Curso de nivelación: Matemática
Ecuaciones y análisis matemático en una variable

Lara Sánchez Peña

Universidad Torcuato di Tella

10 de enero de 2022

¿Matemática? ¿para qué?

- Si la economía es una ciencia social, ¿para qué necesitamos matemática?
- En palabras de Dani Rodrik, profesor de Harvard:

"*Math essentially plays two roles in economics, neither of which is cause for glory: clarity and consistency.*
First, math ensures that the elements of a model — the assumptions, behavioral mechanisms, and main results — are stated clearly and are transparent. (...)
The second virtue of mathematics is that it ensures the internal consistency of a model — simply put, that the conclusions follow from the assumptions. (...) As I tell my students, economists use math not because they're smart, but because they're not smart enough."

Construyendo modelos

- Usamos matemática en economía para construir modelos económicos.
- Un modelo económico permite simplificar fenómenos complejos, busca aislar y analizar efectos causales específicos.
- Es decir, un modelo es una lente a través de la cual observamos el mundo y analizamos algún fenómeno en particular. Si quisiéramos analizar otros fenómenos y notáramos que otro modelo es más adecuado para analizar esos fenómenos, entonces deberíamos usar otro modelo.
- En realidad, los modelos son útiles *porque* son simplificaciones.
- Un modelo es como un mapa: ambos omiten parte de la realidad. Esta omisión hace que sean útiles para ciertas cosas e inútiles para otras.
- Ejemplo: el mapa del Subte de Buenos Aires. Muy útil si queremos tomarnos el subte, inútil para cualquier otra cosa.
- Los modelos son iguales. Simplificamos la realidad para poder analizar un fenómeno en particular.

Premetro:
Congreso de Tucumán
Juramento
José Hernández
Olleros
Ministro Carranza
Palermo
Plaza Italia
Scalabrini Ortiz
Bulnes
Agüero
Pueyrredón
Facultad de Medicina
Callao
Tribunales Teatro Colón
General San Martín
Retiro
Juan Manuel de Rosas Villa Urquiza
Echeverría
De los Incas Parque Chas
Tronador Villa Ortúzar
F. Lacroze
Dorrego
Malabia O. Pugliese
Ángel Gallardo
Medrano Almagro
Carlos Gardel
Pueyrredón
Pasteur AMIA
Callao
Uruguay
Carlos Pellegrini
Florida
Leandro N. Alem
Lavalle
Diagonal Norte
9 de Julio
Catedral
Plaza de Mayo
Once - 30 de Diciembre
Facultad de Derecho
Las Heras
Santa Fe Carlos Jáuregui
Córdoba
Corrientes
Primera Junta
Acoyte
Río de Janeiro
Castro Barros
Loria
Plaza Miserere
Alberti
Pasco
Congreso
Sáenz Peña
Lima
Piedras
Perú
Av. de Mayo
Bolívar
Moreno
Belgrano
Independencia
Venezuela
Humberto I°
San Juan
Constitución
Puan
Carabobo
San José de Flores
San Pedrito
Emilio Mitre
Medalla Milagrosa
Varela
Plaza de los Virreyes Eva Perón
José María Moreno
Av. La Plata
Boedo
Gral. Urquiza
Jujuy
Pichincha
Entre Ríos Rodolfo Walsh
San José
Inclán Mezquita Al Ahmad
Caseros
Parque Patricios
Hospitales
Int. Saguier
PREMETRO

Borges: Del rigor de la ciencia

En aquel Imperio, el Arte de la Cartografía logró tal Perfección que el mapa de una sola Provincia ocupaba toda una Ciudad, y el mapa del Imperio, toda una Provincia. Con el tiempo, estos Mapas Desmesurados no satisficieron y los Colegios de Cartógrafos levantaron un Mapa del Imperio, que tenía el tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él. Menos Adictas al Estudio de la Cartografía, las Generaciones Siguientes entendieron que ese dilatado Mapa era Inútil y no sin Impiedad lo entregaron a las Inclemencias del Sol y los Inviernos. En los desiertos del Oeste perduran despedazadas Ruinas del Mapa, habitadas por Animales y por Mendigos; en todo el País no hay otra reliquia de las Disciplinas Geográficas.

Ejemplos de reducción de información/ modelización

- En **estadística** se utilizan estimadores que "resumen" información sobre los datos. Por ejemplo: un promedio, el percentil de pobreza, tasa de mortalidad.
- En **economía** armamos modelos para poder obtener info sobre algún fenómeno o poder predecir o poder entender. Por ejemplo: modelos de competencia entre firmas, para identificar si hay colusión. modelos de comercio, modelos de inversión para ver si conviene invertir o no. Para ello, necesitamos **funciones de demanda y oferta**.
- Aprender **matemática** nos provee de las herramientas para poder realizar esa reducción de datos, aparentemente simplificar la complejidad y poder aislar los efectos que nos interesan.
- **Ver programa.**

Funciones: definición

Definición

Una **función** $f : A \to B$ es una regla que a cada elemento de A le asigna algún elemento de B. Es decir, para cada $x \in A$ vale que $f(x) \in B$ es único.

- En otras palabras, para $\begin{array}{ccc} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$, se cumple que:
  1. sin importar cuál sea el valor de x, $f(x)$ toma algún valor,
  2. para cada x, $f(x)$ exactamente un solo valor.
- La variable $x \in A$ es la variable **independiente**, mientras que la variable $y \in B$ es la variable **dependiente**. Esto significa que para cada valor de x se determina el valor de y utilizando la función $f(x)$. O sea, $y = f(x)$.
- Para $f : A \to B$, A es el **dominio** de la función, mientras que B es el **codominio** de la función.

Funciones: operaciones entre funciones

Sean $f : A \to B$, $g : A \to B$, $h : B \to C$ entonces se puede definir:

- **suma** de funciones: $f + g : A \to B$
- **multiplicación** de una función por una constante/ un escalar $k \in \mathbb{R}$: $k \cdot f : A \to B$
- **multiplicación** de funciones: $f \cdot g : A \to B$
- **división** de funciones (si $g(x) \neq 0 \, \forall \, x \in A$): $\dfrac{f}{g} : A \to B$
- **composición** de funciones: $h \circ f : A \to C$

Ejemplos: funciones de una variable - Geogebra

En estas *slides* vamos a considerar casos donde $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes son funciones?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ✓
2. $f : (3,7] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ✓
3. $f : (3,7] \to (9,49],\ f(x) = x^2$ ✓
4. $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty),\ f(x) = x^2$✓
5. $f : [-3,4] \to [0,16],\ f(x) = x^2$ ✓
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{4\},\ f(x) = x^2$ ✗
7. $f : (2,6) \to (4,16),\ f(x) = x^2$ ✗
8. $f : (2,6) \to (1,16),\ f(x) = x^2$ ✗
9. $f : (-3,1) \to (0,5),\ f(x) = \sqrt{x}$ ✗
10. $f : (-3,1) \to (-3,2),\ f(x) = \sqrt{x^2}$ ✗
11. $f : (-3,1) \to (-1,3),\ f(x) = \sqrt{x^2}$ ✓

Definiciones: Función Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva

Definición

Sea $f : A \to B$ una función.

- decimos que f es **inyectiva** si y sólo si para todo $x_0, x_1 \in A$ vale que si $f(x_0) = f(x_1)$, entonces $x_0 = x_1$.
- decimos que f es **sobreyectiva** si y solo si para todo $y \in B$ vale que existe (al menos) un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- decimos que f es **biyectiva** si es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.

¿Cuáles de estas propiedades cumplen las funciones en la *slide* anterior?

Ejemplos: funciones de una variable - Geogebra

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ ✓es una función no inyectiva, no sobreyectiva.
2. $f:(3,7]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ ✓es una función inyectiva, no sobreyectiva.
3. $f:(3,7]\to(9,49],\ f(x)=x^2$ ✓es una función biyectiva.
4. $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty),\ f(x)=x^2$ ✓es una función biyectiva.
5. $f:[-3,4]\to[0,16],\ f(x)=x^2$ ✓es una función no iny., sobre.
6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{4\},\ f(x)=x^2$ ✗
7. $f:(2,6)\to(4,16),\ f(x)=x^2$ ✗
8. $f:(2,6)\to(1,16),\ f(x)=x^2$ ✗
9. $f:(-3,1)\to(0,5),\ f(x)=\sqrt{x}$ ✗
10. $f:(-3,1)\to(-3,2),\ f(x)=\sqrt{x^2}$ ✗
11. $f:(-3,1)\to(-1,3),\ f(x)=\sqrt{x^2}$ ✓es una función no iny., no sobre.

Dominio y Codominio - Geogebra

Encuentre el dominio y codominio de las siguientes funciones de manera que sean sobreyectivas.

1. $f(x) = x^2 - 5$ notar que es una función no iny. sobre su dominio.
2. $g_1(x) = \dfrac{5}{x-3}$
3. $g_2(x) = \dfrac{5x}{x-3}$
4. $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2-1} + 4$ notar que es una función no iny. sobre su dominio.
5. $h(x) = \sqrt{7-x}$
6. $r_1(x) = \log(x)$
7. $r_2(x) = \ln(x)$

Función Inversa

Definición

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Definimos a la función inversa $f^{-1} : B \to A$ como la función que cumple que, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

Notemos entonces que, para que exista la función inversa de f, f^{-1}, para cualquier elemento $y \in B$ tiene que haber un y solamente un valor de $x \in A$ de manera que $f(x) = y$.

¿Cuáles de las funciones en *slides* anteriores tienen inversa para el dominio y codominio encontrado?

Función inversa - Geogebra

Encuentre la función inversa en cada caso si corresponde y grafique. ¿Qué relación hay entre una función y su inversa respecto de la recta $y = x$?

1. $f(x) = x^2 - 5$ ✗ tiene inversa si se limita, por ejemplo, el dominio de f a $D = [0, +\infty)$. $f^{-1}(x) = \sqrt{y+5}$.
2. $g_1(x) = \dfrac{5}{x-3}$ ✓ tiene inversa $g_1^{-1}(x) = 3 + \dfrac{5}{y}$
3. $g_2(x) = \dfrac{5x}{x-3}$ ✓ tiene inversa $g_2^{-1}(x) = \dfrac{3y}{y-5}$
4. $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2-1} + 4$ ✗ tiene inversa si se limita, por ejemplo, el dominio de f a $D = (-3, +\infty)$. $g_3^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1}{y-4} + 1}$.
5. $h(x) = \sqrt{7-x}$ ✓ tiene inversa $h^{-1}(x) = 7 - x^2$
6. $r_1(x) = \log(x)$ ✓ tiene inversa $r_1^{-1}(x) = 10^x$
7. $r_2(x) = \ln(x)$ ✓ tiene inversa $r_2^{-1}(x) = e^x$

Ejemplo de función y función inversa

Un ejemplo muy importante en economía donde usaremos el concepto de función inversa, es la **función de demanda**.

La función de demanda es una función $q = D(p)$, es decir, la **variable independiente** es el precio p y la **variable independiente** es la cantidad q, llamamos a la función D para recordar que se refiere a la función de demanda.

La función de demanda inversa $p = P(q)$ es decir, la **variable independiente** es la cantidad q y la **variable independiente** es el precio p, llamamos a la función P en este caso, pero perfectamente podríamos escribir D^{-1}, aunque no lo hacemos.

- ¿Puede encontrar la función de demanda inversa de $D(p) = 3 - 2p$?
- ¿Puede hacer encontrar la función de demanda si $P(q) = \dfrac{1}{q^2}$?

Ecuaciones en una variable - Geogebra

Notemos que lo que aprendimos sobre funciones y sus propiedades nos ayudarán a resolver ecuaciones, porque podremos tener una idea a priori de cuántas soluciones podemos llegar a esperar de una solución.
Si queremos resolver ecuaciones del estilo $f(x) = a$, es decir, encontrar el valor de x que resuelve la igualdad $f(x) = a$, donde a es un número.
Entonces sabemos que:

- Si f es **biyectiva**, habrá **un solo** valor de x que resuelva la ecuación.
  (a) $3x + 4 = -22$
  (b) $x^3 + 7 = 15$
- Si f es **inyectiva pero no sobreyectiva**, habrá **cero o un valor** que resuelva la ecuación, dependiendo del valor de a. Por ejemplo $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva pero no sobreyectiva.
  (a) $\sqrt{x} = -22$
  (b) $\sqrt{x} = 17$

- Si f es **sobreyectiva pero no inyectiva**, habrá **uno o más valores** que resuelvan la ecuación, dependiendo del valor de a. Por ejemplo $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ es sobreyectiva pero no inyectiva.
  (a) $x^2 = 5$
  (b) $x^2 = 0$
- Si f no es **ni sobreyectiva ni inyectiva no podemos saber a priori cuántas soluciones** tendrá la ecuación. Por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ no es ni sobreyectiva ni inyectiva.
  (a) $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$
  (b) $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 0{,}5$
  (c) $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 0$

De manera similar, si quisiéramos resolver ecuaciones del estilo $f(x) = g(x)$, notamos que es un caso particular del caso anterior porque podemos considerar

$$\underbrace{f(x) - g(x)}_{h(x)} = 0$$

Es decir, llamando $h(x) := f(x) - g(x)$ y eligiendo $a = 0$, estamos en el caso anterior.
No obstante, por una cuestión de practicidad a la hora de presentar gráficos, podemos llegar a preferir graficar por separado $f(x)$ y $g(x)$.

Ecuaciones en una variable

¿Cómo sabemos cuántas soluciones hay en cada caso? Si bien es un poco más complicado decir qué ocurre en cada caso, podemos afirmar que:

Caso particular

Si $f(x)$ es una función **estrictamente creciente**, $g(x)$ es una función **estrictamente decreciente**, y existe un valor de x^* de manera que $f(x^*) = g(x^*)$, entonces es el único valor de x donde $f(x) = g(x)$.

Por ejemplo, cuando queremos encontrar la **cantidad de equilibrio** (cuando la oferta se iguala a la demanda) entre la oferta inversa $P^s(q)$ y la demanda inversa $P^d(q)$, puede ser útil graficar ambas funciones. Encuentre gráfica y analíticamente la(s) cantidad(es) de equilibrio si:

- $P^s(q) = 1 + 3q$
- $P^d(q) = 10 - 2q$

¿Es única la cantidad de equilibrio? ¿Por qué? ¿Puede encontrar el (los) precio(s) de equilibrio?

Para practicar: ecuaciones en una variable

Con las siguientes ecuaciones, grafique el lado izquierdo de la ecuación, luego el lado derecho, diga cuántas soluciones espera encontrar y luego encuéntrelas analíticamente:

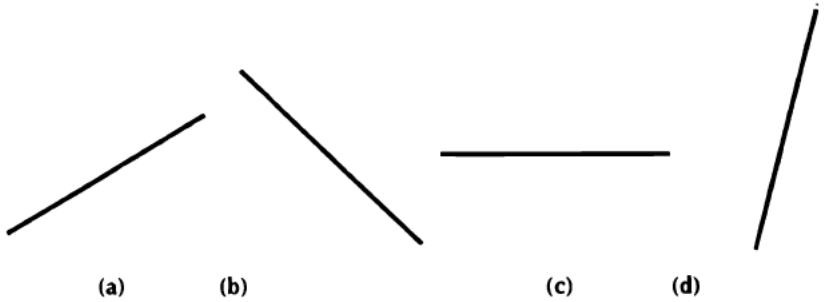
1. $2x - 4 = 3$
2. $(2b - 4)^2 + 3 = 28$
3. $\dfrac{1}{w} + 5 = 11$
4. $r^2 - 5r + 14 = 0$
5. $a^2 + 3 = -5$
6. $(\ell + 1)(\ell + 3) = -2$
7. $d^2 - 12d + 32 = 23 - 6d$
8. $\dfrac{1}{z + 2} + 3 = z$

Funciones Lineales

- Un tipo de funciones que resultan interesantes para los economistas son las funciones lineales, es decir, de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son dos parámetros dados. Denominamos **pendiente** a m y **ordenada al origen** a b.
- Podemos representar gráficamente a una función lineal como una recta no vertical de pendiente m que interseca al eje y en el punto $(0, b)$.
- **¿Qué tipo de recta obtendríamos si $m = 0$?**
- **¿Cómo se puede describir analíticamente una recta vertical?**
- **Relacione las pendientes de una función y su inversa** a partir del siguiente ejercicio: Si $P(q) = 5 - \frac{2}{3}q$, ¿cuál es la pendiende de la función de demanda?

Funciones crecientes y decrecientes: pendiente

Diga si la pendiente es positiva, negativa o cero en cada uno de los casos y si la función que corresponde a cada gráfico es creciente, decreciente o constante.
Nota: Decimos que una función es creciente (decreciente) si la pendiente de la función en un punto es positiva (negativa).



Otra aplicación de funciones lineales: Función de Costo

Sea $C(q) = mq + b$, donde $C(q)$ es el costo de producción de q unidades de un determinado producto. Podemos interpretar a m como el costo *marginal*, es decir, el costo de producir una unidad más; y a b como el costo *fijo* el costo a pagar sin importar lo que elijamos producir.

Escriba la fórmula de la función de costo de producción y grafique si:

- Sin importar cuánto produzca, la firma necesita gastar \$500 y
- el costo por producir una unidad extra (en el margen) es de \$200.

Funciones lineales: interpretación

Asumiendo que cada una de las siguientes funciones es lineal, dé una interpretación económica de la pendiente de la función y diga si la pendiente será positiva o negativa en cada caso.

(a) $I(q)$ es la función que mide los ingresos de una firma por vender q unidades.

(b) $G(x)$ es la función que mide los costos de comprar x unidades de un *commodity*.

(c) $H(p)$ es la cantidad de *commodity* comprada cuando el precio es p.

(d) $C(Y)$ es el consumo nacional cuando el ingreso nacional es Y.

(e) $S(Y)$ es el ahorro nacional cuando el ingreso nacional es Y.

¿Cambiaría su interpretación si las funciones no fuesen lineales?

- Las funciones lineales son un caso particular de una clase de funciones simples, los **polinomios**. Estas son funciones compuestas de uno o más términos conocidos como **monomios**, $a_k x^k$, para un $a_k \in \mathbb{R}$ y un $k \geq 0$. Notar que las rectas son polinomios.
  Ejemplos de polinomios son:
  - $f(x) = -x^7 + 3x^4 - 10x^2$.
  - $f(x) = 10x^4 + x - 5$.
- Otras funciones son, por ejemplo, **racionales**, **exponenciales**, **logarítmicas**, entre otras. Ejemplos de sendas funciones son, respectivamente: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = 5^x$, $h(x) = \ln x$.
- Una pregunta que nos podríamos hacer es, **¿cómo hacemos para encontrar la "pendiente" de estas funciones no lineales?** Tenemos que presentar dos nociones vinculadas para responder esa pregunta: **límite y derivada**.

Límite

Definición

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de $\mathbb{R}$, el límite de una función en $f(x)$ en un punto x_0 $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se define como el valor tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Intuitivamente, el límite de una función en un punto es el valor que toma la función cuando se acerca a dicho punto.
- Calcular los siguientes límites:
  - $\lim_{x \to 2} x^2$
  - $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
  - $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (ver sólo gráficamente)
- Debemos aclarar que el límite puede no existir: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

Existencia del límite. ¿Cuándo existe el límite de una función?

- Para poder responder a esa pregunta, necesitamos saber que una función f en un punto x_0 puede:
  1. ser **continua**
  2. tener una **discontinuidad evitable**
  3. tener una **discontinuidad esencial**
     (a) **de salto**
     (b) **de otro tipo**...
- El límite de una función f si $x \to x_0$ existe si se cumple que:
  1. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existe
  2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existe
  3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Existencia del límite. Continuidad.

- Entonces, para que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, la función f puede
  1. ser continua o
  2. tener una discontinuidad evitable.
- Es decir, que no es necesario saber cuánto vale $f(x_0)$ para determinar el valor del límite.
- En particular, si f es una función continua, sabemos que el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ va a existir y que va a ser igual que $f(x_0)$.
- Decimos que una función es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Gráficamente, una función es continua si su gráfico no tiene "saltos".

Límite: propiedades

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, entonces:

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ siempre que $B \neq 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^r = A^r$, si A^r está definido y $r \in \mathbb{R}$.
- **Cero por acotado:** si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ y $|r(x)| \leq M$ para cualquier $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \cdot r(x) = 0$.
- **Teorema del Sandwich** Si $\lim\limits_{x \to x_0} p(x) = \lim\limits_{x \to x_0} s(x) = L$ y vale que para valores de x cercanos a x_0 se tiene que $p(x) \leq q(x) \leq s(x)$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} q(x) = L$.

Derivada: Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y x_0 un punto de $\mathbb{R}$. se dice que f es *derivable* en x_0 si existe el límite:

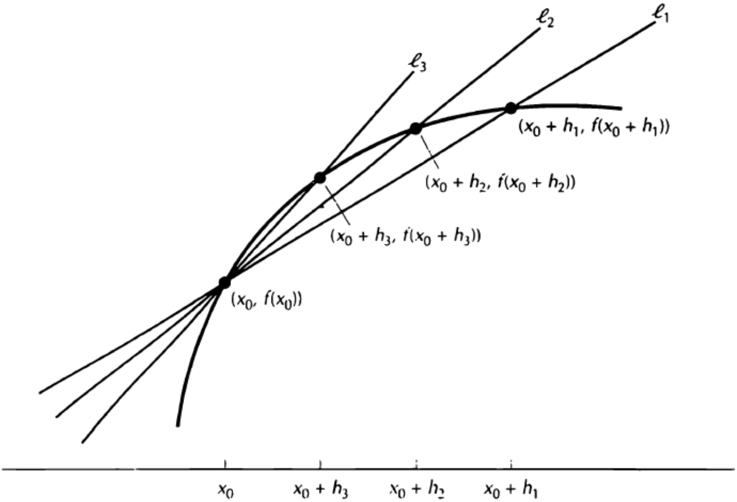
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

También es posible denotar a $f'(x_0)$ como $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

- La **derivada** de una función f en el punto $(x_0, f(x_0))$ **mide la "pendiente"** -también descripta como la **razón de cambio**- de la función f cuando $x = x_0$.
- Gráficamente **es la pendiente de la recta tangente** al gráfico de la función, $(x, f(x))$, que se calcula como el límite de las pendientes de las rectas secantes.
- ¿Qué tipo de funciones son derivables en un punto?

¿Cómo se ve el cálculo de la derivada gráficamente?

Ver Geogebra: pendiente.ggb



Derivada ¿cuándo es una función derivable en x_0?

- Notemos que para poder calcular la derivada de una función f en x_0 necesariamente las pendientes de las rectas secantes tienen que variar continuamente.
- Veamos un ejemplo de una **función no continua** en $x_0 = 3$:
$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 3 \\ x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$
- Cada uno de los siguientes ejemplos es una **función continua** y
  1. **no derivable** en $x_0 = 3$, $g(x) = |x - 3|$.
  2. **no derivable** en $x_0 = 3$: $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 3 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
  3. **derivable** en $x_0 = 3$ $h(x) = (x - 3)^2$.
- ¿Por qué una función es derivable y las otras no? ¿Qué las diferencia?

Podemos concluir que si una función no es continua entonces no es derivable. Si una función es continua, podría o no ser derivable. ¿Qué condición se necesitaría para que fuera derivable?

Teorema

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

- La **recíproca** de este teorema **no es verdadera**. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en x_0.
- Gráficamente, una función es derivable si, además de no tener "saltos", el gráfico tampoco tiene "quiebres".
- Decimos que una función f es diferenciable y notamos $f \in C^1$ si la derivada es una función continua.
- Por ejemplo, $f(x) : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo su dominio $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 3 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ pero no es una función diferenciable.

Derivadas de Orden Mayor

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto.

- Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **continua** (**derivable**) si f es continua (derivable) en todo $x \in D$.
- La derivada segunda de f, f'' se define como la derivada de la función derivada (es decir, $f''(x) = (f')'(x)$). La derivada tercera de f, f''' se define como la derivada de la función derivada segunda, y así sucesivamente.
- Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es C^k si f es continua y además existen f', f'', f''', ..., f^k y son continuas.

- Calcular, por definición, si es que existen, las derivadas en $x_0 = 2$. Luego, grafique las funciones y esquematice en el gráfico dónde se obtiene la derivada de cada función en $x_0 = 2$.
  - $f(x) = 6 - 2x$
  - $g(x) = x^2$
  - $h(x) = \frac{x^3}{3}$
  - $k(x) = \begin{cases} 9 & \text{si } x \leq 3 \\ 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
  - $\ell(x) = \begin{cases} 9 & \text{si } x \leq 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
  - $m(x) = \begin{cases} 6 - x & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Derivadas más comunes - Geogebra

$f(x)$	$f'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$ $(*)$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$

Reglas de Derivación

Sea $k \in \mathbb{R}$, f y g funciones derivables en x_0, entonces:

- La función $f+g$ es derivable en x_0 y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- La función kf es derivable en x_0 y $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$.
- La función $f \cdot g$ es derivable en x_0 y $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.
- **Regla del cociente:** Si $g(x_0) \neq 0$ la función $\frac{f}{g}$ es derivable en x_0 y $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
- La función f^n es derivable en x_0 y $(f^n)'(x_0) = n\,(f(x_0))^{n-1} \cdot f'(x_0)$.
- **Regla de la cadena:** Sea g una función derivable en x_0 y f una función derivable en $g(x_0)$, entonces la función $f \circ g$ es derivable en x_0 y
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$
- Sea $h : B \to A$ la función inversa de f. Entonces $f'(x_0) = \frac{1}{h'(f(x_0))}$.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función, definimos a la **función derivada** de f como la función que asigna a cada x del dominio de f (tal que f es derivable en x) el valor de $f'(x)$.

(a) Calcular la función derivada de $f(x)=x^{5/3}$
(b) Calcular la función derivada de $f(x)=x^7+6x^4-2x^3+5x+10$.
(c) Calcular la función derivada de $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.
(d) Calcular la función derivada de $f(x)=\left(x^2+3x-1\right)\left(x^4-8x\right)$.
(e) Calcular la función derivada de $(3x+2)^2$.
(f) Calcular la función derivada de $(3x+2)^{1001}$.
(g) Calcular la función derivada de $\ln\left(\sqrt{2x^2+3}\right)$
(h) Calcular la función derivada de $\left[\ln\left(\sqrt{2x^2+3}\right)\right]^{-1}$

Función Derivada: soluciones

(a) $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$

(b) $f'(x) = 7x^6 + 24x^3 - 6x^2 + 5$

(c) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

(d) $f'(x) = (2x+3)(x^4 - 8x) + (x^2 + 3x - 1)(4x^3 - 8)$

(e) $f'(x) = 6(3x+2)$

(f) $f'(x) = 3003(3x+2)^{1000}$

(g) $f'(x) = \frac{2x}{2x^2+3}$

(h) $f'(x) = -\left[\ln\left(\sqrt{2x^2+3}\right)\right]^{-2} \cdot \frac{2x}{2x^2+3}$

Límites: Indeterminaciones

- Volvemos brevemente a calcular límites, excepto que, para ciertos casos, el uso de derivadas facilitará enormemente los cálculos de límites...
- Al calcular límites puede ocurrir que intentemos calcular un límite separando en expresiones cuyo límite es más fácil de calcular. No obstante, puede ocurrir que este método da a lugar a indeterminaciones, es decir, que a priori no sabemos cuánto valen, por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\sqrt{x^2 + 3x + 7}}_{\to +\infty} - \underbrace{x}_{\to +\infty}$$

- Como "$+\infty - +\infty$" no es un número, no sabemos a priori si el límite existe y si existe, cuánto vale. Por eso decimos que el límite está **indeterminado**.
- Tendremos que aprender técnicas para calcular estos límites de otra manera, sin separar en términos.

Límites: Indeterminaciones

Antes de aprender formas para calcular límites indeterminados, hagamos una lista de las posibles indeterminaciones. Supongamos $\lim_{x \to a} f_1(x) = 1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = 0$, $\lim_{x \to a} f_3(x) = 0$, $\lim_{x \to a} f_4(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} f_5(x) = \infty$. Son indeterminaciones:

1. $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ (o $0 \cdot \infty$)

$$\lim_{x \to a} \frac{f_2(x)}{f_3(x)}, \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{f_4(x)}}{\frac{1}{f_5(x)}}, \lim_{x \to a} \frac{f_4(x)}{f_5(x)}, \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{f_3(x)}}{\frac{1}{f_2(x)}}, \lim_{x \to a} f_2(x) \cdot f_4(x), \lim_{x \to a} f_2(x) \cdot \frac{1}{f_3(x)}$$

2. $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to a} f_4(x) - f_5(x)$$

3. 1^∞

$$\lim_{x \to a} f_1(x)^{f_5(x)}$$

¿Están los siguientes límites indeterminados? Calcúlelos si es posible.

- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$
- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\cdot x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3x+7} - x$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

Cuando las indeterminaciones son del primer tipo de la slide anterior, contamos con la regla de L'Hôpital que nos permite calcular dichos límites más fácilmente.

Sean f y g dos funciones derivables en x_0, de manera que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ está indeterminado, entonces vale que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital: Ejercicio

Calce los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital

- $\lim_{x\to 0} x\ln(x)$
- $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- $\lim_{y\to 1} \frac{\ln(y)}{y-1}$

Note del último ejercicio que ese límite nos dice que si $y \approx 1$ entonces $\ln(y) \approx y - 1$. Por lo tanto, tomar logaritmos a cocientes servirá para estimar tasas de crecimiento o cambios porcentuales. Ver ejemplo en la siguiente slide.

- Usando que $\lim_{y \to 1} \dfrac{\ln(y)}{y-1}$ aproxime:
  (a) la tasa de crecimiento del PBI de Argentina de 2014 a 2015, $\gamma = \dfrac{594{,}7}{526{,}3} - 1$ si en 2014 el PBI era de 526,3 miles de millones de dólares y en 2015 el PBI era de 594,7 miles de millones de dólares.
  (b) la tasa de crecimiento de la población de EEUU de 2017 a 2018, $\gamma = \dfrac{326,88}{325,14} - 1$ si en 2017 la población era de 325,14 millones y en 2018 la población era de 328,88 millones.
- ¿En cuál de los dos casos la aproximación es más precisa? ¿Por qué?

Derivada implícita: una primera aproximación

- Supongamos que $xy = 5$. Podríamos querer estudiar el efecto de x sobre y. Si bien resulta sencillo expresar a y en función de x y luego derivar, existe otra forma.
- Asumamos que $y = f(x)$. Luego, $xf(x) = 5$.
- Si derivamos a ambos lados, obtenemos:

$$f(x) + f'(x)\,x = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{f(x)}{x}$$

- Esto es muy útil si queremos analizar el signo de una derivada complicada. Hablaremos de esto de manera más formal en las próximas clases.
- Calcule la derivada implícita de x respecto a y cuando $y^3 + 3x^2y = 13$.

Teorema de la Función Implícita

- Una función $y = f(x)$ está dada de **forma implícita** cuando está definida de la forma $F(x, y) = 0$ en lugar de la habitual.
- Dada la ecuación $F(x, y) = 0$ (lo que se conoce como función implícita), bajo ciertas exigencias sobre la derivada de F podríamos, al menos localmente, despejar $y = f(x)$

Teorema de la función implícita

Sea $F(x, y) = 0$, si $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ entonces:

1. se puede despejar localmente $y = f(x)$ y
2. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Aproximación por la Diferencial

- Sea f una función derivable. Una buena aproximación para $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta secante que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ con un incremento Δx pequeño:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

- $\Delta y \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x$.
- Definimos a la diferencial como $dy = f'(x_0)\,\Delta x$.
- Sea $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ una función. Estimar Δy utilizando la diferencial cuando x pasa de 900 a 896.
- Sea $y = \frac{1}{1+x}$ una función. Estimar Δy utilizando la diferencial en un entorno de 0.

- Es evidente que cuanto más grande sea Δx, menos precisa será la aproximación por la diferencial.
- El **polinomio de Taylor** nos sirve para realizar esta aproximación más cercana. Supongamos que tenemos un valor de x_0 arbitrariamente cercano a 1 y queremos saber cómo varía $f(x)$ entre esos dos puntos.
- Análogamente a lo que hicimos en la filmina anterior, podríamos escribir:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + B(x - x_0)^2$$

- Vale que: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que

Definición y propiedades (si f es diferenciable)

- f es (estrictamente) **creciente** si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$.
- f es (estrictamente) **decreciente** si $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $(f(x) > f(y))$.
- f es **creciente** en (a, b) si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b) \subseteq D$.
- f es **decreciente** en (a, b) si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b) \subseteq D$.
- f es una **función (estrictamente) creciente** si $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) > 0)$ para todo $x \in D$.
- f es una **función (estrictamente) decreciente** si $f'(x) \leq 0$ $(f'(x) < 0)$ para todo $x \in D$.

Definiciones y propiedades (si f es diferenciable)

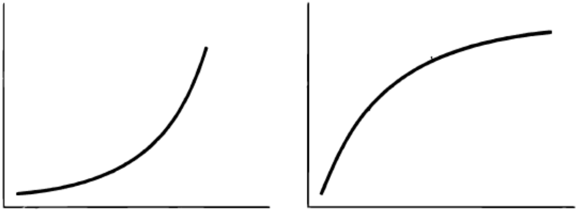
Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **cóncava** si:

- para cualquier par $x_0, x_1 \in D$ y para cualquier $\alpha \in (0,1)$ vale que $\alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_1) \leq f(\alpha x_0 + (1-\alpha) x_1)$.
- dado $x_0 \in D$ y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ vale que $f(x_0) \leq f'(a)(x_0 - a) + f(a)$.
- para todo $x_0 \in D$ vale que $f''(x) \leq 0$.

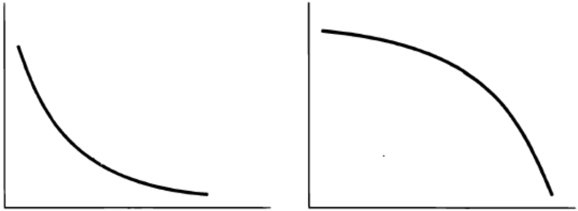
Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **convexa** si:

- para cualquier par $x_0, x_1 \in D$ y para cualquier $\alpha \in (0,1)$ vale que $\alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_1) \geq f(\alpha x_0 + (1-\alpha) x_1)$.
- dado $x_0 \in D$ y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ vale que $f(x_0) \geq f'(a)(a - x_0) + f(a)$.
- para todo $x_0 \in D$ vale que $f''(x) \geq 0$.

Convexidad/Concavidad y Crecimiento/Decrecimiento

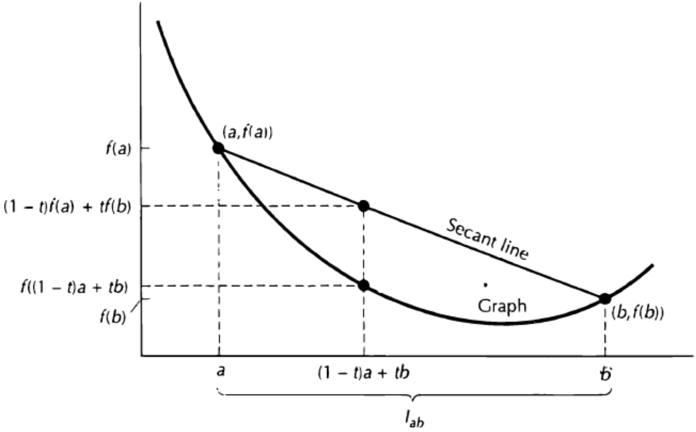


An increasing function can be concave up or concave down.



A decreasing function can be concave up or concave down.

Convexidad vista gráficamente



Geogebra

- Hallar **gráfica y analíticamente** los intervalos de crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad de:
  - $f(x) = x^3 - 3x$
  - $f(x) = x^2 - 4x + 3$

- Si reemplazamos el símbolo $\leq$ ($\geq$) por el de $<$ ($>$), se dice que la función es **estrictamente cóncava** (**estrictamente convexa**).
- De las definiciones anteriores podemos notar que las funciones lineales (también llamadas **afines**) son tanto cóncavas como convexas.

Sean f y g dos funciones cóncavas (convexas) y sea $a > 0$ un número real, entonces:

- $f + g$ es cóncava (convexa).
- $a \cdot f$ es cóncava (convexa).
- Si g es cóncava o afín (convexa o afín), entonces $f \circ g$ es cóncava (convexa).

La noción de convexidad es muy útil a la hora de encontrar valores que maximizan o minimizan una función.

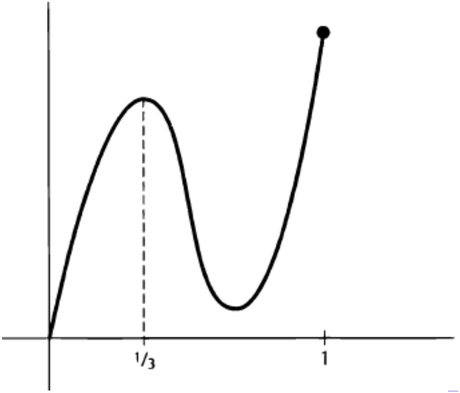
Extremos Locales

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea D su dominio

- Se dice que x_0 es un **máximo local** (**mínimo local**) de f si $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$ para algún $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño.
- Si x_0 es un máximo o mínimo local, se lo denomina **extremo local**.
- Se dice que x_0 es un **máximo global** (**mínimo global**) si $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ para todo $x \in D$.
- En economía buscamos minimizar costos y maximizar beneficios o utilidad, por lo tanto, éste es un concepto muy importante. Ahora, ¿cómo hacemos para encontrar estos extremos?

Extremos locales vs. extremos globales

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. En $x = 1/3$ se tiene un máximo local mientras que en $x = 1$ se tiene un máximo global. Es importante, por lo tanto, a la hora de resolver problemas de maximización o minimización, no olvidarse de las **soluciones de esquina**. ¿Pueden señalar dónde se encuentra el mínimo local y el mínimo global?



Puntos Críticos

Los puntos donde $f'(x_0) = 0$ o donde la derivada no existe se denominan **puntos críticos**.

Teorema

Si un punto x_0 es un extremo local, entonces es un punto crítico.

Notar que la recíproca no necesariamente es cierta. Tomemos como ejemplo la función $f(x) = x^3$. En este caso, $x = 0$ se conoce como **punto de inflexión**.

Criterio de Segundo Orden

Condición de Segundo Orden

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable

- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local de f.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local de f.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$, entonces el criterio no decide.

- Notemos que con esta noción podemos ver que si f es estrictamente convexa, entonces si encontramos un punto crítico éste será un mínimo local, mientras que si es estrictamente cóncava, al encontrar un punto crítico sabremos que encontramos un máximo local.
- Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $f(x) = x^3 - 3x$
  - $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Criterio de Segundo Orden

Teorema

Sea f una función C^2 cuyo dominio es el intervalo (a, b) y f'' nunca se anula, entonces f tiene a lo sumo un punto crítico en (a, b). Además, en el caso que f tenga un punto crítico, si f'' es positiva el punto crítico es un mínimo global, y si f'' es negativa entonces el punto crítico es un máximo global.

Ejemplo: Muestre que la función $f(x) = (x-3)^6 + (x-3)^2 + 7$ tiene un mínimo global en $x = 3$. ¿Cuál es el mínimo valor que toma la función?

Encontrando máximos y mínimos locales y globales.

Pasos para encontrar máximos y mínimos en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

- Para encontrar candidatos a máximos o mínimos locales en (a, b), buscar puntos críticos resolviendo $f'(x) = 0$.
- Para clasificar los puntos críticos, evaluar la segunda derivada y ver qué signo tiene $f''(x)$ en cada uno de los puntos críticos.
- calcular $f(a)$, $f(b)$ y comparar con $f(x)$ evaluado en los puntos críticos para decidir cuál(es) es (son) el (los) máximo(s) o mínimo(s) global(es).

Encontrando máximos y mínimos globales en un compacto.

Un **conjunto compacto** es un conjunto **cerrado y acotado**. Por ejemplo, $[a, b]$ es un conjunto compacto.

Teorema de Weierstraß

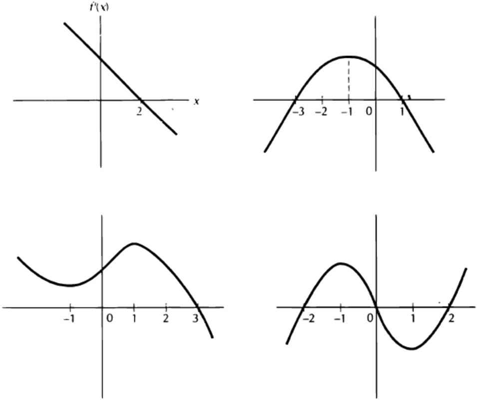
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen valores de x, x_0 y x_1, y números, m y M, de manera que:

- $x_0, x_1 \in [a, b]$
- $m \leq f(x) \leq M$,
- $f(x_0) = m$ y
- $f(x_1) = M$

Ejemplo: Hallar los máximos y mínimos globales de $f(x) = 2x^3 - 45x^2 + 300x + 500$ en el intervalo $[0, 20]$.

Relacionando $f(x), f'(x)$ y $f''(x)$

Suponga que $f(0) = 0$ para cada uno de los siguientes casos. Los gráficos presentados son los de $f'(x)$. Grafique $f(x)$ y $f''(x)$ aproximadamente y relacione a los conceptos de crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad.



Ejercicio 1: Una firma puede producir q alfajores a un costo $C(q) = q^2$. Como la firma, ya que es un pequeño productor, puede vender todos los alfajores que quiera a $p = 80$ pesos cada uno. Nota: los beneficios de la firma son $\pi = p \cdot q - C(q)$.

- ¿Cuál es la cantidad de alfajores que debe producir que maximizan los beneficios?
- Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
- ¿Cuál es el valor máximo de beneficios que pueden obtener el monopolista?

Solución: 40 alfajores. $\pi = 1600$.

Ejercicios aplicados

Ejercicio 2: Pepe puede comprar a alfajores o t turrones para las fiestas. Por comer alfajores y turrones, la “felicidad” (utilidad) de Pepe se puede describir a través de $u(a, t) = a^2 \cdot t$. Pepe puede comprar en total, como máximo, 24 unidades. Es decir, $a + t \leq 24$. Notemos también que $a \geq 0$ y $t \geq 0$.

- Explique por qué si Pepe maximiza su felicidad entonces come exactamente 24 unidades, es decir, $a + t = 24$.
- Escriba el problema solamente en función de la cantidad de alfajores a.
- ¿Cuál es la cantidad de alfajores que quiere consumir de manera que maximiza la utilidad?
- Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
- ¿Cuál es el valor máximo de utilidad que pueden obtener Pepe?

Solución: $a = 16,\ t = 8,\ u = 2048$

Ejercicios aplicados

Ejercicio 3: Pepe puede comprar a alfajores o t turrones para las fiestas. Por comer alfajores y turrones, la "felicidad" (utilidad) de Pepe se puede describir a través de $u(a,t) = a^2 \cdot t$. Sin embargo, en este caso, Pepe no quiere comprar tanta comida. No obstante, suponga que Pepe quiere garantizarse un nivel de utilidad mínima de 864, es decir, $u(a,t) \geq 864$.

- Explique intuitivamente por qué si Pepe quiere minimizar lo que gasta entonces necesariamente $u(a,t) = 864$.
- Escriba el problema solamente en función de la cantidad de alfajores a.
- ¿Cuál es la cantidad de alfajores que quiere consumir de manera que minimiza la cantidad comprada?
- Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
- ¿Cuál es la mínima cantidad comprada por Pepe de manera que pueda obtener al menos un nivel de utilidad de 864?

Solución: 12 alfajores, 8 turrones, se compran en total 20 unidades.

- La **familia de funciones exponenciales**, $f(x) = a^x$, y la **familia de funciones logarítimicas**, $g(x) = \log_b x$, con $a, b > 0$. Llamamos a a y a b **parámetros** que indexan cada familia.
- Si $a = b$, por ejemplo, cuando $a = b = 3$ entonces $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \log_3(x)$ son funciones inversas.
- Es decir, vale en general que $\log_a(a^x) = x$ y que $a^{\log_a(x)} = x$.

Caso particular

En particular, nos interesa el caso donde $a = e \approx 2{,}7183$. En ese caso, $\log_e x = \ln x$. **¿De dónde se obtiene este número?**

- El número e se define a partir de la siguiente expresión:

$$e \equiv \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- En general, para un valor k dado es cierto que:

$$e^k \equiv \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$$

- Además, vale que

(a) $[\ln(u(x))]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

(b) $\left[e^{u(x)}\right]' = e^{u(x)} u'(x)$

Propiedades de exponentes y logaritmos

Sean b, c, r y s dos números reales, entonces las siguientes propiedades son ciertas:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$	$\log_a \left(\frac{1}{c}\right) = -\log_a c$
$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	$\log \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
$(a^r)^s = a^{rs}$	$\log_a (b^c) = c \log_a b$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^1 = a$	$\log_a a = 1$

Aplicaciones: Elasticidad

- Un concepto económico muy útil es la **elasticidad**, que mide el cambio porcentual de una variable y como consecuencia de un cambio porcentual en otra variable x. Si bien ahondaremos más sobre el tema en el curso de Microeconomía, resulta interesante analizar la relación entre la elasticidad y el logaritmo natural.
- Definimos a la **elasticidad de** $y = f(x)$ **respecto a** x como:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x}$$

- Como sabemos que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$, se sigue que para variaciones pequeñas de Δx vale que:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{f'(x)\, x}{f(x)}$$

Aplicaciones: Elasticidad

- Ahora bien, la **elasticidad punto** $\varepsilon_{y,x}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{d \ln y}{d \ln x}$$

- Para verlo, simplemente debemos recordar la definición de diferencial y operar algebraicamente. Esto se debe a que, por regla de la cadena, $d \ln y = (\ln y\,(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)}$.
- Entonces, si aplicamos logaritmos a dos variables relacionadas, podremos estudiar el impacto porcentual de una variable sobre la otra. Esto resulta de gran utilidad a la hora de plantear modelos econométricos.

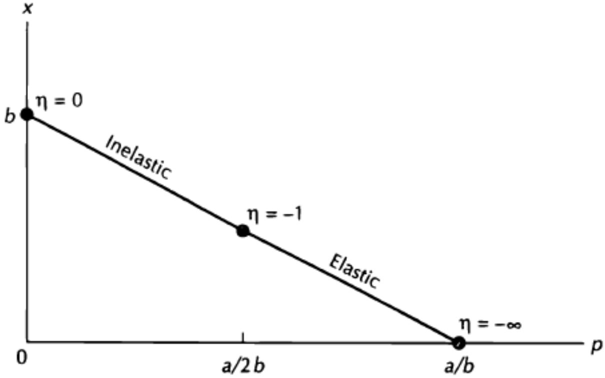
Aplicaciones: Elasticidad

Calcule la elasticidad $\eta_{q,p}$ en un punto $(p, D(p))$ para cada uno de los siguientes casos, con **demandas lineales e isoelásticas**.

- $D(p) = 3 - 2p$ $\eta_{q,p} = \dfrac{1}{1 - \frac{1{,}5}{p}}$
- $D(p) = p^{-2}$ $\eta_{q,p} = -2$
- $D(p) = a - bp$ $\eta_{q,p} = \dfrac{1}{1 - \frac{a}{bp}}$
- $D(p) = p^{-a}$, $a > 0$. $\eta_{q,p} = -a$

Elasticidad de una demanda lineal

En el siguiente gráfico, se puede ver cómo varía la elasticidad precio de la demanda si la demanda es lineal, $D(p) = a - bp$. Es importante notar, que normalmente, en los libros de economía, la variable precio va en el eje y y por lo tanto podría parecer como si este gráfico fuese distinto, pero no lo es. Solamente se intercambian los ejes.



Aplicaciones: Derivada Logarítmica

En los siguientes modelos lineales, calcule cuánto vale la elasticidad de y respecto de x en términos de $\{\alpha_i, \beta_i, x, y\}_{i=0,1,2,3}$.

- $\ln(y_i) = \alpha_0 + \beta_0 \ln(x_i) + u_i$
- $\ln(y_i) = \alpha_1 + \beta_1 x_i + u_i$
- $y_i = \alpha_2 + \beta_2 x_i + u_i$
- $y_i = \alpha_3 + \beta_3 \ln(x_i) + u_i$

Valor presente descontado en tiempo continuo

- Vimos que si se calculase interés compuesto continuamente, con un capital inicial de A con una tasa constante r para un proyecto que tiene longitud esperada t, entonces se espera que al final del proyecto se tiene $B = A \cdot e^{rt}$.
- Análogamente si supiéramos que en t períodos obtendremos B pesos, sabiendo que la tasa de interés es constante e igual a r, llamamos a Be^{-rt} el **valor presente descontado de** B.
- Calcule el valor presente descontado de una proyecto que en $t = 5$ espera rendir $B = 500$, teniendo en cuenta que la tasa de interés r es del 20 %. Si un inversor cuenta con $A = 200$, ¿le alcanza para invertir en este proyecto o debe financiarse con un banco? ¿Cambia su respuesta si $A = 150$?

Integrales

- Cambiando radicalmente de tema, ¿hay alguna forma de recuperar exactamente $f(x)$ a partir de $f'(x)$? **No.**
- ¿hay alguna forma de recuperar exactamente $f(x)$ a partir de $f'(x)$ **y conociendo cuánto vale** $f(x_0)$, para algún valor x_0? **Sí**.
- Definimos integrar como la operación inversa a derivar.
- De hecho, valdrá que $f(x) = \int f'(x)\,dx + C$. Notar que para que $f(x)$ quede definida, es decir, que el valor de C tome un valor particular, tenemos que conocer cuánto vale C en algún valor x_0. Por ejemplo $f_1(x) = 3x^2 - 7$ y $f_2(x) = 3x^2 + 88$ son dos funciones que cumplen que $f'(x) = 6x$. Entonces, para poder determinar a qué función $f(x)$ nos referimos, necesitamos conocer un poco más de información. Por ejemplo, si $f(1) = 91$, es decir que para $x_0 = 1$ vale que $f(x_0) = 91$, entonces sabemos que nos estamos refiriendo a la segunda función.

Propiedades

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones. Entonces vale que:

- $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ para $a \in \mathbb{R}$
- $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- Si $n \neq -1$, entonces $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- si $n \neq 0$, entonces $\int e^{nx} dx = \frac{1}{n} e^{nx} + C$
- $\int a^x \ln(a) dx = a^x + C$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- $\int -\sin(x) dx = \cos(x) + C$
- $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \tan(x) + C$

- La integral definida se escribe de manera análoga a la integral indefinida, pero estableciendo los límites de integración, es decir:
  $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

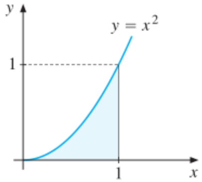
Definición

Decimos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si vale que $F'(x) = f(x)$. Es decir que vale que existe algún número C de manera que $F(x) = \int f(x)dx + C$.

Teorema fundamental del cálculo

Sea F una primitiva de f, entonces $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

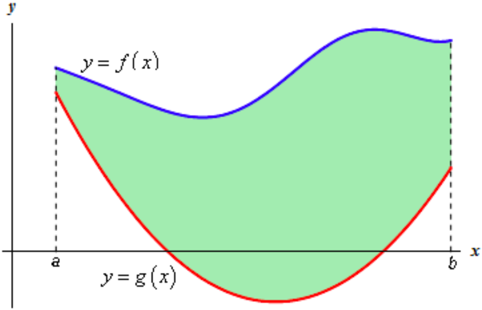
- Las integrales están relacionadas con calcular áreas. ¿Eso quiere decir que una integral mide el área bajo una curva? **No exactamente.** Para ver qué relación existe entre integral y área debajo de una curva, consideremos los siguientes casos:
  (a) $f(x) = 5$ entre $x = 0$ y $x = 3$
  (b) $f(x) = 5x$ entre $x = 0$ y $x = 3$
  (c) $f(x) = 5x$ entre $x = -3$ y $x = 3$
  (d) $f(x) = x^2$. entre $x = 0$ y $x = 1$.



- Por lo tanto, la integral mide el área bajo una curva cuando la función es positiva (el gráfico de la función se encuentra por sobre el eje x).
- Si la función es negativa, la integral mide el área con signo negativo.
- Si la función es positiva y negativa, la integral resulta en el valor neto de las "áreas positivas" y "áreas negativas".

- Ahora bien, ¿cómo se puede calcular el área entre dos curvas?

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Integrales: dos técnicas importantes para su resolución

Integración por partes

Sean f y g dos funciones continuas. Entonces vale que:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Ejemplo: calcule $\int xe^x dx$

Sustitución

Supongamos que g es continua y diferenciable, y que f es continua en todos los puntos u del codominio de g. Luego, vale que:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

con $u = g(x)$.

Ejemplo: calcule $\int 8x^2 \left(3x^3 - 1\right)^{16} dx$

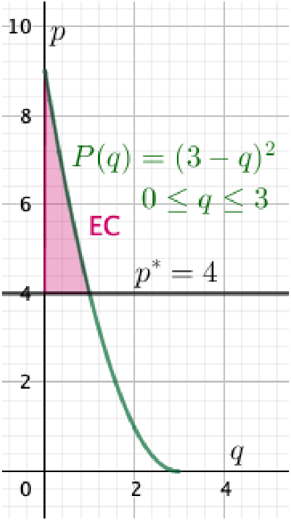
Calcule las siguientes integrales:

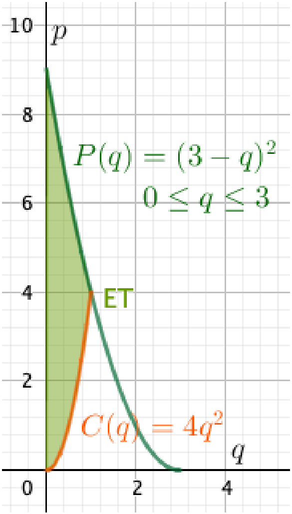
- $\int_0^1 x dx$
- $\int_1^2 \left(2x + x^2\right) dx$
- $\int (x \ln x) dx$
- $\int \left(x^2 + 2\right)^8 2x dx$

Aplicación: EC y ET

- Dos conceptos muy utilizados son el de excedente del consumidor y el de excedente total.
- Definimos EC como el área entre la curva de demanda inversa $P(q)$ y el precio que se paga p^*.
- Definimos ET como el área entre la curva de demanda inversa $P(q)$ y el costo marginal $CMg(q)$.
- Calcule EC y ET para el siguiente caso, en la siguiente *slide*. Para ello debe:
  (a) encontrar el valor de q para el cual se

Ejemplo aplicado: EC y ET





Apéndice: Alfabeto griego

alfa (*alpha*)	α, A	nu	ν, N
beta	β, B	xi	ξ, Ξ
gamma	γ, Γ	omicron	o, O
delta	δ, Δ	pi	π, Π
epsilon	ε, E	rho	ρ, P
zeta	ζ, Z	sigma	σ, Σ
eta	η, H	tau	τ, T
theta	θ, Θ	upsilon	υ, Υ
iota	ι, I	phi	$\phi, \varphi\Phi$
kappa	κ, K	chi	χ, X
lambda	λ, Λ	psi	ψ, Ψ
mu	μ, M	omega	ω, Ω

valor presente descontado en tiempo discreto y de anualidad

En la materia de Evaluación de Proyectos de Inversión van a trabajar con los conceptos de valor presente descontado en tiempo discreto y de anualidad. Si en un proyecto de inversión se espera recibir V_k en cada período k, el valor presente descontado en tiempo discreto cuando la tasa de descuento es $a \in (0,1)$, es:

$$VP = V_0 + a \cdot V_1 + a^2 \cdot V_2 + \cdot + a^k V_k + \cdots$$

Dependiendo de la longitud del proyecto y de los valores que tomen V_k podremos calcular el valor presente descontado del proyecto.
En el caso que $V_k = V$ **para todos los períodos y el proyecto no tiene fin** (es decir, $k \to \infty$), llamamos a ese proyecto una **anualidad**, en ese caso el valor presente:

$$VP = V + a \cdot V + a^2 \cdot V + \cdot + a^k V + \cdots = \frac{V}{1-a}$$

Extra: Sumatorias útiles

Para simplificar, supongamos que $V_k = 1$. En estos cuatro casos, se tiene un proyecto donde se recibe (a) V desde $k = 0$ hasta $k = n$, (b) V desde $k = 1$ hasta $k = n$, (c) V desde $k = m$ hasta $k = n$, (d) V desde $k = 0$ hasta $k = +\infty$

(a) $$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad \text{Si } a \neq 1$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} a^k = a \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = a \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a(1 - a^n)}{1 - a} = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

(c) $$\sum_{k=m}^{n} a^k = a^m \sum_{k=m}^{n} a^{k-m} = a^m \sum_{k=0}^{n-m} a^k = \frac{a^m(1 - a^{n-m+1})}{1 - a} = \frac{a^m - a^{n+1}}{1 - a}$$

(d) $$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1 - a} \quad \text{Si } |a| < 1$$

Extra: Sumatorias útiles

Para simplificar, supongamos que $V_k = 1$. En estos cuatro casos, se tiene un proyecto donde se recibe (a) V desde $k = 1$ hasta $k = \infty$, (b) V desde $k = m$ hasta $k = \infty$, (c) V desde $k = 0$ hasta $k = \infty$ cada r períodos, (d) V desde $k = m$ hasta $k = +\infty$ cada r períodos.

- $$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = a \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} = a \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a}$$
- $$\sum_{k=m}^{\infty} a^k = a^m \sum_{k=m}^{\infty} a^{k-m} = a^m \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{a^m}{1-a}$$
- $$\sum_{k=0}^{\infty} a^{kr} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^r)^k = \frac{1}{1-a^r}$$
- $$\sum_{k=m}^{\infty} a^{kr} = a^{mr} \sum_{k=0}^{\infty} a^{kr} = a^{mr} \sum_{k=0}^{\infty} (a^r)^k = \frac{a^{mr}}{1-a^r}$$

Demostración

Demostramos 3 casos, las demostraciones del resto siguen una intuición similar.

Veamos cuánto vale $\sum_{k=0}^{n} a^k$.

Llamamos:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n$$

Consideramos:

$$(1-a)S_n = S_n - aS_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n$$
$$- (a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1})$$

$$(1-a)S_n = 1 - a^{n+1} \implies \boxed{S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \sum_{k=0}^{n} a^k}$$

Demostración

Veamos cuánto vale $\sum_{k=1}^{n} a^k$.

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = a + a^2 + a^3 + ... + a^n = a(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})$$

$$= a \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a \frac{1 - a^{n+1-1}}{(1 - a)}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}}$$

Demostración

Veamos cuánto vale $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots$$

$$aS = a\sum_{k=0}^{\infty} a^k = a + a^2 + a^3 + \ldots$$

Restando ambas expresiones obtenemos que $(1-a)S = 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1}{1-a}} \quad \text{Si } a \in (-1,1)$$

Notar que estas sumatorias serán útiles para Estrategia, Competencia y Regulación, cuando quieran resolver juegos de repetidos que involucren colusión entre firmas.

Matemática: Álgebra Matricial

Lara Sánchez Peña

Universidad Torcuato di Tella

10 de enero de 2022

¿Por qué pasamos a estudiar álgebra lineal?

- Terminamos de estudiar cálculo en una variable y, antes de pasar a estudiar cálculo en varias variables, necesitamos cubrir algunos temas de álgebra lineal. ¿Por qué?
- Como dice en el libro de Simon y Blume, "Since a primary goal of multivariable calculus is to provide mechanism for approximating complicated nonlinear systems by simpler linear ones, it makes sense to begin by squeezing out of all the information we can about linear systems".
- Para ver ejemplos concretos de sistemas lineales leer el capítulo 10 de Simon & Blume.

Decimos que tenemos un **sistema** de ecuaciones, cuando consideramos tenemos más de una ecuación y al menos una incógnita. Un sistema de $n \times k$ tiene n ecuaciones y k incógnitas.

¿Cómo podemos resolver un sistema lineal?

- por sustitución
- eliminación de Gauss-Jordan
- usando notación matricial
  - Pre-multiplicando por la matriz inversa (si es que se puede).
  - Pre-multiplicando por otra matriz de manera que el producto de ambas matrices tenga inversa (si es que se puede).
  - utilizando el sistema ampliado.

Si bien vamos a enumerar distintos ejemplos, tendremos los siguientes tres ejemplos en mente para resolver usando los tres métodos.

Ejemplo 1: Sistema de 2×2

$$\begin{aligned} 2a - 3b &= 8 \\ -4a + b &= -3 \end{aligned}$$

Sol: $a = 1/10$, $b = -2{,}6$.

Ejemplo 2: Sistema de 3×3

$$\begin{aligned} 3a + b - 2c &= 9 \\ a + b &= -7 \\ 5a + b + 4c &= 11 \end{aligned}$$

Sol: $a = 25/4$, $b = -53/4$ y $c = -7/4$.

Ejemplo 3: Sistema de 3×2

$$\begin{aligned} 2a - 3b =& 8 \\ -4a + b =& -3 \\ 3a - 4b =& 10{,}7 \end{aligned}$$

Sol: $a = 1/10$, $b = -2{,}6$.

¿Existe la solución? ¿Cuántas?

Hay tres tipos de sistemas lineales:

- **incompatible**: Es un sistema en donde hay ecuaciones que llevan a resultados contradictorios y por lo tanto el sistema no tiene solución.
- **determinado compatible**: Es un sistema en donde las ecuaciones son consistentes entre sí y existe una única solución.
- **indeterminado compatible** Es un sistema en donde las ecuaciones son consistentes entre sí y existen infinitas soluciones.

Los tres ejemplos anteriores son casos de sistemas determinados compatibles. Sin embargo, el ejemplo 3 difiere de los dos casos anteriores, ¿por qué?

Link para hacer cálculos con matrices: https://matrixcalc.org/

- En general, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- En este sistema, las x_j son las incógnitas, y las a_{ij} y las b_j son los coeficientes de las ecuaciones, son valores dados.
- ¿Tiene solución este sistema? ¿Es única? ¿Cómo la encontramos?

Sistemas de Ecuaciones Lineales - Matrices

- Una forma útil de resolver un sistema de ecuaciones lineales puede ser reescribirlo con notación matricial. Una **matriz** A $n\mathbb{R}^{n\times k}$ es un ordenamiento rectangular de números. Si una matriz tiene n filas y k columnas, decimos que es una matriz de $n \times k$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

- Un vector columna es una matriz $v \in \mathbb{R}^{k\times 1}$
- Un vector fila es una matriz $w \in \mathbb{R}^{1\times \ell}$

Álgebra Matricial - Suma y Resta

- Para poder sumar dos matrices, deben tener igual tamaño, es decir, igual número de columnas y filas. La suma sea realiza exactamente como uno supondría, es decir, sumando casilla a casilla ambas matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix}$$

- Un **escalar** es un número $r \in \mathbb{R}$. Si multiplicamos a una matriz por un escalar r, ello resulta equivalente a multiplicar cada elemento de dicha matriz por r:

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{k1} & \cdots & ra_{kn} \end{pmatrix}$$

- También podemos multiplicar matrices entre sí. Sin embargo, la forma de hacerlo es un poco más complicada que la suma o resta de matrices. No es posible multiplicar cualquier par de matrices entre sí.
- Sean A y B dos matrices. Entonces la matriz producto, AB, está definida si y solo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Es decir, si A es una matriz de $k \times n$, entonces para que AB esté definida deberá ser cierto que B es una matriz de $n \times m$, donde k, n, m son enteros positivos.
- Si A es $k \times n$ y B es $n \times m$, entonces AB es $k \times m$.

Álgebra Matricial - Producto Matricial

- Cada elemento de la matriz AB se computa multiplicando elemento por elemento la correspondiente fila de A con la correspondiente columna de B. Si, por ejemplo, queremos el elemento (i, j) de AB, multiplicamos la i-ésima fila de A por la j-ésima fila de B, normalmente escribimos $\langle A, B\rangle$ y lo denominamos el producto interno entre A y B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}$$

- Repitiendo esto para cada elemento podemos armar la matriz AB. Notemos que con este procedimiento vemos por qué el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B.

Multiplicación de matrices

Si queremos escribir la multiplicación de dos matrices $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$, tenemos varias formas de hacerlo:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times m}$.

$$A = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ C_1^A & \cdots & C_k^A \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & F_1^A & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & F_n^A & - \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ C_1^B & \cdots & C_m^B \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & F_1^B & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & F_k^B & - \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Notar que para el caso donde $m = n = k = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ y } B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

En ese caso:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a\cdot x_1 + b\cdot x_2 + c\cdot x_3 & a\cdot y_1 + b\cdot y_2 + c\cdot y_3 & a\cdot z_1 + b\cdot z_2 + c\cdot z_3 \\ d\cdot x_1 + e\cdot x_2 + f\cdot x_3 & d\cdot y_1 + e\cdot y_2 + f\cdot y_3 & d\cdot z_1 + e\cdot z_2 + f\cdot z_3 \\ g\cdot x_1 + h\cdot x_2 + i\cdot x_3 & g\cdot y_1 + h\cdot y_2 + i\cdot y_3 & g\cdot z_1 + h\cdot z_2 + i\cdot z_3 \end{pmatrix}$$

Notar que las columnas de $A \cdot B$ son combinaciones lineales de las columnas de B.

En general,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \langle F_1^A,\, C_1^B \rangle & \langle F_1^A,\, C_2^B \rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \langle F_1^A,\, C_m^B \rangle \\ \langle F_2^A,\, C_1^B \rangle & \langle F_2^A,\, C_2^B \rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \langle F_2^A,\, C_m^B \rangle \\ \vdots & \vdots\, C_2^B \rangle & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \langle F_{n-1}^A,\, C_1^B & \langle F_{n-1}^A,\, C_2^B \rangle & \cdots & \ddots & \cdots & \langle F_{n-1}^A,\, C_m^B \rangle \\ \langle F_n^A,\, C_1^B & \langle F_n^A,\, C_2^B \rangle & \cdots & \cdots & \ddots & \langle F_n^A,\, C_m^B \rangle \end{pmatrix}$$

Ejemplo: dadas las matrices A y B, compute las matrices producto:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Álgebra Matricial - Producto Matricial

- Definimos a la matriz **identidad** como la matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la diagonal son 1, siendo el resto de sus elementos 0:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz identidad tiene la propiedad de que, dada una matriz A tal que AI está definido, vale que $AI = A$. De igual modo, si IB está definida para una matriz B, entonces $B = BI$.

Álgebra Matricial - Propiedades

- **Leyes Asociativas**: $(A+B)+C = A+(B+C)$ y $(AB)\,C = A\,(BC)$.
- **Ley Conmutativa para la Suma**: $A+B = B+A$.
- **Leyes Distributivas**: $A\,(B+C) = AB + AC$ y $(A+B)\,C = AC + BC$.
- Una ley que no necesariamente es cierta es que $A \cdot B = B \cdot A$, incluso cuando se puede calcular ambos productos. Chequear que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Traspuesta

- Sea A una matriz de $k \times n$, definimos a la **Matriz Traspuesta** A^T como la matriz de $n \times k$ que surge de permutar las filas y las columnas de A.
- **Ejemplo**: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ entonces $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$
- Calcule las matrices traspuestas de las matrices de la filmina 8.
- Propiedades:
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $\left(A^T\right)^T = A$
  - $(AB)^T = B^T A^T$

Sistemas de Ecuaciones en Forma Matricial

Luego de esta breve introducción al mundo de las matrices, estamos listos para expresar al sistema de ecuaciones de la primera filmina en forma matricial. Recordemos que el sistema en cuestión era:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Estes sistema puede expresarse como la combinación de tres matrices:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

Sistemas de Ecuaciones en Forma Matricial

- El sistema queda reducido a una multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

  O bien, de manera compacta como $Ax = b$.

- Ahora bien, ¿qué ventaja nos da esto? En primer lugar, con esta forma de expresar el sistema podemos aplicar la eliminación de Gauss-Jordan. Además, cuando presentemos un concepto más, vamos a poder resolver el sistema directamente a partir de las matrices.
- Antes de ello, vamos a definir algunas matrices utilizadas con frecuencia en economía.

Matrices Especiales

- Cuando una matriz es de $n \times n$ (es decir, tiene igual número de filas y columnas) decimos que es una matriz **cuadrada**.
- Cuando una matriz posee una única columna (es decir, es de $k \times 1$), decimos que es una matriz **columna**. Cuando posee una única fila ($1 \times n$), decimos que es una matriz **fila**. Ambas matrices también pueden denominarse **vectores**.
- Cuando todos los elementos de una matriz cuadrada son 0 exceptuando los de la diagonal, decimos que la matriz es una matriz **diagonal**.
- Si $A^T = A$, entonces decimos que la matriz es **simétrica**.
- Si $BB = B$, decimos que la matriz es **idempotente**.

Matriz Inversa

- Vamos a pasar a definir a la matriz inversa, un concepto muy importante de álgebra matricial. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$, entonces la matriz cuadrada de $n \times n$ B es la inversa de A si y solo si $AB = BA = I$.
- La matriz inversa de una matriz A suele expresarse como A^{-1}.
- Esta matriz inversa, cuando existe, es muy útil para resolver sistemas lineales de ecuaciones. Recordemos que podíamos expresar un sistema lineal de ecuaciones de manera compacta como $Ax = b$. Si A posee inversa, podemos premultiplicar a ambos lados por A^{-1} para obtener:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I}x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

- Notemos que de este modo podemos obtener la única solución al sistema.

Matriz Inversa - Propiedades

Sean A y B dos matrices cuadradas inversibles, entonces vale que:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$
- AB es inversible, y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^m es inversible para todo $m \in \mathbb{Z}$ y $(A^m)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m} = A^{-m}$
- Para todo $r \neq 0$ vale que rA es inversible y $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$.

Matriz Inversa - Cálculo

- Ahora bien, seguramente nos estamos preguntando, ¿cómo calculamos la inversa de una matriz?
- Para poder hacerlo, debemos definir dos conceptos, la matriz adjunta ($\mathrm{adj}\,(A)$) y el determinante de una matriz ($\det(A)$ o $|A|$).
- Definiremos al determinante de manera inductiva. Comencemos con una matriz A de 1×1. El determinante de esta matriz es simplemente el elemento que la constituye (es decir si a es el único elemento de A, entonces $\det(A) = a$).
- Si A es una matriz de 2×2 de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Matriz Inversa - Cálculo

- Si A es una matriz de 3×3 de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el procedimiento es un poco más complejo.

Definición

Sea $a_{i,j}$ un elemento de una matriz cuadrada A de $n \times n$. Definimos al **cofactor** de $a_{i,j}$, $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, donde $M_{i,j}$ es el determinante de la matriz que surge de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

- Si bien esta definición puede parecer un tanto arcana, aplicarla resulta bastante sencillo. Para verlo, calculemos algunos de los cofactores de:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa - Cálculo

- Para calcular el determinante de la matriz A de 3×3 genérica de la filmina anterior, debemos elegir alguna fila o columna de A (da lo mismo cual). Supongamos que elegimos la fila 1. El determinante es entonces:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

- Esto ya nos señala cómo obtener el determinante de una matriz de $n \times n$: fijamos una fila o columna, y calculamos

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

- Claramente esto es algebráicamente complicado. En la práctica cuando tratamos con matrices de un orden mayor a 3×3 solemos recurrir a una computadora. Para matrices de 3×3 disponemos de algunos trucos adicionales para poder computar el determinante.

Matriz Inversa - Cálculo

Definición

Sea A una matriz cuadrada, la **matriz adjunta**, $\mathrm{adj}\,(A)$ se obtiene reemplazando a cada elemento $a_{i,j}$ por $(-1)^{i-j}\,M_{i,j}$, donde $M_{i,j}$ es el **cofactor** de $a_{i,j}$. El cofactor de $a_{i,j}$ se obtiene computando el determinante de la matriz resultante de ignorar la columna i y la fila j de la matriz A.

- La **matriz adjunta** de A, $\mathrm{adj}\,(A)$, se obtiene reemplazando a cada elemento $a_{i,j}$ de A por su cofactor.
- Finalmente, la matriz inversa de A viene dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det{(A)}}\mathrm{adj}\,(A)^{T}$$

- Notemos que esta expresión solo tiene sentido cuando $\det{(A)} \neq 0$.
- Volviendo a nuestro sistema de ecuaciones, podemos ver que $Ax = b$ tiene solución única si y solo si $\det{(A)} \neq 0$.

Determinantes: Propiedades

Teorema

Sean A y B matrices cuadradas de $n \times n$. Entonces:

- Si todos los elementos de una fila o columna son 0, entonces $\det(A) = 0$
- $\det(A) = \det\left(A^T\right)$
- Si todos los elementos de una fila o columna son multiplicados por α, entonces el determinante es multiplicado por α
- Si permutamos dos filas o columnas del determinante, su valor no cambia, pero su signo se invierte
- Si dos filas o columnas son proporcionales, entonces $\det(A) = 0$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

Eliminación Gaussiana - Sistema Ampliado

- Otro método para resolver un sistema de ecuaciones es la **eliminación gaussiana** o **método de Gauss-Jordan**.
- Veamoso a través de un ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

- Para encontrar la solución, vamos a intentar reescribir el sistema para que cada ecuación incluya a una única incógnita. Escribamos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & -10 \end{array}\right)$$

Eliminación Gaussiana - Sistema Ampliado

- Podemos aplicar las siguientes operaciones al sistema sin que cambie el resultado:
  - Intercambiar una fila por otra.
  - Multiplicar una fila por un escalar.
  - Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.
- Si bien al principio resulta un tanto engorroso, una vez que nos acostumbramos a utilizarlo este método nos permite resolver eficientemente sistemas de más de dos ecuaciones.

Regla de Cramer

Teorema (Regla de Cramer)

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Si $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene una solución única que viene dada por $x_i = \frac{D_i}{\det(A)}$, donde D_i es el determinante de la matriz que resulta de reemplazar la fila correspondiente a x_i por el vector b.

Aplicaciones: MCC

1. Consideremos un modelo de regresión lineal, donde el modelo poblacional es $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ donde $u_i \sim_{iid} (0, \sigma^2)$ y X tiene rango completo, de manera que se cumple que $X^\top u = 0$. Tenemos n observaciones para (x_i, y_i) con $i = 1, \cdots, n$. ¿Cómo podemos encontrar (β_0, β_1)?
2. Sea $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ de rango completo. Se puede probar entonces que $X^\top X \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tiene determinante distinto de cero. Muestre que $X^\top X$:
   - es una matriz simétrica.
   - es una matriz definida positiva, es decir, $v^\top \cdot X^\top X \cdot v > 0$ si v no es el vector nulo.
   - se puede escribir de la siguiente manera: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^\top X_i$, donde X_i, $i = 1, \cdots, n$ son las filas de la matriz X. Esta notación será útil para describir la distribución asintótica de estimadores utilizando la ley de grandes números.
   - cumple que la matriz $I - X(X^\top X)^{-1} X^\top$ es simétrica e idempotente.

Aplicaciones: MCC

3. Matrices definidas positivas. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz definida positiva. Entonces Ω se puede escribir de la siguiente manera: $\Omega = L^{\mathsf{T}}L$ por lo tanto, $X^{\mathsf{T}}\Omega X = \sum_{i=1}^{n}(LX)_i^{\mathsf{T}}(LX)_i$ donde $(LX)_i$, $i = 1, \cdots, n$ son las filas de la matriz LX.
4. Matrices particionadas, por ejemplo, usado al usar el teorema de Frisch-Waugh-Lovell. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ donde $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} & -\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Link: Apunte aquí

Matemática: Cálculo en $\mathbb{R}^n$

Lara Sánchez Peña

Universidad Torcuato di Tella

10 de enero de 2022

Función de dos variables

Definición

Una función de dos variables, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es una regla que asigna un valor de $\mathbb{R}$ para cada par $(x, y) \in D$.

- Tal como antes, D es el dominio de la función (que en este caso está compuesto de dos valores por elemento, uno para x y otro para y), y $\mathbb{R}$ el codominio.
- **Ejemplo**: Una función de dos variables típica en economía es la función **Cobb-Douglas**, $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$, siendo $\alpha, \beta \in (0, 1)$.
- Como en el caso con una variable, podemos escribir a $z = f(x, y)$, en cuyo caso z es la variable dependiente, mientras que x e y son las variables independientes.
- Para facilitar el aprendizaje, en esta presentación trabajaremos con funciones de dos variables. Todos los resultados analizados tienen su extensión natural a funciones de más variables.

Derivadas parciales

- La **derivada parcial** respecto de la variable x de una función $f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ nos indica el efecto de un cambio infinitesimal en x *manteniendo a y constante* (el procedimiento es análogo para y).
- Para encontrar la derivada parcial respecto a x, procedemos igual que como procedíamos con la derivada en funciones de una sola variable, solo que tomamos como constantes a todas las variables que no son x.
- **Ejemplo**: Sea $f(x,y) = x^3 + 2y^2$, entonces $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y$

Definición

Formalmente, la derivada parcial respecto a x viene dada por el siguiente límite:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Derivadas parciales

- Para calcular derivadas parciales de orden superior, simplemente derivamos la derivada respecto a la variable de la cual queremos saber la derivada. Por ejemplo, si queremos calcular la derivada parcial segunda (de segundo orden) respecto a dos veces x:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial x}$$

- Análogamente, podemos calcular:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial y}$$

Gradiente y matriz Hessiana

- Denotamos gradiente de $f(x,y)$ al vector columna de las derivadas parciales.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Denotamos hessiano de $f(x,y)$ a la matriz de las derivadas parciales de segundo orden.

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial yx} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Derivadas parciales

- **Ejemplo**: calcule las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = x^3y^2$.
- Algo peculiar que podemos notar es que en el ejemplo anterior $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$. Esto no es casualidad, y de hecho existe un teorema que establece este resultado cuando se cumplen ciertas condiciones.

Teorema de Schwarz

Sea $f(x, y)$ una función cuyas derivadas parciales segundas son continuas. Entonces vale que $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$.

- Calcule las derivadas parciales de segundo orden de
  - $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + x + y^2$
  - $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
  - $f(x, y) = x^3y - cos(xy)$

Derivadas direccionales

- Cuando tenemos una función con al menos dos variables, se puede calcular, además de las derivadas parciales, **derivadas direccionales**.
- Si $v = (v_1, v_2)$ definimos la derivada de $f(x, y)$ en la dirección v en el punto (a, b) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f((a, b) + h \cdot v) - f(a, b)}{h}$$

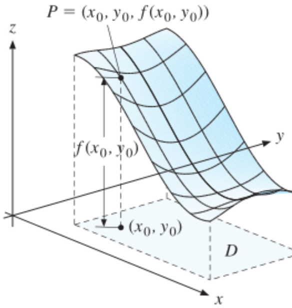
- Si una función tiene derivadas parciales en un punto (a, b) se llama **derivable** en (a, b). Si una función admite un **plano tangente**, una aproximación lineal, entonces se dice que es **diferenciable**. Notar que
  - f diferenciable $\Rightarrow f$ derivable, pero
  - f derivable $\not\Rightarrow f$ diferenciable.
- Si la función es **diferenciable**

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a, b) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (v_1, v_2) \cdot \nabla f(a, b)$$

- Ver apéndice para **límites de funciones** en varias variables.

Representación Gráfica

- Para funciones de dos variables debemos recurrir a una representación en 3 dimensiones.



- Las funciones de 3 o más variables no pueden ser representadas gráficamente.

Representación Gráfica - Gráfico y curvas de nivel

- El gráfico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$G_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel c es el conjunto

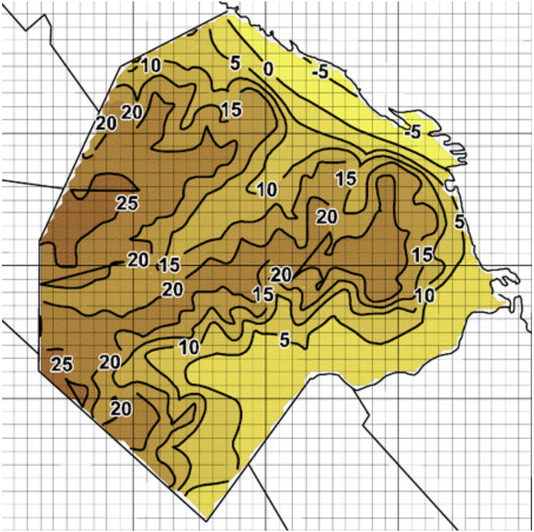
$$f^{-1}(c) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\right\}$$

- Los conjuntos $f^{-1}(c)$ se denominan también curvas de nivel.

Representación Gráfica - curvas de nivel

- Tomemos la función $f(x, y) = xy$. Supongamos que queremos que $f(x, y) = 40$. Claramente existen infinitas combinaciones de x e y tales que $xy = 40$.
- Podríamos graficar, en un gráfico de 2 dimensiones, todas esas combinaciones de x e y. A esa curva la llamamos **curva de nivel**.
- Este concepto es el análogo al utilizado por los cartógrafos cuando realizan una representación topográfica de un área.

Representación Gráfica - curvas de nivel

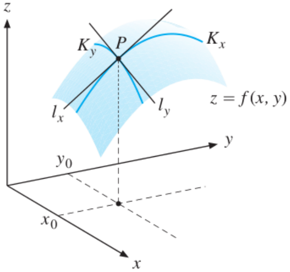


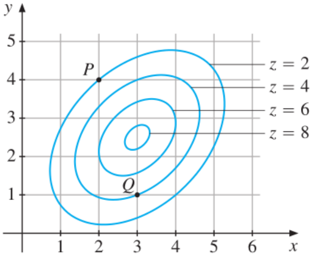
Representación Gráfica - curvas de nivel

- Para poder representar las curvas de nivel de manera gráfica, lo que hacemos es reemplazar a $f(x, y)$ por distintos valores para luego despejar a y en función de x. De ese modo tenemos una curva que puede ser representada en un gráfico de 2 dimensiones.
- Grafique las curvas de nivel de las siguientes funciones **(usar geogebra y sliders con trace on)**:
  - $f(x, y) = x^2 + y^2$
  - $f(x, y) = xy$
  - $f(x, y) = \min\{x, y\} = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$
  - $f(x, y) = x + y$
  - $f(x, y) = x + \ln y$
  - $f(x, y) = x^2 - y^2$
  - $f(x, y) = x^2 \cdot y^2$
  - $f(x, y) = x \cdot y$
  - $f(x, y) = x^2 \cdot y$

Derivadas parciales – Interpretación Gráfica

- Una interpretación geométrica interesante de las derivadas parciales es que nos dan una idea de la “topografía” del gráfico de una función en la vecindad de un punto.





- Esto nos sirve para analizar dos conceptos importantes, el de **vector gradiente** y el de **diferencial total**.

Vector gradiente

- Recordemos que la intuición de la derivada respecto a, por ejemplo x es que representa el cambio en f como resultado de un cambio infinitesimal en x. Un valor mayor de la derivada indica una mayor pendiente.
- Si entendemos a la derivada parcial como la derivada *dejando a la otra variable constante*, podemos utilizar a ambas derivadas parciales para dilucidar la dirección de máximo crecimiento de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|}{\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)|}{\|(x_0, y) - (x_0, y_0)\|}$$

Calcular las derivadas parciales de $f(x, y) = 3x^2y^2 + 4xy^3 + 7y$

Vector gradiente – Dirección de máximo crecimiento

Definición de vector gradiente

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 y sean x e y sus dos variables independientes. Definimos al **vector gradiente** en un punto (x_0, y_0) como la matriz de $n \times 1$ armada con las derivadas parciales de dicha función:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} = Df(x_0, y_0)^{\mathsf{T}}$$

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 y sean x e y sus dos variables independientes. Siempre que $\nabla f(x,y) \neq 0$, la dirección de máximo crecimiento viene dada por $\nabla f(x,y)$.

- Consideremos la función de producción $f(L,K) = L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$. Determinemos la dirección de máximo crecimiento desde $(10000, 625)$.

Productividades marginales

Aplicación económica:

- Para una función de producción f de una variable x sabemos que si $y = f(x)$, dado un incremento Δx se puede estimar el incremento en la variable y por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$.
- Sea $Q = F(K, L)$ una función de producción que depende del capital K y del trabajo L. Consideremos incrementos ΔK y ΔL en el capital y en el trabajo, respectivamente. Entonces el incremento ΔQ en la producción puede estimarse tanto por $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)\,\Delta K$ o por $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)\,\Delta L$
- $\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)$ y $\frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)$ son estimaciones para el incremento en la producción cuando se incrementa en una unidad el capital y el trabajo, respectivamente. $\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)$ se denomina **productividad marginal del capital** mientras que $\frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)$ es denominada **productividad marginal del trabajo**.

Diferencial Total - Aproximación de primer orden

- Del mismo modo que podemos aproximar la variación en una función de una variable, también podemos hacerlo en funciones de más de una variable.
- En esencia, del mismo modo que con una variable aproximábamos el cambio en una función a partir de una **recta tangente**, con dos variables lo hacemos a través de un **plano tangente**.
- Formalmente, podemos aproximar la variación de $f(x_0, y_0)$ a partir de una variación pequeña en x y/o y a partir del **diferencial total**:
  $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$
- Consideremos la función de producción $f(L, K) = L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$. Aproximemos el valor de $\Delta f(L, K)$ cuando L pasa de 10000 a 10010 y K pasa de 625 a 623.

Regla de la Cadena - Dos casos importantes

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces

Teorema (Regla de la Cadena I)

Sean $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones con t como variable, y sea $f(x(t), y(t))$ una función de x e y. Entonces vale que:

$$\frac{df(\cdot)}{dt} = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt}$$

Teorema (Regla de la Cadena II)

Sean $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones con t como variable, y sea $f(x(n,m), y(n,m))$ una función de x e y. Entonces vale que:

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial n} = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}\frac{\partial x(n,m)}{\partial n} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}\frac{\partial y(n,m)}{\partial n}$$

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial m} = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}\frac{\partial x(n,m)}{\partial m} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}\frac{\partial y(n,m)}{\partial m}$$

Regla de la Cadena - caso general

Sea $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en u^* y $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $f(\mathrm{u}^*)$.
Entonces $h = g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es diferenciable en u^* y

$$\frac{\partial h}{\partial u_i}(\mathrm{u}^*) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(f(\mathrm{u}^*)) \frac{\partial x_k}{\partial u_i}(\mathrm{u}^*), \quad i = 1, \dots, m$$

En términos matriciales

$$Dh(\mathrm{u}^*) = D\underbrace{g(f(\mathrm{u}^*))}_{\mathbb{R}^{1\times n}} \cdot \underbrace{Df(\mathrm{u}^*)}_{\mathbb{R}^{n\times m}}$$

Ejemplo 1: Sea $f(u,v) = (u+v, v^2)$ y $g(x,y) = x^2 + y$ hallar la matriz diferencial de $g \circ f$.
Ejemplo 2: Dadas $f(u,v) = (u^2 v, 3u, u+2v)$ y
$g(x,y,z) = (x + yz, z^2 + 2y)$, calcular $D(g\circ f)(1,2)$.

Regla de la Cadena

- Intuitivamente, la regla de la cadena para funciones de varias variables nos dice que el efecto de t sobre f es igual a la suma de los efectos de t sobre las variables de f, "ponderado" por el efecto de dichas variables sobre f.
- Consideremos la función de producción $f(L, K) = L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$. Supongamos que K y L dependen del tiempo a partir de las funciones $K = 100t^2$ y $L = 6t^2 + 25$. Calcular la derivada de f respecto a t cuando $t = 10$.

Diferenciación implícita

- Hasta ahora estudiamos funciones del tipo $y = F(x_1, \ldots, x_n)$.
- Nos interesa estudiar funciones del tipo $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ dadas en forma implícita; es decir, y satisface la ecuación $G(x_1, \ldots, x_n, y) = c$
- En el caso $4x + 3y = 2$ es fácil expresar y en función de $x \circ x$ en función de y.
- ¿Y si la ecuación es $x^2 - 3xy + y^3 - 7 = 0$? No es evidente cómo despejar una variable en función de la otra.

Diferenciación Implícita

- Recordemos que dada una función $f(x,y)$, podemos encontrar la curva de nivel k igualando $f(x,y)=k$.
- Podríamos suponer que esta ecuación define implícitamente a y en función de x, es decir, $y=f(x)$.

Teorema

Sea $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función C^1 en un entorno de (x_0,y_0). Supongamos que $G(x_0,y_0)=c$. Si $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, entonces existe una función C^1 definida por $y=y(x)$ en un intervalo I alrededor de x_0 que satisface:

1. $G(x,y(x))=c$ para todo $x\in I$,
2. $y(x_0)=y_0$
3. $y'(x_0)=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)}$

Teorema de la función implícita

- **Ejercicio 1:** Sea $f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y$. Calcule $y'(x)$ cuando $f(x, y) = 0$, para el punto $(x_0, y_0) = (2, 1)$.
- **Ejercicio 2:** Consideremos la ecuación $x^2z^2 + y^4z^3 = 2$ alrededor del $(1, 1, 1)$. Asumiendo que la función $z = z(x, y)$ es C^1, satisface la ecuación anterior en un disco alrededor de (1,1) , podemos calcular sus dos derivadas parciales.

Teorema de la función inversa

Teorema

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^1 tal que $F(\mathrm{u}^*) = \mathrm{v}^*$. Si $\det DF(u^*) \neq 0$, entonces existe una bola B alrededor de u^* y un conjunto abierto V alrededor de v^* tal que $F : B \to V$ es biyectiva. Además, $F^{-1} : V \to B$ es C^1 y

$$\left(DF^{-1}\right)(\mathrm{v}^*) = \left(DF(\mathrm{u}^*)\right)^{-1}$$

Ejemplo: Probar que el teorema de la función garantiza que $F(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$ es localmente inversible en todos los puntos excepto en $(x,y) = (0,0)$. Sabiendo que $F(0,1) = (-1,0)$, calcular $\left(DF^{-1}\right)(-1,0)$.

Función Homogénea

Definición

Decimos que la función $f(x, y)$ es **homogénea de grado k** si para todo $\lambda > 0$ vale que: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$

- Intuitivamente, una función es homogénea de grado k si existe una relación entre la escala de las variables independientes y la escala de la función.
- Notemos que cuando $k > 1$, un aumento en las variables independientes lleva a un aumento más que proporcional de f, mientras que cuando $k < 1$, un aumento en las variables independientes lleva a un aumento menos que proporcional de f.
- Analice la homogeneidad de $f(x, y) = 3x^2y - y^3$.

Función Homogénea

Teorema

Si una función $f(x, y)$ es homogénea de grado k, entonces sus derivadas parciales son homogéneas de grado $k - 1$

Teorema (Euler)

Si una función $f(x, y)$ es homogénea de grado k, entonces vale que:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot y = k \cdot f(x, y)$$

- Diga si las funciones de la slide 12 son homogéneas y, en caso de serlo, diga cuál es su grado de homogeneidad.
- Cabe destacar que no todas las funciones son necesariamente homogéneas de algún grado. Por ejemplo: función $f(x, y) = x + \ln y$.

Aplicación económica

- Decimos que una **tecnología** es una función que convierte insumos en productos.
- Se dice que una tecnología exhibe **rendimientos constantes a escala** (CRS) si f es homogénea de grado 1.
- Muestre que si una tecnología f utiliza trabajo ℓ y capital k y exhibe **CRS** y la firma es **tomadora de precios**, es decir, no puede elegir el precio al que vende los bienes, p ni el precio que paga por los insumos (salario w por cada unidad de trabajo ℓ y r por cada unidad alquilada de capital) **entonces sus beneficios serán iguales a cero**. Los beneficios se definen como:

$$\pi = pf(k, \ell) - w \cdot \ell - r \cdot k$$

- Idea: mostrar que $\frac{w}{p} = \frac{\partial f}{\partial \ell}$ y que $\frac{r}{p} = \frac{\partial f}{\partial k}$.

Convexidad

- El análisis de la concavidad/convexidad de una función de varias variables resulta un poco más complejo. Para poder hablar al respecto, debemos definir a la matriz Hessiana.

Definición

Sea $f(x, y)$ una función tal que existen sus derivadas segundas. Definimos a la matriz Hessiana $H(x_0, y_0)$ como la matriz construida con las derivadas segundas evaluadas en (x_0, y_0):

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Convexidad

- Dependiendo la naturaleza de la matriz hessiana, la función será convexa o cóncava en (x_0, y_0).
- Sea A una matriz de $n \times n$. Definimos a los menores principales A_k como todas las matrices de $k \times k$ para todo $k \leq n$ que se forman a partir de las primeras k filas y columnas de A. Notar que por construcción, una matriz de $n \times n$ tiene n menores principales.
- con esta definición, estamos listos para hablar de la convexidad de funciones de varias variables.

Convexidad

Teorema

Sea $f(x, y)$ una función dos veces derivable, y sea $H(x_0, y_0)$ la matriz Hessiana evaluada en (x_0, y_0). Entonces vale que:

- Si para **todos los menores principales** de H vale que $\det(H_k) > 0$ entonces la función es **estrictamente convexa** en (x_0, y_0).
- Si para **todos los menores principales** de H vale que $\det(H_k) \geq 0$ entonces la función es **convexa** en (x_0, y_0).
- Si para **todos los menores principales** de H vale que $\det(H_k) < 0$ si k es impar y $\det(H_k) > 0$ si k es par entonces la función es **estrictamente cóncava** en (x_0, y_0).
- Si para **todos los menores principales** de H vale que $\det(H_k) \leq 0$ si k es impar y $\det(H_k) \geq 0$ si k es par entonces la función es **cóncava** en (x_0, y_0).

Convexidad

- Cuando los determinantes de los menores principales son estrictamente positivos decimos que la **matriz hessiana** es **definida positiva**, cuando son mayores o iguales a cero, **semidefinida positiva**, cuando alternan estrictamente de signo, **definida negativa** y cuando alternan de signo permitiéndose las igualdades, **semidefinida negativa**.
- Calcule los conjuntos de convexidad y concavidad de:
  - $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 514$
  - $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$
  - $f(x, y) = \sqrt{x} + e^y$
- Como este procedimiento para hallar la concavidad y convexidad de una función resulta bastante complicado, muchas veces es mejor aplicar las propiedades de concavidad/convexidad que aprendimos en la unidad de cálculo en una variable, las cuales también valen a la hora de analizar la concavidad/convexidad en funciones de más de una variable.

Extremos de funciones

Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función.

- Un punto $u^* \in U$ es **un máximo global** de F si $F(u^*) \geq F(u)$ para todo $u \in U$.
- Un punto $u^* \in U$ es **un mínimo global de** F si $F(u^*) \leq F(u)$ para todo $u \in U$.
- Un punto $u^* \in U$ es **un máximo local de** F si existe una bola $B_{u^*} \subseteq U$ de u^* tal que $F(u^*) \geq F(u)$ para todo $u \in B_{u^*}$
- Un punto $u^* \in U$ **es un mínimo local** de F si existe una bola $B_{u^*} \subseteq U$ de u^* tal que $F(u^*) \leq F(u)$ para todo $u \in B_{u^*}$

- Decimos que un punto (x_0, y_0) es un punto crítico de $f(x, y)$ **si todas sus derivadas parciales son cero**, es decir:

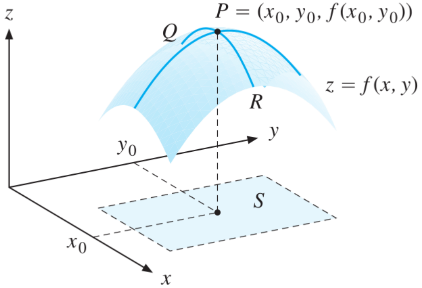
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \text{ y además}$$
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

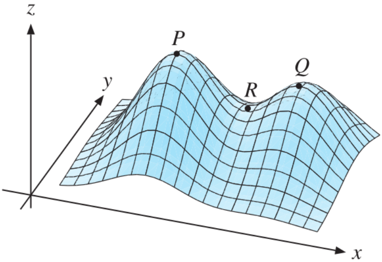
Teorema

Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^1. Si un punto interior x^* es un máximo o mínimo de F, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

- Al igual que en funciones de una variable, la intuición de este resultado resulta inmediata de observar un gráfico.





- Los puntos P y Q son máximos locales, mientras que el punto R es un punto de ensilladura (ni máximo ni minimo).

Derivadas de orden superior

Definimos las derivadas de segundo orden de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_1, \ldots, x_n)$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Se dice que una $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función C^2 si todas sus segundas derivadas son continuas.
La **matriz Hessiana** $Hf(x^*)$ de una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $\mathrm{x}^* \in U$ es la matriz $H\,f\,(x^*)$ cuya entradas se definen por

$$(H_f(x^*))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)$$

Aproximación de segundo orden

- Se puede ver que si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función C^2 y $\mathrm{x}^* \in D$ es un punto interior, entonces

$$f\left(x^* + h\right) \approx f\left(x^*\right) + \nabla f\left(x^*\right) \cdot h + \frac{1}{2} h' \cdot Hf\left(x^*\right) \cdot h$$

- Si x^* es un extremo local de f entonces

$$f\left(x^* + h\right) - f\left(x^*\right) \approx \frac{1}{2} h' \cdot Hf\left(x^*\right) \cdot h$$

- Estudiando $Hf\left(x^*\right)$ podemos saber que tipo de extremo es x^*. Notemos que $Hf\left(x^*\right)$ es una forma cuadrática cuando consideramos $Hf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ h \to h' \cdot Hf(x^*) \cdot h$.

Aproximación de segundo orden

- **Ejercicio 1:** Utilice una aproximación de segundo orden para $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5xy + 7y - 6x - 8$ en $(x_0, y_0) = (1, 2)$
- **Ejercicio 2:** Utilice una aproximación de segundo orden para $f(x,y) = x^2y + y^2 - 5xy - 7y - 3$ en $(x_0, y_0) = (2, 3)$
- **Ejercicio 3:** Utilice una aproximación de segundo orden para $f(x,y) = \ln(x) + y^2$ en $(x_0, y_0) = (1, 2)$

Formas cuadráticas

- Una **forma cuadrática** es una función $Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ que se expresa como $Q(x) = x' \cdot A \cdot x$ con A simétrica.
- Una matriz simétrica A de $k \times k$ es **definida positiva** si $\mathrm{x}' \cdot A \cdot \mathrm{x} > 0$ para todo $\mathrm{x} \neq 0$ en $\mathbb{R}^k$
- Una matriz simétrica A de $k \times k$ es **definida negativa** si $x' \cdot A \cdot x < 0$ para todo $x \neq 0$ en $\mathbb{R}^k$
- Una matriz simétrica A de $k \times k$ es **indefinida** si existen x e y en $\mathbb{R}^k$ tales que $x' \cdot A \cdot x > 0$ y $y' \cdot A \cdot y < 0$.
- La i-ésima **matriz menor principal** de una matriz A de $k \times k$ es el la matriz de $i \times i$ que se obtiene de A borrando las últimas $k - i$ columnas y las últimas $k - i$ filas y la notamos por A_i.

Criterio sobre formas cuadráticas

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y sean $M_1, \ldots, M_n$ los menores principales de M.

1. Si $M_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces A es definida positiva.
2. Si $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, M_4 > 0, \ldots,$ entonces A es definida negativa.
3. Si M_k es negativo para k par o M_k y M_l tienen signos opuestos para $k \neq \ell$ impares, entonces M es indefinida.

Criterio de la derivada segunda

Teorema

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 y $x^* \in U$ un punto interior tal que $\nabla f(x^*) = 0$.

1. Si $(Hf(x^*))_{11} < 0$y det $Hf(x^*) > 0$, entonces x^* es un máximo local.
2. Si $(Hf(x^*))_{11} > 0$ y det $Hf(x^*) > 0$, entonces x^* es un mínimo local.
3. Si det $Hf(x^*) < 0$, entonces x^* es un punto silla.

Ejemplo: Clasificar los extremos locales de la función $f(x, y) = x^3 - y^3 + 9xy$. ¿Son globales?

Optimización - Condiciones de Segundo Orden

Teorema

Sea $f(x, y)$ una función y sea (x_0, y_0) un punto crítico.

- Si f es cóncava en (x_0, y_0) entonces el punto crítico es un máximo local.
- Si f es cónvexa en (x_0, y_0) entonces el punto crítico es un mínimo local.

- Nuevamente vale que si una función es estrictamente cóncava entonces si encontramos un punto crítico este será necesariamente un máximo local, mientras que si es estrictamente convexa, el punto encontrado será necesariamente un mínimo local.

Ejercicio aplicado 1

- Sea una consumidor que consume bienes x e y de acuerdo con sus preferencias, representadas por una función de utilidad $u(x, y) = x \cdot y$. El individuo cuenta con una restricción presupuestaria $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$; donde p_x es el precio del bien x, p_y es el precio del bien y y M representa el ingreso del individuo. Si $p_x = p_y = 5$ y $M = 100$ ¿Cuánto comprará el individuo con tal de maximizar su utilidad?
- Repita el ejercicio anterior para valores p_x y p_y genéricos.

Ejercicio aplicado 2

- Sea un productor que cuenta con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/2}L^{1/4}$. Si la firma quiere producir $y = 36$ unidades, el precio del factor K, r es 1,2 y el precio del factor L, w, es 0,6, encuentre la combinación de factores K y L que mi**nimiza la función de costo** $C = wL + rK$ cuando se quiere producir $f(K, L) = 36$.
- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.

Ejercicio aplicado 3

- Sea un productor con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/2}L^{1/4}$. Si el precio final del producto es 12, el precio del factor K, r es 1,2 y el precio del factor L, w, es 0,6 encuentre la combinación de factores K y L que maximiza el beneficio

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK$$

- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.
- Note que en este caso los beneficios son mayores que cero. Muestre que $f(K, L)$ es homogénea de grado $k < 1$. Decimos que una tecnología exhibe **rendimientos decrecientes a escala** (DRS) si $f(K, L)$ es HOD k, con $k < 1$.

Función de Valor

- Tomemos el problema de la filmina anterior, pero reemplacemos a los precios del producto final y los factores K y L por p, r y w, respectivamente.
- Claramente podemos reemplazar a K^* y a L^*, los valores óptimos, en la función de beneficios, para obtener los beneficios en función de p, r y w.
- Esta función, $\Pi(p, r, w)$ se denomina **Función de Valor**.
- Esta expresión es muy útil cuando queremos analizar los efectos de cambios en los parámetros sobre el valor de la función en equilibrio. En el curso de microeconomía hablaremos más al respecto.

Máximos y mínimos globales

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2

1. Las siguientes condiciones son equivalentes:
    1. f es una función cóncava en D.
    2. $f(y) - f(x) \leq Df(x) \cdot (y - x)$ para todo $x, y \in U$.
    3. $Hf(x)$ es definida negativa para todo $x \in U$.
2. Las siguientes condiciones son equivalentes:
    1. f es una función convexa en D.
    2. $f(\mathrm{y}) - f(\mathrm{x}) \geq Df(\mathrm{x}) \cdot (\mathrm{y} - \mathrm{x})$ para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \boldsymbol{U}$,
    3. $Hf(x)$ es definida positiva para todo $x \in U$.

Apéndice: Límites en dos variables

- Cuando queremos calcular límites de funciones que tienen más de una variable, por ejemplo, $(x, y) \to (a, b)$ cada variable puede acercarse al valor del límite de manera independiente.
- Esto quiere decir que pueden acercarse vía rectas, curvas **parametrizadas**, o de maneras más generales.
- Por eso, probar cuánto vale un límite en más derivadas requiere técnicas más avanzadas que no veremos en este curso.
- Lo que podemos decir, es que si una función es continua, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.
- Podría pasar, por ejemplo, que el límite vía cualquier recta exista y, sin embargo, el límite no exista. Por ejemplo : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^4 + y^2}$.

Matemática: Optimización con Restricciones

Lara Sánchez Peña

Universidad Torcuato di Tella

10 de enero de 2022

Introducción - Geogebra

- En el curso hasta ahora, aprendimos a buscar mínimos y máximos de funciones en una o más variables, incluso para algunos casos sencillos donde se agregan restricciones adicionales.
- La función que queremos maximizar (o minimizar), $f(x, y)$, se llama **función objetivo** y cualquier función adicional que restrinja el problema $g(x, y) = c$ se conoce como **restricción**.
- Ejemplo 1: $\max\limits_{x,y} -x^2 - y^2 + 4$ s.a. $x = 1$
- Ejemplo 2: $\max\limits_{x,y} -x^2 - y^2 + 4$ s.a. $y = x - 1$

Podemos resolver estos problemas de dos maneras:

1. reemplazando la restricción en la función objetivo
2. usando el método de Lagrange.

Método de Lagrange

El método de Lagrange tiene la ventaja de que no siempre se puede despejar una de las variables respecto de las demás para reemplazarla en la función objetivo que queremos maximizar o minimizar.
Por lo tanto, $\min_{x,y} f(x,y)$ s.a. $g(x,y) = c$ se puede resolver usando el método de Lagrange:

$$\min_{x,y,\lambda} \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \min_{x,y,\lambda} f(x,y) + \lambda(g(x,y) - c) \tag{1}$$

Análogamente $\max_{x,y} f(x,y)$ s.a. $g(x,y) = c$, se puede utilizar usando el método de Lagrange:

$$\max_{x,y,\lambda} \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \max_{x,y,\lambda} f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c) \tag{2}$$

Para entender por qué en un caso λ está acompañado por un $+$ o por un $-$, ver el apéndice.

Método de Lagrange

- Resolvamos las condiciones de primer orden del problema (2):

$$\begin{array}{lr} (x) & f'_x(x,y) - \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ (y) & f'_y(x,y) - \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ (\lambda) & g(x,y) - c = 0 \end{array}$$

- Estas tres ecuaciones forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Bajo ciertas condiciones, dados valores de x e y resuelven el problema, el valor de λ deberá ser único.

Método de Lagrange

- Luego, se sigue que para que (x_0, y_0) sea un máximo del problema debe ser cierto que:

$$-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = -\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}$$

- La igualada anterior implica que el valor de la derivada implícita de y respecto de x en el punto (x_0, y_0) debe coincidir las funciones f y g.
- Por lo tanto, ∇f tiene la misma dirección y sentido que ∇g en (x_0, y_0), $\nabla f = \lambda \nabla g$.
- Entonces, aplicar el método de Lagrange es equivalente a buscar el (los) punto(s) (x_0, y_0) de la curva de nivel f tangente a la restricción g.

Método de Lagrange

Teorema (Lagrange)

Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones con derivadas parciales continuas y sea (x_0, y_0) un punto extremo del problema de optimización de f sujeto a $g(x, y) = c$. Si $g'_x(x, y)$ y $g'_y(x, y)$ no son simultáneamente 0, entonces existe un valor de λ tal que (x_0, y_0) sea la solución del Lagrangiano.

Intepretación de λ : En un problema de maximización, como en (2), sabemos que λ satisface que $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$. Intuitivamente, cuanto mayor sea el valor de λ "mayor" es la restricción impuesta por g, es decir, si hubiesemos podido mover la restricción $g(x, y) = c$ un poco en la dirección donde la función crece, el valor máximo que alcanza la función $f(x, y)$ hubiera sido mayor.

Método de Lagrange - Condiciones de Segundo Orden

- ¿Cómo sabemos si un punto (x_0, y_0) obtenido es un máximo o un mínimo? Chequeamos las condiciones de segundo orden para la función $\mathcal{L}$.
- Para saber si nos encontramos en presencia de un máximo o un mínimo simplemente debemos analizar al Hessiano del Lagrangiano $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$, una matriz de 3×3.
- Como este Hessiano está construido en base a una función con una restricción u *orla*, se lo llama Hessiano **orlado** $(\overline{H})$. Específicamente, si (x_0, y_0, λ_0) es uno de los puntos críticos de $\mathcal{L}$, entonces:

$$\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & \mathcal{L}''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & \mathcal{L}''_{x\lambda_0}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \mathcal{L}''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & \mathcal{L}''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & \mathcal{L}''_{y\lambda_0}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \mathcal{L}''_{\lambda_0 x}(x_0, y_0, \lambda_0) & \mathcal{L}''_{\lambda_0 y}(x_0, y_0, \lambda_0) & \mathcal{L}''_{\lambda_0\lambda_0}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{pmatrix}$$

Método de Lagrange - Condiciones de Segundo Orden

- Si los **menores principales** del Hessiano Orlado **son todos positivos**, estaremos en presencia de un **mínimo**.
- Si los **menores principales** se **alternan en signo comenzando por un signo negativo**, entonces estaremos en presencia de un **máximo**.
- En la práctica, en economía, se suelen utilizar funciones cóncavas cuando se resuelven problemas de maximización y funciones convexas cuando se resuelven problemas de minimización. De este modo, no solemos chequear las condiciones de segundo orden (aunque deberíamos).

Método de Lagrange

- ¿Existe alguna forma de garantizar que un lagrangiano tiene solución? Bajo ciertas condiciones, sí.

Teorema (Weierstraß)

Sea $f(x, y)$ una función continua definida sobre un conjunto cerrado y acotado D. Entonces dicha función tiene al menos un máximo y un mínimo en D. Si además dicha función es estrictamente

- cóncava, el máximo es único.
- convexa, el mínimo es único.

- Este resultado implica que en la mayor parte de problemas económicos habrá una solución. Por ejemplo, para el problema de un individuo que elige comprar bienes con tal de maximizar su utilidad $u(x, y)$, como el **conjunto de consumo** es cerrado y acotado, sabremos que habrá una única solución a ese problema si la función $u(x, y)$ es una función estrictamente cóncava.

Ejercicios aplicados

Resuelva usando el método del Lagrangiano:

- $\max_{x,y} u(x,y)$ s.a. $p_x x + p_y y = m$, donde $u(x,y) = xy$.
- $\min_{L,K} wL + rK$ s.a. $f(L,K) = 36$, donde $f(L,K) = K^{0,5}L^{0,25}$.

Karesh-Kuhn-Tucker

Pasemos ahora a resolver problemas de optimización con **restricciones que no sean de igualdad**. Es decir, por ejemplo,

- $\min_{x,y} f(x,y)$ s.a. $g(x,y) \leq c$
- $\max_{x,y} f(x,y)$ s.a. $g(x,y) \leq c$

En este caso, el método de KKT, encuentra los puntos (x_0, y_0) que resuelvan dichos problemas teniendo en cuenta que:

1. la restricción **está operativa** $g(x,y) = c$
2. la restricción **no está operativa** $g(x,y) < c$

Karesh-Kuhn-Tucker

El método KKT utiliza la función $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$, pero agrega una condición extra:

$$\min_{x,y,\lambda} \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \min_{x,y,\lambda} f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c) \tag{3}$$

$$\max_{x,y,\lambda} \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \max_{x,y,\lambda} f\left(x, y\right) - \lambda\left(g\left(x, y\right) - c\right) \tag{4}$$

- Resolvamos las condiciones de primer orden del problema (4):

$$\begin{aligned}
(x) \quad & f'_x\left(x, y\right) - \lambda g'_x\left(x, y\right) = 0 \\
(y) \quad & f'_y\left(x, y\right) - \lambda g'_y\left(x, y\right) = 0 \\
(\lambda) \quad & \lambda \cdot \left(g\left(x, y\right) - c\right) = 0, \lambda \geq 0
\end{aligned}$$

- La tercera condición incorpora que la restricción puede o no ser operativa. Si $\lambda = 0$, la restricción **no es operativa** (hubiera sido equivalente a resolver un problema **sin restricciones**). Si $\lambda > 0$ la restricción es **operativa**, $g(x, y) = c$ (hubiera sido equivalente a usar el método de **Lagrange**).

Existencia de solución y CSO

- Para saber si existe al menos algún punto (x_0, y_0) que resuelva algún problema que se resuelve con KKT, necesitamos **condiciones necesarias**.
- Para garantizar que existe al menos algún punto (x_0, y_0) que resuelva algún problema que se resuelve con KKT, necesitamos **condiciones suficientes**.
- Para saber si la solución es única, es suficiente con pedir que la función objetivo $f(x, y)$ sea **estrictamente convexa para encontrar un mínimo** (estrictamente cóncava para encontrar un máximo)
- Al escribir restricciones, solemos pedir que:
  - si la restricción $g(x, y) \leq c$, $g(x, y)$ sea una función convexa.
  - si la restricción $g(x, y) \geq c$, $g(x, y)$ sea una función cóncava.
- Esto garantiza el conjunto de puntos (x, y) sobre el cual se busca un mínimo (máximo) sea un **conjunto convexo**. Eso quiere decir, que si dos puntos (a, b) y (c, d) están en el dominio del problema, entonces todo el segmento que une a esos puntos también lo estará.

Multiplicador de Lagrange

- Interpretemos nuevamente al multiplicador de Lagrange, λ para este tipo de problemas.
- Escribimos el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda (g(x, y) - c)$$

- Notemos que resulta inmediato que $\mathcal{L}'_c(\cdot) = \lambda$.
- Por el **teorema de la envolvente** vale que, en el óptimo vale que:

$$\frac{\partial f(x^*(c), y^*(c))}{\partial c} = \lambda$$

- Es decir, el multiplicador de Lagrange se puede interpretar como **el efecto de relajar marginalmente la restricción**, el valor máximo que puede tomar $g(x, y)$.

Aplicaciones - Repaso

- Un individuo debe elegir qué cantidad de dos bienes x e y consumir de tal modo de maximizar su "felicidad", bajo la restricción que dice que **el gasto en los bienes x e y no puede superar al ingreso** $p_x x + p_y y \leq m$, donde p_x es el precio del bien x, p_y el precio del bien y y m el ingreso disponible.

$$\max_{x,y} u(x, y) \text{ sujeto a } p_x x + p_y y \leq m$$

- Notar que la restricción presupuestaria es una función lineal en (x, y). Por lo tanto, es una función convexa.
- Una firma debe elegir cuánto trabajo L y cuanto capital K contratar para **producir por lo menos una cantidad** Q de bienes al menor costo posible, teniendo en cuenta que su producción está gobernada por la función $Q = f(L, K)$

$$\min_{L,K} wL + rK \text{ sujeto a } f(L, K) \geq Q$$

- Se suele pedir en economía que la función de producción $f(L, K)$ sea cóncava en (L, K).

Apéndice 1

- ¿Por qué se pone $+\lambda$ o $-\lambda$ en el lagrangiano?
- Si queremos buscar un mínímo (máximo) de $f(x, y)$ restringido a que $g(x, y) = 0$, queremos que f decrezca (crezca) a lo largo de g en la dirección de mínimo (máximo) crecimiento de f.
- Recordemos que $-\nabla f$ $(-\nabla f)$ es la dirección de mínimo (máximo) crecimiento de f. Demostración en la segunda parte del apéndice.
- Por lo tanto, queremos que

$$\begin{cases} (\text{mín}): -\nabla f & = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = \lambda \nabla g \\ (\text{máx}): \nabla f & = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = \lambda \nabla g \end{cases}$$

Apéndice 1

- Es decir que

$$\begin{cases} (\text{mín})\colon \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ (\text{máx})\colon \nabla f - \lambda \nabla g = 0 \end{cases}$$

- Por lo tanto, cuando queremos
  - minimizar una función $f(x, y)$ sujeto a una restricción $g(x, y) = c$

$$\min_{x,y} f + \lambda g$$

  - maximizar una función $f(x, y)$ sujeto a una restricción $g(x, y) = c$

$$\max_{x,y} f - \lambda g$$

Apéndice 2

Dada una función $f(x, y)$ el crecimiento de una función f en una dirección (a, b) se mide a partir de la derivada direccional de f en la dirección (a, b) en un punto (x_0, y_0).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(a, b)}} &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0) \text{ dir. } (a,b)} \frac{F(x, y) - F(x_0, y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0))} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + ah, y_0 + bh) - F(x_0, y_0)}{h\|(a, b)\|} \\
&\underbrace{=}_{\text{Reg. de la cadena}} \frac{1}{\|(a, b)\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b \right)
\end{aligned}$$

donde $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Apéndice 2

Por lo tanto, podemos escribir al crecimiento de f en la dirección (a, b) en el punto (x_0, y_0), $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(a,b)}}(x_0, y_0)$, como:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(a,b)}}(x_0, y_0) = \nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0) \cdot \frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}$$

$$= \left\langle \frac{\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)}{\|\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)\|}, \frac{(a,b)}{\|(a,b)\|} \right\rangle \cdot \|\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)\|$$

Usando que $\left\langle \dfrac{\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)}{\|\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)\|}, \dfrac{(a,b)}{\|(a,b)\|} \right\rangle = cos(\theta)$, donde θ es el angúlo formado entre los vectores $\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)$ y (a, b).

Apéndice 2

Finalmente,

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(a,b)}}(x_0, y_0) = cos(\theta) \cdot \|\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)\|$$

La última expresión se

- maximiza cuando $cos(\theta) = 1$, cuando los vectores $\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)$ y (a, b) forman un ángulo de 0 grados. O sea, si (a, b) tiene la misma dirección y sentido que $\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)$.
- maximiza cuando $cos(\theta) = -1$, cuando los vectores $\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)$ y (a, b) forman un ángulo de 180 grados. O sea, si (a, b) tiene la misma dirección y sentido opuesto a $\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)$. Es decir cuando (a, b) tiene la misma dirección y sentido que $-\nabla^{\mathsf{T}} F(x_0, y_0)$.

Apéndice 3 - Teorema de la envolvente

El teorema de la envolvente dice que si la **función de valor** depende de parámetros de manera directa e indirecta, para los **valores óptimos** que maximizan (minimizan) **la función de valor solamente importan los efectos directos para ver cómo cambia la función de valor**. La demostración de este teorema es usar regla de la cadena.

1. $\max_{K,L} \pi(L,K) = \max_{K,L} pf(L,K) - wL - rK$, donde L, K son variables y p, w, r son parámetros.
2. $\min_{K,L} C(K,L) = \min_{K,L} wL + rK$ s.a. $f(L,K) = y$, donde L, K son variables y w, r son parámetros.

- En el problema 1, encontramos

$$pf(K(p,w,r), L(w,r,p)) - wL(w,r,p) - rK(p,w,r)$$

- Hay que usar la regla de la cadena y las CPO para mostrar que
  - $\frac{\partial \pi^*}{\partial p}(w,r,p) = f(L^*, K^*)$ **(Lema de Hotelling)**
  - $\frac{\partial \pi^*}{\partial w}(w,r,p) = -L^*$
  - $\frac{\partial \pi^*}{\partial r}(w,r,p) = -K^*$
- En el problema 2, encontramos

$$wL(w,r) + rK(w,r)$$

- Hay que usar la regla de la cadena y las CPO para mostrar que
  - $\frac{\partial C(K,L)^*}{\partial w}(w,r) = L^*$ **(Lema de Shephard)**
  - $\frac{\partial C(K,L)^*}{\partial r}(w,r,p) = K^*$ **(Lema de Shephard)**