

Econometría
Problem Set 1
Mínimos Cuadrados Clásicos

- **Ejercicio 1.** Considere el siguiente modelo de regresión lineal:

$$y = X\beta + u$$

donde y es un vector de $n \times 1$, X es una matriz de $n \times k$ de observaciones de variables con $\text{rango}(X) = k < n$ (con probabilidad 1), β es un vector de $k \times 1$ de parámetros desconocidos, y u es el vector de perturbación estocástica de $n \times 1$ con $\mathbb{E}(u/X) = 0$ y $\mathbb{E}(uu'/X) = \sigma^2 I_n$.

- (a) Pruebe que el estimador OLS es el estimador MELI (Mejor Estimador Lineal Insesgado) —o *BLUE* (*Best Linear Unbiased Estimator*)— de β . Indique el rol de cada supuesto de Gauss-Markov en la prueba.
 - (b) Sea c un vector $k \times 1$ de constantes. Muestre que $c'\hat{\beta}$ es el estimador BLUE de $c'\beta$.
- **Ejercicio 2.** Verificar la condición de segundo orden del problema de minimización de residuos al cuadrado.
 - **Ejercicio 3.** Evalúe las consecuencias sobre el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos de un modelo lineal de un cambio de escala en todas las variables, por un lado, y de una traslación en los regresores, por otro lado.
 - **Ejercicio 4.** Sea $\tilde{\beta}$ un elemento genérico del espacio de estimadores de β . Considere al coeficiente de determinación como función de este espacio al intervalo $[0, 1]$, es decir:

$$R^2 = R^2(\tilde{\beta}) = 1 - \frac{(y - X\tilde{\beta})' (y - X\tilde{\beta})}{y'y - n\bar{y}^2}$$

Probar que, siendo $\hat{\beta}$ el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos,

$$\hat{\beta} \in \arg \max_{\tilde{\beta}} \{R^2(\tilde{\beta})\}.$$

- **Ejercicio 5.** Considere el siguiente modelo de regresión lineal

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + u_t, \quad (t = 1, \dots, n)$$

y los siguientes datos elaborados a partir de una muestra de tamaño: $n = 33$

$$\begin{aligned} \sum x_{1t}^2 &= 2, & \sum x_{2t}^2 &= 10, & \sum x_{3t}^2 &= 1, & \sum y_t^2 &= 35, \\ \sum x_{1t}x_{2t} &= 1, & \sum x_{2t}x_{3t} &= 0, & \sum x_{1t}x_{3t} &= 1, \\ \sum x_{1t}y_t &= 5, & \sum x_{2t}y_t &= 10, & \sum x_{3t}y_t &= 4, \end{aligned}$$

Calcular la estimación OLS de β y de σ_u^2 y la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}$.

Econometría
Modelos Lineales - Mínimos Cuadrados Clásicos

Ejercicios adicionales

Sea un modelo de regresión lineal simple:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

- (1-a) Plantee la minimización de la suma de residuos al cuadrado y obtenga una expresión para el estimador de la pendiente (use la notación con sumatorias). Interprete conceptualmente el resultado.
- (1-b) Muestre que la recta de regresión estimada necesariamente pasa por el punto $(\bar{x}, \overline{liney})$ y encuentre una expresión para el estimador de la constante (use la notación con sumatorias).
- (1-c) Muestre la equivalencia entre la expresión matricial $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ y las expresiones obtenidas anteriormente.
- (1-d) Plantee la minimización de la suma de residuos al cuadrado de un modelo sin constante (es decir, al modelo de regresión lineal simple que estamos considerando se le impone la restricción de que $\beta_0 = 0$). Obtenga el estimador de la pendiente.
- (1-e) Plantee la versión centrada de este modelo. Concluya que de este modelo centrado se obtiene el mismo estimador para la pendiente que el modelo original, y que el estimador de la ordenada al origen puede recuperarse en un cálculo posterior.

- (2) Sea el modelo lineal

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i$$

donde D_i es una variable binaria que vale 1 si se cumple alguna condición y 0 si no se cumple. ¿Cuál es el estimador de MCC de β ? ¿Cuál es la varianza del estimador? Interprete los resultados.

- (3) Sea el modelo lineal

$$y_i = \beta_1 A_i + \beta_2 B_i + u_i$$

donde A_i es una variable binaria que vale 1 si la observación i es de nacionalidad argentina y 0 si no lo es, mientras que B_i es una variable binaria que vale 1 si la observación i *no* es de nacionalidad argentina y 0 si sí lo es. ¿Cuál es el estimador de MCC de β ? ¿Cuál es la varianza del estimador? Interprete los resultados.