UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA
MAESTRÍA EN ECONOMÍA | MAESTRÍA EN ECONOMETRÍA
2021

Econometría
Problem Set 0

1 Soluciones

1. *Si A es una matriz simétrica y definida positiva, mostrar que puede hallarse una matriz P no singular tal que se verifica que $A = PP'$.*

   A es simétrica $\Longrightarrow A = A'$

   A es definida positiva $\Longrightarrow v'Av > 0$ para todo $v \neq 0$. Todos los autovalores de A son positivos.

   Luego:

$$\begin{aligned} A &= C\Lambda C' \\ &= C\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}C' \end{aligned}$$

   Donde $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_K})$

Definamos:

$$P = C\Lambda^{\frac{1}{2}}$$

Esta matriz es no singular:

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \left(C\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ P^{-1} &= \left(\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} C^{-1} \\ P^{-1} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_K}}\right) C^{-1} \\ P^{-1} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_K}}\right) C' \end{aligned}$$

Como los autovalores de A son positivos, sabemos que P^{-1} existe.
Finalmente notar que:

$$\begin{aligned} PP' &= C\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(C\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)' \\ PP' &= C\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)' C' \\ PP' &= C\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}C' \\ PP' &= C\Lambda C' \\ PP' &= A \end{aligned}$$

2. *Sea x un vector aleatorio de $n \times 1$ tal que $x \sim N(\mu, \Sigma)$, donde Σ es una matriz simétrica y definida positiva. Mostrar que*

$$(x-\mu)' \Sigma^{-1} (x-\mu) \sim \chi^2(n)$$

   Primero, veamos algunos resultados que serán útiles.

   Al ser Σ una matriz definida positiva, como probamos en el punto 1., existe una matriz P no singular tal que

$$\Sigma = PP' \Longrightarrow \Sigma^{-1} = (P')^{-1}P^{-1}$$

Notar que:

$$\begin{aligned}
\det(\Sigma) &= \det(PP') \\
&= \det(P)\det(P') \\
&= \det(P)\det(P) \\
&= \det(P)^2 \\
\sqrt{\det(\Sigma)} &= |\det(P)|
\end{aligned}$$

Vale que:

$$P'\Sigma^{-1}P = P'(P')^{-1}P^{-1}P = I$$

Y que:

$$(P'\Sigma^{-1}P)^{-1} = P^{-1}\Sigma(P^{-1})' = I^{-1} = I$$

Definamos un vector aleatorio y de $nx1$ tal que $y = P^{-1}(x-\mu)$. Notar que:

$$E[y] = 0$$

$$\begin{aligned}
V[y] &= E[yy'] \\
&= E\left[P^{-1}(x-\mu)(x-\mu)'\left(P^{-1}\right)'\right] \\
&= P^{-1}E\left[(x-\mu)(x-\mu)'\right]\left(P^{-1}\right)' \\
&= P^{-1}\Sigma\left(P^{-1}\right)' \\
&= I
\end{aligned}$$

y es una transformación afín de un vector de variables normales, pero estas no son necesariamente independientes. Sin embargo, su distribución también será normal multivariada, como demostramos a continuación:
Siendo $y = g(x) \Rightarrow g^{-1}(y) = x$, entonces (cambio de variable):

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|\det(\nabla g^{-1}(y))|$$

Ahora consideremos:

$$\begin{aligned}
y &= P^{-1}(x-\mu) = P^{-1}x - P^{-1}\mu \equiv g(x) \\
x &= Py + \mu \equiv g^{-1}(y) \\
\nabla g^{-1}(y) &= P
\end{aligned}$$

Y tengamos en cuenta que:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det(\Sigma))^{\frac{1}{2}}}e^{\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y))|\det(\nabla g^{-1}(y))| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det(\Sigma))^{\frac{1}{2}}}e^{\left[-\frac{1}{2}(g^{-1}(y)-\mu)'\Sigma^{-1}(g^{-1}(y)-\mu)\right]}\sqrt{\det(\Sigma)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\left[-\frac{1}{2}(Py+\mu-\mu)'\Sigma^{-1}(Py+\mu-\mu)\right]} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\left[-\frac{1}{2}(Py)'\Sigma^{-1}(Py)\right]} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\left[-\frac{1}{2}y'P'\Sigma^{-1}Py\right]} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\left[-\frac{1}{2}y'y\right]}
\end{aligned}$$

En conclusión, $y \sim N\left(0_n, I_n\right)$.

La suma de variables aleatorias normales estándar independientes elevadas al cuadrado tiene una distribución χ_n^2. Luego $y'y = y_1^2 + ... + y_n^2 \sim \chi_n^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} y'y &\sim \chi_n^2 \\ \left[P^{-1}\left(x-\mu\right)\right]'\left[P^{-1}\left(x-\mu\right)\right] &\sim \chi_n^2 \\ \left(x-\mu\right)'\left(P'\right)^{-1}P^{-1}\left(x-\mu\right) &\sim \chi_n^2 \\ \left(x-\mu\right)'\left(PP'\right)^{-1}\left(x-\mu\right) &\sim \chi_n^2 \\ \left(x-\mu\right)'\Sigma^{-1}\left(x-\mu\right) &\sim \chi_n^2 \end{aligned}$$

3. *Sea x un vector aleatorio de $n \times 1$ $x \sim N(0_n, I_n)$ y A y B son matrices de $n \times n$ simétricas e idempotentes. Mostrar que las formas cuadráticas $x'Ax$ y $x'Bx$ son independientes si y sólo si $AB = 0$.*

   Dado que A y B son matrices simétricas e idempotentes:

$$\begin{aligned} x'Ax &= x'A'Ax = \left(Ax\right)'\left(Ax\right) = g(Ax) \\ x'Bx &= x'B'Bx = \left(Bx\right)'\left(Bx\right) = g(Bx) \end{aligned}$$

   Luego, si Ax es idependiente de Bx entonces $x'Ax$ es independiente de $x'Bx$.

   Como Ax y Bx son transformaciones lineales de un vector normal estándar:

$$\begin{aligned} Ax &\sim N(0_n, AA') = N(0_n, A) \\ Bx &\sim N(0_n, BB') = N(0_n, B) \end{aligned}$$

   Como se trata de vectores normales, para chequear que sean independientes basta con cjequear que la correlación es 0 :

$$\begin{aligned} Cov(Ax, Bx) &= E\left[\left(Ax\right)\left(Bx\right)'\right] \\ &= E\left[Axx'B\right] \\ &= AE\left[xx'\right]B \\ &= AI_nB \\ &= AB \end{aligned}$$

   Entonces, si $AB = 0 \Longrightarrow xB$ y xA son independientes $\Rightarrow x'Ax$ y $x'Bx$ son independientes.

4. *Sean x e y variables aleatorias con función de densidad conjunta*

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{C}{2(1-\rho^2)}\right], \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

   donde

$$C = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right),$$

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad \sigma_x^2 = \mathrm{var}(X), \qquad \sigma_y^2 = \mathrm{var}(Y).$$

   Mostrar que las variables aleatorias u y v,

$$u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} + \frac{y-\mu_y}{\sigma_y},$$

$$v = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sigma_y},$$

   son independientes y tienen distribución normal con media cero y varianza $2(1+\rho)$ y $2(1-\rho)$, respectivamente.

Trabajemos con C:

$C = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)$

$C = \frac{1}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2 + \frac{1}{\sigma_y^2}(y-\mu_y)^2 - 2\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}(x-\mu_x)(y-\mu_y)$

$C = [x-\mu_x \quad y-\mu_y]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}$

Ahora definamos:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma)} adj(\Sigma)$

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2}\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} & \frac{-\sigma_{xy}}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \\ \frac{-\sigma_{xy}}{\sigma_x^2\sigma_y^2} & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \end{bmatrix}$

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & \frac{-\rho}{\sigma_x\sigma_y} \\ \frac{-\rho}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}$

$(1-\rho^2)\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}$

Entonces, relancionándolo con el resultado anterior:

$C = [x-\mu_x \quad y-\mu_y](1-\rho^2)\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}$

$\frac{C}{(1-\rho^2)} = [x-\mu_x \quad y-\mu_y]\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}$

Definamos el vector aleatorio: $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $\mu_z = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}$, de modo que:

$\frac{C}{(1-\rho^2)} = (z-\mu_z)'\Sigma^{-1}(z-\mu_z)$

Luego:

$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{C}{2(1-\rho^2)}\right]$

$f_Z(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{2}{2}} \frac{1}{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z-\mu_z)'\Sigma^{-1}(z-\mu_z)\right]$

Recordar: $\det(\Sigma) = (1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2 \Rightarrow \sqrt{\det(\Sigma)} = \sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$. De modo que:

$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z-\mu_z)'\Sigma^{-1}(z-\mu_z)\right]$

Entonces: $z \sim N(\mu_z, \Sigma)$

Ahora consideremos el siguiente vector aleatorio:

$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$w = \begin{bmatrix} \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} + \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \\ \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \end{bmatrix}$

$w = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x} & \frac{1}{\sigma_y} \\ \frac{1}{\sigma_x} & -\frac{1}{\sigma_y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}$

$w = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x} & \frac{1}{\sigma_y} \\ \frac{1}{\sigma_x} & -\frac{1}{\sigma_y} \end{bmatrix}(z-\mu_z) \equiv h(z)$

Y vale que:

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x} & \frac{1}{\sigma_y} \\ \frac{1}{\sigma_x} & -\frac{1}{\sigma_y} \end{bmatrix}^{-1} w + \mu_z \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix} w + \mu_z = h^{-1}(w)$$

$$\nabla h^{-1}(w) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix}$$

Nuevamente usamos que:

$$f_W(w) = f_Z(h^{-1}(w))|\det(\nabla h^{-1}(w))|$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(h^{-1}(w) - \mu_z)'\Sigma^{-1}(h^{-1}(w) - \mu_z)\right] \frac{\sigma_y \sigma_x}{2}$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix} w\right)' \Sigma^{-1} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix} w\right)\right] \frac{\sigma_y \sigma_x}{2}$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix} w\right)' \Sigma^{-1} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix} w\right)\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{8} w' \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix} w\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{8} w' \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix}' \frac{1}{(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & \frac{-\rho}{\sigma_x \sigma_y} \\ \frac{-\rho}{\sigma_x \sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x \\ \sigma_y & -\sigma_y \end{bmatrix} w\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{8(1-\rho^2)} w' \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y \\ \sigma_x & -\sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x} - \frac{\rho}{\sigma_x} & \frac{1}{\sigma_x} + \frac{\rho}{\sigma_x} \\ \frac{1}{\sigma_y} - \frac{\rho}{\sigma_y} & -\frac{1}{\sigma_y} - \frac{\rho}{\sigma_y} \end{bmatrix} w\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{8(1-\rho^2)} w' \begin{bmatrix} 2(1-\rho) & 0 \\ 0 & 2(1+\rho) \end{bmatrix} w\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{4} w' \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\rho} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho} \end{bmatrix} w\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{4} [u \quad v] \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\rho} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{1+\rho} + \frac{v^2}{1-\rho}\right]\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{u^2}{1+\rho}\right] \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{v^2}{1-\rho}\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{4(1-\rho^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{u^2}{1+\rho}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{v^2}{1-\rho}\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2(1-\rho)2(1+\rho)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{u^2}{1+\rho}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{v^2}{1-\rho}\right]$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2(1+\rho)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{u^2}{2(1+\rho)}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi 2(1-\rho)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{v^2}{2(1-\rho)}\right]$$

La densidad conjunta de u y v es el producto de las densidades marginales de u y v :

$$\begin{aligned} u &\sim N(0, 2(1+\rho)) \\ u &\sim N(0, 2(1-\rho)) \end{aligned}$$

y ambas son independientes entre sí.