# Práctica 3
## Variables aleatorias discretas

## 1. Ejercicio 1

Cinco hombres y cinco mujeres se ordenan según su desempeño en un examen. Sea $X$ la posición más alta alcanzada por una mujer. Esto es, $X = 1$ implica que la persona que mayor puntaje obtuvo en el examen es una mujer. Encuentre la función de probabilidad de masa de $X$.

## 2. Ejercicio 2

Sea $X_i$ una variable aleatoria que toma el valor 1 si la persona $i$ votará en las próximas elecciones al candidato A. Suponga que Ud. encuesta a 25 personas. Defina $T = \sum_{i=1}^{25} X_i$ y encuentre un expresión para $P(T = t)$. Establezca los supuestos debió hacer.

## 3. Ejercicio 3

Muchos fabricantes tienen programas de control de calidad que incluyen la inspección de materiales recibidos para verificar que no tengan defectos. Supongamos que un fabricante de computadoras recibe tarjetas de computadora en lotes de cinco. Se seleccionan dos tarjetas de un lote para inspeccionarlas. Podemos representar los posibles resultados del proceso de selección por pares. Por ejemplo, el par $(1, 2)$ representa la selección de las tarjetas 1 y 2 para inspeccionarlas.

(a) Hacer una lista de los posibles resultados.

(b) Supongamos que las tarjetas 1 y 2 son las únicas defectuosas en un lote de cinco. Se van a escoger dos tarjetas al azar. Se define $X$ como el número de defectuosas observado entre las inspeccionadas. Encontrar la función de probabilidad puntual de $X$.

(c) Si se denota $F(x)$ la función de distribución acumulada de $X$, determinar primero $F(0)$, $F(1)$ y $F(2)$ y luego obtener $F(x)$ para toda otra $x$.

## 4. Ejercicio 4

Sea $X$ una variable aleatoria con función de distribución acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,3 & 1 \leq x < 3 \\ 0,4 & 3 \leq x < 6 \\ 0,6 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x \end{cases}$$

y sean los eventos $A = [3, 6]$ y $B = [4, \infty)$

(a) Hallar la función de probabilidad puntual de $X$.

(b) Calcular $P(A)$, $P(B)$, $P\left(B|A^c\right)$ y $P(A|B)$ de dos maneras: utilizando la función de distribución y utilizando la función de probabilidad puntual.

(c) Halle la esperanza de $X$.

(d) si $Y$ es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad puntual $p(y)$, función de distribución $F(y)$ y $sop(Y) = \{y : y \in \mathbb{N} \text{ tal que } \underline{y} \leq y \leq \overline{y}\}$, demostrar la siguiente relación entre las funciones de probabilidad puntual y acumulada:

$$p(k) = F(k) - F(k-1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

## 5. Ejercicio 5

Para recaudar fondos una sociedad de beneficencia propone a los participantes de un evento el siguiente juego: a cambio de \$90 el participante lanza dos dados equilibrados. Si el mínimo de esos dados es 5 o 6 recibe \$300, si ese mínimo fuese 1 o 2 pierde los \$90 que había abonado y en los otros casos, recibe los \$90 que había pagado inicialmente.

(a) Hallar la distribución de $X = \text{mín}\{D_1, D_2\}$ donde $D_i$ es el número obtenido en el dado $i$. Es decir, $X$ es el valor mínimo obtenido al lanzar los dos dados.

(b) Defina $G$ como la ganancia neta del juego. Encuentre la función de distribución acumulada de $G$ y calcule la ganancia neta esperada.

(c) Suponga que se ha arrojado el primer dado y se ha obtenido el número 6. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de $X$ ahora que se conoce que $D_1 = 6$?

(d) Compute la esperanza de la ganancia del juego condicional a que ha salido el número 6 en el primer dado.

(e) Repita los incisos (c) y (d) si ahora $D_1 = 5$.

(f) Repita los incisos (c) y (d) si ahora $D_1 = 4$. ¿Cambia algo entre los incisos (d), (e) y (f)? Comente.

## 6. Ejercicio 6

Sea $X$ una variable aleatoria que cumple

$$P(X = 0) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

Encuentre la función generatriz de momentos de $X$, $M_X(t)$.

## 7. Ejercicio 7 *(Adicional, para repasar)*

Sea $X$ una variable aleatoria que toma valores entre -2, 1 y 2 con probabilidades: $p_X(-2) = 0{,}3$, $p_X(1) = 0{,}2$ y $p_X(2) = 0{,}5$. Hallar la función de probabilidad puntual, la esperanza y varianza de

(a) $Y = -3X + 2$

(b) $W = X^2 - 2$

(c) $Z = \ln(X + 3)$

(d) $V = |X|$

## 8. Ejercicio 8

La fabricación de pantallas táctiles es un proceso complicado, lo que tiene como principal consecuencia que el 5 % de la producción es defectuosa. Sea $X$ el número de pantallas defectuosas en una muestra elegida al azar de tamaño $n = 20$, calcular

(a) $P(X < 3)$

(b) Probabilidad de que el número de pantallas defectuosas sea al menos 5.

(c) Probabilidad de que el número de pantallas defectuosas sea a lo sumo 8.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las 20 pantallas sea defectuosa?

## 9. Ejercicio 9

Supongamos que un motor de avión falla con probabilidad $p$ independientemente de los otros motores del mismo avión. Un avión funciona correctamente si la mayoría de los motores lo hacen.

(a) Sin efectuar cálculos: ¿qué piensa que será más conveniente para la construcción de un avión confiable, colocar tres motores o cinco motores?

(b) Efectuando cálculos analícelo para $p = 0,4$, $p = 0,5$ y para $p = 0,6$. Concluya.

## 10. Ejercicio 10

Se pide al decano de la facultad de Economía de cierta Universidad que seleccione tres estudiantes para integrar determinado comité. Se presentan como voluntarios 20 estudiantes de primer año y 30 de segundo. Si del total de 50 voluntarios el decano selecciona al azar a los tres estudiantes requeridos:

(a) ¿cuál es la probabilidad de que sean elegidos uno de primer año y dos de segundo año?

(b) ¿cuál es la probabilidad de que sea elegido por lo menos 1 de primer año?

(c) ¿Cuál es la distribución del número de estudiantes de primer año seleccionados? ¿Qué relación tiene con la distribución de los estudiantes de segundo año seleccionados?

## 11. Ejercicio 11

Suponga que $p = P($ Tener un hijo varón $) = 0,5$. Una pareja desea tener exactamente dos niñas en su familia. Tendrán hijos hasta que se satisfaga esta condición.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga $x$ hijos?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga cuatro hijos?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga a lo sumo 4 hijos?

(d) ¿Cuántos hijos se esperaría que tenga esta familia? ¿Cuántos hijos varones?

## 12. Ejercicio 12

Una familia decide tener hijos hasta que tenga tres hijos del mismo sexo. Si se supone que $P($ Varón $) = P($ Mujer $) = 0,5$ , ¿cuál es la función de probabilidad puntual de la varuable aleatoria $X = \{$ Número de hijos de la familia $\}$ ¿La variable $X$ tiene distribución conocida?

# 13. Ejercicio 13

Sea $X$ el número de automóviles de un año y modelo particular que en algún momento en el futuro sufrirán un falla grave en el mecanismo de dirección, que ocasionará pérdida completa de control a alta velocidad”. Suponga que $X$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 10$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 10 automóviles sufran dicha falla?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 10 y 15 (inclusive) autos sufran dicha falla?

# 14. Ejercicio 14

Si $X \sim P(\lambda = 7,5)$, hallar el valor de $k$ tal que $P(X = k)$ sea máxima, es decir, la moda de la distribución.

# 15. Ejercicio 15

Suponga que aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto según un proceso de Poisson con tasa de $\alpha = 8$ aviones por hora, de modo que el número de llegadas durante un período de $t$ horas es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 8t$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 aviones pequeños lleguen durante un período de una hora? ¿Por lo menos 5? ¿Por lo menos 10?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 20 aviones pequeños lleguen durante un período de 2 horas y media? ¿De que a lo sumo 10 lleguen durante este período?

# 16. Ejercicio 16

(a) Mostrar que las probabilidades $p(0), p(1), \ldots$ de una variable $X$ con distribución de Poisson pueden calcularse recursivamente mediante la siguiente expresión:

$$p_X(k) = \frac{\lambda}{k} p_X(k-1) \quad k = 1, 2, \ldots$$

(b) Un teléfono recibe llamados en una cierta residencia según un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 2$ llamadas por horas.

(i) Si Diana se ducha durante 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que no pierda ninguna llamada?

(ii) ¿Cuán larga puede ser a lo sumo la ducha si desea que la probabilidad de no perder ninguna llamada supere 0,5?

# 17. Ejercicio 17

Defina la función $p(x; \lambda, \mu)$ mediante

$$p(x;\lambda,\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} + \frac{1}{2} e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!} & x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

(a) Demuestre que $p(x; \lambda, \mu)$ satisface las dos condiciones necesarias para especificar una pmf. Nota: Si una empresa utiliza dos mecanógrafas $A$ y $B$, las cuales cometen errores tipográficos a razón de $\lambda$ por página y a razón de $\mu$ por página, respectivamente; y cada una hace la mitad de lo que la empresa requiere mecanografiar, entonces $p(x; \lambda, \mu)$ es la pmf de $X = \{$ Número de errores en una página seleccionada al azar $\}$.

(b) ¿Cuál es la distribución de $Y = \{$ Número de errores en una página seleccionada al azar, tipeada por la mecanógrafa $A\}$?

(c) ¿Cuál es la distribución de $Z = \{$ Número de errores en una página seleccionada al azar, tipeada por la mecanógrafa $B\}$ ?

## 18. Ejercicio 18

Una caja contiene tres dados blancos y uno negro. Se toma un dado al azar. Si el dado es blanco, se lo arroja reiteradamente hasta obtener un número mayor que 3. Si el dado extraído es negro, se lo arroja repetidamente hasta obtener un as. Definimos $X = \{$ Cantidad de veces que se arroja un dado $\}$.

(a) Si el dado extraído es blanco, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan precisado 5 tiros hasta obtener un número mayor que 3? ¿Cuál es la distribución de $X$ condicional a elegir un dado blanco?

(b) Si el dado extraído es negro, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan precisado 5 tiros hasta obtener un as? ¿Cuál es la distribución de $X$ condicional a elegir un dado negro?

(c) Halle la probabilidad de que se arroje el dado 5 veces.

## 19. Ejercicio 19

El número de peras que se recogen en un día de cosecha en un pequeño campo es una variable aleatoria Z que sigue una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 800$. De las $Z$ peras recogidas, un número $X$ de ellas cumplen las especificaciones de tamaño y peso para su comercialización. Supongamos que dado $Z$, la probabilidad que una pera al azar pueda ser comercializada es $0,6$. Encuentre la distribución de $X \mid Z = z$. Encuentre la distribución de $X$. Ayuda: recuerde que $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{t^y}{y!} = e^t$.

## 20. Ejercicio 20

Un mecánico tiene 7 fusibles en una caja de herramientas, sólo cuatro de esos 7 son adecuados para el modelo del auto que está reparando. Elige fusibles en forma aleatoria.

(a) Si cada vez que prueba un fusible y no es el adecuado lo vuelve a colocar en la caja, se define la variable $X$ el número de intentos que realiza hasta hallar el fusible adecuado

(i) ¿Cuál es distribución de la variable $X$? ¿Cuál es su esperanza y varianza? (ii) Calcule la probabilidad de que se precisen como mínimo 3 intentos hasta hallar el fusible adecuado.

(b) Si cada vez que prueba un fusible no lo vuelve a colocar en la caja, se define la variable $Y$ como el número de intentos que realiza hasta hallar el fusible adecuado

(i) Calcule la función de probabilidad puntual de $Y$.

(ii) Calcule la esperanza y la varianza de $Y$.

## 21. Ejercicio 21

Los registros de ventas diarias de una empresa fabricante de computadoras muestran que venderán 0,1 o 2 sistemas centrales de cómputo con la probabilidad dada por la siguiente tabla:

| Número de ventas | Probabilidad |
|---|---|
| 0 | 0,7 |
| 1 | 0,2 |
| 2 | 0,1 |

(a) Halle la distribución de probabilidad puntual y la acumulada de la variable X que cuenta el número de ventas en dos días de trabajo suponiendo independencia entre las ventas de uno u otro día.

(b) Sabiendo que en un período de dos días se han registrado ventas, calcule la probabilidad de que se hayan registrado más de 2 ventas.

(c) La cantidad de reparaciones que necesita uno de estos sistemas centrales de cómputo sigue un proceso Poisson de tasa media de ocurrencia 0,025 reparaciones por hora de uso.

(d) Calcule la probabilidad de un sistema necesite a lo sumo 4 reparaciones cuando se lo usa durante 10 días sin interrupción.

(e) Se ponen en funcionamiento 5 de estos sistemas durante 10 días sin interrupción, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de ellos necesite a lo sumo 4 reparaciones?

## 22. Ejercicio 22

Una máquina electrónica de venta de café da una ganancia de 120 pesos por semana (6 días de trabajo) si no tiene desperfectos. Se contrata un service para reparar la máquina que: cobra 20 pesos por cada desperfecto si en la semana se producen a lo sumo 3 desperfectos; si se producen 4 o más desperfectos en la misma semana el costo de la reparación total abonado es de 70 pesos. Si el número de desperfectos semanales sigue un proceso Poisson de tasa media de ocurrencia 2 :

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 15 días de trabajo se produzcan más de 3 desperfectos?

(b) Halle la función de probabilidad puntual de la variable ganancia neta semanal. ¿Cuál es la ganancia esperada la venta semanal de café?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran 5 semanas de trabajo consecutivas hasta lograr que la ganancia de la semana sea de 120? ¿Qué suposición tuvo que efectuar para contestar a esta pregunta?

## 23. Ejercicio 23 *(Adicional, para practicar)*

(a) Encuentre la esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución Bernoulli con probabilidad de éxito $p$

(b) Encuentre la esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución Binomial con $n$ intentos y probabilidad de éxito $p$

(c) Encuentre la esperanza y varianza de una variable aleatoria con Poisson con tasa de ocurrencia promedio igual a $\lambda$

(d) Encuentre esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución geométrica con probabilidad de éxito igual a $p$

## 24. Ejercicio 24

Sea $X$ es una variable aleatoria discreta con media $\mathbb{E}(X)$ y varianza $Var(X)$, y sea demuestre entonces se cumple que si $Y = aX + b$:

(a) $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b$

(b) $\text{Var}(Y) = a^2\,\text{Var}(X)$.

# 25. Ejercicio 25

El juego de azar Quini 6 consiste en acertar 6 números de números que van desde 0 a 46. El costo una tarjeta de Quini 6 tiene un costo de \$4. El pozo estimado para el primer premio es de \$15,000,000. ¿Cuál es la ganancia esperada? ¿Cuántas veces espera jugar hasta ganar el primer premio? ¿Cuánto espera invertir hasta ganar el primer premio?

# 26. Ejercicio 26

Un puesto de periódicos ha solicitado cinco ejemplares de cierta edición de una revista de fotografía. Sea $X$ el número de individuos que entran a comprar esta revista. Si $X$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 4$, ¿cuál es el número esperado de ejemplares que se venderán?

# 27. Ejercicio 27

Repita el Ejercicio 23 usando la función generatriz de momentos.

# 28. Ejercicio 28

La demanda anual de autos en cierta concesionaria es una v.a. con distribución Poisson de parámetro $\lambda = 4$. Los ejecutivos de la concesionaria deciden que comenzaran cada año con un stock de tres autos para suplir la demanda. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se les plantean las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante el año?
2. ¿Cuál es la función de probabilidad puntual del número de autos vendidos en un año?
3. Suponga que la precio de cada auto es \$700.000 y el costo unitario para la concesionaria es de \$100.000. Hallar la función de probabilidad puntual de la ganancia anual de la concesionaria.

# 29. Ejercicio 29

Supongamos que Kasparov (campeón mundial de ajedrez) da simultáneas a 100 jugadores amateur. Cada partido es un ensayo de Bernoulli con resultados: *Kasparov pierde* (con probabilidad $p$) y *Kasparov gana* (con probabilidad $1 - p$). Supongamos que $p = 1/100$ y que los resultados de los partidos con cada uno de los amateurs son eventos simultáneamente independientes.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que Kasparov gane todos los partidos? Calcule la probabilidad precisamente y luego aproxime dicha probabilidad usando la distribución de Poisson.