Apunte momentos y FGM - Parte 2

Lara Sánchez Peña

1. Esperanza y varianza de variables aleatorias continuas

1.1. Variable aleatoria uniforme

(a) Si $X \sim U(a,b)$ entonces

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(a+b)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(a^2+ab+b^2)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Entonces $Var(X) = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} - \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{12} = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

(b) $M_X(t) = \dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

Entonces

$$M_X'(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(be^{tb}-ae^{ta})t-(e^{tb}-e^{ta})}{t^2}$$

$$E(X) = \lim_{t\to 0} M_X'(t) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{\cancel{(be^{tb}-ae^{ta})}+t(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})-\cancel{(be^{tb}-ae^{ta})}}{2t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})}{2} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$M_X''(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^3-(be^{tb}-ae^{ta})2t^2+(e^{tb}-e^{ta})2t}{t^4}$$

$$M_X''(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^2-2t(be^{tb}-ae^{ta})+2(e^{tb}-e^{ta})}{t^3}$$

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} M_X''(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^2-2t(be^{tb}-ae^{ta})+2(e^{tb}-e^{ta})}{t^3}$$

$$E(X^2) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^3e^{tb}-a^3e^{ta})t^2+\cancel{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})2t}-\cancel{2(be^{tb}-ae^{ta})}-\cancel{2t(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})}+\cancel{2(be^{tb}-ae^{ta})}}{3t^2}$$

$$E(X^2) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^3e^{tb}-a^3e^{ta})\cancel{t^2}}{3\cancel{t^2}}$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Por lo tanto $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

1.2. Variable aleatoria exponencial

(a) Recordemos que:

- $E(X) = \int_0^\infty x f_X(x)dx$
- $E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f_X(x)dx$
- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

En este caso particular, tenemos que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x > 0$. Entonces,

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)dx = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

Nota: Para calcular estas integrales debemos usar el método de **integración por partes**.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

y recordamos que $h(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) - h(a)$.

Calculamos $E(X)$ y $Var(X)$:

$$E(X) = \int_0^\infty \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'(x)} dx \underbrace{=}_{\text{I.P.}} -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}dx\,{}^{1}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x}}_{=0} - \underbrace{0\cdot e^{-\lambda\cdot 0}}_{=0} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty}\right]$$
$$= -\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}$$

Calculamos $E\left(X^2\right)$:

$$E\left(X^2\right) = \int_0^\infty \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'(x)} dx \underbrace{=}_{\text{Int. por partes}} -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2xe^{-\lambda x}dx$$
$$= {}^{2} - x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} -x^2e^{-\lambda x}}_{=0} - \underbrace{0^2\cdot e^{-\lambda\cdot 0}}_{=0} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$
$$= \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx}_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Por lo tanto,

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(b)

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad \text{si } t < \lambda$$

[2]Notar que $f(x) = x^2$, $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, por lo tanto $f'(x) = 2x$ y $g(x) = -e^{\lambda x}$.

$$M'_X(t) = (-1)\cdot(-1)\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$
$$M''_X(t) = (-2)\cdot(-1)\frac{\lambda}{(\lambda-t)^3} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = 2\frac{\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Entonces $Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

1.3. Variable aleatoria normal

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$

haciendo un cambio de variable $y = x-\mu$ entonces $dy = dx$, notando que si $-\infty < x < +\infty$ entonces $-\infty < y < +\infty$ se tiene que

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y+\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy + \mu \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy + \int_{0}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy + \mu
\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable $z = -y$ entonces $dz = dy$, notando que si $-\infty < y < +0$ entonces $0 < z < +\infty$ se tiene que

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{0}^{+\infty} \frac{-z}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz + \int_{0}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy + \mu \\
&= \underbrace{-\int_{0}^{+\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz + \int_{0}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy}_{=0} + \mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x-\mu+\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx + \mu\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx}_{=\mu} \\
&= \underbrace{-\frac{\sigma^2 x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx}_{-\sigma^2} + \mu^2
\end{aligned}$$

Usando integración por partes donde $u(x) = x$, entonces $u'(x) = 1$ y donde $v'(x) = (x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, entonces $v(x) = -\sigma^2 e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Para mostrar que la primera integral del último paso es igual a 0 hay que tomar límite para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$ y usar L'Hôpital escribiendo apropiadamente la expresión $xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ para que quede una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, es decir, si escribimos $\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$

Entonces $Var(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

(b) $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t)e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = (\mu + 0)e^0 = \mu$$
$$M''_X(t) = \sigma^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = \sigma^2 e^0 + \mu^2 e^0 = \sigma^2 + \mu^2$$

Entonces $Var(X) = \sigma^2$.

1.4. Variable aleatoria Gama

(a) $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}$, donde

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

En particular, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ si α es un número entero positivo y $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Veamos primero que $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$

Veamos ahora que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \\ &= \underbrace{-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx}_{=\Gamma(\alpha)} \\ &= \alpha\Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

Entonces si α es un número entero positivo, vale que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

Calculemos $E(X)$ y $Var(X)$:

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\lambda x} dx}_{=1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}\end{aligned}$$

La última integral es igual a 1 porque es la integral de la función de densidad de una variable con distribución $\Gamma(\alpha+1, \lambda)$.

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx}_{=1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

La última integral es igual a 1 porque es la integral de la función de densidad de una variable con distribución $\Gamma(\alpha+2, \lambda)$.

Cabe notar que $\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha+1)\alpha$

Entonces $Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

(b) $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha, t < \lambda$

$$
\begin{aligned}
M'_X(t) &= \lambda^\alpha(-\alpha) \cdot (-1) \frac{1}{(\lambda - t)^{\alpha+1}} \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \\
M''_X(t) &= \alpha\lambda^\alpha(-(\alpha+1)) \cdot (-1) \frac{1}{(\lambda - t)^{\alpha+2}} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

Entonces $Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

1.5. Variable aleatoria Beta

Antes de probar cuánto valen la esperanza y varianza, tenemos que probar que:

$$
Beta(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt
$$

cumple la siguiente propiedad:

$$
\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta) \cdot Beta(\alpha, \beta)
$$

Notemos que:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx\right)\left(\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy\right) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-(x+y)} dydx
\end{aligned}
$$

Hacemos el siguiente cambio de variables $x = u \cdot v, y = u \cdot (1-v)$. Notemos que el determinante de la matriz jacobiana es:

$$
J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u.
$$

Como $u = x + y$ y $v = x/(x+y)$, los límites de integración para u son 0 hasta ∞ y los límites de integración para v son 0 hasta 1.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-(x+y)} dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty (uv)^{\alpha-1} [u(1-v)]^{\beta-1} e^{-[uv+u(1-v)]} |-u| dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} e^{-u} dudv \\
&= \left(\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1} dv\right)\left(\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-u} du\right) \\
&= Beta(\alpha,\beta) \cdot \Gamma(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

(a)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{Beta(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{Beta(\alpha+1,\beta)}{Beta(\alpha,\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{1}{Beta(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1} dx - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{Beta(\alpha+2,\beta)}{Beta(\alpha,\beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\left(\alpha^2+\alpha\right)(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2+\alpha\beta-\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}
\end{aligned}$$

(b) Sea $X \sim Beta(\alpha,\beta)$ la distribución Beta para $\alpha,\beta > 0$. La FGM $M_X(t)$ de X está dada por:

$$M_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{t^k}{k!}$$

De la definición de la distribución Beta, X tiene PDF

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{Beta(\alpha,\beta)}$$

Usando la definición de FGM

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^1 e^{tx} f_X(x) dx$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{1}{Beta(\alpha,\beta)}\int_0^1 e^{tx}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{Beta(\alpha,\beta)}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tx)^k}{k!}\right)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{Beta(\alpha,\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\int_0^1 x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{Beta(\alpha+k,\beta)}{Beta(\alpha,\beta)}\right) \\
&= \frac{Beta(\alpha,\beta)}{Beta(\alpha,\beta)}\frac{t^0}{0!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{Beta(\alpha+k,\beta)}{Beta(\alpha,\beta)}\right) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right)\frac{t^k}{k!} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}\right)\frac{t^k}{k!} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\prod_{r=0}^{k}(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\prod_{r=0}^{k}(\alpha+\beta+r)}\right)\frac{t^k}{k!} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

Notar que

$$M_X'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

Entonces $M_X'(0)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{0!}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{0^{k-1}}{(k-1)!}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

$$M_X''(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}$$

Entonces $M_X''(0)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{1}{0!}+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{0^{k-2}}{(k-2)!}$

Entonces

$$Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

1.6. Variable aleatoria Pareto

(a) Calculamos los momentos de la función X, $E(X^k)$ para cualquier $k\in\mathbb{N}$. Notemos que el k-ésimo momento de X estará definido si y sólo si $\alpha>k$.

Separamos los cálculos de los momentos en tres casos para ver que solamente se pueden calcular los momentos si $\alpha>k$. Recuerde que el k-ésimo momento se calcula de la siguiente manera:

$$E\left(X^k\right)=\int_{\lambda}^{\infty}x^k f_X(x)dx$$

a) Consideramos $\alpha>k$.

$$\begin{aligned}
E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{k-\alpha-1} dx \\
&= \alpha\lambda^\alpha \frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\bigg|_\lambda^\infty \\
&= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{k-\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} x^{k-\alpha} - \lambda^{k-\alpha}\right) \\
&= \alpha\lambda^\alpha\left(0 - \frac{\lambda^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right) \\
&= \frac{\alpha\lambda^k}{\alpha-k}
\end{aligned}$$

para $k-\alpha<0, x^{k-\alpha} \to 0$ si $x\to\infty$

b) Consideramos $\alpha = k$.

$$\begin{aligned}
E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{\alpha-\alpha-1} dx \\
&= \alpha\lambda^\alpha \ln x\Big|_\lambda^\infty \\
&= \alpha\lambda^\alpha\left(\lim_{x\to\infty} \ln x - \ln\lambda\right) \\
&\to \infty
\end{aligned}$$

c) Consideramos $\alpha < k$.

$$\begin{aligned}
E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{k-\alpha-1} dx \\
&= \alpha\lambda^\alpha \frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\bigg|_\lambda^\infty \\
&= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{k-\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} x^{k-\alpha} - \lambda^{k-\alpha}\right) \to \infty
\end{aligned}$$

para $k-\alpha>0, x^{k-\alpha} \to +\infty$ si $x\to\infty$.

Por lo tanto $E(X) = \dfrac{\alpha\lambda}{\alpha-1}$ y $E(X^2) = \dfrac{\alpha\lambda^2}{\alpha-2}$.

Entonces, se tiene que $Var(X) = \dfrac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

(b) Las v.a. con distribución Pareto no tienen FGM.

1.7. Variable aleatoria Cauchy

(a) Los momentos de la distribución Cauchy no están definidos.

(b) Las v.a. con distribución Cauchy no tienen FGM.

1.8. Variable Chi cuadrado

La distribución $\chi^2(\nu)$ es un caso particular de la distribución Gama, cuando $\alpha = \frac{\nu}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$

(a) Ver el caso Gama y reemplazar $\alpha = \frac{\nu}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.

(b) Ver el caso Gama y reemplazar $\alpha = \frac{\nu}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.

1.9. Variable aleatoria F de Snedecor

Recuerde que una v.a. F que tiene distribución F se puede escribir como el cociente de dos v.a. X_i, con $i = 1, 2$ con distribución $\chi^2(\nu_i)$ independientes dividos sendos grados de libertad.

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$$

(a) En primer lugar buscamos calcular

$$E\left(\frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}\right)$$

Sean f_{X_1} y f_{X_2} las PDF de X_1 y X_2 respectivamente.
Como X_1 y X_2 son independientes se tiene que:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}\right) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x_1/\nu_1}{x_2/\nu_2} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{\nu_2}{\nu_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x_1}{x_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{\nu_2}{\nu_1} \left(\int_0^\infty \frac{f_{X_2}(x_2)}{x_2} dx_2\right)\left(\int_0^\infty x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1\right) \\
&= \frac{\nu_2}{\nu_1} \left(\frac{1}{2^{\nu_2/2}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \int_0^\infty x_2^{\nu_2/2-2} e^{-x_2/2} dx_2\right)\left(\frac{1}{2^{\nu_1/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)} \int_0^\infty x_1^{\nu_1/2} e^{-x_1/2} dx_1\right)
\end{aligned}$$

Notamos que la integral de la izquierda $\int_0^\infty x_2^{\nu_2/2-2} e^{-x_2/2} dx_2$ converge si y sólo si $\frac{\nu_2}{2} - 2 > -1$. Es decir, si $\nu_2 > 2$. En ese caso, tenemos que la integral de la izquierda es igual a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{\nu_2/2}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \int_0^\infty x_2^{\nu_2/2-2} e^{-x_2/2} dx_2 &= \frac{1}{2^{\nu_2/2-1}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \int_0^\infty (2u)^{\nu_2/2-2} e^{-u} du \\
&= \frac{2^{\nu_2/2-2}}{2^{\nu_2/2-1}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \int_0^\infty u^{m/2-2} e^{-u} du \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2} - 1\right)}{\left(\frac{\nu_2}{2} - 1\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2} - 1\right)} \\
&= \frac{1}{\nu_2 - 2}
\end{aligned}$$

Por otro lado, la integral de la derecha $\int_0^\infty x_1^{\nu_1/2} e^{-x_1/2} dx_1$ converge si y sólo si $\nu_1 > -2$. Esto ocurre porque $\nu_1 \in \mathbb{N}$. Entonces la integral de la derecha es igual a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{\nu_1/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\int_0^\infty x_1^{\nu_1/2}e^{-x_1/2}dx_1 &= \frac{2}{2^{\nu_1/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\int_0^\infty (2w)^{\nu_1/2}e^{-w}dw\\
&= \frac{2^{\nu_1/2}}{2^{\nu_1/2-1}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\int_0^\infty w^{\nu_1/2}e^{-w}dw\\
&= 2\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\\
&= 2\cdot\frac{\frac{\nu_1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\\
&= \nu_1
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}\right) &= \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1(\nu_2-2)}\\
&= \frac{\nu_2}{\nu_2-2}
\end{aligned}$$

Calculemos ahora el segundo momento de una v.a. con distribución F.

$$\begin{aligned}
E\left(\left(\frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}\right)^2\right) &= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x_1^2/{\nu_1}^2}{x_2^2/{\nu_2}^2}f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2\\
&= \frac{{\nu_2}^2}{{\nu_1}^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{{x_1}^2}{x_2^2}f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)dx_1dx_2\\
&= \frac{{\nu_2}^2}{{\nu_1}^2}\left(\int_0^\infty \frac{f_{X_2}(x_2)}{x_2^2}dx_2\right)\left(\int_0^\infty x_1^2 f_{X_1}(x_1)dx_1\right)\\
&= \frac{{\nu_2}^2}{{\nu_1}^2}\left(\frac{1}{2^{\nu_2/2}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\int_0^\infty x_2^{\nu_2/2-3}e^{-x_2/2}dx_2\right)\left(\frac{1}{2^{\nu_1/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\int_0^\infty x_1^{\nu_1/2+1}e^{-x_1/2}dx_2\right)
\end{aligned}$$

Notemos que la integral de la izquierda $\int_0^\infty x_2^{\nu_2/2-3}e^{-x_2/2}dx_2$ converge si y sólo si $\frac{\nu_2}{2}-3>-1$. Es decir, si $\nu_2>4$. En ese caso, si $\nu_2>4$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{\nu_2/2}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\int_0^\infty x_2^{\nu_2/2-3}e^{-x_2/2}dx_2 &= \frac{2}{2^{\nu_2/2}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\int_0^\infty (2u)^{\nu_2/2-3}e^{-u}du\\
&= \frac{2^{\nu_2/2-3}}{2^{\nu_2/2-1}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\int_0^\infty u^{\nu_2/2-3}e^{-u}du\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}-2\right)}{\left(\frac{\nu_2}{2}-1\right)\left(\frac{\nu_2}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}-2\right)}\\
&= \frac{1}{(\nu_2-2)(\nu_2-4)}
\end{aligned}$$

sustituyendo en el primer renglón $x_2=2u$.

Note que la integral $\int_0^\infty x_1^{\nu_1/2+1}e^{-x_1/2}dx_2$ converge si y sólo si $\frac{\nu_1}{2}+1>-1$. O sea, si$\nu_1>-4$. Esto vale porque $\nu_1\in\mathbb{N}$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{\nu_1/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\int_0^\infty x_1^{\nu_1/2+1}e^{-x_1/2}dx_2 &= \frac{2}{2^{\nu_1/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\int_0^\infty (2w)^{\nu_1/2+1}e^{-w}dw \\
&= \frac{2^{\nu_1/2+1}}{2^{\nu_1/2-1}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\int_0^\infty w^{\nu_1/2+1}e^{-w}dw \\
&= 4\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)} \\
&= 4\cdot\frac{\nu_1}{2}\left(\frac{\nu_1}{2}+1\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)} \\
&= \nu_1(\nu_1+2)
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$E\left(X^2\right) = \frac{{\nu_2}^2\nu_1(\nu_1+2)}{{\nu_1}^2(\nu_2-2)(\nu_2-4)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\
&= \frac{{\nu_2}^2(\nu_1+2)}{\nu_1(\nu_2-2)(\nu_2-4)} - \frac{{\nu_2}^2}{(\nu_2-2)^2} \\
&= \frac{{\nu_2}^2(\nu_1+2)(\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} - \frac{{\nu_2}^2\nu_1(\nu_2-4)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \\
&= \frac{{\nu_2}^2((\nu_1+2)(\nu_2-2)-\nu_1(\nu_2-4))}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \\
&= \frac{{\nu_2}^2(\nu_1\nu_2+2\nu_2-2\nu_1-4-\nu_1\nu_2+4\nu_1)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \\
&= \frac{{\nu_2}^2(2\nu_2+2\nu_1-4)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \\
&= \frac{2{\nu_2}^2(\nu_2+\nu_1-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}
\end{aligned}$$

(b) Las v.a. con distribución F de Snedecor no tienen FGM.

1.10. Variable aleatoria lognormal

(a) Si X es lognormal(μ,σ^2), entonces $Y = \ln X$ se distribuye Normal(μ,σ^2). Consideremos

$$E\left(X^k\right) = E\left(e^{kY}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ky}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{ky-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
ky - \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{-2k\sigma^2y+y^2-2\mu y+\mu^2}{2\sigma^2} \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(y^2-2\left(\mu+k\sigma^2\right)y+\left(\mu+k\sigma^2\right)^2+\mu^2-\left(\mu+k\sigma^2\right)^2\right) \\
&= -\frac{\left(y-\left(\mu+k\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}+\frac{k\left(2\mu+k\sigma^2\right)}{2}
\end{aligned}$$

Llamando $\mu' = \mu+k\sigma^2$, podemos observar que el k-ésimo momento de X es

$$E\left(X^k\right) = e^{\frac{k\left(2\mu+k\sigma^2\right)}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(y-\mu')^2}{2\sigma^2}}dy}_{=1}$$

Notemos que la última integral es igual a 1 porque es la integral de una función de densidad normal con media μ' y varianza σ^2.

Entonces

$$E\left(X^k\right) = e^{\frac{k(2\mu+k\sigma^2)}{2}}$$

En particular

- Si $k = 1$,

$$E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

- Si $k = 2$,

$$E\left(X^2\right) = e^{2(\mu+\sigma^2)}$$

Notemos que la varianza se calcula a partir de los primeros dos momentos.

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2-1}\right)$$

(b) Las v.a. con distribución lognormal no tienen FGM.

1.11. Variable aleatoria Weibull

$X \sim Weibull(\alpha, \beta, v)$, con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, en el intervalo $E = (v, +\infty)$ si:

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^\beta} I_{(v,+\infty)(x)}$$

(a) Notar que con el cambio de variable $y = x - v$ podemos calcular las integrales en un caso particular donde $v = 0$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx = \int_0^{+\infty} \beta\frac{x^\beta}{\alpha^\beta} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \beta u \cdot e^{-u} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^{-\frac{\beta-1}{\beta}} du = \int_0^{+\infty} \alpha u^{\frac{1}{\beta}} e^{-u} du \\
&= \alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\beta}+1-1} e^{-u} du}_{=\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} = \alpha\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

donde en el segundo renglón se hace el cambio de variables $u = \frac{x^\beta}{\alpha^\beta}$ y por lo tanto

$$du = \beta \cdot \frac{x^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \cdot dx = \frac{\beta}{\alpha} \cdot u^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot dx.$$

Es decir que $dx = \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot du$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} = \int_0^{+\infty} \beta\frac{x^{\beta+1}}{\alpha^\beta} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \alpha\beta u^{\frac{\beta+1}{\beta}} \cdot e^{-u} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^{-\frac{\beta-1}{\beta}} du = \int_0^{+\infty} \alpha^2 u^{\frac{2}{\beta}} e^{-u} du \\
&= \alpha^2 \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{\frac{2}{\beta}+1-1} e^{-u} du}_{=\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)} = \alpha^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

donde en el segundo renglón se hace el cambio de variables $u = \frac{x^{\beta}}{\alpha^{\beta}}$ y por lo tanto

$$du = \beta \cdot \frac{x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} \cdot dx = \frac{\beta}{\alpha} \cdot u^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot dx.$$

Es decir que $dx = \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot du$

(b) En el caso en que $v = 0$ se tiene que la FGM de $X \sim Weibull(\alpha, \beta, 0)$ es

$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \alpha^n}{n!} \Gamma(1 + n/\beta)$ si $\beta \geq 1$.

Entonces $M_X'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} \alpha^n}{(n-1)!} \Gamma(1 + n/\beta)$.

Por lo tanto, $M_X'(0) = \frac{\alpha}{0!} \cdot \Gamma(1 + 1/\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0^{n-1} \alpha^n}{(n-1)!} \Gamma(1 + n/\beta) = \alpha \cdot \Gamma(1 + 1/\beta)$

Entonces $M_X''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2} \alpha^n}{(n-2)!} \Gamma(1 + n/\beta)$.

Por lo tanto, $M_X'(0) = \frac{\alpha^2}{0!} \cdot \Gamma(1 + 2/\beta) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{0^{n-2} \alpha^n}{(n-2)!} \Gamma(1 + n/\beta) = \alpha^2 \cdot \Gamma(1 + 2/\beta)$

Por lo tanto,

$$Var(X) = \alpha^2 \left[\Gamma(1 + 2/\beta) - (\Gamma(1 + 1/\beta))^2\right]$$

2. Resumen de las v.a. más usadas

Distribution	PMF / PDF	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{Var}[X]$	$M_X(s)$
Bernoulli	$p_X(1) = p$ and $p_X(0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$	$1 - p + pe^s$
Binomial	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1 - p + pe^s)^n$
Geometric	$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$
Poisson	$p_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^s-1)}$
Gaussian	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}$
Exponential	$f_X(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - s}$
Uniform	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{sb} - e^{sa}}{s(b-a)}$