Guía Práctica 2

1. Obtenga $A+B$, $A-B$ y $5A-3B$ cuando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

2. Obtenga las matrices producto AB y BA cuando sea posible:

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Escriba los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial, $A \cdot x = b$

   a) De los sistemas escritos, hay uno que es un sistema incompatible y otros que son sistemas compatibles indeterminados. Diga cuáles son y explique en cada caso por qué no podrá encontrar una única solución al sistema de ecuaciones.

   b) Para los sistemas compatibles determinados, encuentre la solución al sistema:

   - pre-multiplicando por la matriz inversa (muestre en cada caso que $\det(A) \neq 0$ para demostrar que existe la matriz inversa),
   - aplicando Gauss-Jordan y
   - por medio de la Regla de Cramer (opcional).

   Verifique que no importa qué método se utilice para resolver el sistema, la solución es la misma.

   c) Para el sistema compatible indeterminado que tiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Muestre que el rango de la matriz A es menor que 3 y que eso implica que $\det(A) = 0$.

   a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$

4. Los siguientes sistemas de ecuaciones tienen tres ecuaciones y incógnitas. Escriba matricialmente los sistemas $A \cdot x = b$ y diga en cada caso si la matriz A tiene rango completo o no.

   a) $\begin{cases} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Encuentre una matriz C que cumple con $(A - 2I)\,C = I$

   b) ¿Existe una matriz D que cumpla con $(B - 2I)\,D = I$?

6. Muestre que $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.

7. Demuestre que Si $AB = A$ y $BA = B$, entonces A y B son idempotentes. Demuestre que si A es idempotente, entonces $A^n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Determine para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 1 & -3 \\ a + 1 & 2 & a^2 + 4 \\ -3 & 4a & -1 \end{pmatrix}$ es simétrica.

9. Determine para qué valor(es) de a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & a^2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es inversible y diga, para cada valor de a donde la matriz no es inversible, cuál es el rango de la matriz.

10. Determine para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -a & 3 & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es inversible y diga, para cada valor de a donde la matriz no es inversible, cuál es el rango de la matriz.

11. Muestre que para cualquier valor de θ, la matriz $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es inversible, usando que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

    Nota: Un nombre que ilustra qué hace esta matriz es la *matriz del pizzero (o del basquetbolista)*. Imagínese una pizzero (basquetbolista) con una masa (pelota) que gira alrededor de su dedo índice en el sentido contra las agujas del reloj. La coordenada z no varía mientras que un giro de θ grados se ve representado por la matriz escrita anteriormente. Para que el objeto gire sin cesar, el valor de θ debería ir aumentando.

12. Sean A, B y C tres matrices entre las cuales existe la matriz producto. Muestre, utilizando que el producto de matrices es asociativo, que $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

13. Una matriz A se dice **ortogonal** si $AA^T = I$. Demuestre que si A y B son dos matrices ortogonales de $n \times n$, entonces AB es ortogonal usando propiedades de trasponer matrices.

14. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

    a) Encuentre AB, $\det(A)$, $\det(B)$ y $\det(AB)$.

    b) Compruebe que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

15. Considere el siguiente modelo macroeconómico:

$$\begin{aligned} Y &= C + A_0 \\ C &= a + b\,(Y - T) \\ T &= d + tY \end{aligned}$$

    donde Y es el PBI, C es el consumo, T los ingresos por impuestos, A_0 el gasto autónomo (exógeno) y a, b, d y t son parámetros positivos. Encuentre los valores de equilibrio de Y, C y T en función de A_0, a, b, d y t el método que más prefiera.

16. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

    a) Calcule AB, BA, $A^T B^T$ y $B^T A^T$.

    b) Muestre que $\det(A) = \det(A')$ y que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

    c) ¿Es cierto que $\det\left(A^T B^T\right) = \det\left(A^T\right) \cdot \det\left(B^T\right)$?

17. Compute las inversas de las siguientes matrices, si es que existen:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$