Ecuaciones en Diferencias

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Ecuaciones en diferencias

Una **ecuación en diferencias** es una expresión del tipo

$$G(y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-n}, t) = 0 \quad \forall t \in D$$

donde $\{y_t\}_{t \in D}$ es una serie temporal.

Ecuaciones lineales

Una ecuación en diferencias se dice **lineal** si se puede expresar de la siguiente manera

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) y_{t-i} + x_t.$$

El número n se denomina el **orden de la ecuación**, los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ se denominan los **coeficientes de la ecuación** y x_t se denomina el **proceso de forzamiento** de la ecuación.

Ecuaciones lineales

Una ecuación en diferencias se dice **lineal** si se puede expresar de la siguiente manera

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) y_{t-i} + x_t.$$

El número n se denomina el **orden de la ecuación**, los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ se denominan los **coeficientes de la ecuación** y x_t se denomina el **proceso de forzamiento** de la ecuación.

- Cuando $x_t \equiv 0$ decimos que la ecuación en diferencias lineal es **homogénea**.

Ecuaciones lineales

Una ecuación en diferencias se dice **lineal** si se puede expresar de la siguiente manera

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) y_{t-i} + x_t.$$

El número n se denomina el **orden de la ecuación**, los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ se denominan los **coeficientes de la ecuación** y x_t se denomina el **proceso de forzamiento** de la ecuación.

- Cuando $x_t \equiv 0$ decimos que la ecuación en diferencias lineal es **homogénea**.
- Cuando los coeficientes de la ecuación no dependen del tiempo diremos que la ecuación en diferencias lineal es de coeficientes constantes.

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} a_i y_{t-i} + x_t.$$

Método iterativo

Con condición inicial. Si se conoce el valor de y en algún período específico, un método directo para hallar la solución es iterar hacia adelante desde ese período. Denominamos al valor conocido de y como la **condición inicial** o el valor de y para $t = 0$.

Método iterativo

Con condición inicial. Si se conoce el valor de y en algún período específico, un método directo para hallar la solución es iterar hacia adelante desde ese período. Denominamos al valor conocido de y como la **condición inicial** o el valor de y para $t = 0$.
Dada una ecuación en diferencia de orden uno

$$y_t = ay_{t-1} + x_t,$$

con condición inicial y_0, su la solución es

$$y_t = \sum_{i=0}^{t-1} a^i x_{t-i} + a^t y_0 \quad t > 0.$$

Método iterativo

Con condición inicial. Si se conoce el valor de y en algún período específico, un método directo para hallar la solución es iterar hacia adelante desde ese período. Denominamos al valor conocido de y como la **condición inicial** o el valor de y para $t = 0$.
Dada una ecuación en diferencia de orden uno

$$y_t = ay_{t-1} + x_t,$$

con condición inicial y_0, su la solución es

$$y_t = \sum_{i=0}^{t-1} a^i x_{t-i} + a^t y_0 \quad t > 0.$$

La solución es única una vez fijado el dato inicial y_0.

Método iterativo

Sin condición inicial. En el caso de no tener un condición inicial, no tenemos un tiempo t_0 donde parar nuestra iteración y por lo tanto

$$\begin{aligned} y_t &= a y_{t-1} + x_t = a(a y_{t-2} + x_{t-1}) + x_t = a^2 y_{t-2} + a x_{t-1} + x_t \\ &\vdots \\ &= a^m y_{t-m} + \sum_{i=0}^{m-1} a^i x_{t-i}. \end{aligned}$$

Método iterativo

Sin condición inicial. En el caso de no tener un condición inicial, no tenemos un tiempo t_0 donde parar nuestra iteración y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
y_t &= a y_{t-1} + x_t = a(a y_{t-2} + x_{t-1}) + x_t = a^2 y_{t-2} + a x_{t-1} + x_t \\
&\vdots \\
&= a^m y_{t-m} + \sum_{i=0}^{m-1} a^i x_{t-i}.
\end{aligned}
$$

Método iterativo

Sin condición inicial. En el caso de no tener un condición inicial, no tenemos un tiempo t_0 donde parar nuestra iteración y por lo tanto

$$\begin{aligned} y_t &= ay_{t-1} + x_t = a(ay_{t-2} + x_{t-1}) + x_t = a^2 y_{t-2} + ax_{t-1} + x_t \\ &\vdots \\ &= a^m y_{t-m} + \sum_{i=0}^{m-1} a^i x_{t-i}. \end{aligned}$$

Si $|a| < 1$, y_t es acotada y la serie converge, entonces $a^m y_{t-m} \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Método iterativo

Sin condición inicial. En el caso de no tener un condición inicial, no tenemos un tiempo t_0 donde parar nuestra iteración y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
y_t &= ay_{t-1} + x_t = a(ay_{t-2} + x_{t-1}) + x_t = a^2 y_{t-2} + ax_{t-1} + x_t \\
&\vdots \\
&= a^m y_{t-m} + \sum_{i=0}^{m-1} a^i x_{t-i}.
\end{aligned}
$$

Si $|a| < 1$, y_t es acotada y la serie converge, entonces $a^m y_{t-m} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}$.

Método iterativo

Sin condición inicial. En el caso de no tener un condición inicial, no tenemos un tiempo t_0 donde parar nuestra iteración y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
y_t &= ay_{t-1} + x_t = a(ay_{t-2} + x_{t-1}) + x_t = a^2 y_{t-2} + ax_{t-1} + x_t \\
&\vdots \\
&= a^m y_{t-m} + \sum_{i=0}^{m-1} a^i x_{t-i}.
\end{aligned}
$$

Si $|a| < 1$, y_t es acotada y la serie converge, entonces $a^m y_{t-m} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}$.

¿Es la única solución?

Método iterativo

Sin condición inicial. En el caso de no tener un condición inicial, no tenemos un tiempo t_0 donde parar nuestra iteración y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
y_t &= ay_{t-1} + x_t = a(ay_{t-2} + x_{t-1}) + x_t = a^2 y_{t-2} + ax_{t-1} + x_t \\
&\vdots \\
&= a^m y_{t-m} + \sum_{i=0}^{m-1} a^i x_{t-i}.
\end{aligned}
$$

Si $|a| < 1$, y_t es acotada y la serie converge, entonces $a^m y_{t-m} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}$.

¿Es la única solución? No, para todo $k \in \mathbb{R}$ tenemos que $\widetilde{y}_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i} + ka^t$ también es solución!

Método iterativo

Sin condición inicial. En el caso de no tener un condición inicial, no tenemos un tiempo t_0 donde parar nuestra iteración y por lo tanto

$$y_t = ay_{t-1} + x_t = a(ay_{t-2} + x_{t-1}) + x_t = a^2 y_{t-2} + ax_{t-1} + x_t$$

$$\vdots$$

$$= a^m y_{t-m} + \sum_{i=0}^{m-1} a^i x_{t-i}.$$

Si $|a| < 1$, y_t es acotada y la serie converge, entonces $a^m y_{t-m} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}$.

¿Es la única solución? No, para todo $k \in \mathbb{R}$ tenemos que $\widetilde{y}_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i} + ka^t$ también es solución! Falta fijar el dato inical para ajustar la constante k

Ec. lineales homogéneas

Si $y_0 \neq 0$ se observa lo siguiente

- Si $y_0 > 0$ ($y_0 < 0$), $a > 1$ entonces y es creciente (decreciente);
- Si $a < 0$ entonces y oscila;
- Si $|a| < 1$ entonces $y_t \to 0$ cuando $t \to \infty$.
- Si $|a| > 1$ entonces $|y_t| \to \infty$ cuando $t \to \infty$ en este caso decimos que la solución es **no estable**.
- Si $a = 1$ entonces $y_t \equiv y_0$.
- Si $a = -1$ entonces

$$y_t = \begin{cases} y_0 & \text{si } t \text{ es par,} \\ -y_0 & \text{si } t \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ec. lineales homogéneas

Teorema.

Las soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea forman un espacio vectorial. La dimensión de este espacio es el orden de la ecuación.

Teorema.

La soluciones de una ecuación en diferencias lineal son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a esta más una solución particular.

Ec. lineales homogéneas

Teorema.

Las soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea forman un espacio vectorial. La dimensión de este espacio es el orden de la ecuación.

Teorema.

La soluciones de una ecuación en diferencias lineal son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a esta más una solución particular.

Por ejemplo, todas las soluciones de $y_t = ay_{t-1} + x_t$, son de la forma

$$y_t = ka^t + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Ec. lineales homogéneas

Teorema.

Las soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea forman un espacio vectorial. La dimensión de este espacio es el orden de la ecuación.

Teorema.

La soluciones de una ecuación en diferencias lineal son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a esta más una solución particular.

Por ejemplo, todas las soluciones de $y_t = ay_{t-1} + x_t$, son de la forma

$$y_t = ka^t + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i} = y_t^h + y^p \quad (k \in \mathbb{R})$$

Otro método

Paso 1. Hallar las soluciones de la ecuación homogénea asociada a mi ecuación en diferencias lineal.

Paso 2. Hallar una solución particular de mi ecuación en diferencias lineal.

Paso 3. Obtener las solución general de mi ecuación en diferencias como la suma de las soluciones de la ecuación homogénea asociada a esta más la solución particular.

Paso 4. En caso de tener condiciones iniciales, imponerlas para fijar las constantes que aparecen en la solución general.

Paso 5. Chequear!

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

- Encontrar una solución particular.

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

- Encontrar una solución particular.

Si la ecuación está igualada a una constante, podemos proponer $y_p \rightsquigarrow k, kt$ o kt^2.

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

- Encontrar una solución particular.

Si la ecuación está igualada a una constante, podemos proponer $y_p \rightsquigarrow k, kt$ o kt^2. Y si no?

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

- Encontrar una solución particular.

Si la ecuación está igualada a una constante, podemos proponer $y_p \rightsquigarrow k, kt$ o kt^2. Y si no?

Sabemos que las soluciones del caso homogéneo forman un espacio vectorial de dimensión 2, por lo tanto necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes para tener una base del espacio de soluciones.

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

- Encontrar una solución particular.

Si la ecuación está igualada a una constante, podemos proponer $y_p \rightsquigarrow k, kt$ o kt^2. Y si no?

Sabemos que las soluciones del caso homogéneo forman un espacio vectorial de dimensión 2, por lo tanto necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes para tener una base del espacio de soluciones.

- Buscar las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$.

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

- Encontrar una solución particular.

Si la ecuación está igualada a una constante, podemos proponer $y_p \rightsquigarrow k, kt$ o kt^2. Y si no?

Sabemos que las soluciones del caso homogéneo forman un espacio vectorial de dimensión 2, por lo tanto necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes para tener una base del espacio de soluciones.

- Buscar las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$.
- $y_h = \alpha r_1^t + \beta r_2^t$, si r_1 y r_2 son raíces (reales) distintas de $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$.

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

- Encontrar una solución particular.

Si la ecuación está igualada a una constante, podemos proponer $y_p \rightsquigarrow k, kt$ o kt^2. Y si no?

Sabemos que las soluciones del caso homogéneo forman un espacio vectorial de dimensión 2, por lo tanto necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes para tener una base del espacio de soluciones.

- Buscar las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$.
- $y_h = \alpha r_1^t + \beta r_2^t$, si r_1 y r_2 son raíces (reales) distintas de $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$.
- $y_h = \alpha r_1^t + \beta t r_1^t$, si r_1 es raíz doble de $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$.

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c.$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada más una solución particular.

- Encontrar una solución particular.

Si la ecuación está igualada a una constante, podemos proponer $y_p \rightsquigarrow k, kt$ o kt^2. Y si no?

Sabemos que las soluciones del caso homogéneo forman un espacio vectorial de dimensión 2, por lo tanto necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes para tener una base del espacio de soluciones.

- Buscar las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$.
- $y_h = \alpha r_1^t + \beta r_2^t$, si r_1 y r_2 son raíces (reales) distintas de $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$.
- $y_h = \alpha r_1^t + \beta t r_1^t$, si r_1 es raíz doble de $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$.
- Raíces complejas?

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} - 0,9y_{t+1} + 0,2y_t = 3$$

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} - 0,9y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1/2)^t + b(2/5)^t + 10.$$

$$y_{t+2} - 1,2y_{t+1} + 0,2y_t = 3$$

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} - 0,9y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1/2)^t + b(2/5)^t + 10.$$

$$y_{t+2} - 1,2y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1)^t + b(1/5)^t + \ldots$$

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} - 0,9y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1/2)^t + b(2/5)^t + 10.$$

$$y_{t+2} - 1,2y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1)^t + b(1/5)^t + \ldots$$

Como la solución particular $y_p = k$ *no funciona*, probamos con $y_p = kt$.

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} - 0,9y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1/2)^t + b(2/5)^t + 10.$$

$$y_{t+2} - 1,2y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1)^t + b(1/5)^t + \ldots$$

Como la solución particular $y_p = k$ *no funciona*, probamos con $y_p = kt$. Podría fallar?

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 1y_t = 3$$

Segundo orden

Buscamos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y_{t+2} - 0,9y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1/2)^t + b(2/5)^t + 10.$$

$$y_{t+2} - 1,2y_{t+1} + 0,2y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = a(1)^t + b(1/5)^t + \dots$$

Como la solución particular $y_p = k$ *no funciona*, probamos con $y_p = kt$. Podría fallar?

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 1y_t = 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad y_t = \dots$$

Como las soluciones particulares $y_p = k$ y $y_p = kt$ *no funcionan*, probamos con $y_p = kt^2$.

Segundo orden - Raíz doble

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 3.$$

Segundo orden - Raíces complejas

$$y_{t+2} + 4y_{t+1} + 8y_t = -4$$