Práctica 1
Espacios muestrales y eventos. Conteo.

1. Espacio muestrales, eventos y propiedades

1.1. Ejercicio 1

Dos dados equilibrados se arrojan de forma secuencial y se registran los valores obtenidos.

i. Liste los resultados del espacio muestral Ω. Clasifique su cardinal según corresponda: finito, infinito numerable o infinito no numerable. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada resultado posible?

ii. Liste los elementos de los siguientes eventos:

$$A = \{\text{La suma de ambos resultados es de al menos (es por lo menos) 5}\}$$
$$B = \{\text{El valor del primer dado es mayor al valor del segundo}\}$$
$$C = \{\text{El valor del primer dado es 4}\}$$

iii. Liste los elementos de $A \cap C, B \cup C$ y $A \cap (B \cup C)$.

iv. Liste los resultados del espacio muestral Ω y la probabilidad de cada posible resultado si dos dados se arrojan **simultáneamente**. Note qué diferencias observa respecto el inciso i.

1.2. Ejercicio 2

Ana, Beatriz y Cecilia tiran la misma moneda en ese orden sucesivamente hasta que salga cara (c) por primera vez. Quien obtiene cara por primera vez, gana.

Si no sale cara, sale cruz ($\times$). El espacio muestral, entonces, está dado por:

$$\Omega = \{c, \times c, \times \times c, \times \times \times c, \dots\}$$

Defina los siguientes eventos

$$A = \{\text{Ana gana}\} \quad B = \{\text{Beatriz gana}\} \quad C = \{\text{Cecilia gana}\}$$

i. Explique qué denota cada elemento de Ω.

ii. Defina, en términos de subconjuntos de Ω, los eventos A, B y $(A \cup B)^c$.

1.3. Ejercicio 3

Suponga el siguiente experimento: Usted arroja un dado hasta que aparece el número 1, una vez que esto ocurre el experimento culmina.

i. ¿Cuál es el espacio muestral Ω de este experimento? Clasifique su cardinal según corresponda: finito, infinito numerable o infinito no numerable.

ii. Denote por A_m al evento en que se necesitan m tiros hasta obtener por primera vez el número 1. ¿Qué elementos del espacio muestral están contenidos en A_m ?

iii. ¿Qué evento describe el conjunto $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c$?

1.4. Ejercicio 4

Usted está interesado en investigar sobre la relación entre nivel educativo y la intención de voto en las próximas elecciones presidenciales entre el personal administrativo de la universidad. Usted considerará dos niveles de estudio - universitario completo y universitario incompleto- y los votos pueden ir al Partido Justicialista, Unión Cívica Radical o Independientes. Suponga que no es posible votar en blanco ni impugnar el voto. Si en la universidad hay 10 empleados administrativos:

i. ¿Cuántos resultados posibles hay en el espacio muestral?

ii. ¿Cuántos resultados hay en el evento en el que al menos un miembro del personal administrativo tenga nivel educativo igual a universitario incompleto?

iii. ¿Cuántos resultados hay en el evento en el que ningún miembro del personal administrativo votará a un Independiente?

1.5. Ejercicio 5

Clasifique las siguientes igualdades como verdaderas o falsas

i. $[A \cup B \cup C \cup D]^c = A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c$

ii. $[(A \cup B) \cap (C \cup D)]^c = \left(A^c \cap B^c\right) \cup \left(C^c \cap D^c\right)$

iii. $\left[A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c\right]^c = A \cup B \cup C \cup D$

iv. Si dos eventos son mutuamente excluyentes, entonces son exhaustivos.

1.6. Ejercicio 6

A partir de los axiomas vistos en clase, demuestre las siguientes propiedades:

i. $P(A) = 1 - P\left(A^c\right)$

ii. $P(\varnothing) = 0$

iii. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

iv. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Ejercicios de conteo y probabilidades

2.1. Ejercicio 1: contando arreglos

2.1.1. Trabajadores y puestos

Si veinte trabajadores se asignan a veinte puestos, uno en cada puesto, ¿Cuántos arreglos diferentes posibles existen?

2.1.2. The Beatles e instrumentos

Suponga que en la banda de *The Beatles* los 4 integrantes podían tocar los 4 instrumentos más usados por la banda (guitarra, bajo, batería y piano). ¿De cuántas formas diferentes podrán distribuirse los instrumentos a la hora de grabar una canción? Suponga ahora que en realidad George Harrison y Ringo Star sólo pueden tocar la batería y la guitarra (ambos instrumentos) ¿Cuántos posibles arreglos de instrumentos asignados uno a cada miembro de la banda posibles podría haber entonces?

2.1.3. Permutaciones de letras

¿Cuántos arreglos diferentes de letras se pueden hacer a partir de las siguientes palabras?

i. MURCIÉLAGO

ii. PARPADEO

iii. PROBABILIDAD

iv. MISSISSIPPI

2.1.4. Pasantías en organismos internacionales

En los organismos internacionales suele existir una cuota de regiones para las pasantías. Suponga que para Asia el cupo es de 10, para América del Sur es de 7, para Europa de 4 y para América Central de 2. Si hay 50 candidatos de Asia, 15 de América del Sur, 7 de Europa y 3 de América Central; ¿de cuántas formas diferentes pueden otorgarse las pasantías?

2.1.5. Sentando a los invitados

Usted está planeando una reunión y para ello invita a 8 amigos, 4 de Independiente y 4 de Racing. Si los invitados se sientan en una fila (uno al lado del otro) ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse, si

i. no hay restricciones en la forma de sentarse?

ii. las personas A y B siempre deben sentarse juntas?

iii. sólo un hincha de Independiente y uno de Racing pueden sentarse juntos?

iv. los invitados son cuatro parejas que deben sentarse juntas?

2.1.6. Patentamientos en Argentina

El sistema de patentamiento de Argentina consistía en tres letras (de la A a la Z) y tres números (del 0 al 9). Recuerde que, en este sistema, las letras están a la izquierda de los números. Las letras desde la R a la Z están reservados para los autos que existían bajo el antiguo régimen de patentamiento. Las letras de la A a la Q se destinan a los nuevos patentamientos. En el año 2011 hay autos cuyas patentes comienzan con la letra K. Sin contar esta letra, ¿cuántos pantentamientos quedaban por hacer en Argentina en el año 2011?

2.1.7. Mesa redonda (permutaciones cíclicas)

i. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 8 personas en una mesa circular de manera que lo único que importe es quién se sienta al lado de quién, no en qué asiento específico se sienta cada persona?

ii. Suponga ahora que de esas 8 personas hay 1 pareja, ¿en cuántas configuraciones diferentes se puede sentar la pareja junta?

iii. Suponga ahora que de esas 8 personas hay 4 parejas, ¿en cuántas configuraciones diferentes se sientan cada una de la parejas juntas?

iv. Suponga ahora que de esas 8 personas hay 4 parejas, ¿en cuántas configuraciones diferentes se sientan 3 de las 4 parejas al lado de su media naranja?

v. Suponga ahora que de las 8 personas están los cuatro Beatles y se quieren sentar juntos de manera que Ringo esté pegado a la izquierda de Lennon y Lennon esté pegado a la izquierda de McCartney, ¿cuántas configuraciones diferentes existen?

v. Suponga ahora que de las 8 personas están los cuatro Beatles y se quieren sentar juntos Ringo, Lennon y McCartney en cualquier orden, ¿cuántas configuraciones diferentes existen?

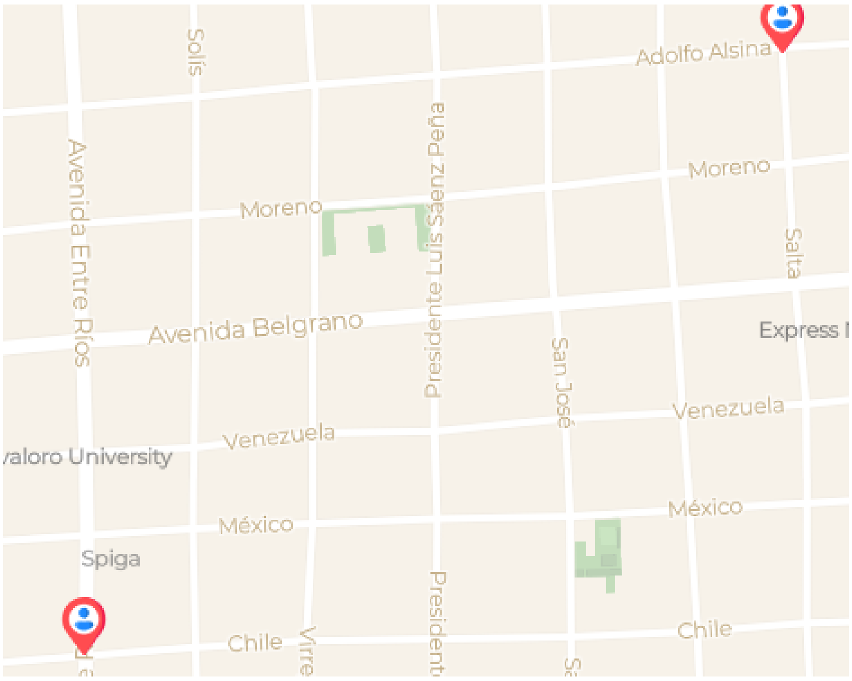
2.1.8. Bolitas indistinguibles y cajitas

i. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar $N \geq 2$ bolitas indistinguibles en $k \geq 4$ cajitas si tiene que pasar que en la segunda cajita tiene que haber **exactamente** 1 bolita y también que en la cuarta tiene que haber **exactamente** 1 bolita?

ii. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar $N \geq 2$ bolitas indistinguibles en $k \geq 4$ cajitas si tiene que pasar que en la segunda cajita tiene que haber **exactamente** 1 bolita o que en la cuarta tiene que haber **al menos** 1 bolita?

2.1.9. Caminos posibles

Imagine que se encuentra en la esquina de las calles Chile y Entre Ríos, y que quiere llegar a la esquina de las calles Salta y Adolfo Alsina.¿Cuántos caminos diferentes puede tomar? Asuma que **solamente puede ir hacia adelante y hacia a la derecha doblando en las esquinas** (no hay galerías que le permitan caminar por la mitad de la manzana), caminando por las veredas (suponga por la duración del ejercicio que usted no es Spiderman ni puede usar su telaraña).



2.2. Ejercicio 2: calculando probabilidades

2.2.1. Suponga que hay una urna con 3 bolillas, una roja, una verde y una azul. Ud. toma una muestra de tamaño 2 con reposición

i. ¿Cuántos elementos hay en el espacio muestral?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una bolilla sea roja?

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las bolillas seleccionada sea roja?

iv. Repita si el muestreo es sin reposición

2.2.2. Usted elije al azar, sin reposición 5 cartas de un mazo de 52 cartas con palos ♣♦♠♥.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que le toque exactamente un par simple?

ii. ¿Un par doble?

iii. ¿Un full?

iv. ¿Un póker?

v. ¿Un póker de ases?

2.2.3. Representación de países en comités

En un grupo de personas hay cinco australianos, dos asiáticos, tres africanos y cuatro americanos. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los continentes resulten representados seleccionando comités de cuatro personas? ¿Cuál es la probabilidad de que todos los continentes resulten representados seleccionando comités de cinco personas?

2.2.4. Suponga que usted tiene n llaves, sólo una de ellas abre la puerta. ¿Cuál es la probabilidad de que logre abrir la puerta en el k-ésimo intento si:

i. descarta cada llave que no logra abrir la puerta?

ii. no descarta ninguna llave que no logra abrir la puerta?

2.2.5. Una escuela primaria tiene 100 alumnos. Dicha escuela ofrece tres clases de idioma: inglés, portugués y francés. Hay 28 alumnos en la clase de inglés, 26 en la de francés y 16 en la de portugués. Hay 12 alumnos que toman simultáneamente inglés y francés, cuatro que simultáneamente acuden a clases de inglés y portugués y 6 que están en la clase de francés y portugués. Sólo hay 2 alumnos en tomando las tres clases.

i. Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté en ninguna de las clases de idioma?

ii. Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté tomando solo una clase de idioma?

iii. Si dos alumnos se eligen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el menos uno esté tomando una clase de idioma?

2.2.6. Arrojando dados

i. Usted arroja dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer dado sea igual a seis, dado que la suma de ambos resultados es igual a i? Compute el cálculo para $2 \leq i \leq 12$.

ii. Usted arroja dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un dado sea igual a 6 dado que los dados arrojan resultados diferentes?

2.2.7. Urna y bolillas

Una urna contiene 6 bolillas blancas y 9 bolillas negras. Si 4 bolillas son extraídas aleatoriamente y sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que las primeras dos elegidas sean blancas y las segundas dos sean negras? ¿Cambia su respuesta obtenido si el muestreo es con reposición?

2.2.8. Probabilidad de default y deuda externa

La probabilidad de que un país entre en default de deuda y tenga una razón de deuda externa a PBI mayor a 1 es el doble a la de un país que entra en default de deuda y tiene una razón de deuda externa a PBI menor o igual a 1. Si el 32 % de los países entran en default y tienen una razón de deuda externa a PBI mayor a 1, ¿Cuál es el porcentaje de países, que habiendo entrado en default, tengan una razón de deuda externa a PBI mayor a 1?

2.2.9. Cumpleaños y estaciones del año

En un año hay cuatro estaciones. Suponemos que la probabilidad de nacer en una estación del año (verano, otoño, primavera e invierno) es equiprobable. En un grupo de 7 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya por lo menos una persona nacida en cada estación?

2.2.10. Un poco más del principio de inclusión exclusión

Sea (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad donde se considera una familia finita de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Demuestre que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right)$$