# Examen final

## Segundo llamado 2023

1. **(15 puntos)** Considere el siguiente espacio muestral **equiprobable** $\Omega$

$$\Omega = \{\text{reordenamientos de la palabra EXAMEN}\}$$

Tenga en cuenta que un reordenamiento de la palabra EXAMEN es cualquier combinación ordenada de las letras de dicha palabra (no se sacan letras). Por ejemplo: EEMNAX, NEMEAX...

   (a) **(5 puntos)** Diga cuántos elementos tiene $\Omega$ justificando detalladamente por qué.

   (b) **(5 puntos)** Calcule la probabilidad de que un elemento de $\Omega$ elegido al azar empiece con la letra $A$ y termine con la letra $X$.

   (c) **(5 puntos)** Calcule la probabilidad de que un elemento de $\Omega$ elegido al azar tenga las letras $A$ y $X$ juntas.

2. **(10 puntos)** Compare las siguientes probabilidades $p_1$ y $p_2$ (para cada inciso por separado) y compárelas:

   (a) **(5 puntos)** En el planeta Nobis una persona seleccionada al azar nace en cualquiera de los 365 días del año con probabilidad $\frac{1}{365}$. Note que en el planeta Nobis no existen los años bisiestos. Suponga que **se eligen tres personas (distinguibles) al azar** y, por lo tanto, sus fechas de nacimiento son independientes.

   - $p_1$ = probabilidad de que todos hayan nacido en el primero de octubre.
   - $p_2$ = probabilidad de que haya exactamente una persona de las tres haya nacido el primero de octubre, otra haya nacido el dos de octubre y otra haya nacido el tres de octubre.

   (b) **(5 puntos)** Se tira un **dado equilibrado 4 veces consecutivas** y se suman los resultados. Los resultados entre tiradas son **independientes**.

   - $p_1$ = probabilidad de que la suma dé exactamente 21.
   - $p_2$ = probabilidad de que la suma dé exactamente 22.

3. **(15 puntos)** Considere los siguientes eventos: **abuso conyugal** ($A$), un cónyuge **es asesinado** por alguien ($S$), el otro cónyuge es **culpable** ($C$). Se sabe que $P(C|S) = 0.25$, $P(A|C^C \cap S) = \frac{8}{75}$ y $P(A|C \cap S) = 0.4$.

   (a) **(2 puntos)** Muestre que $P(C^c|S) = 0.75$.

   (b) **(4 puntos)** Justifique por qué vale que $P(A \cap C \cap S) = P(A|C \cap S) \cdot P(C|S) \cdot P(S)$.

   (c) **(4 puntos)** Reescriba $P(A \cap S)$ usando que $P(A \cap S) = P(A \cap C \cap S) + P(A \cap C^c \cap S)$ y el inciso (b) para $P(A \cap C \cap S)$ y $P(A \cap C^c \cap S)$ para poder usar los datos de la consigna.

   (d) **(5 puntos)** **Sabemos** que un cónyuge ha fallecido y que el cónyuge que sigue vivo era responsable de abuso conyugal. El abogado defensor del cónyuge que está vivo argumenta que es improbable que su cliente haya sido responsable de la muerte dado que $P(C|A) = 0.0002$. Es decir, sabiendo que hay abuso familiar, la probabilidad de ser culpable del asesinato es 0.0002. Usted es llamado al estrado para contradecir el argumento del abogado. Usted dice que en realidad hay que calcular $P(C|A \cap S)$ porque **también hay que condicionar a que sabemos** que hubo un asesinato de uno de los cónyuges. ¿Cuánto vale $P(C|A \cap S)$? Dada su respuesta, explique cuál es el error de razonamiento del abogado defensor.

4. **(5 puntos)** Martín tienta a la suerte **todos los días de la semana**. Desde el **lunes al domingo** pasa por abajo de una escalera. La probabilidad de tener un accidente en un día cualquiera al pasar debajo de la escalera es 0.002. Asumiendo que tener un accidente en un día distinto es independiente de lo que ocurra en los demás días. ¿Cuál es la probabilidad de que Martín tenga al menos un accidente en la semana?

5. **(10 puntos)** Hay 100 sobres de los cuales 40 contienen *tickets dorados* para ir a ver la fábrica de chocolates de Charlie. La probabilidad de que cada sobre tenga un *ticket dorado* es la misma. Sea $X$ la variable aleatoria que cuenta el número de *tickets dorados* cuando se abren tres sobres elegidos al azar **sin reposición**.

   (a) **(3 puntos)** Calcule la probabilidad $P(X = 2)$.

   (b) **(5 puntos)** Diga cuál es $Sop(X)$ y describa detalladamente la PMF de la variable aleatoria $X$.

   (c) **(2 puntos)** Basándose en su respuesta anterior, ¿cuántos *tickets dorados* se espera sacar **en promedio** para poder visitar a la fábrica de chocolates de Charlie?

6. **(20 puntos)** La PDF conjunta de las variables aleatorias $X$ e $Y$ está dada, para un valor de $c$, por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{si } 0 < y < 1, \text{ y, además, } 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) **(3 puntos)** Muestre que $c = 2$.

   (b) **(5 puntos)** Calcule $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

   (c) **(3 puntos)** Muestre que $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{1}{1-x}$ para $x < y < 1$.

   (d) **(4 puntos)** ¿Cuánto vale $E(Y \mid X = x)$ ?

   (e) **(5 puntos)** ¿Cuánto vale $Var(Y \mid X = x)$?

   **Nota:** Puede usar en el ejercicio 6., si considerara necesario, que

$$1 - x^2 = (1-x)(1+x) \quad \text{y} \quad 1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2).$$

7. **(10 puntos)** Sabiendo que $E(X) = 5$, $E(X^2) = 57$, $E(Y|X = x) = 11 - x$ y $Var(Y|X = x) = x^2$.

   (a) **(5 puntos)** Calcule $E(Y)$.

   (b) **(5 puntos)** Calcule $Var(Y)$.

8. **(15 puntos)** Un banco muy grande con muchas sucursales en todo el país quiere analizar la rapidez con la que se atiende a sus clientes. El tiempo de espera **medido en horas** de un cliente cualquiera elegido al azar el día 5 de diciembre es una variable aleatoria $X$ cuya distribución es exponencial (con $\theta > 0$).

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$$

   (a) **(4 puntos)** Muestre que la probabilidad de que un cliente al azar tenga que esperar más de una hora el día 5 de diciembre es igual a $\mathrm{P}(X_i > 1) = e^{-\theta}$

   Suponga que se consideran $X_1, \ldots, X_n$ independientes e igualmente distribuidas, cada una de ellas con densidad $f(x)$.

Defina $\overline{W}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$ donde $W_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i > 1 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$

   (b) **(3 puntos)** Justifique porqué $W_i \overset{iid}{\sim} Be(p)$, donde $p = e^{-\theta}$.

   (c) **(5 puntos)** Calcule $a$ (en función de $\theta$) donde $a$ cumple que $\overline{W}_n \overset{m.c.}{\to} a$.

   (d) **(3 puntos)** Calcule el límite en distribución de $\sqrt{n}\left(\overline{W}_n - e^{-\theta}\right)$.

**Bonus**: Calcule el límite en distribución de $\sqrt{n}\left(g(\overline{W}_n) - g\left(e^{-\theta}\right)\right)$, donde $g(x) = \ln(x)$.

Como $P(\overline{W}_n > 0) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ no se preocupe por el caso donde $\overline{W}_n = 0$.