

Trabajo Práctico N° 5.3: **Morfismos.**

Ejercicio 1.

Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y, en caso afirmativo, hallar núcleo e imagen:

(a) $f: G \rightarrow F$ dada por $f(x) = 2^x$ y siendo los grupos $G = (\mathbb{R}, +)$ los reales con la suma usual, $F = (\mathbb{R}_0, *)$ los reales sin el 0 con el producto usual.

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo $x, y \in G$, $f(x + y) = f(x) f(y)$. En particular, $f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x 2^y = f(x) f(y)$, por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los elementos de G que se mapean al neutro de F , el cual es 1, ya que, para cualquier $a \in F$, $a * 1 = a$. En particular, $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ y, entonces, $\text{Nu}(f) = \{0\}$.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los valores que puede tomar $f(x)$ cuando x recorre G . En particular, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R}: y > 0\}$.

(b) $f: G \rightarrow F$ dada por $f(x) = -x$ y siendo los grupos $G = (\mathbb{Z}, *)$ los enteros con la operación $a * b = a + b + ab$, $F = (\mathbb{Z}, \circ)$ los enteros con la operación $a \circ b = a + b - ab$.

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo $x, y \in G$, $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$. En particular, $f(x * y) = f(x + y + xy) = -(x + y + xy) = -x - y - xy \Leftrightarrow f(x) \circ f(y) = (-x) \circ (-y) = -x - y - (-x)(-y) = -x - y - xy$, por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los elementos de G que se mapean al neutro de F , el cual es 0, ya que, para cualquier $a \in F$, $a \circ 0 = a + 0 - a * 0 = a + 0 - 0 = a$. En particular, $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{-1} \Leftrightarrow x = 0$ y, entonces, $\text{Nu}(f) = \{0\}$.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los valores que puede tomar $f(x)$ cuando x recorre G . En particular, $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$.

(c) $f: (P(A), \cup) \rightarrow (P(A), \cap)$ dada por $f(X) = X^c$ (siendo A cualquier conjunto, $P(A)$ indica el conjunto de partes de A y X^c el complemento de un conjunto).

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo $X, Y \in (P(A), \cup)$, $f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$. En particular, $f(X \cup Y) = (X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c = f(X) \cap f(Y)$, por lo que f es un homomorfismo.

Núcleo: El núcleo de f está dado por los conjuntos de $(P(A), \cup)$ que se mapean al neutro de F , el cual es A , ya que, para cualquier $Y \in (P(A), \cap)$, $Y \cap A = Y$. En particular, $f(X) = A \Leftrightarrow X^c = A \Leftrightarrow X = A^c$ y, entonces, $\text{Nu}(f) = \{A^c\}$.

Imagen: La imagen de f está formada por todos los conjuntos que puede tomar $f(X)$ cuando X recorre $(P(A), \cup)$. En particular, $\text{Im}(f) = P(A)$.

Ejercicio 2.

Sea $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Demostrar que el núcleo y la imagen de f son subgrupos de G y H , respectivamente.

El núcleo de f , denotado por $\text{Nu}(f)$, se define como:

$\text{Nu}(f) = \{x \in G: f(x) = e_H\}$, donde e_H es el elemento neutro de H .
 $\text{Nu}(f) \subset G$.

Cerradura: Para cada $x, y \in \text{Nu}(f)$, $xy \in \text{Nu}(f)$. En particular, $f(xy) = f(x) f(y)$ (por f homomorfismo) $= e_H e_H = e_H$, por lo que $xy \in \text{Nu}(f)$.

Elemento neutro: El elemento neutro de f en G también existe en $\text{Nu}(f)$. En particular, $e_G \in \text{Nu}(f)$, ya que $f(e_G) = e_H$.

Inversos: Un elemento $x \in \text{Nu}(f)$ tiene inverso si existe $x^{-1} \in \text{Nu}(f)$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e_G$. En particular, para $x \in \text{Nu}(f)$, su inverso en G es x^{-1} y, entonces, $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ (por f homomorfismo) $= e_H^{-1} = e_H$, por lo que existe inverso para todo $x \in \text{Nu}(f)$, ya que $x^{-1} \in \text{Nu}(f)$.

Por lo tanto, queda demostrado que el núcleo de f es un subgrupo de G , ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

La imagen de f , denotada por $\text{Im}(f)$, se define como:

$\text{Im}(f) = \{y \in H: \exists x \in G, f(x) = y\}$.
 $\text{Im}(f) \subset H$.

Cerradura: Para cada $a, b \in \text{Im}(f)$, $ab \in \text{Im}(f)$. En particular, $ab = f(x) f(y) = f(xy)$ (por f homomorfismo), con $xy \in G$ (por $(G, *)$ grupo), por lo que $ab \in \text{Im}(f)$.

Elemento neutro: El elemento neutro de f en H también existe en $\text{Im}(f)$. En particular, $e_H \in \text{Im}(f)$, ya que $e_H = f(e_G)$.

Inversos: Un elemento $a \in \text{Im}(f)$ tiene inverso si existe $a^{-1} \in \text{Im}(f)$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e_H$. En particular, para $a \in \text{Im}(f)$, su inverso en H es $a^{-1} = [f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$ (por f homomorfismo), con $x^{-1} \in G$ (por $(G, *)$ grupo), por lo que existe inverso para todo $a \in \text{Im}(f)$, ya que $a^{-1} \in \text{Im}(f)$.

Por lo tanto, queda demostrado que la imagen de f es un subgrupo de H , ya que satisface cerradura, elemento neutro e inversos.

Ejercicio 3.

Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que la función $f: G \rightarrow G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano (recordar un ejercicio de grupos abelianos del TP5.1).

Si $f(a) = a^2$ es un homomorfismo, entonces, para todo $a, b \in G$, $f(ab) = f(a) f(b)$, lo que implica que $(ab)^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow abab = aabb \Leftrightarrow ba = ab$. Por lo tanto, G es abeliano.

Si $(G, *)$ es abeliano, entonces, para cada $a, b \in G$, $ab = ba$. En particular, $f(ab) = (ab)^2 = abab = aabb$ (por $(G, *)$ abeliano) $= a^2 b^2 = f(a) f(b)$, por lo que $f(ab) = f(a) f(b)$. Por lo tanto, $f(a) = a^2$ es un homomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función $f: G \rightarrow G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano.

Ejercicio 4.

Si H_1, H_2 son dos subgrupos de un grupo conmutativo G , probar que la aplicación $f: H_1 \times H_2 \rightarrow G$ dada por $f(a, b) = ab$ es un morfismo de grupos.

La aplicación f es un morfismo de grupos si se cumple que, para todo $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H_1 \times H_2$, $f((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = f(a_1, b_1)f(a_2, b_2)$. En particular, $f((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = f(a_1a_2, b_1b_2) = a_1a_2b_1b_2 = a_1b_1a_2b_2$ (por $(G, *)$ conmutativo) $= f(a_1, b_1)f(a_2, b_2)$, por lo que f es un morfismo de grupos.

Por lo tanto, queda demostrado que la aplicación $f: H_1 \times H_2 \rightarrow G$ dada por $f(a, b) = ab$ es un morfismo de grupos.

Ejercicio 5.

Si $f: G_1 \rightarrow G_2$ es un morfismo de grupos, entonces, es monomorfismo si y sólo si $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$.

Sea $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfismo de grupos, donde G_1 y G_2 son grupos, y e_1 y e_2 son los elementos neutros de G_1 y G_2 , respectivamente.

Se quiere probar que f es un monomorfismo si y sólo si $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$.

Si f es un monomorfismo, entonces, f es inyectiva, lo que implica que, si $f(a) = f(b)$, entonces, $a = b$. En particular, si $f(a) = e_2$ (por definición de núcleo) y $f(e_1) = e_2$ (por preservación del neutro de los morfismos), entonces, $a = e_1$. Por lo tanto, $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$.

Si $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$ y, suponiendo que $f(a) = f(b)$ para algunos $a, b \in G_1$, entonces, $f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(a) [f(b)]^{-1} = f(b) [f(b)]^{-1}$ (post-multiplicando por $[f(b)]^{-1}$) $\Leftrightarrow f(a) [f(b)]^{-1} = e_2$ (por $(G_2, *)$ grupo) $\Leftrightarrow f(a) f(b^{-1}) = e_2$ (por f morfismo) $\Leftrightarrow f(ab^{-1}) = e_2$ (por f morfismo), lo que implica que $ab^{-1} \in \text{Nu}(f)$, por lo que $ab^{-1} = e_1$ (por hipótesis) $\Leftrightarrow ab^{-1}b = e_1b$ (post-multiplicando por b) $\Leftrightarrow ae_1 = b$ (por $(G_1, *)$ grupo) $\Leftrightarrow a = b$ (por $(G_1, *)$ grupo) y, entonces, f es inyectiva. Por lo tanto, f es un monomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que, si $f: G_1 \rightarrow G_2$ es un morfismo de grupos, entonces, es monomorfismo si y sólo si $\text{Nu}(f) = \{e_1\}$.

Ejercicio 6.

Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que la función $f: G \rightarrow G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano.

Si $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo, entonces, para todo $a, b \in G$, $f(ab) = f(a) f(b)$, lo que implica que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Leftrightarrow (ab)^{-1} = (ba)^{-1} \Leftrightarrow ab = ba$. Por lo tanto, G es abeliano.

Si $(G, *)$ es abeliano, entonces, para cada $a, b \in G$, $ab = ba$. Por un lado, se considera $f(ab) = (ab)^{-1} = (ba)^{-1}$ (por $(G, *)$ abeliano) $= a^{-1}b^{-1} = f(a) f(b)$, por lo que $f(ab) = f(a) f(b)$ y, entonces, $f(a) = a^{-1}$ es un homomorfismo. Por otro lado, si $f(a) = f(b)$, entonces, $a^{-1} = b^{-1} \Leftrightarrow a = b$, por lo que f es inyectiva; y, para todo $b \in G$ (codominio), existe $a \in G$ (dominio) tal que $f(a) = b$ (en particular, $a^{-1} = b \Leftrightarrow a = b^{-1} \in G$ (dominio)), por lo que f es sobreyectiva. Por lo tanto, $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo, ya que es un homomorfismo biyectivo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función $f: G \rightarrow G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano.

Ejercicio 7.

Sea R una relación de congruencia sobre un semigrupo $(S, *)$ y $(S/R, *)$ el semigrupo cociente correspondiente. Demostrar que la función $f_R: S \rightarrow S/R$ definida por $f_R(a) = \bar{a}$ es un homomorfismo.

La función f_R es un homomorfismo si se cumple que, para todo $a, b \in S$, $f_R(ab) = f_R(a) f_R(b)$. En particular, $f_R(ab) = \overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ (por R relación de congruencia) $= f_R(a) f_R(b)$, por lo que f_R es un homomorfismo.

Por lo tanto, queda demostrado que la función $f_R: S \rightarrow S/R$ definida por $f_R(a) = \bar{a}$ es un homomorfismo.

Ejercicio 8.

Sea z un número complejo. ¿Cuándo será un isomorfismo de grupos la aplicación $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, siendo \mathbb{C} el conjunto de los números complejos, dada por $f(x) = zx$?

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo $x, y \in \mathbb{C}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. En particular, $f(x + y) = z(x + y) = zx + zy = f(x) + f(y)$, por lo que f es un homomorfismo.

Inyectividad: f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. En particular, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow zx = zy \Leftrightarrow x = y$, por lo que f es inyectiva.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva si, para todo $y \in \mathbb{C}$ (codominio), existe $x \in \mathbb{C}$ (dominio) tal que $f(x) = y$. En particular, $zx = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{z} \in \mathbb{C}$ (dominio), si $z \neq 0$, por lo que f es sobreyectiva si y sólo si $z \neq 0$.

Por lo tanto, dado z un número complejo, la aplicación $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, siendo \mathbb{C} el conjunto de los números complejos, dada por $f(x) = zx$, será un isomorfismo de grupos (con la operación $+$) cuando $z \neq 0$.

Ejercicio 9.

Probar que hay un isomorfismo entre el grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales \mathbb{R}^4 con la suma usual.

Se define la aplicación $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ que mapea una matriz de 2x2 a una cuaterna de números reales, tomando los elementos de la matriz. Es decir, para una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ dada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define $f(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$.

Condición de homomorfismo: f es un homomorfismo si se cumple que, para todo $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $f(A + B) = f(A) + f(B)$. En particular, para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, con cualesquiera $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, $f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}\right) = (a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}, a_{21} + b_{21}, a_{22} + b_{22}) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) + (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = f(A) + f(B)$, por lo que f es un homomorfismo.

Inyectividad: f es inyectiva si $f(A) = f(B)$ implica $A = B$. En particular, para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, con cualesquiera $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, $f(A) = f(B) \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) \Leftrightarrow A = B$, por lo que f es inyectiva.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva si, para todo $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$ (codominio), existe $A \in M_2(\mathbb{R})$ (dominio) tal que $f(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. En particular, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ (dominio), con cualesquiera $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, por lo que f es sobreyectiva.

Por lo tanto, queda demostrado que hay un isomorfismo entre el grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales \mathbb{R}^4 con la suma usual.

Ejercicio 10.

Probar que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a $(\mathbb{Z}_m, +)$.

Sea G un grupo cíclico de orden m con generador $g \in G$, es decir:

$G = \langle g \rangle = \{g^x : x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x < m\} = \{e, g, g^2, \dots, g^{m-1}\}$, con $g^m = e$, donde e es el elemento neutro de G .

Sea $(\mathbb{Z}_m, +)$ el grupo formado por los enteros $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ con la operación + módulo m .

Se define la función $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_m$ como:

$\varphi(g^k) = k \bmod m$, para $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Condición de homomorfismo: φ es un homomorfismo si se cumple que, para todo $g^x, g^y \in G$, $\varphi(g^x g^y) = \varphi(g^x) + \varphi(g^y)$. En particular, $\varphi(g^x g^y) = \varphi(g^{x+y}) = (x+y) \bmod m = x \bmod m + y \bmod m = \varphi(g^x) + \varphi(g^y)$, por lo que φ es un homomorfismo.

Inyectividad: φ es inyectiva si $\varphi(g^x) = \varphi(g^y)$ implica $g^x = g^y$. En particular, $\varphi(g^x) = \varphi(g^y) \Leftrightarrow x \bmod m = y \bmod m \Leftrightarrow x \bmod m - y \bmod m = 0 \Leftrightarrow (x-y) \bmod m = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow g^x = g^y$, por lo que φ es inyectiva.

Sobreyectividad: φ es sobreyectiva si, para todo $k \in \mathbb{Z}_m$ (codominio), existe $g^k \in G$ (dominio) tal que $\varphi(g^k) = k \bmod m$. En particular, $\varphi(g^k) = k \bmod m$ (por definición de φ), con $g^k \in G$ (dominio), por lo que φ es sobreyectiva.

Por lo tanto, queda demostrado que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a $(\mathbb{Z}_m, +)$.