Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 7:
Sistemas de Ecuaciones y Determinantes.

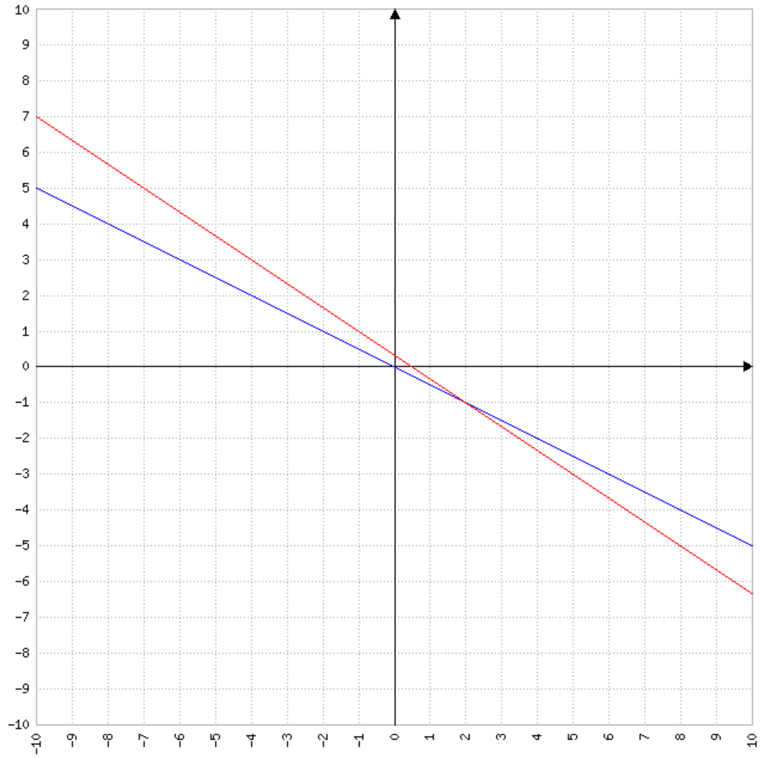
Ejercicio 1.

Representar en el plano los siguientes sistemas, indicar qué tipo de solución hay en cada una:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.

2y= -x
y= $\frac{-1}{2}$ x.

3y= -2x + 1
y= $\frac{-2x+1}{3}$
y= $\frac{-2}{3}$ x + $\frac{1}{3}$.



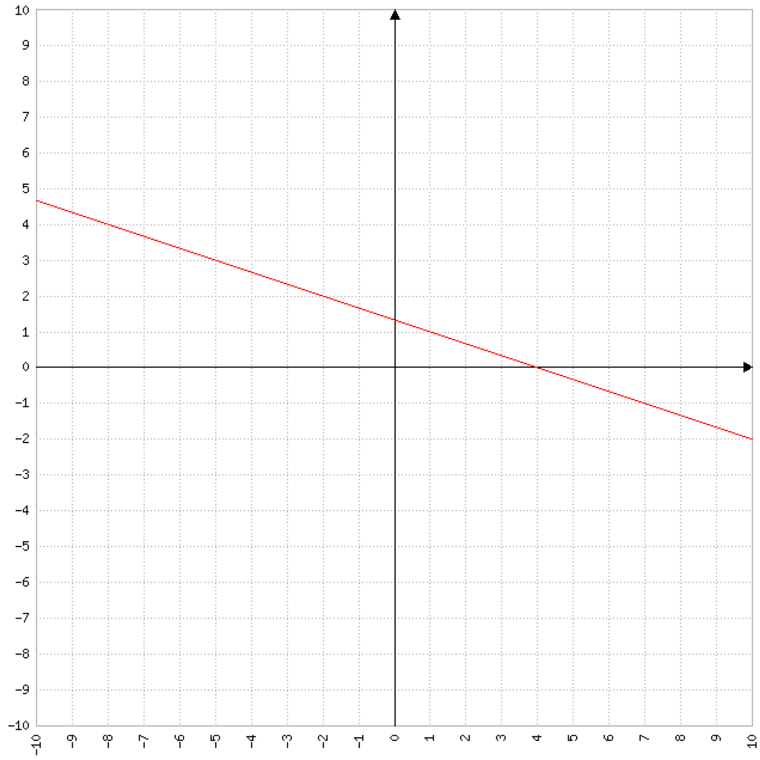
Por lo tanto, este sistema tiene única solución.

(b) $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$.

6y= -2x + 8

y= $\frac{-2x+8}{6}$
y= $\frac{-1}{3}$ x + $\frac{4}{3}$.

3y= -x + 4
y= $\frac{-x+4}{3}$
y= $\frac{-1}{3}$ x + $\frac{4}{3}$.

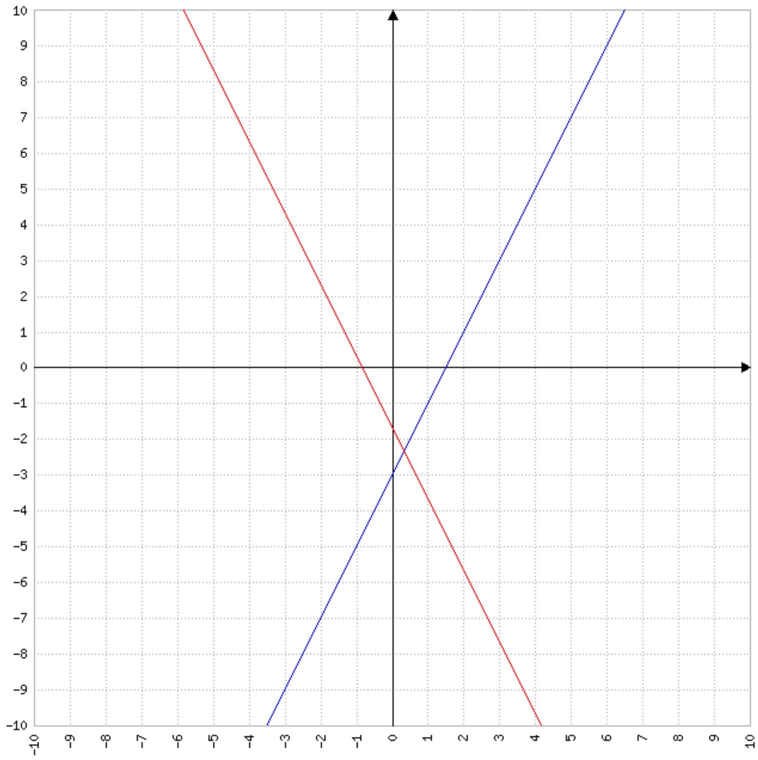


Por lo tanto, este sistema tiene infinitas soluciones.

(c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x + 3y = -5 \end{cases}$.

y= 2x - 3.

3y= -6x - 5
y= $\frac{-6x-5}{3}$
y= -2x - $\frac{5}{3}$.



Por lo tanto, este sistema tiene única solución.

Ejercicio 2.

Verificar que los valores dados son soluciones de los sistemas plateados:

(a) *x= 1, y= 2 para* $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

3 * 1 + 2= 5
3 + 2= 5
5= 5.

1 - 2= -1
-1= -1.

(b) *x= 1, y= 1 para* $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$.

1 - 1= 0
0= 0.

1 + 1= 2
2= 2.

3 * 1 - 1= 2
3 - 1= 2
2= 2.

(c) *{(x, y): x= -3y} para* $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -3x - 9y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases}$.

-3y + 3y= 0
0= 0.

-3 (-3y) - 9y= 0
9y - 9y= 0
0= 0.

2 (-3y) + 6y= 0
-6y + 6y= 0
0= 0.

(d) *x*= $\frac{15}{9}$, *y*= $\frac{8}{9}$, *z*= $\frac{-11}{9}$ *para* $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y + 4z = -4 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$.

2 $\frac{15}{9}$ + $\frac{8}{9}$ + $\frac{11}{9}$= 3
$\frac{30}{9}$ + $\frac{8}{9}$ - $\frac{11}{9}$= 3
$\frac{27}{9}$= 3
3= 3.

$\frac{8}{9}$ + 4 ($\frac{-11}{9}$)= -4
$\frac{8}{9}$ - $\frac{44}{9}$= -4
$\frac{-36}{9}$= -4
-4= -4.

$\frac{15}{9}$ - $\frac{8}{9}$ + $\frac{11}{9}$= 2
$\frac{18}{9}$= 2
2= 2.

(e) *{(x, y, z): x= 1 + y, z= 3y} para* $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

1 + y + 2y - 3y= 1
1= 1.

1 + y - y= 1
1= 1.

Ejercicio 3.

Resolver los siguientes sistemas por operaciones elementales y expresar la o las soluciones, en caso de que existan. Clasificarlos por el teorema de Rouché-Frobenius. En los casos que haya infinitas soluciones, dar dos soluciones particulares.

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 + F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - F_3 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

x_1= 6.
x_2= 4.
x_3= 0.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible determinado, ya que r (A)= r (A_b)= n= 3, y su solución es x_1= 6, x_2= 4 y x_3= 0.

(b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ u_2 - u_3 = 1 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

F_1= F_1 - F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

u_1 + 2u_3= 0
u_1= -2u_3.

u_2 - u_3= 1

$u_2= u_3 + 1$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible indeterminado, ya que r (A)= r (A_b)= 2 $<$ n= 3, y dos de sus infinitas soluciones son u_1= -2, u_2= 2, u_3= 1 y u_1= -4, u_2= 3, u_3= 2.

(c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$.

$F_1= \frac{1}{2} F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$

$F_2= F_2 - F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{-1}{2} \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$

$F_2= -2F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 - F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & | & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 - \frac{1}{2} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & | & 3 \end{pmatrix}$

$F_3= \frac{1}{5} F_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$F_1= F_1 - \frac{3}{2} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & -1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$F_1= F_1 - 4F_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-17}{5} \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

F_2= F_2 + $3F_3$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-17}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

x= $\frac{-17}{5}$.
y= $\frac{14}{5}$.
z= $\frac{3}{5}$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible determinado, ya que r (A)= r (A_b)= n= 3, y su solución es x= $\frac{-17}{5}$, y= $\frac{14}{5}$ y z= $\frac{3}{5}$.

(d) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=3 \\ 3x-y=0 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & | & 3 \\ 3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - F_1 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & | & 2 \\ 3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{-1}{3}$ F_2 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-2}{3} \\ 3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - $3F_1$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & -4 & | & -3 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 + $4F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & | & \frac{-17}{3} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es incompatible, ya que r (A)= 2≠ r (A_b)= 3.

(e) $\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 3x+5z=4 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 3 & 0 & 5 & | & 4 \\ 2 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $3F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & -6 & 2 & | & -17 \\ 2 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{-1}{6}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & | & \frac{17}{6} \\ 2 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & | & \frac{17}{6} \\ 0 & -3 & 1 & | & -15 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 + $3F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & | & \frac{17}{6} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $2F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & | & \frac{17}{6} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es incompatible, ya que r (A)= 2≠ r (A_b)= 3.

(f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 9 & -7 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{9}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{2}{9} & | & 0 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 + $2F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{9} & \frac{4}{9} & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{2}{9} & | & 0 \end{pmatrix}$.

$x_1 + \frac{13}{9}\, x_3 + \frac{4}{9}\, x_4$= 1
x_1= $\frac{-13}{9}\, x_3$ - $\frac{4}{9}\, x_4$ + 1.

x_2 - $\frac{7}{9}\, x_3$ + $\frac{2}{9}\, x_4$= 0

$x_2= \frac{7}{9} x_3 - \frac{2}{9} x_4$.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible indeterminado, ya que r (A)= r (A_b)= 2 $<$ n= 4, y dos de sus infinitas soluciones son $x_1= \frac{-8}{9}$, $x_2= \frac{5}{9}$, x_3= 1, x_4= 1 y $x_1= \frac{-25}{9}$, $x_2= \frac{10}{9}$, x_3= 2, x_4= 2.

(g) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2w = 0 \\ 3x - 7y - 2z + 4w = 0 \\ 4x + 3y + 5z + 2w = 0 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 3 & -7 & -2 & 4 & | & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$.

$F_2= F_2 - 3F_1 \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -11 & 10 & | & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_2= -F_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 - 4F_1 \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 10 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_3= F_3 - 11F_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & -128 & 120 & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_3= \frac{-1}{128} F_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-15}{16} & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_1= F_1 + 2F_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 25 & -22 & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-15}{16} & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_1= F_1 - 25F_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{16} & | & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-15}{16} & | & 0 \end{pmatrix}$

$F_2= F_2 - 11F_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{16} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{16} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-15}{16} & | & 0 \end{pmatrix}$.

x + $\frac{23}{16}$ w= 0

x= $\frac{-23}{16}$ w.

y + $\frac{5}{16}$ w= 0
y= $\frac{-5}{16}$ w.

z - $\frac{15}{16}$ w= 0
z= $\frac{15}{16}$ w.

Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible indeterminado, ya que r (A)= r (A_b)= 3 $<$ n= 4, y dos de sus infinitas soluciones son x= $\frac{-23}{16}$, y= $\frac{-5}{16}$, z= $\frac{15}{16}$, w= 1 y x= $\frac{-23}{8}$, y= $\frac{-5}{8}$, z= $\frac{15}{8}$, w= 2.

Ejercicio 4.

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Fundamentar la respuesta.

(a) *Todo sistema homogéneo tiene, al menos, una solución.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que los sistemas homogéneos pueden tener sólo la solución trivial o la trivial e infinitas soluciones.

(b) *Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.*

Esta afirmación es FALSA, ya que los sistemas homogéneos pueden tener sólo la solución trivial.

(c) *Un sistema homogéneo que no tiene una única solución, tiene infinitas soluciones.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que los sistemas homogéneos pueden tener sólo la solución trivial o la trivial e infinitas soluciones.

(d) *Si un sistema no homogéneo no tiene solución única, debe tener infinitas soluciones.*

Esta afirmación es FALSA, ya que, si un sistema no homogéneo no tiene solución única, puede tener infinitas soluciones o no tener solución.

(e) *Si un sistema tiene más de una solución, entonces, tiene infinitas.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que un sistema puede tener una única solución o infinitas soluciones.

(f) *La ecuación $x + y = 0$ no tiene solución.*

Esta afirmación es FALSA, ya que tiene infinitas soluciones.

(g) *Si para cada ecuación del sistema hay alguna solución, entonces, el sistema tiene solución.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que es condición suficiente que cada ecuación del sistema alguna solución para concluir que el sistema tiene solución.

(h) *Si un sistema es incompatible, entonces, cada ecuación del mismo tampoco tiene solución.*

Esta afirmación es FALSA, ya que un sistema es incompatible cuando no tiene soluciones que satisfagan todas las ecuaciones simultáneamente, pero esto no necesariamente implica que cada ecuación del mismo no tenga solución, pueden tener soluciones individualmente.

Ejercicio 5.

Determinar (si existen) los valores de b para que los siguientes sistemas sean (i) compatible (en tal caso, resolverlo, expresar la solución en la forma adecuada) e (ii) incompatible.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = b \end{cases}.$

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 7 & | & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & | & b \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $3F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & | & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & | & b \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{-1}{3}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 2 & -1 & 3 & 4 & | & b \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & -3 & 5 & -4 & | & b-2 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 + $3F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b-4 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & | & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b-4 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $\frac{7}{3}$ F_3 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & | & 11-\frac{7}{3}b \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} & | & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b-4 \end{pmatrix}$

F_2= F_2 - $\frac{5}{3}$ F_3 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & | & 11-\frac{7}{3}b \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & 0 & | & 6-\frac{5}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b-4 \end{pmatrix}$.

$x_1 + \frac{2}{3} x_3$= 11 - $\frac{7}{3}$ b
x_1= $\frac{-2}{3}$ x_3 + 11 - $\frac{7}{3}$ b.

x_2 - $\frac{5}{3}$ x_3= 6 - $\frac{5}{3}$ b
x_2= $\frac{5}{3}$ x_3 + 6 - $\frac{5}{3}$ b.

x_4= b - 4.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible para b ∈ ℝ, ya que r (A)= r (A_b)= 3, y sus soluciones están dadas por (x_1, x_2, x_3, x_4)= ($\frac{-2}{3}$ x_3 + 11 - $\frac{7}{3}$ b, $\frac{5}{3}$ x_3 + 6 - $\frac{5}{3}$ b, x_3, b - 4); e (ii) incompatible para ningún valor de b.

(b) $\begin{cases} x+5y-z=7 \\ 4y+3z=b \\ -x+3y+7z=5 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 4 & 3 & | & b \\ -1 & 3 & 7 & | & 5 \end{pmatrix}$.

F_2= $\frac{1}{4}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{1}{4}b \\ -1 & 3 & 7 & | & 5 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 + F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{1}{4}b \\ 0 & 8 & 6 & | & 12 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - 8F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{1}{4}b \\ 0 & 0 & 0 & | & 12-2b \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - 5F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-19}{4} & | & 7-\frac{5}{4}b \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{1}{4}b \\ 0 & 0 & 0 & | & 12-2b \end{pmatrix}$.

12 - 2b= 0
2b= 12
b= $\frac{12}{2}$
b= 6.

x - $\frac{19}{4}$ z= 7 - $\frac{5}{4}$ b
x= $\frac{19}{4}$ z + 7 - $\frac{5}{4}$ b.

y + $\frac{3}{4}$ z= $\frac{1}{4}$ b
y= $\frac{-3}{4}$ z + $\frac{1}{4}$ b.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible para b= 6, ya que r (A)= r (A_b)= 2, y sus soluciones están dadas por (x, y, z)= ($\frac{19}{4}$ z + 7 - $\frac{5}{4}$ b, $\frac{-3}{4}$ z + $\frac{1}{4}$ b, z); e (ii) incompatible para b ∈ ℝ - {6}, ya que r (A)= 2≠ r (A_b)= 3.

(c) $\begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z - 3w = 8 \\ -2x + 2y - z + 6w = b \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -3 & | & 8 \\ -2 & 2 & -1 & 6 & | & b \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 + $2F_1$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -3 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+16 \end{pmatrix}$.

b + 16= 0
b= -16.

x - y + $\frac{1}{2}$ z - 3w= 8
x= y - $\frac{1}{2}$ z + 3w + 8.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible para b= -16, ya que r (A)= r (A_b)= 1, y sus soluciones están dadas por (x, y, z, w)= (y - $\frac{1}{2}$ z + 3w + 8, y, z, w); e (ii) incompatible para b ∈ ℝ - {-16}, ya que r (A)= 1≠ r (A_b)= 2.

Ejercicio 6.

Determinar qué relación debe haber entre a, b y c para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b. \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 2 & 6 & -11 & | & b \\ 1 & -2 & 7 & | & c \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 2 & -5 & | & b-2a \\ 1 & -2 & 7 & | & c \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{2}F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{1}{2}b-a \\ 1 & -2 & 7 & | & c \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - F_1 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & | & \frac{1}{2}b-a \\ 0 & -4 & 10 & | & c-a \end{pmatrix}$

F_3= F_3 + $4F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & | & -a+\frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 0 & | & -5a+2b+c \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $2F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3a-b \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & | & -a+\frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 0 & | & -5a+2b-c \end{pmatrix}$

-5a + 2b - c= 0
5a=2b - c
a= $\frac{2b-c}{5}$
a= $\frac{2}{5}$ b - $\frac{1}{5}$ c.

Por lo tanto, para que este sistema sea compatible la relación que debe haber entre a, b y c es a= $\frac{2}{5}$ b - $\frac{1}{5}$ c.

Ejercicio 7.

Si la terna (2, 1, -1) es una solución de $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 = c \end{cases}$ *, hallar todas las soluciones del sistema (pensar dónde se debe reemplazar 2, 1 y -1).*

a= 2 - 1 + (-1)
a= 2 - 1 - 1
a= 0.

b= 2 * 2 + (-1)
b= 4 - 1
b= 3.

c= 2 + 1
c= 3.

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{2}$ F_2 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - F_1 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$

F_3= F_3 - $2F_2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 + F_2 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$.

$x_1 + \frac{1}{2} x_3 = \frac{3}{2}$
$x_1 = \frac{-1}{2} x_3 + \frac{3}{2}$.

$x_2 - \frac{1}{2} x_3 = \frac{3}{2}$
$x_2 = \frac{1}{2} x_3 + \frac{3}{2}$.

Por lo tanto, todas las soluciones del sistema están dadas por (x_1, x_2, x_3)= ($\frac{-1}{2}$ x_3 + $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ x_3 + $\frac{3}{2}$, x_3).

Ejercicio 8.

En cada caso, determinar, si existen, los valores de k tales que el sistema resulte, respectivamente, (i) compatible determinado, (ii) compatible indeterminado e (iii) incompatible.

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + kx_2 = k + 2 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 4 \\ 2 & k & | & k+2 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & k-6 & | & k-6 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{k+6}F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $3F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

x_1= 1.
x_2= 1.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible determinado para k ∈ ℝ, ya que r (A)= r (A_b)= 2, y su solución es x_1= 1 y x_2= 1; (ii) compatible indeterminado para ningún valor de k; e (iii) incompatible para ningún valor de k.

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + (k-1)x_2 = k \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k-1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 3 & k-1 & | & k \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $3F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & k-7 & | & k-12 \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{k-7}F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & \frac{k-12}{k-7} \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - $2F_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2(k-2)}{k-7} \\ 0 & 1 & | & \frac{k-12}{k-7} \end{pmatrix}$.

x_1= $\frac{2(k-2)}{k-7}$.
x_2= $\frac{k-12}{k-7}$.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible determinado para k ∈ ℝ, ya que r (A)= r (A_b)= 2, y su solución es x_1= $\frac{2(k-2)}{k-7}$ y x_2= $\frac{k-12}{k-7}$; (ii) compatible indeterminado para ningún valor de k; e (iii) incompatible para ningún valor de k.

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid & k \\ 1 & k & 1 & \mid & 1 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid & k \\ 0 & k-1 & 0 & \mid & 1-k \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{1}{k-1}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid & k \\ 0 & 1 & 0 & \mid & -1 \end{pmatrix}$

F_1= F_1 - F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \mid & k+1 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & -1 \end{pmatrix}$.

x_1 + x_3= k + 1
x_1= -x_3 + k + 1.

x_2= -1.

Por lo tanto, este sistema es (i) compatible determinado para ningún valor de k; (ii) compatible indeterminado para k ∈ ℝ, ya que r (A)= r (A_b)= 2 < n= 3, y sus soluciones están dadas por (x_1, x_2, x_3)= (-x_3 + k + 1, -1, x_3); e (iii) incompatible para ningún valor de k.

Ejercicio 9.

Resolver el problema de la Pila de monedas de Fibonacci planteado al principio del capítulo y analizar si la solución hallada por Fibonacci es correcta.

"Tres hombres poseen una sola pila de monedas y sus partes son 1/2, 1/3 y 1/6. Cada uno toma algo de dinero de la pila hasta que no queda nada. El primero regresa 1/2 de lo que tomó, el segundo 1/3 y el tercero 1/6. Cuando el total reintegrado se divide por igual entre los tres, se descubre que cada uno posee lo que le corresponde. ¿Cuánto dinero había en la pila original y cuánto tomó cada uno de esa pila?"

Ejercicio 10.

Calcular los siguientes determinantes:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$= 3 * 1 - 2 * 7
$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$= 3 - 14
$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$= -11.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= 2 (-2 * 2 - 1 * 0) + 3 [0 * 0 - (-2) * 1]
$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= 2 (-4 - 0) + 3 (0 + 2)
$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= 2 (-4) + 3 * 2
$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= -8 + 6
$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= -2.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$= 3 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$= 3 * 2 [1 * 1 - 4 (-2)]

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 * 2\ (1 + 8)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 * 2 * 9$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 54.$$

Ejercicio 11.

Sea A= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *tal que det (A)= 5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices, indicando las propiedades usadas:*

(a) $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = -1 * 2 * 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = -1 * 2 * 3 * 5$$

$$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = -30.$$

(b) $\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5.$$

(c) $\begin{pmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & g \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & g \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & g \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5.$$

(d) *3A*.

$|3A|= 3^3\ |A|$
$|3A|= 27 * 5$
$|3A|= 135.$

(e) A^2.

$|A^2|= |A|^2$
$|A^2|= 5^2$
$|A^2|= 25.$

(f) $\frac{1}{2} A^{-1}$.

$\left|\frac{1}{2} A^{-1}\right|= (\frac{1}{2})^3\ |A^{-1}|$
$\left|\frac{1}{2} A^{-1}\right|= \frac{1}{8} \frac{1}{|A|}$
$\left|\frac{1}{2} A^{-1}\right|= \frac{1}{8} \frac{1}{5}$
$\left|\frac{1}{2} A^{-1}\right|= \frac{1}{40}.$

Ejercicio 12.

Sea A= $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{pmatrix}$ *una matriz triangular inferior. Demostrar que det (A)= acfj.*

det (A)= $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{vmatrix}$

det (A)= a $\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & j \end{vmatrix}$

det (A)= ac $\begin{vmatrix} f & 0 \\ i & j \end{vmatrix}$

det (A)= acfj.

Ejercicio 13.

Sean A, B, C matrices nxn, tales que C tiene inversa y A= CBC^{-1}. Probar que det (A)= det (B). Fundamentar cada paso de la prueba.

det (A)= det (CBC^{-1})
det (A)= det (C) det (B) det (C^{-1})
det (A)= det (C) det (B) $\frac{1}{det(C)}$
det (A)= det (B).

Ejercicio 14.

Utilizar las propiedades para calcular los siguientes determinantes:

(a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$|A|=$ -$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$|A|=$ -$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$|A|=$ -{-{-[-1 * 5 - (-8) * 2]}}

$|A|=$ -{-{-[-5 - (-16)]}}

$|A|=$ {-[-(-5 + 16)]}

$|A|=$ -[-(-11)]

$|A|=$ -11.

(b) $B=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$|B|=\begin{vmatrix} -2 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$|B|=\begin{vmatrix} -7 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$|B|=$ -7 (5 * 3 - 1 * 0)

$|B|=$ -7 (15 - 0)

$|B|=$ -7 * 15

$|B|=$ -105.

(c) $C=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$|C|= \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|=$ -2 $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|=$ -2 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -13 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$|C|=$ -2 {-[1 * 1 - (-13) * 2]}
$|C|=$ -2 {-[1 - (-26)]}
$|C|=$ -2 [-(1 + 26)]
$|C|=$ -2 (-27)
$|C|=$ 54.

(d) $D= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$|D|= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
$|D|= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -9 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
$|D|= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 14 & 29 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
$|D|=$ 1 (14 * 3 - 29 * 1)
$|D|=$ 42 - 29
$|D|=$ 13.

Ejercicio 15.

Si A es una matriz de 5x5 y el det (A)= k, hallar y justificar:

(a) *det (8A).*

det (8A)= 8^5 det (A)
det (8A)= 32768k.

(b) *det (*$(6A)^9$*).*

det ($(6A)^9$)= det ($6^9 A^9$)
det ($(6A)^9$)= $(6^9)^5$ det (A^9)
det ($(6A)^9$)= $(6^9)^5$ $(det\ (A))^9$
det ($(6A)^9$)= $6^{45} k^9$.

Ejercicio 16.

Si B es una matriz de nxn y el det (B)= 10, hallar det ($\frac{3}{4}$ B). Justificar.

det ($\frac{3}{4}$ B)= $(\frac{3}{4})^n$ det (B)
det ($\frac{3}{4}$ B)= 10 $(\frac{3}{4})^n$.

Ejercicio 17.

Si A, B, C son matrices 5x5, det (A)= 3, det (B)= 2 y det (C)= 6, indicar cuánto valen:

(a) *det* $(A\frac{1}{3}BA^3 5B^{-1})$.

det $(A\frac{1}{3}BA^3 5B^{-1}) = (\frac{5}{3})^5$ det (ABA^3B^{-1})
det $(A\frac{1}{3}BA^3 5B^{-1}) = \frac{5^5}{3^5}$ det (A) det (B) det (A^3) det (B^{-1})
det $(A\frac{1}{3}BA^3 5B^{-1}) = \frac{5^5}{3^5}$ det (A) det (B) $(det\ A)^3 \frac{1}{det(B)}$
det $(A\frac{1}{3}BA^3 5B^{-1}) = \frac{5^5}{3^5}(det\ A)^4$
det $(A\frac{1}{3}BA^3 5B^{-1}) = \frac{5^5}{3^5}3^4$
det $(A\frac{1}{3}BA^3 5B^{-1}) = \frac{3125}{3}$.

(b) *det* $(\frac{1}{2}BA^4(BA)^{-1})$.

det $(\frac{1}{2}BA^4(BA)^{-1}) = (\frac{1}{2})^5$ det $(BA^4A^{-1}B^{-1})$
det $(\frac{1}{2}BA^4(BA)^{-1}) = \frac{1}{32}$ det (B) det (A^4) det (A^{-1}) det (B^{-1})
det $(\frac{1}{2}BA^4(BA)^{-1}) = \frac{1}{32}$ det (B) $(det\ A)^4 \frac{1}{det(A)} \frac{1}{det(B)}$
det $(\frac{1}{2}BA^4(BA)^{-1}) = \frac{1}{32}(det\ A)^3$
det $(\frac{1}{2}BA^4(BA)^{-1}) = \frac{1}{32}3^3$
det $(\frac{1}{2}BA^4(BA)^{-1}) = \frac{27}{32}$.

(c) *det* $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1})$.

det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1})$= det $((\frac{5}{3})^3B^3C^3 2^4B^4(A^{-1})^4A^{-1}B^{-1}C^{-1})$
det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1})$= det $((\frac{5}{3})^3B^3C^3 2^4B^4(A^{-1})^5B^{-1}C^{-1})$
det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}) = ((\frac{5}{3})^3)^5\ (2^4)^5$ det (B^3) det (C^3) det (B^4) det $((A^{-1})^5)$ det (B^{-1}) det (C^{-1})
det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}) = (\frac{5}{3})^{15}\ 2^{20}\ (det\ B)^3\ (det\ C)^3\ (det\ B)^4\ (det\ (A^{-1}))^5 \frac{1}{det(B)} \frac{1}{det(C)}$
det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}) = \frac{5^{15}}{3^{15}}\ 2^{20}\ (det\ B)^6\ (det\ C)^2\ (\frac{1}{det(A)})^5$
det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1}) = \frac{5^{15}}{3^{15}}\ 2^{20}\ (det\ B)^6\ (det\ C)^2\ \frac{1}{(det(A))^5}$

det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1})= \frac{5^{15}}{3^{15}}\,2^{20}2^6 6^2\,\frac{1}{3^5}$

det $((\frac{5}{3}BC)^3(2BA^{-1})^4(CBA)^{-1})= \frac{2^{26}5^{15}6^2}{3^{20}}$.

Ejercicio 18.

Decidir si las siguientes matrices tienen o no inversa:

(a) $A= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$|A|= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$
$|A|$= 2 (-1) - (-3) * 1
$|A|$= -2 - (-3)
$|A|$= -2 + 3
$|A|$= 1.

Por lo tanto, esta matriz tiene inversa.

(b) $B= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$.

$|B|= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix}$
$|B|= \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 12 & -9 \end{vmatrix}$
$|B|$= -[1 * 12 - (-4) (-3)]
$|B|$= -(12 - 12)
$|B|$= -0
$|B|$= 0.

Por lo tanto, esta matriz no tiene inversa.

(c) $C= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$|C|= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
$|C|$= 3 [2 (-1) - 5 * 1]
$|C|$= 3 (-2 - 5)
$|C|$= 3 (-7)
$|C|$= -21.

Por lo tanto, esta matriz tiene inversa.

Ejercicio 19.

Hallar los valores de k para que las siguientes matrices tengan inversa.

(a) $A= \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ -(k-2) & 1 \end{pmatrix}$.

$|A|= 0$
$\begin{vmatrix} 1 & k+2 \\ -(k-2) & 1 \end{vmatrix}= 0$
$\begin{vmatrix} 1 & k+2 \\ -k+2 & 1 \end{vmatrix}= 0$
1 * 1 - (k + 2) (-k + 2)= 0
1 - (-k^2 + 2k - 2k + 4)= 0
1 - (-k^2 + 4)= 0
1 + k^2 - 4= 0
k^2 - 3= 0
k^2= 3
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{3}$
$|k|$= $\sqrt{3}$
k= $\pm\sqrt{3}$.

Por lo tanto, los valores de k para que esta matriz tenga inversa son $\mathbb{R}$ - $\{\pm\sqrt{3}\}$.

(b) $B= \begin{pmatrix} k-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & k+5 \end{pmatrix}$.

$|B|= 0$
$\begin{vmatrix} k-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & k+5 \end{vmatrix}= 0$
(k - 5) [1 (k + 5) - 0 * 0]= 0
(k - 5) (k + 5 - 0)= 0
(k - 5) (k + 5)= 0
k^2 + 5k - 5k - 25= 0
k^2 - 25= 0
k^2= 25
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{25}$
$|k|$= 5
k= ± 5.

Por lo tanto, los valores de k para que esta matriz tenga inversa son $\mathbb{R}$ - $\{\pm 5\}$.

Ejercicio 20.

Sean A, B matrices nxn. Decidir, por propiedades del determinante, si las siguientes afirmaciones son V o F. Justificar.

(a) *Si A no tiene inversa, entonces, AB no tiene inversa.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que $(AB)^{-1}$= $B^{-1}A^{-1}$.

(b) *Si A tiene inversa y B no, entonces, AB no tiene inversa.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que $(AB)^{-1}$= $B^{-1}A^{-1}$.

(c) *Si AB no tiene inversa, entonces, ni A ni B tienen inversa.*

Esta afirmación es FALSA, ya que, si AB no tiene inversa, entonces, al menos, una de las dos matrices, A o B, no tiene inversa.

(d) *Si AB no tiene inversa, entonces, al menos, una de las dos, A o B, no tiene inversa.*

Esta afirmación es VERDADERA, ya que $(AB)^{-1}$= $B^{-1}A^{-1}$.

(e) *Si det (A)= det (B), entonces, A= B.*

Esta afirmación es FALSA, ya que, por ejemplo, si A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, det (A)= det (B)= -2, pero A$\neq$ B.

Ejercicio 21.

Decidir si hay valores de k (y encontrarlos) para los que el siguiente sistema es compatible determinado, justificar la respuesta.

$$\begin{cases} 3(k+5)x_1 + 9x_2 - x_3 = b_1 \\ 6x_2 + 12x_3 = b_2 \\ 5x_1 + (1-k)x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}.$$

AX= b

$$\begin{pmatrix} 3(k+5) & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 5 & 1-k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$|A|$= 0

$$\begin{vmatrix} 3(k+5) & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 5 & 1-k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3k+15 & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 5 & 1-k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(3k + 15) [6 * 1 - 12 (1 - k)] + 5 [9 * 12 - (-1) * 6]= 0
(3k + 15) (6 - 12 + 12k) + 5 [108 - (-6)]= 0
(3k + 15) (-6 + 12k) + 5 (108 + 6)= 0
-18k + $36k^2$ - 90 + 180k + 5 * 114= 0
$36k^2$ - 90 + 162k + 570= 0
$36k^2$ + 162k + 480= 0
36 (k^2 + $\frac{9}{2}$ k + $\frac{40}{3}$)= 0
k^2 + $\frac{9}{2}$ k + $\frac{40}{3}$= $\frac{0}{36}$
k^2 + $\frac{9}{2}$ k + $\frac{40}{3}$= 0.

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{2})^2 - 4*1\frac{40}{3}}}{2*1}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{160}{3}}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\frac{-397}{12}}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{-1*\frac{397}{12}}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{397}{12}}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\frac{397}{3*4}}i}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{\frac{-9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{397}{3}}i}{2}$$

$k_1 = \frac{\frac{-9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{397}{3}}i}{2} = \frac{\frac{1}{2}(-9+\sqrt{\frac{397}{3}}i)}{2} = \frac{1}{4}$ (-9 + $\sqrt{\frac{397}{3}}$ i).

$k_2 = \frac{\frac{-9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{397}{3}}i}{2} = \frac{\frac{1}{2}(-9-\sqrt{\frac{397}{3}}i)}{2} = \frac{1}{4}$ (-9 - $\sqrt{\frac{397}{3}}$ i).

Por lo tanto, hay valores de k para los que el sistema es compatible determinado, los cuales son $\mathbb{R}$.

Juan Menduiña

Ejercicio 22.

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$= 3 * 2

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$= 6.

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$= -2 * 5 * 3

$\begin{vmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$= -30.

(c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{vmatrix}$= -2 * 5 * 3

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{vmatrix}$= -30.