Guía Práctica 1

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones, encuentre el (los) valor(es) de x, si es que existe(n):

   a) $\sqrt{1+x} + \frac{ax}{\sqrt{1+x}} = 0$

   b) $15x - x^2 = 0$

   c) $(x-3)(x+4) = 0$

   d) $\frac{x-3}{x-4} = \frac{x+3}{x+4}$

   e) $\frac{x \ln(x+3)}{x^2+1} = 0$

2. Calcule las derivadas primeras y segundas de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = 3x^3 - 2x^4 + 8$

   b) $f(x) = 3x \ln x$

   c) $f(x) = e^{x^2}$

   d) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

   e) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

   f) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

   g) $f(x) = \left(x^3+2x\right)^3 (4x+5)^2$

   h) $f(x) = 5\left(x^5 - 6x^2 + 3x\right)^{2/3}$

3. Muestre que las siguientes funciones son estrictamente crecientes en sus dominios. Encuentre el dominio y la fórmula de sus funciones inversas:

   a) $f(x) = 3 + \ln(e^x - 2)$, para $x > \ln 2$

   b) $f(x) = \frac{a}{e^{-\lambda x}+a}$, con $a, \lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

4. Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = (\ln x)^2 - 4$

   b) $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$

   c) $f(x)\, x - \frac{3}{2} \ln\left(x^2+2\right)$

5. Suponga que $\Pi(Q) = QP(Q) - cQ$. Encuentre $\Pi'_Q(Q)$. Provea una interpretación económica cuando Π son los beneficios, Q las cantidades producidas y P el precio de venta.

6. Suponga que $\Pi(L) = Q(L)P - wL$. Encuentre $\Pi'_L(L)$. Provea una interpretación económica cuando Π son los beneficios, Q las cantidades producidas, P el precio de venta, w el salario y L la cantidad de trabajadores.

7. La función de costo de producir un bien x viene dada por $C(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}25x^2 + 300x + 100$. Usando la diferencial estime el efecto sobre el costo de un incremento de x de 6 a 6.1.

8. Pruebe utilizando la regla de derivación del cociente que si $f(x) = x^k$ con $k < 0$, entonces $f(x) = kx^{k-1}$.

9. Utilice la definición de derivada para demostrar que la función $f(x) = |x|$ no posee derivada cuando $x = 0$. *Ayuda:* Calcule el límite por izquierda, luego el límite por derecha y note que no coinciden.

10. Evalúe los siguientes límites:

    a) $\lim_{x \to -1} \frac{3-\sqrt{x+17}}{x+1}$

    b) $\lim_{x \to 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$

    c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

    d) $\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^2}{3x^2}$

11. Una firma produce un bien y recibe un precio de 100 por cada unidad vendida. El costo de producir y vender x unidades es de $20x + 0{,}25x^2$.

    a) Encuentre el nivel de producción x que maximiza los beneficios de la firma (ingresos menos costos).

    b) Si se cobra un impuesto de 10 por unidad vendida, ¿cuál es el nuevo nivel óptimo de producción?

12. Suponga que una firma es monopolista, es decir, es la única que vende en el mercado. La firma conoce exactamente cuál es la demanda por su bien $P(q) = 11 - 2q$ quiere vender q unidades con tal de maximizar sus beneficios. Producir q unidades le cuesta $C(q) = 3q$.

    Los beneficios son $\pi = P(q) \cdot q - C(q)$.

    - Escriba el problema donde el monopolista maximiza sus beneficios.
    - ¿Cuántas unidades q del bien venderá el monopolista con tal de maximizar sus beneficios?
    - ¿A qué precio $p = P(q)$ venderá esas unidades?
    - Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
    - ¿Cuál es el valor del beneficio máximo que puede obtener el monopolista?

13. Suponga que una firma desea exportar maíz y que puede vender a precio local, que dependerá de la cantidad q que venda de la siguiente manera: $P(q) = 14 - q$ o puede vender a precio internacional a \$5 por unidad. Suponga que la firma cosechó $Q = 10$, es decir, no puede vender más de Q unidades y puede elegir cuántas unidades vender al mercado local, q_L y al mercado internacional q_i, de manera que $q_L + q_i = Q \leq 10$. Si a la firma le cuesta \$2 producir cada unidad de maíz.

    - Explique por qué es óptimo para la firma vender exactamente 10 unidades $q_L + q_i = Q = 10$

- Plantee el problema de maximización de beneficios de la firma de manera que la única incógnita sea q_L.
- Encuentre la cantidad q_L que maximice los beneficios del monopolista.
- ¿A qué precio venderá en el mercado local? ¿Cuáles serán sus beneficios?

14. Yael quiere comprar paquetes de arroz (a) y puede tener dinero de sobra o pedir prestado (m). Como el arroz es un bien de subsistencia, la felicidad de Yael por consumir arroz viene dada por $u(a,m) = m + \ln(a)$, donde $a \geq 0$ pero $m \in \mathbb{R}$.

    Suponga que la restricción de presupuesto de Yael es $m + 2a = 5$, es decir, que tiene 5 pesos para gastar y que cada paquete de arroz cuesta 2 pesos.

    - Escriba el problema donde Yael maximiza su utilidad de manera que solamente dependa de a.
    - ¿Cuántos paquetes de arroz a va a comprar Yael con tal de maximizar su utilidad?
    - ¿Con cuánto dinero m se queda Yael para comprar otros bienes?
    - Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
    - ¿Cuál es la utilidad máxima que alcanza Yael?

15. Considere dos mercados monopólicos de galletitas, uno en el país de *Oreostán* y otro en el país *Titalandia*. Las demandas de galletitas en cada país son distintas, pero los costos de producir galletitas son los mismos y son iguales a cero, es decir, $C(q) = 0 \cdot q = 0$.

    $$\text{En } \textit{Oreostán}, \ D_1(p) = 2 - p. \text{ En } \textit{Titalandia}, \ D_2(p) = \frac{1}{p}$$

    (a) ¿Cómo es la elasticidad precio $\varepsilon_{q,p}$ de la demanda para cada país?

    (b) Calcule los beneficios máximos que puede llegar a obtener cada una de las firmas.

    (c) Si los gobernantes de *Oreostán* y *Titalandia* quisieran imponer un precio máximo (es decir, querrían bajar el precio al que venden las firmas), ¿qué firma se verá más perjudicada? ¿por qué?

    (d) Si los gobernantes de *Oreostán* y *Titalandia* quisieran imponer un precio mínimo (es decir, querrían aumentar el precio al que venden las firmas), ¿qué firma se verá más perjudicada? ¿por qué?

16. Considere la función $h(x) = \frac{e^x}{2+e^{2x}}$.

    a) ¿Cuándo es h creciente/decreciente? Encuentre todos los puntos críticos de h.

    b) Si restringimos la función al dominio $(-\infty, 0]$, la función tiene inversa. Encuéntrela.

17. Determine la concavidad o convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(e^{2x} + 4e^{-x}\right)^2$

b) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$

c) $f(x) = -e^{-7x+4}$

18. Decimos que una tecnología medida por los costos de producción $C(q)$ tiene:

- **rendimientos constantes a escala (CRS)** si el costo (pro)medio es igual al costo de producir la última unidad $C'(q)$. Es decir, $\dfrac{C(q)}{q} = C'(q)$, o, análogamente $C(q) = q \cdot C'(q)$.
- **rendimientos decrecientes a escala (DRS)** si el costo (pro)medio es menor al costo de producir la última unidad $C'(q)$. Es decir, $\dfrac{C(q)}{q} < C'(q)$, o, análogamente $C(q) < q \cdot C'(q)$.
- **rendimientos crecientes a escala (IRS)** si el costo (pro)medio es mayor al costo de producir la última unidad $C'(q)$. Es decir, $\dfrac{C(q)}{q} > C'(q)$, o, análogamente $C(q) > q \cdot C'(q)$.

  Suponga que $C(0) = 0$, es decir, que si no se produce nada $q = 0$ eso cuesta 0 pesos. Muestre que:

  - a tecnología exhibe CRS, si $C(q)$ es lineal.
  - la tecnología exhibe DRS, si $C(q)$ es convexa.
  - la tecnología exhibe IRS, si $C(q)$ es cóncava.

  Ayuda: Considere $f(q) = C(q) - q \cdot C'(q)$, note que $f(0) = 0$ y derive esa expresión para ver si $f(x)$ es una función creciente, decreciente o cosntante.

19. Resuelva las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int 5^5 dx$

b) $\int (3 - y)\, dy$

c) $\int x^2 e^x dx$

d) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

e) $\int (x - 2)\, e^{2x} dx$

f) $\int \frac{2}{x+5} dx$

20. Resuelva las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^{12} 50dx$

b) $\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$

c) $\int_1^5 \frac{2}{x} dx$

d) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{5}{x^5} dx$

e) $\int\limits_{0}^{5} \frac{1}{9+x} dx$

Guía Práctica 2

1. Obtenga $A+B$, $A-B$ y $5A-3B$ cuando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

2. Obtenga las matrices producto AB y BA cuando sea posible:

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Escriba los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial, $A \cdot x = b$

   a) De los sistemas escritos, hay uno que es un sistema incompatible y otros que son sistemas compatibles indeterminados. Diga cuáles son y explique en cada caso por qué no podrá encontrar una única solución al sistema de ecuaciones.

   b) Para los sistemas compatibles determinados, encuentre la solución al sistema:

   - pre-multiplicando por la matriz inversa (muestre en cada caso que $\det(A) \neq 0$ para demostrar que existe la matriz inversa),
   - aplicando Gauss-Jordan y
   - por medio de la Regla de Cramer (opcional).

   Verifique que no importa qué método se utilice para resolver el sistema, la solución es la misma.

   c) Para el sistema compatible indeterminado que tiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Muestre que el rango de la matriz A es menor que 3 y que eso implica que $\det(A) = 0$.

   a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$

4. Los siguientes sistemas de ecuaciones tienen tres ecuaciones y incógnitas. Escriba matricialmente los sistemas $A \cdot x = b$ y diga en cada caso si la matriz A tiene rango completo o no.

   a) $\begin{cases} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Encuentre una matriz C que cumple con $(A - 2I)\,C = I$

   b) ¿Existe una matriz D que cumpla con $(B - 2I)\,D = I$?

6. Muestre que $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.

7. Demuestre que Si $AB = A$ y $BA = B$, entonces A y B son idempotentes. Demuestre que si A es idempotente, entonces $A^n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Determine para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 1 & -3 \\ a + 1 & 2 & a^2 + 4 \\ -3 & 4a & -1 \end{pmatrix}$ es simétrica.

9. Determine para qué valor(es) de a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & a^2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es inversible y diga, para cada valor de a donde la matriz no es inversible, cuál es el rango de la matriz.

10. Determine para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -a & 3 & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es inversible y diga, para cada valor de a donde la matriz no es inversible, cuál es el rango de la matriz.

11. Muestre que para cualquier valor de θ, la matriz $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es inversible, usando que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

    Nota: Un nombre que ilustra qué hace esta matriz es la *matriz del pizzero (o del basquetbolista)*. Imagínese una pizzero (basquetbolista) con una masa (pelota) que gira alrededor de su dedo índice en el sentido contra las agujas del reloj. La coordenada z no varía mientras que un giro de θ grados se ve representado por la matriz escrita anteriormente. Para que el objeto gire sin cesar, el valor de θ debería ir aumentando.

12. Sean A, B y C tres matrices entre las cuales existe la matriz producto. Muestre, utilizando que el producto de matrices es asociativo, que $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

13. Una matriz A se dice **ortogonal** si $AA^T = I$. Demuestre que si A y B son dos matrices ortogonales de $n \times n$, entonces AB es ortogonal usando propiedades de trasponer matrices.

14. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

    a) Encuentre AB, $\det(A)$, $\det(B)$ y $\det(AB)$.

    b) Compruebe que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

15. Considere el siguiente modelo macroeconómico:

$$\begin{aligned} Y &= C + A_0 \\ C &= a + b(Y - T) \\ T &= d + tY \end{aligned}$$

    donde Y es el PBI, C es el consumo, T los ingresos por impuestos, A_0 el gasto autónomo (exógeno) y a, b, d y t son parámetros positivos. Encuentre los valores de equilibrio de Y, C y T en función de A_0, a, b, d y t el método que más prefiera.

16. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

    a) Calcule AB, BA, $A^T B^T$ y $B^T A^T$.

    b) Muestre que $\det(A) = \det(A')$ y que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

    c) ¿Es cierto que $\det\left(A^T B^T\right) = \det\left(A^T\right) \cdot \det\left(B^T\right)$?

17. Compute las inversas de las siguientes matrices, si es que existen:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

Guía Práctica 3

1. Encuentre las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = 2x + x^2y^3$
   b) $f(x,y) = \frac{x}{e^y}$
   c) $f(x,y) = \ln(x-y)$
   d) $f(x,y) = x^5 \ln y$
   e) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$
   f) $f(x,y) = e^{xy}$
   g) $f(x,y) = x^7 - y^7$
   h) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

2. Grafique las curvas de nivel de las siguientes funciones en $\mathbb{R}^2$:

   a) $f(x,y) = 3 - x - y$
   b) $f(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$
   c) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$
   d) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   e) $u(x,y) = x \cdot y$
   f) $u(x,y) = x^\alpha \cdot y^{1-\alpha}$, donde $\alpha \in (0,1)$.
   g) $u(x,y) = \text{mín}\{x,y\}$
   h) $u(x,y) = \text{máx}\{x,y\}$

3. Demuestre que todos los puntos (x,y) que cumplen con $xy = 3$ se encuentran sobre una curva de nivel de la función $g(x,y) = \frac{3(xy+1)^2}{x^4y^4-1}$

4. Encuentre las derivadas parciales y la matriz Hessiana de:

   a) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$
   b) $f(x,y,z) = \frac{x^4}{yz}$
   c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$
   d) $f(x,y,z) = 3xyz + x^2y - xz^3$

5. Sea $f(x,y) = 3x^2 + xy - y^2$.

   a) Compute $f(1{,}02, 1{,}99)$.
   b) Aproxime a $f(1{,}02, 1{,}99)$ a través del diferencial total.

6. Encuentre $\partial z/\partial t$ cuando:

   a) $z = x\ln y + y \ln x$, $x = t+1$ e $y = \ln t$
   b) $z = \ln x + \ln y$, $x = Ae^{ay}$ e $y = Be^{bt}$

7. Utilice la regla de la cadena para encontrar a $\frac{\partial w}{\partial t}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$ en los siguientes casos:

    a) $w = xy^2z^3$ con $x = t^2$, $y = s$ y $z = t$.

    b) $w = x^2 + y^2 + z^2$ con $x = \sqrt{t+s}$, $y = e^{ts}$ y $z = s^3$.

8. Encuentre $y'(x)$ y $y''(x)$ de manera implícita:

    a) $x^2y = 1$

    b) $x - y + 3xy = 2$

    c) $y^5 - x^6 = 0$

9. Muestre que la ecuación $3x^2 - 3xy^2 + y^3 + 3y^2 = 4$ define implícitamente a y en función de x. Calcule $y'(x)$ utilizando el Teorema de la Función Implícita.

10. Sea $u(x,y,z) = \ln\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$. Muestre que:

    a) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3$

    b) $(x+y+z)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 3$

11. Encuentre el grado de homogeneidad de $f(p,r) = Ap^{-1{,}5}r^{2{,}08}$.

12. Demuestre que la función CES, $f(K,L) = A\left(aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$ es homogénea de grado 1.

13. Muestre que si $f(x,y)$ es homogénea de grado 1, entonces para $x, y > 0$ vale que $\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x \partial y}\right]^2 = 0$

14. Encuentre los puntos extremos de las siguientes funciones. Determine si se trata de un máximo o mínimo local:

    a) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102$

    b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 35$

    c) $f(x,y,z) = xy - z^2$

    d) $f(x,y,z) = \left(x^2 - 2xy\right)e^y$

15.
    - Sea una consumidor que consume bienes x e y de acuerdo con sus preferencias, representadas por una función de utilidad $u(x,y) = x + ln(y)$. El individuo cuenta con una restricción presupuestaria $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$; donde p_x es el precio del bien x, p_y es el precio del bien y y M representa el ingreso del individuo. Notar que permitimos que x tome cualquier valor en $\mathbb{R}$. Si $p_x = p_y = 5$ y $M = 100$ ¿Cuánto comprará el individuo con tal de maximizar su utilidad?
    - Repita el ejercicio anterior para valores p_x y p_y genéricos.

16.
    - Sea una consumidor que consume bienes x e y de acuerdo con sus preferencias, representadas por una función de utilidad $u(x,y) = x^2 \cdot y$. El individuo cuenta con una restricción presupuestaria $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$; donde p_x es el precio

del bien x, p_y es el precio del bien y y M representa el ingreso del individuo. Si $p_x = 10, p_y = 5$ y $M = 300$ ¿Cuánto comprará el individuo con tal de maximizar su utilidad?

- ¿Cuánto comprará el individuo con tal de maximizar su utilidad si $p_x = 5, p_y = 5$ y $M = 300$?
- Repita el ejercicio anterior para valores p_x y p_y genéricos.

17.
- Sea un productor que cuenta con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/3}L^{1/3}$. Si la firma quiere producir $y = 36$ unidades, el precio del factor K, r es 1 y el precio del factor L, w, es 0,5, encuentre la combinación de factores K y L que **minimiza la función de costo** $C = wL + rK$ cuando se quiere producir $f(K, L) = 36$.
- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.

18.
- Sea un productor con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/3}L^{1/3}$. Si el precio final del producto es 12, el precio del factor K, r es 1 y el precio del factor L, w, es 0,5 encuentre la combinación de factores K y L que maximiza el beneficio (y el valor máximo de los beneficios obtenidos)

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK$$

- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.
- Note que en este caso los beneficios son mayores que cero. Muestre que $f(K, L)$ es homogénea de grado $k < 1$. Decimos que una tecnología exhibe **rendimientos decrecientes a escala** (DRS) si $f(K, L)$ es HOD k, con $k < 1$.

19.
- Sea un productor con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/2}L^{1/2}$. Si el precio final del producto es p, el precio del factor K, r es 1 y el precio del factor L, w, es 0,5 encuentre la combinación de factores K y L que maximiza el beneficio (y el valor máximo de los beneficios obtenidos)

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK$$

- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.
- Note que en este caso los beneficios son mayores iguales a cero. Muestre que $f(K, L)$ es homogénea de grado $k = 1$. Decimos que una tecnología exhibe **rendimientos constantes a escala** (CRS) si $f(K, L)$ es HOD k, con $k = 1$.

Guía Práctica 4

1. Utilice el método de Lagrange para encontrar los máximos y mínimos de los siguientes problemas:

   a) $\max_{x,y} xy$ s.a. $x + 3y = 24$

   b) $\max_{x,y} 10x^{1/2}y^{1/3}$ s.a. $2x + 4y = m$

   c) $\min_{x,y} x^2 + 3xy + y^2$ s.a. $x + y = 100$

   d) $\max_{x,y} \sqrt{x} + \sqrt{y}$ s.a. $x^2 + y^2 = 100$

   e) $\min_{x,y} 6x + 8y$ s.a. $xy = 20$

2. Utilice el método de Lagrange para resolver el siguiente problema:

$$\min_{Q_1,Q_2} -40Q_1 + Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 20Q_2 + Q_2^2 \text{ s.a. } Q_1 + Q_2 = 15$$

3. Considere el problema $\max_{x,y} U(x, y) = 100 - e^{-x} - e^{-y}$ s.a. $p_x x + p_y y = m$.

   a) Encuentre las condiciones de primer orden del problema. Encuentre la solución al problema en términos de p_x, p_y y m. ¿Qué supuestos debemos realizar para que la solución sea no negativa?

   b) Verifique que x e y son homogéneas de grado 0 respecto a p_x, p_y y m. Eso implica que si tanto los precios como el ingreso del individuo se multiplicaran por t, entonces la elección óptima no cambiaría, porque

      - $x^*(p_x, p_y, m) = x^*(tp_x, tp_y, tm)$
      - $y^*(p_x, p_y, m) = y^*(tp_x, tp_y, tm)$

4. Resuelva los siguientes problemas:

   a) $\max_{x,y} 3xy$ s.a. $x^2 + y^2 = 8$

   b) $\max_{x,y} x + y$ s.a. $x^2 + 3xy + y^2 = 3$

   c) $\max_{x,y} x^2 + y^2 - 2x + 1$ s.a. $x^2 + 4y^2 = 16$

   d) $\min_{x,y} -\ln\left(2 + x^2\right) + y^2$ s.a. $x + 2y = 1$

   e) $\max_{x,y} 24x - x^2 + 16y - 2y^2$ s.a. $x^2 + 2y^2 = 44$