UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA
MAESTRÍA EN ECONOMÍA — MAESTRÍA EN ECONOMETRÍA
2022

Econometría
Problem Set 0
Repaso de Matemática

---

1. Un breve repaso...

Sea A una matriz de $n \times K$.

- Si $n = K$, A es una matriz **cuadrada**. Algunos tipos de matrices cuadradas son:
  - Matriz **simétrica**: Es aquella en la cual $a_{ik} = a_{ki}$ para todo i y k. Una matriz es simétrica si y sólo si $A = A'$.
  - Matriz **diagonal**: Los únicos elementos distintos de 0 aparecen en la diagonal principal.
  - Matriz **escalar**: Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal valen lo mismo.
  - Matriz **ortogonal:** $A'A = AA' = I$. Una matriz es ortogonal si y s'olo si $A' = A^{-1}$.
- Matriz **idempotente**: Una matriz M es idempotente si $M^2 = MM = M$.
- Si M es una matriz idempoténte y simétrica, entonces $M'M = M$.
- Matriz **no singular**: Una matriz es **no singular** si y s'olo si tiene inversa. Es decir, A es no singular si existe M^{-1}.

Algunos resultados a tener en cuenta:
Dada una matriz A cuadrada...

- $(AB)' = B'A'$
- $(ABC)' = C'B'A'$
- Para que sea no singular, $|A| \neq 0$.
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
- Si A es simétrica, entonces A^{-1} es simétrica.
- Si ambas inversas existen: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
- Sea B otra matriz cuadrada. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.
- $\det(A') = \det(A)$

Dada una matriz A cuadrada, considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Ac = \lambda c$$

Los vectores c que resuelven este sistema se llaman "vectores característicos" o "autovectores", y están asociados a "raíces características" o "autovalores" λ.

¿Cómo resolver el sistema para encontrar c y λ?

$$\begin{aligned} Ac &= \lambda I c \\ (A - \lambda I)c &= 0 \end{aligned}$$

Para que este sistema homogéneo tenga una solución distinta de cero, se requiere que la matriz $(A-\lambda I)$ sea singular (no inversible), i.e., que su determinante sea 0 :

$$|A-\lambda I| = 0$$

Este es un polinomio en λ que se denomina "ecuación carateristica" de A.

A tener en cuenta: las raíces características de una matriz simétrica (por ejemplo, una matriz $X'X$) son reales.

Para encontrar c, retomamos:

$$(A-\lambda I)c = 0$$

Una matriz simétrica A de KxK tiene K autovectores distintos $c_1, c_2, ..., c_K$ que son ortogonales entre sí, con los correspondientes autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ (que no necesariamente son iguales entre sí). Sea C una matriz KxK formada a partir de dichos autovectores, i.e:

$$C = [c_1 \;\; c_2 \; ... \;\; c_K]$$

Por su parte, sea Λ una matriz diagonal de KxK formada a partir de los autovalores:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_K \end{bmatrix}$$

Todas las ecuaciones $Ac_i = \lambda_i c_i$ están contenidas en:

$$AC = C\Lambda$$

Como los autovectores son ortogonales y $c_i'c_i = 1$ para todo $i = 1, ..., K$[1], resulta que $C'C = I$ (i.e., es ortogonal). Esto implica que $C' = C^{-1}$.

Dada una matriz A de KxK, notar que:

$$C'AC = C'C\Lambda = I\Lambda = \Lambda$$

De modo que:

$$\begin{aligned} C'AC &= \Lambda \\ C^{-1}AC &= \Lambda \\ AC &= C\Lambda \\ A &= C\Lambda C^{-1} \\ \text{Y si } A \text{ es simétrica} &: \\ A &= C\Lambda C' \end{aligned}$$

Como C es ortogonal, se dice que A es "diagonalizable ortogonalmente".[2]

Dada una matriz A simétrica:

- Si $x'Ax > 0$ para todo vector x distinto de 0, entonces A es **definida positiva.**
- Si $x'Ax < 0$ para todo vector x distinto de 0, entonces A es **definida negativa.**
- Si $x'Ax \geqslant 0$ para todo vector x, entonces A es **semidefinida positiva.**
- Si $x'Ax \leqslant 0$ para todo vector x, entonces A es **semidefinida negativa.**

A tener en cuenta:

- Si todos los autovalores de A son positivos, A es definida positiva.

[1]Esto es una convención: dado un autovector c asociado a un autovalor λ, cualquier vector kc es también un autovector asociado a λ. Entonces, se suele normalizar al autovector c tal que $c'c = 1$. ¿Cómo? Simplemente dividir a todos los elementos del vector c por $\sqrt{c_1^2 + ... + c_K^2}$.

[2]Diagonalizar una matriz cuadrada A quiere decir descomponerla como $A = P^{-1}DP$, donde P es una matriz invertible cuyos vectores columna son autovectores de A, y D es una matriz diagonal formada por los autovalores de A.

Si P es una matriz ortogonal, entonces se dice que A es diagonalizable ortogonalmente, y se puede escribir como: $A = PDP'$. Cualquier matriz cuadrada simétrica (con coeficientes reales) es diagonalizable ortogonalmente.

- Si todos los autovalores de A son negativos, A es definida negativa.
- Si algunos autovalores son 0 y los restantes positivos, A es semidefinida positiva.
- Si algunos autovalores son 0 y los restantes negativos, A es semidefinida negativa.

Sea x un vector aleatorio con $E(x) = \mu$ y $Var(x) = E[(x-\mu)(x-\mu)'] = \Sigma$ ("matriz de varianzas y covarianzas"), entonces, dada una matriz $A: E[Ax] = A\mu$ y $Var[Ax] = A\Sigma A'$.

Método Delta:

- **Escalar o univariado:**
  Sea Z_n una secuencia de variables aleatorias tal que converge a una normal: $\sqrt{n}(Z_n - w) \rightarrow N(0, \sigma^2)$. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable y con derivada primera continua en w. Entonces vale que:

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(w)) \rightarrow N(0, g'(w)^2\sigma^2)$$

- **Vectorial o multivariado:**
  Sea $Z_n = \begin{bmatrix} Z_{n,1} \\ \vdots \\ Z_{n,p} \end{bmatrix}$ una secuencia de vectores aleatorios en $\mathbb{R}^p$ tal que converge a una normal p-variada: $\sqrt{n}(Z_n - w) \rightarrow N_p(0, \Sigma)$. Sea $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferenciable y con derivadas parciales continuas en w. Entonces vale que:

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(w)) \rightarrow N_q(0, [\nabla g(w)]' \, \Sigma \nabla g(w))$$

  Donde:

$$g(u_1, ..., u_p) = \begin{bmatrix} g_1(u_1, ..., u_p) \\ \vdots \\ g_q(u_1, ..., u_p) \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{pxq}{\nabla g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}$$

Cambio de variable:
Sea $f_X(x)$ la función de densidad de una variable aleatoria X. Sea $Y = g(X)$, donde g es monótona y sea g^{-1} su función inversa. Entonces la función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) \right|$$

Sea $f_X(x)$ la función de densidad de un vector aleatorio X. Sea $Y = H(X)$, donde H es biyectiva y diferenciable. Entonces la función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \left| \det \nabla(H^{-1}(y)) \right|$$

2. Problemas

Ejercicio 1 *Si A es una matriz simétrica y definida positiva, mostrar que puede hallarse una matriz P no singular tal que se verifica que $A = PP'$.*

Ejercicio 2 *Sea x un vector aleatorio de $n \times 1$ tal que $x \sim N(\mu, \Sigma)$, donde Σ es una matriz simétrica y definida positiva. Mostrar que*

$$(x-\mu)' \, \Sigma^{-1} \, (x-\mu) \sim \chi^2 \, (n) \, .$$

Ejercicio 3 *Sea x un vector aleatorio de $n \times 1$, siendo $x \sim N(0_n, I_n)$, y A y B son matrices de $n \times n$ simétricas e idempotentes. Mostrar que las formas cuadráticas $x'Ax$ y $x'Bx$ son independientes si y sólo si $AB = 0$.*

Ejercicio 4 *Sean x e y variables aleatorias con función de densidad conjunta*

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{C}{2(1-\rho^2)}\right], \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

donde

$$C = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right),$$

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad \sigma_x^2 = var(X), \qquad \sigma_y^2 = var(Y).$$

Mostrar que las variables aleatorias u y v,

$$u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} + \frac{y-\mu_y}{\sigma_y},$$
$$v = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sigma_y},$$

son independientes y tienen distribución normal con media cero y varianza $2(1+\rho)$ y $2(1-\rho)$, respectivamente.