Microeconomía

Ingreso MECAP

Teoría del consumidor

Elección óptima: Gasto mínimo y dualidad

Tomás Bustos
tomasmbustos@gmail.com

Verano 2023

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

Introducción

- En el problema anterior, para dados $\mathbf{p}$ y m, elegimos la asignación (x_1, x_2) de manera que la utilidad sea la máxima posible
- Ahora definiremos otro problema del consumidor que tiene importantes relaciones con el problema original
- En el nuevo problema, dados $\mathbf{p}$ y un nivel de utilidad $\bar{u}$ que se quiera alcanzar, elegimos la asignación (x_1, x_2) de manera que el gasto de la canasta sea el mínimo posible.

Table of Contents

Planteo del problema

¿Cuál es el nivel mínimo de gasto que el consumidor debe hacer para lograr un nivel determinado de utilidad?

Función de gasto

Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{x}$ la canasta de consumo y $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ el vector de precios al que el consumidor puede adquirir cada bien en el mercado, el gasto total que el consumidor realiza viene dado por

$$\begin{aligned} e &: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \\ e(\mathbf{x}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \end{aligned} \tag{1}$$

En nuestro mundo de dos bienes:

$$\begin{aligned} e &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ e(x_1, x_2) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{aligned}$$

Curvas de iso-gasto

- Cuando la función objetivo era $u(x_1, x_2)$, teníamos curvas de indiferencia (conjunto de canastas con mismo nivel de utilidad) y queríamos llegar a "la más alta".
- Ahora, la función objetivo es $e(x_1, x_2)$ y la representamos gráficamente con curvas de iso-gasto (conjunto de canastas con mismo nivel de gasto)

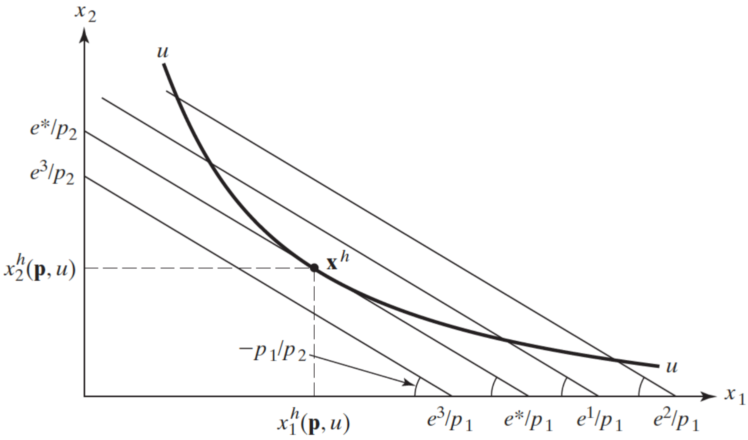
Curva de iso-gasto

La curva de iso-gasto (igual gasto) de nivel $\bar{e}$ es el conjunto de todas las canastas que implican un gasto $\bar{e}$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = \bar{e}$$

Problema del consumidor

Gráficamente, el problema consta de alcanzar la curva de indiferencia de nivel $\bar{u}$ con la curva de iso-gasto más cerca del origen posible.



Problema del consumidor

Dados $(\mathbf{p}, \bar{u})$, el problema del consumidor viene dado por:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ s.a: \quad & u(x_1, x_2) \geq \bar{u} \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Este problema parece complicado, pero:

- Si se cumple monotonicidad, la restricción de utilidad se cumple con igualdad
- Ignoramos las restricciones de no negatividad y las verificamos al final del problema

Problema del consumidor

Entonces, el problema se reduce a:

$$\min_{\{x_1,x_2\}} \quad p_1x_1 + p_2x_2$$
$$s.a: \quad u(x_1,x_2) = \bar{u}$$

Si la función es diferenciable y las preferencias son convexas, las CPO del método de los multiplicadores de Lagrange caracterizan el óptimo del consumidor.

El lagrangiano asociado al problema es:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\mu) = p_1x_1 + p_2x_2 - \mu[u(x_1,x_2) - \bar{u}]$$

Condiciones de óptimo

Las CPO son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 - \mu \frac{\partial u(x_1^c, x_2^c)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_2 - \mu \frac{\partial u(x_1^c, x_2^c)}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(x_1^c, x_2^c) - \bar{u} = 0$$

De las primeras 2 condiciones se obtiene:

$$TMS = \frac{p_1}{p_2}$$

Al igual que en el problema de maximización de utilidad, la canasta que minimiza el gasto es un punto de tangencia entre la curva de indiferencia $\bar{u}$ y la curva de iso-gasto.

Table of Contents

Demanda compensada/hicksiana

La solución al problema es:

$$(x_1^c(\mathbf{p}, u),\ x_2^c(\mathbf{p}, u),\ \mu(\mathbf{p}, u))$$

Demandas compensadas

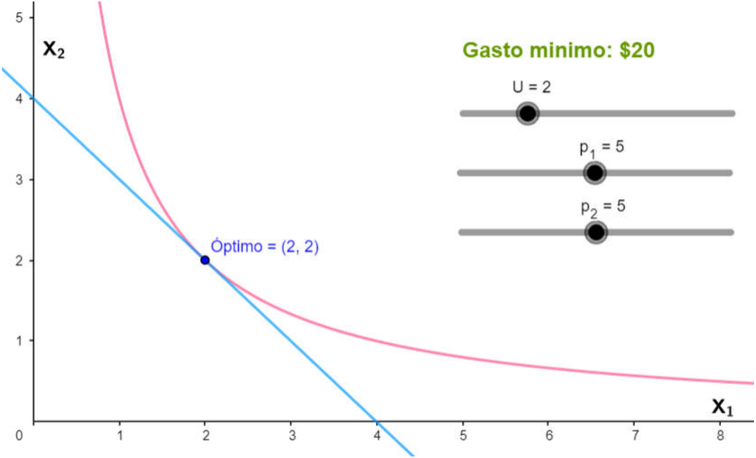
Las demandas compensadas (o hicksianas) nos dicen las cantidades que el consumidor demanda de cada bien con el objetivo alcanzar la utilidad $\bar{u}$ con el mínimo gasto posible. Es una función de los precios y el nivel de utilidad $\bar{u}$ que quiere alcanzar

$$x^c(\mathbf{p}, u)$$

Demanda compensada/hicksiana

- A diferencia de las demandas marshallianas, las demandas compensadas no son observables (dependen de $\bar{u}$)
- Lo interesante de la demanda compensada es caracterizar el comportamiento óptimo del consumidor sin ningún límite presupuestario.
- Podemos imaginar que, frente a la suba de un precio, se le da al agente una compensación monetaria de manera que pueda mantener su bienestar y se le pregunta otra vez cuánto consumiría de cada bien.

Gráfico: Solución al problema



https://www.geogebra.org/calculator/pssuassw

Propiedades

- Las funciones de demanda compensada son homogéneas de grado 0 en precios:

$$x_i^c(t\mathbf{p}, u) = x_i^c(\mathbf{p}, u)$$

- No existe exceso de utilidad:

$$u[x_1^c(\mathbf{p}, u), x_2^c(\mathbf{p}, u)] = u$$

Table of Contents

Demandas compensadas

Dados $(\mathbf{p}, \bar{u})$, para una función de utilidad Cobb-Douglas, las demandas compensadas son las que resuelven el problema:

$$\min_{\{x_1, x_2\}} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$s.a: \quad x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = \bar{u}$$

Las CPO son:

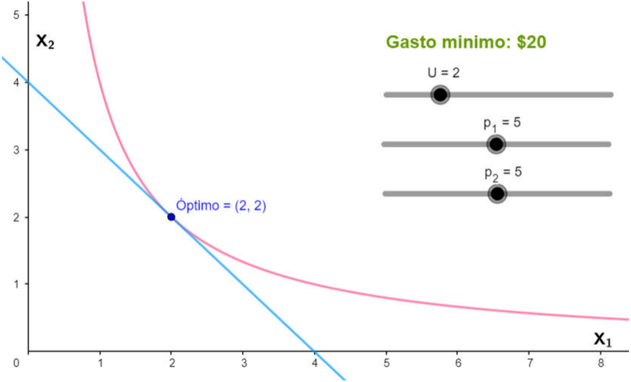
$$p_1 = \mu \alpha x_1^{\alpha - 1} x_2^{\beta}$$
$$p_2 = \mu \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta - 1}$$
$$x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = \bar{u}$$

Resolviendo:

$$x_1^c(\mathbf{p}, \bar{u}) = (\bar{u})^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \quad x_2^c(\mathbf{p}, \bar{u}) = (\bar{u})^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Gráfico: Solución al problema

Para $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ el gráfico de la solución es:



https://www.geogebra.org/calculator/pssuassw

Table of Contents

Demandas compensadas

Dados $(\mathbf{p}, \bar{u})$, para preferencias complementarios perfectos, las demandas compensadas son las que resuelven el problema:

$$\min_{\{x_1, x_2\}} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$s.a: \quad \min\{ax_1,\ bx_2\} = \bar{u}$$

Las condiciones de óptimo son:

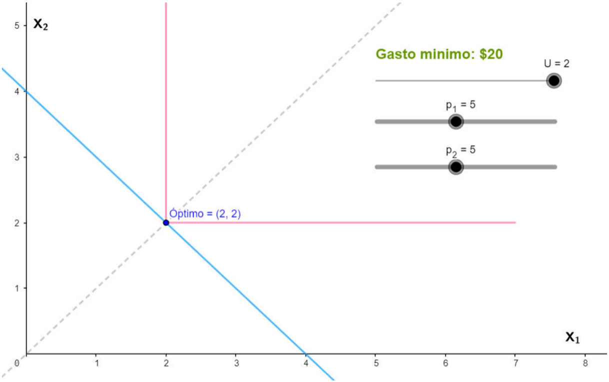
$$ax_1 = bx_2$$
$$\min\{ax_1,\ bx_2\} = \bar{u}$$

Resolviendo:

$$x_1^c(\mathbf{p}, \bar{u}) = \tfrac{1}{a}\bar{u}, \quad x_2^c(\mathbf{p}, \bar{u}) = \tfrac{1}{b}\bar{u}$$

Gráfico: Solución al problema

Para $a = b = 1$ el gráfico de la solución es:



https://www.geogebra.org/calculator/wmv5gg6d

Table of Contents

Demandas compensadas

Dados $(\mathbf{p}, \bar{u})$, para una función de utilidad cuasilineal, las demandas compensadas son las que resuelven el problema:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ s.a: \quad & a x_1 + \ln(x_2) = \bar{u} \end{aligned}$$

Las CPO son:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mu a \\ p_2 x_2 &= \mu \\ a x_1 + \ln(x_2) &= \bar{u} \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$x_1^c(\mathbf{p}, \bar{u}) = \left\{ \frac{\bar{u}}{a} - \frac{1}{a} \ln \left(\quad \right) \right. \quad , \quad x_2^c(\mathbf{p}, \bar{u}) = \frac{1}{b} \bar{u}$$

Table of Contents

Función de Gasto Mínimo

- Podemos sustituir las funciones $x_1^c(\mathbf{p}, u)$ y $x_2^c(\mathbf{p}, u)$ en la función objetivo, de manera que obtenemos el nivel de gasto mínimo para alcanzar el nivel de utilidad u a los precios $\mathbf{p}$.

$$e(\mathbf{p}, u) = p_1 x_1^c(\mathbf{p}, u) + p_2 x_2^c(\mathbf{p}, u)$$

- Notar que la función de gasto es el análogo a la función de utilidad indirecta para el problema de minimización de gasto. Es la función que indica el valor de la función objetivo para distintos valores de las variables exógenas.

Propiedades

Si las preferencias son monótonas, $e(\mathbf{p}, u)$ cumple las siguientes propiedades:

- Estrictamente creciente en u: $\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial u} > 0$
- No dereciente en p_i: $\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} \geq 0$
- Homogénea de grado 1 en precios: $e(t\mathbf{p}, u) = te(\mathbf{p}, u)$

Lema de Shephard

Para todo $(\mathbf{p}, u)$ y para todo i,

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} = x_i^c(\mathbf{p}, u)$$

Table of Contents

Dualidad

- En la maximización de utilidad, el consumidor halla la canasta que le brinda utilidad máxima con la restricción que le impone su riqueza, que es también la suma que gasta.
- En la minimización de gasto, halla la canasta que le permite alcanzar al menos un nivel de utilidad - que es el que efectivamente alcanza - minimizando su gasto.
- Las soluciones a ambos problemas están estrechamente relacionados.

Dualidad

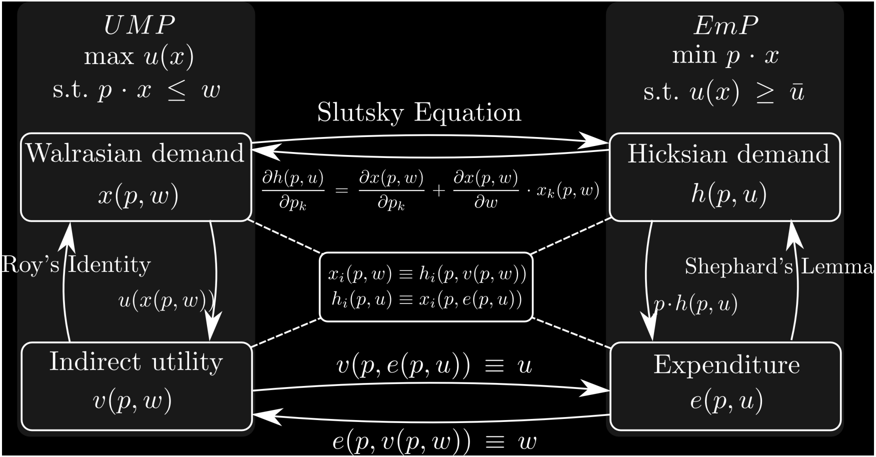
- Si el nivel de utilidad elegido para el problema de minimización es el máximo de un problema de maximización $(u = v(\mathbf{p}, m))$, entonces las soluciones de ambos problemas coinciden:

$$\mathbf{x}^c(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = \mathbf{x}^M(\mathbf{p}, m) \quad y \quad e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m$$

- Si nivel de ingreso elegido para el problema de maximización es el nivel de gasto mínimo de un problema de minimización $m = e(\mathbf{p}, u)$ entonces las soluciones también coinciden:

$$\mathbf{x}^c(\mathbf{p}, u) = \mathbf{x}^M(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) \quad y \quad v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$$

Dualidad: resumen



Ejemplo: Cobb-Douglas

Con la función de gasto mínimo que encontramos más arriba podemos recuperar la función de utilidad indirecta usando la identidad:

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m.$$

Reemplazando:

$$\frac{3}{2}(2p_1)^{\frac{1}{3}} p_2^{\frac{2}{3}} v(\mathbf{p}, m)^{\frac{1}{3}} = m$$

Despejando $v(\mathbf{p}, m)$ obtenemos:

$$v(\mathbf{p}, m) = \frac{4}{27}\frac{m^3}{p_1 p_2^2}$$

Ejemplo: Cobb-Douglas

Ahora podemos obtener las funciones de demanda marshallianas. Tenemos dos caminos para hacerlo:

- A partir de la función de utilidad indirecta, utilizando la identidad de Roy.
- A partir de las funciones de demanda compensada.
- Calculamos la demanda del bien 1 usando el primer método:

$$x_1^M(\mathbf{p}, m) = -\frac{\partial v}{\partial p_1} / \frac{\partial v}{\partial m} = \left(\frac{4}{27}\frac{m^3}{p_1 p_2^2}\right) \Big/ \left(\frac{4}{9}\frac{m^2}{p_1 p_2^2}\right) = \frac{m}{3p_1}$$

Ejemplo: Cobb-Douglas

- Ahora calculamos la demanda del bien 2 usando el segundo método:

$$x_2^M(\mathbf{p}, m) = x_2^c(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = \left(\frac{4}{27}\frac{m^3}{p_1 p_2^2}\right)^{1/3} (2p1p2)^{1/3} = \frac{2}{3}\frac{m}{p_2}$$

- Estas son las demandas marshallianas que surgen de maximizar $u(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ sujeto a la restricción presupuestaria.