Microeconomía

Ingreso MECAP

Teoría de la firma

Tecnología de producción

Tomás Bustos

tomasmbustos@gmail.com

Verano 2023

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

Introducción

- En esta sección iniciamos el estudio de la conducta de la empresa.
- Lo primero que debemos hacer es analizar los límites con que se encuentra ésta cuando toma sus decisiones.
- En esta sección analizaremos las restricciones tecnológicas de la firma, ya que sólo existen ciertas formas viables de producir bienes a partir de factores.
- Tecnología de producción es el proceso que permite transformar insumos (o factores de producción) en un bien final.

Table of Contents

Tecnología de producción

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

- Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ el vector de cantidades de insumos y y la cantidad del bien final (único)
  - Por ejemplo, para producir una computadora (y) necesitamos plástico (x_1), metal (x_2) e ingenieros (x_3)
- Definimos un **plan de producción** como el par $(\mathbf{x}, y)$.
- La tecnología limita las posibilidades de producción de la firma ya que establece qué cantidad de producto final es posible obtener dada la cantidad de insumos elegida.

caucho
aluminio
trabajadores
$\longrightarrow$ $\Rightarrow$ autos

Función de producción

$f: \mathbf{X} \to \mathbb{R}$

La función de producción $f(\mathbf{x})$ indica la máxima cantidad de producto que la firma puede producir con $\mathbf{x}$ insumos

$$y \leq f(\mathbf{x})$$

$y \leq f(\mathbf{x})$

Isocuantas

15000 salsas = f(30000 tomates)

$y = 3$

Plan de producción factible

Un plan de producción $(\mathbf{x}, y)$ es *tecnológicamente factible* si es posible producir y a partir de $\mathbf{x}$

No obstante, solo aquellos planes donde $y = f(\mathbf{x})$ son **eficientes**, pues en las otros se desperdician insumos. Nosotros trabajaremos con 2 insumos: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

- Así como graficamos las combinaciones de (x_1, x_2) que generan el mismo nivel de utilidad (curvas de indiferencia), haremos lo propio con la función de producción.
- Llamamos **iso-cuanta de nivel** $\bar{y}$ al conjunto de pares (x_1, x_2) que arrojan la misma cantidad de producto.

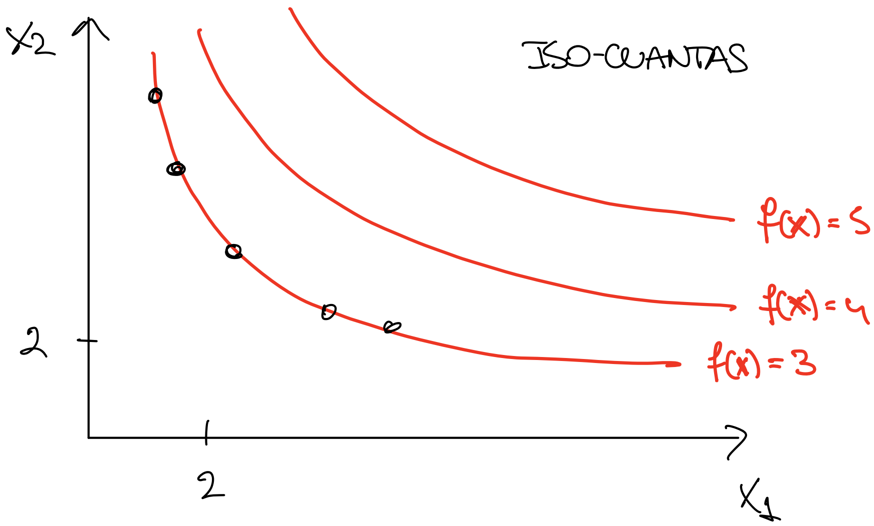

ISO-CUANTAS
X_2
2
2
X_1
$f(x) = 5$
$f(x) = 4$
$f(x) = 3$

Table of Contents

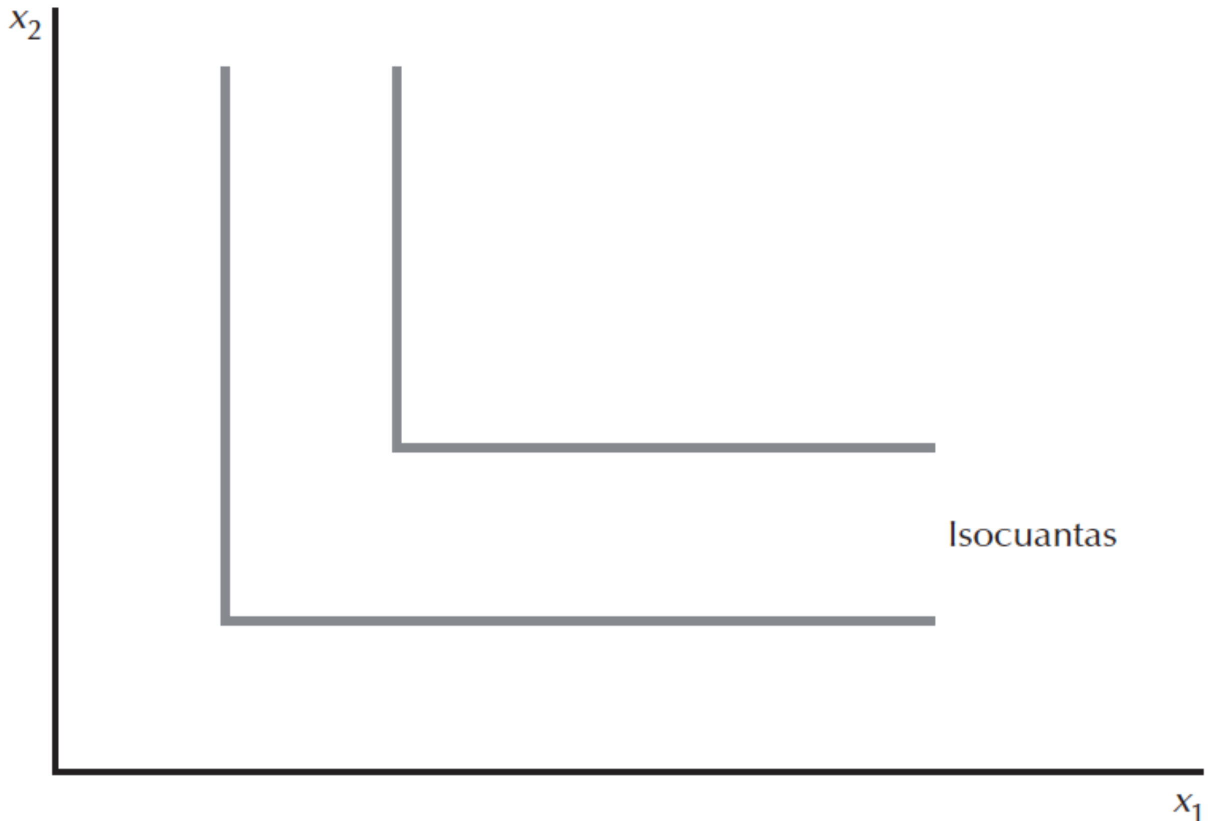
Tecnología Leontief

- Imaginemos que queremos realizar agujeros en la tierra y descubrimos que para ello necesitamos una pala y una persona para producir un agujero en 1 minuto.
- ¿Qué sucede si le damos a la persona 50 palas? ¿Qué sucede si contratamos 50 personas pero sólo una pala?
- En ambos casos, seguimos produciendo 1 agujero por minuto.
- Podemos definir la forma en la que transformamos palas y personas en agujeros con la función de producción $f(L, P) = \min\{L, P\}$.

Tecnología Leontief

- El ejemplo anterior pertenece a un grupo general de funciones de producción llamadas Leontief. Son de la forma:

$$f(x_1, x_2) = \text{mín}\{ax_1, bx_2\};\ a, b > 0$$



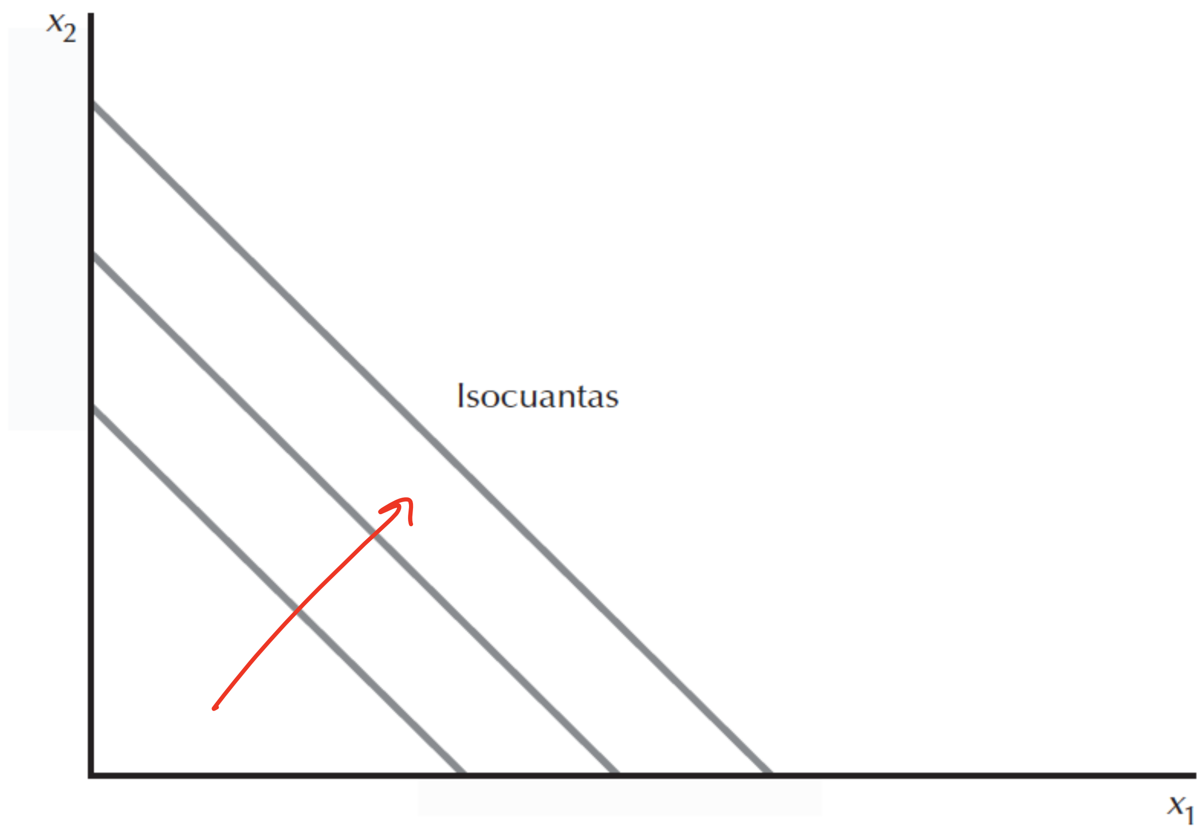
Tecnología Sustitutos Perfectos

- Ahora supongamos que queremos publicar un informe mensual de conyuntura macroeconómica.
- Tanto un estudiante de la Lic. de Economía como de la Lic. de Economía Empresarial pueden escribir un informe por mes.
- ¿Qué sucede si contranto a un economista y a un economista empresarial? ¿Qué sucede si contrato a 2 economistas? ¿Qué sucede si contrato a 2 economistas empresariales?
- En cualquiera de los casos anteriores voy a obtener 2 informes.
- La función que describe la producción de informes es $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, donde x_i son la cantidad de licenciados de cada tipo.

Tecnología Sustitutos Perfectos

- La función anterior pertenece a una familia más general de funciones de sustitutos:

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2;\ a, b > 0$$



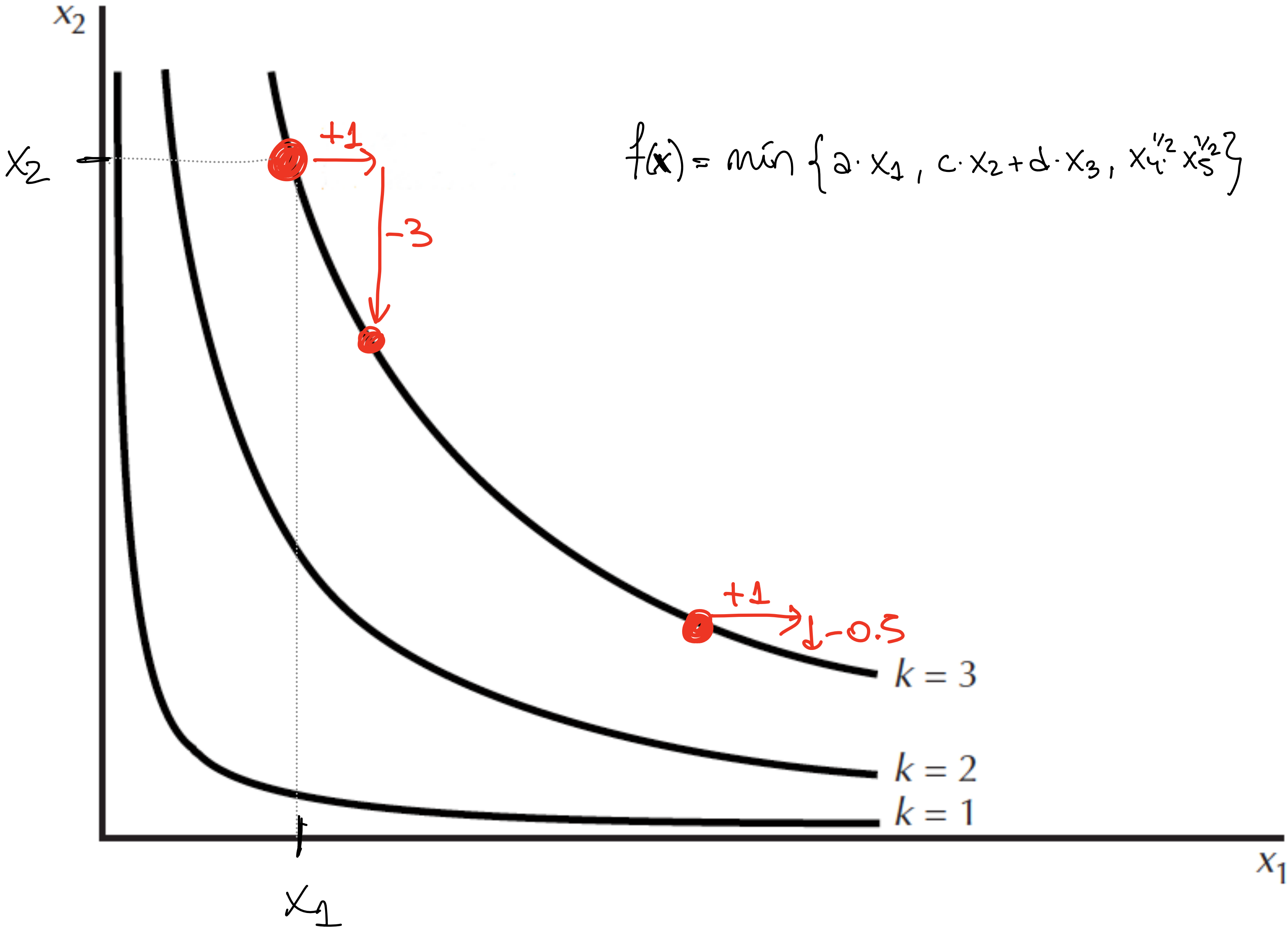
Tecnología Cobb-Douglas

- Ahora supongamos que los dos insumos requeridos para producir un bien son complementarios en cierta medida, pero no tanto para ser Leontief.
- Además, la tasa a la que puedo sustituir un bien por otro depende de la cantidad utilizada.
- La forma matemática de expresar esta situación es la función Cobb-Douglas:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}; \ \alpha, \beta > 0$$

- Siendo A un parámetro tecnológico. Un mayor A permite producir más unidades con la misma cantidad de insumos. Los parámetros α y β miden la respuesta de la cantidad producida a las variaciones de los factores.

Tecnología Cobb-Douglas



$f(\mathbf{x}) = \min\{a \cdot x_1,\ c \cdot x_2 + d \cdot x_3,\ x_4^{1/2} \cdot x_5^{1/2}\}$

Table of Contents

Table of Contents

Productividad Marginal

- Supongamos que nuestro bien se produce con la función de producción $f(x_1, x_2)$. Para *algún nivel de insumos en particular* consideremos aumentar el nivel de x_1 manteniendo fijo el de x_2. ¿Cuánto aumentará el nivel de producto final? La respuesta viene dada por la **productividad marginal**.
- Al aumentar el insumo 1 en un valor de $\triangle x_1$ obtenemos una producción de $f(x_1 + \triangle x_1, x_2)$. La variación en la producción es entonces $\triangle y = f(x_1 + \triangle x_1, x_2) - f(x_1, x_2)$.
- Como, siempre, podemos medir la tasa de cambio del producto respecto al cambio en el insumo:

$$\frac{f\left(x_1 + \triangle x_1, x_2\right) - f\left(x_1, x_2\right)}{\triangle x_1}$$

Productividad Marginal

Si $\triangle x_1 \to 0$, entonces:

Productividad marginal del insumo i

Sea la función $f:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$una función de producción diferenciable, su derivada parcial mide la cantidad adicional de producto ante un incremento unitario del i-ésimo insumo y se denomina productividad marginal del insumo i

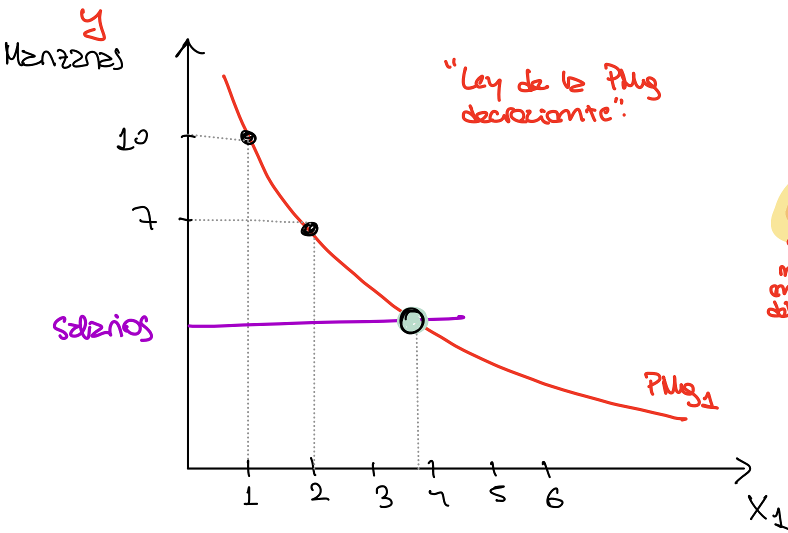
$$PMg_i \equiv \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} > 0$$

Productividad Marginal

- La derivada de la productividad marginal (que es la derivada segunda de la función de producción) nos indica cómo varía la productividad marginal a medida que incorporamos más insumo.

$$\text{Productividad marginal decreciente:} \quad \frac{\partial PMg_1}{\partial x_1} < 0$$

- Esto es lo que usualmente esperamos que ocurra, y este fenómeno suele denominarse como la ley de la productividad marginal decreciente.
- En realidad, no es una "ley", sino meramente un rasgo común a casi todos los procesos de producción, siempre y cuando todos los demás factores se mantengan fijos.



$$f = A \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$$

$$\underbrace{PMg_1}_{\text{medido en unidades del bien final "y"}} \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = A \cdot \frac{1}{2} x_1^{-1/2} \cdot x_2^{1/2}$$

$$= \underbrace{A \cdot \frac{1}{2} x_2^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

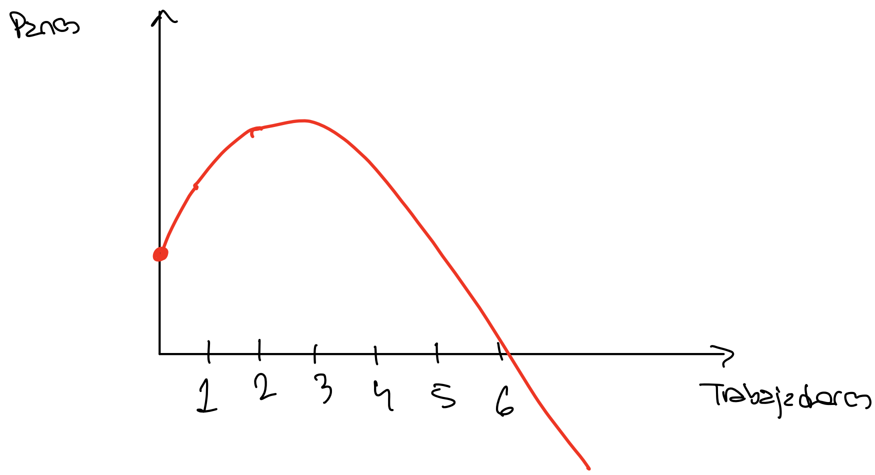


Table of Contents

Tasa Marginal de Sustitución Técnica

- De la misma manera que definimos la TMS como la pendiente de la curva de indiferencia en un punto, haremos lo propio con las iso-cuantas
- Para algún plan de producción inicial (x_1, x_2, y) consideremos disminuir la cantidad del insumo 1 en $\triangle x_1$. ¿Cuánto debe aumentar x_2 para que la producción se mantenga igual?
- Formalmente, debemos obtener la pendiente de la isocuanta en el punto particular. Es decir, la tasa a la cual sustituimos insumos de forma tal que se mantenga constante la producción.

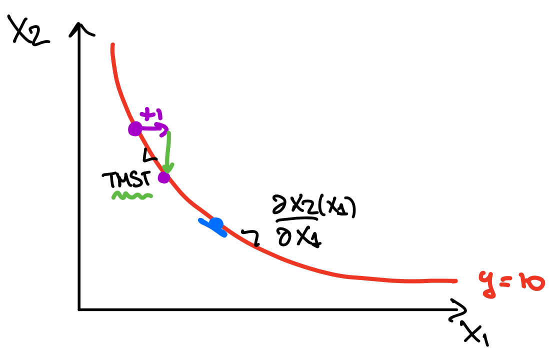
Tasa Marginal de Sustitución Técnica

TMST

La tasa a la que un el insumo x_2 puede ser sustituido por el insumo x_1 sin alterar el nivel de producción.

$$TMST_2 \equiv -\frac{PMg_2}{PMg_1}$$

Esta expresión puede hallarse usando el teorema de la función implícita.



$$10 = f(x_1, x_2(x_1))$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[10] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[f(x_1, x_2(x_1))\right]$$

$$0 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1}$$

$$-\frac{PMg_1}{PMg_2} = TMST_1$$

Table of Contents

Retornos a Escala

- Supongamos ahora que aumentamos el valor de todos los insumos en la misma proporción. Si la tecnología de producción es monótona, entonces sabemos que la producción aumentará. La pregunta es en qué proporción.

$f(\mathbf{x}) = x_1^2 \cdot x_2$

x2 insumos $\left\{ \begin{array}{l} f(1,1) = 1^2 \cdot 1 = 1 \\ f(2,2) = 2^2 \cdot 2 = 8 \end{array} \right\}$ × 8 prod.

Rendimientos a escala

- La función de producción f exhibe rendimiementos crecientes a escala si:

$f(\mathbf{x}) = A \cdot x_1^2 \cdot x_2^3$

$$\forall t > 1, \; f(t\mathbf{x}) > tf(\mathbf{x})$$

- La función de producción f exhibe rendimiementos constantes a escala si:

$$\forall t > 1, \; f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$$

- La función de producción f exhibe rendimiementos decrecientes a escala si:

$$\forall t > 1, \; f(t\mathbf{x}) < tf(\mathbf{x})$$

Retornos a Escala: Ejemplos

Tecnología de Sustitutos Perfectos: $f(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]^\alpha \quad \alpha > 0$. Los rendimientos a escala de esta función dependen del valor de α:

- $\alpha < 1 \implies$ rendimientos decrecientes a escala.
- $\alpha = 1 \implies$ rendimientos constantes a escala.
- $\alpha > 1 \implies$ rendimientos crecientes a escala.

Tecnología Cobb-Douglas: $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \alpha, \beta > 0$. Los rendimientos a escala dependen del valor de $\alpha + \beta$.

- $\alpha + \beta < 1 \implies$ rendimientos decrecientes a escala.
- $\alpha + \beta = 1 \implies$ rendimientos constantes a escala.
- $\alpha + \beta > 1 \implies$ rendimientos crecientes a escala.

$$f(\mathbf{x}) = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} \quad , \qquad \alpha, \beta > 0 .$$

$$f(t \cdot \mathbf{x}) = f(tx_1, tx_2) = A\,(tx_1)^{\alpha} \cdot (t \cdot x_2)^{\beta}$$

$$= A\, t^{\alpha} \cdot x_1^{\alpha} \cdot t^{\beta}\, x_2^{\beta}$$

$$f(t\mathbf{x}) = t^{\alpha+\beta} \cdot \underbrace{A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}}_{f(\mathbf{x})}$$

$$f(t\mathbf{x}) = t^{\alpha+\beta} \cdot f(\mathbf{x})$$

REND. CREC. ESC: $f(t\mathbf{x}) > t\, f(\mathbf{x}) \iff \alpha+\beta > 1$

REND. CONST. ESC: $f(t\mathbf{x}) = t\, f(\mathbf{x}) \iff \alpha+\beta = 1$

REND. DECREC. ESC: $f(t\mathbf{x}) < t\, f(\mathbf{x}) \iff \alpha+\beta < 1$

$$f(\mathbf{x}) = [x_1 + x_2]^{\alpha}$$

$$f(t\mathbf{x}) = [tx_1 + tx_2]^{\alpha}$$

$$= [t\,(x_1 + x_2)]^{\alpha}$$

$$= t^{\alpha} \cdot (x_1 + x_2)^{\alpha}$$

$$f(t\mathbf{x}) = t^{\alpha} \cdot f(\mathbf{x})$$

REND. CREC. ESC: $f(t\mathbf{x}) > t\, f(\mathbf{x}) \iff \alpha > 1$

REND. CONST. ESC: $f(t\mathbf{x}) = t\, f(\mathbf{x}) \iff \alpha = 1$

REND. DECREC. ESC: $f(t\mathbf{x}) < t\, f(\mathbf{x}) \iff \alpha < 1$