# Información

## Teórica

- Profesor: Damián Pinasco
- Día y horario: Jueves de 19:15 a 22:00 hs.

## Consultas

- Docente: Dalia Gutiérrez Valencia
- Día y horario: Sábados de 11 a 13 hs.

# Bibliografía

- Espacios vectoriales y matrices.
  - Apéndice A de Greene;
  - Apéndice A de Johnston-DiNardo;
  - Todos esos temas, y más, están en el libro de Dhrymes.
- Series temporales – Ecuaciones en diferencias.
  - Primeros capítulos de Hamilton;
  - Capítulo 1 de Enders.
- Apunte de la materia (Campus virtual).

# Forma de aprobación

Durante el curso los alumnos tendrán que entregar una serie de ejercicios (TP) y rendir un examen final. Para aprobar la materia será necesario que

- La nota del final sea mayor o igual a 40;
- La Nota=0.6*(Nota de final)+0.4*(Promedio de los TP) sea mayor o igual que 50.

Fecha del Final: a confirmar

# Vectores

Maestría en Econometría–Matemática I

1er Trimestre 2023

# Motivación

Supongamos que cierto producto es ofertado por 4 empresas que abastecen, en un alto porcentaje, su demanda. Las cuatro empresas, comercializan el producto bajo 4 marcas diferentes, con nombres $A$, $B$, $C$, y $D$. Imaginemos que se realiza una encuesta sobre 2000 consumidores de ese producto al comienzo y al final de determinado período de tiempo, obteniéndose los siguientes datos sobre la evolución de sus preferencias por las marcas mencionadas en el período de estudio.

| | Consumidores Iniciales | Aumentos | | | | Disminuciones | | | | Consumidores Finales |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | A | B | C | D | |
| A | 475 | 0 | 10 | 5 | 10 | 0 | 5 | 20 | 30 | 445 |
| B | 550 | 5 | 0 | 5 | 5 | 10 | 0 | 5 | 25 | 525 |
| C | 485 | 20 | 5 | 0 | 15 | 5 | 5 | 0 | 10 | 505 |
| D | 490 | 30 | 25 | 10 | 0 | 10 | 5 | 15 | 0 | 525 |

¿Qué nos dice la encuesta?

# Motivación

| | Consumidores Iniciales | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 475 | 420 | 5 | 20 | 30 |
| B | 550 | 10 | 510 | 5 | 25 |
| C | 485 | 5 | 5 | 465 | 10 |
| D | 490 | 10 | 5 | 15 | 460 |

Entonces

$$
\begin{aligned}
A(1) &= \tfrac{420}{475}A(0) + \tfrac{10}{550}B(0) + \tfrac{5}{485}C(0) + \tfrac{10}{490}D(0) \\
B(1) &= \tfrac{5}{475}A(0) + \tfrac{510}{550}B(0) + \tfrac{5}{485}C(0) + \tfrac{5}{490}D(0) \\
C(1) &= \tfrac{20}{475}A(0) + \tfrac{5}{550}B(0) + \tfrac{465}{485}C(0) + \tfrac{15}{490}D(0) \\
D(1) &= \tfrac{30}{475}A(0) + \tfrac{25}{550}B(0) + \tfrac{10}{485}C(0) + \tfrac{460}{490}D(0).
\end{aligned}
$$

# Motivación

Forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A(1) \\ B(1) \\ C(1) \\ D(1) \end{pmatrix}}_{V(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{84}{95} & \frac{1}{55} & \frac{1}{97} & \frac{1}{49} \\ \frac{1}{95} & \frac{51}{55} & \frac{1}{97} & \frac{1}{98} \\ \frac{4}{95} & \frac{1}{110} & \frac{93}{97} & \frac{3}{98} \\ \frac{6}{95} & \frac{1}{22} & \frac{2}{97} & \frac{46}{49} \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} A(0) \\ B(0) \\ C(0) \\ D(0) \end{pmatrix}}_{V(0)}$$

Si asumimos que este comportamiento se sostiene en el tiempo tenemos que

$$V(t+1) = MV(t)$$

Lo que implica

$$V(t) = M^t V(0).$$

¿Qué esperamos para tiempo grandes?

# Repaso: Los números reales

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ los números naturales;
- $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ los números enteros;
- $\mathbb{Q} := \left\{ \dfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}$ los números racionales;
- Los números que no son racionales se denominan irracionales. Algunos ejemplos: $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -e, e, -\pi, \pi$.

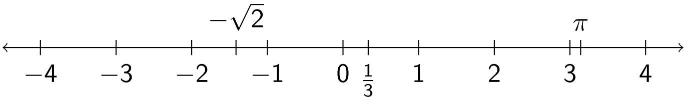
El conjunto de todos los números racionales e irracionales se denomina conjunto de los números reales y se denota con el símbolo $\mathbb{R}$.

# Repaso: Los números reales

**Observación.**

Se tienen las siguientes inclusiones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Recordemos que los números reales se representan gráficamente mediante una recta la cual se denomina la recta de los números reales




**Notación.**

Utilizaremos el término **escalar** para referirnos a los elementos de $\mathbb{R}$.

# El plano

¿Qué es un par ordenado?
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ (un par de números).

- Como conjunto $\{a, b\} = \{b, a\}$ no importa el orden en el que aparecen los elementos $a$ y $b$;
- Cuando el orden de $a$ y $b$ si tiene importancia decimos que es un **par ordenado** y notamos $(a, b)$ y $(b, a)$.

**Observación.**

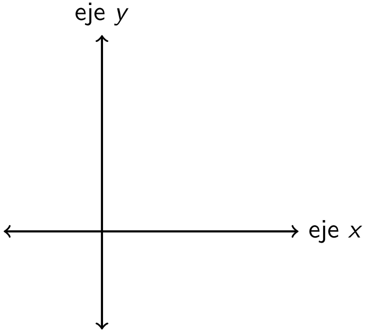
Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $(a, b) = (b, a)$ si y solo si $a = b$.

Ejemplo 1. Para mostrar el edad y el peso de cada estudiante en una clase, se puede formar pares ordenados $(e, p)$, en los que el primer elemento indica la edad en años y el segundo elemento indica el peso en kilos. Ejemplos $(42, 84)$, $(60, 75)$, $(75, 60)$.

# El plano

El conjunto de todos los pares ordenados $(a, b)$ se denomina plano,

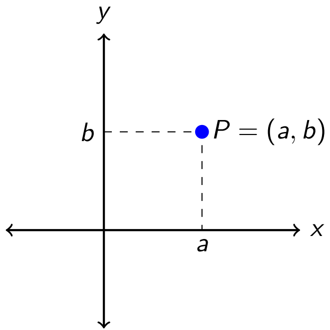
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}.$$




Al eje $x$ también lo solemos denominar **el eje de las abscisas**, mientras que el eje $y$ también se conoce como **el eje de las ordenadas**.

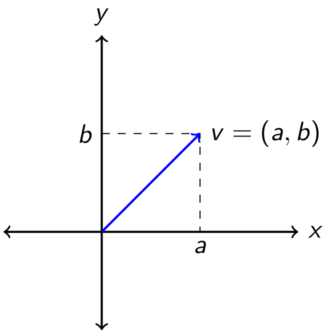
# El plano

Si $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ decimos que $a, b$ son **las coordenadas cartesianas** del punto $P$.



# El plano

Dado un punto $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tenemos asociado un segmento de recta dirigida de el origen (es decir el $(0, 0)$) a $P$. Este segmento se denominara **vector** y se denotara por $v = (a, b)$.




El vector $0 = (0, 0)$ es el único vector que tiene longitud 0 y no tiene dirección.

# El plano

Observemos que cada punto en el plano tiene asociado un vector y viceversa. Por ese motivo, las nociones de “plano” y conjunto de todos los vectores se suelen intercambiar. Sin embargo para muchas aplicaciones es importante pensar un vector no como un punto sino como un objeto con longitud y dirección.

# El plano

Gracias a el Teorema de Pitágoras, podemos calcular la longitud o **norma** de un vector $v = (a, b)$ de la siguiente manera

$$\|v\| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ejemplo 2. Calcular la norma de los siguientes vectores

(a) $u = (2, 1)$;

(b) $v = (\sqrt{9}, 4)$;

(c) $w = (4, -\sqrt{9})$.

# $n-$Vectores

Sea $n \in \mathbb{N}$, un $n-$punto (o simplemente un punto) $P$ es una **$n-$upla** de números reales, es decir,

$$P = (a_1, \ldots, a_n) \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

En ese caso el origen es el punto

$$0 = (0, \ldots, 0).$$

Dado un punto $P$ tenemos asociado un segmento de recta dirigida de el origen a $P$, este segmento se denominará **$n-$vector** (o simplemente vector). Definimos $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todos los $n-$vectores.

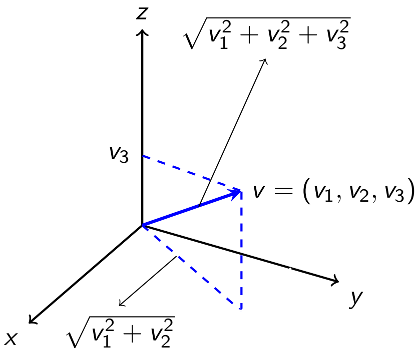
**Observación.**

Todo vector tiene asociada una longitud y una dirección. El único vector sin dirección es el vector $0 = (0, \ldots, 0)$, el que habitualmente se denomina vector nulo.

# $n-$Vectores

Sea $v = (v_1, \ldots, v_n)$, un vector en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $v_i$ es la **coordenada** $i-$**esima** de $v$ y definimos la **norma** (o longitud) de $v$, de la siguiente manera

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$



# $n-$Vectores

Ejemplo 3. Calcular la norma de los siguientes vectores

(a) $u = (2, 1, 3)$;
(b) $v = (\sqrt{9}, 4, 7, 5)$;
(c) $w = (e, -\pi, 1, \sqrt{2}, 8, 35)$.

# $n-$Vectores

**Definición.**

Dos vectores $u$ y $v$ son iguales, si tienen la misma cantidad de coordenadas y la $i-$esima coordenada de u es igual a la $i-$esima coordenada de $v$. En el caso que $u$ y $v$ sean iguales notaremos $u = v$.

# $n-$Vectores

En algunas ocasiones los $n-$vectores se escriben como columnas en lugar de filas:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Tales vectores se denominan **vectores columnas**.
Los vectores columnas puede transformarse en vectores filas y viceversa a través de la **operación transposición**. Esta operación sera denotada con un superindice $t$.

$$(v_1, \dots, v_n)^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^t = (v_1, \dots, v_n)^t.$$

# $n-$Vectores

Ejemplo 4.

$$(1,2,3)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e \\ \sqrt{2} \\ \pi \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}^t = (e, \sqrt{2}, \pi, 4, 7).$$

**Observación.**

Si $v$ es un vector (fila o columna) entonces $(v^t)^t = v$.

Ejemplo 5. Observemos que los siguientes vectores

$$v = \begin{pmatrix} e \\ \sqrt{2} \\ \pi \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad w = (e, \sqrt{2}, \pi, 4, 7)$$

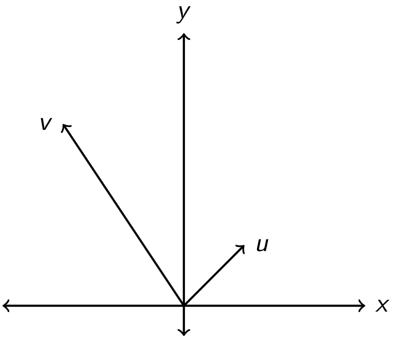
no son iguales ya que $v$ es un vector columna mientras que $w$ es un vector fila. Notemos que $v^t = w$ y que $w^t = v$.

# Operaciones vectoriales

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

- La **suma** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

$$u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$



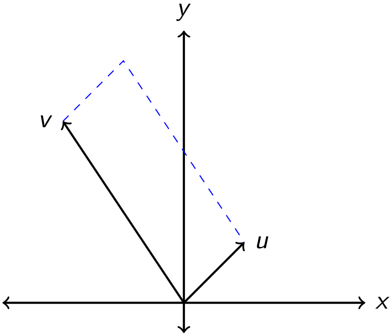

Regla del paralelogramo.

# Operaciones vectoriales

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

- La **suma** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

$$u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$



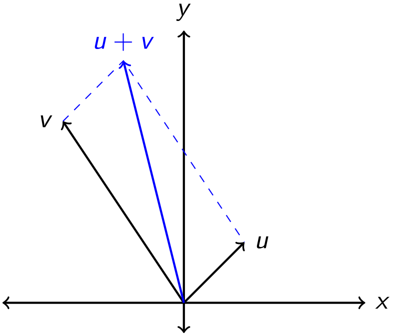

Regla del paralelogramo.

# Operaciones vectoriales

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$.

- La **suma** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

$$u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$

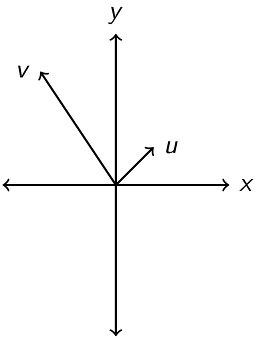



Regla del paralelogramo.

# Operaciones vectoriales

- La **resta** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

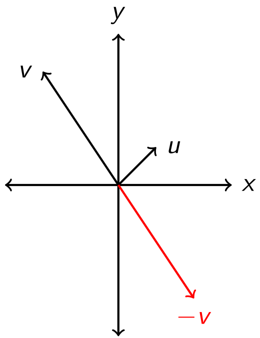
$$u - v := (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n).$$



# Operaciones vectoriales

- La **resta** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

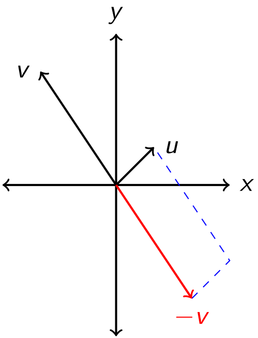
$$u - v := (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n).$$



# Operaciones vectoriales

- La **resta** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

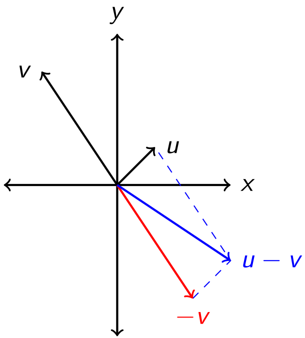
$$u - v := (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n).$$



# Operaciones vectoriales

- La **resta** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

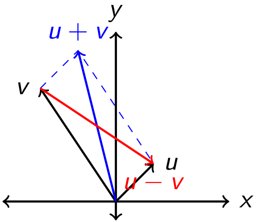
$$u - v \coloneqq (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n).$$



# Operaciones vectoriales

- La **resta** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

$$u - v := (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n).$$

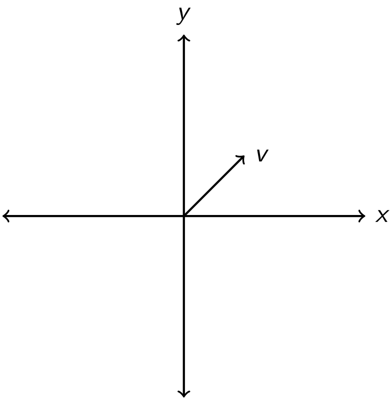



Regla del paralelogramo.

# Operaciones vectoriales

- El **producto** de $v$ **por un escalar** (número real) k se define de la siguiente manera

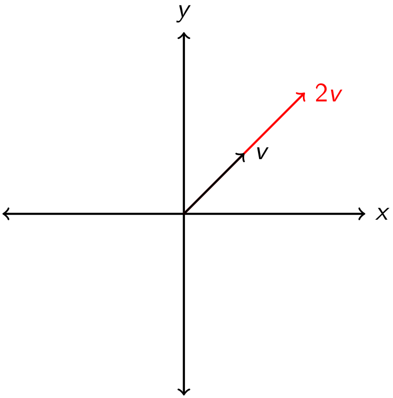
$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n).$$



# Operaciones vectoriales

- El **producto** de $v$ **por un escalar** (número real) k se define de la siguiente manera

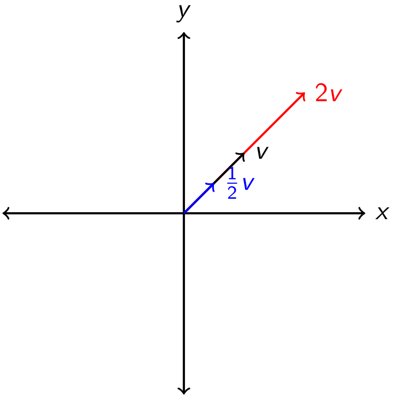
$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n).$$



# Operaciones vectoriales

- El **producto** de $v$ **por un escalar** (número real) k se define de la siguiente manera

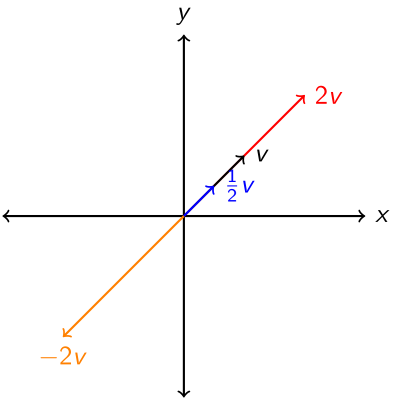
$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n).$$



# Operaciones vectoriales

- El **producto** de $v$ **por un escalar** (número real) k se define de la siguiente manera

$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n).$$



# Operaciones vectoriales

Observar que $u+v$, $u-v$, y $kv$ también pertenecen a $\mathbb{R}^n$. Definimos, además

$$-v := -1v.$$

**Propiedad.**

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ vectores y $\alpha, \beta$ escalares. Entonces

(I) $u+v = v+u$;

(II) $(u+v)+w = u+(v+w)$;

(III) El 0 es el único elemento neutro para la suma;

(IV) $\alpha v = v\alpha$

(V) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;

(VI) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$;

(VII) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.

# Operaciones vectoriales

Ejemplo 6. Sean $u = (1, 1)$ y $v = (-2, 3)$ dos vectores. Encuentre

(a) $u + v$;

(b) $u - v$;

(c) $2v$;

(d) $-2u$;

(e) $\frac{1}{2}u$;

(f) $3u + 2v$.

Graficar los vectores encontrados.

# Operaciones vectoriales

**Propiedad.**

Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces $\|kv\| = |k|\|v\|$.

Ejemplo 7. Sea $v = (1, 1, -1)$ y $k = -3$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|-3v\| &= \|(-3, -3, 3)\| \\
&= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{27} \\
&= 3\sqrt{3} \\
&= |-3|\|v\|.
\end{aligned}
$$

# Operaciones vectoriales

Un vector $v$ se denomina **unitario** si $\|v\| = 1$. Observemos que si $v \neq 0$ entonces el vector

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección de $v$. El proceso por el cual hallamos $\hat{v}$ se denomina **normalización** de $v$.

Ejemplo 8. Consideremos el vector $v = (2, -3, 8, -5)$. Entonces la normalización de $v$ nos arroja el siguiente vector

$$\hat{v} = \left( \frac{2}{\sqrt{102}}, -\frac{3}{\sqrt{102}}, \frac{8}{\sqrt{102}}, -\frac{5}{\sqrt{102}} \right).$$

# Producto interno

Ejemplo 9. Supongamos que una fabrica produce cuatro artículos y que su demanda esta dada por el vector demanda $d = (30, 20, 40, 10)$. El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dada por el vector precio $p = (\$20, \$15, \$18, \$40)$. Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

# Producto interno

**Definición.**

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^N$. Definimos el **producto interno o escalar** de $u$ y $v$ de la siguiente manera

$$u \cdot v := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

# Producto interno

Observemos que para poder realizar el producto interno entre dos vectores $u$ y $v$ es necesario que $u$ y $v$ tengan el mismo número de coordenadas.
En el caso que $u$ y $v$ son dos vectores columnas que poseen la misma cantidad de coordenadas definimos el **producto interno** entre $u$ y $v$ de la siguiente manera

$$u \cdot v := u^t \cdot v^t.$$

Por ultimo en el caso que $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, definimos el producto escalar entre $u$ y $v$ de la siguiente manera

$$u \cdot v = (u_1, \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

# Producto interno

**Teorema.**

Sean $u, v, w$ tres vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces

I) $u \cdot 0 = 0$;

II) $u \cdot v = v \cdot u$;

III) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;

IV) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$;

V) $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0$ si solo si $u = 0$.

# Producto interno

**Observación.**

- Para todo vector $u$ en $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
- $u \cdot v = 0$ **no implica que** $u = 0$ **o que** $v = 0$.

# Producto interno

**Teorema** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

# Producto interno

**Teorema** (Desigualdad triangular).

Sean $u$ y $v$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

# Producto interno

Luego hemos visto que la norma de un vector tiene la siguientes propiedades.

**Propiedad.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

i) $\|v\| = 0$ si y solo si $v$ es el vector nulo;

ii) $\|kv\| = |k|\|v\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$;

iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

# Ángulo entre vectores

**Teorema.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores no nulos. Si $\varphi$ es el ángulo entre ellos entonces

$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

# Ángulo entre vectores

Observar que Si $\varphi$ es el ángulo entre dos vectores no nulos entonces $\varphi \in [0, \pi]$. Por lo tanto, $\arccos(\cos(\varphi)) = \varphi$.

Ejemplo 10. Encuentre el ángulo entre los $u = (2, 3)$ y $v = (-7, 1)$.

# Ángulo entre vectores

**Definición.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores no nulos. Decimos que $u$ y $v$ son **ortogonales** (o perpendiculares) si $u \cdot v = 0$ (es decir el ángulo entre ellos es $\pi/2$). Si además $\|u\| = \|v\| = 1$, decimos que $u$ y $v$ son ortonormales.

Ejemplo 11. Mostrar que los siguientes vectores son ortogonales $u = (1, -2, 3, -4)$ y $w = (5, -4, 5, 7)$.

# Distancia entre puntos

Dados dos puntos $A, B \in \mathbb{R}^n$. Definimos la **distancia** entre $A$ y $B$ de la siguiente manera

$$d(A, B) = \|u - v\|.$$

donde $u$ y $v$ son los vectores asociados a $A$ y $B$ respectivamente.

Ejemplo 12. Calcular la distancia entre los siguientes dos vectores $A = (1, 5, 2)$ y $B = (-4, 3, 7)$.

# Distancia entre puntos

**Propiedad.**

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ puntos y $k$ un escalar. Entonces

(I) $d(A,B) = d(B,A)$;

(II) $d(A,B) \geq 0$;

(III) $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

(IV) $d(kA,kB) = |k|d(A,B)$;

(V) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.