Examen final

Primer llamado 2023

1. **(15 puntos)** Se tira 3 veces consecutivas un dado **equilibrado** con 6 caras. En cada cara puede aparecer solamente alguno de los siguientes símbolos: ⚀, ⚁, ⚂ de manera que cada símbolo aparece en dos caras distintas del dado. En cada tirada se anota el resultado de la cara superior. Considere el espacio muestral Ω que lista los posibles resultados de tirar **tres veces consecutivas** el mismo dado.

   (a) **(3 puntos) Describa** el espacio muestral Ω usando notación de conjuntos y diga cuántos elementos tiene Ω.

   Liste los elementos de los siguientes eventos:

   (b) **(3 puntos)** $A =$"Sale el resultado ⚂ en la cara superior en **exactamente** dos tiradas de las tres".

   (c) **(3 puntos)** $B =$"Sale el resultado ⚂ en la cara superior en **por lo menos** dos tiradas de las tres".

   (d) **(3 puntos)** $C =$"En la primera tirada sale cualquier resultado y además entre la segunda y tercera tiradas sale exactamente una sola vez el resultado ⚂".

   (e) **(3 puntos)** $A \cap C$.

2. **(10 puntos)** Calcule las probabilidades p_1 y p_2 (para cada inciso por separado) y compárelas:

   (a) **(5 puntos)** Imagine que hay una mesa redonda con 12 personas. Entre ellas se encuentran Daenerys, Ygritte y Jon Snow. Cualquier arreglo para que los 12 invitados se sienten en la mesa es **equiprobable**.
   - p_1 = probabilidad de que Daenerys y Jon Snow se sienten juntos.
   - p_2 = probabilidad que los tres (Daenerys, Ygritte y Jon) se sienten juntos, pero Ygritte se siente en el medio, entre Jon y Daenerys.

   (b) **(5 puntos)** Un palíndromo es una palabra o expresión que se lee de la misma manera de adelante hacia atrás y de atrás hacia adelante. Asuma para este problema que es **equiprobable** elegir cualquier letra del abecedario y que el abecedario en español consiste de las letras 27 letras

   $$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \text{ñ}, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$$

   Definimos "palabra" como una concatenación cualquiera de letras del abecedario. Por ejemplo, "BBBBB","CSESC" y "ALALA" son "palabras" que además son palíndromos de 5 letras; mientras que "NARRAN", "PWRRWP" y "MILLIM" son "palabras" que además son palíndromos de 6 letras.
   - p_1 = probabilidad de que una "palabra" de 5 letras sea un palíndromo.
   - p_2 = probabilidad de que una "palabra" de 6 letras sea un palíndromo.

3. **(15 puntos)** Considere los siguientes eventos: **condición genética en la familia de muerte súbita** (G), **el hijo** 1 **fallece** de muerte súbita (M_1), **el hijo** 2 **fallece** de muerte súbita (M_2), **ambos hijos** fallecen de muerte súbita ($B = M_1 \cap M_2$), el padre es **culpable** (C). Se sabe que:

   para $i = 1$ ó 2, $P(M_i|G) = 0.12$; $P(C) = 0.0021$; $P(B|G \cap C^C) = 0.01$; los eventos C y G son **independientes**; los eventos M_1 y M_2 son **condicionalmente independientes** al evento G: $P(M_1|G) \cdot P(M_2|G) = P(B|G)$.

   (a) **(3 puntos)** Calcule $P(B|G)$ si $P(B|G \cap C) = \dfrac{2021}{2100}$. **Nota:** no necesita este dato para los siguientes incisos.

   (b) **(4 puntos)** Justifique porqué vale que $P(B \cap G \cap C^C) = P(B|G \cap C^C) \cdot P(C^C) \cdot P(G)$.

   (c) **(3 puntos)** Justifique porqué vale que $P(B \cap G) = [P(M_1|G)]^2 \cdot P(G)$.

   (d) **(5 puntos) Sabemos** que **ambos hijos** de una familia han **fallecido** y que en la familia hay una **condición genética** que favorece la muerte súbita. El fiscal argumenta que es probable que el padre haya sido responsable de **ambas muertes** dado que $P(B) = \dfrac{1}{7225000} \approx 0$ y por lo tanto $P(B|C^C) \approx 0$. Es decir, si suponemos que el padre es inocente, la probabilidad de que ambos hijos hayan fallecido es aproximadamente 0 (es poco probable que los hijos hubieran fallecido). Usted es llamado al estrado para contradecir el argumento del fiscal. Usted dice que en realidad hay que calcular $P(C^C|G \cap B)$ porque hay que considerar el evento que el padre sea inocente condicionado **a lo que sabemos** (que ambos hijos fallecieron y que hay una condición genética). ¿Cuánto vale $P(C^C|G \cap B)$? Dada su respuesta, explique cuál es el error de razonamiento del fiscal.

4. **(10 puntos)** En la batalla final de *Game of Thrones* (*Juego de tronos*), la probabilidad de que un soldado elegido al azar hubiera perdido:

- un **ojo** es 0.4, $P(O) = 0.4$; una **oreja** es 0.4, $P(J) = 0.4$; una **pierna** es 0.4, $P(P) = 0.4$.
- una **pierna y un ojo** es 0.2, $P(P \cap O) = 0.2$; una **pierna y una oreja** es 0.2, $(P \cap J) = 0.2$
- un **ojo y una oreja** es 0.2, $P(O \cap J) = 0.2$; una **pierna y un ojo y una oreja** 0.1, $P(P \cap O \cap J) = 0.1$.

¿Cuál es la probabilidad de que un soldado al azar n**o haya perdido ni un ojo ni una pierna ni una oreja**?

5. **(10 puntos)** En el juego de *Jumanji*, Alan Parrish está atrapado en la selva. Alan puede escapar de la selva si alguno de los demás jugadores obtiene una suma de 5 u 8 con dos dados **equilibrados**, sus resultados son **independientes** entre sí en cada turno del juego y entre distintos turnos.

(a) **(3 puntos)** En el primer turno, muestre que la probabilidad de que Alan escape es igual a $\frac{1}{4}$.

(b) **(4 puntos)** Diga cuál es el $Sop(X)$ y describa detalladamente la PMF de la variable aleatoria X, si X cuenta cuántas tiradas hay que realizar hasta que Alan pueda escapar (incluyendo esa última tirada).

(c) **(3 puntos)** Basándose en su respuesta anterior, ¿cuántas tiradas se debería esperar **en promedio** para poder rescatar a Alan Parrish, es decir, para que la suma de dados dé 5 u 8?

6. **(15 puntos)** Considere el vector aleatorio continuo (X, Y) con función conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = 3.6 \cdot x^2 \cdot (y^2 + y) \quad \text{si } 0 \le x \le 1, \quad \text{si } 0 < y \le 1$$

(a) **(4 puntos)** Muestre que la función de densidad de X es $f_X(y) = 3x^2$ y calcule $E(X)$.

(b) **(3 puntos)** Calcule $f_{Y|X=x}(y|x)$, la función de densidad de $Y|_{X=x}$.

(c) **(4 puntos)** Calcule $E(Y|X = x)$.

(d) **(4 puntos)** Calcule $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

7. **(10 puntos)** Alina contesta los mails que recibe a partir de las 8AM en una casilla de correo donde recibe mails *spam* y mails legítimos. Las variables aleatorias:

- N mide cuál es el primer mail que es *spam*. Si $N = 1$ es porque el primer mail recibido es *spam*, si $N = 2$ es porque el segundo mail recibido es *spam*... Suponemos que $N \sim Geom(0.1)$, o sea, $E(N) = 10$ y $Var(N) = 90$.
- D_i miden la duración de tiempo medido en minutos entre el mail $i-1$-ésimo y el mail i-ésimo, donde $i = 1, \cdots, n$. D_1 mide el tiempo entre las 8AM y el primer mail que llega. Suponemos que $D_i \overset{iid}{\sim} Exp(2)$ de manera que $E(D_i) = \frac{1}{2}$, $Var(D_i) = \frac{1}{4}$ y $M_{D_i}(t) = \frac{2}{2-t}$ si $t < 2$.
- $X = D_1 + \cdots + D_N$ el tiempo total que tarda en llegar el primer mail *spam* del día.

(a) **(5 puntos)** Calcule $E(X)$: cuántos minutos, en promedio, esperará Alina hasta recibir el primer mail *spam*.

(b) **(5 puntos)** Calcule $Var(X)$.

(c) **Bonus:** Calcule $M_X(t)$ para $t < 2p$. Puede usar que, si $0 < a < 1$ (eligiendo a adecuadamente), $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$.

8. **(5 puntos)** Sean X e Y dos v.a. **independientes**, entonces demuestre que

$$Var(XY) = Var(X)Var(Y) + (E(X))^2 Var(Y) + (E(Y))^2 Var(X)$$

9. **(10 puntos)** Calcule a, b, μ y σ^2, justificando apropiadamente, sabiendo que las $V_n > 0$ y que

$$V_n \xrightarrow{p} 1, \qquad W_n \xrightarrow{p} -2, \qquad X_n \xrightarrow{D} N(3,4).$$

(a) **(2 puntos)** $V_n + W_n \xrightarrow{p} a$

(b) **(2 puntos)** $\ln(V_n) \xrightarrow{p} b$

(c) **(6 puntos)** $V_n + W_n \cdot X_n \xrightarrow{D} N(\mu, \sigma^2)$