Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 1:
Vectores y Espacios Vectoriales.

Ejercicio 1.

Dados los vectores u= (1, 2), v= (-1, 3) y w= (-1, -2), calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones.

(a)

u + v= (1, 2) + (-1, 3)
u + v= (0, 5).

Gráfico.

(b)

v + w= (-1, 3) + (-1, -2)
v + w= (-2, 1).

Gráfico.

(c)

3u + 3v= 3 (1, 2) + 3 (-1, 3)
3u + 3v= (3, 6) + (-3, 9)
3u + 3v= (0, 15).

Gráfico.

(d)

3 (u + v)= 3 [(1, 2) + (-1, 3)]
3 (u + v)= 3 (0, 5)
3 (u + v)= (0, 15).

Gráfico.

(e)

(u + v) + w= [(1, 2) + (-1, 3)] + (-1, 2)
(u + v) + w= (0, 5) + (-1, 2)
(u + v) + w= (-1, 7).

Gráfico.

(f)

u + (v + w)= (1, 2) + [(-1, 3) + (-1, -2)]
u + (v + w)= (1, 2) + (-2, 1)
u + (v + w)= (-1, 3).

Gráfico.

(g)

u - v= (1, 2) - (-1, 3)
u - v= (4, -1).

Gráfico.

(h)

u + (v - w)= (1, 2) + [(-1, 3) - (-1, -2)]
u + (v - w)= (1, 2) + (0, 5)
u + (v - w)= (1, 7).

Gráfico.

(i)

$\frac{5}{4}$ u + $\frac{1}{2}$ v - $\frac{3}{2}$ w= $\frac{5}{4}$ (1, 2) + $\frac{1}{2}$ (-1, 3) - $\frac{3}{2}$ (-1, -2)
$\frac{5}{4}$ u + $\frac{1}{2}$ v - $\frac{3}{2}$ w= $(\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$ + $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$ + $(\frac{3}{2}, 3)$
$\frac{5}{4}$ u + $\frac{1}{2}$ v - $\frac{3}{2}$ w= $(\frac{9}{4}, 7)$.

Gráfico.

<u>Ejercicio 2.</u>

Sea $w = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ *un vector. Graficar en el plano.*

(a) $L = \{tw\colon t \in \mathbb{R}\}$.

Gráfico.

(b) $L = \{tw\colon t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

Gráfico.

(c) $L = \{tw\colon t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$.

Gráfico.

Juan Menduiña

Ejercicio 3.

Dados los vectores u= (0, 1, 2), v= (1, 1, 0) y w= (-1, 1, 1), calcular las operaciones:

(a)

u + v= (0, 1, 2) + (1, 1, 0)
u + v= (1, 2, 2).

(b)

u + v + w= (0, 1, 2) + (1, 1, 0) + (-1, 1, 1)
u + v + w= (0, 3, 3).

(c)

u - v= (0, 1, 2) - (1, 1, 0)
u - v= (-1, 0, 2).

(d)

2u= 2 (0, 1, 2)
2u= (0, 2, 4).

(e)

-3v= -3 (1, 1, 0)
-3v= (-3, -3, 0).

(f)

$-v + \frac{2}{3} w = -(1, 1, 0) + \frac{2}{3} (-1, 1, 1)$
$-v + \frac{2}{3} w = (-1, -1, 0) + (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
$-v + \frac{2}{3} w = (\frac{-5}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$.

Ejercicio 4.

Hallar x e y para que los vectores v y w resulten iguales.

(a) *v= (x, 3) y w= (2, x + y).*

v= w
(x, 3)= (2, x + y).

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3 = x + y \end{cases}.$$

x + y= 3
y= -x + 3
y= -2 + 3
y= 1.

Por lo tanto, los valores de x e y para que los vectores v y w resulten iguales son (2, 1).

(b) *v= (4, y) y w= x (2, 3).*

v= w
(4, y)= x (2, 3)
(4, y)= (2x, 3x).

$$\begin{cases} 4 = 2x \\ y = 3x \end{cases}.$$

x= $\frac{4}{2}$
x= 2.

y= 3 * 2
y= 6.

Por lo tanto, los valores de x e y para que los vectores v y w resulten iguales son (2, 6).

(c) *v= x (3, 2) y w= 2 (y, -1).*

v= w
x (3, 2)= 2 (y, -1)
(3x, 2x)= (2y, -2).

$$\begin{cases} 3x = 2y \\ 2x = -2 \end{cases}.$$

x= $\frac{-2}{2}$
x= -1.

2y= 3x
y= $\frac{3}{2}$ x
y= $\frac{3}{2}$ (-1)
y= $\frac{-3}{2}$.

Por lo tanto, los valores de x e y para que los vectores v y w resulten iguales son (-1, $\frac{-3}{2}$).

(d) *v= x (2, y) y w= y (1, -2).*

v= w
x (2, y)= y (1, -2)
(2x, xy)= (y, -2y).

$$\begin{cases} 2x = y \\ xy = -2y \end{cases}.$$

x2x= -2 * 2x
2x^2= -4x
x^2= $\frac{-4}{2}$ x
x^2= -2x
x^2 + 2x= 0
x (x + 2)= 0.
x_1= 0.
x_2= -2.

y_1= 2 * 0= 0.
y_2= 2 (-2)= -4.

Por lo tanto, los valores de x e y para que los vectores v y w resulten iguales son (0, 0) y (-2, -4).

Ejercicio 5

Normalizar los siguientes vectores.

(a) *u= (-3, 1, -2, 4, -5).*

$$u' = \frac{u}{\|u\|}$$
$$u' = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2+4^2+(-5)^2}} (-3, 1, -2, 4, -5)$$
$$u' = \frac{1}{\sqrt{9+1+4+16+25}} (-3, 1, -2, 4, -5)$$
$$u' = \frac{1}{\sqrt{55}} (-3, 1, -2, 4, -5)$$
$$u' = (\frac{-3}{\sqrt{55}}, \frac{1}{\sqrt{55}}, \frac{-2}{\sqrt{55}}, \frac{4}{\sqrt{55}}, \frac{-5}{\sqrt{55}})$$
$$u' = (\frac{-3\sqrt{55}}{55}, \frac{\sqrt{55}}{55}, \frac{-2\sqrt{55}}{55}, \frac{4\sqrt{55}}{55}, \frac{-5\sqrt{55}}{55})$$
$$u' = (\frac{-3\sqrt{55}}{55}, \frac{\sqrt{55}}{55}, \frac{-2\sqrt{55}}{55}, \frac{4\sqrt{55}}{55}, \frac{-\sqrt{55}}{11}).$$

(b) *v= (4, -2, -3, 8).*

$$v' = \frac{v}{\|v\|}$$
$$v' = \frac{1}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-3)^2+8^2}} (4, -2, -3, 8)$$
$$v' = \frac{1}{\sqrt{16+4+9+64}} (4, -2, -3, 8)$$
$$v' = \frac{1}{\sqrt{93}} (4, -2, -3, 8)$$
$$v' = (\frac{4}{\sqrt{93}}, \frac{-2}{\sqrt{93}}, \frac{-3}{\sqrt{93}}, \frac{8}{\sqrt{93}})$$
$$v' = (\frac{4\sqrt{93}}{93}, \frac{-2\sqrt{93}}{93}, \frac{-3\sqrt{93}}{93}, \frac{8\sqrt{93}}{93})$$
$$v' = (\frac{4\sqrt{93}}{93}, \frac{-2\sqrt{93}}{93}, \frac{-\sqrt{93}}{31}, \frac{8\sqrt{93}}{93}).$$

(c) *w=* $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$.

$$w' = \frac{w}{\|w\|}$$
$$w' = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{2}{3})^2+(\frac{-1}{4})^2}} (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$$
$$w' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{1}{16}}} (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$$
$$w' = \frac{1}{\sqrt{\frac{109}{144}}} (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$$
$$w' = \frac{1}{\frac{\sqrt{109}}{12}} (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$$

$w´= \frac{12}{\sqrt{109}}(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$

$w´= (\frac{6}{\sqrt{109}}, \frac{8}{\sqrt{109}}, \frac{-3}{\sqrt{109}})$

$w´= (\frac{6\sqrt{109}}{109}, \frac{8\sqrt{109}}{109}, \frac{-3\sqrt{109}}{4*109})$

$w´= (\frac{6\sqrt{109}}{109}, \frac{8\sqrt{109}}{109}, \frac{-3\sqrt{109}}{109})$.

Ejercicio 6.

Determinar todos los valores de k ∈ ℝ que verifican:

(a) *El vector u= (4, k) tiene norma 5.*

$\|u\|$= 5
$\sqrt{4^2+k^2}$= 5
$\sqrt{16+k^2}$= 5
16 + k^2= 5^2
16 + k^2= 25
k^2= 25 - 16
k^2= 9
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{9}$
$|k|$= 3
k= $\pm$ 3.

(b) *El vector v= (1, k, 0) tiene norma 2.*

$\|v\|$= 2
$\sqrt{1^2+k^2+0^2}$= 2
$\sqrt{1+k^2+0}$= 2
$\sqrt{1+k^2}$= 2
1 + k^2= 2^2
1 + k^2= 4
k^2= 4 - 1
k^2= 3
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{3}$
$|k|$= $\sqrt{3}$
k= $\pm$ $\sqrt{3}$.

(c) *El vector w= k (2, 2, 1) tiene norma 1.*

$\|w\|$= 1
$\sqrt{(2k)^2+(2k)^2+1^2}$= 1
$\sqrt{4k^2+4k^2+1}$= 1
$\sqrt{8k^2+1}$= 1
$8k^2$ + 1= 1^2
$8k^2$ + 1= 1
$8k^2$= 1 - 1
$8k^2$= 0
k^2= $\frac{0}{8}$

k^2= 0
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{0}$
$|k|$= 0
k= $\pm$ 0
k= 0.

(d) *El vector z= (1, k, -2, 5) tiene norma* $\sqrt{39}$.

$||z||$= $\sqrt{39}$
$\sqrt{1^2 + k^2 + (-2)^2 + 5^2}$= $\sqrt{39}$
$\sqrt{1 + k^2 + 4 + 25}$= $\sqrt{39}$
$\sqrt{30 + k^2}$= $\sqrt{39}$
30 + k^2= $(\sqrt{39})^2$
30 + k^2= 39
k^2= 39 - 30
k^2= 9
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{9}$
$|k|$= 3
k= $\pm$ 3.

Ejercicio 7.

Dados los vectores v= (1, -2, 2), w= (2, 0, 3) y z= (4, 4, 4), realizar las operaciones.

(a)

v * w= (1, -2, 2) * (2, 0, 3)
v * w= 1 * 2 - 2 * 0 + 2 * 3
v * w= 2 - 0 + 6
v * w= 8.

(b)

w * v= (2, 0, 3) * (1, -2, 2)
w * v= 2 * 1 + 0 (-2) + 3 * 2
w * v= 2 + 0 + 6
w * v= 8.

(c)

(v + w) * z= [(1, -2, 2) + (2, 0, 3)] * (4, 4, 4)
(v + w) * z= (3, -2, 5) * (4, 4, 4)
(v + w) * z= 3 * 4 - 2 * 4 + 5 * 4
(v + w) * z= 12 - 8 + 20
(v + w) * z= 24.

(d)

(v * z) + (w * z)= (1, -2, 2) * (4, 4, 4) + (2, 0, 3) * (4, 4, 4)
(v * z) + (w * z)= [(1, -2, 2) + (2, 0, 3)] * (4, 4, 4)
(v * z) + (w * z)= (3, -2, 5) * (4, 4, 4)
(v * z) + (w * z)= 3 * 4 - 2 * 4 + 5 * 4
(v * z) + (w * z)= 12 - 8 + 20
(v * z) + (w * z)= 24.

(e)

3v * w= 3 (1, -2, 4) * (2, 0, 3)
3v * w= (3, -6, 12) * (2, 0, 3)
3v * w= 3 * 2 - 6 * 0 + 12 * 3
3v * w= 6 - 0 + 36

3v * w= 42.

(f)

v * 3w= (1, -2, 2) * 3 (2, 0, 3)
v * 3w= (1, -2, 2) * (6, 0, 9)
v * 3w= 1 * 6 - 2 * 0 + 2 * 9
v * 3w= 6 - 0 + 18
v * 3w= 24.

(g)

3 (v * w)= 3 [(1, -2, 2) * (2, 0, 3)]
3 (v * w)= 3 (1 * 2 - 2 * 0 + 2 * 3)
3 (v * w)= 3 (2 - 0 + 6)
3 (v * w)= 3 * 8
3 (v * w)= 24.

(h)

v * v= (1, -2, 2) * (1, -2, 2)
v * v= 1 * 1 - 2 (-2) + 2 * 2
v * v= 1 - 4 + 4
v * v= 1.

(i)

w * w= (2, 0, 3) * (2, 0, 3)
w * w= 2 * 2 + 0 * 0 + 3 * 3
w * w= 4 + 0 + 9
w * w= 13.

Ejercicio 8.

En cada uno de los siguientes casos, calcular el ángulo entre los vectores u y v.

(a) *u= (1, 1) y v= (1, -1).*

u * v= (1, 1) * (1, -1)
u * v= 1 * 1 + 1 (-1)
u * v= 1 - 1
u * v= 0.

φ= arccos ($\frac{\cos(\varphi)}{\|u\|\|v\|}$)
φ= arccos (0)
φ= 90°.

Por lo tanto, u y v son ortogonales.

(b) *u= (3, -1, 2) y v= (4, 3, -1).*

u * v= (3, -1, 2) * (4, 3, -1)
u * v= 3 * 4 - 1 * 3 + 2 (-1)
u * v= 12 - 3 - 2
u * v= 7.

$\|u\|$= $\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}$
$\|u\|$= $\sqrt{9 + 1 + 4}$
$\|u\|$= $\sqrt{14}$.

$\|v\|$= $\sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2}$
$\|v\|$= $\sqrt{16 + 9 + 1}$
$\|v\|$= $\sqrt{26}$.

φ= arccos ($\frac{\text{u}*\text{v}}{\|u\|\|v\|}$)
φ= arccos ($\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}}$)
φ= arccos ($\frac{7}{\sqrt{14*26}}$)
φ= arccos ($\frac{7}{\sqrt{390}}$)
φ= 69,24°.

Por lo tanto, u y v no son ortogonales.

(c) *u= (1, -2, 3) y v= (2, 5, 4).*

u * v= (1, -2, 3) * (2, 5, 4)
u * v= 1 * 2 - 2 * 5 + 3 * 4
u * v= 2 - 10 + 12
u * v= 4.

$\|u\|= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}$
$\|u\|= \sqrt{1 + 4 + 9}$
$\|u\|= \sqrt{15}$.

$\|v\|= \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2}$
$\|v\|= \sqrt{4 + 25 + 16}$
$\|v\|= \sqrt{40}$.

φ= arccos $(\frac{u*v}{\|u\|\|v\|})$
φ= arccos $(\frac{4}{\sqrt{15}\sqrt{40}})$
φ= arccos $(\frac{4}{\sqrt{15*40}})$
φ= arccos $(\frac{4}{\sqrt{600}})$
φ= 80,6°.

Por lo tanto, u y v no son ortogonales.

Ejercicio 9.

Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^3$ *u= (1, -3, 2) y v= (2, -1, 1).*

(a) *Escribir al vector w= (1, 7, -4) como combinación lineal de u y v.*

w= au + bv
(1, 7, -4)= a (1, -3, 2) + b (2, -1, 1)
(1, 7, -4)= (a, -3a, 2a) + (2b, -b, b)
(1, 7, -4)= (a + 2b, -3a - b, 2a + b).

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ 7 = -3a - b. \\ -4 = 2a + b \end{cases}$$

2b= 1 - a
b= $\frac{1-a}{2}$
b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a.

7= -3a - ($\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a)
7= -3a - $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ a
7= $\frac{-5}{2}$ a - $\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$ a= $\frac{-1}{2}$ - 7
$\frac{5}{2}$ a= $\frac{-15}{2}$
a= $\frac{\frac{-15}{2}}{\frac{5}{2}}$
a= -3.

b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ (-3)
b= $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{2}$
b= 2.

-4= 2 (-3) + 2
-4= -6 +2
-4= -4.

Por lo tanto, se escribe al vector w como combinación lineal de u y v de la siguiente manera:

w= -3u + 2v
(1, 7, -4)= -3 (1, -3, 2) + 2 (2, -1, 1).

(b) *Escribir al vector z= (2, -5, 4) como combinación lineal de u y v.*

z= au + bv
(2, -5, 4)= a (1, -3, 2) + b (2, -1, 1)
(2, -5, 4)= (a, -3a, 2a) + (2b, -b, b)
(2, -5, 4)= (a + 2b, -3a - b, 2a + b).

$$\begin{cases} 2 = a + 2b \\ -5 = -3a - b. \\ 4 = 2a + b \end{cases}$$

2b= 2 - a
b= $\frac{2-a}{2}$
b= 1 - $\frac{1}{2}$ a.

-5= -3a - (1 - $\frac{1}{2}$ a)
-5= -3a - 1 + $\frac{1}{2}$ a
-5= $\frac{-5}{2}$ a - 1
$\frac{5}{2}$ a= -1 + 5
$\frac{5}{2}$ a= 4
a= $\frac{4}{\frac{5}{2}}$
a= $\frac{8}{5}$.

b= 1 - $\frac{1}{2}$ $\frac{8}{5}$
b= 1 - $\frac{4}{5}$
b= $\frac{1}{5}$.

4= 2 $\frac{8}{5}$ + $\frac{1}{5}$
4= $\frac{16}{5}$ + $\frac{1}{5}$
4$\neq$ $\frac{17}{5}$.

Por lo tanto, no es posible escribir al vector z como combinación lineal de u y v.

(c) *¿Para qué valores de k el vector y= (1, k, 5) es una combinación lineal de u y v?*

y= au + bv
(1, k, 5)= a (1, -3, 2) + b (2, -1, 1)
(1, k, 5)= (a, -3a, 2a) + (2b, -b, b)
(1, k, 5)= (a + 2b, -3a - b, 2a + b).

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ k = -3a - b. \\ 5 = 2a + b \end{cases}$$

2b= 1 - a
b= $\frac{1-a}{2}$
b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a.

5= 2a + $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a
5= $\frac{3}{2}$ a + $\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$ a= 5 - $\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$ a= $\frac{9}{2}$
a= $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}$
a= 3.

b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ * 3
b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{3}{2}$
b= -1.

k= -3 * 3 - (-1)
k= -9 + 1
k= -8.

Por lo tanto, el vector y es una combinación lineal de u y v para k= -8.

Ejercicio 10.

Estudiar si el conjunto de vectores S= {(2, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 2, -1)} es una base $\mathbb{R}^3$.

a (2, 1, 0) + b (3, 1, 1) + c (3, 2, -1)= (0, 0, 0)
(2a, a, 0) + (3b, b, b) + (3c, 2c, -c)= (0, 0, 0)
(2a + 3b + 3c, a + b + 2c, b - c)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} 2a + 3b + 3c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}.$$

b= c.

a + c + 2c= 0
a + 3c= 0
a= -3c.

2 (-3c) + 3c + 3c= 0
-6c + 6c= 0
0= 0.

Por lo tanto, S no es linealmente independiente y, entonces, no es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11.

Encontrar un sistema generador del subespacio de $\mathbb{R}^4$ *definido por:*

T= {(x, y, z, t) $\in \mathbb{R}^4$*: x + 2z - 3t + 2y= 0}.*

x= -2z + 3t - 2y.

(x, y, z, t)= (-2z + 3t - 2y, y, z, t)
(x, y, z, t)= y (-2, 1, 0, 0) + z (-2, 0, 1, 0) + t (3, 0, 0, 1).

T= $\langle(-2,1,0,0),(-2,0,1,0),(3,0,0,1)\rangle$.

Ejercicio 12.

Determinar si los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^3$.

(a) *{(1, 1, 4), (0, 2, 1), (3, 1, 9)}.*

a (1, 1, 4) + b (0, 2, 1) + c (3, 1, 9)= (0, 0, 0)
(a, a, 4a) + (0, 2b, b) + (3c, c, 9c)= (0, 0, 0)
(a + 3c, a + 2b + c, 4a + b + 9c)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} a + 3c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ 4a + b + 9c = 0 \end{cases}.$$

3c= -a
c= $\frac{-1}{3}$ a.

a + 2b - $\frac{1}{3}$ a= 0
$\frac{2}{3}$ a + 2b= 0
2b= $\frac{-2}{3}$ a
b= $\frac{\frac{-2}{3}}{2}$ a
b= $\frac{-1}{3}$ a.

4a - $\frac{1}{3}$ a + 9 ($\frac{-1}{3}$ a)= 0
4a - $\frac{1}{3}$ a - 3a= 0
$\frac{2}{3}$ a= 0
a= $\frac{0}{\frac{2}{3}}$
a= 0.

b= $\frac{-1}{3} * 0$
b= 0.

c= $\frac{-1}{3} * 0$
c= 0.

a= b= c= 0.

a (1, 1, 4) + b (0, 2, 1) + c (3, 1, 9)= (x, y, z)
(a, a, 4a) + (0, 2b, b) + (3c, c, 9c)= (x, y, z)
(a + 3c, a + 2b + c, 4a + b + 9c)= (x, y, z).

$$\begin{cases} a + 3c = x \\ a + 2b + c = y \\ 4a + b + 9c = z \end{cases}.$$

3c= x - a
c= $\frac{x-a}{3}$
c= $\frac{1}{3}$ x - $\frac{1}{3}$ a.

a + 2b + $\frac{1}{3}$ x - $\frac{1}{3}$ a= y
$\frac{2}{3}$ a + 2b + $\frac{1}{3}$ x= y
2b= y - $\frac{2}{3}$ a - $\frac{1}{3}$ x
b= $\frac{y-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}x}{2}$
b= $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{3}$ a - $\frac{1}{6}$ x.

4a + $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{3}$ a - $\frac{1}{6}$ x + 9 ($\frac{1}{3}$ x - $\frac{1}{3}$ a)= z
4a + $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{3}$ a - $\frac{1}{6}$ x + 3x - 3a= z
$\frac{2}{3}$ a + $\frac{17}{6}$ x + $\frac{1}{2}$ y= z
$\frac{2}{3}$ a= $\frac{-17}{6}$ x - $\frac{1}{2}$ y + z
a= $\frac{\frac{-17}{6}x-\frac{1}{2}y+z}{\frac{2}{3}}$
a= $\frac{-51}{12}$ x - $\frac{3}{4}$ y + $\frac{3}{2}$ z
a= $\frac{-51x-9y+18z}{12}$.

b= $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{3}$ ($\frac{-51}{12}$ x - $\frac{3}{4}$ y + $\frac{3}{2}$ z) - $\frac{1}{6}$ x
b= $\frac{1}{2}$ y + $\frac{17}{12}$ x + $\frac{1}{4}$ y - $\frac{1}{2}$ z - $\frac{1}{6}$ x
b= $\frac{15}{12}$ x + $\frac{3}{4}$ y - $\frac{1}{2}$ z
b= $\frac{15x+9y-6z}{12}$.

c= $\frac{1}{3}$ x - $\frac{1}{3}$ ($\frac{-51}{12}$ x - $\frac{3}{4}$ y + $\frac{3}{2}$ z)
c= $\frac{1}{3}$ x - $\frac{17}{12}$ x + $\frac{1}{4}$ y - $\frac{1}{2}$ z
c= $\frac{-13}{12}$ x + $\frac{1}{4}$ y - $\frac{1}{2}$ z
c= $\frac{-13x+3y-6z}{12}$.

Por lo tanto, este conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

(b) *{(1, 0, 1), (1, 1, 0)}.*

Este conjunto no es base de $\mathbb{R}^3$, ya que dim ($\mathbb{R}^3$)= 3.

(c) *{(2, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 2, -1)}.*

a (2, 1, 1) + b (2, 2, 1) + c (2, 2, -1)= (0, 0, 0)
(2a, a, a) + (2b, 2b, b) + (2c, 2c, -c)= (0, 0, 0)
(2a + 2b + 2c, a + 2b + 2c, a + b - c)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} 2a+2b+2c=0 \\ a+2b+2c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases}.$$

2 (a + b + c)= 0
a + b + c= $\frac{0}{2}$
a + b + c= 0
c= -a - b.

a + 2b + 2 (-a - b)= 0
a + 2b - 2a - 2b= 0
-a= 0
a= $\frac{0}{-1}$
a= 0.

c= -0 - b
c= -b.

0 + b - (-b)= 0
b + b= 0
2b= 0
b= $\frac{0}{2}$
b= 0.

c= -0
c= 0.

a= b= c= 0.

a (2, 1, 1) + b (2, 2, 1) + c (2, 2, -1)= (x, y, z)
(2a, a, a) + (2b, 2b, b) + (2c, 2c, -c)= (x, y, z)
(2a + 2b + 2c, a + 2b + 2c, a + b - c)= (x, y, z).

$$\begin{cases} 2a+2b+2c=x \\ a+2b+2c=y \\ a+b-c=z \end{cases}.$$

2 (a + b + c)= x
a + b + c= $\frac{1}{2}$ x

c= $\frac{1}{2}$ x - a - b.

a + 2b + 2 ($\frac{1}{2}$ x - a - b)= y
a + 2b + x - 2a - 2b= y
-a + x= y
a= x - y.

c= $\frac{1}{2}$ x - (x - y) - b
c= $\frac{1}{2}$ x - x + y - b
c= $\frac{-1}{2}$ x + y - b.

x - y + b - ($\frac{-1}{2}$ x + y - b)= z
x - y + b + $\frac{1}{2}$ x - y + b= z
$\frac{3}{2}$ x - 2y + 2b= z
2b= $\frac{-3}{2}$ x + 2y + z
b= $\frac{\frac{-3}{2}x+2y+z}{2}$
b= $\frac{-3}{4}$ x + y + $\frac{1}{2}$ z
b= $\frac{-3x+4y+2z}{4}$.

c= $\frac{-1}{2}$ x + y - ($\frac{-3}{4}$ x + y + $\frac{1}{2}$ z)
c= $\frac{-1}{2}$ x + y + $\frac{3}{4}$ x - y - $\frac{1}{2}$ z
c= $\frac{1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ z
c= $\frac{x-2z}{4}$.

Por lo tanto, este conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

(d) *{(1, 2, 1), (1, 3, 1), (1, 4, 1), (1, 5, 1)}.*

Este conjunto no es base de $\mathbb{R}^3$, ya que es linealmente dependiente.

(e) *{(1, 1, 1), (-2, 1, 0), (-1, 0, 1)}.*

a (1, 1, 1) + b (-2, 1, 0) + c (-1, 0, 1)= (0, 0, 0)
(a, a, a) + (-2b, b, 0) + (-c, 0, c)= (0, 0, 0)
(a - 2b - c, a + b, a + c)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} a - 2b - c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}.$$

b= -a.

c= -a.

a - 2 (-a) - (-a)= 0
a + 2a + a= 0
4a= 0
a= $\frac{0}{4}$
a= 0.

b= -0
b= -0.

c= -0
c= 0.

a= b= c= 0.

a (1, 1, 1) + b (-2, 1, 0) + c (-1, 0, 1)= (x, y, z)
(a, a, a) + (-2b, b, 0) + (-c, 0, c)= (x, y, z)
(a - 2b - c, a + b, a + c)= (x, y, z).

$$\begin{cases} a-2b-c=x \\ a+b=y \\ a+c=z \end{cases}.$$

b= y - a.

c= z - a.

a - 2 (y - a) - (z - a)= x
a - 2y + 2a - z + a= x
4a - 2y - z= x
2a= x + 2y + z
a= $\frac{x+2y+z}{4}$
a= $\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ y + $\frac{1}{4}$ z
a= $\frac{x+2y+z}{4}$.

b= y - ($\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ y + $\frac{1}{4}$ z)
b= y - $\frac{1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{4}$ z
b= $\frac{-1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{4}$ z
b= $\frac{-x+2y-z}{4}$.

c= z - ($\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ y + $\frac{1}{4}$ z)
c= z - $\frac{1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{4}$ z

c= $\frac{-1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ y + $\frac{3}{4}$ z
c= $\frac{-x-2y+3z}{4}$.

Por lo tanto, este conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 13 (*).

Sean B= {(2, 1, 1), (1, -1, 3), v} una base de $\mathbb{R}^3$*. Hallar v sabiendo que las coordenadas del vector (1, -2, 5) en la base B son (2, -1, 3).*

Se sabe que:

B= {(2, 1, 1), (1, -1, 3), v}.

Entonces, se tiene:

$[(1, -2, 5)]_B$= (2, -1, 3).

Operando, se llega a:

(1, -2, 5)= 2 (2, 1, 1) - (1, -1, 3) + 3v
(1, -2, 5)= (4, 2, 2) - (1, -1, 3) + 3v
(1, -2, 5)= (3, 3, -1) + 3v
3v= (1, -2, 5) - (3, 3, -1)
3v= (-2, -5, 6)
v= $\frac{1}{3}$ (-2, -5, 6)
v= ($\frac{-2}{3}$, $\frac{-5}{3}$, 2).

Por lo tanto, v= ($\frac{-2}{3}$, $\frac{-5}{3}$, 2).

Ejercicio 14.

Sean B= {(-1, 4, 2), v, (0, 0, -1)} y B'= {w, (1, -1, 1), (-1, 0, 2)} bases de $\mathbb{R}^3$. *Hallar v y w sabiendo que las coordenadas de v en la base de B' son (1, 2, 3) y que las coordenadas de w en la base B son (1, 2, 3).*

B= {(-1, 4, 2), v, (0, 0, -1)}.
B'= {w, (1, -1, 1), (-1, 0, 2)}.

$[v]_{B'}$= (1, 2, 3).
$[w]_B$= (1, 2, 3).

v= w + 2 (1, -1, 1) + 3 (-1, 0, 2)
v= w + (2, -2, 2) + (-3, 0, 6)
v= w + (-1, -2, 8).

w= (-1, 4, 2) + 2v + 3 (0, 0, -1)
w= (-1, 4, 2) + 2v + (0, 0, -3)
w= 2v + (-1, 4, -1).

v= 2v + (-1, 4, -1) + (-1, -2, 8)
v= 2v + (-2, 2, 7)
2v - v= -(-2, 2, 7)
v= (2, -2, -7).

w= 2 (2, -2, -7) + (-1, 4, -1)
w= (4, -4, -14) + (-1, 4, -1)
w= (3, 0, -15).

Ejercicio 15.

Probar que los siguientes conjuntos son subespacios:

(a) *W= {(x, y, z): x= y= z} de* $\mathbb{R}^3$.

W es cerrado para la suma:

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W \Rightarrow x_1 = y_1 = z_1 \wedge x_2 = y_2 = z_2$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2$
$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$
$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W.$

W es cerrado para la multiplicación de escalares:

$(x, y, z) \in W \Rightarrow x = y = z$
$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{R}, kx = ky = kz$
$\Rightarrow (kx, ky, kz) \in W$
$\Rightarrow k\,(x, y, z) \in W.$

Por lo tanto, el conjunto es un subespacio.

(b) *W= {(x, y, z, t): x= z, y= t} de* $\mathbb{R}^4$.

W es cerrado para la suma:

$(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W \Rightarrow x_1 = z_1, y_1 = t_1 \wedge x_2 = z_2, y_2 = t_2$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = z_1 + z_2, y_1 + y_2 = t_1 + t_2$
$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in W$
$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W.$

W es cerrado para la multiplicación de escalares:

$(x, y, z, t) \in W \Rightarrow x = z, y = t$
$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{R}, kx = kz, ky = kt$
$\Rightarrow (kx, ky, kz, kt) \in W$
$\Rightarrow k\,(x, y, z, t) \in W.$

Por lo tanto, el conjunto es un subespacio.

(c) *W= {(x, y, z, t): 2y + 3z= 0} de* $\mathbb{R}^4$.

W es cerrado para la suma:

$(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W \Rightarrow 2y_1 + 3z_1 = 0 \wedge 2y_2 + 3z_2 = 0$

$\Longrightarrow 2y_1 + 2y_2 + 3z_1 + 3z_2 = 0$
$\Longrightarrow 2\ (y_1 + y_2) + 3\ (z_1 + z_2) = 0$
$\Longrightarrow (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2,\ t_1 + t_2) \in$ W
$\Longrightarrow (x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1) + (x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2) \in$ W.

W es cerrado para la multiplicación de escalares:

(x, y, z, t) ∈ W $\Longrightarrow$ 2y + 3z= 0
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, k (2y + 3z)= 0
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, 2ky + 3kz= 0
$\Longrightarrow$ (kx, ky, kz, kt) ∈ W
$\Longrightarrow$ k (x, y, z, t) ∈ W.

Por lo tanto, el conjunto es un subespacio.

Ejercicio 16.

Una compañía petrolera puede convertir un barril de crudo en tres clases distintas de combustible. Sin aditivos de plomo, sus producciones de las tres clases de combustible a partir de un barril de crudo vienen dadas por el vector (2, 2, 4). Con el máximo de aditivos de plomo permitidos legalmente, las producciones son (5, 0, 3). Se supone que los efectos de los aditivos de plomo son proporcionales, es decir, que al usar una fracción del máximo permitido ($0 \leq \alpha \leq 1$) se tiene la producción:

$(1 - \alpha)\ (2, 2, 4) + \alpha\ (5, 0, 3)$.

Determinar si es posible que la compañía produzca los siguientes vectores:

(a) *$(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2})$.*

$(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2})= (1 - \alpha)\ (2, 2, 4) + \alpha\ (5, 0, 3)$
$(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2})= (2, 2, 4) + (-2\alpha, -2\alpha, -4\alpha) + (5\alpha, 0, 3\alpha)$
$(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2})= (2 + 3\alpha, 2 - 2\alpha, 4 - \alpha)$.

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = 2 + 3\alpha \\ 1 = 2 - 2\alpha. \\ \frac{7}{2} = 4 - \alpha \end{cases}$$

$3\alpha= \frac{5}{2} - 2$
$3\alpha= \frac{1}{2}$
$\alpha= \frac{\frac{1}{2}}{3}$
$\alpha= \frac{1}{6}$.

$2\alpha= 2 - 1$
$2\alpha= 1$
$\alpha= \frac{1}{2}$.

$\alpha= 4 - \frac{7}{2}$
$\alpha= \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, no es posible que la compañía produzca este vector.

(b) *$(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6})$.*

$(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6})= (1 - \alpha)\ (2, 2, 4) + \alpha\ (5, 0, 3)$

$(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6})$= (2, 2, 4) + (-2$\alpha$, -2$\alpha$, -4$\alpha$) + (5$\alpha$, 0, 3$\alpha$)
$(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6})$= (2 + 3$\alpha$, 2 - 2$\alpha$, 4 - α).

$$\begin{cases} \frac{9}{2} = 2 + 3\alpha \\ \frac{1}{3} = 2 - 2\alpha. \\ \frac{19}{6} = 4 - \alpha \end{cases}$$

$3\alpha = \frac{9}{2} - 2$
$3\alpha = \frac{5}{2}$
$\alpha = \frac{\frac{5}{2}}{3}$
$\alpha = \frac{5}{6}$.

$2\alpha = 2 - \frac{1}{3}$
$2\alpha = \frac{5}{3}$
$\alpha = \frac{\frac{5}{3}}{2}$
$\alpha = \frac{5}{6}$.

$\alpha = 4 - \frac{19}{6}$
$\alpha = \frac{5}{6}$.

Por lo tanto, sí es posible que la compañía produzca este vector.

(c) *(1, 6, 9).*

(1, 6, 9)= (1 - α) (2, 2, 4) + α (5, 0, 3)
(1, 6, 9)= (2, 2, 4) + (-2α, -2α, -4α) + (5α, 0, 3α)
(1, 6, 9)= (2 + 3α, 2 - 2α, 4 - α).

$$\begin{cases} 1 = 2 + 3\alpha \\ 6 = 2 - 2\alpha. \\ 9 = 4 - \alpha \end{cases}$$

$3\alpha = 1 - 2$
$3\alpha = -1$
$\alpha = \frac{-1}{3}$.

$2\alpha = 6 - \frac{1}{3}$
$2\alpha = \frac{17}{3}$

$\alpha = \frac{\frac{17}{3}}{2}$

$\alpha = \frac{17}{6}$.

α= 4 - 9

α= -5.

Por lo tanto, no es posible que la compañía produzca este vector.

Ejercicio 17.

Considerar el conjunto:

V= {(w, td, ti, P, GP): P= w, td + ti= GP},

donde w es el crecimiento de los salarios nominales, td es el crecimiento de los impuestos directores, ti es el crecimiento de los impuestos indirectos, P es el crecimiento de los precios y GP es el crecimiento del gasto público.

(a) *Mostrar que V es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^5$.

V es cerrado para la suma:

$(w_1, td_1, ti_1, P_1, GP_1), (w_2, td_2, ti_2, P_2, GP_2) \in V \implies P_1= w_1, td_1 + ti_1= GP_1 \wedge P_2= w_2, td_2 + ti_2= GP_2$

$\implies P_1 + P_2= w_1 + w_2, (td_1 + td_2) + (ti_1 + ti_2)= GP_1 + GP_2$

$\implies (w_1 + w_2, td_1 + td_2, ti_1 + ti_2, P_1 + P_2, GP_1 + GP_2) \in V$

$\implies (w_1, td_1, ti_1, P_1, GP_1) + (w_2, td_2, ti_2, P_2, GP_2) \in V.$

V es cerrado para la multiplicación de escalares:

$(w, td, ti, P, GP) \in V \implies P= w, td + ti= GP$

$\implies \forall\ k \in \mathbb{R}, kP= kw, k\,(td + ti)= kGP$

$\implies \forall\ k \in \mathbb{R}, kP= kw, ktd + kti= kGP$

$\implies (kw, ktd, kti, kP, kGP) \in V$

$\implies k\,(w, td, ti, P, GP) \in V.$

Por lo tanto, V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$.

(b) *Hallar una base y la dimensión de V. Dar una interpretación económica del resultado.*

(P, td, ti, P, td + ti)= P (1, 0, 0, 1, 0) + td (0, 1, 0, 0, 1) + ti (0, 0, 1, 0, 1).

B_V= {(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1)}.

dim (V)= 3.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2:
Matrices y Sistemas.

Ejercicio 1.

Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{nxn}$.

(a) S_1= *{*A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$*:* A^t *=* A*} (matrices simétricas).*

S_1 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_1 \quad \Rightarrow A_1^t = A_1 \wedge A_2^t = A_2$
$\Rightarrow A_1^t + A_2^t = (A_1 + A_2)^t = A_1 + A_2$
$\Rightarrow A_1 + A_2 \in S_1$.

S_1 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_1 $\quad \Rightarrow A^t = A$
$\Rightarrow \forall$ k ∈ $\mathbb{R}$, kA^t= $(kA)^t$= kA
$\Rightarrow$ kA ∈ S_1.

Por lo tanto, el conjunto S_1 es un subespacio.

(b) S_2= *{*A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$*:* A^t *= -*A*} (matrices antisimétricas).*

S_2 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_2 \quad \Rightarrow A_1^t = -A_1 \wedge A_2^t = -A_2$
$\Rightarrow A_1^t + A_2^t = (A_1 + A_2)^t = -(A_1 + A_2)$
$\Rightarrow A_1 + A_2 \in S_2$.

S_2 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_2 $\quad \Rightarrow A^t = A$
$\Rightarrow \forall$ k ∈ $\mathbb{R}$, kA^t= $(kA)^t$= kA
$\Rightarrow$ kA ∈ S_2.

Por lo tanto, el conjunto S_2 es un subespacio.

(c) S_3= *{*A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$*:* A_{ij} *= 0 si i > j} (matrices triangulares superiores).*

S_3 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_3 \quad \Rightarrow A_{1,ij} = 0 \wedge A_{2,ij} = 0$, si i > j

$\Longrightarrow A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i > j
$\Longrightarrow A_1$ + $A_2 \in S_3$.

S_3 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A $\in S_3$ $\Longrightarrow A_{ij}$= 0, si i > j
$\Longrightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0, si i > j
$\Longrightarrow$ kA $\in S_3$.

Por lo tanto, el conjunto S_3 es un subespacio.

(d) S_4= *{A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$: A_{ij}= 0 si i≠ j} (matrices diagonales).*

S_4 es cerrado para la suma:

A_1, $A_2 \in S_4$ $\Longrightarrow A_{1,ij}$= 0 $\wedge$ $A_{2,ij}$= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow A_1$ + $A_2 \in S_4$.

S_4 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A $\in S_4$ $\Longrightarrow A_{ij}$= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow$ kA $\in S_4$.

Por lo tanto, el conjunto S_4 es un subespacio.

(e) S_5= *{A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$: A_{ij}= 0 si i≠ j y A_{11}= ... = A_{nn}} (matrices escalares).*

S_5 es cerrado para la suma:

A_1, $A_2 \in S_5$ $\Longrightarrow A_{1,ij}$= 0 si i≠ j, $A_{1,11}$= … = $A_{1,nn}$ $\wedge$ $A_{2,ij}$= 0 si i≠ j, $A_{2,11}$= … = $A_{2,nn}$
$\Longrightarrow$ $A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i≠ j $\wedge$ $A_{1,11}$ + $A_{2,11}$= $(A_1 + A_2)_{11}$= … = $A_{1,nn}$ + $A_{2,nn}$= $(A_1 + A_2)_{nn}$
$\Longrightarrow A_1$ + $A_2 \in S_5$.

S_5 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A $\in S_5$ $\Longrightarrow A_{ij}$= 0 si i≠ j $\wedge$ A_{11}= … = A_{nn}
$\Longrightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0 si i≠ j $\wedge$ kA_{11}= $(kA)_{11}$= … = kA_{nn}= $(kA)_{nn}$
$\Longrightarrow$ kA $\in S_5$.

Por lo tanto, el conjunto S_5 es un subespacio.

(f) S_6= {$A \in \mathbb{R}^{nxn}$: *tr (A)= 0*}.

S_6 es cerrado para la suma:

A_1, $A_2 \in S_6$ $\Longrightarrow$ tr (A_1)= 0 ∧ tr (A_2)= 0
$\Longrightarrow$ tr (A_1) + tr (A_2)= tr (A_1 + A_2)= 0 + 0= 0
$\Longrightarrow$ A_1 + $A_2 \in S_6$.

S_6 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_6 $\Longrightarrow$ tr (A)= 0
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, k tr (A)= tr (kA)= k0= 0
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_6.

Ejercicio 2.

Dadas las matrices:

$A= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $C= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

calcular:

(a) *A + 3B - 3C.*

$A + 3B - 3C= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A + 3B - 3C= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$A + 3B - 3C= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) *A + 3 (B - C).*

$A + 3 (B - C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}]$

$A + 3 (B - C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A + 3 (B - C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

$A + 3 (B - C)= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) *A - (B - 2C).*

$A - (B - 2C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}]$

$A - (B - 2C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}]$

$A - (B - 2C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$A - (B - 2C)= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) *A - B + 2C.*

$A - B + 2C= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A - B + 2C= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

A - B + 2C= $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.

Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4x5}$, $B \in \mathbb{R}^{5x7}$, $C \in \mathbb{R}^{7x5}$. *Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.*

(a) *AB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x7}$.

(b) *BA.*

Esta operación no es posible.

(c) *BC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{5x5}$.

(d) *CB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{7x7}$.

(e) *ABC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x5}$.

(f) *BCA.*

Esta operación no es posible.

(g) *BCBC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{5x5}$.

(h) *AA.*

Esta operación no es posible.

Ejercicio 4.

Sean: $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Calcular:*

(a) A^t.

$A^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) B^t.

$B^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $(AB)^t$.

$(AB)^t=[\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}]^t$

$(AB)^t=[\begin{pmatrix} 6 & -3 & -8 \\ -5 & 6 & -5 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}]^t$

$(AB)^t=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

(d) B^tA^t.

$B^tA^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^tA^t=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.

Dada una matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matriz A?*

(a) $A\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}A.$

A $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$
A $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} ak & bj \\ ck & dj \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera columna por k y la segunda columna por j.

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} ka & kb \\ jc & jd \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera fila por k y la segunda fila por j.

(b) $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A.$

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera columna por 1 y la segunda columna por 1.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera fila por 1 y la segunda fila por 1.

(c) $A\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A.$

A $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
A $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & ak+b \\ c & ck+d \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la segunda columna se le suma la primera columna por k.

$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la primera fila se le suma la segunda fila por k.

(d) $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} A.$

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$
A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a+bk & b \\ c+dk & d \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la primera columna se le suma la segunda columna por k.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la segunda fila se le suma la primera fila por k.

Ejercicio 6.

Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) *Si A, B* $\in \mathbb{R}^{nxn}$*, entonces, AB= BA.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces, AB= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y BA= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que AB≠ BA.

(b) *Si A* $\in \mathbb{R}^{nxm}$ *y B* $\in \mathbb{R}^{mxp}$ *y AB= 0, entonces, A= 0 o B= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Dadas A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, AB= 0, pero ni A ni B son iguales a cero.

(c) *Si A, B* $\in \mathbb{R}^{nxn}$ *y AB= 0, entonces, BA= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Dadas A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, AB= 0, pero BA= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

(d) *Si A* $\in \mathbb{R}^{nxn}$ *y existe k* $\in \mathbb{N}$ *tal que* A^k*= 0, entonces, A= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, A^2= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero A≠ 0.

(e) *Si A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$ y A^2= A, entonces, A= I_n o A= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A^2= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero ni A= I_n ni A= 0.

(f) *Si A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$ y tr (AA^t)= 0, entonces, A= 0.*

Esta afirmación es VERDADERA.

Dada A= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, se tiene que su transpuesta es:

A^t= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Entonces, el producto entre A y A^t:

AA^t= $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2 \end{pmatrix}$

y la traza de este producto:

tr (AA^t)= $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2$
tr (AA^t)= $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$
tr (AA^t)= $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^2$.

Por hipótesis, se tiene que:

tr (AA^t)= 0,

lo cual implica que $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^2$= 0, que se cumple cuando a_{ij}= 0, ∀ i, j, es decir, cuando A=
A= $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7.

Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada. En cada caso, describir, además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

(a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & | & 2 \\ -2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix}$.

F_1= $\frac{1}{3}$ F_1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ -2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix}$

F_2= F_2 + $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & | & \frac{22}{3} \end{pmatrix}$

F_2= $\frac{3}{22}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

F_1= $\frac{5}{3}$ F_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

x= -1.
y= 1.

x= 0.
y= 0.

Por lo tanto, este sistema es compatible determinado, ya que r (A)= r (A_b)= n= 2, y su solución es x= -1 e y= 1. Además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado es x= 0 e y= 0.

(b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0. \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$.

F_2= F_2 - $2F_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{1}{5}\,F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = \frac{1}{5}\,F_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 + 2F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - 5F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$

x= 0.
y= 0.

Por lo tanto, este sistema es incompatible, ya que r (A)= 2≠ r (A_b)= 3, y no tiene solución. Además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado es x= 0 e y= 0.

(c) $\begin{cases} \end{cases}$.

(d) $\begin{cases} \end{cases}$.

(e) $\begin{cases} \end{cases}$.

(f) $\begin{cases} \end{cases}$.

(g) $\left\{ \quad \right.$.

(h) $\left\{ \quad \right.$.

Ejercicio 20 (*).

Sean A= $\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B \in \mathbb{R}^{3x3}$ *una matriz tal que det (B)= -2. Hallar todos los valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *para los cuales el sistema* BA^2x*= BAx tiene una única solución.*

En primer lugar, se reexpresa el sistema de la siguiente manera:

BA^2x= BAx
BA^2x - BAx= 0_{3x1}
B (A^2 - A) x= 0_{3x1}

A su vez, como se sabe que $|B| \neq 0$ (= -2), se tiene que B es inversible, es decir, que existe la matriz B^{-1}, por lo cual lo anterior se reduce a:

B^{-1}B (A^2 - A) x= $B^{-1} * 0_{3x1}$
I (A^2 - A) x= 0_{3x1}
(A^2 - A) x= 0_{3x1}.

Operando sobre la matriz (A^2 - A), se llega a:

(A^2 - A)= A (A - I)
(A^2 - A)= $\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$]
(A^2 - A)= $\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha-3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
(A^2 - A)= $\begin{pmatrix} (\alpha-2)(\alpha-3) & 0 & 0 \\ 2(\alpha-3)+3(\alpha-2) & \alpha-2 & 0 \\ 3(\alpha-3)+5 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}$.

Luego, se computa el determinante de esta matriz (A^2 - A):

$|A^2 - A|$= (α -2) (α - 3) (α - 2) (α - 2)
$|A^2 - A|$= $(\alpha-2)^3$ (α - 3).

Por último, para que el sistema BA^2x= BAx tenga una única solución, este determinante debe ser distinto de cero:

$|A^2 - A|$= 0
$(\alpha-2)^3$ (α - 3)= 0.
α_1= 2; α_2= 3.

El lado izquierdo de esta ecuación es igual a cero (i) cuando $(\alpha-2)^3$= 0, lo cual sucede si α= 2, o (ii) cuando (α - 3)= 0, lo cual sucede si α= 3.

Por lo tanto, los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema BA^2x= BAx tiene una única solución son $\mathbb{R}$ - {2, 3}.

Ejercicio 21.

Ejercicio 22.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 3:
Autovalores y Autovectores.

Ejercicio 1.

Ejercicio 21 (*).

Sea A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ una matriz tal que λ= 1 es autovalor de A, tr(A)= 2 y det(A)= -2.

(a) *Hallar todos los autovalores de A.*

En primer lugar, se sabe que 1 es autovalor de la matriz A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$.

Luego, sabiendo que la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores y que tr(A)= 2, se tiene:

2= 1 + λ_2 + λ_3
2 - 1= λ_2 + λ_3
1= λ_2 + λ_3.

También, sabiendo que el determinante de la matriz A es igual al producto de todos los autovalores y que det(A)= -2, se tiene:

-2= $\lambda_2\lambda_3$.

Entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ -2 = \lambda_2\lambda_3 \end{cases}.$$

Despejando λ_3 de la segunda ecuación, se tiene:

λ_3= $\frac{-2}{\lambda_2}$, $\lambda_2 \neq 0$.

Luego, reemplazando en la primera ecuación, se obtiene:

1= λ_2 + $\frac{-2}{\lambda_2}$
1= $\frac{\lambda_2^2-2}{\lambda_2}$
λ_2= λ_2^2 - 2
λ_2^2 - λ_2 - 2= 0, $\lambda_2 \neq 0$.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan los autovalores faltantes:

λ_2, λ_3= $\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4*1(-2)}}{2*1}$
λ_2, λ_3= $\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$
λ_2, λ_3= $\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}$
λ_2, λ_3= $\frac{1\pm 3}{2}$
λ_2= $\frac{1-3}{2}$= $\frac{-2}{2}$= -1.
λ_3= $\frac{1+3}{2}$= $\frac{4}{2}$= 2.

Por lo tanto, los autovalores de A son: λ_1= 1, λ_2= -1 y λ_3= 2.

(b) *Decidir si A^T es o no diagonalizable.*

Se sabe que la matriz A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ tiene n (3) autovalores distintos (inciso anterior) y que los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (teorema).

También, dado que la matriz A tiene n (3) autovectores linealmente independientes, se sabe que la matriz A es diagonalizable (teorema).

Entonces, esta matriz A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ se puede expresar de la siguiente manera:

A= PDP^{-1},

donde D, P ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$, tal que D es diagonal y P es inversible.

Si se aplica transpuesta a ambos lados de la igualdad, se tiene:

A^T= $(PDP^{-1})^T$
A^T= $(P^{-1})^T D^T P^T$.

Sabiendo que toda matriz diagonal es simétrica (D= D^T) y que la transpuesta de la inversa de una matriz es igual a la inversa de la transpuesta de esa matriz, se tiene:

A^T= $(P^T)^{-1} D P^T$.

Por último, sabiendo que la inversa de la inversa de una matriz es la propia matriz, esta última igualdad se puede reexpresar de la siguiente manera:

A^T= $(P^T)^{-1} D ((P^T)^{-1})^{-1}$.

Por lo tanto, A^T es diagonalizable, ya que es A^T es semejante a una matriz diagonal, es decir, existen D, $(P^T)^{-1}$ ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$, tal que D es diagonal y $(P^T)^{-1}$ es inversible.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 4:
Forma de Jordan y Formas Cuadráticas.

Ejercicio 1.

Ejercicio 8 (*).

Dada la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

q (x, y, z)= $ax^2 + ay^2 + (a - 1)z^2 + 2xy$,

donde a $\in \mathbb{R}$ *es fijo, clasificar q para los distintos valores de a.*

En primer lugar, para clasificar la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para los distintos valores de a, es necesario encontrar la matriz asociada a q (matriz A). En términos generales, la forma cuadrática q puede ser escrita en términos de esta matriz A como:

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En particular, se tiene:

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Luego, es necesario encontrar los autovalores de la matriz asociada A:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(a - 1 - \lambda)\,[(a - \lambda)(a - \lambda) - 1] = 0$$
$$(a - 1 - \lambda)\,[(a-\lambda)^2 - 1] = 0.$$

Entonces, los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico de A:

$$a - 1 - \lambda = 0$$
$$\lambda_1 = a - 1.$$

$$(a-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$(a-\lambda)^2 = 1$$
$$\sqrt{(a-\lambda)^2} = \sqrt{1}$$
$$|a-\lambda| = 1$$

a - λ= $\pm$1
λ= a $\mp$ 1
λ_2= a - 1.
λ_3= a + 1.

Se tiene que los autovalores de la matriz asociada A son: λ_1= a - 1, λ_2= a - 1 y λ_3= a + 1.

Por lo tanto, la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

- definida positiva si a $>$ 1, ya que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$.
- semidefinida positiva si a= 1, ya que λ_1= 0, λ_2= 0 y $\lambda_3 > 0$.
- definida negativa si a $<$ -1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$.
- semidefinida negativa si a= -1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y λ_2= 0.
- indefinida si -1 $<$ a $<$ 1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 > 0$.

Trabajo Práctico N° 5:
Ecuaciones en Diferencias.

Ejercicio 1.

<u>Ejercicio 2.</u>

Ejercicio 3.

Ejercicio 4.

Ejercicio 5.

Ejercicio 6.

Ejercicio 7 (*).

Resolver la siguiente ecuación en diferencia de orden 2:

y_{t+2} - $3y_{t+1}$ - $4y_t = 2^t + t^3$.

Se parte de saber que la solución general de una ecuación en diferencias son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a ésta más la solución particular:

$y_t = y_t^h + y_t^p$.

Siendo así, en primer lugar, se buscan las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación en diferencias:

y_{t+2} - $3y_{t+1}$ - $4y_t$= 0.

Sea $y_t = r^t$, se tiene:

r^{t+2} - $3r^{t+1}$ - $4r^t$= 0
r^t (r^2 - 3r - 4)= 0.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan las soluciones de la ecuación homogénea:

$r_1, r_2 = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1(-4)}}{2*1}$
$r_1, r_2 = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$
$r_1, r_2 = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$
$r_1, r_2 = \frac{3\pm 5}{2}$
$r_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$.
$r_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.

Entonces, la solución homogénea es la siguiente:

$y_t^h = C_1\, 4^t + C_2\, (-1)^t$.

En segundo lugar, dado que 1 no es raíz de la ecuación r^2 - 3r - 4= 0, se propone la siguiente solución particular:

$y_t^p = k_1 2^t + k_2 t^3 + k_3 t^2 + k_4 t + k_5$.

Resolviendo en la ecuación en diferencias, se tiene:

$[k_1 2^{t+2} + k_2\,(t+2)^3 + k_3\,(t+2)^2 + k_4\,(t+2) + k_5]$ -
3 $[k_1 2^{t+1} + k_2\,(t+1)^3 + k_3\,(t+1)^2 + k_4\,(t+1) + k_5]$ -
4 $(k_1 2^t + k_2 t^3 + k_3 t^2 + k_4 t + k_5)$=

$[k_1 2^{t+2}$ + k_2 (t^3 + $6t^2$ + 12t + 8) + k_3 (t^2 + 4t + 4) + k_4t + $2k_4$ + k_5] -
3 [$k_1 2^{t+1}$ + k_2 (t^3 + $3t^2$ + 3t + 1) + k_3 (t^2 + 2t + 1) + k_4t + k_4 + k_5] -
($4k_1 2^t$ + $4k_2 t^3$ + $4k_3 t^2$ + $4k_4$t + $4k_5$)=

$k_1 2^{t+2}$ + $k_2 t^3$ + $6k_2 t^2$ + $12k_2$t + $8k_2$ + $k_3 t^2$ + $4k_3$t + $4k_3$ + k_4t + $2k_4$ + k_5 -
3 [$k_1 2^{t+1}$ + $k_2 t^3$ + $3k_2 t^2$ + $3k_2$t + k_2 + $k_3 t^2$ + $2k_3$t + k_3 + k_4t + k_4 + k_5] -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4$t - $4k_5$=

$k_1 2^{t+2}$ + $k_2 t^3$ + $6k_2 t^2$ + $12k_2$t + $8k_2$ + $k_3 t^2$ + $4k_3$t + $4k_3$ + k_4t + $2k_4$ + k_5 -
($3k_1 2^{t+1}$ + $3k_2 t^3$ + $9k_2 t^2$ + $9k_2$t + $3k_2$ + $3k_3 t^2$ + $6k_3$t + $3k_3$ + $3k_4$t + $3k_4$ + $3k_5$) -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4$t - $4k_5$= 2^t + t^3

$k_1 2^{t+2}$ + $k_2 t^3$ + $6k_2 t^2$ + $12k_2$t + $8k_2$ + $k_3 t^2$ + $4k_3$t + $4k_3$ + k_4t + $2k_4$ + k_5 -
$3k_1 2^{t+1}$ - $3k_2 t^3$ - $9k_2 t^2$ - $9k_2$t - $3k_2$ - $3k_3 t^2$ - $6k_3$t - $3k_3$ - $3k_4$t - $3k_4$ - $3k_5$ -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4$t - $4k_5$= 2^t + t^3

-$6k_1 2^t$ - $6k_2 t^3$ - ($3k_2$ + $6k_3$) t^2 + ($3k_2$ - $2k_3$ - $6k_4$) t + ($5k_2$ + k_3 - k_4 - $6k_5$)= 2^t + t^3

Luego, se tiene que las constantes k_1, k_2, k_3, k_4 y k_5, respectivamente, son iguales a:

-$6k_1 2^t$= 2^t
k_1= $\frac{2^t}{-6*2^t}$
k_1= $\frac{-1}{6}$.

-$6k_2 t^3$= t^3
k_2= $\frac{t^3}{-6t^3}$
k_2= $\frac{-1}{6}$.

-($3k_2$ + $6k_3$) t^2= 0
$3k_2$ + $6k_3$= $\frac{0}{-t^2}$
$3k_2$ + $6k_3$= 0
$6k_3$= -$3k_2$
k_3= $\frac{-3k_2}{6}$
k_3= $\frac{-1}{2}$ k_2
k_3= $\frac{-1}{2}$ ($\frac{-1}{6}$)
k_3= $\frac{1}{12}$.

($3k_2$ - $2k_3$ - $6k_4$) t= 0
$3k_2$ - $2k_3$ - $6k_4$= $\frac{0}{t}$
$3k_2$ - $2k_3$ - $6k_4$= 0
$6k_4$= $3k_2$ - $2k_3$
k_4= $\frac{3k_2-2k_3}{6}$
k_4= $\frac{1}{2}$ k_2 - $\frac{1}{3}$ k_3
k_4= $\frac{1}{2}$ ($\frac{-1}{6}$) - $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$
k_4= $\frac{-1}{12}$ - $\frac{1}{36}$

$k_4 = \frac{-1}{9}$.

$5k_2 + k_3 - k_4 - 6k_5 = 0$
$6k_5 = 5k_2 + k_3 - k_4$
$k_5 = \frac{5k_2 + k_3 - k_4}{6}$
$k_5 = \frac{5}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3 - \frac{1}{6}k_4$
$k_5 = \frac{5}{6}(\frac{-1}{6}) + \frac{1}{6}\frac{1}{12} - \frac{1}{6}(\frac{-1}{9})$
$k_5 = \frac{-5}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{54}$
$k_5 = \frac{-1863}{17496}$.

Entonces, la solución particular es la siguiente:

$y_t^p = \frac{-1}{6}2^t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{9}$ t - $\frac{1863}{17496}$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias de orden 2 es:

$y_t = C_1 4^t + C_2 (-1)^t - \frac{1}{6}2^t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{9}$ t - $\frac{1863}{17496}$.