Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 0:
Repaso de Matemática.

Ejercicio 1.

Si A es una matriz simétrica y definida positiva, mostrar que puede hallarse una matriz P no singular tal que se verifica que A= PP´.

Como A es una matriz cuadrada simétrica (A= A´), se puede diagonalizar ortogonalmente:

A= CDC´
A= C$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}$C´ donde $D^{\frac{1}{2}}$= diag ($\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_K}$)
A= C$D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}})$´C´
A= C$D^{\frac{1}{2}}$(C$D^{\frac{1}{2}}$)´
A= PP´, donde P= C$D^{\frac{1}{2}}$.

A su vez, se tiene que:

det (P)= det (C$D^{\frac{1}{2}}$)
det (P)= det (C) det ($D^{\frac{1}{2}}$)
det (P)$\neq$ 0.

Como A es una matriz diagonalizable ortogonalmente (producto de ser una matriz cuadrada simétrica), det (C)$\neq$ 0 y, como A es definida positiva, det ($D^{\frac{1}{2}}$)$\neq$ 0, por lo que det (P)$\neq$ 0 y, por lo tanto, P es una matriz no singular.

Ejercicio 2.

Sea x un vector aleatorio de n x 1 tal que x ∼ $\mathcal{N}$ (μ, Σ), donde Σ es una matriz simétrica y definida positiva. Mostrar que (x - μ)′ Σ^{-1} (x - μ) ∼ χ^2 (n).

Como Σ es una matriz simétrica y definida positiva, existe una matriz P no singular tal que:

Σ= PP′.

Luego, se tiene:

$\Sigma^{-1}= (PP')^{-1}$
$\Sigma^{-1}= (P')^{-1}P^{-1}$
$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)= (x - \mu)' (P')^{-1}P^{-1} (x - \mu)$
$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)= (x - \mu)' (P^{-1})'P^{-1} (x - \mu)$
$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)= [P^{-1} (x - \mu)]' P^{-1} (x - \mu)$
$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)= z'z,$ donde $z= P^{-1} (x - \mu)$.

Notar que:

$E (z)= E [P^{-1} (x - \mu)]$
$E (z)= P^{-1} E (x - \mu)$
$E (z)= P^{-1} [E (x) - E (\mu)]$
$E (z)= P^{-1} (\mu - \mu)$
$E (z)= P^{-1} * 0$
$E (z)= 0.$

y

$V (z)= E (zz')$
$V (z)= E \{P^{-1} (x - \mu) [P^{-1} (x - \mu)]'\}$
$V (z)= E [P^{-1} (x - \mu) (x - \mu)' (P^{-1})']$
$V (z)= P^{-1} E [(x - \mu) (x - \mu)'] (P^{-1})'$
$V (z)= P^{-1}\Sigma(P^{-1})'$
$V (z)= P^{-1}PP'(P')^{-1}$
$V (z)= II$
$V (z)= I.$

Por lo tanto, z ∼ $\mathcal{N}$ (0, I) y, considerando que la suma de variables aleatorias normales estándar independientes elevadas al cuadrado tiene una distribución χ_n^2, se tiene:

$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 \sim \chi_n^2$
$z'z \sim \chi_n^2$
$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \sim \chi_n^2$.

Juan Menduiña

Ejercicio 3.

Sea x un vector aleatorio de nx1, siendo $x \sim \mathcal{N}$ (0_n, I_n), y A y B son matrices de nxn simétricas e idempotentes. Mostrar que las formas cuadráticas x´Ax y x´Bx son independientes si y sólo si AB= 0.

Dado que A y B son matrices simétricas e idempotentes, se tiene:

$x'Ax = x'AAx$
$x'Ax = x'A'Ax$
$x'Ax = (Ax)'Ax$
$x'Ax = g(Ax)$

y

$x'Bx = x'BBx$
$x'Bx = x'B'Bx$
$x'Bx = (Bx)'Bx$
$x'Bx = g(Bx)$.

Luego, como Ax y Bx son transformaciones lineales de un vector normal estándar, se tiene:

$Ax \sim \mathcal{N}(0_n, AA')$
$Ax \sim \mathcal{N}(0_n, A)$

y

$Bx \sim \mathcal{N}(0_n, BB')$
$Bx \sim \mathcal{N}(0_n, B)$.

Entonces, se tiene:

$Cov(Ax, Bx) = E[(Ax)(Bx)']$
$Cov(Ax, Bx) = E(Axx'B)$
$Cov(Ax, Bx) = A\,E(xx')\,B$
$Cov(Ax, Bx) = A\,E(xx')\,B$
$Cov(Ax, Bx) = AI_nB$
$Cov(Ax, Bx) = AB$.

Por lo tanto, si AB= 0, entonces, Ax y Bx son independientes (por tratarse de vectores normales) y, si estos lo son, las formas cuadráticas x´Ax y x´Bx también lo son.

Ejercicio 4.

Sean x e y variables aleatorias con función de densidad conjunta:

f_{XY} *(x, y)*= $\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$ $e^{\frac{-C}{2(1-\rho^2)}}$, *x, y* ∈ ℝ,

donde

C= $(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2$ $(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2$ - 2ρ $\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$ $\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$,
ρ= $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$,
σ_x^2= Var (X), σ_y^2= Var (Y).

Mostrar que las variables aleatorias u y v, u= $\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$ *y v=* $\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$, *son independientes y tienen distribución normal con media cero y varianza 2 (1 + ρ) y 2 (1 - ρ), respectivamente.*

Trabajo Práctico N° 1:
Mínimos Cuadrados Clásicos.

Ejercicio 1.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2:
Tópicos en el Modelo Lineal.

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 3:
Heterocedasticidad y Autocorrelación.

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 4:
Máxima Verosimilitud.

Ejercicio 1.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5:
Modelos Multiecuacionales.

Ejercicio 1.