Distribuciones Muestrales

Fiona Franco Churruarín

February 18, 2021

1 Distribuciones muestrales

Sabemos que si en una muestra aleatoria las observaciones son i.i.d (independientes e idénticamente distribuídas), entonces cada observación "no tiene relación" con otra y además cada una de ellas posee la misma distribución que la población. Antes de tomar la muestra, no conocemos el valor de la realización de cada una de las observaciones, por lo tanto, las consideramos aleatorias.

También sabemos que los estadísticos y estimadores, al ser funciones de las observaciones de la muestra, son variables aleatorias. Una pregunta natural que podemos hacernos es: si los estimadores son variables aleatorias, ¿qué distribución tienen?

En esta nota presentamos la distribución de algunas funciones de variables aleatorias. A fines de este curso las tomamos como definiciones, pero se pueden demostrar.

Definición 1.1 (Distribución normal estándar (Z))**.** Sea X una variable aleatoria con distribución normal, $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Definimos la variable aleatoria Z de la siguiente forma:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}, \text{ entonces } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Definición 1.2 (Distribución chi-cuadrado (χ^2))**.** Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar. Entonces, si J se define como la suma de n variables aleatorias normales al cuadrado, J tiene distribución chi-cuadrado con n grados de libertad.

$$\text{si } Z_i \sim \mathcal{N}(0,1),\ i = 1, \ldots, n \ \text{ y } J = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2, \text{ entonces } J \sim \chi_n^2$$

Definición 1.3 (Distribución t (Student))**.** Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar, y J una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. Entonces, el cociente de una variable aleatoria normal estándar sobre la raíz de una variable aleatoria chi-cuadrado sobre sus grados de libertad tiene distribución t con n grados de libertad.

$$\text{si } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \ \text{ y } J \sim \chi_n^2 \text{ entonces } T = \frac{Z}{\sqrt{J/n}} \sim t_n$$

Definición 1.4 (Distribución F (Snedecor))**.** Sean J_1 y J_2 dos variables aleatorias chi-cuadrado con, respectivamente, n_1 y n_2 grados de libertad. Entonces, el cociente de dos variables aleatorias con distribución chi-cuadrado, cada una sobre sus grados de libertad, tiene distribución F con n_1 y n_2 grados de libertad.

$$\text{si } J_1 \sim \chi_{n_1}^2 \text{ y } J_2 \sim \chi_{n_2}^2 \text{ entonces } \frac{J_1/n_1}{J_2/n_2} \sim F_{n_1,n_2}$$

Notar que los grados de libertad "del numerador" y "del denominador" **no** son intercambiables,

$$F_{n_1,n_2} \neq F_{n_2,n_1}.$$