Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 4:
Forma de Jordan y Formas Cuadráticas.

Ejercicio 1.

Ejercicio 8 (*).

Dada la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

q (x, y, z)= ax^2 *+* ay^2 *+ (a - 1)* z^2 *+ 2xy,*

donde a ∈ $\mathbb{R}$ *es fijo, clasificar q para los distintos valores de a.*

En primer lugar, para clasificar la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para los distintos valores de a, es necesario encontrar la matriz asociada a q (matriz A). En términos generales, la forma cuadrática q puede ser escrita en términos de esta matriz A como:

q (x, y, z)= $(x \quad y \quad z)$ A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

En particular, se tiene:

q (x, y, z)= $(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Luego, es necesario encontrar los autovalores de la matriz asociada A:

det (A - λI)= 0

det ($\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ - λ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)= 0

det ($\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$)= 0

det ($\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{pmatrix}$)= 0

$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{vmatrix}$= 0

(a - 1 - λ) [(a - λ) (a - λ) - 1]= 0

(a - 1 - λ) [$(a-\lambda)^2$ - 1]= 0.

Entonces, los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico de A:

a - 1 - λ= 0

λ_1= a - 1.

$(a-\lambda)^2$ - 1= 0

$(a-\lambda)^2$= 1

$\sqrt{(a-\lambda)^2}$= $\sqrt{1}$

$|a-\lambda|$= 1

a - λ= $\pm$1
λ= a $\mp$ 1
λ_2= a - 1.
λ_3= a + 1.

Se tiene que los autovalores de la matriz asociada A son: λ_1= a - 1, λ_2= a - 1 y λ_3= a + 1.

Por lo tanto, la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

- definida positiva si a $>$ 1, ya que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$.
- semidefinida positiva si a= 1, ya que λ_1= 0, λ_2= 0 y $\lambda_3 > 0$.
- definida negativa si a $<$ -1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$.
- semidefinida negativa si a= -1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y λ_2= 0.
- indefinida si -1 $<$ a $<$ 1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 > 0$.