Inferencia Estadística - Guia 3

Nicolas Ferrer
e-mail: nicolas.ferrer.747@gmail.com

Junio 2020

1 Ejercicio 1

Para este ejercicio, podemos pensar a la intención de pagar de cada pasajero como una variable Bernoulli parametrizada por p, la proporción de individuos dispuestos a pagar 5 dólares por acceso ilimitado a Internet durante vuelos de cabojate. Dado que el estimador máximo verosímil para p para un modelo Binomial está dado por $\hat{p} = \bar{X}$, podemos utilizar el Teorema del Límite Central para construir un intervalo de confianza del 95% aproximado para p.

Entonces, usando que:

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Podemos afirmar que:

$$P\left(Z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \leq Z_{1-\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

Donde $Z_{\alpha/2}$ es el cuantil $\alpha/2$ de la distribución normal estándar.

Por lo tanto, (utilizando la simetría de la distribución normal) el intervalo de confianza aproximado del 95% para p es:

$$IC_{95\%}(p) = \hat{p} \pm Z_{0.975}\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}$$

Reemplazando $\hat{p} = 0.625$, $n = 200$ y $Z_{0.975} \approx 1.96$:

$$IC_{95\%}(p) = [0.558, 0.692]$$

La calidad de la aproximación depende de que n sea suficientemente grande y p no tome valores cerca de los extremos (0 o 1). Se suele establecer el siguiente criterio para juzgar la calidad de la aproximación:

$$\begin{cases} n\hat{p} \geq C \\ n(1-\hat{p}) \geq C \end{cases}$$

Donde C es alguna constante (generalmente 5 o 10). En nuestro caso, $n(1-\hat{p}) = 75$.

2 Ejercicio 2

Estamos interesados en construir un intervalo de confianza para la varianza de puntajes de los exámenes de una compañía, la cual denominaremos σ^2. Dado que desconocemos las características de la población bajo estudio, asumimos que los puntajes de los exámenes siguen una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. De esta manera, podemos utilizar la definición de un intervalo de confianza para σ^2 en una distribución normal (página 20 de Slide 6):

$$IC_{(1-\alpha)\%}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$$

En este caso tenemos $s^2 = 108.16$, $n = 18$ y $\alpha = 0.1$. Los valores críticos de la distribución chi-cuadrado con 17 grados de libertad son:

$$\chi^2_{17,0.05} \approx 8.67$$
$$\chi^2_{17,0.95} \approx 27.58$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza será:

$$IC_{90\%}(\sigma^2) = [66.65, 212.03]$$

Para arribar a este resultado, debimos asumir que los puntajes de los exámenes siguen una distribución normal. Algunas de las estrategias disponibles para verificar el cumplimiento de este supuesto son análisis gráfico de la distribución empírica (ej. histograma o *QQ-plot*) o algún test de normalidad como el Jarque-Bera o Chi-Cuadrado de Pearson.

3 Ejercicio 3

3.1 Inciso a

Dada la naturaleza aleatoria del experimento propuesto, resulta razonable asumir que los tiempos de reacción observados para las luces rojas y verdes resultan independientes. Por lo tanto, si asumimos que las poblaciones de tiempos de respuesta a luces de cada color se distribuyen normalmente, podemos escribir:

$$\{X_i\}_{i=1}^n \overset{iid}{\sim} N(\mu_X, \sigma_X^2)$$
$$\{Y_i\}_{i=1}^m \overset{iid}{\sim} N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Donde X e Y representan la población de tiempos de respuesta a luces de color roja y verde respectivamente. El parámetro de interés para el cual queremos obtener un intervalo de confianza es la diferencia de medias $\Delta = \mu_X - \mu_Y$.

3.2 Inciso b

Si estamos dispuestos a asumir que la varianza de los tiempos de respuesta no difiere según se trate de luces rojas o verdes (es decir, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$), podemos utilizar la versión simplificada de la página 22 del Slide 6 para construir el intervalo de confianza:

$$P\left(\widehat{\Delta} - t_{m+n-2,\alpha/2}\tilde{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \leq \Delta \leq \widehat{\Delta} + t_{m+n-2,\alpha/2}\tilde{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right) = 1-\alpha$$

Donde $\hat{\Delta} = \bar{X} - \bar{Y}$, m y n son el tamaño de cada muestra, y $\tilde{S}^2 = \frac{(n-1)S_X^2+(m-1)s_M^2}{n+m-2}$.
A partir de los valores provistos, calculamos:

$$\bar{X} = 0.37, \quad \bar{Y} = 0.4325$$
$$n = 8, \quad m = 8$$
$$s_X^2 \approx 0.0126, \quad S_Y^2 \approx 0.0137$$

Entonces, para un valor crítico[1] de $t_{14,0.975} \approx 2.144$, el intervalo de confianza del 95% para Δ es:

$$IC_{95\%}(\Delta) = -0.0625 \pm 2.144 * 0.114\sqrt{1/8} = [-0.023, 0.149]$$

[1] Recordar que la distribución t es simétrica.

3.3 Inciso c

Al igual que en el ejercicio 2, deberíamos corroborar la normalidad de la población de tiempos de respuesta. Por otro lado, también asumimos que la varianza de ambas poblaciones era igual. Para justificar este supuesto, podríamos utilizar un test F de igualdad de varianzas. Bajo la hipótesis nula de igualdad de varianzas, el ratio de varianzas muestrales de dos poblaciones normales debería seguir una distribución $F_{n-1,m-1}$.

4 Ejercicio 4

Llamemos X_i e Y_i las mediciones de colesterol para el individuo i antes y después del tratamiento con la droga. Para este experimento, está claro que estas variables no son independientes, dado que el nivel de colesterol después del aplicar el tratamiento estará relacionado con la condición inicial del paciente.

Adicionalmente, dado que se nos informa que por experiencias anteriores la distribución del cambio en la cantidad de colesterol sigue una distribución normal, podemos utilizar la metodología vista en clase para intervalos de confianza para diferencia de medias en muestras apareadas[2].

Sea $D_i = X_i$, podemos construir el pivote:

$$g\left(\bar{D}; S_D^2, \mu_D\right) = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \rightarrow_F N(0,1)$$

Donde $\bar{D}$ es la el promedio de diferencias en la muestra y S_D el estimador insesgado de la varianza de D. Por lo tanto, podemos construir el intervalo de confianza usando:

$$P\left(\bar{D} - z_{\alpha/2} S_D/\sqrt{n} \leq \mu_D \leq \bar{D} + z_{\alpha/2} S_D/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

Notar que este intervalo no es aproximado, dado que se asume que se satisface el supuesto de normalidad. Nos interesa encontrar el valor de n tal que la *precisión* del intervalo sea igual a 5mg. En este caso, la precisión P del intervalo es igual a:

$$P = \left(\bar{D} + z_{\alpha/2} S_D/\sqrt{n}\right) - \left(\bar{D} - z_{\alpha/2} S_D/\sqrt{n}\right) = 2\frac{z_{\alpha/2} S_D}{\sqrt{n}}$$

Entonces, para $S_D = 4$ y $z_{0.975} \approx 1.96$, encontramos que:

$$5 = 2 * \frac{1.96 * 4}{\sqrt{n}} \iff n = 9.8334496$$

Por lo tanto, cualquier valor de n superior a 10 nos asegurará un intervalo de confianza al 95% con una precisión menor a 5mg.

5 Ejercicio 5

En este escenario, estamos tratando de estimar el intervalo de confianza para la diferencia de medias en muestras independientes. Si asumimos normalidad de las variables aleatorias (la cual podemos tratar de verificar utilizando alguno de los test mencionados en el ejercicio 2), podemos aplicar la metodología planteada en la página 31 del Slide 6. Sea $\hat{\Delta} = \bar{x}_H - \bar{x}_M = 14$, podemos construir el pivote para Δ:

$$g(\widehat{\Delta}, \Delta) = \frac{\widehat{\Delta} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_H^2}{n} + \frac{s_M^2}{m}}} \xrightarrow{F} t_v$$

$$\text{con } v = \frac{\left(\frac{s_H^2}{n_H} + \frac{s_M^2}{n_M}\right)^2}{\frac{s_H^4}{n_H^2(n_H-1)} + \frac{s_M^4}{n_M^2(n_M-1)}}$$

[2]Ver página 29 del Slide 6.

Por lo tanto, el intervalo de confianza queda definido por:

$$P\left(\widehat{\Delta} - t_{v,\alpha/2}\sqrt{\frac{S_H^2}{n_H} + \frac{S_M^2}{n_M}} \leq \Delta \leq \widehat{\Delta} + t_{v,\alpha/2}\sqrt{\frac{S_H^2}{n_H} + \frac{S_M^2}{n_M}}\right) \approx 1 - \alpha$$

Reemplazando $s_H = 19.13$, $s_M = 18.83$, $n_H = 151$ y $n_M = 108$, tenemos $v \approx 232$. Por lo tanto, $t_{232,0.975} \approx 1.97$ y los límites del intervalo de confianza de interés serán:

$$IC(\Delta)_{95\%} = 14 \pm 1.97\sqrt{\frac{19.13^2}{151} + \frac{18.83^2}{108}} \approx [9.29,\ 18.70]$$

6 Ejercicio 6

Este ejercicio es similar al Ejercicio 2, en tanto queremos calcular un intervalo de confianza para la varianza poblacional. Al igual que en aquel ejercicio, asumimos que las medidas de contaminación atmosférica siguen una distribución normal y construimos el intervalo de confianza para σ^2.

En este caso, $\alpha = 0.05$, $n = 10$, $s^2 \approx 1.409$. Para estos valores de α y n, los valores críticos de la distribución Chi-cuadrado son:

$$\chi^2_{9,0.025} \approx 2.7$$
$$\chi^2_{9,0.975} \approx 19.02$$

Siguiendo lo visto en el ejercicio 2, el intervalo de confianza al 95% para σ^2 es:

$$IC_{95\%}(\sigma^2) = [0.666, 4.695]$$

Dado que la distribución Chi-cuadrado no es simétrica, no podemos invocar el teorema de la página 17 del Slide 6 para afirmar que sea el intervalo de máxima precisión.

Al graficar la distribución chi-cuadrado con 9 grados de libertad[3] podemos ver que un intervalo con mayor precisión podría construirse corriendo los límites hacia la izquierda.

7 Ejercicio 7

Podemos escribir:

$$P(L \leq \theta \leq U) = P(\theta \leq U) - P(\theta \leq L)$$

Por lo tanto, dado que $P(\theta \leq L) = 1 - P(L \leq \theta) = \alpha_L$, se ve fácilmente que:

$$P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha_U - \alpha_L$$

8 Ejercicio 8

8.1 Inciso a

Modelo 1

En el caso del modelo 1, es fácil ver que $X \sim U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$. Por lo tanto, podemos construir el pivote:

$$g(X, \theta) = X - \theta \sim U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

[3]En R, puede utilizar el comando: `curve(dchisq(x, 9), from=0, to=40)`

Modelo 2

Por otro lado, para el modelo 2, podemos utilizar nuestro conocimiento de modelos de locación-escala para proponer el pivote:

$$g(X,\theta) = \frac{X}{\theta} \sim f_g(x) = \theta f_2(\theta x)$$

Por lo cual:

$$f_g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < \frac{x}{\theta} < 1, \text{ si } \theta > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

8.2 Inciso b

Modelo 1

Dado que la distribución uniforme es simétrica, podemos construir el intervalo de confianza para θ a partir de:

$$P(q_{\alpha/2} \leq X - \theta \leq q_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Donde $q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}$ son los cuantiles relevantes para la distribución $U(-0.5, 0.5)$. Es fácil ver que para esta distribución:

$$q_{1-\alpha/2} = \frac{1-\alpha}{2}$$

Por lo tanto:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = X \pm \frac{1-\alpha}{2}$$

Modelo 2

Para el modelo 2, tenemos:

$$P(q_{\alpha/2} \leq X/\theta \leq q_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Podemos utilizar nuestro conocimiento de $f_g(x)$ para obtener la función de distribución:

$$F_g(x) = x^2$$

Notar que esta distribución no es simétrica. Por lo tanto, los cuantiles críticos serán:

$$q_{\alpha/2} = \sqrt{\alpha/2}$$
$$q_{1-\alpha/2} = \sqrt{1-\alpha/2}$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ está dado por:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{x}{\sqrt{1-\alpha/2}} \ , \ \frac{x}{\sqrt{\alpha/2}} \right]$$

9 Ejercicio 9

9.1 Inciso a

Notar que este modelo se trata de la distribución Geométrica, que modela la cantidad de fracasos ocurridos hasta obtener un éxito en una secuencia de experimentos Bernoulli.

Utilizamos la normalidad asintótica de los estimadores máximo verosímiles para encontrar un pivote aproximado $g(\hat{\theta}, \theta)$ de la forma:

$$g(\hat{\theta}, \theta) = \sqrt{ni(\theta)}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

La log-verosimilitud para este modelo está dada por:

$$L(p|\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \log(1-p) + n \log p$$

Maximizando esta función encontramos que $\hat{p} = \bar{x}^{-1}$.

Es fácil ver que este modelo pertenece a una familia exponencial, por lo cual podemos utilizar la siguiente expresión para la $\hat{p}$ Información de Fisher para una observación:

$$i(p) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}\log f(x,p)\right) = \frac{1}{p(1-p)} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2(1-p)}$$

Por lo tanto, encontramos el pivote y su distribución asintótica:

$$g(\hat{p},p) = \frac{\sqrt{n}}{p\sqrt{1-p}}(\hat{p}-p) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

9.2 Inciso b

Dado que la $I(p) = ni(p)$ es una función continua para $p \in (0,1]$, podemos utilizar lo visto en clase[4] para definir el intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$:

$$P\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\frac{\hat{p}\sqrt{1-\hat{p}}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\frac{\hat{p}\sqrt{1+\hat{p}}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Reemplazando $\hat{p} = \bar{x}^{-1}$ encontramos que los límites del intervalo son:

$$IC(p)_{1-\alpha} = \bar{x}^{-1}\left(1 \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1-\bar{x}^{-1}}{n}}\right)$$

9.3 Inciso c

Para los valores provistos, $\hat{p} = \bar{x}^{-1} = 0.02$ y $z_{0.975} \approx 1.96$, por lo tanto:

$$IC(p)_{95\%} = 0.02\left(1 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.98}{100}}\right) \approx [0.0161, 0.0238]$$

10 Ejercicio 10

10.1 Inciso a

Supongamos que observamos $Y = X + \mu$ tal que:

$$Y \sim f_Y(y) = f_X(y-\mu)$$

Por lo tanto, por propiedad de familia exponencial:

$$Y - \mu \sim f_X(y)$$

Por lo tanto, $g(Y,\mu) = Y - \mu$ es una función continua cuya distribución no depende de μ, por lo cual califica como pivote para μ. Si definimos el cuantil q_α tal que:

$$F_X(q_\alpha) = \alpha$$

Podemos escribir el intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$ como:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = [y - q_{1-\alpha/2},\ y - q_{\alpha/2}]$$

[4] Ver página 26 de Slide 6.

10.2 Inciso b

En este caso, tenemos $Y = \sigma X$ tal que:

$$Y \sim f_Y(y) = f_X(y/sigma)/sigma$$

Utilizando propiedades de familia exponencial:

$$Y/\sigma \sim f_X(y)$$

Con lo cual Y/σ es un pivote válido. Entonces, para la anterior definición del cuantil q_α, tenemos:

$$IC_{1-\alpha}(\sigma) = \left[\frac{y}{q_{1-\alpha/2}},\ \frac{y}{q_{\alpha/2}}\right]$$

11 Ejercicio 11

11.1 Inciso a

Para este modelo, la log-verosimilitud es igual a:

$$l(\theta|\mathbf{x}) = n\log(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

De la condición de primer orden la maximización de la log- verosimilitud obtenemos:

$$\hat{\theta} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\log x_i}{n} - 1$$

11.2 Inciso b

Para construir el intervalo de confianza aproximado para θ, notar que la Información de Fisher $I(\theta)$ es igual a:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta|\mathbf{x})\right] = \frac{n}{\theta+1}$$

Por lo tanto, utilizando lo visto en clase[5], podemos plantear el intervalo de confianza aproximado de nivel $1-\alpha$ a partir de:

$$P\left(\hat{\theta} - z_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\theta}+1}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\theta}+1}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza queda dado por:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \hat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\theta}+1}{\sqrt{n}}$$

11.3 Inciso c

Para los valores provistos, $\hat{\theta} = -0.1$ y $z_{0.975} \approx 1.96$. Por lo tanto, el intervalo de confianza de nivel 95% será:

$$IC_{95\%}(\theta) = -0.1 \pm 1.96\frac{0.9}{\sqrt{500}} \approx [-0.178,\ -0.021]$$

[5] Ver página 26 de Slide 6

12 Ejercicio 12

12.1 Inciso a

Utilizando lo provisto en la consigna, sabemos que:

$$P\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{q_{1-\alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{q_{\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

Donde definimos q_α como el cuantil α de una distribución χ^2_{2n}. Por lo tanto, los límites del intervalo serán:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{q_{1-\alpha/2}},\ \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{q_{\alpha/2}}\right]$$

12.2 Inciso b

Para los valores provistos:

$$\begin{aligned} n &= 20 \\ \sum_{i=1}^{20} x_i &= 2023 \\ q_{0.975} &\approx 59.34 \\ q_{0.025} &\approx 24.43 \end{aligned}$$

Por lo cual el intervalo de confianza será:

$$IC_{95\%}(\theta) = [68.18,\ 165.61]$$

13 Ejercicio 13

13.1 Inciso a

Estamos interesados en conocer la distribución del error de predicción $\bar{X} - X_{n+1}$. Sabemos de lo visto al inicio de la materia[6] que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Por otro lado, $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Se puede demostrar que para dos variables aleatorias independientes $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

En nuestro caso[7]:

$$\bar{X} - X_{n+1} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2\right)$$

13.2 Inciso b

Sabemos por definición de la distribución t que para una secuencia de variables aleatorias normales se cumple:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

[6]Ver página 32 de Slide 1.

[7]Notar que $(-X_{n+1}) \sim N(-\mu, \sigma^2)$.

Dado lo aprendido para la error de predicción en el inciso a, tenemos:

$$\frac{(\bar{X} - X_{n+1}) - E(\bar{X} - X_{n+1})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X} - X_{n+1})}} = \frac{(\bar{X} - X_{n+1}) - 0}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X} - X_{n+1})}} = \frac{\bar{X} - X_{n+1}}{\sigma\sqrt{n^{-1} + 1}} \sim N(0,1)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\bar{X} - X_{n+1}}{S\sqrt{n^{-1} + 1}} \sim t_{n-1}$$

Entonces, $c = (\sqrt{n^{-1} + 1})^{-1}$.

13.3 Inciso c

Dado lo aprendido en el inciso anterior, sabemos que podemos construir el siguiente pivote para X_9:

$$g(X_9, \bar{X}) = \frac{\bar{X} - X_9}{S\sqrt{8^{-1} + 1}} \sim t_7$$

Por lo tanto, para $\alpha = 0.2$

$$P\left(t_{7,0.1} \leq \frac{\bar{X} - X_9}{S\sqrt{8^{-1} + 1}} \leq t_{7,0.9}\right) = 0.8$$

Donde $t_{7,\alpha}$ es el cuantil α de una distribución t con 7 grados de libertad. Operando y utilizando la simetría de la distribución t, obtenemos:

$$P(\bar{X} - t_{7,0.9}S\sqrt{8^{-1} + 1} \leq X_9 \leq \bar{X} + t_{7,0.9}S\sqrt{8^{-1} + 1}) = 0.8$$

Con lo cual $k = t_{7,0.9}\sqrt{8^{-1} + 1}$.

14 Ejercicio 14

De las propiedades de suma de variables normales vistas en el ejercicio anterior, es fácil ver que[8].

$$g(\widehat{\Delta}, \Delta) = \frac{\widehat{\Delta} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1) \tag{1}$$

Pero dado que $\sigma_X = 3\sigma_Y$:

$$g(\widehat{\Delta}, \Delta) = \frac{\widehat{\Delta} - \Delta}{\sigma_X\sqrt{n^{-1} + (3m)^{-1}}} \sim N(0,1) \tag{2}$$

Por lo tanto, podemos construir el pivote alternativo:

$$g(\widehat{\Delta}, \Delta) = \frac{\widehat{\Delta} - \Delta}{\tilde{S}_X\sqrt{n^{-1} + (3m)^{-1}}} \sim t_{n+m-2} \tag{3}$$

Donde $\tilde{S}_X^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)3S_Y^2}{m+n-2}$ es un promedio ponderado de estimadores insesgados de σ_X^2. De esta manera, volvemos al caso general para medias equivalentes. Por lo tanto, la forma general del intervalo de confianza del 95% quedará determinada por:

$$P\left(\widehat{\Delta} - t_{m+n-2,0.975}\tilde{S}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{3m}} \leq \Delta \leq \widehat{\Delta} + t_{m+n-2,0.975}\tilde{S}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{3m}}\right) = 95\% \tag{4}$$

[8] Alternativamente, ver página 22 del Slide 6. Un análisis detallado del caso puede encontrarse en el artículo: Niwitpong & Niwitpong (2010) "Confidence Interval for the Difference of Two NormalPopulation Means with a Known Ratio of Variances".

15 Ejercicio 15

15.1 Inciso a

De acuerdo a la distribución provista para el pivote, tenemos:

$$P\left(\frac{S_B^2}{S_A^2}q_{\alpha/2} \leq \tau \leq \frac{S_B^2}{S_A^2}q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Por lo cual el intervalo de confianza estimado de nivel α será:

$$IC_{1-\alpha}(\tau) = \left[\frac{S_B^2}{S_A^2}q_{\alpha/2},\ \frac{S_B^2}{S_A^2}q_{1-\alpha/2}\right]$$

15.2 Inciso b

El intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ construido en el punto anterior no es único, dado que podemos elegir diferentes cuantiles tales que el intervalo contenga $(1-\alpha)\%$ de los valores dentro. Dado que la distribución F de Snedecor suele no ser simétrica, sabemos por lo visto en clase que el intervalo de confianza construido probablemente no sea el de mayor precisión.

15.3 Inciso c

Para los valores provistos:

$$\frac{s_B^2}{s_A^2} \approx 2.35$$
$$q_{0.025} \approx 0.659$$
$$q_{0.975} \approx 1.531$$

Por lo tanto el intervalo construido será:

$$IC_{95\%}(\tau) = [1.55,\ 3.59]$$

15.4 Inciso d

Sabemos que el parámetro τ es igual al ratio entre varianzas de las notas de cada población. Si ambas poblaciones fueran equivalentes en términos de varianza de calificationes, tendríamos $\tau = 1$. Por definición de intervalo de confianza, sabemos que el 95% de los intervalos construidos en forma equivalente al obtenido en el inciso anterior contendrán el verdadero valor de τ. Por lo tanto, el resultado obtenido seria indicativo de que la varianza de notas de la población B es mayor que la de la población A. No obstante, debemos ser conscientes de que dichos valores pueden corresponder al 5% de intervalos que no contiene al verdadero valor de τ.

16 Ejercicio 17

Recordemos que un intervalo de confianza de **Wald** de nivel $1-\alpha$ para θ está dado por:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \hat{\theta} \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{\theta})}}$$

Por otro lado, el intervalo de confianza construido en base al **método de verosimilitud** es igual a:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left\{\theta : l(\theta|\mathbf{x}) \geq l(\hat{\theta}|\mathbf{x}) - \frac{1}{2}c_1(\alpha)\right\}$$

Donde $c_1(\alpha)$ es el cuantil α de una distribución Chi cuadrado con 1 grado de libertad. Notar que tras ciertas operaciones algebráicas, podemos escribir este intervalo como:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left\{ \theta : 2 \log \left(\frac{L(\hat{\theta}|\mathbf{x})}{L(\theta|\mathbf{x})} \right) \leq c_1(\alpha) \right\}$$

Esta expresión introduce el concepto del logaritmo de ratio de verosimilitudes (*log likelihood-ratio*), que se hará presente más adelante cuando estudiemos tests de hipótesis.

16.1 Modelo Exponencial

Para el modelo exponencial caracterizado por la función de densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ tenemos:

$$\begin{aligned} l(\lambda|\mathbf{x}) &= \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \\ \hat{\lambda} &= \bar{x}^{-1} \\ I(\lambda) &= \frac{n}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión para el intervalo de **Wald**, tenemos:

$$IC_{1-\alpha}(\lambda) = \bar{x}^{-1} \left(1 \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right)$$

Por otro lado, el intervalo construido en base al método de verosimilitud queda determinado por los valores de λ que satisfacen:

$$IC_{1-\alpha}(\lambda) = \left\{ \lambda : \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \geq \bar{x}^{-n} \exp\left(-\bar{x}^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{2} c_1(\alpha) \right\}$$

Estos dos ejemplos son representativos de las ventajas y desventajas de cada método:

- Los **intervalos de Wald** resultan fáciles de calcular y otorgan una buena aproximación si el tamaño de la muestra es suficientemente grande. No obstante, si la muestra no es lo suficientemente grande o la significatividad del intervalo (α) es muy pequeña, podría ser que el intervalo contenga valores inverosímiles del parámetro bajo análisis. En nuestro ejemplo, ello podría ocurrir si $z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$ resultase mayor a 1.

- A diferencia de los intervalos de Wald, los **intervalos del método de verosimilitud** sólo se encuentran definidos para valores razonables del parámetro bajo análisis, al depender directamente de la función de verosimilitud. No obstante, en la mayoría de los casos se requiere utilizar métodos numéricos para encontrar los valores del parámetro que representan los límites del intervalo.

16.2 Modelo Poisson

Para el modelo Poisson caracterizado por $f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, tenemos[9] :

$$\begin{aligned} l(\lambda|\mathbf{x}) &\propto -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \ln(\lambda) \\ \hat{\lambda} &= \bar{x} \\ I(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

[9] Omitimos el término asociado a $x!$ dado que no depende de λ.

Por lo tanto, el intervalo de Wald estará dado por:

$$IC_{1-\alpha}(\lambda) = \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$$

El intervalo del método de verosimilitud estará dado por (luego de un poco de álgebra):

$$IC_{1-\alpha}(\lambda) = \left\{\lambda : -n\left(\lambda - \bar{x}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\left(\frac{\lambda}{\bar{x}}\right) \geq -\frac{1}{2}c_1(\alpha)\right\}$$

16.3 Modelo Binomial

Para el modelo binomial caracterizado por $f(x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, tenemos[10]:

$$\begin{aligned} l(p|\mathbf{x}) &\propto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(p) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p) \\ \hat{p} &= \bar{x} \\ I(\lambda) &= \frac{n}{p(1-p)} \end{aligned}$$

El intervalo de Wald esta dado por:

$$IC_{1-\alpha}(\lambda) = \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$$

El intervalo por método de verosimilitud estará dado por:

$$IC_{1-\alpha}(p) = \left\{p : \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\left(\frac{p}{\bar{x}}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\left(\frac{1-p}{1-\bar{x}}\right) \geq -\frac{1}{2}c_1(\alpha)\right\}$$

[10]Omitimos el término que incluye la combinatoria dado que no depende de p. A su vez n representa el número de experimentos en el *total* de experimentos Bernouilli asociado a la secuencia de variables binomiales.