Repaso

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

$n-$Vectores

Sea $n \in \mathbb{N}$, un $n-$punto (o simplemente un punto) P es una **$n-$upla** de números reales, es decir,

$$P = (a_1, \ldots, a_n) \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

En ese caso el origen es el punto

$$0 = (0, \ldots, 0).$$

Dado un punto P tenemos asociado un segmento de recta dirigida de el origen a P, este segmento se denominará **$n-$vector** (o simplemente vector). Definimos $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todos los $n-$vectores.

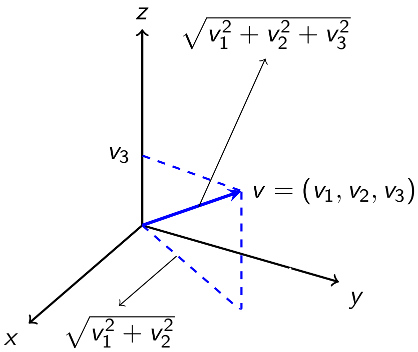
Observación.

Todo vector tiene asociada una longitud y una dirección. El único vector sin dirección es el vector $0 = (0, \ldots, 0)$, el que habitualmente se denomina vector nulo.

$n-$Vectores

Sea $v = (v_1, \ldots, v_n)$, un vector en $\mathbb{R}^n$. Decimos que v_i es la **coordenada** ***i*−esima** de v y definimos la **norma** (o longitud) de v, de la siguiente manera

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

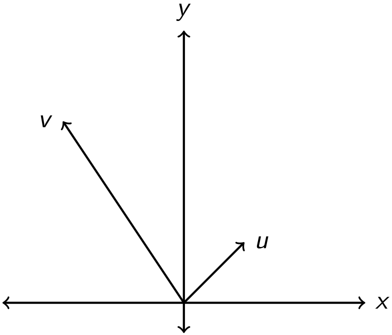


Operaciones vectoriales

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

- La **suma** de u y v se define de la siguiente manera

$$u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$



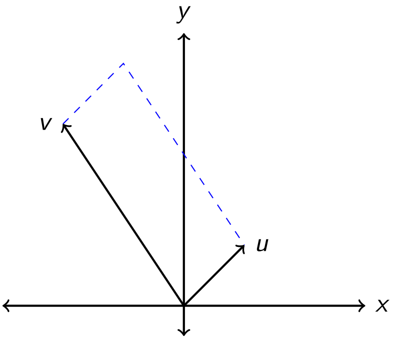
Regla del paralelogramo.

Operaciones vectoriales

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

- La **suma** de u y v se define de la siguiente manera

$$u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$



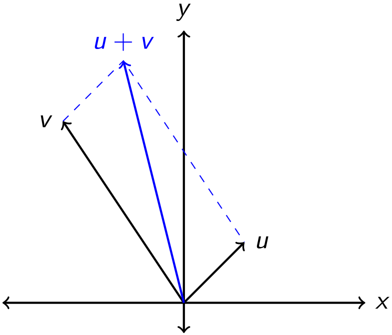
Regla del paralelogramo.

Operaciones vectoriales

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$.

- La **suma** de u y v se define de la siguiente manera

$$u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$

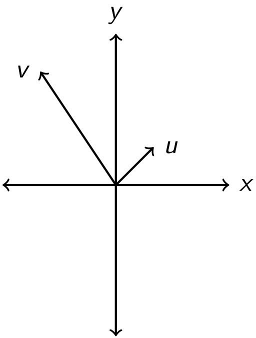


Regla del paralelogramo.

Operaciones vectoriales

- La **resta** de u y v se define de la siguiente manera

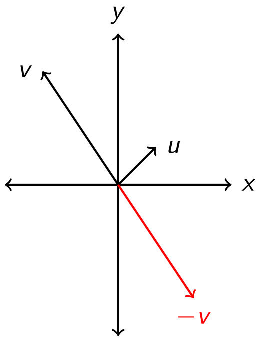
$$u - v := (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n).$$



Operaciones vectoriales

- La **resta** de u y v se define de la siguiente manera

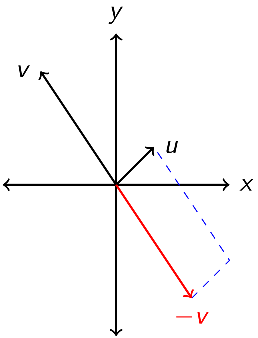
$$u - v := (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n).$$



Operaciones vectoriales

- La **resta** de u y v se define de la siguiente manera

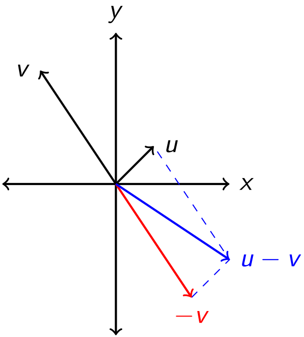
$$u - v \coloneqq (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n).$$



Operaciones vectoriales

- La **resta** de u y v se define de la siguiente manera

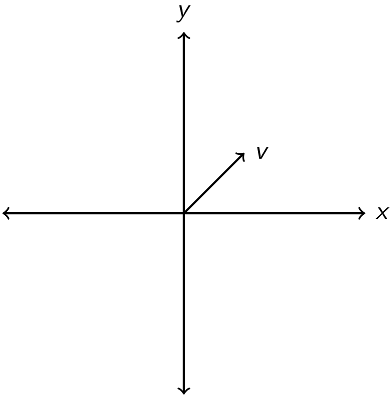
$$u - v := (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n).$$



Operaciones vectoriales

- El **producto** de v **por un escalar** (número real) k se define de la siguiente manera

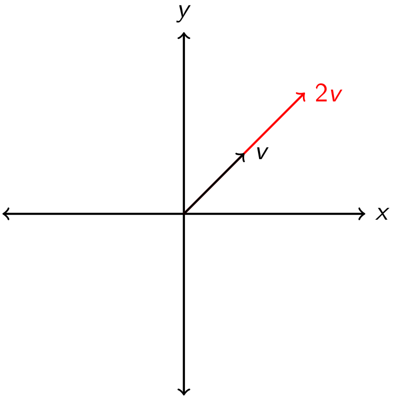
$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n).$$



Operaciones vectoriales

- El **producto** de v **por un escalar** (número real) k se define de la siguiente manera

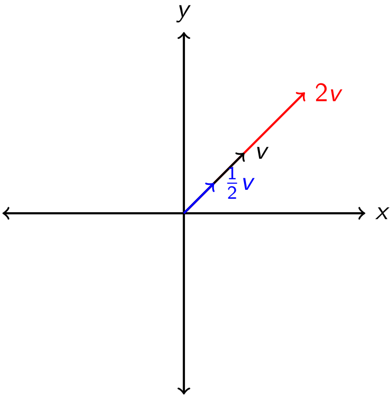
$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n).$$



Operaciones vectoriales

- El **producto** de v **por un escalar** (número real) k se define de la siguiente manera

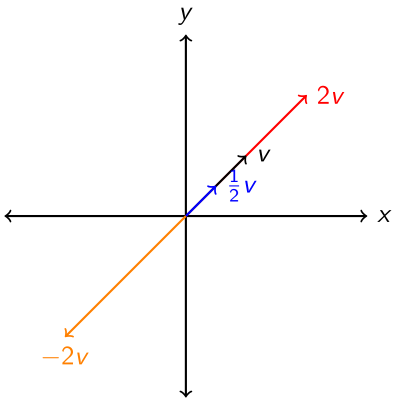
$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n).$$



Operaciones vectoriales

- El **producto** de v **por un escalar** (número real) k se define de la siguiente manera

$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n).$$



Operaciones vectoriales

Propiedad.

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ vectores y α, β escalares. Entonces

(I) $u + v = v + u$;

(II) $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(III) El 0 es el único elemento neutro para la suma;

(IV) $\alpha v = v\alpha$

(V) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;

(VI) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;

(VII) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Operaciones vectoriales

Propiedad.

Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces $\|kv\| = |k|\|v\|$.

Producto interno

Definición.

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^N$. Definimos el **producto interno o escalar** de u y v de la siguiente manera

$$u \cdot v := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Producto interno

Teorema.

Sean u, v, w tres vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces

I) $u \cdot 0 = 0$;

II) $u \cdot v = v \cdot u$;

III) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;

IV) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$;

V) $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0$ si solo si $u = 0$.

Producto interno

Observación.

- Para todo vector u en $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
- $u \cdot v = 0$ **no implica que** $u = 0$ **o que** $v = 0$.

Producto interno

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Sean u y v dos vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|.$$

Teorema (Desigualdad triangular).

Sean u y v dos vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Producto interno

Luego hemos visto que la norma de un vector tiene la siguientes propiedades.

Propiedad.

Sean u y v dos vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

i) $\|v\| = 0$ si y solo si v es el vector nulo;

ii) $\|kv\| = |k|\|v\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$;

iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Ángulo entre vectores

Teorema.

Sean u y v dos vectores no nulos. Si φ es el ángulo entre ellos entonces

$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

Ángulo entre vectores

Definición.

Sean u y v dos vectores no nulos. Decimos que u y v son **ortogonales** (o perpendiculares) si $u \cdot v = 0$ (es decir el ángulo entre ellos es $\pi/2$). Si además $\|u\| = \|v\| = 1$, decimos que u y v son ortonormales.

Espacios Vectoriales, Matrices

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** es un conjunto de elementos $\mathbb{V}$ para el cual existen dos operaciones una llamada suma $(+)$ y la otra llamada producto por escalares, las cuales cumplen las siguientes propiedades:

a) Para todo $u, v, w \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$u + v \in \mathbb{V},\ u + v = v + u,\ \text{ y } (u + v) + w = u + (v + w);$$

b) Existe un único elemento neutro para la suma en $\mathbb{V}$ denotado por 0. Es decir que

$$v + 0 = v \quad \forall v \in \mathbb{V};$$

c) Para cada elemento $v \in \mathbb{V}$ existe un elemento $-v \in \mathbb{V}$ tal que

$$v + (-v) = 0;$$

d) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{V}$ tenemos que $\alpha v \in \mathbb{V}$ y $\alpha v = v\alpha$;

e) Para todo $v \in \mathbb{V}$

$$1v = v,\ \text{ y } 0v = 0;$$

Espacios vectoriales

f) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \quad \text{y} \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v;$$

g) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

Ejemplo 1. Por lo que vimos $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 2. No es complicado ver que el conjunto de todos los polinomios también resulta ser un espacio vectorial.

Espacios vectoriales

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Decimos que un elemento $u \in \mathbb{V}$ es una **combinación lineal** de los elementos $v_1, \ldots, v_n$ en $\mathbb{V}$ si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Ejemplo 3. Mostrar que $(1, 0, 0)$ es una combinación lineal de $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, -1)$.

Espacios vectoriales

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $C = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{V}$ $(m \geq 2)$.

- Decimos que el conjunto C es **linealmente dependiente** (ld) si al menos uno de los elementos de C es una combinación lineal de los demás.
- Decimos que el conjunto C es **linealmente independiente** (li) si la única solución de

$$\sum_{i=1}^{m} k_i v_i = 0$$

  es $k_1 = \cdots = k_m = 0$.

Ejemplo 4. Mostrar que $C = \{(1,1,2),\ (0,1,1), (1,2,0)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 5. Mostrar que $C = \{(1,1,2),\,(0,1,1),(1,2,3)\}$ es linealmente dependiente.

Bases

Definición.

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{V}$. Decimos que B es **base** de $\mathbb{V}$ si B es linealmente independiente y cualquier elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de los elementos de B.

Bases

Ejemplo 6. $B = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Bases

Observación si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial que posee una base B de $k-$elementos entonces cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ de más de $k-$elemento es linealmente dependiente.

Definición.

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y B una base de $\mathbb{V}$ de $k-$elementos. Decimos que k es la **dimensión** de $\mathbb{V}$ y notamos $\dim(V) = k$.

Bases

Ejemplo 7. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. No es difícil ver que

$$\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^n$. Esta base se suele denominar **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

Observación.

Un espacio tiene más de una base. Por ejemplo

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$\{(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$$
$$\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$$

son 3 bases distintas de $\mathbb{R}^3$

Bases

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ de $k-$elementos y $v \in \mathbb{V}$.
Decimos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ son las **coordenadas de v en la base B** si

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

Notación $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Bases

Ejemplo 8. Halle las coordenadas de $v = (1, 0, 0)$ en la base $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, -1)\}$.

Bases

Ejemplo 9. Sean $B = \{(1,0,0),(0,-1,1),(2,-1,-4)\}$ y $B' = \{(0,1,2),(3,-4,-5),(0,1,0)\}$. Hallen dos vectores linelmente independientes v, w tales que $[v]_B = [v]_{B'}$ y $[w]_B = [w]_{B'}$.

Subespacios

Definición.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Un **subespacio** de $\mathbb{V}$ es un subconjunto no vacío $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ que resulta espacio vectorial con las mismas operaciones suma y multiplicación por un escalar definidas en $\mathbb{V}$.

Subespacios

Teorema.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ es un subespacio si y solo si

1. Es cerrado para la suma: Si $v, w \in \mathbb{W}$ entonces $v + w \in \mathbb{W}$;
2. Es cerrado para la multiplicación por escalares: si $w \in \mathbb{W}$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $kw \in \mathbb{W}$.

Subespacios

Ejemplo 10. Determine si $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$

a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{W} = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon x_1 \geq 0\}$;

b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2) \colon x_1 = x_2\}$;

c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{W} = \{v \in \mathbb{R}^n \colon v \cdot v = 1\}$.

Subespacios

Notación.

Sea $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Si $\dim(\mathbb{W}) = 1$ decimos que $\mathbb{W}$ es una recta; si $\dim(\mathbb{W}) = 2$ decimos que $\mathbb{W}$ es un plano; si $2 < \dim(\mathbb{W}) = m$ decimos que $\mathbb{W}$ es un hiperplano de dimensión m.

Subespacios

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tal que por lo menos uno de los elementos de S es diferente de 0. Definimos el **espacio generado** por S como

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i v_i : \, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

y se dice que $v_1, \ldots, v_m$ son los **generadores del espacio**.
Observar que $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y que

$$\dim(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) \leq m.$$

Más aun,

$$\dim(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) = m$$

si y solo si S es linealmente independiente.

Matrices

Ejemplo 11. Consideremos un inventario de camisetas en un negocio de ropa. Se tienen camisetas de tres diferentes tamaños y cinco colores. Cada noche el encargado del local prepara un inventario de las existencias. Un párrafo de dicho inventario podría tener la forma siguiente: "Camisetas: Nueve amarillas de talla S y cinco amarillas de talla M; ocho S de color verde y seis M verdes; las de tamaño L casi se han agotado pues sólo quedan tres rojas, una rosa y dos negras; también tenemos tres M rosas, cinco M rojas, una M negra y siete S negras. . . ".
Esta información se puede almacenar de la siguiente manera

	Amarillo	Negro	Rojo	Rosa	Verde
S	9	7	0	0	8
M	5	1	5	3	6
L	0	2	3	1	0

Matrices

Definición.

Una **matriz** A es un tablero rectangular de escalares a_{ij} de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrices

También se suele denotar de la siguiente manera $A = (a_{ij})_{n\times m}$. Los n '$m-$vectores fila'

$$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m}), (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m}), \ldots, (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nm}).$$

son las filas de la matriz.
Los m '$n-$vectores columna'

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Cada escalar a_{ij} se llama **elemento** (o componente) ij y aparecen en la $i-$esima fila y en la $j-$esima columna.
El orden de una matriz está dado por el número de filas y el número de columnas. Una matriz de $n-$filas y $m-$columnas, se denomina matriz de $n \times m$.

Matrices

Ejemplo 12. La siguiente es una matriz de 2×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 10 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrices

Con esta notación podemos pensar a los $n-$vectores filas como matrices de $1 \times n$ y a los $n-$vectores columnas son matrices de $n \times 1$.
El conjunto de todas las matrices de $n \times m$ se denota por

$$\mathbb{R}^{n \times m}.$$

Definición.

Diremos que dos matrices A y B son iguales, si tienen la misma cantidad de filas y columnas y si sus elementos correspondientes coinciden. En el caso que A y B sean iguales notaremos $A = B$.

Ejemplo 13. La afirmación

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} x+y &= 3, & \qquad 2z+w &= 5, \\ x-y &= 1, & \qquad z-w &= 4. \end{aligned}$$

Suma de matrices

Sean A y B dos matrices de $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

La **suma** de A y B se define de la siguiente manera

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Observemos que $A + B$ es una matriz de $n \times m$.

Producto por un escalar

El **producto de un escalar** k y una matriz A de $n \times m$, se define de la siguiente manera

$$kA := \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

Observemos que kA es matrices de $n \times m$. Además definimos

$$-A = -1A \quad \text{y} \quad A - B = A + (-B).$$

Producto por un escalar

Ejemplo 14. Hallar $A + B$, $2A$ y $2A - 3B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Propiedades

La matriz de $n \times m$ cuyos elementos son todos nulos se conoce como la matriz nula y se denota por $0_{n\times m}$ (o por 0). Obviamente

$$A + 0 = 0 + A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Propiedad.

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

i) $A + B = B + A$;
ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
iii) $A + 0 = A$ y $A + (-A) = 0$;
iv) $1A = A$ y $0A = 0$;
v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
vi) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
vii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Base y dimensión

Entonces $\mathbb{R}^{n\times m}$ es una espacio vectorial. El conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una bases de $\mathbb{R}^{n\times m}$. B se denomina la **base canónica** de $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Observación.

$$\dim(\mathbb{R}^{n\times m}) = n \cdot m.$$

Producto de matrices

Gracias al producto interno entre vectores, tenemos definido un producto para $m-$vectores fila (matriz de $1 \times m$) por un $m-$ vector columna (matriz de $m \times 1$)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 + 6 \cdot 2 = 18.$$

Vamos a utilizar esta herramienta para definir el producto entre matrices.

Producto de matrices

Definición.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Definimos el **producto de A por B** como la matriz de $n \times q$ cuya entrada ij se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

Producto de matrices

Si denotamos con A_i a la $i-$ésima fila de A y con B^j a la $j-$ésima columna de A tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^q \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n \cdot B^1 & A_n \cdot B^2 & \cdots & A_n \cdot B^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times q}.$$

Observemos que $(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$.

Observación.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Entonces el producto de A por B esta definido solo en el caso que $m = p$.

Producto de matrices

Ejemplo 15. Calcular AB y BA (siempre que sea posible) en los siguientes casos

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Producto de matrices

Observación.

a) El producto de matrices **no es conmutativo**, es decir AB y BA no necesariamente son iguales.

b) $AB = 0$ **no implica** que $A = 0$ o que $B = 0$.

Producto de matrices

Propiedad.

I) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$, entonces
$$(AB)C = A(BC) \quad \text{Ley asociativa;}$$

II) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$, entonces
$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{Ley distributiva por izquierda;}$$

III) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$, entonces
$$(A + B)C = AC + BC \quad \text{Ley distributiva por derecha;}$$

IV) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces
$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

Matriz transpuesta

La **transpuesta** de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

es la matriz que se obtiene poniendo las filas de A como columnas (respetando el orden)

$$A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

En otras palabra si A es una matriz de $n \times m$ entonces A^t es una matriz de $m \times n$ y $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

Matriz transpuesta

Ejemplo 16. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Propiedad.

I) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \quad (A^t)^t = A, \quad (kA)^t = kA^t.$$

II) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ entonces

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Matriz transpuesta

Definición.

Una matriz que tiene la misma cantidad de filas que de columnas se denomina **matriz cuadrada**.

Ejemplo 17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & e & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada.

Matriz transpuesta

Definición.

Una matriz A se denomina **simétrica** si $A^t = A$.

Ejemplo 18. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica.

Matriz transpuesta

Observación.

Si A es simétrica entonces A es una matriz cuadrada. Por lo tanto si A no es cuadrada entonces no puede ser simétrica.

Matrices, Sistemas de Ecuaciones Lineales

Maestría en Econometría–Matemática I

1er Trimestre 2023