Práctica 3 - Autovalores y Autovectores

Ejercicio 1. Determinar si la función T es transformación lineal.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, 2x)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x \cdot y, 0, 0)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $T(A) = A^t$.

Ejercicio 2. Hallar la expresión de la transformación lineal T_1 y T_2.

(*a*) $T_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T_1(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$, $T_1(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0)$, y $T_1(0, 0, 1) = (1, 2, 1, 2)$;

(*b*) $T_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T_2(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $T_2(1, 2, 1, 2) = (0, 0, 1)$ y $T_2(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$.

¿$T_2 \circ T_1$ es una transformación lineal?

Ejercicio 3. Hallar una base y la dimensión de $\ker(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y - z, x + 3y)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z & x + z \\ x + y & y - z \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos hallar una matriz A de manera tal que $T(x) = [Ax^t]^t$.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_2 - 3x_3, x_1 + x_3)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0)$, y $T(0, 0, 1) = (1, 2, 1, 2)$;

(*d*) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $T(1, 2, 1, 2) = (0, 0, 1)$ y $T(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$.

Ejercicio 5. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} k & 2 & 4 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existen, todos los valores de k para los cuales $\ker(T) = \{0\}$.

Ejercicio 6. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & k & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existen, todos los valores de k para los cuales $\mathrm{Img}(T) = \{0\}$.

Ejercicio 7. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

(*a*) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$;

(*b*) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

(*c*) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(*d*) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

(*e*) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(*f*) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(*g*) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

(*h*) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(*i*) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8. Determinar si cada una de las matrices A del ejercicio anterior es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz inversible C que diagonalice a A (es decir, tal que $C^{-1} \cdot A \cdot C$ sea diagonal).

Ejercicio 9. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no es diagonalizable cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con tal que $b \neq 0$.

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1, 2, 0)$, $w = (2, 6, 0)$ y $u = (-2, -2, -1)$ son autovectores de A.

(a) Probar que A es diagonalizable.

(b) Calcular los autovalores de A y determinar los valores de r, s y t.

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible P que diagonalice a A.

(b) Calcular A^{10}.

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible C que diagonalice a A.

(b) Calcular $A^6 \cdot v^t$ utilizando la diagonalización de A.

(c) Escribir al vector v como combinación lineal de una base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A.

(d) Calcular nuevamente $A^6 \cdot v^t$ sin utilizar la diagonalización de A.

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.

(b) Probar que A **no** es diagonalizable.

(c) Escribir al vector v como combinación lineal de autovectores de A.

(d) Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

Ejercicio 14. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Hallar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A.

(b) Para cada b hallado, dar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

Ejercicio 15. Diagonalizar las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ¿Es posible diagonalizarlas ortogonalmente? Si es así, determinar la matriz de cambio de base ortogonal. Calcular $A^7 + 4A^5 - 2A + 3A^2$.

Ejercicio 16. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **no** es diagonalizable.

Ejercicio 17. Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

(b) Para cada a hallado, dar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que $(0, b^2 + 1, 2)$ es autovector de A.

Ejercicio 18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1, 1, 1) \in \{v \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon (I - A)v^t = 0\}$.

(a) Determinar a, b y c y hallar todos los autovalores de A.

(b) ¿Es A diagonalizable?

(c) Calcular A^{100} y A^{201}.

Ejercicio 19. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz con autovalores $\{0, 1, 5\}$.

(a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.

(b) Calcular los autovalores de $B = (3A - 4I)^3$ y $C = 5A^t + 4I$.

(c) Probar que $H = A+I$ es inversible y calcular los autovalores de H^{-1}, $\det(H^{-1})$ y $\operatorname{tr}(H^{-1})$.

(d) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha A + 3I$ no es inversible.

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de p_A. Sea $B = 5A^2 + 3A - 2I$. Calcular $\det(B)$ y $\operatorname{tr}(B)$.

Ejercicio 21. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A, $\operatorname{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.

(a) Hallar **todos** los autovalores de A.

(b) Decidir si A^t es o no diagonalizable.

Ejercicio 22. Sea A diagonalizable tal que su polinomio característico es $p_A(t) = (t-1)^2(t-3)^2$.

(a) Calcular $rg(A - 3I)$.

(b) Hallar la matriz $B = A^2 - 4A + 5I$.

Ejercicio 23. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\dim(\{x\colon Ax = 0\}) = 1$, $\operatorname{rg}(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

(a) Calcular los autovalores de A.

(b) Decidir si A es inversible y/o diagonalizable.

Ejercicio 24. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz inversible tal que $\operatorname{tr}(A) = -2$, $\operatorname{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$ y $p_A(1) = -8$. Probar que A es diagonalizable.

Ejercicio 25. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz tal que $\{v \in \mathbb{R}^4\colon (A + I)v^t = 0\} \neq \{0\}$, $\operatorname{rg}(A - 2I) \leq 2$ y $p_A(1) = -4$. Decidir si A es diagonalizable y calcular $A^3 - 4A^2 + A + 6I$.

Ejercicio 26. Dos marcas de tabaco controlan el mercado repartiéndoselo al 60 % y 40 % respectivamente. Este año en el mercado se mueven 500 millones de dolares. Si los consumidores de la marca A son cada año fieles en un 30 % y los de la marca B son fieles en un 40 %. ¿Cómo se repartirán el mercado al cabo de 5 años las dos marcas suponiendo que su volumen se mantiene constante?

Ejercicio 27. Supongamos un mercado duopolista, en el que dos empresas A y B fabrican la totalidad de un cierto producto. Supongamos también que el producto se adquiere mensualmente, y que por medio de estudios de mercado se ha llegado a las siguientes conclusiones sobre la intención de compra de los consumidores.

- El 50 % de los consumidores que compran durante un mes el producto fabricado por la empresa A volverá a hacerlo así al mes siguiente, y el resto cambiará al fabricado por la empresa B.
- El 25 % de los consumidores que compran durante un mes el producto fabricado por la empresa B volverá a proceder así al mes siguiente y el resto cambiará al fabricado por la empresa A.

Sean 50 y 100 las cuotas de mercado de las empresas A y B, respectivamente, durante el mes de octubre de 2018. ¿Cuáles serán las cuotas de mercado de cada una de las empresas al cabo de diez meses, es decir, en el mes de agosto de 2019?

Clase 8/4

TP 3

Ejercicio 1. Determinar si la función T es transformación lineal.

(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, 2x)$;

(b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x \cdot y, 0, 0)$;

(c) $T\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $T(A) = A^t$.

a) • Qq $\forall \vec{x}, \forall k \in \mathbb{R}, \; T(k\vec{x}) = kT(\vec{x})$

$$T(kx, ky, kz) = (kx - ky, 2kx) = k(x-y, 2x)$$
$$= kT(x,y,z)$$

• Qvq: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \; T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$

$$T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = ((x_1+x_2)-(y_1+y_2), 2(x_1+x_2))$$
$$= (x_1-y_1 + x_2-y_2, 2x_1 + 2x_2)$$
$$= (x_1-y_1, 2x_1) + (x_2-y_2, 2x_2)$$
$$= T(x_1,y_1,z_1) + T(x_2,y_2,z_2)$$

$\Rightarrow T$ es lineal.

b) $T(x,y) = (x\cdot y, 0, 0)$; $x_1 = 0, y_1 = 1$; $x_2 = 1, y_2 = 1$

$$T(x_1,y_1) = (0\cdot 1, 0, 0) = 0$$
$$T(x_2,y_2) = (1\cdot 1, 0, 0) = (1,0,0)$$
$$T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (1\cdot 2, 0, 0) = (2,0,0)$$

$\Rightarrow T(x_1+x_2, y_1+y_2) \neq T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2) \Rightarrow$ no es lineal

Ejercicio 2. Hallar la expresión de la transformación lineal T_1 y T_2.

(*a*) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T_1(1,0,0) = (1,1,0,1)$, $T_1(0,1,0) = (0,1,1,0)$, y $T_1(0,0,1) = (1,2,1,2)$;

(*b*) $T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(1,1,0,1) = (1,0,0)$, $T_2(0,1,1,0) = (0,1,0)$, $T_2(1,2,1,2) = (0,0,1)$ y $T_2(0,0,1,0) = (1,1,1)$.

¿$T_2 \circ T_1$ es una transformación lineal?

a)

$$T_1 = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T_1(e_1) & T_1(e_2) & \cdots & T_1(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$e_1 = (1,0,0\ldots)$

$e_2 = (0,1,0,\ldots)$

$\vdots$

$e_i = (0,\ldots,\underset{\text{en } i}{1},0\ldots)$

$$T_1(e_1) = T_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ T_1(e_1) & \cdots & T_1(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = T_1(e_1)$$

$$T_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix};\quad T_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix};\quad T_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y+2z \\ x+2z \end{pmatrix} = (x+z,\ x+y+2z,\ x+2z)$$

b)

$$T_2\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad T_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad T_2\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}}_{v_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_4} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$V = \{v_1,\ldots,v_4\}$

$E = \{e_1,\ldots,e_4\}$

Quiero P que envía $E \mapsto V$

Quiero encontrar $P(e_i) = v_i$ ←

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ P(e_1) & \cdots & P(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tengo información de $\underline{\underline{T_2(v_i)}} = T_2(P(e_i)) = \underline{\underline{T_2 P(e_i)}}$

$$T_2 P = \begin{bmatrix} | & & | \\ T_2P(e_1) & \dots & T_2P(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ T_2(v_1) & \dots & T_2(v_n) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$T_2 P P^{-1} = T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y+z-w \\ x+z-w \\ -y+z+w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_2(x,y,z,w) = (3x-y+z-w,\ x+z-w,\ -y+z+w)$$

$\forall\ V_2, V_1 \ /\ V_2 \circ V_1$ tenemos: si tomo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow V_2 \circ V_1 (c_1 x + c_2 y) = V_2\left(V_1(c_1 x + c_2 y)\right) \underset{\substack{V_1 \text{ es} \\ \text{lineal}}}{=}$$

$$V_2\left(c_1 V_1(x) + c_2 V_1(y)\right) \underset{\substack{V_2 \text{ es} \\ \text{lineal}}}{=} c_1 V_2(V_1(x)) + c_2 V_2(V_1(y))$$

$$= c_1\, V_2 \circ V_1(x) + c_2\, V_2 \circ V_1(y)$$

$\Rightarrow$ $V_2 \circ V_1$ es lineal

Ejercicio 3. Hallar una base y la dimensión de $\ker(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$.

(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y+z, 2y-z, x+3y)$;

(b) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_3, 0, x_2+2x_3, x_1-x_2-x_3)$;

(c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z & x+z \\ x+y & y-z \end{pmatrix}$.

a) $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}}$; $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}}$

$a(1,0,1) + b(1,-1,0) + c(1,2,3) = 0$

$c=-1 \longrightarrow (1,2,3) = 3(1,0,1) + (-2)(1,-1,0)$

$B(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,0,1), (1,-1,0)\}$

$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 \longleftarrow$

$\ker(T) = \{\vec{x} \in \mathrm{Dom}(T) : T(\vec{x}) = 0\}$

$T(\vec{x}) = 0$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$

$\longrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \longrightarrow x+y+2y=0 \Rightarrow x+3y=0 \\ 2y-z=0 \longrightarrow 2y=z \\ x+3y=0 \longrightarrow x=-3y \end{cases}$

$\ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (-3y, y, 2y)$
$= y(-3,1,2),\ y \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow B(\ker(T)) = \{(-3,1,2)\}$

$\dim(\ker(T)) = 1$

c) $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$B(\mathrm{Im}(T)) = \left\{ \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \right\}$

$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$

Quiero $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, T(\vec{x}) = 0$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}y-z & x+z\\x+y & y-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = z \quad ; \quad x = -z \\ x = -y = -z \checkmark \quad ; \quad y = z \end{cases} \Rightarrow \quad y = z, \quad x = -z$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (-z,z,z) = z(-1,1,1), \ z \in \mathbb{R} \}$$

$B(\mathrm{Ker}(T)) = \{(-1,1,1)\}$

$\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$

Ejercicio 5. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} k & 2 & 4 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existen, todos los valores de k para los cuales $\ker(T) = \{0\}$.

$\operatorname{Ker}(T) = \{0\} \iff \det(T) \neq 0$

Intuición: si $\det(T) = 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \,/\, T(x_1) = T(x_2)$

$\Rightarrow T(x_1) - T(x_2) = 0 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 - x_2 \neq 0 \,/$
$x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker}(T)$

y para el otro lado, si $\operatorname{Ker}(T) \supsetneq \{0\} \Rightarrow \exists\, y \neq 0 \,/$
$y \in \operatorname{Ker}(T) \Rightarrow T(y) = 0 \Rightarrow \nexists\, T^{-1} \Rightarrow \det(T) = 0 \;\square$

$$\det(T) = k^2 + 2k - 8 - (4 - k^2 + 4k) = 2k^2 - 2k - 12$$
$$= 2(k^2 - k - 6) \leftarrow 0 \text{ si } k = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Para $k \neq 3$, $k \neq -2$, $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$

Ejercicio 6. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & k & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existen, todos los valores de k para los cuales $\operatorname{Img}(T) = \{0\}$.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0 \;\wedge\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(T) \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \nexists\, k \,/\, \operatorname{Im}(T) = \{0\}$$

Ejercicio 7. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Dado A, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor y $v \in Dom(A)$ es un autovector $(v \neq 0)$ si $\underline{Av = \lambda v}$

$$\Leftrightarrow Av = \lambda Id\, v \Leftrightarrow Av - \lambda Id\, v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda Id)v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(A - \lambda Id)$$

$$\Rightarrow \text{si } Ker(A-\lambda Id) \supsetneq \{0\} \Rightarrow \underline{det(A - \lambda Id)} = 0$$

$P_A(\lambda) = det(A - \lambda Id) \longrightarrow$ encuentro λ raíz de $P_A(\lambda)$

Una vez que tengo λ, calculo $A - \lambda Id \Rightarrow$
$Ker(A - \lambda Id) \leftarrow$ los vectores de acá van a ser los autovectores,

y $Ker(A - \lambda Id) = E_\lambda$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow P_A(\lambda) = det(A - \lambda Id)$

$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow P_A(\lambda) = (3-\lambda)(-1-\lambda)$

$\longrightarrow \underline{\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3}$
$\hookrightarrow$ los autovalores

$\underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$: $A - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

$$Ker(A - Id) = \{(x,y) : (A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$$
$$= \{(x,y) : x = 0,\ y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,y) : (x,y) = (0,y) = y(0,1),\ y \in \mathbb{R}\}$$

$(0,1)$ es autovector con autovalor $\lambda = -1$

$$E_{-1} = \langle (0,1) \rangle$$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 3}}$: $A - \lambda_2 Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow (x,y) \in Ker(A - 3Id) \Leftrightarrow 2x = y$

$\Rightarrow E_3 = \langle (2,1) \rangle$ ← autoespacio generado x autovalor $\lambda = 3$

$(2,1)$ es un autovector del autovalor $\lambda = 3$.

i) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = (7-\lambda)^2 (3-\lambda)^2$$

$\longrightarrow \lambda_1 = 7, \ \lambda_2 = 3$ (autovalores)

$\lambda_1 = 7$: $A - 7Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$(A - 7Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$ $\quad$ x, y libres, $w = 0$, $z = 0$

$E_7 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

$\lambda_2 = 3$: $A - 3Id = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A - 3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ $x = 0$.

$4y - 4z - 5w = 0$ ← dos variables

$4y = 4z + 5\underline{w}$ $\quad (*)$

$E_3 = \langle (0,1,1,0), (0,5,0,4) \rangle$

$$(*) \quad y = z + \frac{5}{4}w$$

$$\begin{aligned}(x,y,z,w) &= (0, z+\tfrac{5}{4}w, z, w) \\ &= z(0,1,1,0) + w(0,\tfrac{5}{4},0,1) \quad ; \quad \tilde{w} = \frac{w}{4} \\ &= z(0,1,1,0) + \frac{4w}{4}(0,\tfrac{5}{4},0,1) \\ &= z(0,1,1,0) + \frac{w}{4}(0,5,0,4) \\ &= z(0,1,1,0) + \tilde{w}(0,5,0,4), \quad z,\tilde{w} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \langle (0,1,1,0), (0,5,0,4) \rangle$$

(b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow p_A(\lambda) = -(10-\lambda)(2+\lambda) + 36$$

$$= -[20 + 8\lambda - \lambda^2] + 36 = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$$

$\lambda = 4$:

$$A - 4Id = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad 2x = 3y \Rightarrow x = \frac{3}{2}y$$

$$E_4 = \{(x,y) : (x,y) = (\tfrac{3}{2}y, y) = \tfrac{1}{2}y(3,2), y \in \mathbb{R}\}$$

$$E_4 = \langle (3,2) \rangle$$