

Trabajo Práctico N° 5:
Ecuaciones en Diferencias.

Ejercicio 1.

Ejercicio 2.

Ejercicio 3.

Ejercicio 4.

Ejercicio 5.

Ejercicio 6.

Ejercicio 7 (*).

Resolver la siguiente ecuación en diferencia de orden 2:

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t^3.$$

Se parte de saber que la solución general de una ecuación en diferencias son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a ésta más la solución particular:

$$y_t = y_t^h + y_t^p.$$

Siendo así, en primer lugar, se buscan las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} - 4y_t = 0.$$

Sea $y_t = r^t$, se tiene:

$$\begin{aligned} r^{t+2} - 3r^{t+1} - 4r^t &= 0 \\ r^t (r^2 - 3r - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} r_1, r_2 &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \\ r_1, r_2 &= \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \\ r_1, r_2 &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \\ r_1, r_2 &= \frac{3 \pm 5}{2} \\ r_1 &= \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4. \\ r_2 &= \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1. \end{aligned}$$

Entonces, la solución homogénea es la siguiente:

$$y_t^h = C_1 4^t + C_2 (-1)^t.$$

En segundo lugar, dado que 1 no es raíz de la ecuación $r^2 - 3r - 4 = 0$, se propone la siguiente solución particular:

$$y_t^p = k_1 2^t + k_2 t^3 + k_3 t^2 + k_4 t + k_5.$$

Resolviendo en la ecuación en diferencias, se tiene:

$$\begin{aligned} &[k_1 2^{t+2} + k_2 (t+2)^3 + k_3 (t+2)^2 + k_4 (t+2) + k_5] - \\ &3 [k_1 2^{t+1} + k_2 (t+1)^3 + k_3 (t+1)^2 + k_4 (t+1) + k_5] - \\ &4 (k_1 2^t + k_2 t^3 + k_3 t^2 + k_4 t + k_5) = \end{aligned}$$

$$[k_1 2^{t+2} + k_2 (t^3 + 6t^2 + 12t + 8) + k_3 (t^2 + 4t + 4) + k_4 t + 2k_5] -$$

$$3 [k_1 2^{t+1} + k_2 (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + k_3 (t^2 + 2t + 1) + k_4 t + k_5] -$$

$$(4k_1 2^t + 4k_2 t^3 + 4k_3 t^2 + 4k_4 t + 4k_5) =$$

$$k_1 2^{t+2} + k_2 t^3 + 6k_2 t^2 + 12k_2 t + 8k_2 + k_3 t^2 + 4k_3 t + 4k_3 + k_4 t + 2k_5 -$$

$$3 [k_1 2^{t+1} + k_2 t^3 + 3k_2 t^2 + 3k_2 t + k_2 + k_3 t^2 + 2k_3 t + k_3 + k_4 t + k_4 + k_5] -$$

$$4k_1 2^t - 4k_2 t^3 - 4k_3 t^2 - 4k_4 t - 4k_5 =$$

$$k_1 2^{t+2} + k_2 t^3 + 6k_2 t^2 + 12k_2 t + 8k_2 + k_3 t^2 + 4k_3 t + 4k_3 + k_4 t + 2k_5 -$$

$$(3k_1 2^{t+1} + 3k_2 t^3 + 9k_2 t^2 + 9k_2 t + 3k_2 + 3k_3 t^2 + 6k_3 t + 3k_3 + 3k_4 t + 3k_4 + 3k_5) -$$

$$4k_1 2^t - 4k_2 t^3 - 4k_3 t^2 - 4k_4 t - 4k_5 = 2^t + t^3$$

$$k_1 2^{t+2} + k_2 t^3 + 6k_2 t^2 + 12k_2 t + 8k_2 + k_3 t^2 + 4k_3 t + 4k_3 + k_4 t + 2k_5 -$$

$$3k_1 2^{t+1} - 3k_2 t^3 - 9k_2 t^2 - 9k_2 t - 3k_2 - 3k_3 t^2 - 6k_3 t - 3k_3 - 3k_4 t - 3k_4 - 3k_5 -$$

$$4k_1 2^t - 4k_2 t^3 - 4k_3 t^2 - 4k_4 t - 4k_5 = 2^t + t^3$$

$$-6k_1 2^t - 6k_2 t^3 - (3k_2 + 6k_3) t^2 + (3k_2 - 2k_3 - 6k_4) t + (5k_2 + k_3 - k_4 - 6k_5) = 2^t + t^3$$

Luego, se tiene que las constantes k_1, k_2, k_3, k_4 y k_5 , respectivamente, son iguales a:

$$-6k_1 2^t = 2^t$$

$$k_1 = \frac{2^t}{-6 \cdot 2^t}$$

$$k_1 = \frac{-1}{6}.$$

$$-6k_2 t^3 = t^3$$

$$k_2 = \frac{t^3}{-6t^3}$$

$$k_2 = \frac{-1}{6}.$$

$$-(3k_2 + 6k_3) t^2 = 0$$

$$3k_2 + 6k_3 = \frac{0}{-t^2}$$

$$3k_2 + 6k_3 = 0$$

$$6k_3 = -3k_2$$

$$k_3 = \frac{-3k_2}{6}$$

$$k_3 = \frac{-1}{2} k_2$$

$$k_3 = \frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{6} \right)$$

$$k_3 = \frac{1}{12}.$$

$$(3k_2 - 2k_3 - 6k_4) t = 0$$

$$3k_2 - 2k_3 - 6k_4 = \frac{0}{t}$$

$$3k_2 - 2k_3 - 6k_4 = 0$$

$$6k_4 = 3k_2 - 2k_3$$

$$k_4 = \frac{3k_2 - 2k_3}{6}$$

$$k_4 = \frac{1}{2} k_2 - \frac{1}{3} k_3$$

$$k_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{6} \right) - \frac{1}{3} \frac{1}{12}$$

$$k_4 = \frac{-1}{12} - \frac{1}{36}$$

$$k_4 = \frac{-1}{9}.$$

$$5k_2 + k_3 - k_4 - 6k_5 = 0$$

$$6k_5 = 5k_2 + k_3 - k_4$$

$$k_5 = \frac{5k_2 + k_3 - k_4}{6}$$

$$k_5 = \frac{5}{6} k_2 + \frac{1}{6} k_3 - \frac{1}{6} k_4$$

$$k_5 = \frac{5}{6} \left(\frac{-1}{6}\right) + \frac{1}{6} \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \left(\frac{-1}{9}\right)$$

$$k_5 = \frac{-5}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{54}$$

$$k_5 = \frac{-1863}{17496}.$$

Entonces, la solución particular es la siguiente:

$$y_t^p = \frac{-1}{6} 2^t - \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{12} t^2 - \frac{1}{9} t - \frac{1863}{17496}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias de orden 2 es:

$$y_t = C_1 4^t + C_2 (-1)^t - \frac{1}{6} 2^t - \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{12} t^2 - \frac{1}{9} t - \frac{1863}{17496}.$$