(y*y)*y´ (pre-multiplicando por x´ y post-multiplicando por y´) ⟺ (x´*x)*(y*x)*(y*y´)= (x´*x)*(x*y)*(y*y´) (por asociatividad) ⟺ e*(y*x)*e= e*(x*y)*e (por inversos) ⟺ y*x= x*y (por elemento neutro). Por lo tanto, dado un grupo (G, *), si, para cada x, y ∈ G, $(x * y)^2= x^2 * y^2$, entonces, G es abeliano.

Por lo tanto, queda demostrado que, dado un grupo (G, *), G es abeliano si y sólo si, para cada x, y ∈ G, $(x * y)^2= x^2 * y^2$.

Juan Menduiña

Ejercicio 10.

*Dados los grupos (G, *) y (F, ⊓), se define, en el conjunto GxF, la ley ∘ tal que (x, y)∘(z, t)= (x*z, y⊓t). Probar que (GxF, ∘) es Grupo (Grupo Producto).*

Cerradura: Para cada (x, y), (z, t) ∈ GxF, (x*z, y⊓t) ∈ GxF, ya que x*z ∈ G y y⊓t ∈ F (por (G, *) y (F, ⊓) grupos).

Asociatividad: La operación ∘ en GxF es asociativa porque se cumple que, para cada (x, y), (z, t), (u, v) ∈ GxF, ((x, y)∘(z, t))∘(u, v)= (x, y)∘((z, t)∘(u, v)). En particular, (x*z, y⊓t)∘(u, v)= (x, y)∘(z*u, t⊓v) ⟺ ((x*z)*u, (y⊓t)⊓v)= (x*(z*u), y⊓(t⊓v)) (por * y ⊓ asociativas en G y F, respectivamente).

Elemento neutro: Existe un elemento (e_1, e_2) ∈ GxF tal que, para todo (x, y) ∈ GxF, se cumple que (x, y)∘(e_1, e_2)= (e_1, e_2)∘(x, y)= (x, y). En particular, (e_G, e_F) es el elemento neutro ∈ GxF (e_G y e_F elementos neutros de G y F, respectivamente), ya que (x*e_G, y⊓ e_F)= (e_G*x, e_F ⊓y)= (x, y) ⟺ (x, y)= (x, y)= (x, y).

Inversos: Un elemento (x, y) ∈ GxF tiene inverso si existe (x´, y´) ∈ GxF tal que (x, y)∘(x´, y´)= (x´, y´)∘(x, y)= (e_1, e_2). En particular, dado que existe inverso x´ ∈ G (y´ ∈ F) para cada x ∈ G (y ∈ F) (por (G, *) y (F, ⊓) grupos), (x, y)∘(x´, y´)= (x´, y´)∘(x, y)= (e_G, e_F) ⟺ (x*x´, y⊓y´)= (x´*x, y´⊓y)= (e_G, e_F) ⟺ (e_G, e_F)= (e_G, e_F)= (e_G, e_F), por lo que existe inverso para todo (x, y) ∈ GxF, ya que (x´, y´) ∈ GxF.

Por lo tanto, queda demostrado que (GxF, ∘) es un grupo (Grupo Producto), ya que satisface cerradura, asociatividad, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 11.

Estudiar si son subgrupos de los grupos indicados:

(a) *Los enteros pares de (ℤ, +).*

$\mathbb{Z}_2$= {x ∈ ℤ: x= 2k, k ∈ ℤ}.
$\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}$.

Cerradura: Para cada a, b ∈ $\mathbb{Z}_2$, a + b ∈ $\mathbb{Z}_2$. En particular, para a= 2m y b= 2n, con cualesquiera m, n ∈ ℤ, a + b= 2m + 2n= 2 (m + n), con m + n ∈ ℤ, por lo que a + b ∈ $\mathbb{Z}_2$.

Asociatividad: La operación + en $\mathbb{Z}_2$ es asociativa porque se hereda del grupo original (ℤ, +).

Elemento neutro: El elemento neutro de + en ℤ también existe en $\mathbb{Z}_2$. En particular, 0 ∈ $\mathbb{Z}_2$, ya que 0= 2 * 0, con k= 0 ∈ ℤ.

Inversos: Un elemento a ∈ $\mathbb{Z}_2$ tiene inverso si existe a´ ∈ $\mathbb{Z}_2$ tal que a + a´= a´ + a= e. En particular, para a= 2k ∈ $\mathbb{Z}_2$, con cualquier k ∈ ℤ, su inverso en ℤ es a´= -a= -2k= 2 (-k), con -k ∈ ℤ, por lo que existe inverso para todo a ∈ $\mathbb{Z}_2$, ya que a´ ∈ $\mathbb{Z}_2$.

Por lo tanto, ($\mathbb{Z}_2$, +) es un subgrupo del grupo (ℤ, +), ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

(b) *Las matrices simétricas de 2x2.*

S_{2x2}= {$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$: a_{ij} ∈ ℝ, i, j= 1, 2}.
$S_{2x2} \subset M_{2x2}$.

Cerradura: Para cada A, B ∈ S_{2x2}, A + B ∈ S_{2x2}. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ ∈ S_{2x2}, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij} ∈ ℝ, i, j= 1, 2, A + B= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$, por lo que A + B ∈ S_{2x2}.

Asociatividad: La operación + en S_{2x2} es asociativa porque se hereda del grupo original (M_{2x2}, +).

Elemento neutro: El elemento neutro de + en M_{2x2} también existe en S_{2x2}. En particular, $0_{M_{2x2}}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∈ S_{2x2}, ya que a_{12}= a_{21}= 0.

Inversos: Un elemento A ∈ S_{2x2} tiene inverso si existe A´ ∈ S_{2x2} tal que A + A´= A´ + A= E. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ∈ S_{2x2}, con cualesquiera a_{ij} ∈ ℝ, i, j= 1, 2, su inverso en M_{2x2} es A´= -A= $\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{pmatrix}$, por lo que existe inverso para todo A $\in$ S_{2x2}, ya que A´ $\in S_{2x2}$.

Por lo tanto, (S_{2x2}, +) es un subgrupo del grupo (M_{2x2}, +), ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 12.

*Demostrar que, si H y K son subgrupos de (G, *), entonces, H ∩ K es un subgrupo de (G, *).*

H ∩ K= {a ∈ G: a ∈ H ∧ a ∈ K}.
H ∩ K ⊂ G.

Cerradura: Para cada a, b ∈ H ∩ K, a*b ∈ H ∩ K, ya que a, b ∈ H, a, b ∈ K y a*b ∈ H, a*b ∈ K (por (H, *) y (K, *) subgrupos).

Asociatividad: La operación * en H ∩ K es asociativa porque se hereda del grupo original (G, *).

Elemento neutro: El elemento neutro de * en G también existe en H ∩ K. En particular, e ∈ H ∩ K, ya que e ∈ H y e ∈ K (por (H, *) y (K, *) subgrupos de G, con elemento neutro e).

Inversos: Un elemento a ∈ H ∩ K tiene inverso si existe a´ ∈ H ∩ K tal que a*a´= a´*a= e. En particular, para cada a ∈ H ∩ K, a ∈ H y a ∈ K y, además, a´ ∈ H y a´ ∈ K (por (H, *) y (K, *) subgrupos), por lo que existe inverso para todo a ∈ H ∩ K, ya que a´ ∈ H ∩ K.

Por lo tanto, queda demostrado que (H ∩ K, *) es un subgrupo del grupo (G, *), ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 13.

*Sea (G, *) un grupo, sea a ∈ G y sea H un subgrupo de G. Demostrar que el conjunto* aHa^{+1}= *{*a*h*a^{-1}*: h ∈ H} es un subgrupo de G.*

a$\text{H}a^{+1}$= {a*h*a^{-1}: h ∈ H}.
a$\text{H}a^{+1}$ ⊂ G.

<u>Elemento neutro:</u> El elemento neutro de * en G también existe en a$\text{H}a^{+1}$. En particular, e ∈ a$\text{H}a^{+1}$, ya que e ∈ H (por (H, *) subgrupo de G, con elemento neutro e), lo que implica que aea^{-1}= aa^{-1} (por (G, *) grupo)= e (por (G, *) grupo).

<u>Asociatividad:</u> La operación * en a$\text{H}a^{+1}$ es asociativa porque se hereda del grupo original (G, *).

<u>Cerradura:</u> Para cada x, y ∈ a$\text{H}a^{+1}$, x*y ∈ a$\text{H}a^{+1}$. En particular, para x= ah_1a^{-1} ∈ a$\text{H}a^{+1}$ e y= ah_2a^{-1} ∈ a$\text{H}a^{+1}$, con cualesquiera h_1, h_2 ∈ H, x*y= (ah_1a^{-1})*(ah_2a^{-1})= ah_1(a^{-1}a)h_2a^{-1} (por asociatividad)= ah_1eh_2a^{-1} (por (G, *) grupo)= a$h_1h_2a^{-1}$ (por elemento neutro), con h_1*h_2 ∈ H (por (H, *) subgrupo), por lo que x*y ∈ a$\text{H}a^{+1}$.

<u>Inversos:</u> Un elemento x ∈ a$\text{H}a^{+1}$ tiene inverso si existe x´ ∈ a$\text{H}a^{+1}$ tal que x*x´= x´*x= e. En particular, para x= aha^{-1} ∈ a$\text{H}a^{+1}$, con cualquier h ∈ H, su inverso en G es x´= $(aha^{-1})^{-1}$= $(a^{-1})^{-1}h^{-1}a^{-1}$= a$h^{-1}a^{-1}$ (por (G, *) grupo), con h^{-1} ∈ H (por (H, *) subgrupo), por lo que existe inverso para todo x ∈ a$\text{H}a^{+1}$, ya que x´ ∈ a$\text{H}a^{+1}$.

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto a$\text{H}a^{+1}$= {a*h*a^{-1}: h ∈ H} es un subgrupo de G, ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 14.

Probar que todo grupo cíclico es abeliano.

Sea (G, *) un grupo cíclico con generador g ∈ G, es decir:

G= $\langle g \rangle$= $\{g^n$: n ∈ $\mathbb{Z}\}$.

Esto significa que cualquier elemento de G se puede expresar como una potencia de g.

Se quiere probar que la operación * en G es conmutativa, es decir, que se cumple que, para cada a, b ∈ G, a*b= b*a.

Sean a, b ∈ G. Dado que G es cíclico, se tiene:

a= g^n, con n ∈ $\mathbb{Z}$.
b= g^m, con m ∈ $\mathbb{Z}$.

Considerando las operaciones a*b y b*a, se tiene:

a*b= $g^n * g^m$= g^{n+m}.
b*a= $g^m * g^n$= g^{m+n}.

Dado que g^{n+m}= g^{m+n}, se tiene:

a*b= b*a.

Por lo tanto, queda demostrado que todo grupo cíclico es abeliano.

Ejercicio 15.

Sea G un grupo cíclico de orden n, si m es divisor de n, entonces, el elemento a^m y sus potencias generan un subgrupo.

Sea G un grupo cíclico de orden n con generador a ∈ G, es decir:

G= $\langle a \rangle$= $\{a^x$: x ∈ ℤ, 0 ≤ x < n$\}$= $\{$e, a, a^2, … , $a^{n-1}\}$.

Esto implica que a^n= e, donde e es el elemento neutro de G.

Se supone que m es divisor de n, lo cual implica que existe un entero k tal que n= mk.

Se quiere probar que el elemento a^m y sus potencias generan un subgrupo de G.

Sea H el conjunto que contiene todas las potencias de a^m, es decir:

H= $\langle a^m \rangle$= $\{(a^m)^y$: y ∈ ℤ$\}$
H= $\langle a^m \rangle$= $\{a^{my}$: y ∈ ℤ$\}$.

Si a^{my}= e para algún y ∈ ℤ, entonces, a^{my}= a^n= e, lo que implica que my es múltiplo de n y, como mk también lo es, se tiene:

my= mk
y= k.

Esto muestra que el menor entero positivo y para el cual a^{my}= e es y= k, por lo que el orden de a^m es k.

Entonces, H tiene, exactamente, k= $\frac{n}{m}$ (< n) elementos:

H= $\langle a^m \rangle$= $\{a^{my}$: y ∈ ℤ, 0 ≤ y < k= $\frac{n}{m}$ < n$\}$.
H ⊂ G.

<u>Cerradura:</u> Para cada a, b ∈ H, a*b ∈ H. En particular, para a= a^{mx} ∈ H y b= a^{my} ∈ H, con cualesquiera x, y ∈ ℤ, a*b= $a^{mx} * a^{my}$= a^{mx+my}= $a^{m(x+y)}$, con x + y ∈ ℤ, por lo que a*b ∈ H.

<u>Asociatividad:</u> La operación * en H es asociativa porque se hereda del grupo original (G, *).

<u>Elemento neutro:</u> El elemento neutro de * en G también existe en H. En particular, e ∈ H, ya que a^{m*0}= a^0= e, con y= 0 ∈ ℤ.

<u>Inversos:</u> Un elemento a ∈ H tiene inverso si existe a´ ∈ H tal que a*a´= a´*a= e. En particular, para a= a^{my} ∈ H, con cualquier y ∈ ℤ, su inverso en G es a´= $(a^{my})^{-1}$= a^{-my}= $a^{m(-y)}$, con -y ∈ ℤ, por lo que existe inverso para todo a ∈ H, ya que a´ ∈ H.

Por lo tanto, queda demostrado que, dado un grupo cíclico G de orden n, si m es divisor de n, entonces, el elemento a^m y sus potencias generan un subgrupo de G, ya que el conjunto formado por estos elementos (H) satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 16.

*Sea (G, *) un grupo, sea a ∈ G y sea H un subgrupo de G. Si a, b ∈ G, probar que la relación dada por a≡ b (mod H) si a*b^{-1} ∈ H es una relación de equivalencia.*

$\equiv_H$ es reflexiva porque se cumple que, para todo a ∈ G, (a, a) ∈ $\equiv_H$. En particular, aa^{-1}= e ∈ H (por (H, *) subgrupo de G, con elemento neutro e), lo que implica que (a, a) ∈ $\equiv_H$.

$\equiv_H$ es simétrica porque se cumple que, para cada a, b ∈ G, si (a, b) ∈ $\equiv_H$, entonces, (b, a) ∈ $\equiv_H$. En particular, si ab^{-1} ∈ H, entonces, $(ab^{-1})^{-1}$ ∈ H (por (H, *) subgrupo) y es igual a $(b^{-1})^{-1}a^{-1}$= ba^{-1}, lo que implica que, si (a, b) ∈ $\equiv_H$, entonces, (b, a) ∈ $\equiv_H$.

$\equiv_H$ es transitiva porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ G, si (a, b) ∈ $\equiv_H$ y (b, c) ∈ $\equiv_H$, entonces, (a, c) ∈ $\equiv_H$. En particular, si ab^{-1} ∈ H y bc^{-1} ∈ H, entonces, (ab^{-1})*(bc^{-1}) ∈ H (por cerradura) y es igual a a(b^{-1}b) c^{-1} (por asociatividad)= aec^{-1} (por inversos)= ac^{-1} (por elemento neutro), lo que implica que, si (a, b) ∈ $\equiv_H$ y (b, c) ∈ $\equiv_H$, entonces, (a, c) ∈ $\equiv_H$.

Por lo tanto, queda demostrado que la relación dada por a≡ b (mod H) si a*b^{-1} ∈ H es una relación de equivalencia, ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Trabajo Práctico N° 5.2:
Aritmética Modular.

Ejercicio 1.

Hallar los resultados de las siguientes operaciones realizadas entre enteros módulo 4 y 5:

(a) $\overline{3} + \overline{1}$.

$\overline{3} + \overline{1} = \overline{3+1}$
$\overline{3} + \overline{1} = \overline{4}$.

$\overline{3} + \overline{1} = 4 \bmod 4$
$\overline{3} + \overline{1} = 0$.

$\overline{3} + \overline{1} = 4 \bmod 5$
$\overline{3} + \overline{1} = 4$.

(b) $\overline{5} + \overline{9}$.

$\overline{5} + \overline{9} = \overline{5+9}$
$\overline{5} + \overline{9} = \overline{14}$.

$\overline{5} + \overline{9} = 14 \bmod 4$
$\overline{5} + \overline{9} = 2$.

$\overline{5} + \overline{9} = 14 \bmod 5$
$\overline{5} + \overline{9} = 4$.

(c) $\overline{40} * \overline{3}$.

$\overline{40} * \overline{3} = \overline{40 * 3}$
$\overline{40} * \overline{3} = \overline{120}$.

$\overline{40} * \overline{3} = 120 \bmod 4$
$\overline{40} * \overline{3} = 0$.

$\overline{40} * \overline{3} = 120 \bmod 5$
$\overline{40} * \overline{3} = 0$.

(d) $(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8})$.

$(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8}) = (\overline{3+2}) * (\overline{6 * 8})$
$(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8}) = \overline{5} * \overline{48}$
$(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8}) = \overline{5 * 48}$
$(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8}) = \overline{240}$.

$(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8})$= 240 mod 4
$(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8})$= 0.

$(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8})$= 240 mod 5
$(\overline{3} + \overline{2}) * (\overline{6} * \overline{8})$= 0.

Ejercicio 2.

Construir las tablas de sumar y multiplicar de los enteros módulo 2 y 5.

Sea $\mathbb{Z}_2$= $\{\bar{0}, \bar{1}\}$.

Tabla de sumar (mod 2):

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	0	1
$\bar{\mathbf{1}}$	1	0

Tabla de multiplicar (mod 2):

*	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	0	0
$\bar{\mathbf{1}}$	0	1

Sea $\mathbb{Z}_5$= $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

Tabla de sumar (mod 5):

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	0	1	2	3	4
$\bar{\mathbf{1}}$	1	2	3	4	0
$\bar{\mathbf{2}}$	2	3	4	0	1
$\bar{\mathbf{3}}$	3	4	0	1	2
$\bar{\mathbf{4}}$	4	0	1	2	3

Tabla de multiplicar (mod 5):

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	0	0	0	0	0
$\bar{\mathbf{1}}$	0	1	2	3	4
$\bar{\mathbf{2}}$	0	2	4	1	3
$\bar{\mathbf{3}}$	0	3	1	4	2
$\bar{\mathbf{4}}$	0	4	3	2	1

Ejercicio 3.

Analizar si las siguientes son estructuras de grupo:

(a) *($\mathbb{Z}_4$, +) enteros módulo 4 con la suma modular.*

$\mathbb{Z}_4$= $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Cerradura: Para cada a, b $\in \mathbb{Z}_4$, (a + b) mod 4 $\in \mathbb{Z}_4$.

Asociatividad: La operación + en $\mathbb{Z}_4$ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c $\in \mathbb{Z}_4$, [(a + b) + c] mod 4= [a + (b + c)] mod 4.

Elemento neutro: Existe un elemento e $\in \mathbb{Z}_4$ tal que, para todo a $\in \mathbb{Z}_4$, se cumple que (a + e) mod 4= (e + a) mod 4= a mod 4. En particular, 0 es el elemento neutro $\in \mathbb{Z}_4$, ya que (a + 0) mod 4= (0 + a) mod 4= a mod 4 $\Leftrightarrow$ a mod 4= a mod 4= a mod 4.

Inversos: Un elemento a $\in \mathbb{Z}_4$ tiene inverso si existe a´ $\in \mathbb{Z}_4$ tal que (a + a´) mod 4= (a´ + a) mod 4= e. En particular, el inverso de 0 es 0 $\in \mathbb{Z}_4$, el inverso de 1 es 3 $\in \mathbb{Z}_4$, el inverso de 2 es $\in \mathbb{Z}_4$ y el inverso de 3 es 1 $\in \mathbb{Z}_4$, por lo que existe inverso para todo a $\in \mathbb{Z}_4$.

Por lo tanto, ($\mathbb{Z}_4$, +) es un grupo, ya que satisface cerradura, asociatividad, elemento neutro e inversos.

(b) *($\mathbb{Z}_4$, *) enteros módulo 4 con el producto modular.*

$\mathbb{Z}_4$= $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Cerradura: Para cada a, b $\in \mathbb{Z}_4$, (a * b) mod 4 $\in \mathbb{Z}_4$.

Asociatividad: La operación * en $\mathbb{Z}_4$ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c $\in \mathbb{Z}_4$, [(a * b) * c] mod 4= [a * (b * c)] mod 4.

Elemento neutro: Existe un elemento e $\in \mathbb{Z}_4$ tal que, para todo a $\in \mathbb{Z}_4$, se cumple que (a * e) mod 4= (e * a) mod 4= a mod 4. En particular, 1 es el elemento neutro $\in \mathbb{Z}_4$, ya que (a * 1) mod 4= (1 * a) mod 4= a mod 4 $\Leftrightarrow$ a mod 4= a mod 4= a mod 4.

Inversos: Un elemento a $\in \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ tiene inverso si existe a´ $\in \mathbb{Z}_4$ tal que (a * a´) mod 4= (a´ * a) mod 4= e. En particular, esto sólo se cumple para 1 (cuyo inverso es 1 $\in \mathbb{Z}_4$) y 3 (cuyo inverso es 3 $\in \mathbb{Z}_4$), por lo que no existe inverso para todo a $\in \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$.

Por lo tanto, ($\mathbb{Z}_3$, *) no es un grupo, ya que satisface cerradura, asociatividad y elemento neutro, pero no satisface inversos.

(c) *($\mathbb{Z}_3$, *) enteros módulo 3 con el producto modular.*

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

Cerradura: Para cada a, b $\in \mathbb{Z}_3$, (a * b) mod 3 $\in \mathbb{Z}_3$.

Asociatividad: La operación * en $\mathbb{Z}_3$ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c $\in \mathbb{Z}_3$, [(a * b) * c] mod 3= [a * (b * c)] mod 3.

Elemento neutro: Existe un elemento e $\in \mathbb{Z}_3$ tal que, para todo a $\in \mathbb{Z}_3$, se cumple que (a * e) mod 3= (e * a) mod 3= a mod 3. En particular, 1 es el elemento neutro $\in \mathbb{Z}_3$, ya que (a * 1) mod 3= (1 * a) mod 3= a mod 3 $\Longleftrightarrow$ a mod 3= a mod 3= a mod 3.

Inversos: Un elemento a $\in \mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}$ tiene inverso si existe a´ $\in \mathbb{Z}_3$ tal que (a * a´) mod 3= (a´ * a) mod 3= e. En particular, 1 es el inverso de 1 y 2 es el inverso de 2, por lo que existe inverso para todo a $\in \mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}$.

Por lo tanto, ($\mathbb{Z}_3$, *) es un grupo, ya que satisface cerradura, asociatividad, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 4.

Sean A_1= {$\overline{0}$, $\overline{5}$} y A_2= {$\overline{0}$, $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$} subconjuntos de $\mathbb{Z}_{10}$.

(a) *Probar que A_1 y A_2 son subgrupos de $\mathbb{Z}_{10}$.*

$A_1 \subset \mathbb{Z}_{10}$.

<u>Cerradura:</u> Para cada a, b $\in A_1$, (a + b) mod 10 $\in A_1$.

<u>Asociatividad:</u> La operación + en A_1 es asociativa porque se hereda del grupo original ($\mathbb{Z}_{10}$, +).

<u>Elemento neutro:</u> El elemento neutro de + en $\mathbb{Z}_{10}$ también existe en A_1. En particular, 0 $\in A_1$.

<u>Inversos:</u> Un elemento a $\in A_1$ tiene inverso si existe a´ $\in A_1$ tal que (a + a´) mod 10= (a´ + a) mod 10= e. En particular, el inverso de 5 es 5 $\in A_1$, por lo que existe inverso para todo a $\in A_1$ \ {0}.

Por lo tanto, queda demostrado que (A_1, +) es un subgrupo del grupo ($\mathbb{Z}_{10}$, +), ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

$A_2 \subset \mathbb{Z}_{10}$.

<u>Cerradura:</u> Para cada a, b $\in A_2$, (a + b) mod 10 $\in A_2$.

<u>Asociatividad:</u> La operación + en A_2 es asociativa porque se hereda del grupo original ($\mathbb{Z}_{10}$, +).

<u>Elemento neutro:</u> El elemento neutro de + en $\mathbb{Z}_{10}$ también existe en A_2. En particular, 0 $\in A_2$.

<u>Inversos:</u> Un elemento a $\in A_2$ tiene inverso si existe a´ $\in A_2$ tal que (a + a´) mod 10= (a´ + a) mod 10= e. En particular, el inverso de 2 es 8 $\in A_2$, el inverso de 4 es 6 $\in A_2$, el inverso de 6 es 4 $\in A_2$ y el inverso de 8 es 2 $\in A_2$, por lo que existe inverso para todo a $\in$ A_2 \ {0}.

Por lo tanto, queda demostrado que (A_2, +) es un subgrupo del grupo ($\mathbb{Z}_{10}$, +), ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

(b) *Mostrar que todo elemento de $\mathbb{Z}_{10}$ puede escribirse como suma de elementos de A_1 y A_2 (es decir, para todo x de $\mathbb{Z}_{10}$, x= x_1 +x_2 con $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$).*

$\mathbb{Z}_{10}$= {$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$}.

Si $x_1 = \overline{0}$, entonces, x= x_2. Como A_2 contiene $\overline{0}$, $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, los valores posibles de x_2 cubren los elementos pares de $\mathbb{Z}_{10}$ ($\overline{0}$, $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$).

Si $x_1 = \overline{5}$, entonces, x= ($\overline{5}$ + x_2) mod 10. Esto genera: $\overline{5}$ + $\overline{0}$= $\overline{5}$; $\overline{5}$ + $\overline{2}$= $\overline{7}$; $\overline{5}$ + $\overline{4}$= $\overline{9}$; $\overline{5}$ + $\overline{6}$= $\overline{1}$; $\overline{5}$ + $\overline{8}$= $\overline{3}$. Los valores posibles de x_2 cubren los elementos impares de $\mathbb{Z}_{10}$ ($\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{9}$).

Por lo tanto, todo elemento de $\mathbb{Z}_{10}$ puede escribirse como la suma de elementos de A_1 y A_2.

Ejercicio 5.

Mostrar que $\overline{3}$ es un generador del grupo cíclico ($\mathbb{Z}_8$, +). ¿Cuál es el orden del subgrupo cíclico generado por $\overline{2}$?

$\mathbb{Z}_8$= {$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$}.

Un elemento g $\in \mathbb{Z}_8$ es un generador si y sólo si los múltiplos de g (es decir, g, 2g, … módulo 8) generan todos los elementos de $\mathbb{Z}_8$.

g= $\overline{3}$: $\overline{1} * \overline{3}$= $\overline{3}$; $\overline{2} * \overline{3}$= $\overline{6}$; $\overline{3} * \overline{3}$= $\overline{1}$; $\overline{4} * \overline{3}$= $\overline{4}$; $\overline{5} * \overline{3}$= $\overline{7}$; $\overline{6} * \overline{3}$= $\overline{2}$; $\overline{7} * \overline{3}$= $\overline{5}$; $\overline{8} * \overline{3}$= $\overline{0}$.

Por lo tanto, $\overline{3}$ es un generador del grupo cíclico ($\mathbb{Z}_8$, +).

El orden de un elemento en un grupo cíclico es el menor n tal que ng= $\overline{0}$, donde g es el elemento que se está considerando.

g= $\overline{2}$: $\overline{1} * \overline{2}$= $\overline{6}$; $\overline{2} * \overline{2}$= $\overline{4}$; $\overline{3} * \overline{2}$= $\overline{2}$; $\overline{4} * \overline{2}$= $\overline{0}$.

Por lo tanto, el orden del subgrupo cíclico generado por $\overline{2}$ es 4.

Ejercicio 6.

Encontrar los generadores del grupo cíclico ($\mathbb{Z}_6$, +).

$\mathbb{Z}_6$= {$\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$}.

Un elemento g $\in \mathbb{Z}_6$ es un generador si y sólo si los múltiplos de g (es decir, g, 2g, … módulo 6) generan todos los elementos de $\mathbb{Z}_6$.

g= $\bar{0}$: La suma de $\bar{0}$ consigo mismo siempre da 0.

g= $\bar{1}$: $\bar{1} * \bar{1}= \bar{1}$; $\bar{2} * \bar{1}= \bar{2}$; $\bar{3} * \bar{1}= \bar{3}$; $\bar{4} * \bar{1}= \bar{4}$; $\bar{5} * \bar{1}= \bar{5}$; $\bar{6} * \bar{1}= \bar{0}$.

g= $\bar{2}$: $\bar{1} * \bar{2}= \bar{2}$; $\bar{2} * \bar{2}= \bar{4}$; $\bar{3} * \bar{2}= \bar{0}$.

g= $\bar{3}$: $\bar{1} * \bar{3}= \bar{3}$; $\bar{2} * \bar{3}= \bar{0}$.

g= $\bar{4}$: $\bar{1} * \bar{4}= \bar{4}$; $\bar{2} * \bar{4}= \bar{2}$; $\bar{3} * \bar{4}= \bar{0}$.

g= $\bar{5}$: $\bar{1} * \bar{5}= \bar{5}$; $\bar{2} * \bar{5}= \bar{4}$; $\bar{3} * \bar{5}= \bar{3}$; $\bar{4} * \bar{5}= \bar{2}$; $\bar{5} * \bar{5}= \bar{1}$; $\bar{6} * \bar{5}= \bar{0}$.

Por lo tanto, los generadores del grupo cíclico ($\mathbb{Z}_6$, +) son 1 y 5.

Ejercicio 7.

Si se reparte en partes iguales m caramelos entre 3 personas me sobran 2, mientras que, si se reparten entre 7, me sobran 4. Sabiendo que m está entre 30 y 70. ¿Cuántos caramelos se tienen para repartir? (Usar aritmética modular).

$m \equiv_3 2$
$m = 3k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

$m \equiv_7 4$.
$3k + 2 \equiv_7 4$
$3k \equiv_7 4 - 2$
$3k \equiv_7 2$
$5 * 3k \equiv_7 5 * 2$
$15k \equiv_7 10$
$15k \bmod 7 = 10$
$15 \bmod 7 * k \bmod 7 = 3$
$1 * k \bmod 7 = 3$
$k \bmod 7 = 3$
$k = 7n + 3$, con $n \in \mathbb{Z}$.

$m = 3 (7n + 3) + 2$
$m = 21n + 9 + 2$
$m = 21n + 11$.

Con $n = 1$:

$m = 21 * 1 + 11$
$m = 21 + 11$
$m = 32$.

Con $n = 2$:

$m = 21 * 2 + 11$
$m = 42 + 11$
$m = 53$.

Con $n = 3$:

$m = 21 * 3 + 11$
$m = 63 + 11$
$m = 74$.

Por lo tanto, se tienen para repartir 32 o 53 caramelos.

Ejercicio 8.

Averiguar qué día de la semana cayó 05/11/1968, fecha de natalicio de Ricardo Fort.

Se utilizará el algoritmo de Zeller, que es una fórmula para calcular el día de la semana de cualquier fecha:

h= (q + $\left\lfloor\frac{13(m+1)}{5}\right\rfloor$ + K + $\left\lfloor\frac{K}{4}\right\rfloor$ + $\left\lfloor\frac{J}{4}\right\rfloor$ - 2J) mod 7, donde:

h: día de la semana (0: sábado, 1: domingo, 2: lunes, 3: martes, 4: miércoles, 5: jueves, 6: viernes),
q: día del mes,
m: mes (los meses de enero y febrero se consideran como los meses 13 y 14 del año anterior),
K: últimos dos dígitos del año,
J: primeros dos dígitos del año.

h= (5 + $\left\lfloor\frac{13(11+1)}{5}\right\rfloor$ + 68 + $\left\lfloor\frac{68}{4}\right\rfloor$ + $\left\lfloor\frac{19}{4}\right\rfloor$ - 2 * 19) mod 7
h= (5 + $\left\lfloor\frac{13*12}{5}\right\rfloor$ + 68 + 17 + 4 - 38) mod 7
h= (5 + $\left\lfloor\frac{156}{5}\right\rfloor$ + 68 + 17 + 4 - 38) mod 7
h= (5 + 31 + 68 + 17 + 4 - 38) mod 7
h= 87 mod 7
h= 3.

Por lo tanto, el día de la semana que cayó 05/11/1968 fue martes.

Ejercicio 9.

Mostrar que $\mathbb{Z}_m$ para m natural y las operaciones de suma y producto tiene estructura de anillo.

$\mathbb{Z}_m$= $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$.

La terna ordenada ($\mathbb{Z}_m$, +, *) tiene estructura de anillo si ($\mathbb{Z}_m$, +) es un grupo conmutativo y si el producto es cerrado, asociativo y se satisface distributividad del producto respecto de la suma.

<u>Cerradura de la suma:</u> Para cada a, b ∈ $\mathbb{Z}_m$, (a + b) mod m ∈ $\mathbb{Z}_m$.

<u>Asociatividad de la suma:</u> La operación + en $\mathbb{Z}_m$ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ $\mathbb{Z}_m$, [(a + b) + c] mod m= [a + (b + c)] mod m.

<u>Elemento neutro de la suma:</u> Existe un elemento e ∈ $\mathbb{Z}_m$ tal que, para todo a ∈ $\mathbb{Z}_m$, se cumple que (a + e) mod m= (e + a) mod m= a mod m. En particular, 0 es el elemento neutro ∈ $\mathbb{Z}_m$, ya que (a + 0) mod m= (0 + a) mod m= a mod m ⟺ a mod m= a mod m= a mod m.

<u>Inversos aditivos:</u> Un elemento a ∈ $\mathbb{Z}_m$ tiene inverso si existe a´ ∈ $\mathbb{Z}_m$ tal que (a + a´) mod m= (a´ + a) mod m= e. En particular, para todo a ∈ $\mathbb{Z}_m$, su inverso es a´= (m - a) ∈ $\mathbb{Z}_m$, por lo que existe inverso para todo a ∈ $\mathbb{Z}_m$.

<u>Conmutatividad de la suma:</u> La operación + en $\mathbb{Z}_m$ es conmutativa porque se cumple que, para cada a, b ∈ $\mathbb{Z}_m$, (a + b) mod m= (b + a) mod m.

Por lo tanto, ($\mathbb{Z}_m$, +) es un grupo conmutativo, ya que satisface cerradura, asociatividad, elemento neutro, inversos y conmutatividad.

<u>Cerradura del producto:</u> Para cada a, b ∈ $\mathbb{Z}_m$, (a * b) mod m ∈ $\mathbb{Z}_m$.

<u>Asociatividad del producto:</u> La operación * en $\mathbb{Z}_m$ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ $\mathbb{Z}_m$, [(a * b) * c] mod m= [a * (b * c)] mod m.

<u>Distributividad del producto respecto de la suma:</u> La operación * en $\mathbb{Z}_m$ es distributiva respecto de la operación + porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ $\mathbb{Z}_m$, [a * (b + c)] mod m= (a * b + a * c) mod m y [(a + b) * c] mod m= (a * c + b * c) mod m.

Por lo tanto, queda demostrado que ($\mathbb{Z}_m$, +, *) tiene estructura de anillo.

Ejercicio 10.

Dar todos los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_6$.

$\mathbb{Z}_6$= $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

Un elemento a $\in \mathbb{Z}_6$ es invertible si existe b $\in \mathbb{Z}_6$ tal que (a * b) mod 6= 1.
Un elemento a $\in \mathbb{Z}_6$ es invertible si y sólo si mcd (a, m)= 1 (es coprimo con m).

a= 0: mcd (0, 6)= 6.
a= 1: mcd (1, 6)= 1.
a= 2: mcd (2, 6)= 2.
a= 3: mcd (3, 6)= 3.
a= 4: mcd (4, 6)= 2.
a= 5: mcd (5, 6)= 1.

En particular, los inversos de $\bar{1}$ y $\bar{5}$ son $\bar{1}$ y $\bar{5}$, respectivamente.

Por lo tanto, todos los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_6$ son $\{\bar{1}, \bar{5}\}$.

Ejercicio 11.

Sea m un entero impar, probar que $m^2 \equiv_4$ *1.*

Si m es un entero impar, entonces:

m= 2k + 1, con k ∈ ℤ.

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación anterior, se tiene:

$m^2 = (2k+1)^2$
$m^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$m^2 = 4(k^2 + k) + 1$.

Tomando la congruencia módulo 4, se tiene:

m^2 mod 4= [4 (k^2 + k) + 1] mod 4
m^2 mod 4= [4 (k^2 + k)] mod 4 + 1 mod 4
m^2 mod 4= 4 mod 4 * (k^2 + k) mod 4 + 1
m^2 mod 4= 0 * (k^2 + k) mod 4 + 1
m^2 mod 4= 0 + 1
m^2 mod 4= 1
$m^2 \equiv_4 1$.

Por lo tanto, queda demostrado que, dado un número impar m, $m^2 \equiv_4 1$.

Ejercicio 12.

Si $\bar{a}$ es invertible, entonces, no es divisor de cero.

Si $\bar{a}$ es invertible, entonces, existe $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ tal que:

$\bar{a} * \bar{b} = \bar{1}$.

Ahora, se supone, por contradicción, que $\bar{a}$ también es divisor de 0. Entonces, existe $\bar{c} \neq 0 \in \mathbb{Z}_m$ tal que:

$\bar{a} * \bar{c} = \bar{0}$.

Pre-multiplicando a ambos lados de la ecuación anterior por el inverso de $\bar{a}$ ($\bar{b}$), se tiene:

$\bar{b} * (\bar{a} * \bar{c}) = \bar{b} * \bar{0}$.

Usando la propiedad asociativa, se tiene:

$(\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c} = \bar{0}$
$(\bar{a} * \bar{b}) * \bar{c} = \bar{0}$.

Usando que $\bar{b}$ es el inverso de $\bar{a}$, se tiene:

$\bar{1} * \bar{c} = \bar{0}$
$\bar{c} = \bar{0}$.

Lo cual contradice la suposición de que $\bar{c} \neq 0$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si $\bar{a}$ es invertible, entonces, no es divisor de cero.

Ejercicio 13.

Probar que (t, m)= 1 si y sólo si t es invertible módulo m.

Si mcd (t, m)= 1, entonces, por el teorema de Bézout, existen enteros x e y tales que tx + my= 1. Tomando la congruencia módulo m, se tiene:

tx + my$\equiv_m$ 1
(tx + my) mod m= 1
tx mod m + my mod m= 1
tx mod m + m mod m * y mod m= 1
tx mod m + 0 * y mod m= 1
tx mod m + 0= 1
tx mod m= 1
tx$\equiv_m$ 1.

Por lo tanto, t es invertible módulo m.

Si t es invertible módulo m, entonces, existe t´ ∈ $\mathbb{Z}_m$ tal que tt´$\equiv_m$ 1, lo que implica que tt´= mk + 1, para algún k ∈ ℤ. La ecuación tt´ - mk= 1 es una combinación lineal de t y m que da como resultado 1. Por lo tanto, por el teorema de Bézout, mcd (t, m)= 1.

Por lo tanto, queda demostrado que (t, m) si y sólo si t es invertible módulo m.

Ejercicio 14.

Si p es primo, entonces, $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo.

$\mathbb{Z}_p$= $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$.

La terna ordenada ($\mathbb{Z}_p$, +, *) tiene estructura de cuerpo si ($\mathbb{Z}_p$, +) es un grupo conmutativo, si el producto es cerrado, asociativo, tiene un elemento neutro y es conmutativo y si todo elemento no nulo tiene un inverso multiplicativo.

Cerradura de la suma: Para cada a, b ∈ $\mathbb{Z}_p$, (a + b) mod p ∈ $\mathbb{Z}_p$.

Asociatividad de la suma: La operación + en $\mathbb{Z}_p$ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ $\mathbb{Z}_p$, [(a + b) + c] mod p= [a + (b + c)] mod p.

Elemento neutro de la suma: Existe un elemento e ∈ $\mathbb{Z}_p$ tal que, para todo a ∈ $\mathbb{Z}_p$, se cumple que (a + e) mod p= (e + a) mod p= a mod p. En particular, 0 es el elemento neutro ∈ $\mathbb{Z}_p$, ya que (a + 0) mod p= (0 + a) mod p= a mod p ⟺ a mod p= a mod p= a mod p.

Inversos aditivos: Un elemento a ∈ $\mathbb{Z}_p$ tiene inverso si existe a´ ∈ $\mathbb{Z}_p$ tal que (a + a´) mod p= (a´ + a) mod p= e. En particular, para todo a ∈ $\mathbb{Z}_p$, su inverso es a´= (p - a) ∈ $\mathbb{Z}_p$, por lo que existe inverso para todo a ∈ $\mathbb{Z}_p$.

Conmutatividad de la suma: La operación + en $\mathbb{Z}_p$ es conmutativa porque se cumple que, para cada a, b ∈ $\mathbb{Z}_p$, (a + b) mod p= (b + a) mod p.

Por lo tanto, ($\mathbb{Z}_p$, +) es un grupo conmutativo, ya que satisface cerradura, asociatividad, elemento neutro, inversos y conmutatividad.

Cerradura del producto: Para cada a, b ∈ $\mathbb{Z}_p$, (a * b) mod p ∈ $\mathbb{Z}_p$.

Asociatividad del producto: La operación * en $\mathbb{Z}_p$ es asociativa porque se cumple que, para cada a, b, c ∈ $\mathbb{Z}_p$, [(a * b) * c] mod p= [a * (b * c)] mod p.

Elemento neutro del producto: Existe un elemento e ∈ $\mathbb{Z}_p$ tal que, para todo a ∈ $\mathbb{Z}_p$, se cumple que (a * e) mod p= (e * a) mod p= a mod p. En particular, 1 es el elemento neutro ∈ $\mathbb{Z}_p$, ya que (a * 1) mod p= (1 * a) mod p= a mod p ⟺ a mod p= a mod p= a mod p.

Conmutatividad del producto: La operación * en $\mathbb{Z}_p$ es conmutativa porque se cumple que, para cada a, b ∈ $\mathbb{Z}_p$, (a * b) mod p= (b * a) mod p.

Inversos multiplicativos: Como p es primo, para todo a ∈ $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, mcd (a, p)= 1. Por el teorema de Bézout, existen enteros x e y tales que ax + py= 1. Tomando la congruencia módulo p, se tiene que ax + py$\equiv_p$ 1 ⟺ ax$\equiv_p$ 1, lo que implica que x es el inverso multiplicativo de a módulo p. Por lo tanto, todo elemento no nulo de $\mathbb{Z}_p$ tiene un inverso multiplicativo.

Por lo tanto, queda demostrado que, si p es primo, entonces, ($\mathbb{Z}_p$, +, *) es un cuerpo.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5.3:
Morfismos.

Ejercicio 1.

Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y, en caso afirmativo, hallar núcleo e imagen:

(a) *f: G ⟶ F dada por f (x)= 2^x y siendo los grupos G= (ℝ, +) los reales con la suma usual, F= ($\mathbb{R}_0$, *) los reales sin el 0 con el producto usual.*

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo x, y ∈ G, f (x + y)= f (x) f (y). En particular, f (x + y)= 2^{x+y}= $2^x 2^y$= f (x) f (y), por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los elementos de G que se mapean al neutro de F, el cual es 1, ya que, para cualquier a ∈ F, a * 1= a. En particular, f (x)= 1 ⟺ 2^x= 1 ⟺ x= 0 y, entonces, Nu(f)= {0}.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los valores que puede tomar f (x) cuando x recorre G. En particular, Im(f)= $\mathbb{R}_+$= {y ∈ ℝ: y > 0}.

(b) *f: G ⟶ F dada por f (x)= -x y siendo los grupos G= (ℤ, *) los enteros con la operación a*b= a + b + ab, F= (ℤ, ∘) los enteros con la operación a∘b= a + b - ab.*

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo x, y ∈ G, f (x * y)= f (x) ∘ f (y). En particular, f (x * y)= f (x + y + xy)= -(x + y + xy)= -x - y - xy ⟺ f (x) ∘ f (y)= (-x)∘(-y)= -x - y - (-x) (-y)= -x - y - xy, por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los elementos de G que se mapean al neutro de F, el cual es 0, ya que, para cualquier a ∈ F, a∘0= a + 0 - a * 0= a + 0 - 0= a. En particular, f (x)= 0 ⟺ -x= 0 ⟺ x= $\frac{0}{-1}$ ⟺ x= 0 y, entonces, Nu(f)= {0}.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los valores que puede tomar f (x) cuando x recorre G. En particular, Im(f)= ℤ.

(c) *f: (P (A), ∪) ⟶ (P (A), ∩) dada por f (X)= X^c (siendo A cualquier conjunto, P (A) indica el conjunto de partes de A y X^c el complemento de un conjunto).*

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo X, Y ∈ (P (A), ∪), f (X ∪ Y)= f (X) ∩ f (Y). En particular, f (X ∪ Y)= $(X \cup Y)^c$= $X^c \cap Y^c$= f (X) ∩ f (Y), por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los conjuntos de (P (A), ∪) que se mapean al neutro de F, el cual es A, ya que, para cualquier Y ∈ (P (A), ∩), Y ∩ A= Y. En particular, f (X)= A ⟺ X^c= A ⟺ X= A^c y, entonces, Nu(f)= $\{A^c\}$.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los conjuntos que puede tomar f (X) cuando X recorre (P (A), ∪). En particular, Im(f)= P (A).

Ejercicio 2.

Sea f: G ⟶ H un homomorfismo de grupos. Demostrar que el núcleo y la imagen de f son subgrupos de G y H, respectivamente.

El núcleo de f, denotado por Nu(f), se define como:

Nu(f)= {x ∈ G: f (x)= e_H}, donde e_H es el elemento neutro de H.
Nu(f) ⊂ G.

Cerradura: Para cada x, y ∈ Nu(f), xy ∈ Nu(f). En particular, f (xy)= f (x) f (y) (por f homomorfismo)= $e_H e_H$= e_H, por lo que xy ∈ Nu(f).

Elemento neutro: El elemento neutro de f en G también existe en Nu(f). En particular, e_G ∈ Nu(f), ya que f (e_G)= e_H.

Inversos: Un elemento x ∈ Nu(f) tiene inverso si existe x^{-1} ∈ Nu(f) tal que xx^{-1}= x^{-1}x= e_G. En particular, para x ∈ Nu(f), su inverso en G es x^{-1} y, entonces, f (x^{-1})= $[f\ (x)]^{-1}$ (por f homomorfismo)= e_H^{-1}= e_H, por lo que existe inverso para todo x ∈ Nu(f), ya que x^{-1} ∈ Nu(f).

Por lo tanto, queda demostrado que el núcleo de f es un subgrupo de G, ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

La imagen de f, denotada por Im(f), se define como:

Im(f)= {y ∈ H: ∃ x ∈ G, f (x)= y}.
Im(f) ⊂ H.

Cerradura: Para cada a, b ∈ Im(f), ab ∈ Im(f). En particular, ab= f (x) f (y)= f (xy) (por f homomorfismo), con xy ∈ G (por (G, *) grupo), por lo que ab ∈ Im(f).

Elemento neutro: El elemento neutro de f en H también existe en Im(f). En particular, e_H ∈ Im(f), ya que e_H= f (e_G).

Inversos: Un elemento a ∈ Im(f) tiene inverso si existe a^{-1} ∈ Im(f) tal que aa^{-1}= a^{-1}a= e_H. En particular, para a ∈ Im(f), su inverso en H es a^{-1}= $[f\ (x)]^{-1}$= f (x^{-1}) (por f homomorfismo), con x^{-1} ∈ G (por (G, *) grupo), por lo que existe inverso para todo a ∈ Im(f), ya que a^{-1} ∈ Im(f).

Por lo tanto, queda demostrado que la imagen de f es un subgrupo de H, ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 3.

*Sea (G, *) un grupo. Demostrar que la función f: G ⟶ G definida por f (a)= a^2 es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano (recordar un ejercicio de grupos abelianos del TP5.1).*

Si f (a)= a^2 es un homomorfismo, entonces, para todo a, b ∈ G, f (ab)= f (a) f (b), lo que implica que $(ab)^2$= a^2b^2 ⟺ abab= aabb ⟺ ba= ab. Por lo tanto, G es abeliano.

Si (G, *) es abeliano, entonces, para cada a, b ∈ G, ab= ba. En particular, f (ab)= $(ab)^2$= abab= aabb (por (G, *) abeliano)= a^2b^2= f (a) f (b), por lo que f (ab)= f (a) f (b). Por lo tanto, f (a)= a^2 es un homomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función f: G ⟶ G definida por f (a)= a^2 es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano.

Ejercicio 4.

Si H_1, H_2 son dos subgrupos de un grupo conmutativo G, probar que la aplicación f: H_1 x H_2 ⟶ G dada por f (a, b)= ab es un morfismo de grupos.

La aplicación f es un morfismo de grupos si se cumple que, para todo (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in H_1$ x H_2, f $((a_1, b_1)$ $(a_2, b_2))$= f (a_1, b_1) f (a_2, b_2). En particular, f $((a_1, b_1)$ $(a_2, b_2))$= f (a_1a_2, b_1b_2)= $a_1a_2b_1b_2$= $a_1b_1a_2b_2$ (por (G, *) conmutativo)= f (a_1, b_1) f (a_2, b_2), por lo que f es un morfismo de grupos.

Por lo tanto, queda demostrado que la aplicación f: H_1 x H_2 ⟶ G dada por f (a, b)= ab es un morfismo de grupos.

Ejercicio 5.

Si f: $G_1 \longrightarrow G_2$ es un morfismo de grupos, entonces, es monomorfismo si y sólo si Nu(f)= $\{e_1\}$.

Sea f: $G_1 \longrightarrow G_2$ un morfismo de grupos, donde G_1 y G_2 son grupos, y e_1 y e_2 son los elementos neutros de G_1 y G_2, respectivamente.

Se quiere probar que f es un monomorfismo si y sólo si Nu(f)= $\{e_1\}$.

Si f es un monomorfismo, entonces, f es inyectiva, lo que implica que, si f (a)= f (b), entonces, a= b. En particular, si f (a)= e_2 (por definición de núcleo) y f (e_1)= e_2 (por preservación del neutro de los morfismos), entonces, a= e_1. Por lo tanto, Nu(f)= $\{e_1\}$.

Si Nu(f)= $\{e_1\}$ y, suponiendo que f (a)= f (b) para algunos a, b ∈ G_1, entonces, f (a)= f (b) ⟺ f (a) $[f\ (b)]^{-1}$= f (b) $[f\ (b)]^{-1}$ (post-multiplicando por $[f\ (b)]^{-1}$) ⟺ f (a) $[f\ (b)]^{-1}$= e_2 (por (G_2, *) grupo) ⟺ f (a) f (b^{-1})= e_2 (por f morfismo) ⟺ f (ab^{-1})= e_2 (por f morfismo), lo que implica que ab^{-1} ∈ Nu(f), por lo que ab^{-1}= e_1 (por hipótesis) ⟺ ab^{-1}b= e_1b (post-multiplicando por b) ⟺ ae_1= b (por (G_1, *) grupo) ⟺ a= b (por (G_1, *) grupo) y, entonces, f es inyectiva. Por lo tanto, f es un monomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que, si f: $G_1 \longrightarrow G_2$ es un morfismo de grupos, entonces, es monomorfismo si y sólo si Nu(f)= $\{e_1\}$.

Ejercicio 6.

*Sea (G, *) un grupo. Demostrar que la función f: G ⟶ G definida por f (a)=* a^{-1} *es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano.*

Si f (a)= a^{-1} es un isomorfismo, entonces, para todo a, b ∈ G, f (ab)= f (a) f (b), lo que implica que $(ab)^{-1}$= $a^{-1}b^{-1}$ ⟺ $(ab)^{-1}$= $(ba)^{-1}$ ⟺ ab= ba. Por lo tanto, G es abeliano.

Si (G, *) es abeliano, entonces, para cada a, b ∈ G, ab= ba. Por un lado, se considera f (ab)= $(ab)^{-1}$= $(ba)^{-1}$ (por (G, *) abeliano)= $a^{-1}b^{-1}$= f (a) f (b), por lo que f (ab)= f (a) f (b) y, entonces, f (a)= a^{-1} es un homomorfismo. Por otro lado, si f (a)= f (b), entonces, a^{-1}= b^{-1} ⟺ a= b, por lo que f es inyectiva; y, para todo b ∈ G (codominio), existe a ∈ G (dominio) tal que f (a)= b (en particular, a^{-1}= b ⟺ a= b^{-1} ∈ G (dominio)), por lo que f es sobreyectiva. Por lo tanto, f (a)= a^{-1} es un isomorfismo, ya que es un homomorfismo biyectivo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función f: G ⟶ G definida por f (a)= a^{-1} es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano.

Ejercicio 7.

*Sea R una relación de congruencia sobre un semigrupo (S, *) y (S/R, *) el semigrupo cociente correspondiente. Demostrar que la función f_R: S ⟶ S/R definida por f_R (a)= $\bar{a}$ es un homomorfismo.*

La función f_R es un homomorfismo si se cumple que, para todo a, b ∈ S, f_R (ab)= f_R (a) f_R (b). En particular, f_R (ab)= $\overline{ab}$= $\bar{a}\bar{b}$ (por R relación de congruencia)= f_R (a) f_R (b), por lo que f_R es un homomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función f_R: S ⟶ S/R definida por f_R (a)= $\bar{a}$ es un homomorfismo.

Ejercicio 8.

Sea z un número complejo. ¿Cuándo será un isomorfismo de grupos la aplicación f: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, siendo $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos, dada por f (x)= zx?

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo x, y $\in \mathbb{C}$, f (x + y)= f (x) + f (y). En particular, f (x + y)= z (x + y)= zx + zy= f (x) f (y), por lo que f es un homomorfismo.

Inyectividad: f es inyectiva si f (x)= f (y) implica x= y. En particular, f (x)= f (y) $\Leftrightarrow$ zx= zy $\Leftrightarrow$ x= y, por lo que f es inyectiva.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva si, para todo y $\in \mathbb{C}$ (codominio), existe x $\in \mathbb{C}$ (dominio) tal que f (x)= y. En particular, zx= y $\Leftrightarrow$ x= $\frac{y}{z} \in \mathbb{C}$ (dominio), si z$\neq$ 0, por lo que f es sobreyectiva si y sólo si z$\neq$ 0.

Por lo tanto, dado z un número complejo, la aplicación f: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, siendo $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos, dada por f (x)= zx, será un isomorfismo de grupos (con la operación +) cuando z$\neq$ 0.

Ejercicio 9.

Probar que hay un isomorfismo entre el grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales $\mathbb{R}^4$ con la suma usual.

Se define la aplicación f: M_2 ($\mathbb{R}$) $\longrightarrow \mathbb{R}^4$ que mapea una matriz de 2x2 a una cuaterna de números reales, tomando los elementos de la matriz. Es decir, para una matriz A $\in M_2$ ($\mathbb{R}$) dada por A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define f (A)= $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$.

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo A, B $\in$ M_2 ($\mathbb{R}$), f (A + B)= f (A) + f (B). En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in$ M_2 ($\mathbb{R}$), con cualesquiera a_{ij}, $b_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, f (A + B)= f ($\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$)= f ($\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$)= $(a_{11}+b_{11}, a_{12}+b_{12}, a_{21}+b_{21}, a_{22}+b_{22})$= $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ + $(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$= f (A) + f (B), por lo que f es un homomorfismo.

Inyectividad: f es inyectiva si f (A)= f (B) implica A= B. En particular, para A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2$ ($\mathbb{R}$), con cualesquiera a_{ij}, $b_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, f (A)= f (B) $\Leftrightarrow$ f ($\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$)= f ($\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$) $\Leftrightarrow$ $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$= $(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$ $\Leftrightarrow$ A= B, por lo que f es inyectiva.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva si, para todo $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$ (codominio), existe A $\in M_2$ ($\mathbb{R}$) (dominio) tal que f (A)= $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. En particular, A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2$ ($\mathbb{R}$) (dominio), con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, por lo que f es sobreyectiva.

Por lo tanto, queda demostrado que hay un isomorfismo entre el grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales $\mathbb{R}^4$ con la suma usual.

Ejercicio 10.

Probar que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a ($\mathbb{Z}_m$, +).

Sea G un grupo cíclico de orden m con generador g ∈ G, es decir:

G= $\langle g \rangle$= $\{g^x$: x ∈ $\mathbb{Z}$, 0 ≤ x < m$\}$= {e, g, g^2, … , g^{m-1}}, con g^m= e, donde e es el elemento neutro de G.

Sea ($\mathbb{Z}_m$, +) el grupo formado por los enteros {0, 1, 2, … , m-1} con la operación + módulo m.

Se define la función φ: G ⟶ $\mathbb{Z}_m$ como:

φ (g^k)= k mod m, para k= 0, 1, … , m-1.

<u>Condición de homomorfismo:</u> φ es un homomorfismo si se cumple que, para todo g^x, g^y ∈ G, φ ($g^x g^y$)= φ (g^x) + φ (g^y). En particular, φ ($g^x g^y$)= φ (g^{x+y})= (x + y) mod m= x mod m + y mod m= φ (g^x) + φ (g^y), por lo que φ es un homomorfismo.

<u>Inyectividad:</u> φ es inyectiva si φ (g^x)= φ (g^y) implica g^x= g^y. En particular, φ (g^x)= φ (g^y) ⟺ x mod m= y mod m ⟺ x mod m - y mod m= 0 ⟺ (x - y) mod m= 0 ⟺ x= y ⟺ g^x= g^y, por lo que φ es inyectiva.

<u>Sobreyectividad:</u> φ es sobreyectiva si, para todo k ∈ $\mathbb{Z}_m$ (codominio), existe g^k ∈ G (dominio) tal que φ (g^k)= k mod m. En particular, φ (g^k)= k mod m (por definición de φ), con g^k ∈ G (dominio), por lo que φ es sobreyectiva.

Por lo tanto, queda demostrado que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a ($\mathbb{Z}_m$, +).

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 6:
Espacios Vectoriales - Transformaciones Lineales.

Ejercicio 1.

Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:

(a) $\mathbb{R}^3$.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v $\in \mathbb{R}^3$, u + v $\in \mathbb{R}^3$. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3), v= $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i, $v_i \in \mathbb{R}$, i= 1, 2, 3, u + v= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)= $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$, por lo que u + v $\in \mathbb{R}^3$.

Conmutatividad de la suma: Para cada u, v $\in \mathbb{R}^3$, u + v= v + u. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3), v= $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i, $v_i \in \mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
u + v= v + u $\Leftrightarrow$
$(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)= (v_1, v_2, v_3) + (u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow$
$(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3)$.

Asociatividad de la suma: Para cada u, v, w $\in \mathbb{R}^3$, (u + v) + w= u + (v + w). En particular, para u= (u_1, u_2, u_3), v= (v_1, v_2, v_3), w= $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i, v_i, $w_i \in \mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
(u + v) + w= u + (v + w) $\Leftrightarrow$
$((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) + (w_1, w_2, w_3)= (u_1, u_2, u_3) + ((v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3))$
$\Leftrightarrow$
$(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3)= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$
$\Leftrightarrow$
$(u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, u_3 + v_3 + w_3)= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.

Elemento neutro de la suma: Existe un elemento e $\in \mathbb{R}^3$ tal que, para todo u $\in \mathbb{R}^3$, se cumple que u + e= e + u= u. En particular, $0_{\mathbb{R}^3}$= (0, 0, 0) es el elemento neutro $\in \mathbb{R}^3$, ya que, para u= $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, con cualesquiera $u_i \in \mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
u + $0_{\mathbb{R}^3}$= $0_{\mathbb{R}^3}$ + u= u $\Leftrightarrow$
(u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0)= (0, 0, 0) + (u_1, u_2, u_3)= $(u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow$
$(u_1 + 0, u_2 + 0, u_3 + 0)= (0 + u_1, 0 + u_2, 0 + u_3)= (u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow$
$(u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3)$.

Elementos opuestos de la suma: Un elemento u $\in \mathbb{R}^3$ tiene inverso si existe u´ $\in \mathbb{R}^3$ tal que u + u´= u´ + u= e. En particular, para u= $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, con cualesquiera $u_i \in \mathbb{R}$, i= 1, 2, 3, su inverso es u´= $(-u_1, -u_2, -u_3) \in \mathbb{R}^3$, por lo que existe inverso para todo u $\in \mathbb{R}^3$.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u $\in \mathbb{R}^3$ y k $\in \mathbb{R}$, ku $\in \mathbb{R}^3$. En particular, para u= $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, con cualesquiera $u_i \in \mathbb{R}$, i= 1, 2, 3, ku= k (u_1, u_2, u_3)= (ku_1, ku_2, ku_3), por lo que ku $\in \mathbb{R}^3$.

Distributividad escalar respecto a la suma de vectores: Para todo u, v ∈ $\mathbb{R}^3$ y k ∈ $\mathbb{R}$, k (u + v)= ku + kv. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3), v= (v_1, v_2, v_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i, v_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
k (u + v)= ku + kv ⟺
k $((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3))$= k (u_1, u_2, u_3) + k (v_1, v_2, v_3) ⟺
k $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$= (k$u_1$, k$u_2$, k$u_3$) + (k$v_1$, k$v_2$, k$v_3$) ⟺
(k $(u_1 + v_1)$, k $(u_2 + v_2)$, k $(u_3 + v_3)$)= (ku_1 + kv_1, ku_2 + v_2, ku_3 + v_3) ⟺
(k $(u_1 + v_1)$, k $(u_2 + v_2)$, k $(u_3 + v_3)$)= (k $(u_1 + v_1)$, k $(u_2 + v_2)$, k $(u_3 + v_3)$).

Distributividad escalar respecto a la suma de escalares: Para todo k_1, k_2 ∈ $\mathbb{R}$ y u ∈ $\mathbb{R}^3$, $(k_1 + k_2)$ u= k_1u + k_2u. En particular, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
$(k_1 + k_2)$ u= k_1u + k_2u ⟺
$(k_1 + k_2)$ (u_1, u_2, u_3)= k_1 (u_1, u_2, u_3) + k_2 (u_1, u_2, u_3) ⟺
$((k_1 + k_2)\, u_1, (k_1 + k_2)\, u_2, (k_1 + k_2)\, u_3)$= $(k_1u_1, k_1u_2, k_1u_3) + (k_2u_1, k_2u_2, k_2u_3)$ ⟺
$((k_1 + k_2)\, u_1, (k_1 + k_2)\, u_2, (k_1 + k_2)\, u_3)$= $(k_1u_1 + k_2u_1, k_1u_2 + k_2u_2, k_1u_3 + k_2u_3)$ ⟺
$((k_1 + k_2)\, u_1, (k_1 + k_2)\, u_2, (k_1 + k_2)\, u_3)$= $((k_1 + k_2)\, u_1, (k_1 + k_2)\, u_2, (k_1 + k_2)\, u_3)$.

Asociatividad del producto por escalar: Para todo k_1, k_2 ∈ $\mathbb{R}$ y u ∈ $\mathbb{R}^3$, (k_1k_2) u= k_1 $(k_2$u). En particular, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
(k_1k_2) u= k_1 $(k_2$u) ⟺
(k_1k_2) (u_1, u_2, u_3)= k_1 $(k_2\, (u_1, u_2, u_3))$ ⟺
$((k_1k_2)\, u_1, (k_1k_2)\, u_2, (k_1k_2)\, u_3)$= k_1 (k_2u_1, k_2u_2, k_2u_3) ⟺
$(k_1k_2u_1, k_1k_2u_2, k_1k_2u_3)$= $(k_1k_2u_1, k_1k_2u_2, k_1k_2u_3)$.

Elemento neutro del producto por escalar: Existe un elemento e ∈ $\mathbb{R}$ tal que, para todo u ∈ $\mathbb{R}^3$, se cumple que ue= eu= u. En particular, 1 es el elemento neutro ∈ $\mathbb{R}$, ya que, para u= (u_1, u_2, u_3) ∈ $\mathbb{R}^3$, con cualesquiera u_i ∈ $\mathbb{R}$, i= 1, 2, 3,
u * 1= 1 * u= u ⟺
(u_1, u_2, u_3) * 1= 1 * (u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3) ⟺
$(u_1$ * 1, u_2 * 1, u_3 * 1)= (1 * u_1, 1 * u_2, 1 * u_3)= (u_1, u_2, u_3) ⟺
(u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3)= (u_1, u_2, u_3).

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondiente al espacio.

(b) *Las matrices reales de 2x2.*

Cerradura bajo la suma: Para cada A, B ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, A + B ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij} ∈ $\mathbb{R}$, i, j= 1, 2, A + B= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$, por lo que A + B ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$.

Conmutatividad de la suma: Para cada A, B ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, A + B= B + A. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij} ∈ $\mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
A + B= B + A ⟺

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix}.$

Asociatividad de la suma: Para cada A, B, C $\in \mathbb{R}^{2x2}$, (A + B) + C= A + (B + C). En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, b_{ij}, $c_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
(A + B) + C= A + (B + C) $\Leftrightarrow$
$(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}) \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{pmatrix}.$

Elemento neutro de la suma: Existe un elemento E $\in \mathbb{R}^{2x2}$ tal que, para todo A $\in \mathbb{R}^{2x2}$, se cumple que A + E= E + A= A. En particular, $0_{\mathbb{R}^{2x2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro $\in \mathbb{R}^{2x2}$, ya que, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
A + $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$= $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$ + A= A $\Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$

Elementos opuestos de la suma: Un elemento A $\in \mathbb{R}^{2x2}$ tiene inverso si existe A´ $\in \mathbb{R}^{2x2}$ tal que A + A´= A´ + A= E. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, su inverso es A´= $\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, por lo que existe inverso para todo A $\in \mathbb{R}^{2x2}$.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo A $\in \mathbb{R}^{2x2}$ y k $\in \mathbb{R}$, kA $\in \mathbb{R}^{2x2}$. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2, kA= k $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$, por lo que kA $\in \mathbb{R}^{2x2}$.

Distributividad escalar respecto a la suma de vectores: Para todo A, B $\in \mathbb{R}^{2x2}$ y k $\in \mathbb{R}$, k (A + B)= kA + kB. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera a_{ij}, $b_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
k (A + B)= kA + kB $\Leftrightarrow$
k $(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix})$= k $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ + k $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
k $\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} ka_{11}+kb_{11} & ka_{12}+kb_{12} \\ ka_{21}+kb_{21} & ka_{22}+kb_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}.$

<u>Distributividad escalar respecto a la suma de escalares:</u> Para todo k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ y A $\in \mathbb{R}^{2x2}$, (k_1 + k_2) A= k_1A + k_2A. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
(k_1 + k_2) A= k_1A + k_2A $\Leftrightarrow$
$(k_1+k_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}= k_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ k_1a_{21} & k_1a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2a_{11} & k_2a_{12} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} k_1a_{11}+k_2a_{11} & k_1a_{12}+k_2a_{12} \\ k_1a_{21}+k_2a_{21} & k_1a_{22}+k_2a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} (k_1+k_2)a_{11} & (k_1+k_2)a_{12} \\ (k_1+k_2)a_{21} & (k_1+k_2)a_{22} \end{pmatrix}.$

<u>Asociatividad del producto por escalar:</u> Para todo k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ y A $\in \mathbb{R}^{2x2}$, (k_1k_2) A= k_1 (k_2A). En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
(k_1k_2) A= k_1 (k_2A) $\Leftrightarrow$
$(k_1k_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}= k_1 (k_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} k_1k_2a_{11} & k_1k_2a_{12} \\ k_1k_2a_{21} & k_1k_2a_{22} \end{pmatrix}= k_1 \begin{pmatrix} k_2a_{11} & k_2a_{12} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} k_1k_2a_{11} & k_1k_2a_{12} \\ k_1k_2a_{21} & k_1k_2a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} k_1k_2a_{11} & k_1k_2a_{12} \\ k_1k_2a_{21} & k_1k_2a_{22} \end{pmatrix}.$

<u>Elemento neutro del producto por escalar:</u> Existe un elemento e $\in \mathbb{R}$ tal que, para todo A $\in \mathbb{R}^{2x2}$, se cumple que Ae= eA= A. En particular, 1 es el elemento neutro $\in \mathbb{R}$, ya que, para A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j= 1, 2,
A * 1= 1 * A= A $\Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * 1= 1 * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11}*1 & a_{12}*1 \\ a_{21}*1 & a_{22}*1 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} 1*a_{11} & 1*a_{12} \\ 1*a_{21} & 1*a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto de las matrices reales de 2x2 es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondiente al espacio.

(c) *Los polinomios de grado menor o igual a 3 ($\mathcal{P}_3$). ¿El conjunto de los polinomios de grado 3 también es un espacio vectorial?*

<u>Cerradura bajo la suma:</u> Para cada p (x), q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$, p (x) + q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$. En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, q (x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i, b_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3, p (x) + q (x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0= (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0), por lo que p (x) + q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$.

<u>Conmutatividad de la suma:</u> Para cada p (x), q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$, p (x) + q (x)= q (x) + p (x). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, q (x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i, b_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3,
p (x) + q (x)= q (x) + p (x) ⇔
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ⇔
(a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)= (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0).

<u>Asociatividad de la suma:</u> Para cada p (x), q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$, (p (x) + q (x)) + r (x)= p (x) + (q (x) + r (x)). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, q (x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0, r (x)= c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i, b_i, c_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3,
(p (x) + q (x)) + r (x)= p (x) + (q (x) + r (x)) ⇔
(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0) ⇔
(a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + (b_3 + c_3) x^3 + (b_2 + c_2) x^2 + (b_1 + c_1) x + (b_0 + c_0) ⇔
(a_3 + b_3 + c_3) x^3 + (a_2 + b_2 + c_2) x^2 + (a_1 + b_1 + c_1) x + (a_0 + b_0 + c_0)= (a_3 + b_3 + c_3) x^3 + (a_2 + b_2 + c_2) x^2 + (a_1 + b_1 + c_1) x + (a_0 + b_0 + c_0).

<u>Elemento neutro de la suma:</u> Existe un elemento e (x) ∈ $\mathcal{P}_3$ tal que, para todo p (x) ∈ $\mathbb{R}^3$, se cumple que p (x) + e (x)= e (x) + p (x)= p (x). En particular, 0 (x)= 0 es el elemento neutro ∈ $\mathcal{P}_3$, ya que, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3,
p (x) + 0 (x)= 0 (x) + p (x)= p (x) ⇔
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + 0= 0 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ⇔
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.

<u>Elementos opuestos de la suma:</u> Un elemento p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$ tiene inverso si existe p (x)´ ∈ $\mathcal{P}_3$ tal que p (x) + p (x)´= p (x)´ + p (x)= 0 (x). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3, su inverso es p (x)´= -a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, por lo que existe inverso para todo p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$ y k ∈ ℝ, k p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$. En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3, k p (x)= k (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)= ka_3x^3 + ka_2x^2 + ka_1x + ka_0, por lo que k p (x) ∈ $\mathcal{P}_3$.

<u>Distributividad escalar respecto a la suma de vectores:</u> Para cada p (x), q (x) ∈ $\mathcal{P}_3$ y k ∈ ℝ, k (p (x) + q (x))= k p (x) + k q (x). En particular, para p (x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, q (x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 ∈ $\mathcal{P}_3$, con cualesquiera a_i, b_i ∈ ℝ, i= 0, 1, 2, 3,
k (p (x) + q (x))= k p (x) + k q (x) ⇔
k (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)= k (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + k (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) ⇔

k [$(a_3 + b_3)\ x^3 + (a_2 + b_2)\ x^2 + (a_1 + b_1)$ x + $(a_0 + b_0)$]= ka_3x^3 + ka_2x^2 + ka_1x + ka_0 + kb_3x^3 + kb_2x^2 + kb_1x + kb_0 ⟺
k $(a_3 + b_3)\ x^3$ + k $(a_2 + b_2)\ x^2$ + k $(a_1 + b_1)$ x + k $(a_0 + b_0)$= (ka_3 + kb_3) x^3 + (ka_2 + kb_2) x^2 + (ka_1 + kb_1) x + (ka_0 + kb_0) ⟺
k $(a_3 + b_3)\ x^3$ + k $(a_2 + b_2)\ x^2$ + k $(a_1 + b_1)$ x + k $(a_0 + b_0)$= k $(a_3 + b_3)\ x^3$ + k $(a_2 + b_2)\ x^2$ + k $(a_1 + b_1)$ x + k $(a_0 + b_0)$.

<u>Distributividad escalar respecto a la suma de escalares:</u> Para todo k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ y p (x) $\in \mathcal{P}_3$, $(k_1 + k_2)$ p (x)= k_1 p (x) + k_2 p (x). En particular, para p (x)= $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0 \in \mathcal{P}_3$, con cualesquiera $a_i \in \mathbb{R}$, i= 0, 1, 2, 3,
$(k_1 + k_2)$ p (x)= k_1 p (x) + k_2 p (x) ⟺
$(k_1 + k_2)\ (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0)$= $k_1\ (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0)$ + $k_2\ (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0)$ ⟺
$(k_1 + k_2)\ a_3x^3 + (k_1 + k_2)\ a_2x^2 + (k_1 + k_2)\ a_1$x + $(k_1 + k_2)\ a_0$= $k_1a_3x^3 + k_1a_2x^2 + k_1a_1$x + $k_1a_0 + k_2a_3x^3 + k_2a_2x^2 + k_2a_1$x + k_2a_0 ⟺
$(k_1 + k_2)\ a_3x^3 + (k_1 + k_2)\ a_2x^2 + (k_1 + k_2)\ a_1$x + $(k_1 + k_2)\ a_0$= $(k_1 + k_2)\ a_3x^3 + (k_1 + k_2)\ a_2x^2 + (k_1 + k_2)\ a_1$x + $(k_1 + k_2)\ a_0$.

<u>Asociatividad del producto por escalar:</u> Para todo k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ y p (x) $\in \mathcal{P}_3$, (k_1k_2) p (x)= k_1 (k_2 p (x)). En particular, para p (x)= $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0 \in \mathcal{P}_3$, con cualesquiera $a_i \in \mathbb{R}$, i= 0, 1, 2, 3,
(k_1k_2) p (x)= k_1 (k_2 p (x)) ⟺
$(k_1k_2)\ (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0)$= k_1 [$k_2\ (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0)$] ⟺
$k_1k_2a_3x^3 + k_1k_2a_2x^2 + k_1k_2a_1$x + $k_1k_2a_0$= $k_1\ (k_2a_3x^3 + k_2a_2x^2 + k_2a_1$x + $k_2a_0)$ ⟺
$k_1k_2a_3x^3 + k_1k_2a_2x^2 + k_1k_2a_1$x + $k_1k_2a_0$= $k_1k_2a_3x^3 + k_1k_2a_2x^2 + k_1k_2a_1$x + $k_1k_2a_0$.

<u>Elemento neutro del producto por escalar:</u> Existe un elemento e $\in \mathbb{R}$ tal que, para todo p (x) $\in \mathcal{P}_3$, se cumple que p (x) e= e p (x)= p (x). En particular, 1 es el elemento neutro $\in \mathbb{R}$, ya que, para p (x)= $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0 \in \mathcal{P}_3$, con cualesquiera $a_i \in \mathbb{R}$, i= 0, 1, 2, 3,
p (x) * 1= 1 * p (x)= p (x) ⟺
$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0)$ * 1= 1 * $(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + $a_0)$= $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + a_0 ⟺
a_3x^3 * 1 + a_2x^2 * 1 + a_1x * 1 + a_0 * 1= 1 * a_3x^3 + 1 * a_2x^2 + 1 * a_1x + 1 * a_0= a_3x^3 + $a_2x^2 + a_1$x + a_0 ⟺
$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + a_0= $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + a_0= $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$x + a_0.

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3 ($\mathcal{P}_3$) es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondiente al espacio.

El conjunto de los polinomios de grado 3 no es un espacio vectorial, ya que no es cerrado bajo la suma y, además, no tiene elemento neutro de la suma.

Ejercicio 2.

Sea V un Espacio Vectorial, demostrar que, si αv= 0_V, entonces, α= 0 o v= 0_V (o ambos son nulos).

Se sabe que αv= 0_V, donde $\alpha \in$ K es un escalar en un cuerpo, v $\in$ V es un vector en el espacio vectorial V y 0_V es el vector nulo en V.

Se quiere probar que, si αv= 0_V, entonces, α= 0 o v= 0_V (o ambos).

Se supone, por contradicción, que $\alpha \neq 0$ y v$\neq 0_V$.

Si $\alpha \neq 0$, por la propiedad de los cuerpos, α tiene un inverso multiplicativo $\alpha^{-1} \in$ K tal que $\alpha\alpha^{-1}$= 1.

Pre-multiplicando a ambos lados de αv= 0_V por α^{-1}, se tiene:

α^{-1} (αv)= $\alpha^{-1}0_V$
α^{-1} (αv)= 0_V.

Usando la propiedad asociativa del producto por escalar, se tiene:

($\alpha^{-1}\alpha$) v= 0_V.

Usando que α^{-1} es el inverso de α, se tiene:

1v= 0_V
v= 0_V.

Lo cual contradice la suposición de que v$\neq 0_V$.

Por lo tanto, queda demostrado que, si αv= 0_V, entonces, α= 0 o v= 0_V (o ambos).

Ejercicio 3.

Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar):

(a) *S= {(x, 0): x ∈ ℝ}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0). En particular, con x= 0 ∈ ℝ, (x, 0) ∈ S, por lo que $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0) ∈ S y, entonces, S≠ ∅.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∈ S. En particular, para u= $(x_1$, 0) ∈ S y v= $(x_2$, 0) ∈ S, u + v= $(x_1$, 0) + $(x_2$, 0)= $(x_1 + x_2$, 0 + 0)= $(x_1 + x_2$, 0), con $x_1 + x_2 \in$ ℝ, por lo que u + v ∈ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ S y k ∈ ℝ, ku ∈ S. En particular, para u= (x, 0) ∈ S, ku= k (x, 0)= (kx, 0), con kx ∈ ℝ, por lo que ku ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(b) *S= {(1, y): y ∈ ℝ}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0). En particular, con y= 0 ∈ ℝ, (1, y) ∈ S, pero 1≠ 0, por lo que $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0) ∉ S.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∉ S. En particular, para u= (1, y_1) ∈ S y v= (1, y_2) ∈ S, u + v= (1, y_1) + (1, y_2)= (1 + 1, $y_1 + y_2$)= (2, $y_1 + y_2$), con 2≠ 1, por lo que u + v ∉ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ S y k ∈ ℝ, ku ∉ S. En particular, para u= (1, y) ∈ S, ku= k (1, y)= (k, ky)≠ (1, y) (excepto si k= 1), por lo que ku ∉ S.

Por lo tanto, S no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que no satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(c) *S= {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: x + y= 0}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0). En particular, con x= 0, y= 0 ∈ ℝ, (x, y) ∈ S, ya que x + y= 0 + 0= 0, por lo que $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0) ∈ S y, entonces, S≠ ∅.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∈ S. En particular, para u= (x_1, y_1) ∈ S y v= (x_2, y_2) ∈ S, u + v= (x_1, y_1) + (x_2, y_2)= $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, con $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$= $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$= 0 + 0= 0, por lo que u + v ∈ S.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo u ∈ S y k ∈ $\mathbb{R}$, ku ∈ S. En particular, para u= (x, y) ∈ S, ku= k (x, y)= (kx, ky), con kx + ky= k (x + y)= k * 0= 0, por lo que ku ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(d) *S= {(x, y) ∈* $\mathbb{R}^2$*: x + y= 1}.*

<u>Elemento neutro:</u> El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0). En particular, con x= 0, y= 0 ∈ $\mathbb{R}$, (x, y) ∉ S, ya que x + y= 0 + 0= 0≠ 1, por lo que $0_{\mathbb{R}^2}$= (0, 0) ∉ S.

<u>Cerradura bajo la suma:</u> Para cada u, v ∈ S, u + v ∉ S. En particular, para u= (x_1, y_1) ∈ S y v= (x_2, y_2) ∈ S, u + v= (x_1, y_1) + (x_2, y_2)= $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, con $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$= $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$= 1 + 1= 2≠ 1, por lo que u + v ∉ S.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo u ∈ S y k ∈ $\mathbb{R}$, ku ∉ S. En particular, para u= (x, y) ∈ S, ku= k (x, y)= (kx, ky), con kx + ky= k (x + y)= k * 1= k≠ 1 (excepto si k= 1), por lo que ku ∉ S.

Por lo tanto, S no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que no satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(e) *S= {(x, y, z) ∈* $\mathbb{R}^3$*: z= x - y}.*

<u>Elemento neutro:</u> El elemento neutro en $\mathbb{R}^3$ es $0_{\mathbb{R}^3}$= (0, 0, 0). En particular, con x= 0, y= 0, z= 0 ∈ $\mathbb{R}$, (x, y, z) ∈ S, ya que z= x - y ⇔ 0= 0 - 0 ⇔ 0= 0, por lo que $0_{\mathbb{R}^3}$= (0, 0, 0) ∈ S y, entonces, S≠ ∅.

<u>Cerradura bajo la suma:</u> Para cada u, v ∈ S, u + v ∈ S. En particular, para u= (x_1, y_1, z_1) ∈ S y v= (x_2, y_2, z_2) ∈ S, u + v= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)= $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, con $z_1 + z_2$= $(x_1 + x_2)$ - $(y_1 + y_2)$= $(x_1 - y_1)$ + $(x_2 - y_2)$, por lo que u + v ∈ S.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo u ∈ S y k ∈ $\mathbb{R}$, ku ∈ S. En particular, para u= (x, y, z) ∈ S, ku= k (x, y, z)= (kx, ky, kz), con kz= kx - ky ⇔ kz= k (x - y) ⇔ z= x - y, por lo que ku ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(f) *S= {(x, y, z, w) ∈* $\mathbb{R}^4$*: x + y + w= 1}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^4$ es $0_{\mathbb{R}^4}$= (0, 0, 0, 0). En particular, con x= 0, y= 0, z= 0, w= 0 ∈ ℝ, (x, y, z, w) ∉ S, ya que x + y + w= 0 + 0 + 0= 0≠ 1, por lo que $0_{\mathbb{R}^4}$= (0, 0, 0, 0) ∉ S.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∉ S. En particular, para u= (x_1, y_1, z_1, w_1) ∈ S y v= (x_2, y_2, z_2, w_2) ∈ S, u + v= (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2), con (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (w_1 + w_2)= (x_1 + y_1 + w_1) + (x_2 + y_2 + w_2)= 1 + 1= 2≠ 1, por lo que u + v ∉ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ S y k ∈ ℝ, ku ∉ S. En particular, para u= (x, y, z, w) ∈ S, ku= k (x, y, z, w)= (kx, ky, kz, kw), con kx + ky + kw= k (x + y + w)= k * 1= k≠ 1 (excepto si k= 1), por lo que ku ∉ S.

Por lo tanto, S no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que no satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(g) *S= {(x, y, z, w) ∈ $\mathbb{R}^4$: x + y - w= 0, z + 3y= 0}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^4$ es $0_{\mathbb{R}^4}$= (0, 0, 0, 0). En particular, con x= 0, y= 0, z= 0, w= 0 ∈ ℝ, (x, y, z, w) ∈ S, ya que x + y - w= 0 + 0 - 0= 0 y z + 3y= 0 + 3 * 0= 0 + 0= 0, por lo que $0_{\mathbb{R}^4}$= (0, 0, 0, 0) ∈ S.

Cerradura bajo la suma: Para cada u, v ∈ S, u + v ∈ S. En particular, para u= (x_1, y_1, z_1, w_1) ∈ S y v= (x_2, y_2, z_2, w_2) ∈ S, u + v= (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2), con (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (w_1 + w_2)= (x_1 + y_1 - w_1) + (x_2 + y_2 - w_2)= 0 + 0= 0 y (z_1 + z_2) + 3 (y_1 + y_2)= (z_1 + 3y_1) + (z_2 + 3y_2)= 0 + 0= 0, por lo que u + v ∈ S.

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo u ∈ S y k ∈ ℝ, ku ∈ S. En particular, para u= (x, y, z, w) ∈ S, ku= k (x, y, z, w)= (kx, ky, kz, kw), con kx + ky - kw= k (x + y - w)= k * 0= 0 y kz + 3ky= k (z + 3y)= k * 0= 0, por lo que ku ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

(h) *S= {$\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$: a, b, c ∈ ℝ}.*

Elemento neutro: El elemento neutro en $\mathbb{R}^{2x2}$ es $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En particular, con a= b= c= 0 ∈ ℝ, $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$ ∈ S, por lo que $0_{\mathbb{R}^{2x2}}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∈ S.

<u>Cerradura bajo la suma:</u> Para cada A, B ∈ S, A + B ∈ S. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix}$ ∈ S y B= $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$ ∈ S, con a_i, b_i, c_i ∈ ℝ, i= 1, 2, A + B= $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$, con $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$ ∈ ℝ, por lo que A + B ∈ S.

<u>Cerradura bajo el producto por escalar:</u> Para todo A ∈ S y k ∈ ℝ, kA ∈ S. En particular, para A= $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$ ∈ S, kA= k $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} ka & kb \\ ka & kc \end{pmatrix}$, con ka, kb, kc ∈ ℝ, por lo que kA ∈ S.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

Ejercicio 4.

Decidir si los siguientes subconjuntos son generadores de $\mathbb{R}^3$.

(a) *S= {(1, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)}.*

(x, y, z)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (0, 1, 0) + α_3 (0, 0, 1) + α_4 (1, 2, 3)
(x, y, z)= (α_1, 0, α_1) + (0, α_2, 0) + (0, 0, α_3) + (α_4, $2\alpha_4$, $3\alpha_4$)
(x, y, z)= (α_1 + α_4, α_2 + $2\alpha_4$, α_1 + α_3 + $3\alpha_4$).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_4 \\ y = \alpha_2 + 2\alpha_4 \\ z = \alpha_1 + \alpha_3 + 4\alpha_4 \end{cases}.$$

α_1= x - α_4.

α_2= y - $2\alpha_4$.

z= x - α_4 + α_3 + $3\alpha_4$
z= x + α_3 + $2\alpha_4$
α_3= z - x - $2\alpha_4$.

Por lo tanto, el subconjunto S es generador de $\mathbb{R}^3$, ya que existen soluciones de α_1, α_2, α_3 en términos de x, y, z, lo cual implica que cualquier vector (x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores en S. Sin embargo, S contiene un vector redundante porque hay más vectores que la dimensión del espacio (y, por ende, el parámetro α_4 es libre).

(b) *S= {(1, 0, 1); (1, 1, 1); (0, 0, 1)}.*

(x, y, z)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (1, 1, 1) + α_3 (0, 0, 1)
(x, y, z)= (α_1, 0, α_1) + (α_2, α_2, α_2) + (0, 0, α_3)
(x, y, z)= (α_1 + α_2, α_2, α_1 + α_2 + α_3).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_2 \\ z = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}.$$

α_2= y.

x= α_1 + y
α_1= x - y.

z= x - y + y + α_3
z= x + α_3
α_3= z - x.

Por lo tanto, el subconjunto S es generador de $\mathbb{R}^3$, ya que existen soluciones de α_1, α_2, α_3 en términos de x, y, z, lo cual implica que cualquier vector (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores en S.

(c) *S= {(1, 0, 1); (0, 1, 0)}.*

(x, y, z)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (0, 1, 0)
(x, y, z)= (α_1, 0, α_1) + (0, α_2, 0)
(x, y, z)= (α_1, α_2, α_1).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2. \\ z = \alpha_1 \end{cases}$$

α_1= x= z.
α_2= y.

Por lo tanto, el subconjunto S no es generador de $\mathbb{R}^3$, ya que los vectores generados por S están contenidos en un subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por x= z, lo cual implica que no todo vector (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores en S.

Ejercicio 5.

Analizar si el siguiente conjunto puede generar el subespacio de las matrices simétricas de 2x2: S= {$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*;* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*;* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*}.*

M_{2x2}^{s}= {A ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$: A= $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, a, b, c ∈ $\mathbb{R}$}.

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} a = \alpha_1 \\ b = \alpha_2 \\ b = \alpha_2 \\ c = \alpha_3 \end{cases}$.

α_1= a.
α_2= b.
α_3= c.

Por lo tanto, el conjunto S puede generar el subespacio de las matrices simétricas de 2x2, ya que existen soluciones de α_1, α_2, α_3 en términos de a, b, c, lo cual implica que cualquier matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$ se puede expresar como combinación lineal de las matrices en S.
.

Ejercicio 6.

Dar el subespacio generado por los vectores {(1, 0, 1); (1, 1, 0)}.

(x, y, z)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (1, 1, 0)
(x, y, z)= (α_1, 0, α_1) + (α_2, α_2, 0)
(x, y, z)= (α_1 + α_2, α_2, α_1).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_2 \\ z = \alpha_1 \end{cases}.$$

α_1= z.
α_2= y.
x= z + y.

Por lo tanto, el subespacio generado por los vectores {(1, 0, 1); (1, 1, 0)} es:

{(x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$: x= y + z}.

Ejercicio 7.

Dar el subespacio generado por los vectores {(1, 1, 1); (1, -1, 0)}.

(x, y, z)= α_1 (1, 1, 1) + α_2 (1, -1, 0)
(x, y, z)= (α_1, α_1, α_1) + (α_2, -α_2, 0)
(x, y, z)= (α_1 + α_2, α_1 - α_2, α_1).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_1 - \alpha_2. \\ \quad z = \alpha_1 \end{cases}$$

α_1= z.

x= z + α_2
α_2= x - z.

y= z - (x - z)
y= z - x + z
y= 2z - x.

Por lo tanto, el subespacio generado por los vectores {(1, 1, 1); (1, -1, 0)} es:

{(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$: y= 2z - x}.

Ejercicio 8.

Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

(a) *S= {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)}.*

(0, 0, 0)= α_1 (1, 0, 0) + α_2 (0, 1, 0) + α_3 (0, 0, 1) + α_4 (1, 2, 3)
(0, 0, 0)= (α_1, 0, 0) + (0, α_2, 0) + (0, 0, α_3) + (α_4, $2\alpha_4$, $3\alpha_4$)
(0, 0, 0)= (α_1 + α_4, α_2 + $2\alpha_4$, α_3 + $3\alpha_4$).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_4 \\ 0 = \alpha_2 + 2\alpha_4. \\ 0 = \alpha_3 + 4\alpha_4 \end{cases}$$

α_1= -α_4.
α_2= -2α_4.
α_3= -4α_4.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S no son linealmente independientes, ya que existen escalares α_1, α_2, α_3, α_4 no todos nulos tales que la combinación lineal de estos vectores es igual a 0.

(b) *S= {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)}.*

(0, 0, 0)= α_1 (1, 0, 0) + α_2 (0, 1, 0) + α_3 (0, 0, 1)
(0, 0, 0)= (α_1, 0, 0) + (0, α_2, 0) + (0, 0, α_3)
(0, 0, 0)= (α_1, α_2, α_3).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_2. \\ 0 = \alpha_3 \end{cases}$$

α_1= 0.
α_2= 0.
α_3= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

(c) *S= {(1, 0); (0, 1); (2, 3)}.*

(0, 0)= α_1 (1, 0) + α_2 (0, 1) + α_3 (2, 3)
(0, 0)= (α_1, 0) + (0, α_2) + ($2\alpha_3$, $3\alpha_3$)
(0, 0)= (α_1 + $2\alpha_3$, α_2 + $3\alpha_3$).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ 0 = \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases}.$$

α_1= -2α_3.
α_2= -3α_3.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S no son linealmente independientes, ya que existen escalares α_1, α_2, α_3 no todos nulos tales que la combinación lineal de estos vectores es igual a 0.

(d) *S= {(1, -3); (1, -1)}.*

(0, 0)= α_1 (1, -3) + α_2 (1, -1)
(0, 0)= (α_1, -3α_1) + (α_2, -α_2)
(0, 0)= (α_1 + α_2, -3α_1 - α_2).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = -3\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}.$$

α_1= -α_2.

0= -3 (-α_2) - α_2
0= 3α_2 - α_2
0= 2α_2
α_2= $\frac{0}{2}$
α_2= 0.

α_1= -0
α_1= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2 son iguales a 0.

(e) *S= {(0, 2, -1); (1, 7, 1); (1, 3, -1); (0, 0, 0)}.*

(0, 0, 0)= α_1 (0, 2, -1) + α_2 (1, 7, 1) + α_3 (1, 3, -1) + α_4 (0, 0, 0)
(0, 0, 0)= (0, 2α_1, -α_1) + (α_2, 7α_2, α_2) + (α_3, 3α_3, -α_3) + (0, 0, 0)
(0, 0, 0)= (α_2 + α_3, 2α_1 + 7α_2 + 3α_3, -α_1 + α_2 - α_3).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = 2\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3. \\ 0 = -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}$$

α_2= -α_3.

0= $2\alpha_1$ + 7 (-α_3) + $3\alpha_3$
0= $2\alpha_1$ - $7\alpha_3$ + $3\alpha_3$
0= $2\alpha_1$ - $4\alpha_3$
$2\alpha_1$= $4\alpha_3$
α_1= $\frac{4}{2}$ α_3
α_1= $2\alpha_3$.

0= -$2\alpha_3$ + (-α_3) - α_3
0= -$2\alpha_3$ - α_3 - α_3
0= -$4\alpha_3$
α_3= $\frac{0}{-4}$
α_3= 0.

α_2= -0
α_2= 0.

α_1= 2 * 0
α_1= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

(f) *S= {(4, 1, 0, 0); (-3, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)}.*

(0, 0, 0, 0)= α_1 (4, 1, 0, 0) + α_2 (-3, 0, 1, 0) + α_3 (1, 0, 0, 1)
(0, 0, 0, 0)= ($4\alpha_1$, α_1, 0, 0) + (-$3\alpha_2$, 0, α_2, 0) + (α_3, 0, 0, α_3)
(0, 0, 0, 0)= ($4\alpha_1$ - $3\alpha_2$ + α_3, α_1, α_2, α_3).

$$\begin{cases} 0 = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_2 \\ 0 = \alpha_3 \end{cases}.$$

α_1= 0.
α_2= 0.
α_3= 0.

0= 4 * 0 - 3 * 0 + 0
0= 0 - 0 + 0
0= 0.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

(g) $S=\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$.

$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\alpha_2\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 2\alpha_2\\ \alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 0=\alpha_1 \\ 0=2\alpha_2 \\ 0=\alpha_1 \\ 0=\alpha_1+\alpha_2 \end{cases}$.

$\alpha_1=0$.

$2\alpha_2=0$
$\alpha_2=\frac{0}{2}$
$\alpha_2=0$.

$0=0+0$
$0=0$.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2 son iguales a 0.

(h) $S=\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$.

$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1\\ \alpha_1 & \alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \alpha_2\\ \alpha_2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \alpha_3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_3\end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 0=\alpha_1 \\ 0=\alpha_1+\alpha_2 \\ 0=\alpha_1+\alpha_2 \\ 0=\alpha_1+\alpha_3 \end{cases}$.

$\alpha_1=0$.

$0=0+\alpha_2$
$\alpha_2=0$.

$0 = 0 + \alpha_3$
$\alpha_3 = 0$.

Por lo tanto, los vectores del conjunto S son linealmente independientes, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

Ejercicio 9.

Analizar si un conjunto de vectores que contiene al vector nulo puede ser linealmente independiente. Justificar.

Un conjunto de vectores que contiene al vector nulo no puede ser linealmente independiente, ya que, para que un conjunto de vectores sea linealmente independiente, la única combinación lineal que produzca el vector nulo debe ser la trivial (es decir, todos los coeficientes de la combinación lineal iguales a cero) y, en este caso, el vector nulo puede formar una combinación lineal trivial con cualquier valor de su coeficiente.

Ejercicio 10.

Si el conjunto de vectores M= {u, v, w} de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto {u, u + 2v, u + 2v + 3w} es linealmente independiente.

0= α_1u + α_2 (u + 2v) + α_3 (u + 2v + 3w)
0= α_1u + α_2u + $\alpha_2$2v + α_3u + $\alpha_3$2v + $\alpha_3$3w
0= (α_1 + α_2 + α_3) u + 2 (α_2 + α_3) v + 3α_3w.

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = 2(\alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 = 3\alpha_3 \end{cases}.$$

3α_3= 0
α_3= $\frac{0}{3}$
α_3= 0.

0= 2 (α_2 + 0)
0= 2α_2
α_2= $\frac{0}{2}$
α_2= 0.

0= α_1 + 0 + 0
α_1= 0.

Por lo tanto, si el conjunto de vectores M= {u, v, w} de V es linealmente independiente, el conjunto {u, u + 2v, u + 2v + 3w} es linealmente independiente, ya que la combinación lineal de estos vectores igual a 0 implica que los escalares α_1, α_2, α_3 son iguales a 0.

Ejercicio 11.

Analizar si los siguientes conjuntos de vectores pueden ser base de $\mathbb{R}^2$*:*

(a) *{(2, -1); (1, 3)}.*

(0, 0)= α_1 (2, -1) + α_2 (1, 3)
(0, 0)= ($2\alpha_1$, -α_1) + (α_2, $3\alpha_2$)
(0, 0)= ($2\alpha_1$ + α_2, -α_1 + $3\alpha_2$).

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = -\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}.$$

α_2= -$2\alpha_1$.

0= -α_1 + 3 (-$2\alpha_1$)
0= -α_1 - $6\alpha_1$
0= -$7\alpha_1$
α_1= $\frac{0}{-7}$
α_1= 0.

α_2= -2 * 0
α_2= 0.

Por lo tanto, este conjunto de vectores es base de $\mathbb{R}^2$, ya que son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^2$ (cualquier conjunto de 2 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$ genera todo $\mathbb{R}^2$).

(b) *{(2, 1); (1, 1); (3, 2)}.*

(0, 0)= α_1 (2, 1) + α_2 (1, 1) + α_3 (3, 2)
(0, 0)= ($2\alpha_1$, α_1) + (α_2, α_2) + ($3\alpha_3$, $2\alpha_3$)
(0, 0)= ($2\alpha_1$ + α_2 + $3\alpha_3$, α_1 + α_2 + $2\alpha_3$).

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{cases}.$$

α_2= -$2\alpha_1$ - $3\alpha_3$.

0= α_1 + (-$2\alpha_1$ - $3\alpha_3$) + $2\alpha_3$
0= α_1 - $2\alpha_1$ - $3\alpha_3$ + $2\alpha_3$
0= -α_1 - α_3
α_1= -α_3.

α_2= -2 (-α_3) - $3\alpha_3$
α_2= $2\alpha_3$ - $3\alpha_3$

α_2= -α_3.

Por lo tanto, este conjunto de vectores no es base de $\mathbb{R}^2$, ya que no son linealmente independientes.

(c) *{(1, -1); (1, 0)}.*

(0, 0)= α_1 (1, -1) + α_2 (1, 0)
(0, 0)= (α_1, -α_1) + (α_2, 0)
(0, 0)= (α_1 + α_2, -α_1).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = -\alpha_1 \end{cases}.$$

α_1= $\frac{0}{-1}$
α_1= 0.

0= 0 + α_2
α_2= 0.

Por lo tanto, este conjunto de vectores es base de $\mathbb{R}^2$, ya que son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^2$ (cualquier conjunto de 2 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$ genera todo $\mathbb{R}^2$).

(d) *{(1, 2); (2, 4)}.*

(0, 0)= α_1 (1, 2) + α_2 (2, 4)
(0, 0)= (α_1, 2α_1) + (2α_2, 4α_2)
(0, 0)= (α_1 + 2α_2, 2α_1 + 4α_2).

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 0 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases}.$$

α_1= -2α_2.

2α_1= -4α_2
α_1= $\frac{-4}{2}$ α_2
α_1= -2α_2.

Por lo tanto, este conjunto de vectores no es base de $\mathbb{R}^2$, ya que no son linealmente independientes y no generan $\mathbb{R}^2$ (todo conjunto de 2 vectores linealmente dependientes no genera $\mathbb{R}^2$).

Ejercicio 12.

Dar las coordenadas de v= (1, 2) en los conjuntos que en el ejercicio anterior resultaron ser bases.

(a) *{(2, -1); (1, 3)}.*

(1, 2)= α_1 (2, -1) + α_2 (1, 3)
(1, 2)= ($2\alpha_1$, -α_1) + (α_2, $3\alpha_2$)
(1, 2)= ($2\alpha_1$ + α_2, -α_1 + $3\alpha_2$).

$\begin{cases} 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2 = -\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}$.

α_2= 1 - $2\alpha_1$.

2= -α_1 + 3 (1 - $2\alpha_1$)
2= -α_1 + 3 - $6\alpha_1$
2= -$7\alpha_1$ + 3
$7\alpha_1$= 3 - 2
$7\alpha_1$= 1
α_1= $\frac{1}{7}$.

α_2= 1 - 2 $\frac{1}{7}$
α_2= 1 - $\frac{2}{7}$
α_2= $\frac{5}{7}$.

Por lo tanto, las coordenadas de v= (1, 2) son ($\frac{1}{7}$, $\frac{5}{7}$).

(c) *{(1, -1); (1, 0)}.*

(1, 2)= α_1 (1, -1) + α_2 (1, 0)
(1, 2)= (α_1, -α_1) + (α_2, 0)
(1, 2)= (α_1 + α_2, -α_1).

$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2 = -\alpha_1 \end{cases}$.

-α_1= 2
α_1= $\frac{2}{-1}$
α_1= -2.

1= -2 + α_2
α_2= 1 + 2

α_2= 3.

Por lo tanto, las coordenadas de v= (1, 2) son (-2, 3).

Ejercicio 13.

Hallar una base para cada conjunto del Ejercicio 3 que sea un subespacio.

(a) *S= {(x, 0): x ∈ ℝ}.*

Los vectores en S tienen la forma (x, 0), donde x ∈ ℝ, lo cual indica que todos los vectores de S son escalares de (1, 0), por lo que S es un subespacio unidimensional generado por el vector (1, 0). Por un lado, este vector es no nulo, por lo que es linealmente independiente y, por otro lado, genera S. Por lo tanto, una base para S es {(1, 0)}.

(c) *S= {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: x + y= 0}.*

Los vectores en S tienen la forma (x, -x), donde x ∈ ℝ, lo cual indica que todos los vectores de S son escalares de (1, -1), por lo que S es un subespacio unidimensional generado por este vector. Por un lado, este vector es no nulo, por lo que es linealmente independiente y, por otro lado, genera S. Por lo tanto, una base para S es {(1, -1)}.

(e) *S= {(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$: z= x - y}.*

Los vectores en S tienen la forma (x, y, x - y), donde x, y ∈ ℝ, lo cual indica que todos los vectores de S son una combinación lineal de los vectores (1, 0, 1) y (0, 1, -1), por lo que S es un subespacio bidimensional generado por estos vectores. Por un lado, estos vectores son linealmente independientes y, por otro lado, generan S. Por lo tanto, una base para S es {(1, 0, 1); (0, 1, -1)}.

(g) *S= {(x, y, z, w) ∈ $\mathbb{R}^4$: x + y - w= 0, z + 3y= 0}.*

Los vectores en S tienen la forma (x, y, -3y, x + y), donde x, y ∈ ℝ, lo cual indica que todos los vectores de S son una combinación lineal de los vectores (1, 0, 0, 1) y (0, 1, -3, 1), por lo que S es un subespacio bidimensional generado por estos vectores. Por un lado, estos vectores son linealmente independientes y, por otro lado, generan S. Por lo tanto, una base para S es {(1, 0, 0, 1); (0, 1, -3, 1)}.

(h) *S= {$\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$: a, b, c ∈ ℝ}.*

Los vectores en S tienen la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$, donde a, b, c ∈ ℝ, lo cual indica que todas las matrices de S son una combinación lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que S es un espacio tridimensional generado por estas matrices. Por un lado, estas matrices son linealmente independientes y, por otro lado, generan S. Por lo tanto, una base para S es $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

Ejercicio 14.

Analizar si las siguientes aplicaciones entre espacios vectoriales son transformaciones lineales:

(a) *L:* $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por L (x, y)= (x, y, x + y).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^2$, se tiene:

L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 (x_1, y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $((\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 (x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 (x_1 + y_1)) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2, \alpha_2 (x_2 + y_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $\alpha_1 (x_1, y_1, x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2, x_2 + y_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L $(x_1, y_1) + \alpha_2$ L (x_2, y_2)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L $(v_1) + \alpha_2$ L (v_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

(b) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (x + z, y + z).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 (x_1, y_1, z_1) + \alpha_2 (x_2, y_2, z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $((\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 z_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2, \alpha_2 z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 (x_1 + z_1) + \alpha_2 (x_2 + z_2), \alpha_1 (y_1 + z_1) + \alpha_2 (y_2 + z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 (x_1 + z_1), \alpha_1 (y_1 + z_1)) + (\alpha_2 (x_2 + z_2), \alpha_2 (y_2 + z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $\alpha_1 (x_1 + z_1, y_1 + z_1) + \alpha_2 (x_2 + z_2, y_2 + z_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L $(x_1, y_1, z_1) + \alpha_2$ L (x_2, y_2, z_2)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L $(v_1) + \alpha_2$ L (v_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

(c) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por L (x, y, z)= (x - 2, y + 3x, 1).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 (x_1, y_1, z_1) + \alpha_2 (x_2, y_2, z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $((\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 z_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2, \alpha_2 z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$

L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ - 2, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ + 3 $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, 1)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ - 2, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + 3\alpha_1 x_1 + 3\alpha_2 x_2$, 1)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ - 2, α_1 $(y_1 + 3x_1) + \alpha_2$ $(y_2 + 3x_2)$, 1)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $(\alpha_1 x_1$ - 2, α_1 $(y_1 + 3x_1)$, 1) + $(\alpha_2 x_2$, α_1 $(y_1 + 3x_1)$, 0).

Por lo tanto, L no es una transformación lineal.

(d) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2x2}$ *definida por* $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$.

Para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2x2}$, se tiene:

L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $(\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix})$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $(\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & \alpha_1 y_1 \\ \alpha_1 z_1 & \alpha_1 w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & \alpha_2 y_2 \\ \alpha_2 z_2 & \alpha_2 w_2 \end{pmatrix})$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $\begin{pmatrix} \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & -(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $\begin{pmatrix} \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & -\alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $\begin{pmatrix} \alpha_1 z_1 & -\alpha_1 x_1 \\ \alpha_1 y_1 & -\alpha_1 w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 z_2 & -\alpha_2 x_2 \\ \alpha_2 y_2 & -\alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $\alpha_1 \begin{pmatrix} z_1 & -x_1 \\ y_1 & -w_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} z_2 & -x_2 \\ y_2 & -w_2 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= α_1 L $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \alpha_2$ L $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= α_1 L $(A_1) + \alpha_2$ L (A_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

(e) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2x2}$ *definida por* $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ y & 1 \end{pmatrix}$.

Para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2x2}$, se tiene:

L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $(\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix})$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $(\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & \alpha_1 y_1 \\ \alpha_1 z_1 & \alpha_1 w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & \alpha_2 y_2 \\ \alpha_2 z_2 & \alpha_2 w_2 \end{pmatrix})$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & 1 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & 1 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & -\alpha_1 x_1 \\ \alpha_1 y_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & -\alpha_2 x_2 \\ \alpha_2 y_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, L no es una transformación lineal.

(f) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$*= (x + z, y + w).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{2x2}$, se tiene:

L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $(\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix})$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $(\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & \alpha_1 y_1 \\ \alpha_1 z_1 & \alpha_1 w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & \alpha_2 y_2 \\ \alpha_2 z_2 & \alpha_2 w_2 \end{pmatrix})$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= L $\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 & \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $(\alpha_1 (x_1 + z_1) + \alpha_2 (x_2 + z_2), \alpha_1 (y_1 + w_1) + \alpha_2 (y_2 + w_2))$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $(\alpha_1 (x_1 + z_1), \alpha_1 (y_1 + w_1)) + (\alpha_2 (x_2 + z_2), \alpha_2 (y_2 + w_2))$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= $\alpha_1 (x_1 + z_1, y_1 + w_1) + \alpha_2 (x_2 + z_2, y_2 + w_2)$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= α_1 L $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ + α_2 L $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$
L $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$= α_1 L (A_1) + α_2 L (A_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

(g) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (0, 0).*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 (x_1, y_1, z_1) + \alpha_2 (x_2, y_2, z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $((\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 z_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2, \alpha_2 z_2))$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= L $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= (0, 0)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= (0, 0) + (0, 0)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 (0, 0) + α_2 (0, 0)
L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 L (v_1) + α_2 L (v_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

Ejercicio 15.

Hallar el núcleo e imagen de cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior y las dimensiones de cada uno de esos subespacios.

(a) *L:* $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por L (x, y)= (x, y, x + y).*

Núcleo:

L (x, y)= (0, 0, 0)
(x, y, x + y)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

x= 0.
y= 0.

0 + 0= 0
0= 0.

Nu(L)= {(0, 0)}.

dim (Nu(L))= 0.

Imagen:

Im(L)= span{L (1, 0), L (0, 1)}
Im(L)= span{(1, 0, 1 + 0), (0, 1, 0 + 1)}
Im(L)= span{(1, 0, 1), (0, 1, 1)}
Im(L)= α_1 (1, 0, 1) + α_2 (0, 1, 1), con α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$
Im(L)= $\mathbb{R}^2$.

dim (Im(L))= 2.

(b) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (x + z, y + z).*

Núcleo:

L (x, y, z)= (0, 0)
(x + z, y + z)= (0, 0).

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

z= -x.

y + (-x)= 0
y - x= 0
y= x.

Nu(L)= span{(1, 1, -1)}
Nu(L)= α_1 (1, 1, -1), con $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

dim (Nu(L))= 1.

Imagen:

Im(L)= span{L (1, 0, 0), L (0, 1, 0), L (0, 0, 1)}
Im(L)= span{(1 + 0, 0 + 0), (0 + 0, 1 + 0), (0 + 1, 0 + 1)}
Im(L)= span{(1, 0), (0, 1), (1, 1)}
Im(L)= span{(1, 0), (0, 1)}
Im(L)= α_1 (1, 0) + α_2 (0, 1), con α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$
Im(L)= $\mathbb{R}^2$.

dim (Im(L))= 2.

(d) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2x2}$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$.

Núcleo:

L $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} z = 0 \\ -x = 0 \\ y = 0 \\ -w = 0 \end{cases}.$$

x= 0; y= 0; z= 0; w= 0.

Nu(L)= $\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

dim (Nu(L))= 0.

Imagen:

Im(L)= span{L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}
Im(L)= span{$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$}

Im(L)= $\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$
Im(L)= $\mathbb{R}^{2x2}$.

dim (Im(L))= 4.

(f) *L:* $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$*= (x + z, y + w).*

Núcleo:

L $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$= (0, 0)
(x + z, y + w)= (0, 0).

$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$.

z= -x.
w= -y.

Nu(L)= $\{\begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}$: x, y $\in \mathbb{R}\}$.

dim (Nu(L))= 2.

Imagen:

Im(L)= span{L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}
Im(L)= span{(1 + 0, 0 + 0), (0 + 0, 1 + 0), (0 + 1, 0 + 0), (0 + 0, 0 + 1)}
Im(L)= span{(1, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 1)}
Im(L)= span{(1, 0), (0, 1)}
Im(L)= α_1 (1, 0) + α_2 (0, 1), con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Im(L)= $\mathbb{R}^2$.

dim (Im(L))= 2.

(g) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (0, 0).*

Núcleo:

L (x, y, z)= (0, 0)
(0, 0)= (0, 0).

Nu(L)= $\mathbb{R}^3$.

dim (Nu(L))= 3.

Imagen:

Im(L)= {(0, 0)}.

dim (Im(L))= 0.

Ejercicio 16.

Mostrar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

Sean L: V ⟶ W una transformación lineal de V en W y M: W ⟶ U una transformación lineal de W en U.

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in$ V, se tiene:

(M ∘ L) $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= M (L $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$)
(M ∘ L) $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= M ($\alpha_1$ L (v_1) + α_2 L (v_2)) por L transformación lineal
(M ∘ L) $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 M (L (v_1)) + α_2 M (L (v_2)) por M transformación lineal
(M ∘ L) $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 (M ∘ L) (v_1) + α_2 (M ∘ L) (v_2).

Por lo tanto, la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

Ejercicio 17.

(a) *¿Es la aplicación identidad una transformación lineal? En caso de serlo, hallar núcleo e imagen.*

∀ v ∈ V, I: V ⟶ V definida por I (v)= v.

Para todo α_1, α_2 ∈ ℝ y v_1, v_2 ∈ V, se tiene:

I $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$
I $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= I $(\alpha_1 v_1)$ + I $(\alpha_2 v_2)$
I $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 I (v_1) + α_2 I (v_2).

Por lo tanto, la aplicación identidad es una transformación lineal.

Nu(I)= {v ∈ V: I (v)= 0_V}
Nu(I)= {0_V}.

Im(I)= {w ∈ V: ∃ v ∈ V, I (v)= w}
Im(I)= V.

(b) *¿Es la aplicación nula una transformación lineal? En caso de serlo, hallar núcleo e imagen.*

∀ v ∈ V, N: V ⟶ V definida por N (v)= 0_V.

Para todo α_1, α_2 ∈ ℝ y v_1, v_2 ∈ V, se tiene:

N $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= 0_V
N $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $0_V + 0_V$
N $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= $\alpha_1 0_V + \alpha_2 0_V$
N $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$= α_1 N (v_1) + α_2 N (v_2).

Por lo tanto, la aplicación nula es una transformación lineal.

Nu(N)= {v ∈ V: N (v)= 0_V}
Nu(N)= {V}.

Im(N)= {w ∈ V: ∃ v ∈ V, N (v)= w}
Im(N)= {0_V}.

Ejercicio 18.

Sean C= C [a, b] el espacio vectorial de las funciones continuas de [a, b] en $\mathbb{R}$ *y L: C* $\longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por L (f)=* $\int_a^b f\ (x)\ dx$. *Mostrar que L es una transformación lineal.*

Para todo α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ y f_1, $f_2 \in$ C, se tiene:

L $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$= $\int_a^b \alpha_1 f_1\ (x) + \alpha_2 f_2\ (x)\ dx$
L $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$= $\int_a^b \alpha_1 f_1\ (x)\ dx + \int_a^b \alpha_2 f_2\ (x)\ dx$
L $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$= $\alpha_1 \int_a^b f_1\ (x)\ dx + \alpha_2 \int_a^b f_2\ (x)\ dx$
L $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$= α_1 L (f_1) + α_2 L (f_2).

Por lo tanto, L es una transformación lineal.

Ejercicio 19.

Sean C= C [a, b] el espacio vectorial de las funciones continuas de [a, b] en ℝ y D: C ⟶ C dado por D (f)= f´ (esto es, para cada función f ∈ C, el operador derivación, D, devuelve la derivada f´ de f). Mostrar que D es una transformación lineal.

Para todo α_1, α_2 ∈ ℝ y f_1, f_2 ∈ C, se tiene:

D $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$= $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$'
D $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$= $(\alpha_1 f_1)' + (\alpha_2 f_2)'$
D $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$= $\alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'$
D $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$= α_1 D (f_1) + α_2 D (f_2).

Por lo tanto, D es una transformación lineal.

Ejercicio 20.

Demostrar que, dada cualquier transformación lineal L: V ⟶ W (con V, W espacios vectoriales), el núcleo y la imagen de L forman un subespacio de V y W, respectivamente.

Nu(L)= {v ∈ V: L (v)= 0_W}.

Elemento neutro: El elemento neutro en V es 0_V. En particular, con v= 0_V ∈ V, L (0_V)= 0_W, por lo que 0_V ∈ Nu(L) y, entonces, Nu(L)≠ ∅.

Cerradura bajo la suma: Para cada v_1, v_2 ∈ Nu(L), v_1 + v_2 ∈ Nu(L). En particular, L (v_1 + v_2)= L (v_1) + L (v_2)= 0_W + 0_W= 0_W, por lo que v_1 + v_2 ∈ Nu(L).

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo v ∈ Nu(L) y k ∈ ℝ, kv ∈ Nu(L). En particular, L (kv)= k L (v)= k0_W= 0_W, por lo que kv ∈ Nu(L).

Por lo tanto, Nu(L) es un subespacio de V, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

Im(L)= {w ∈ W: ∃ v ∈ V, L (v)= w}.

Elemento neutro: El elemento neutro en W es 0_W. En particular, con v= 0_V ∈ V, L (0_V)= 0_W, por lo que 0_W ∈ Im(L) y, entonces, Im(L)≠ ∅.

Cerradura bajo la suma: Para cada w_1, w_2 ∈ Im(L), w_1 + w_2 ∈ Im(L). En particular, w_1 + w_2= L (v_1) + L (v_2)= L (v_1 + v_2), con v_1 + v_2 ∈ V, por lo que w_1 + w_2 ∈ Im(L).

Cerradura bajo el producto por escalar: Para todo w ∈ Im(L) y k ∈ ℝ, kw ∈ Im(L). En particular, kw= k L (v)= L (kv), con kv ∈ V, por lo que kw ∈ Im(L).

Por lo tanto, Im(L) es un subespacio de W, ya que satisface elemento neutro, cerradura bajo la suma y cerradura bajo el producto por escalar.

Ejercicio 21.

(a) *Hallar L: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que: L (1, 0)= (1, -2), L (0, 1)= (1, -1).*

(x, y)= x (1, 0) + y (0, 1).

L (x, y)= L (x (1, 0) + y (0, 1))
L (x, y)= L (x (1, 0)) + L (y (0, 1))
L (x, y)= x L (1, 0) + y L (0, 1)
L (x, y)= x (1, -2) + y (1, -1)
L (x, y)= (x, -2x) + (y, -y)
L (x, y)= (x + y, -2x - y).

(b) *Hallar L: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que: L (1, 0, 0)= (1, 0), L (0, 1, 0)= (-1, 6), L (0, 0, 1)= (0, 4).*

(x, y, z)= x (1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z (0, 0, 1).

L (x, y, z)= L (x (1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z (0, 0, 1))
L (x, y, z)= L (x (1, 0, 0)) + L (y (0, 1, 0)) + L (z (0, 0, 1))
L (x, y, z)= x L (1, 0, 0) + y L (0, 1, 0) + z L (0, 0, 1)
L (x, y, z)= x (1, 0) + y (-1, 6) + z (0, 4)
L (x, y, z)= (x, 0) + (-y, 6y) + (0, 4z)
L (x, y, z)= (x - y, 6y + 4z).

(c) *Hallar L: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que: L (1, 1)= (4, 2), L (0, 3)= (1, 0).*

(x, y)= α_1 (1, 1) + α_2 (0, 3)
(x, y)= (α_1, α_1) + (0, 3α_2)
(x, y)= (α_1, α_1 + 3α_2).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}.$$

α_1= x.

y= x + 3α_2
3α_2= y - x
α_2= $\frac{y-x}{3}$.

(x, y)= x (1, 1) + $\frac{y-x}{3}$ (0, 3).

L (x, y)= L (x (1, 1) + $\frac{y-x}{3}$ (0, 3))
L (x, y)= L (x (1, 1)) + L ($\frac{y-x}{3}$ (0, 3))

L (x, y)= x L (1, 1) + $\frac{y-x}{3}$ L (0, 3)
L (x, y)= x (4, 2) + $\frac{y-x}{3}$ (1, 0)
L (x, y)= (4x, 2x) + ($\frac{y-x}{3}$, 0)
L (x, y)= ($\frac{11x+y}{3}$, 2x).

(d) *Hallar L: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sabiendo que: L (1, 1, 1)= (1, 2, 3), L (0, 1, 0)= (1, -1, 0), L (-1, -1, 1)= (5, 4, 3).*

(x, y, z)= α_1 (1, 1, 1) + α_2 (0, 1, 0) + α_3 (-1, -1, 1)
(x, y, z)= (α_1, α_1, α_1) + (0, α_2, 0) + (-α_3, -α_3, α_3)
(x, y, z)= (α_1 - α_3, α_1 + α_2 - α_3, α_1 + α_3).

$$\begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_3 \\ y = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 . \\ z = \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases}$$

α_1= x + α_3.

y= x + α_3 + α_2 - α_3
y= x + α_2
α_2= y - x.

z= x + α_3 + α_3
z= x + 2α_3
2α_3= z - x
α_3= $\frac{z-x}{2}$.

α_1= x + $\frac{z-x}{2}$
α_1= $\frac{x+z}{2}$.

(x, y, z)= $\frac{x+z}{2}$ (1, 1, 1) + (y - x) (0, 1, 0) + $\frac{z-x}{2}$ (-1, -1, 1).

L (x, y, z)= L ($\frac{x+z}{2}$ (1, 1, 1) + (y - x) (0, 1, 0) + $\frac{z-x}{2}$ (-1, -1, 1))
L (x, y, z)= L ($\frac{x+z}{2}$ (1, 1, 1)) + L ((y - x) (0, 1, 0)) + L ($\frac{z-x}{2}$ (-1, -1, 1))
L (x, y, z)= $\frac{x+z}{2}$ L (1, 1, 1) + (y - x) L (0, 1, 0) + $\frac{z-x}{2}$ L (-1, -1, 1)
L (x, y, z)= $\frac{x+z}{2}$ (1, 2, 3) + (y - x) (1, -1, 0) + $\frac{z-x}{2}$ (5, 4, 3)
L (x, y, z)= ($\frac{1}{2}$ (x + z), x + z, $\frac{3}{2}$ (x + z)) + (y - x, x - y, 0) + ($\frac{5}{2}$ (z - x), 2 (z - x), $\frac{3}{2}$ (z - x))
L (x, y, z)= ($\frac{1}{2}$ (x + z) + (y - x) + $\frac{5}{2}$ (z - x), x + z + (x - y) + 2 (z - x), $\frac{3}{2}$ (x + z) + $\frac{3}{2}$ (z - x))
L (x, y, z)= ($\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{2}$ z + y - x + $\frac{5}{2}$ z - $\frac{5}{2}$ x, x + z + x - y + 2z - 2x, $\frac{3}{2}$ x + $\frac{3}{2}$ z + $\frac{3}{2}$ z - $\frac{3}{2}$ x)
L (x, y, z)= (-3x + y + 3z, 3z - y, 3z).

Ejercicio 22.

Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

(a) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por L (x, y, z)= (z - y, z - x) con las bases canónicas de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\mathbb{R}^2$.

L (1, 0, 0)= (0 - 0, 0 - 1)
L (1, 0, 0)= (0, -1)
L (1, 0, 0)= 0 (1, 0) + -1 (0, 1).

L (0, 1, 0)= (0 - 1, 0 - 0)
L (0, 1, 0)= (-1, 0)
L (0, 1, 0)= -1 (1, 0) + 0 (0, 1).

L (0, 0, 1)= (1 - 0, 1 - 0)
L (0, 0, 1)= (1, 1)
L (0, 0, 1)= 1 (1, 0) + 1 (0, 1).

$[L]_{B_{\mathbb{R}^3} B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) *L:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por L (x, y, z)= (3x + z, y - x, 2z + 2y) con la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

L (1, 0, 0)= (3 * 1 + 0, 0 - 1, 2 * 0 + 2 * 0)
L (1, 0, 0)= (3 + 0, -1, 0 + 0)
L (1, 0, 0)= (3, -1, 0)
L (1, 0, 0)= 3 (1, 0, 0) + -1 (0, 1, 0) + 0 (0, 0, 1).

L (0, 1, 0)= (3 * 0 + 0, 1 - 0, 2 * 0 + 2 * 1)
L (0, 1, 0)= (0 + 0, 1, 0 + 2)
L (0, 1, 0)= (0, 1, 2)
L (0, 1, 0)= 0 (1, 0, 0) + 1 (0, 1, 0) + 2 (0, 0, 1).

L (0, 0, 1)= (3 * 0 + 1, 0 - 0, 2 * 1 + 2 * 0)
L (0, 0, 1)= (0 + 1, 0, 2 + 0)
L (0, 0, 1)= (1, 0, 2)
L (0, 1, 0)= 1 (1, 0, 0) + 0 (0, 1, 0) + 2 (0, 0, 1).

$[L]_{B_{\mathbb{R}^3} B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) *L: $\mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por L $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$= (x + y, z + w) con B la base canónica de las matrices de $\mathbb{R}^{2x2}$ y B_1= {(1, 1); (-1, 5)} una base de $\mathbb{R}^2$.*

L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= (1 + 0, 0 + 0)
L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= (1, 0).

L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= (0 + 1, 0 + 0)
L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= (1, 0).

L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$= (0 + 0, 1 + 0)
L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$= (0, 1).

L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= (0 + 0, 0 + 1)
L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= (0, 1).

(1, 0)= α_1 (1, 1) + α_2 (-1, 5)
(1, 0)= (α_1, α_1) + (-α_2, 5α_2)
(1, 0)= (α_1 - α_2, α_1 + 5α_2).

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases}.$$

5α_2= -α_1
α_2= $\frac{-1}{5}$ α_1.

1= α_1 - ($\frac{-1}{5}$ α_1)
1= α_1 + $\frac{1}{5}$ α_1
1= $\frac{6}{5}$ α_1
α_1= $\frac{1}{\frac{6}{5}}$
α_1= $\frac{5}{6}$.

α_2= $\frac{-1}{5}$ $\frac{5}{6}$
α_2= $\frac{-1}{6}$.

L $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= $\frac{5}{6}$ (1, 1) + ($\frac{-1}{6}$) (-1, 5).
L $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= $\frac{5}{6}$ (1, 1) + ($\frac{-1}{6}$) (-1, 5).

(0, 1)= α_1 (1, 1) + α_2 (-1, 5)
(0, 1)= (α_1, α_1) + (-α_2, 5α_2)
(0, 1)= (α_1 - α_2, α_1 + 5α_2).

$\begin{cases} 0 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases}$.

α_2= α_1.

1= α_1 + 5α_1
1= 6α_1
α_1= $\frac{1}{6}$.

α_2= $\frac{1}{6}$.

L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$= $\frac{1}{6}$ (1, 1) + $\frac{1}{6}$ (-1, 5).
L $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\frac{1}{6}$ (1, 1) + $\frac{1}{6}$ (-1, 5).

$[L]_{B_{\mathbb{R}^{2x2}}B_1}$= $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.