Forma de Jordan

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Forma de Jordan

Definición.

Decimos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

Forma de Jordan

Definición.

Decimos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

Definición.

Sea A una matriz nilpotente. Decimos $k \in \mathbb{N}$ es el orden de nilpotencia de A si $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$.

Forma de Jordan

Notemos que si k es el orden de nilpotencia de A, entonces tenemos las inclusiones estrictas:

$$\{0\} \subset \ker(A) \subset \ker(A^2) \subset \ldots \subset \ker(A^k) = \mathbb{R}^n,$$

Forma de Jordan

Notemos que si k es el orden de nilpotencia de A, entonces tenemos las inclusiones estrictas:

$$\{0\} \subset \ker(A) \subset \ker(A^2) \subset \ldots \subset \ker(A^k) = \mathbb{R}^n,$$

Ejemplo

La matriz J es nilpotente de orden n.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Forma de Jordan

Forma de Jordan

Definición.

La matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

se denomina bloque de Jordan nilpotente (de orden n).

Forma de Jordan

Definición.

La matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

se denomina bloque de Jordan nilpotente (de orden n).

- $\operatorname{rg}(J) = n - 1$;

Forma de Jordan

Definición.

La matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

se denomina bloque de Jordan nilpotente (de orden n).

- $\operatorname{rg}(J) = n - 1$;
- El orden de nilpotencia de J es n.

Forma de Jordan

Proposición.

Sea $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz nilpotente entonces

- $\det(N) = 0$;

Forma de Jordan

Proposición.

Sea $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz nilpotente entonces

- $\det(N) = 0$;
- El único autovalor de N es 0.

Forma de Jordan

Teorema.

Sea $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz nilpotente de orden k. Entonces existe una matriz inversible P tal que

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es un bloque de jordan nilpotente y

$$k = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r .$$

Forma de Jordan

La matriz

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

se denomina la **forma de Jordan** de la matriz N.

Forma de Jordan

Ejemplo 1. Hallar la forma de Jordan de la siguiente matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Forma de Jordan

Forma de Jordan

Matrices por bloques

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} & m_{1n+1} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ m_{r1} & \cdots & m_{rn} & m_{rn+1} & \cdots & m_{rp} \\ m_{r+11} & \cdots & m_{r+1n} & m_{r+1n+1} & \cdots & m_{r+1p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kn} & m_{kn+1} & \cdots & m_{kp} \end{pmatrix}$$

Matrices por bloques

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} & m_{1n+1} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ m_{r1} & \cdots & m_{rn} & m_{rn+1} & \cdots & m_{rp} \\ m_{r+11} & \cdots & m_{r+1n} & m_{r+1n+1} & \cdots & m_{r+1p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kn} & m_{kn+1} & \cdots & m_{kp} \end{pmatrix}$$

Podemos dividir a M en 4 bloques,

Matrices por bloques

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} & m_{1n+1} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{r1} & \cdots & m_{rn} & m_{rn+1} & \cdots & m_{rp} \\ m_{r+11} & \cdots & m_{r+1n} & m_{r+1n+1} & \cdots & m_{r+1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kn} & m_{kn+1} & \cdots & m_{kp} \end{pmatrix}$$

Podemos dividir a M en 4 bloques, es decir

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r\times(p-n)}$, $C \in \mathbb{R}^{(k-r)\times n}$ y $D \in \mathbb{R}^{(k-r)\times(p-n)}$.

Matrices por bloques

Sean $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C, C' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D, D' \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Matrices por bloques

Sean $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C, C' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D, D' \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Entonces

- $M + M' = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$;

Matrices por bloques

Sean $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C, C' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D, D' \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Entonces

- $M + M' = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix};$
- $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix};$

Matrices por bloques

Sean $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C, C' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D, D' \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Entonces

- $M + M' = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$;
- $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$;
- Si $C = 0$ entonces

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

Forma de Jordan

Ejemplo 2. Decidir si la siguiente matriz es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Forma de Jordan

¿Qué pasa con A^n?

Forma de Jordan

¿Qué pasa con A^n?

Observación:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = D + N.$$

Forma de Jordan

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene un único autovalor, que no es diagonal y que

$$p_A(t) = (t - \lambda)^n.$$

Forma de Jordan

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene un único autovalor, que no es diagonal y que

$$p_A(t) = (t-\lambda)^n.$$

En este caso se puede mostrar que $A - \lambda I_n$ es nilpotente de orden $k \leq n$.

Forma de Jordan

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene un único autovalor, que no es diagonal y que

$$p_A(t) = (t-\lambda)^n.$$

En este caso se puede mostrar que $A-\lambda I_n$ es nilpotente de orden $k \leq n$. Entonces existe una matriz P inversible tal que

$$A-\lambda I_n = P\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es un bloque de jordan nilpotente y $k = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$.

Forma de Jordan

Entonces

$$A = P \begin{pmatrix} J_1 + \lambda I_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 + \lambda I_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} + \lambda I_{n_{r-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r + \lambda I_{n_r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Forma de Jordan - Caso general

Definición.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. La matriz

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

se denomina bloque de Jordan asociado al autovalor λ de tamaño n.

Forma de Jordan

Decimos que $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una forma de Jordan si

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

Forma de Jordan

Decimos que $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una forma de Jordan si

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^i) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2^i) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J(\lambda_i, n_{r_i-1}^i) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J(\lambda_i, n_{r_i}^i) \end{pmatrix}$$

donde $n_1^i \geq \cdots \geq n_{r_i}^i$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Forma de Jordan

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A tiene todos sus autovalores reales entonces A es semejante a una única forma de Jordan.

Forma de Jordan

Ejemplo 3. Hallar la forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma de Jordan

Forma de Jordan