Práctica 2 - Matrices y Sistemas

Ejercicio 1. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n\times n}$

(*a*) $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^t = A\}$ (matrices simétricas).

(*b*) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^t = -A\}$ (matrices antisimétricas).

(*c*) $S_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores).

(*d*) $S_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales).

(*e*) $S_5 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = \cdots = A_{nn}\}$ (matrices escalares).

(*f*) $S_6 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

Ejercicio 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

calcular:

(*a*) $A + 3B - 3C$. (*b*) $A + 3(B - C)$. (*c*) $A - (B - 2C)$. (*d*) $A - B + 2C$.

Ejercicio 3. Se consideran matrices de los siguientes tamaños:

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 5}, \ B \in \mathbb{R}^{5\times 7}, \ C \in \mathbb{R}^{7\times 5}.$$

Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

(*a*) $A \cdot B$. (*c*) $B \cdot C$. (*e*) $A \cdot B \cdot C$. (*g*) $B \cdot C \cdot B \cdot C$.

(*b*) $B \cdot A$. (*d*) $C \cdot B$. (*f*) $B \cdot C \cdot A$. (*h*) $A \cdot A$.

Ejercicio 4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular: A^t, B^t, $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

Ejercicio 5. Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matiz A?

(*a*) $A \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot A$.

(*b*) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.

(*c*) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

(*d*) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

Ejercicio 6. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(*a*) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $AB = BA$.

(*b*) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $AB = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

(*c*) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $AB = 0$ entonces $BA = 0$.

(*d*) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$ entonces $A = 0$.

(*e*) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A^2 = A$ entonces $A = I_n$ o $A = 0$.

(*f*) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $tr(AA^t) = 0$ entonces $A = 0$.

Ejercicio 7. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada. En cada caso, describir además el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

$$(a)\ \begin{cases} 3x+5y &= 2 \\ -2x+4y &= 6 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x-2y &= 0 \\ 2x+y &= 0 \\ x+3y &= 1 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x-2y &= 2 \\ 2x+y &= 1 \\ x+3y &= -1 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ x-2y+z &= 3 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} 3y-2z+3w &= 9 \\ 2x+y+w &= 5 \\ x-y+z-w &= -2 \end{cases}$$

$$(f)\ \begin{cases} 2x+y-z &= 8 \\ x-y+z &= 1 \\ 5x+y-z &= 17 \end{cases}$$

$$(g)\ \begin{cases} x+2y-z+2t &= 0 \\ x+y+z+2t &= 1 \\ -x+y-5z-2t &= -3 \end{cases}$$

$$(h)\ \begin{cases} 2x+y-z &= 3 \\ x-y+z &= 2 \\ 5x+y-z &= -5 \end{cases}$$

Ejercicio 8. Hallar, si es que existen, todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1,-2,3)$ es solución del sistema lineal dado en cada uno de los siguientes casos:

$$(a)\ \begin{cases} 2b\,x+y-z &= 1 \\ x-a\,y+z &= 0 \\ 4x-b\,y+a\,z &= 4 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x+2a\,y+z &= 0 \\ a\,y-b\,z &= 4 \\ x+b\,y+(2a+b)z &= b \end{cases}$$

Ejercicio 9. Determinar todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2,0,-1)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 2x-a\,y+2z &= 2 \\ x+y-b\,z &= 3 \\ y-z &= 1 \end{cases}$$

Ejercicio 10. Analizar cada uno de los siguientes sistemas determinando, en cada caso, los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$(a) \left\{ \begin{aligned} (k^2-9)x + y + kz &= 0 \\ (k-1)y + z &= 0 \\ (k+2)z &= 0 \end{aligned} \right. \qquad (d) \left\{ \begin{aligned} 7x + ky + (4+k)z &= 12 \\ 6x + ky + 3z &= 9 \\ kx + (3-k)z &= 3 \end{aligned} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{aligned} x + y + z &= k \\ x + ky + z &= 1 \\ kz &= 2 \end{aligned} \right. \qquad (e) \left\{ \begin{aligned} x + ky + 2z - w &= k+2 \\ x + ky - 2z &= 2 \\ -4z + k^2 w &= -3k-2 \end{aligned} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ (k+2)x + ky - z &= 0 \\ -x + y - 2z &= -1 \end{aligned} \right. \qquad (f) \left\{ \begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ x - y + 3z &= 1 \\ 3x + 7y - 5z &= k^2 \end{aligned} \right.$$

Ejercicio 11. Para cada valor de $a, b \in \mathbb{R}$, clasificar el siguiente sistema lineal en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & z & = & b. \end{array} \right.$$

Ejercicio 12. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Todo sistema lineal **homogéneo** tiene, al menos, una solución.

(b) Los sistemas lineales homogéneos tienen, siempre, infinitas soluciones.

(c) Si un sistema lineal tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

(d) Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde al menos uno de los a_i es no nulo, siempre tiene solución.

(e) Si cada ecuación de un sistema lineal tiene solución, entonces todo el sistema es compatible.

Ejercicio 13. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ \alpha & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = 6x + b$ tiene más de una solución. Para el ó los valores de α hallados, resolver el sistema.

Ejercicio 14. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (e)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (d)$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad (f)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 15. Verificar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

son inversibles y calcular: A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Ejercicio 16. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, según corresponda, tales que:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$ $\quad (c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad (d)$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular $(A - B^tC)^{-1}$.

(b) Hallar X, de tamaño adecuado, tal que $AX = B^tCX + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifican

$$A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2}C$$

para $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 19. Sea $A = \begin{pmatrix} 7b & -a & 0 & 0 \\ 7d & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}$. Hallar α tal que $\det A = 1$ sabiendo que $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 5$.

Ejercicio 20. Sean $A = \begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\det(B) = -2$. Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $BA^2x = BAx$ tiene una única solución.

Ejercicio 21. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5a & -50b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}$.Se sabe que $\det(A) = 2$. Calcular $\det(3A^TB)$.

Ejercicio 22. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(*a*) Si $A, B \in GL(n)$ entonces $A + B \in GL(n)$.

(*b*) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Si $\det(A) = 2$ y $\det(B^{-1}) = 4$, entonces $\det(2AB) = 8$.

(*c*) Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon Ax = 0\} = \langle (1,3,4), (0,0,4) \rangle$. Entonces $\mathrm{rg}(A) = 1$.

(*d*) Si $A \in GL(2)$ inversible entonces $5A + A^2$ es inversible.

(*e*) Si $A \in GL(3)$ entonces $\mathrm{rg}(A^3 - 2A) = \mathrm{rg}(A^2 - 2I)$.