Repaso

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Transformación lineal

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales. Una aplicación $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una **transformación lineal** si para cualesquiera dos escalares α y β y cualesquiera dos elementos $u, v \in \mathbb{V}$ se verifica la siguiente igualdad

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Transformación lineal

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces la aplicación $T(v) = [Av^t]^t$ es una transformación lineal.

Teorema.

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal entonces existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $T(v) = [Av^t]^t$.

Núcleo e imagen

Definición.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Definimos el **kernel** (o **núcleo**) de T de la siguiente manera

$$N(T) = \ker(T) := \{v \in \mathbb{V} \colon \, T(v) = 0\}.$$

Proposición.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces $\ker(T)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Núcleo e imagen

Definición.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Definimos la **imagen** de T de la siguiente manera

$$\operatorname{Img}(T) := \{w \in \mathbb{W} : \text{si existe } v \in \mathbb{V} \text{ tal que } T(v) = w\}.$$

Teorema.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces $\operatorname{Img}(T)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

Núcleo e imagen

Teorema.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ entonces

- $\mathrm{Img}(T) = \langle T(v_1), \ldots, T(v_n) \rangle$;
- $\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Img}(T)) = \dim(\mathbb{V})$.

Cambio de base

Supongamos que tenemos dos bases, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Por ser B' base, cada vector de B se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de B'.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n, \\ u_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n, \\ &\vdots \\ u_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

La matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz de cambio de base** de la base B a la base B'.

Cambio de base

Teorema.

Sea P una matriz de cambio de base de una base B a una base B' en un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Entonces P es inversible y para todo $w \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$[w]_{B'}^t = P[w]_B^t \quad \text{y por consiguiente } [w]_B^t = P^{-1}[w]_{B'}^t.$$

Autovalores, Autovectores y Diagonalización

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Autovalores y autovectores

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, tenemos la siguiente transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$$T(x) = Ax.$$

Entonces

$$T^n(x) = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n-\text{veces}}(x) = A^n x.$$

Autovalores y autovectores

Si

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{m-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_m \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores

Si

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{m-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_m \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{m-1}^n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_m^n \end{pmatrix}.$$

Autovalores y autovectores

Definición.

Sea $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Decimos que A y B son **semejantes** (o **similares**) si existe una matriz no singular P tal que
$$A = PBP^{-1}.$$

Autovalores y autovectores

Definición.

Sea $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Decimos que A y B son **semejantes** (o **similares**) si existe una matriz no singular P tal que

$$A = PBP^{-1}.$$

Buscamos una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que

$$A = PDP^{-1},$$

donde D es una matriz diagonal.

Autovalores y autovectores

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Un número real λ se llama **autovalor** de A si existe un vector $v \in \mathbb{R}^m$ no nulo tal que

$$Av^t = \lambda v^t.$$

Autovalores y autovectores

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Un número real λ se llama **autovalor** de A si existe un vector $v \in \mathbb{R}^m$ no nulo tal que

$$Av^t = \lambda v^t.$$

El vector v se denomina **autovector** de A correspondiente al autovalor λ.

Autovalores y autovectores

Ejemplo 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$. Mostrar que $(2,1)$ y $(3,2)$ son autovectores de A asociados a 1 y -2 respectivamente.

Autovalores y autovectores

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. El polinomio

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_m) \quad \text{o} \quad p_A(\lambda) := \det(\lambda I_m - A).$$

se denomina el **polinomio característico** de A.

Autovalores y autovectores

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. El polinomio

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_m) \quad \text{o} \quad p_A(\lambda) := \det(\lambda I_m - A).$$

se denomina el **polinomio característico** de A.
La ecuación

$$p_A(\lambda) = 0$$

se denomina **ecuación característica** de A.

Autovalores y autovectores

Ejemplo 2. Hallar el polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Autovalores y autovectores

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de A. Entonces

$$E_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^m \colon Av^t = \lambda v^t\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Autovalores y autovectores

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y λ un autovalor de A. El espacio E_λ se denomina **autoespacio** (o **espacio propio**) de A correspondiente a λ.

Autovalores y autovectores

Teorema.

Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.

Autovalores y autovectores

Ejemplo 3. Halle los autovectores y autovalores de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores

Procedimiento para calcular autovalores y autovectores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

- Primero encontrar el caracteristico de A, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$;

Autovalores y autovectores

Procedimiento para calcular autovalores y autovectores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

- Primero encontrar el caracteristico de A, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$;
- Buscar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $p_A(\lambda)$;

Autovalores y autovectores

Procedimiento para calcular autovalores y autovectores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

- Primero encontrar el caracteristico de A, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$;
- Buscar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $p_A(\lambda)$;
- Se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I_m)v^t = 0$ para cada autovalor λ_i.

Autovalores y autovectores

Proposición.

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal.

Autovalores y autovectores

Propiedad.

- La suma de los autovalores de una matriz es igual a la traza de la matriz.

Autovalores y autovectores

Propiedad.

- La suma de los autovalores de una matriz es igual a la traza de la matriz.
- El producto de todos lo autovalores de una matriz es igual al determinante de la matriz.

Autovalores y autovectores

Propiedad.

- La suma de los autovalores de una matriz es igual a la traza de la matriz.
- El producto de todos lo autovalores de una matriz es igual al determinante de la matriz.
- Si λ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ entonces λ es un autovalor de A^t.

Autovalores y autovectores

Propiedad.

- La suma de los autovalores de una matriz es igual a la traza de la matriz.
- El producto de todos lo autovalores de una matriz es igual al determinante de la matriz.
- Si λ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ entonces λ es un autovalor de A^t.
- Si λ es un autovalor de una matriz no singular $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ entonces $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

Autovalores y autovectores

Propiedad.

- La suma de los autovalores de una matriz es igual a la traza de la matriz.
- El producto de todos lo autovalores de una matriz es igual al determinante de la matriz.
- Si λ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ entonces λ es un autovalor de A^t.
- Si λ es un autovalor de una matriz no singular $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ entonces $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.
- Una matriz es singular si y sólo si cero es autovalor.

Diagonalización

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Decimos que A es diagonalizable, si A es semejante a una matriz diagonal, es decir si existen $D, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que D es diagonal, P es inversible y

$$A = PDP^{-1}.$$

Diagonalización

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A es diagonalizable si y solo si A tiene $n-$autovectores linealmente independientes.

Diagonalización

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A es diagonalizable si y solo si A tiene $n-$autovectores linealmente independientes.

Corolario.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A tiene n autovalores distintos entonces A es diagonalizable.

Diagonalización

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y λ un autovalor de A. Entonces la dimensión de E_λ es menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz de p_A.

Diagonalización

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y λ un autovalor de A. Entonces la dimensión de E_λ es menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz de p_A.

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A es diagonalizable si y solo si el polinomio característico p_A de A tiene todas sus raíces reales y para todo autovalor λ de A se tiene que

$$\dim(E_\lambda) = \text{ multiplicidad de } \lambda \text{ como raíz de } p_A.$$

El método

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para decidir si A es digonalizable procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos p_A, el polinomio caracteristico de A;

El método

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para decidir si A es digonalizable procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos p_A, el polinomio caracteristico de A;
2. Hallamos las raíces de p_A, si tiene raíces complejas paramos;

El método

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para decidir si A es digonalizable procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos p_A, el polinomio caracteristico de A;
2. Hallamos las raíces de p_A, si tiene raíces complejas paramos;
3. Hallamos los autovectores de A, si no tenemos n autovectores l.i. paramos;

El método

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para decidir si A es digonalizable procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos p_A, el polinomio caracteristico de A;
2. Hallamos las raíces de p_A, si tiene raíces complejas paramos;
3. Hallamos los autovectores de A, si no tenemos n autovectores l.i. paramos;
4. Construimos la matriz P ubicando a los autovectores hallados en el punto anterior como columnas.

Diagonalización

Ejemplo 4. Decidir si las siguientes matrices son diagonalizables

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

http://www.matrixcalc.org

Diagonalización

Ejemplo 5. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz tal que

- $\{v \in \mathbb{R}^4 \colon (A - I_4)v^t = 0\} \neq \{0\}$;
- $\mathrm{rg}(A + 3I_4) \leq 2$;
- $p_A(-2) = 6$.

Decidir si A es diagonalizable y calcular $A^3 + 2A^2 - 3A$.

Aplicación

Un modelo de Leontief, tenemos la siguiente relación

$$x^t = Ax^t + d^t$$

donde $x, d \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Recordemos que x es el vector producción, d vector demanda, y A es la matriz del sistema. Si $I_n - A$, es inversible

$$x^t = (I_n - A)^{-1} d^t.$$

Aplicación

Un modelo de Leontief, tenemos la siguiente relación

$$x^t = Ax^t + d^t$$

donde $x, d \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Recordemos que x es el vector producción, d vector demanda, y A es la matriz del sistema. Si $I_n - A$, es inversible

$$x^t = (I_n - A)^{-1} d^t.$$

Por otro lado uno puede hacer el siguiente juego

$$\begin{aligned}
x^t &= Ax^t + d^t = A(Ax^t + d^t) + d^t = A^2x^t + Ad^t + d^t \\
&= A^2x^t + (I + A)d^t = A^2(Ax^t + d^t) + (I + A)d^t \\
&= A^3x^t + (I + A + A^2)d^t \\
&\ \vdots \\
&= A^nx^t + (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})d^t
\end{aligned}$$

Aplicación

Tengo dos opciones

$$x^t = (I_n - A)^{-1} d^t.$$

o

$$x^t = A^n x^t + (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) d^t.$$

Aplicación

Tengo dos opciones

$$x^t = (I_n - A)^{-1} d^t.$$

o

$$x^t = A^n x^t + (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) d^t.$$

Si A es diagonalizable y todos sus autovalores tienen modulo menor que 1, tendremos que

$$A^n \to 0 \text{ cuando } n \text{ tiende a infinito.}$$

Aplicación

Tengo dos opciones

$$x^t = (I_n - A)^{-1} d^t.$$

o

$$x^t = A^n x^t + (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) d^t.$$

Si A es diagonalizable y todos sus autovalores tienen modulo menor que 1, tendremos que

$$A^n \to 0 \text{ cuando } n \text{ tiende a infinito.}$$

Entonces

$$x^t = (I + A + A^2 + \cdots) d^t.$$

Aplicación

Tengo dos opciones

$$x^t = (I_n - A)^{-1} d^t.$$

o

$$x^t = A^n x^t + (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) d^t.$$

Si A es diagonalizable y todos sus autovalores tienen modulo menor que 1, tendremos que

$$A^n \to 0 \text{ cuando } n \text{ tiende a infinito.}$$

Entonces

$$x^t = (I + A + A^2 + \cdots) d^t.$$

Observemos que, en estas condiciones

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$$

Exponencial de una matriz

Recordemos que

$$e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}.$$

Exponencial de una matriz

Recordemos que

$$e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}.$$

Si tenemos una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

resulta que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$D^i = \begin{pmatrix} d_{11}^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^i \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{D^i}{i!} = \begin{pmatrix} \frac{d_{11}^i}{i!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_{22}^i}{i!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{d_{nn}^i}{i!} \end{pmatrix}.$$

Exponencial de una matriz

Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{D^i}{i!}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d_{11}^i}{i!} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty}\frac{d_{22}^i}{i!} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty}\frac{d_{nn}^i}{i!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{d_{11}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{d_{22}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_{nn}}\end{pmatrix}.$$

Exponencial de una matriz

Concluimos que

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

Si A es una matriz es diagonalizable entonces existe una matriz P inversible tal que

$$A = PDP^{-1}$$

donde D es diagonal. Entonces definimos

$$e^A = Pe^D P^{-1}.$$

Exponencial de una matriz

Ejemplo 6. Hallar e^A donde

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ortogonalidad

Recordemos que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son vectores ortogonales si

$$u \cdot v = 0.$$

Ortogonalidad

Recordemos que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son vectores ortogonales si

$$u \cdot v = 0.$$

Diremos que un conjunto de vectores $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto ortogonal si $v_i \cdot v_j = 0$ para todo $i \neq j$. Si además $v_i \cdot v_i = 1$, diremos que B es un conjunto ortonormal.

Ortogonalidad

Recordemos que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son vectores ortogonales si

$$u \cdot v = 0.$$

Diremos que un conjunto de vectores $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto ortogonal si $v_i \cdot v_j = 0$ para todo $i \neq j$. Si además $v_i \cdot v_i = 1$, diremos que B es un conjunto ortonormal.

Ejemplo 7. Por ejemplo, no es complicado mostrar que el conjunto

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 1) \right\}$$

es ortogonal.

Ortogonalidad

Observación.

Cualquier conjunto ortogonal de vectores no nulos se puede transformar en un conjunto ortonormal dividiendo cada vector por su norma.

Ortogonalidad

Observación.

Cualquier conjunto ortogonal de vectores no nulos se puede transformar en un conjunto ortonormal dividiendo cada vector por su norma.

Proposición.

Todo conjunto de vectores no nulos ortogonales es linealmente independiente.

Ortogonalidad

Entonces, si tenemos un conjunto $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores ortonormales, podemos definir una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que las filas de P son los vectores de B y usando que B es ortogonal podemos concluir que $P^{-1} = P^t$.

Ortogonalidad

Entonces, si tenemos un conjunto $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vectores ortonormales, podemos definir una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que las filas de P son los vectores de B y usando que B es ortogonal podemos concluir que $P^{-1} = P^t$.

Definición.

Decimos que $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal si su inversa es su transpuesta, es decir

$$P^{-1} = P^t.$$

Ortogonalidad

Entonces, si tenemos un conjunto $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vectores ortonormales, podemos definir una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que las filas de P son los vectores de B y usando que B es ortogonal podemos concluir que $P^{-1} = P^t$.

Definición.

Decimos que $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal si su inversa es su transpuesta, es decir

$$P^{-1} = P^t.$$

Ejemplo 8. $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

Ortogonalidad

Proposición.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica entonces

- Todas las raíces del polinomio característico de A son reales;
- A es diagonalizable;
- Los autovectores de A correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

Ortogonalidad

Por lo tanto si A es simétrica entonces es diagonalizable, pero resultado anterior nos dice un poco mas.

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica. Entonces existe una matriz ortogonal P tal que

$$D = P^{-1}AP$$

es diagonal.

Ejemplo 9. Diagonalizar la siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$