Curso de nivelación: Matemática
Ecuaciones y análisis matemático en una variable

Lara Sánchez Peña

Universidad Torcuato di Tella

10 de enero de 2022

¿Matemática? ¿para qué?

- Si la economía es una ciencia social, ¿para qué necesitamos matemática?
- En palabras de Dani Rodrik, profesor de Harvard:

"*Math essentially plays two roles in economics, neither of which is cause for glory: clarity and consistency.*
First, math ensures that the elements of a model — the assumptions, behavioral mechanisms, and main results — are stated clearly and are transparent. (...)
The second virtue of mathematics is that it ensures the internal consistency of a model — simply put, that the conclusions follow from the assumptions. (...) As I tell my students, economists use math not because they're smart, but because they're not smart enough."

Construyendo modelos

- Usamos matemática en economía para construir modelos económicos.
- Un modelo económico permite simplificar fenómenos complejos, busca aislar y analizar efectos causales específicos.
- Es decir, un modelo es una lente a través de la cual observamos el mundo y analizamos algún fenómeno en particular. Si quisiéramos analizar otros fenómenos y notáramos que otro modelo es más adecuado para analizar esos fenómenos, entonces deberíamos usar otro modelo.
- En realidad, los modelos son útiles *porque* son simplificaciones.
- Un modelo es como un mapa: ambos omiten parte de la realidad. Esta omisión hace que sean útiles para ciertas cosas e inútiles para otras.
- Ejemplo: el mapa del Subte de Buenos Aires. Muy útil si queremos tomarnos el subte, inútil para cualquier otra cosa.
- Los modelos son iguales. Simplificamos la realidad para poder analizar un fenómeno en particular.


Premetro:
Congreso de Tucumán
Juramento
José Hernández
Olleros
Ministro Carranza
Palermo
Plaza Italia
Scalabrini Ortiz
Bulnes
Agüero
Pueyrredón
Las Heras
Facultad de Derecho
Santa Fe Carlos Jáuregui
Facultad de Medicina
Callao
Tribunales Teatro Colón
General San Martín
Retiro
Lavalle
Florida
Leandro N. Alem
Carlos Pellegrini
Catedral
Plaza de Mayo
Juan Manuel de Rosas Villa Urquiza
Echeverría
De los Incas Parque Chas
Tronador Villa Ortúzar
F. Lacroze
Dorrego
Malabia O. Pugliese
Angel Gallardo
Medrano Almagro
Carlos Gardel
Pueyrredón
Pasteur AMIA
Once - 30 de Diciembre
Callao
Uruguay
9 de Julio
Diagonal Norte
Córdoba
Corrientes
Primera Junta
Acoyte
Río de Janeiro
Castro Barros
Loria
Plaza Miserere
Alberti
Pasco
Congreso
Sáenz Peña
Lima
Av. de Mayo
Piedras
Perú
Bolívar
Moreno
Belgrano
Independencia
Venezuela
Humberto I°
Independencia
San Juan
Constitución
Puan
Carabobo
San José de Flores
San Pedrito
Emilio Mitre
Medalla Milagrosa
Varela
Plaza de los Virreyes Eva Perón
Int. Saguier
PREMETRO
José María Moreno
Av. La Plata
Boedo
Gral. Urquiza
Jujuy
Pichincha
Entre Ríos Rodolfo Walsh
San José
Inclán Mezquita Al Ahmad
Caseros
Parque Patricios
Hospitales
Centro Cívico Lugano
General Savio
Ana Díaz
Nicolás Descalzi
Larrazábal
Pola
Escalada
Cecilia Grierson
Mariano Acosta
Balbastro
Somellera
Ana María Janer
Nstra. Sra. de Fátima
Fernández de la Cruz
Gabino Ezeiza
F.C. BELGRANO SUR Est. Pte. Illia
F.C. SARMIENTO Est. Once
F.C. SARMIENTO Est. Caballito
F.C. SARMIENTO Est. Flores
F.C. ROCA Est. Constitución
F.C. MITRE F.C. BELGRANO F.C. SAN MARTÍN Est. Retiro
F.C. MITRE Est. Gral. Urquiza
F.C. URQUIZA Est. F. Lacroze
F.C. SAN MARTÍN Est. Chacarita
F.C. MITRE Est. Mtro. Carranza
F.C. SAN MARTÍN Est. Palermo
Av. Cabildo
Av. Triunvirato
Av. Corrientes
Av. Córdoba
Av. Rivadavia
Av. Directorio
Av. San Juan
Av. Independencia
Av. Belgrano
Av. Santa Fe
Av. Las Heras
Av. Caseros
Av. Cobo
Autopista 25 de Mayo (AU.1)

Borges: Del rigor de la ciencia

En aquel Imperio, el Arte de la Cartografía logró tal Perfección que el mapa de una sola Provincia ocupaba toda una Ciudad, y el mapa del Imperio, toda una Provincia. Con el tiempo, estos Mapas Desmesurados no satisficieron y los Colegios de Cartógrafos levantaron un Mapa del Imperio, que tenía el tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él. Menos Adictas al Estudio de la Cartografía, las Generaciones Siguientes entendieron que ese dilatado Mapa era Inútil y no sin Impiedad lo entregaron a las Inclemencias del Sol y los Inviernos. En los desiertos del Oeste perduran despedazadas Ruinas del Mapa, habitadas por Animales y por Mendigos; en todo el País no hay otra reliquia de las Disciplinas Geográficas.

Ejemplos de reducción de información/ modelización

- En **estadística** se utilizan estimadores que "resumen" información sobre los datos. Por ejemplo: un promedio, el percentil de pobreza, tasa de mortalidad.
- En **economía** armamos modelos para poder obtener info sobre algún fenómeno o poder predecir o poder entender. Por ejemplo: modelos de competencia entre firmas, para identificar si hay colusión. modelos de comercio, modelos de inversión para ver si conviene invertir o no. Para ello, necesitamos **funciones de demanda y oferta**.
- Aprender **matemática** nos provee de las herramientas para poder realizar esa reducción de datos, aparentemente simplificar la complejidad y poder aislar los efectos que nos interesan.
- **Ver programa.**

Funciones: definición

Definición

Una **función** $f : A \to B$ es una regla que a cada elemento de A le asigna algún elemento de B. Es decir, para cada $x \in A$ vale que $f(x) \in B$ es único.

- En otras palabras, para $\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$, se cumple que:
  1. sin importar cuál sea el valor de x, $f(x)$ toma algún valor,
  2. para cada x, $f(x)$ exactamente un solo valor.
- La variable $x \in A$ es la variable **independiente**, mientras que la variable $y \in B$ es la variable **dependiente**. Esto significa que para cada valor de x se determina el valor de y utilizando la función $f(x)$. O sea, $y = f(x)$.
- Para $f : A \to B$, A es el **dominio** de la función, mientras que B es el **codominio** de la función.

Sean $f : A \to B$, $g : A \to B$, $h : B \to C$ entonces se puede definir:

- **suma** de funciones: $f + g : A \to B$
- **multiplicación** de una función por una constante/ un escalar $k \in \mathbb{R}$: $k \cdot f : A \to B$
- **multiplicación** de funciones: $f \cdot g : A \to B$
- **división** de funciones (si $g(x) \neq 0 \, \forall \, x \in A$): $\dfrac{f}{g} : A \to B$
- **composición** de funciones: $h \circ f : A \to C$

Ejemplos: funciones de una variable - Geogebra

En estas *slides* vamos a considerar casos donde $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes son funciones?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ✓
2. $f : (3,7] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ✓
3. $f : (3,7] \to (9,49],\ f(x) = x^2$ ✓
4. $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty),\ f(x) = x^2$✓
5. $f : [-3,4] \to [0,16],\ f(x) = x^2$ ✓
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{4\},\ f(x) = x^2$ ✗
7. $f : (2,6) \to (4,16),\ f(x) = x^2$ ✗
8. $f : (2,6) \to (1,16),\ f(x) = x^2$ ✗
9. $f : (-3,1) \to (0,5),\ f(x) = \sqrt{x}$ ✗
10. $f : (-3,1) \to (-3,2),\ f(x) = \sqrt{x^2}$ ✗
11. $f : (-3,1) \to (-1,3),\ f(x) = \sqrt{x^2}$ ✓

Definiciones: Función Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva

Definición

Sea $f : A \to B$ una función.

- decimos que f es **inyectiva** si y sólo si para todo $x_0, x_1 \in A$ vale que si $f(x_0) = f(x_1)$, entonces $x_0 = x_1$.
- decimos que f es **sobreyectiva** si y solo si para todo $y \in B$ vale que existe (al menos) un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- decimos que f es **biyectiva** si es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.

¿Cuáles de estas propiedades cumplen las funciones en la *slide* anterior?

Ejemplos: funciones de una variable - Geogebra

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ✓es una función no inyectiva, no sobreyectiva.
2. $f : (3, 7] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ✓es una función inyectiva, no sobreyectiva.
3. $f : (3, 7] \to (9, 49],\ f(x) = x^2$ ✓es una función biyectiva.
4. $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty),\ f(x) = x^2$ ✓es una función biyectiva.
5. $f : [-3, 4] \to [0, 16],\ f(x) = x^2$ ✓es una función no iny., sobre.
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{4\},\ f(x) = x^2$ ✗
7. $f : (2, 6) \to (4, 16),\ f(x) = x^2$ ✗
8. $f : (2, 6) \to (1, 16),\ f(x) = x^2$ ✗
9. $f : (-3, 1) \to (0, 5),\ f(x) = \sqrt{x}$ ✗
10. $f : (-3, 1) \to (-3, 2),\ f(x) = \sqrt{x^2}$ ✗
11. $f : (-3, 1) \to (-1, 3),\ f(x) = \sqrt{x^2}$ ✓es una función no iny., no sobre.

Dominio y Codominio - Geogebra

Encuentre el dominio y codominio de las siguientes funciones de manera que sean sobreyectivas.

1. $f(x) = x^2 - 5$ notar que es una función no iny. sobre su dominio.
2. $g_1(x) = \dfrac{5}{x-3}$
3. $g_2(x) = \dfrac{5x}{x-3}$
4. $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2-1} + 4$ notar que es una función no iny. sobre su dominio.
5. $h(x) = \sqrt{7-x}$
6. $r_1(x) = \log(x)$
7. $r_2(x) = \ln(x)$

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva. Definimos a la función inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ como la función que cumple que, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

Notemos entonces que, para que exista la función inversa de f, f^{-1}, para cualquier elemento $y \in B$ tiene que haber un y solamente un valor de $x \in A$ de manera que $f(x) = y$.

¿Cuáles de las funciones en *slides* anteriores tienen inversa para el dominio y codominio encontrado?

Función inversa - Geogebra

Encuentre la función inversa en cada caso si corresponde y grafique. ¿Qué relación hay entre una función y su inversa respecto de la recta $y = x$?

1. $f(x) = x^2 - 5$ ✗ tiene inversa si se limita, por ejemplo, el dominio de f a $D = [0, +\infty)$. $f^{-1}(x) = \sqrt{y+5}$.
2. $g_1(x) = \dfrac{5}{x-3}$ ✓ tiene inversa $g_1^{-1}(x) = 3 + \dfrac{5}{y}$
3. $g_2(x) = \dfrac{5x}{x-3}$ ✓ tiene inversa $g_2^{-1}(x) = \dfrac{3y}{y-5}$
4. $g_3(x) = \dfrac{1}{x^2-1} + 4$ ✗ tiene inversa si se limita, por ejemplo, el dominio de f a $D = (-3, +\infty)$. $g_3^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1}{y-4} + 1}$.
5. $h(x) = \sqrt{7-x}$ ✓ tiene inversa $h^{-1}(x) = 7 - x^2$
6. $r_1(x) = \log(x)$ ✓ tiene inversa $r_1^{-1}(x) = 10^x$
7. $r_2(x) = \ln(x)$ ✓ tiene inversa $r_2^{-1}(x) = e^x$

Ejemplo de función y función inversa

Un ejemplo muy importante en economía donde usaremos el concepto de función inversa, es la **función de demanda**.

La función de demanda es una función $q = D(p)$, es decir, la **variable independiente** es el precio p y la **variable independiente** es la cantidad q, llamamos a la función D para recordar que se refiere a la función de demanda.

La función de demanda inversa $p = P(q)$ es decir, la **variable independiente** es la cantidad q y la **variable independiente** es el precio p, llamamos a la función P en este caso, pero perfectamente podríamos escribir D^{-1}, aunque no lo hacemos.

- ¿Puede encontrar la función de demanda inversa de $D(p) = 3 - 2p$?
- ¿Puede hacer encontrar la función de demanda si $P(q) = \dfrac{1}{q^2}$?

Ecuaciones en una variable - Geogebra

Notemos que lo que aprendimos sobre funciones y sus propiedades nos ayudarán a resolver ecuaciones, porque podremos tener una idea a priori de cuántas soluciones podemos llegar a esperar de una solución.
Si queremos resolver ecuaciones del estilo $f(x) = a$, es decir, encontrar el valor de x que resuelve la igualdad $f(x) = a$, donde a es un número.
Entonces sabemos que:

- Si f es **biyectiva**, habrá **un solo** valor de x que resuelva la ecuación.
  (a) $3x + 4 = -22$
  (b) $x^3 + 7 = 15$
- Si f es **inyectiva pero no sobreyectiva**, habrá **cero o un valor** que resuelva la ecuación, dependiendo del valor de a. Por ejemplo $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva pero no sobreyectiva.
  (a) $\sqrt{x} = -22$
  (b) $\sqrt{x} = 17$

- Si f es **sobreyectiva pero no inyectiva**, habrá **uno o más valores** que resuelvan la ecuación, dependiendo del valor de a. Por ejemplo $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ es sobreyectiva pero no inyectiva.
  (a) $x^2 = 5$
  (b) $x^2 = 0$
- Si f no es **ni sobreyectiva ni inyectiva no podemos saber a priori cuántas soluciones** tendrá la ecuación. Por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ no es ni sobreyectiva ni inyectiva.
  (a) $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$
  (b) $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 0{,}5$
  (c) $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 0$

De manera similar, si quisiéramos resolver ecuaciones del estilo $f(x) = g(x)$, notamos que es un caso particular del caso anterior porque podemos considerar

$$\underbrace{f(x) - g(x)}_{h(x)} = 0$$

Es decir, llamando $h(x) := f(x) - g(x)$ y eligiendo $a = 0$, estamos en el caso anterior.
No obstante, por una cuestión de practicidad a la hora de presentar gráficos, podemos llegar a preferir graficar por separado $f(x)$ y $g(x)$.

Ecuaciones en una variable

¿Cómo sabemos cuántas soluciones hay en cada caso? Si bien es un poco más complicado decir qué ocurre en cada caso, podemos afirmar que:

Caso particular

Si $f(x)$ es una función **estrictamente creciente**, $g(x)$ es una función **estrictamente decreciente**, y existe un valor de x^* de manera que $f(x^*) = g(x^*)$, entonces es el único valor de x donde $f(x) = g(x)$.

Por ejemplo, cuando queremos encontrar la **cantidad de equilibrio** (cuando la oferta se iguala a la demanda) entre la oferta inversa $P^s(q)$ y la demanda inversa $P^d(q)$, puede ser útil graficar ambas funciones. Encuentre gráfica y analíticamente la(s) cantidad(es) de equilibrio si:

- $P^s(q) = 1 + 3q$
- $P^d(q) = 10 - 2q$

¿Es única la cantidad de equilibrio? ¿Por qué? ¿Puede encontrar el (los) precio(s) de equilibrio?

Para practicar: ecuaciones en una variable

Con las siguientes ecuaciones, grafique el lado izquierdo de la ecuación, luego el lado derecho, diga cuántas soluciones espera encontrar y luego encuéntrelas analíticamente:

1. $2x - 4 = 3$
2. $(2b - 4)^2 + 3 = 28$
3. $\dfrac{1}{w} + 5 = 11$
4. $r^2 - 5r + 14 = 0$
5. $a^2 + 3 = -5$
6. $(\ell + 1)(\ell + 3) = -2$
7. $d^2 - 12d + 32 = 23 - 6d$
8. $\dfrac{1}{z + 2} + 3 = z$

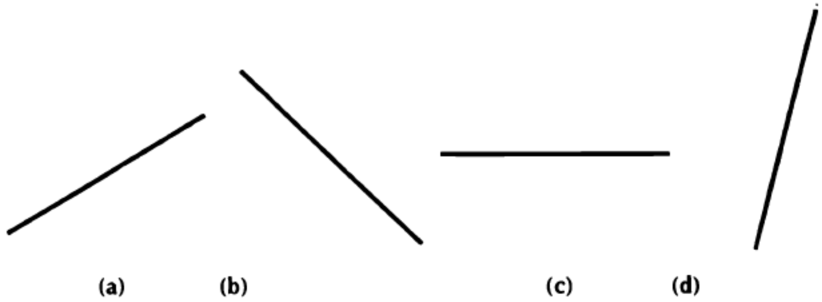
Funciones Lineales

- Un tipo de funciones que resultan interesantes para los economistas son las funciones lineales, es decir, de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son dos parámetros dados. Denominamos **pendiente** a m y **ordenada al origen** a b.
- Podemos representar gráficamente a una función lineal como una recta no vertical de pendiente m que interseca al eje y en el punto $(0, b)$.
- **¿Qué tipo de recta obtendríamos si $m = 0$?**
- **¿Cómo se puede describir analíticamente una recta vertical?**
- **Relacione las pendientes de una función y su inversa** a partir del siguiente ejercicio: Si $P(q) = 5 - \frac{2}{3}q$, ¿cuál es la pendiende de la función de demanda?

Funciones crecientes y decrecientes: pendiente

Diga si la pendiente es positiva, negativa o cero en cada uno de los casos y si la función que corresponde a cada gráfico es creciente, decreciente o constante.

Nota: Decimos que una función es creciente (decreciente) si la pendiente de la función en un punto es positiva (negativa).



Funciones Lineales: Aplicación y ejemplo

Otra aplicación de funciones lineales: Función de Costo

Sea $C(q) = mq + b$, donde $C(q)$ es el costo de producción de q unidades de un determinado producto. Podemos interpretar a m como el costo *marginal*, es decir, el costo de producir una unidad más; y a b como el costo *fijo* el costo a pagar sin importar lo que elijamos producir.

Escriba la fórmula de la función de costo de producción y grafique si:

- Sin importar cuánto produzca, la firma necesita gastar \$500 y
- el costo por producir una unidad extra (en el margen) es de \$200.

Funciones lineales: interpretación

Asumiendo que cada una de las siguientes funciones es lineal, dé una interpretación económica de la pendiente de la función y diga si la pendiente será positiva o negativa en cada caso.

(a) $I(q)$ es la función que mide los ingresos de una firma por vender q unidades.

(b) $G(x)$ es la función que mide los costos de comprar x unidades de un *commodity*.

(c) $H(p)$ es la cantidad de *commodity* comprada cuando el precio es p.

(d) $C(Y)$ es el consumo nacional cuando el ingreso nacional es Y.

(e) $S(Y)$ es el ahorro nacional cuando el ingreso nacional es Y.

¿Cambiaría su interpretación si las funciones no fuesen lineales?

Otros tipos de funciones

- Las funciones lineales son un caso particular de una clase de funciones simples, los **polinomios**. Estas son funciones compuestas de uno o más términos conocidos como **monomios**, $a_k x^k$, para un $a_k \in \mathbb{R}$ y un $k \geq 0$. Notar que las rectas son polinomios.
  Ejemplos de polinomios son:
  - $f(x) = -x^7 + 3x^4 - 10x^2$.
  - $f(x) = 10x^4 + x - 5$.
- Otras funciones son, por ejemplo, **racionales**, **exponenciales**, **logarítmicas**, entre otras. Ejemplos de sendas funciones son, respectivamente: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = 5^x$, $h(x) = \ln x$.
- Una pregunta que nos podríamos hacer es, **¿cómo hacemos para encontrar la "pendiente" de estas funciones no lineales?** Tenemos que presentar dos nociones vinculadas para responder esa pregunta: **límite y derivada**.

Límite

Definición

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de $\mathbb{R}$, el límite de una función en $f(x)$ en un punto x_0 $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se define como el valor tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Intuitivamente, el límite de una función en un punto es el valor que toma la función cuando se acerca a dicho punto.
- Calcular los siguientes límites:
  - $\lim_{x \to 2} x^2$
  - $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
  - $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (ver sólo gráficamente)
- Debemos aclarar que el límite puede no existir: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

Existencia del límite. ¿Cuándo existe el límite de una función?

- Para poder responder a esa pregunta, necesitamos saber que una función f en un punto x_0 puede:
  1. ser **continua**
  2. tener una **discontinuidad evitable**
  3. tener una **discontinuidad esencial**
     (a) **de salto**
     (b) **de otro tipo**...
- El límite de una función f si $x \to x_0$ existe si se cumple que:
  1. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existe
  2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existe
  3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Existencia del límite. Continuidad.

- Entonces, para que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ exista, la función f puede
  1. ser continua o
  2. tener una discontinuidad evitable.
- Es decir, que no es necesario saber cuánto vale $f(x_0)$ para determinar el valor del límite.
- En particular, si f es una función continua, sabemos que el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ va a existir y que va a ser igual que $f(x_0)$.
- Decimos que una función es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Gráficamente, una función es continua si su gráfico no tiene "saltos".

Límite: propiedades

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, entonces:

- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ siempre que $B \neq 0$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^r = A^r$, si A^r está definido y $r \in \mathbb{R}$.
- **Cero por acotado:** si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $|r(x)| \leq M$ para cualquier $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \cdot r(x) = 0$.
- **Teorema del Sandwich** Si $\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = \lim\limits_{x\to x_0} s(x) = L$ y vale que para valores de x cercanos a x_0 se tiene que $p(x) \leq q(x) \leq s(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = L$.

Derivada: Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y x_0 un punto de $\mathbb{R}$. se dice que f es *derivable* en x_0 si existe el límite:

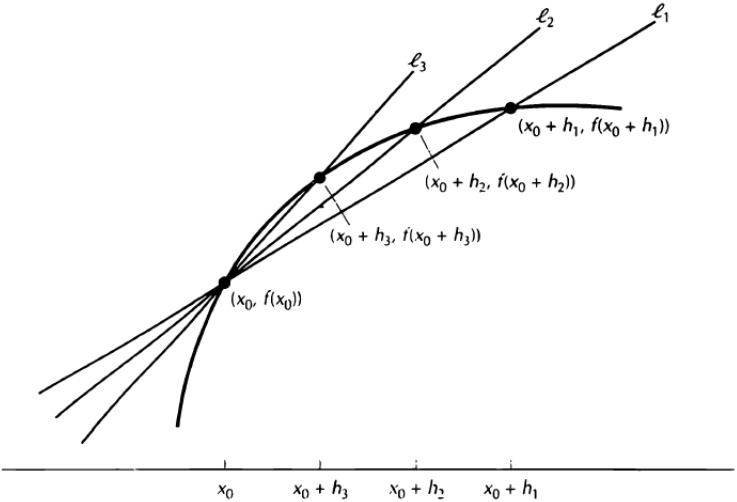
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

También es posible denotar a $f'(x_0)$ como $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

- La **derivada** de una función f en el punto $(x_0, f(x_0))$ **mide la "pendiente"** -también descripta como la **razón de cambio**- de la función f cuando $x = x_0$.
- Gráficamente **es la pendiente de la recta tangente** al gráfico de la función, $(x, f(x))$, que se calcula como el límite de las pendientes de las rectas secantes.
- ¿Qué tipo de funciones son derivables en un punto?

¿Cómo se ve el cálculo de la derivada gráficamente?

Ver Geogebra: pendiente.ggb



Derivada ¿cuándo es una función derivable en x_0?

- Notemos que para poder calcular la derivada de una función f en x_0 necesariamente las pendientes de las rectas secantes tienen que variar continuamente.
- Veamos un ejemplo de una **función no continua** en $x_0 = 3$:
$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 3 \\ x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$
- Cada uno de los siguientes ejemplos es una **función continua** y
  1. **no derivable** en $x_0 = 3$, $g(x) = |x - 3|$.
  2. **no derivable** en $x_0 = 3$: $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 3 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
  3. **derivable** en $x_0 = 3$ $h(x) = (x - 3)^2$.
- ¿Por qué una función es derivable y las otras no? ¿Qué las diferencia?

Continuidad, Derivabilidad y Diferenciabilidad

Podemos concluir que si una función no es continua entonces no es derivable. Si una función es continua, podría o no ser derivable. ¿Qué condición se necesitaría para que fuera derivable?

Teorema

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

- La **recíproca** de este teorema **no es verdadera**. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en x_0.
- Gráficamente, una función es derivable si, además de no tener "saltos", el gráfico tampoco tiene "quiebres".
- Decimos que una función f es diferenciable y notamos $f \in C^1$ si la derivada es una función continua.
- Por ejemplo, $f(x) : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo su dominio $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 3 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ pero no es una función diferenciable.

Derivadas de Orden Mayor

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto.

- Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **continua** (**derivable**) si f es continua (derivable) en todo $x \in D$.
- La derivada segunda de f, f'' se define como la derivada de la función derivada (es decir, $f''(x) = (f')'(x)$). La derivada tercera de f, f''' se define como la derivada de la función derivada segunda, y así sucesivamente.
- Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es C^k si f es continua y además existen f', f'', f''', ..., f^k y son continuas.

Derivada: Ejemplos

- Calcular, por definición, si es que existen, las derivadas en $x_0 = 2$. Luego, grafique las funciones y esquematice en el gráfico dónde se obtiene la derivada de cada función en $x_0 = 2$.
  - $f(x) = 6 - 2x$
  - $g(x) = x^2$
  - $h(x) = \frac{x^3}{3}$
  - $k(x) = \begin{cases} 9 & \text{si } x \leq 3 \\ 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
  - $\ell(x) = \begin{cases} 9 & \text{si } x \leq 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
  - $m(x) = \begin{cases} 6 - x & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Derivadas más comunes - Geogebra

$f(x)$	$f'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$ $(*)$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$

Reglas de Derivación

Sea $k \in \mathbb{R}$, f y g funciones derivables en x_0, entonces:

- La función $f+g$ es derivable en x_0 y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- La función kf es derivable en x_0 y $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$.
- La función $f \cdot g$ es derivable en x_0 y $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.
- **Regla del cociente:** Si $g(x_0) \neq 0$ la función $\frac{f}{g}$ es derivable en x_0 y $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
- La función f^n es derivable en x_0 y $(f^n)'(x_0) = n\,(f(x_0))^{n-1} \cdot f'(x_0)$.
- **Regla de la cadena:** Sea g una función derivable en x_0 y f una función derivable en $g(x_0)$, entonces la función $f \circ g$ es derivable en x_0 y
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$
- Sea $h : B \to A$ la función inversa de f. Entonces $f'(x_0) = \frac{1}{h'(f(x_0))}$.

Función Derivada

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, definimos a la **función derivada** de f como la función que asigna a cada x del dominio de f (tal que f es derivable en x) el valor de $f'(x)$.

(a) Calcular la función derivada de $f(x) = x^{5/3}$

(b) Calcular la función derivada de $f(x) = x^7 + 6x^4 - 2x^3 + 5x + 10$.

(c) Calcular la función derivada de $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

(d) Calcular la función derivada de $f(x) = \left(x^2 + 3x - 1\right)\left(x^4 - 8x\right)$.

(e) Calcular la función derivada de $(3x+2)^2$.

(f) Calcular la función derivada de $(3x+2)^{1001}$.

(g) Calcular la función derivada de $\ln\left(\sqrt{2x^2+3}\right)$

(h) Calcular la función derivada de $\left[\ln\left(\sqrt{2x^2+3}\right)\right]^{-1}$

Función Derivada: soluciones

(a) $f'(x) = \dfrac{5}{3}x^{2/3}$

(b) $f'(x) = 7x^6 + 24x^3 - 6x^2 + 5$

(c) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

(d) $f'(x) = (2x+3)(x^4 - 8x) + (x^2 + 3x - 1)(4x^3 - 8)$

(e) $f'(x) = 6(3x+2)$

(f) $f'(x) = 3003(3x+2)^{1000}$

(g) $f'(x) = \dfrac{2x}{2x^2+3}$

(h) $f'(x) = -\left[\ln\left(\sqrt{2x^2+3}\right)\right]^{-2} \cdot \dfrac{2x}{2x^2+3}$

Límites: Indeterminaciones

- Volvemos brevemente a calcular límites, excepto que, para ciertos casos, el uso de derivadas facilitará enormemente los cálculos de límites...
- Al calcular límites puede ocurrir que intentemos calcular un límite separando en expresiones cuyo límite es más fácil de calcular. No obstante, puede ocurrir que este método da a lugar a indeterminaciones, es decir, que a priori no sabemos cuánto valen, por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+3x+7}}_{\to+\infty} - \underbrace{x}_{\to+\infty}$$

- Como "$+\infty - +\infty$" no es un número, no sabemos a priori si el límite existe y si existe, cuánto vale. Por eso decimos que el límite está **indeterminado**.
- Tendremos que aprender técnicas para calcular estos límites de otra manera, sin separar en términos.

Antes de aprender formas para calcular límites indeterminados, hagamos una lista de las posibles indeterminaciones. Supongamos $\lim_{x\to a} f_1(x) = 1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = 0$, $\lim_{x\to a} f_3(x) = 0$, $\lim_{x\to a} f_4(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} f_5(x) = \infty$. Son indeterminaciones:

1. $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ (o $0 \cdot \infty$)

$$\lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{f_3(x)}, \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f_4(x)}}{\frac{1}{f_5(x)}}, \lim_{x\to a} \frac{f_4(x)}{f_5(x)}, \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f_3(x)}}{\frac{1}{f_2(x)}}, \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot f_4(x), \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot \frac{1}{f_3(x)}$$

2. $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to a} f_4(x) - f_5(x)$$

3. 1^∞

$$\lim_{x\to a} f_1(x)^{f_5(x)}$$

¿Están los siguientes límites indeterminados? Calcúlelos si es posible.

- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$
- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a \cdot x}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3x+7} - x$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

Límites: Regla de L'Hôpital

Cuando las indeterminaciones son del primer tipo de la slide anterior, contamos con la regla de L'Hôpital que nos permite calcular dichos límites más fácilmente.

Sean f y g dos funciones derivables en x_0, de manera que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ está indeterminado, entonces vale que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital: Ejercicio

Calcule los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital

- $\lim_{x\to 0} x\ln(x)$
- $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- $\lim_{y\to 1} \frac{\ln(y)}{y-1}$

Note del último ejercicio que ese límite nos dice que si $y \approx 1$ entonces $\ln(y) \approx y - 1$. Por lo tanto, tomar logaritmos a cocientes servirá para estimar tasas de crecimiento o cambios porcentuales. Ver ejemplo en la siguiente slide.

Regla de L'Hôpital: Ejercicio aplicado

- Usando que $\lim_{y\to 1} \dfrac{\ln(y)}{y-1}$ aproxime:
  (a) la tasa de crecimiento del PBI de Argentina de 2014 a 2015, $\gamma = \dfrac{594{,}7}{526{,}3} - 1$ si en 2014 el PBI era de 526,3 miles de millones de dólares y en 2015 el PBI era de 594,7 miles de millones de dólares.
  (b) la tasa de crecimiento de la población de EEUU de 2017 a 2018, $\gamma = \dfrac{326,88}{325,14} - 1$ si en 2017 la población era de 325,14 millones y en 2018 la población era de 328,88 millones.
- ¿En cuál de los dos casos la aproximación es más precisa? ¿Por qué?

Derivada implícita: una primera aproximación

- Supongamos que $xy = 5$. Podríamos querer estudiar el efecto de x sobre y. Si bien resulta sencillo expresar a y en función de x y luego derivar, existe otra forma.
- Asumamos que $y = f(x)$. Luego, $xf(x) = 5$.
- Si derivamos a ambos lados, obtenemos:

$$f(x) + f'(x)\,x = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{f(x)}{x}$$

- Esto es muy útil si queremos analizar el signo de una derivada complicada. Hablaremos de esto de manera más formal en las próximas clases.
- Calcule la derivada implícita de x respecto a y cuando $y^3 + 3x^2y = 13$.

Teorema de la Función Implícita

- Una función $y = f(x)$ está dada de **forma implícita** cuando está definida de la forma $F(x, y) = 0$ en lugar de la habitual.
- Dada la ecuación $F(x, y) = 0$ (lo que se conoce como función implícita), bajo ciertas exigencias sobre la derivada de F podríamos, al menos localmente, despejar $y = f(x)$

Teorema de la función implícita

Sea $F(x, y) = 0$, si $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ entonces:

1. se puede despejar localmente $y = f(x)$ y
2. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Aproximación por la Diferencial

- Sea f una función derivable. Una buena aproximación para $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta secante que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ con un incremento Δx pequeño:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

- $\Delta y \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\, \Delta x$.
- Definimos a la diferencial como $dy = f'(x_0)\, \Delta x$.
- Sea $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ una función. Estimar Δy utilizando la diferencial cuando x pasa de 900 a 896.
- Sea $y = \frac{1}{1+x}$ una función. Estimar Δy utilizando la diferencial en un entorno de 0.

Aproximación Polinomial

- Es evidente que cuanto más grande sea Δx, menos precisa será la aproximación por la diferencial.
- El **polinomio de Taylor** nos sirve para realizar esta aproximación más cercana. Supongamos que tenemos un valor de x_0 arbitrariamente cercano a 1 y queremos saber cómo varía $f(x)$ entre esos dos puntos.
- Análogamente a lo que hicimos en la filmina anterior, podríamos escribir:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + B(x - x_0)^2$$

- Vale que: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$

Funciones Crecientes y Decrecientes

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que

Definición y propiedades (si f es diferenciable)

- f es (estrictamente) **creciente** si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$.
- f es (estrictamente) **decreciente** si $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $(f(x) > f(y))$.
- f es **creciente** en (a, b) si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b) \subseteq D$.
- f es **decreciente** en (a, b) si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b) \subseteq D$.
- f es una **función (estrictamente) creciente** si $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) > 0)$ para todo $x \in D$.
- f es una **función (estrictamente) decreciente** si $f'(x) \leq 0$ $(f'(x) < 0)$ para todo $x \in D$.

Definiciones y propiedades (si f es diferenciable)

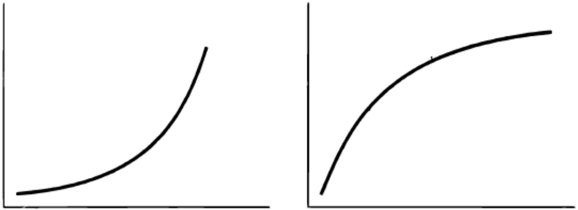
Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **cóncava** si:

- para cualquier par $x_0, x_1 \in D$ y para cualquier $\alpha \in (0,1)$ vale que $\alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_1) \leq f(\alpha x_0 + (1-\alpha) x_1)$.
- dado $x_0 \in D$ y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ vale que $f(x_0) \leq f'(a)(x_0 - a) + f(a)$.
- para todo $x_0 \in D$ vale que $f''(x) \leq 0$.

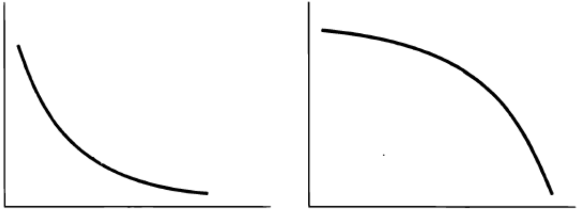
Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **convexa** si:

- para cualquier par $x_0, x_1 \in D$ y para cualquier $\alpha \in (0,1)$ vale que $\alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_1) \geq f(\alpha x_0 + (1-\alpha) x_1)$.
- dado $x_0 \in D$ y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ vale que $f(x_0) \geq f'(a)(a - x_0) + f(a)$.
- para todo $x_0 \in D$ vale que $f''(x) \geq 0$.

Convexidad/Concavidad y Crecimiento/Decrecimiento

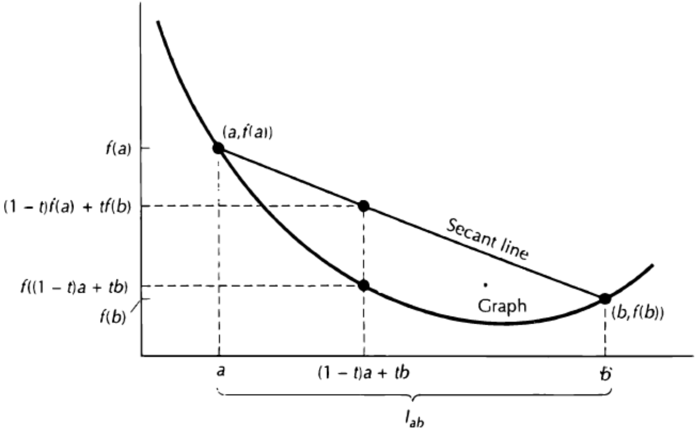


An increasing function can be concave up or concave down.



A decreasing function can be concave up or concave down.

Convexidad vista gráficamente



Geogebra

- Hallar **gráfica y analíticamente** los intervalos de crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad de:
  - $f(x) = x^3 - 3x$
  - $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Convexidad

- Si reemplazamos el símbolo $\leq$ ($\geq$) por el de $<$ ($>$), se dice que la función es **estrictamente cóncava** (**estrictamente convexa**).
- De las definiciones anteriores podemos notar que las funciones lineales (también llamadas **afines**) son tanto cóncavas como convexas.

Sean f y g dos funciones cóncavas (convexas) y sea $a > 0$ un número real, entonces:

- $f + g$ es cóncava (convexa).
- $a \cdot f$ es cóncava (convexa).
- Si g es cóncava o afín (convexa o afín), entonces $f \circ g$ es cóncava (convexa).

La noción de convexidad es muy útil a la hora de encontrar valores que maximizan o minimizan una función.

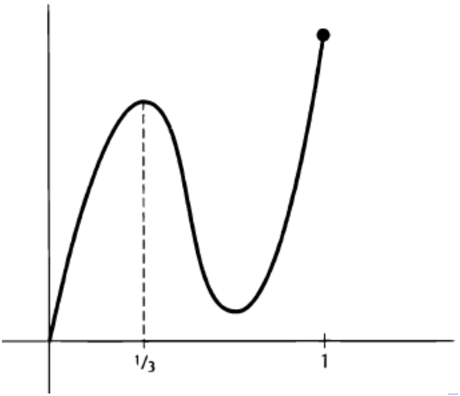
Extremos Locales

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea D su dominio

- Se dice que x_0 es un **máximo local** (**mínimo local**) de f si $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$ para algún $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño.
- Si x_0 es un máximo o mínimo local, se lo denomina **extremo local**.
- Se dice que x_0 es un **máximo global** (**mínimo global**) si $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ para todo $x \in D$.
- En economía buscamos minimizar costos y maximizar beneficios o utilidad, por lo tanto, éste es un concepto muy importante. Ahora, ¿cómo hacemos para encontrar estos extremos?

Extremos locales vs. extremos globales

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. En $x = 1/3$ se tiene un máximo local mientras que en $x = 1$ se tiene un máximo global. Es importante, por lo tanto, a la hora de resolver problemas de maximización o minimización, no olvidarse de las **soluciones de esquina**. ¿Pueden señalar dónde se encuentra el mínimo local y el mínimo global?



Puntos Críticos

Los puntos donde $f'(x_0) = 0$ o donde la derivada no existe se denominan **puntos críticos**.

Teorema

Si un punto x_0 es un extremo local, entonces es un punto crítico.

Notar que la recíproca no necesariamente es cierta. Tomemos como ejemplo la función $f(x) = x^3$. En este caso, $x = 0$ se conoce como **punto de inflexión**.

Criterio de Segundo Orden

Condición de Segundo Orden

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable

- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local de f.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local de f.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$, entonces el criterio no decide.

- Notemos que con esta noción podemos ver que si f es estrictamente convexa, entonces si encontramos un punto crítico éste será un mínimo local, mientras que si es estrictamente cóncava, al encontrar un punto crítico sabremos que encontramos un máximo local.
- Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $f(x) = x^3 - 3x$
  - $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Criterio de Segundo Orden

Teorema

Sea f una función C^2 cuyo dominio es el intervalo (a, b) y f'' nunca se anula, entonces f tiene a lo sumo un punto crítico en (a, b). Además, en el caso que f tenga un punto crítico, si f'' es positiva el punto crítico es un mínimo global, y si f'' es negativa entonces el punto crítico es un máximo global.

Ejemplo: Muestre que la función $f(x) = (x-3)^6 + (x-3)^2 + 7$ tiene un mínimo global en $x = 3$. ¿Cuál es el mínimo valor que toma la función?

Encontrando máximos y mínimos locales y globales.

Pasos para encontrar máximos y mínimos en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

- Para encontrar candidatos a máximos o mínimos locales en (a, b), buscar puntos críticos resolviendo $f'(x) = 0$.
- Para clasificar los puntos críticos, evaluar la segunda derivada y ver qué signo tiene $f''(x)$ en cada uno de los puntos críticos.
- calcular $f(a)$, $f(b)$ y comparar con $f(x)$ evaluado en los puntos críticos para decidir cuál(es) es (son) el (los) máximo(s) o mínimo(s) global(es).

Encontrando máximos y mínimos globales en un compacto.

Un **conjunto compacto** es un conjunto **cerrado y acotado**. Por ejemplo, $[a, b]$ es un conjunto compacto.

Teorema de Weierstraß

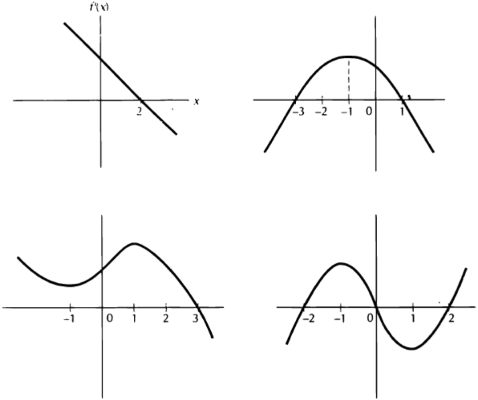
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen valores de x, x_0 y x_1, y números, m y M, de manera que:

- $x_0, x_1 \in [a, b]$
- $m \leq f(x) \leq M$,
- $f(x_0) = m$ y
- $f(x_1) = M$

Ejemplo: Hallar los máximos y mínimos globales de $f(x) = 2x^3 - 45x^2 + 300x + 500$ en el intervalo $[0, 20]$.

Relacionando $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$

Suponga que $f(0) = 0$ para cada uno de los siguientes casos. Los gráficos presentados son los de $f'(x)$. Grafique $f(x)$ y $f''(x)$ aproximadamente y relacione a los conceptos de crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad.



Ejercicios aplicados

Ejercicio 1: Una firma puede producir q alfajores a un costo $C(q) = q^2$. Como la firma, ya que es un pequeño productor, puede vender todos los alfajores que quiera a $p = 80$ pesos cada uno. Nota: los beneficios de la firma son $\pi = p \cdot q - C(q)$.

- ¿Cuál es la cantidad de alfajores que debe producir que maximizan los beneficios?
- Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
- ¿Cuál es el valor máximo de beneficios que pueden obtener el monopolista?

Solución: 40 alfajores. $\pi = 1600$.

Ejercicio 2: Pepe puede comprar a alfajores o t turrones para las fiestas. Por comer alfajores y turrones, la "felicidad" (utilidad) de Pepe se puede describir a través de $u(a,t) = a^2 \cdot t$. Pepe puede comprar en total, como máximo, 24 unidades. Es decir, $a + t \leq 24$. Notemos también que $a \geq 0$ y $t \geq 0$.

- Explique por qué si Pepe maximiza su felicidad entonces come exactamente 24 unidades, es decir, $a + t = 24$.
- Escriba el problema solamente en función de la cantidad de alfajores a.
- ¿Cuál es la cantidad de alfajores que quiere consumir de manera que maximiza la utilidad?
- Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
- ¿Cuál es el valor máximo de utilidad que pueden obtener Pepe?

Solución: $a = 16,\ t = 8,\ u = 2048$

Ejercicios aplicados

Ejercicio 3: Pepe puede comprar a alfajores o t turrones para las fiestas. Por comer alfajores y turrones, la "felicidad" (utilidad) de Pepe se puede describir a través de $u(a, t) = a^2 \cdot t$. Sin embargo, en este caso, Pepe no quiere comprar tanta comida. No obstante, suponga que Pepe quiere garantizarse un nivel de utilidad mínima de 864, es decir, $u(a, t) \geq 864$.

- Explique intuitivamente por qué si Pepe quiere minimizar lo que gasta entonces necesariamente $u(a, t) = 864$.
- Escriba el problema solamente en función de la cantidad de alfajores a.
- ¿Cuál es la cantidad de alfajores que quiere consumir de manera que minimiza la cantidad comprada?
- Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
- ¿Cuál es la mínima cantidad comprada por Pepe de manera que pueda obtener al menos un nivel de utilidad de 864?

Solución: 12 alfajores, 8 turrones, se compran en total 20 unidades.

Funciones Logarítmicas y Exponenciales

- La **familia de funciones exponenciales**, $f(x) = a^x$, y la **familia de funciones logarítimicas**, $g(x) = \log_b x$, con $a, b > 0$. Llamamos a a y a b **parámetros** que indexan cada familia.
- Si $a = b$, por ejemplo, cuando $a = b = 3$ entonces $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \log_3(x)$ son funciones inversas.
- Es decir, vale en general que $\log_a(a^x) = x$ y que $a^{\log_a(x)} = x$.

Caso particular

En particular, nos interesa el caso donde $a = e \approx 2{,}7183$. En ese caso, $\log_e x = \ln x$. **¿De dónde se obtiene este número?**

- El número e se define a partir de la siguiente expresión:

$$e \equiv \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- En general, para un valor k dado es cierto que:

$$e^k \equiv \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$$

- Además, vale que
  (a) $[\ln(u(x))]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
  (b) $\left[e^{u(x)}\right]' = e^{u(x)} u'(x)$

Propiedades de exponentes y logaritmos

Sean b, c, r y s dos números reales, entonces las siguientes propiedades son ciertas:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$	$\log_a \left(\frac{1}{c}\right) = -\log_a c$
$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	$\log \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
$(a^r)^s = a^{rs}$	$\log_a (b^c) = c \log_a b$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^1 = a$	$\log_a a = 1$

Aplicaciones: Elasticidad

- Un concepto económico muy útil es la **elasticidad**, que mide el cambio porcentual de una variable y como consecuencia de un cambio porcentual en otra variable x. Si bien ahondaremos más sobre el tema en el curso de Microeconomía, resulta interesante analizar la relación entre la elasticidad y el logaritmo natural.
- Definimos a la **elasticidad de** $y = f(x)$ **respecto a** x como:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{y} \bigg/ \frac{\Delta x}{x}$$

- Como sabemos que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$, se sigue que para variaciones pequeñas de Δx vale que:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{f'(x)\,x}{f(x)}$$

Aplicaciones: Elasticidad

- Ahora bien, la **elasticidad punto** $\varepsilon_{y,x}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{d \ln y}{d \ln x}$$

- Para verlo, simplemente debemos recordar la definición de diferencial y operar algebraicamente. Esto se debe a que, por regla de la cadena, $d \ln y = (\ln y\,(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)}$.
- Entonces, si aplicamos logaritmos a dos variables relacionadas, podremos estudiar el impacto porcentual de una variable sobre la otra. Esto resulta de gran utilidad a la hora de plantear modelos econométricos.

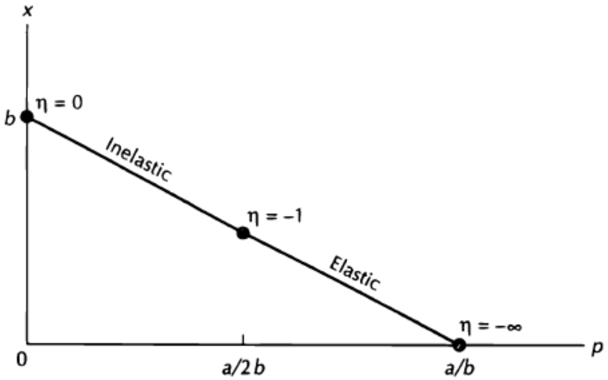
Aplicaciones: Elasticidad

Calcule la elasticidad $\eta_{q,p}$ en un punto $(p, D(p))$ para cada uno de los siguientes casos, con **demandas lineales e isoelásticas**.

- $D(p) = 3 - 2p$ $\eta_{q,p} = \frac{1}{1 - \frac{1,5}{p}}$
- $D(p) = p^{-2}$ $\eta_{q,p} = -2$
- $D(p) = a - bp$ $\eta_{q,p} = \frac{1}{1 - \frac{a}{bp}}$
- $D(p) = p^{-a}$, $a > 0$. $\eta_{q,p} = -a$

Elasticidad de una demanda lineal

En el siguiente gráfico, se puede ver cómo varía la elasticidad precio de la demanda si la demanda es lineal, $D(p) = a - bp$. Es importante notar, que normalmente, en los libros de economía, la variable precio va en el eje y y por lo tanto podría parecer como si este gráfico fuese distinto, pero no lo es. Solamente se intercambian los ejes.



Aplicaciones: Derivada Logarítmica

En los siguientes modelos lineales, calcule cuánto vale la elasticidad de y respecto de x en términos de $\{\alpha_i, \beta_i, x, y\}_{i=0,1,2,3}$.

- $\ln(y_i) = \alpha_0 + \beta_0 \ln(x_i) + u_i$
- $\ln(y_i) = \alpha_1 + \beta_1 x_i + u_i$
- $y_i = \alpha_2 + \beta_2 x_i + u_i$
- $y_i = \alpha_3 + \beta_3 \ln(x_i) + u_i$

Valor presente descontado en tiempo continuo

- Vimos que si se calculase interés compuesto continuamente, con un capital inicial de A con una tasa constante r para un proyecto que tiene longitud esperada t, entonces se espera que al final del proyecto se tiene $B = A \cdot e^{rt}$.
- Análogamente si supiéramos que en t períodos obtendremos B pesos, sabiendo que la tasa de interés es constante e igual a r, llamamos a Be^{-rt} el **valor presente descontado de** B.
- Calcule el valor presente descontado de una proyecto que en $t = 5$ espera rendir $B = 500$, teniendo en cuenta que la tasa de interés r es del $20\,\%$. Si un inversor cuenta con $A = 200$, ¿le alcanza para invertir en este proyecto o debe financiarse con un banco? ¿Cambia su respuesta si $A = 150$?

Integrales

- Cambiando radicalmente de tema, ¿hay alguna forma de recuperar exactamente $f(x)$ a partir de $f'(x)$? **No.**
- ¿hay alguna forma de recuperar exactamente $f(x)$ a partir de $f'(x)$ **y conociendo cuánto vale** $f(x_0)$, para algún valor x_0? **Sí**.
- Definimos integrar como la operación inversa a derivar.
- De hecho, valdrá que $f(x) = \int f'(x)\,dx + C$. Notar que para que $f(x)$ quede definida, es decir, que el valor de C tome un valor particular, tenemos que conocer cuánto vale C en algún valor x_0. Por ejemplo $f_1(x) = 3x^2 - 7$ y $f_2(x) = 3x^2 + 88$ son dos funciones que cumplen que $f'(x) = 6x$. Entonces, para poder determinar a qué función $f(x)$ nos referimos, necesitamos conocer un poco más de información. Por ejemplo, si $f(1) = 91$, es decir que para $x_0 = 1$ vale que $f(x_0) = 91$, entonces sabemos que nos estamos refiriendo a la segunda función.

Integrales: propiedades

Propiedades

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones. Entonces vale que:

- $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ para $a \in \mathbb{R}$
- $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- Si $n \neq -1$, entonces $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- si $n \neq 0$, entonces $\int e^{nx} dx = \frac{1}{n} e^{nx} + C$
- $\int a^x \ln(a) dx = a^x + C$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- $\int -\sin(x) dx = \cos(x) + C$
- $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \tan(x) + C$

Integrales definidas y cálculo de áreas

- La integral definida se escribe de manera análoga a la integral indefinida, pero estableciendo los límites de integración, es decir: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

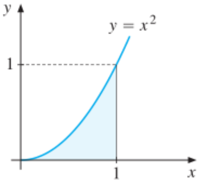
Definición

Decimos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si vale que $F'(x) = f(x)$. Es decir que vale que existe algún número C de manera que $F(x) = \int f(x)dx + C$.

Teorema fundamental del cálculo

Sea F una primitiva de f, entonces $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

- Las integrales están relacionadas con calcular áreas. ¿Eso quiere decir que una integral mide el área bajo una curva? **No exactamente.** Para ver qué relación existe entre integral y área debajo de una curva, consideremos los siguientes casos:
  (a) $f(x) = 5$ entre $x = 0$ y $x = 3$
  (b) $f(x) = 5x$ entre $x = 0$ y $x = 3$
  (c) $f(x) = 5x$ entre $x = -3$ y $x = 3$
  (d) $f(x) = x^2$. entre $x = 0$ y $x = 1$.

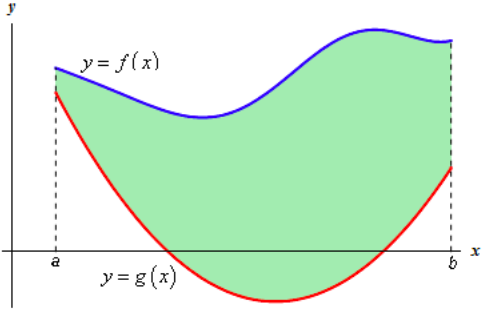


- Por lo tanto, la integral mide el área bajo una curva cuando la función es positiva (el gráfico de la función se encuentra por sobre el eje x).
- Si la función es negativa, la integral mide el área con signo negativo.
- Si la función es positiva y negativa, la integral resulta en el valor neto de las "áreas positivas" y "áreas negativas".

Área entre dos curvas - Geogebra

- Ahora bien, ¿cómo se puede calcular el área entre dos curvas?

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Integrales: dos técnicas importantes para su resolución

Integración por partes

Sean f y g dos funciones continuas. Entonces vale que:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Ejemplo: calcule $\int xe^x dx$

Sustitución

Supongamos que g es continua y diferenciable, y que f es continua en todos los puntos u del codominio de g. Luego, vale que:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

con $u = g(x)$.

Ejemplo: calcule $\int 8x^2 \left(3x^3 - 1\right)^{16} dx$

Integrales: algunos ejemplos

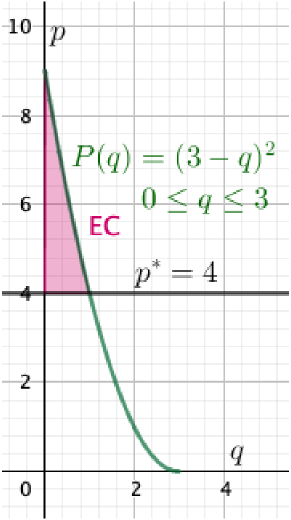
Calcule las siguientes integrales:

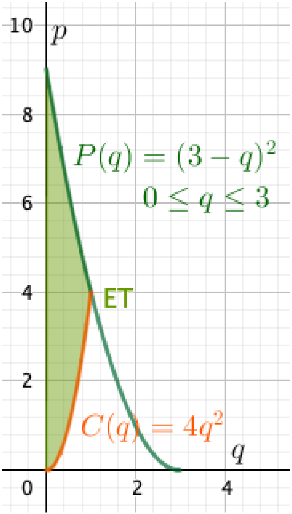
- $\int\limits_{0}^{1} xdx$
- $\int\limits_{1}^{2} \left(2x + x^2\right) dx$
- $\int (x \ln x)\, dx$
- $\int \left(x^2 + 2\right)^8 2xdx$

Aplicación: EC y ET

- Dos conceptos muy utilizados son el de excedente del consumidor y el de excedente total.
- Definimos EC como el área entre la curva de demanda inversa $P(q)$ y el precio que se paga p^*.
- Definimos ET como el área entre la curva de demanda inversa $P(q)$ y el costo marginal $CMg(q)$.
- Calcule EC y ET para el siguiente caso, en la siguiente *slide*. Para ello debe:
  (a) encontrar el valor de q para el cual se

Ejemplo aplicado: EC y ET





Apéndice: Alfabeto griego

alfa (*alpha*)	α, A	nu	ν, N
beta	β, B	xi	ξ, Ξ
gamma	γ, Γ	omicron	o, O
delta	δ, Δ	pi	π, Π
epsilon	ε, E	rho	ρ, P
zeta	ζ, Z	sigma	σ, Σ
eta	η, H	tau	τ, T
theta	θ, Θ	upsilon	υ, Υ
iota	ι, I	phi	$\phi, \varphi\Phi$
kappa	κ, K	chi	χ, X
lambda	λ, Λ	psi	ψ, Ψ
mu	μ, M	omega	ω, Ω

valor presente descontado en tiempo discreto y de anualidad

En la materia de Evaluación de Proyectos de Inversión van a trabajar con los conceptos de valor presente descontado en tiempo discreto y de anualidad. Si en un proyecto de inversión se espera recibir V_k en cada período k, el valor presente descontado en tiempo discreto cuando la tasa de descuento es $a \in (0,1)$, es:

$$VP = V_0 + a \cdot V_1 + a^2 \cdot V_2 + \cdot + a^k V_k + \cdots$$

Dependiendo de la longitud del proyecto y de los valores que tomen V_k podremos calcular el valor presente descontado del proyecto.
En el caso que $V_k = V$ **para todos los períodos y el proyecto no tiene fin** (es decir, $k \to \infty$), llamamos a ese proyecto una **anualidad**, en ese caso el valor presente:

$$VP = V + a \cdot V + a^2 \cdot V + \cdot + a^k V + \cdots = \frac{V}{1-a}$$

Extra: Sumatorias útiles

Para simplificar, supongamos que $V_k = 1$. En estos cuatro casos, se tiene un proyecto donde se recibe (a) V desde $k = 0$ hasta $k = n$, (b) V desde $k = 1$ hasta $k = n$, (c) V desde $k = m$ hasta $k = n$, (d) V desde $k = 0$ hasta $k = +\infty$

(a) $$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad \text{Si } a \neq 1$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} a^k = a \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = a \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a(1 - a^n)}{1 - a} = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

(c) $$\sum_{k=m}^{n} a^k = a^m \sum_{k=m}^{n} a^{k-m} = a^m \sum_{k=0}^{n-m} a^k = \frac{a^m(1 - a^{n-m+1})}{1 - a} = \frac{a^m - a^{n+1}}{1 - a}$$

(d) $$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1 - a} \quad \text{Si } |a| < 1$$

Extra: Sumatorias útiles

Para simplificar, supongamos que $V_k = 1$. En estos cuatro casos, se tiene un proyecto donde se recibe (a) V desde $k = 1$ hasta $k = \infty$, (b) V desde $k = m$ hasta $k = \infty$, (c) V desde $k = 0$ hasta $k = \infty$ cada r períodos, (d) V desde $k = m$ hasta $k = +\infty$ cada r períodos.

- $$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = a \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} = a \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a}$$
- $$\sum_{k=m}^{\infty} a^k = a^m \sum_{k=m}^{\infty} a^{k-m} = a^m \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{a^m}{1-a}$$
- $$\sum_{k=0}^{\infty} a^{kr} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^r)^k = \frac{1}{1-a^r}$$
- $$\sum_{k=m}^{\infty} a^{kr} = a^{mr} \sum_{k=0}^{\infty} a^{kr} = a^{mr} \sum_{k=0}^{\infty} (a^r)^k = \frac{a^{mr}}{1-a^r}$$

Demostración

Demostramos 3 casos, las demostraciones del resto siguen una intuición similar.

Veamos cuánto vale $\sum_{k=0}^{n} a^k$.

Llamamos:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n$$

Consideramos:

$$\begin{aligned}(1-a)S_n = S_n - aS_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n \\ - (a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1})\end{aligned}$$

$$(1-a)S_n = 1 - a^{n+1} \Longrightarrow \boxed{S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \sum_{k=0}^{n} a^k}$$

Demostración

Veamos cuánto vale $\sum_{k=1}^{n} a^k$.

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = a + a^2 + a^3 + ... + a^n = a(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})$$

$$= a \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a \frac{1 - a^{n+1-1}}{(1 - a)}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}}$$

Demostración

Veamos cuánto vale $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots$$

$$aS = a \sum_{k=0}^{\infty} a^k = a + a^2 + a^3 + \ldots$$

Restando ambas expresiones obtenemos que $(1-a)S = 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1}{1-a}} \quad \text{Si } a \in (-1,1)$$

Notar que estas sumatorias serán útiles para Estrategia, Competencia y Regulación, cuando quieran resolver juegos de repetidos que involucren colusión entre firmas.