

① $\Omega = \{\text{reordenamientos de la palabra EXAMEN}\}$.

c) $\#\Omega = \frac{6!}{2} = 720$.

$$12 + 8 + 15 + 5 + 10 + 20 \\ + 10 + 10 - 3 = 93$$

Bows A

Por lo tanto, el espacio muestral equiprobable Ω tiene 720 elementos, dado que importa el orden y es con repetición.

d) $F = \{\text{un elemento de } \Omega \text{ elegido al azar empieza con la letra A}\}$.

$G = \{\text{un elemento de } \Omega \text{ elegido al azar termina con la letra X}\}$.

$$P(F \cap G) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

$$P(F \cap G) = \frac{4!}{6!}$$

FT

$$P(F \cap G) = \frac{4!}{6 \cdot 5 \cdot 4!}$$

→ $P(F \cap G) = \frac{1}{30}$.



c) $H = \{\text{un elemento de } \Omega \text{ elegido al azar tiene las letras A y X juntas}\}$.

$$P(H) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

$$P(H) = \frac{5! \cdot 2! / 2!}{6! / 2!}$$

$$P(H) = \frac{5!}{6!}$$

→ $P(H) = \frac{1}{6}$.

X

② c) $X_i = \{ \text{una persona seleccionada el año nace en Año Nuevo de los 365 días del año, en el planeta Nebris}\}$.

$$P(X) = \frac{1}{365}.$$

$$P_1 = P(X_1 \cap X_2 \cap X_3)$$

$$P_1 = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot P(X_3)$$

$$P_1 = [P(X_1)]^3$$

$$P_1 = \frac{1}{(365)^3}.$$

X_i nace para cualquier día del año
(en este caso, 1º de enero)
por independencia entre
los X_i :
son aleatoriamente distribuidos

$$P_2 = \frac{1}{365} \cdot \frac{1}{364} \cdot \frac{1}{363} \quad \frac{3}{365} \cdot \frac{2}{364} \cdot \frac{1}{363}$$

$$P_2 = \frac{1}{365 \cdot 364 \cdot 363}$$

$$P_2 = \frac{\frac{1}{365!}}{(365-3)!}$$

$$P_2 = \frac{\frac{1}{365!}}{362!}$$

$$P_2 = \frac{362!}{365!}$$

d) $X = \{ \text{suma de los resultados de un dado equilibrado que se tire 4 veces consecutivas, siendo los tirados independientes}\}$.

$$\# \Omega = 6^4 = 1296.$$

$$P_1 = P(X=21) = \frac{4! + 4! + 4!}{6^4}$$

$$P_1 = \frac{4 + 12 + 4}{1296}$$

$$P_1 = \frac{20}{1296}.$$

\rightarrow Consideremos que 21 es posible obtenerla con:

- $6+6+6+3$, lo cual puede suceder 4 veces
- $6+6+5+4$, lo cual puede suceder 12 veces
- $6+5+5+5$, lo cual puede suceder 4 veces

$$P_2 = P(X=22) = \frac{4! + 6}{6^4}$$

$$P_2 = \frac{4 + 6}{1296}$$

$$P_2 = \frac{10}{1296}.$$

\rightarrow Análogamente, 22 es posible obtenerla con:

- $6+6+6+4$, lo cual puede suceder 4 veces
- $6+6+5+5$, lo cual puede suceder 6 veces

análisis
hacia
seguir
6 veces

Juf

Juan I. Mendoza
37.102.205

Máster en Econometría
Probabilidad

2

(3) A = {abuso conjugal}.

S = {un cónyuge es asesinado por alguien}.

C = {el otro cónyuge es culpable}.

$$P(C|S) = 0,25$$

$$P(A|C^c \cap S) = \frac{8}{75}$$

$$P(A|C \cap S) = 0,4$$

a) $P(C^c|S) = 1 - P(C|S)$

$$P(C^c|S) = 1 - 0,25$$

$$P(C^c|S) = 0,25.$$

b) $P(A \cap C \cap S) = P(A|C \cap S) \cdot P(C|S) \cdot P(S)$ llegas a

$$P(A|C \cap S) = \frac{P(A \cap C \cap S)}{P(C \cap S)} \quad \text{por ley de la multiplicación}$$

$$P(A \cap C \cap S) = P(A|C \cap S) \cdot P(C \cap S)$$

$$P(A \cap C \cap S) = P(A|C \cap S) \cdot P(C|S) \cdot P(S) \quad \text{por ley de la multiplicación}$$

c) $P(A \cap S) = P(A \cap C \cap S) + P(A \cap C^c \cap S)$

$$P(A \cap S) = P(A|C \cap S) \cdot P(C|S) \cdot P(S) +$$

$$P(A|C^c \cap S) \cdot P(C^c|S) \cdot P(S)$$

$$P(A \cap S) = P(S) [P(A|C \cap S) \cdot P(C|S) + P(A|C^c \cap S) \cdot P(C^c|S)]$$

$$P(A \cap S) = P(S) [0,4 \cdot 0,25 + \frac{8}{75} \cdot 0,75]$$

$$P(A \cap S) = 0,18 \cdot P(S).$$

$$d) P(C|A \cap S) = \frac{P(C \cap A \cap S)}{P(A \cap S)}$$

$$P(C|A \cap S) = \frac{P(A|C \cap S) P(C|S) P(S)}{P(S) [P(A|C \cap S) P(C|S) + P(A|C^c \cap S) P(C^c|S)]} \rightarrow \text{inciso b)} \\ \rightarrow \text{inciso c)}$$

$$P(C|A \cap S) = \frac{P(A|C \cap S) P(C|S)}{P(A|C \cap S) P(C|S) + P(A|C^c \cap S) P(C^c|S)}$$

$$P(C|A \cap S) = \frac{0,4 \cdot 0,25}{0,4 \cdot 0,25 + \frac{2}{75} \cdot 0,75}$$

$$P(C|A \cap S) = 0,5.$$

↓ El error del razonamiento del abogado defensor es que no condicionó a que se sabe que un conyuge es asesinado por alguien (S).

④ $X = \{\text{tener un accidente en un día cualquiera al posar debajo de la escalera}\}.$

$$P(X) = 0,002. \quad X \sim Be(p=0,002).$$

Y = $\{\text{cantidad de accidentes}\}$ de posar debajo de la escalera en una semana.

$$Y \sim B(m=7, p=0,002).$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - \binom{7}{0} (0,002)^0 (0,998)^{7-0}$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,98608372$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - 0,98608372$$

$$P(Y \geq 1) = 0,013916279.$$

⑤ $X = \{ \text{número de tickets dorados cuando se eligen tres relojeros al azar sin reposición} \}$.

$$X \sim H(m=100, r=40, n=3).$$

a) $P(X=2) = \frac{\binom{40}{2} \binom{100-40}{3-2}}{\binom{100}{3}}$

$$P(X=2) = \frac{780 \binom{60}{1}}{161700}$$

$$P(X=2) = \frac{780 \cdot 60}{161700}$$

$$P(X=2) = \frac{46800}{161700}$$

$$P(X=2) = 0,289.$$



b) $Sep(X) = \{1, \dots, r=40\}$.

$$\text{PMF: } P(X=k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{m-r}{m-k}}{\binom{m}{m}},$$

dónde:

• $\binom{m}{m}$ corresponde al número posible de "m" extracciones que se pueden sacar de "m" elementos

• $\binom{r}{k}$ corresponde al número posible de "k" extracciones que se pueden sacar de "r" elementos

• $\binom{m-r}{m-k}$ corresponde al número posible de "m-k" extracciones que se pueden sacar de "m-r" elementos

dónde: "m" corresponde al número total de elementos

- "m" corresponde al número de extracciones

- "r" corresponde al número total de posibles aciertos

- "k" corresponde al número de extracciones que fueron aciertos

- "m-r" corresponde al número total de posibles "no aciertos"

- "m-k" corresponde al número de extracciones que no fueron aciertos

$$c) E(X) = \frac{m r}{m}$$

$$E(X) = \frac{3 \cdot 40}{100}$$

$$E(X) = \frac{120}{100}$$

\rightarrow dedo el reporte de X

$$E(X) = 1,2 \approx 1.$$

Por lo tanto, en promedio, para poder visitar la fábrica de chocolates de Charlie, se espera sacar 1 ticket dorado.

$$⑥ f_{xy}(x,y) = \begin{cases} c & \text{si } 0 < y < 1 \text{ y, además, } 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$a) \int_0^1 \int_0^y c dx dy = 1$$

$$\int_0^1 (cy) dy = 1$$

$$\int_0^1 cy dy = 1$$

$$\left(\frac{cy^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1$$

$$c \frac{1^2}{2} = 1$$

$$c \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$c = 2.$$

$$b) E\left(\frac{X}{Y}\right) = \int_0^1 \int_0^y \frac{x}{y} 2 dx dy$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{y} \int_0^y x dx \right] dy$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = 2 \int_0^1 \frac{1}{y} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^y dy$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{2}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{y} dy$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \int_0^1 y dy$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{1^2}{2}$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{1}{2}.$$

húsares

Juf

Juan I. Mendoza
37.102.205Métodos en Econometría
Probabilidad

4

c) $f_{Y|X=x} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-x}$ para $x < y < 1$

$$f_X(x) = \int_x^1 2 dy$$

$$f_X(x) = (2y)|_x^1$$

$$f_X(x) = 2 \cdot 1 - 2x$$

$$f_X(x) = 2 - 2x$$

$$f_X(x) = 2(1-x)$$

\Rightarrow

$$f_{Y|X=x} = \frac{2}{2(1-x)}$$

$$f_{Y|X=x} = \frac{1}{1-x}, \text{ para } 0 < x < y < 1.$$

d) $E(Y|X=x) = \int_x^1 y \frac{1}{1-x} dy$

$$E(Y|X=x) = \frac{1}{1-x} \int_x^1 y dy$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{y^2}{2} \right)|_x^1$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1}{1-x} \frac{1-x^2}{2}$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1-x^2}{2(1-x)}$$

$$E(Y|X=x) = \frac{(1+x)(1-x)}{2(1-x)}$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1+x}{2}$$

$$\text{e) } \text{Var}(Y|X=x) = E(Y^2|X=x) - [E(Y|X=x)]^2$$

$$\text{Var}(Y|X=x) = \int_0^1 y^2 \frac{1}{1-x} dy - \left(\frac{1+x}{2}\right)^2$$

$$\text{Var}(Y|X=x) = \frac{1}{1-x} \int_0^1 y^2 dy - \frac{(1+x)^2}{4}$$

$$\text{Var}(Y|X=x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{y^3}{3}\right) \Big|_0^1 - \frac{(1+x)^2}{4}$$

$$\text{Var}(Y|X=x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{(1+x)^2}{4}$$

$$\text{Var}(Y|X=x) = \frac{1}{1-x} \frac{1-x^3}{3} - \frac{(1+x)^2}{4}$$

$$\text{Var}(Y|X=x) = \frac{1-x^3}{3(1-x)} - \frac{(1+x)^2}{4}$$

$$\text{Var}(Y|X=x) = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{3(1-x)} - \frac{(1+x)^2}{4}$$

$$\text{Var}(Y|X=x) = \frac{1+x+x^2}{3} - \frac{(1+x)^2}{4}$$

(7) $E(X)=5 ; E(X^2)=57 ; E(Y|X=x)=11-x ;$
 $\text{Var}(Y|X=x)=x^2$

a) $E(Y) = E[E(Y|X=x)]$ por ley de expectativas iteradas

$$E(Y) = E(11-x)$$

$$E(Y) = E(11) - E(X)$$

$$E(Y) = 11 - 5$$

$$E(Y) = 6.$$

por linealidad de la esperanza

por $E(C) = C$, con C constante

b) $\text{Var}(Y) = \text{Var}[E(Y|X=x)] + E[\text{Var}(Y|X=x)]$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(11-x) + E(x^2)$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(11) + \text{Var}(x) + E(x^2)$$

$$\text{Var}(Y) = 0 + \{E(x^2) - [E(x)]^2\} + E(x^2)$$

$$\text{Var}(Y) = E(x^2) - [E(x)]^2 + E(x^2)$$

$$\text{Var}(Y) = 2E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\text{Var}(Y) = 2 \cdot 57 - 5^2$$

$$\text{Var}(Y) = 114 - 25$$

$$\text{Var}(Y) = 89$$

Jef

Juan I. Hernández
37.102.205

Métodos en Econometría
Probabilidad

5

- ⑧ $X = \{ \text{tiempo de espera medido en horas de un cliente}\}$
 $\text{cualquier elegido al azar el día 5 de diciembre} \}$.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda = \theta), \theta > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\bar{w}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i, \text{ donde } w_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- b) $w_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Be}(p)$, donde $p = 1 - \theta e^{-\theta}$.

w_i es igual a 1 siempre que $x_i > 1$, lo cual sucede con probabilidad $p = 1 - \theta e^{-\theta}$, por lo tanto $w_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Be}(p = 1 - \theta e^{-\theta})$

a) $P(X_i > 1) = 1 - P(X_i \leq 1)$

$$P(X_i > 1) = 1 - P(X_i = 1)$$

$$P(X_i > 1) = 1 - \theta e^{-\theta}.$$

c) $\bar{w}_m \xrightarrow{\text{m.c.}} 0$.

yo! la función de densidad no equivale a la probabilidad de ser igual a un valor y además X es una r.v.

EN TODOS LOS INCISOS UTILICÉ ESTE RESULTADO la continúa

y NO $e^{-\theta}$.

on FT

$P(X_i \leq 1) \neq P(X_i = 1)$

$$E(\bar{w}_m) = E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i\right)$$

$$E(\bar{w}_m) = \frac{1}{m} E\left(\sum_{i=1}^m w_i\right)$$

$$E(\bar{w}_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(w_i)$$

$$E(\bar{w}_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p \quad \text{por identicamente distribuidas}$$

$$E(\bar{w}_m) = \frac{1}{m} m p$$

$$E(\bar{w}_m) = p$$

$$E(\bar{w}_m) = 1 - \theta e^{-\theta}. \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} E(\bar{w}_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \theta e^{-\theta}) = 1 - \theta e^{-\theta}$$

FT

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \text{Var}\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m W_i\right)$$

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m W_i\right)$$

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \text{Var}(W_i) \quad \text{por independencia}$$

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m p(1-p) \quad \text{por idénticamente distribuidos}$$

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m^2} m p(1-p)$$

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m} p(1-p)$$

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m} (1-\theta e^{-\theta}) [1-(1-\theta e^{-\theta})]$$

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m} (1-\theta e^{-\theta})(1-1+\theta e^{-\theta})$$

$$\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m} (1-\theta e^{-\theta}) \theta e^{-\theta} \Rightarrow$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{W}_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{m} (1-\theta e^{-\theta}) \theta e^{-\theta} \right] = 0. \quad \text{FT}$$

Por lo tanto, se tiene $\lim_{m \rightarrow \infty} E(\bar{W}_m) = 1-\theta e^{-\theta}$ y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{W}_m) = 0, \text{ se puede concluir}$$

que $\bar{W}_m \xrightarrow{m.c.} 1-\theta e^{-\theta} \equiv \mu$.

d) Dado que $\mu \equiv E(\bar{W}_m) < \infty$ y $\sigma^2 = \text{Var}(\bar{W}_m) < \infty$,

se tiene que: $\sqrt{m}(\bar{W}_m - E(\bar{W}_m)) \xrightarrow{d} N(0, \text{Var}(\bar{W}_m))$,
donde $E(\bar{W}_m)$ y $\text{Var}(\bar{W}_m)$ se calcularon en el inciso c). $\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m} (1-\theta e^{-\theta}) \theta e^{-\theta}$

Bonus) Dado que $\sqrt{m}(\bar{W}_m - E(\bar{W}_m)) \xrightarrow{d} N(0, \text{Var}(\bar{W}_m))$ $\text{Var}(\bar{W}_m) = \frac{1}{m} (1-\theta e^{-\theta}) \theta e^{-\theta}$

y $f(x) = \ln(x)$ es derivable, se tiene que: $\text{y el límite en distribución no puede depender de n}$

$$\sqrt{m}(\ln(\bar{W}_m) - \ln(1-\theta e^{-\theta})) \xrightarrow{d} N(0, [\ln(1-\theta e^{-\theta})]' \cdot \text{Var}(\bar{W}_m))$$

" hay un

" por lo
que al
calcular esta derivada

$$\rightarrow N(0, \frac{\theta e^{-\theta}}{1-\theta e^{-\theta}} \cdot \frac{1}{m} (1-\theta e^{-\theta}) \theta e^{-\theta})$$

$$\rightarrow N(0, \frac{1}{m} \theta^2 e^{-2\theta}).$$

húscaras

primero $g(x) = \ln x$

$g'(x) = \frac{1}{x}$ entonces por método delta (figurado nro solucion)

$$\ln(\ln \hat{w}_n - \ln(1-\theta e^{-\theta})) \xrightarrow{D} N\left(\frac{1}{(1-\theta e^{-\theta})^2} \cdot \text{Var}(w)\right)$$

o sea, primero se deriva g y luego se evalúa en donde está la centroide de la distribución (en la resolución $(1-\theta e^{-\theta})$).

ahora bien, un evaluaste primero y derivaste (orden encóndes) y ademas la derivada está mal calculada porque el numerador debería ser $(1-\theta e^{-\theta})'$

$$= -e^{-\theta} + \theta^2 e^{-\theta}.$$