Práctica 4 Bis
Variables aleatorias continuas - Parte 2

1. Ejercicio 1

El porcentaje de alcohol que hay en una botella de litro de cierta bebida es una variable aleatoria X. Supongamos que X tiene densidad $f_X(x) = c(1 - x^2)$ para $0 < x < 1$ y $f_X(x) = 0$ en otro caso.

(a) ¿Qué valor debe tomar c para que f_X sea verdaderamente una densidad?

(b) Hallar la función de distribución acumulada de X.

(c) Se producen diez botellas de un litro de estas bebidas, de forma independiente. Calcular el número esperado de botellas con un porcentaje de alcohol menor al 50 %.

2. Ejercicio 2

El precio promedio semanal de las acciones de las compañías que conforman el S&P 500 es $30, con un desvío standard de $8.20. Asumí que los precios son variables aleatorias que se distribuyen en forma normal. Para una empresa elegida al azar:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el precio de las acciones sea de al menos $40?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el precio de las acciones sea menor a $20?

(c) ¿Qué tan alto debería ser el precio de las acciones para colocar a la empresa en el 10 % más alto del S&P 500?

(d) ¿Creés que tiene sentido hacer el supuesto de normalidad en la distribución de los precios? Por qué? Por qué no?

(e) ¿Cómo cambiaría tu respuesta a la pregunta anterior si la media de la distribución fuese de $10?

3. Ejercicio 3

Suponé que el logaritmo del ingreso de 2017 en Argentina tiene una distribución normal, con una media de 9.8 y desvío estándar de 0.4. La canasta básica, que determina la línea de pobreza, se estimó en 15000 pesos. La canasta alimentaria, que determina la línea de indigencia, se estimó en 6000 pesos.

(a) Con los datos que tenés, separá a la población de acuerdo a los deciles de la distribución del ingreso.

(b) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que no son pobres ni indigentes?

(c) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que son pobres pero no indigentes?

(d) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que son indigentes?

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona supere la línea de pobreza?

(f) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no supere la línea de indigencia?

4. Ejercicio 4

La compañía Quick Sales acaba de recibir dos proyecciones de ventas para el trimestre que se avecina. El problema es que estos informes contienen información distinta. La proyección I dice que las ventas (en millones de dólares) estarán normalmente distribuidas con media 325 y desvío estándar 60. La proyección II dice que las ventas estarán normalmente distribuidas con media 300 y desvío estándar 50. El consejo directivo encuentra que cada proyección parece, a priori, ser igualmente fidedigna. Aún más, ha decidido adoptar alguna de las dos proyecciones como base para la toma de decisiones futuras, pero no puede definir cuál.

Con el fin de determinar cuál de ellas deberá utilizarse la junta de directores ha decidido reunirse de nuevo al final del trimestre y utilizar información actualizada sobre las ventas para tomar una determinación sobre la credibilidad de cada proyección.

(a) Suponé que la proyección I es precisa. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga ventas trimestrales mayores a 350 millones de dólares?

(b) Suponé ahora que la proyección II es precisa. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga ventas trimestrales mayores a 350 millones de dólares?

(c) Al final del trimestre, la junta de directores encuentra que la compañía tiene ventas mayores a 350 millones de dólares. Dada esta nueva información, ¿cuál es la probabilidad de que originalmente la proyección I haya sido la correcta?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que originalmente la proyección II haya sido la correcta?

5. Ejercicio 5

Suponé que tenés interés en comprar una parcela de tierra, pero no sos el único interesado en ella, habiendo otro potencial comprador. La actual dueña de la parcela les informó a ambos que aceptará la oferta más alta por encima de $10000. Asumí que conocés que la oferta de tu competidor es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre $10000 y $15000.

(a) Suponé que ofrecés $12000. ¿Cuál es la probabilidad de que tu oferta sea aceptada?

(b) Suponé que ofrecés $14000. ¿Cuál es la probabilidad de que tu oferta sea aceptada?

(c) ¿Qué oferta deberías realizar para maximizar la probabilidad de quedarte con la parcela?

(d) Suponé que alguien está dispuesto a pagarte $16000 por la parcela, si es que la comprás. Considerarías ofrecer menos que en (c)? Por qué o por qué no?

6. Ejercicio 6

Suponga que $X_i \overset{iid}{\sim} U[0,\theta]$ con $i = 1,\dots,n$.

(a) Encuentre la distribución de $Y = \max\{X_1,\dots,X_n\}$

(b) Calcule su esperanza y varianza

(c) Calcule $P(Y > a\theta)$ con $a < 1$

7. Ejercicio 7

Suponga que $X_i \overset{iid}{\sim} U[\theta,1]$ con $i = 1,\dots,n$. Encuentre la distribución de $Y = \min\{X_1,\dots,X_n\}$ Calcule su esperanza y varianza.

8. Ejercicio 8

Suponga que $X_i \sim_{iid} \operatorname{Exp}(\lambda_i)$ con $i = 1,\dots,n$. Suponga que las variables son independientes. Encuentre la distribución de $Y = \min\{X_1,\dots,X_n\}$. Calcule su esperanza y varianza.

9. Ejercicio 9

Sea la variable aleatoria W

$$W = \alpha \overline{X}_n + \beta \overline{Y}_n$$

donde $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ son variables aleatorias todas independientes entre sí e idénticamente distribuidas $Be(p)$. Además $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

(a) Encuentre los valores de α y β para que $E(W) = p$

(b) ¿Para qué valores de α y β se minimiza la varianza de W, teniendo en cuenta que se necesita que $E(W) = p$?

10. Ejercicio 10

Supogamos que el tiempo, **en minutos**, que pasa entre que llegan **pedidos independientes consecutivos** a un centro en distribución de una compañía alimenticia es una variable $X \sim Exp(\lambda)$, donde $\lambda = 2$.

(a) Si definimos la variable aleatoria P como la cantidad de pedidos en 1 minuto, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria P? Responda con lo visto en clase teórica, no hace falta que haga una demostración formal.

(b) Si definimos la variable aleatoria R como la cantidad de pedidos en 1 hora, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria R? Responda con lo visto en clase teórica, no hace falta que haga una demostración formal.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que pase más de un minuto entre dos pedidos consecutivos?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que, habiendo esperado al menos 38 **minutos** y se sabe que no llegó un pedido, que se tenga que esperar al menos 39 **minutos** para que llegue un pedido?

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que, habiendo esperado al menos 38 **horas** y se sabe que no llegó un pedido, que se tenga que esperar al menos 39 **horas** para que llegue un pedido?

Hint: Defina la variable $Y = \frac{X}{60}$ o tenga en cuenta en qué unidades está medida la variable X.

(f) Muestre que, en general, si $X \sim Exp(\lambda)$, entonces $Y = \frac{X}{a} \sim Exp(a\lambda)$.