

**Práctica 4 - Forma de Jordan y Formas Cuadráticas**

**Ejercicio 1.** Hallar la forma de Jordan de las siguientes matrices.

$$\begin{array}{ll} (a) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; & (c) \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ (b) \ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}; & (d) \ D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Ejercicio 2.** Hallar  $e^A$  donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 3.** Hallar la matriz asociada a las siguientes formas cuadráticas y clasificarlas.

$$\begin{array}{ll} (a) \ q(x, y) = 4x^2 + 5y^2 + 8yx; \\ (b) \ q(x, y) = -x^2 - 3y^2 + yx; \\ (c) \ q(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 3xz + y^2 - 4yz + 3z^2; \\ (d) \ q(x, y, z) = x^2 + z^2 + xz. \end{array}$$

**Ejercicio 4.** Decidir si las formas cuadráticas que tienen asociadas a las siguientes funciones son definidas positivas o definidas negativas o semidefinidas positivas o semidefinidas negativas o indefinidas

$$\begin{array}{ll} (a) \ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; & (c) \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ (b) \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & (d) \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \end{array}$$

$$(e) \ E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 5.** Hallar la raíz cuadrada de las siguientes matrices

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(c) \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \ B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix};$$

$$(d) \ D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 6.** Dada la forma cuadrática  $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 2yz + az^2$$

hallase  $a \in \mathbb{R}$  para que  $q$  sea semidefinida, indicando si lo es positivo o negativo.

**Ejercicio 7.** Hallar los valores de  $a$  para los cuales la forma cuadrática que tiene asociada a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & a & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

**Ejercicio 8.** Dada la forma cuadrática  $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$q(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + (a - 1)z^2 + 2xy$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  es fijo, clasificar  $q$  para los distintos valores de  $a$ .

**Ejercicio 9.** Clasifique en función de  $a \in \mathbb{R}$  la siguiente forma cuadrática

$$q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2axy + 2xz + 4yz.$$

sujeito a la restricción lineal  $x = y$ .

**Ejercicio 10.** Determinar si son definidas positivas o negativas las formas cuadráticas siguientes sujetas a la restricción lineal dada:

(a)  $q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  sujeta a  $x + y = 0$ ;

(b)  $q(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2$  sujeta a  $3x + 4y = 0$ ;

(c)  $q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$ , sujeta a  $x - y + z = 0$ ;

**Ejercicio 11.** Clasifique en función de  $a \in \mathbb{R}$  la siguiente forma cuadrática

$$q(x, y, z) = a(x^2 + z^2) + 2y^2 + 4xy$$

sujeto a la restricción lineal  $x = y$ .

**Ejercicio 12.** Clasifique en función de  $a, b \in \mathbb{R}$  la forma cuadrática que tiene asociada a la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$