

Trabajo Práctico N° 3:
Autovalores y Autovectores.

Ejercicio 1.

Ejercicio 21 (*).

Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A , $\text{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.

(a) Hallar todos los autovalores de A .

En primer lugar, se sabe que 1 es autovalor de la matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Luego, sabiendo que la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores y que $\text{tr}(A) = 2$, se tiene:

$$2 = 1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$2 - 1 = \lambda_2 + \lambda_3$$

$$1 = \lambda_2 + \lambda_3.$$

También, sabiendo que el determinante de la matriz A es igual al producto de todos los autovalores y que $\det(A) = -2$, se tiene:

$$-2 = \lambda_2 \lambda_3.$$

Entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ -2 = \lambda_2 \lambda_3 \end{cases}.$$

Despejando λ_3 de la segunda ecuación, se tiene:

$$\lambda_3 = \frac{-2}{\lambda_2}, \lambda_2 \neq 0.$$

Luego, reemplazando en la primera ecuación, se obtiene:

$$1 = \lambda_2 + \frac{-2}{\lambda_2}$$

$$1 = \frac{\lambda_2^2 - 2}{\lambda_2}$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^2 - 2$$

$$\lambda_2^2 - \lambda_2 - 2 = 0, \lambda_2 \neq 0.$$

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan los autovalores faltantes:

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\lambda_3 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Por lo tanto, los autovalores de A son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$.

(b) Decidir si A^T es o no diagonalizable.

Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tiene n (3) autovalores distintos (inciso anterior) y que los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (teorema).

También, dado que la matriz A tiene n (3) autovectores linealmente independientes, se sabe que la matriz A es diagonalizable (teorema).

Entonces, esta matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$A = PDP^{-1},$$

donde $D, P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, tal que D es diagonal y P es inversible.

Si se aplica transpuesta a ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$\begin{aligned} A^T &= (PDP^{-1})^T \\ A^T &= (P^{-1})^T D^T P^T. \end{aligned}$$

Sabiendo que toda matriz diagonal es simétrica ($D = D^T$) y que la transpuesta de la inversa de una matriz es igual a la inversa de la transpuesta de esa matriz, se tiene:

$$A^T = (P^T)^{-1} D P^T.$$

Por último, sabiendo que la inversa de la inversa de una matriz es la propia matriz, esta última igualdad se puede reexpresar de la siguiente manera:

$$A^T = (P^T)^{-1} D ((P^T)^{-1})^{-1}.$$

Por lo tanto, A^T es diagonalizable, ya que es A^T es semejante a una matriz diagonal, es decir, existen $D, (P^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, tal que D es diagonal y $(P^T)^{-1}$ es inversible.