Probabilidad

Conteo

10/03/2023

Lara Sánchez Peña[1]

UTDT 2023 - MEC

[1] Basado en las notas de Andrea Rotnitzky

Permutaciones, Combinaciones, Power Rule y Bosones

Para poder calcular probabilidades necesitamos aprender a **contar cuántos elementos hay en Ω** y en subconjuntos de Ω. Por lo tanto, vamos a aprender distintas formas de contar, según el caso que estemos analizando.

- **Power rule**: hay n^k formas de **elegir ordenadamente** k objetos con reposición de entre n objetos diferentes. $n=2$ opciones (le pongo o no).
- **Factorial**: hay $n!$ formas de **ordenar** n objetos diferentes **en fila**.
- **Permutaciones**: hay $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ formas de **extraer y ordenar** k objetos diferentes de un total de n elementos **en fila**.
- **Combinaciones**: hay $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ formas de **extraer** k objetos diferentes de un total de n elementos. No importa el orden.
- **Bosones**: hay $\dbinom{n+k-1}{n}$ formas de ordenar n objetos $\dbinom{n+k-1}{n}$ **indistinguibles** en k grupos **distinguibles**.

Power rule

$$\underset{d_7}{3} \cdot \underset{d_6}{3} \cdot \underset{d_5}{3} \cdot \underset{d_4}{3} \cdot \underset{d_3}{3} \cdot \underset{d_2}{3} \cdot \underset{d_1}{3} = 3^7$$

números enteros de 7 dígitos que se pueden escribir con $\{1,4,5\}$.

- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras que se pueden considerar números de 7 dígitos que pertenecen al conjunto $\{1, 4, 5\}$. ¿Cuántos elementos tiene Ω?
- Supongamos que Ω es el espacio muestral donde se listan todas las formas de elegir cómo rellenar k lugares con alguno de los n elementos que se pueden elegir del conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ con reposición. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

$$\underbrace{\underset{\_}{n} \cdot \underset{\_}{n} \; \_ \; \_ \; \_ \; \_ \; \_ \; \cdots \; \_}_{k \text{ lugares}}$$

$$n^k = \#\Omega$$

Factorial

10 factorial.

$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$

- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 10 personas en una fila. ¿Cuántos elementos tiene Ω? $10! = \#\Omega$
- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse las letras de la palabra "murciélago". ¿Cuántos elementos tiene Ω? $10! = \#\Omega$
- Supongamos que Ω es el espacio muestral donde se listan todas las maneras en que pueden ordenarse n personas en una fila. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

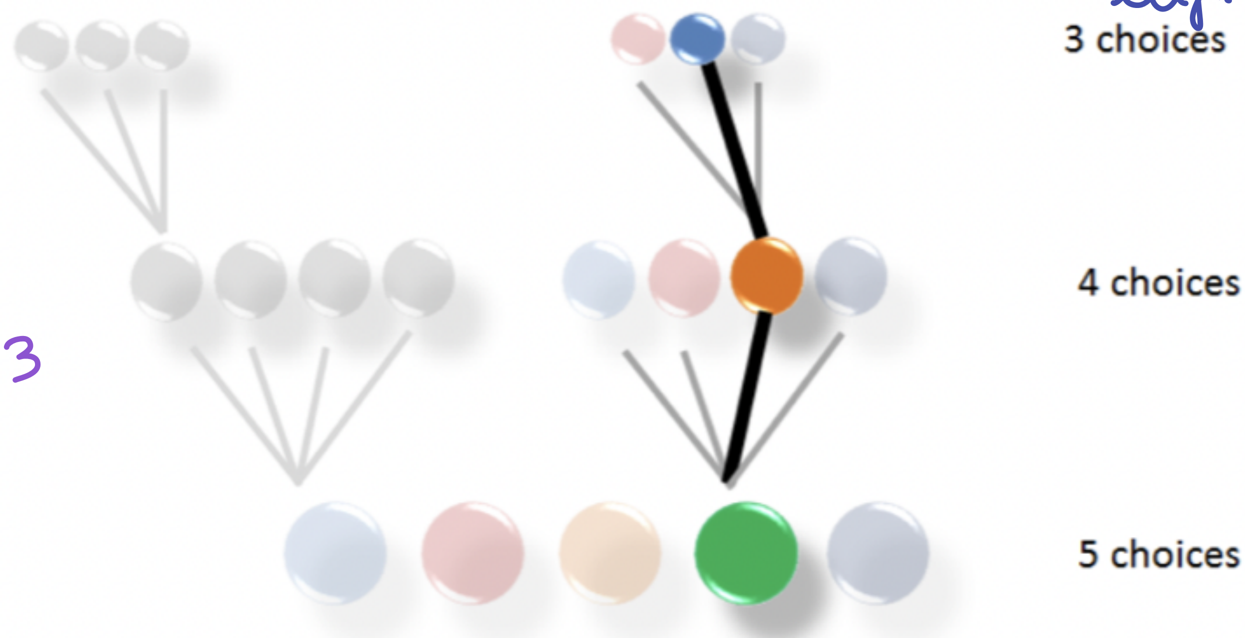
Definimos $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ y se llama n **factorial**.

$\underbrace{\underline{5} \cdot \underline{4} \ \underline{3}}_{k=3} \ \Big| \ \underline{2} \cdot \underline{1} \ \underline{\ }$ $\quad n=5$

Consideramos n bolillas **distintas**. Supongamos que queremos elegir **sucesivamente** k de las n bolas sin reposición y nos importa el orden en el que se eligen, donde $k \leq n$. Sea Ω el espacio muestral de posibles resultados. ¿Cuántos posibles resultados hay en Ω?
Acá es clave que las bolillas son distinguibles y que nos importa en qué orden se sacan. Por ejemplo, supongamos que $n = 5$ y $k = 3$, entonces

Tenemos 5 bolitas diferentes y queremos ver de cuántas maneras elegir (de manera ordenada) $k=3$ de ellas

$\boxed{n=5}$



permutaciones de $n=5$ con $k=3$

$$\frac{5!}{2!}$$

A A
B B
C C
D E
E D

Permutaciones

Por lo tanto en este caso, la cantidad de posibles resultados en Ω es

$$5P3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Si en vez de 5 bolillas todas distintas hubiera 8 bolillas y quisiéramos sacar ordenadamente y sin reposición $k = 3$ bolillas, ¿cuántos elementos tendría Ω?

Generalizando,

$$nPk = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

¿Cómo podemos probar este resultado?

$$_5P_3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 5\cdot 4\cdot 3$$

$$= 5\cdot(5-1)\cdot(5-2)$$

$$_nP_k = \underset{1°}{n}\,\underset{2°}{(n-1)}\,\underset{3°}{(n-2)}\cdots\underbrace{(n-(k-1))}_{k°} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

n bolitas

+

k seleccionadas

Permutaciones

Se elige la bolilla	Cuántas opciones hay	Por qué?
1°	n	no se eligió niguna bola
2°	$n-1$	ya se eligió 1 bola
3°	$n-2$	ya se eligieron 2 bolas
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k°	$n-k+1$	ya se eligieron $k-1$ bolas

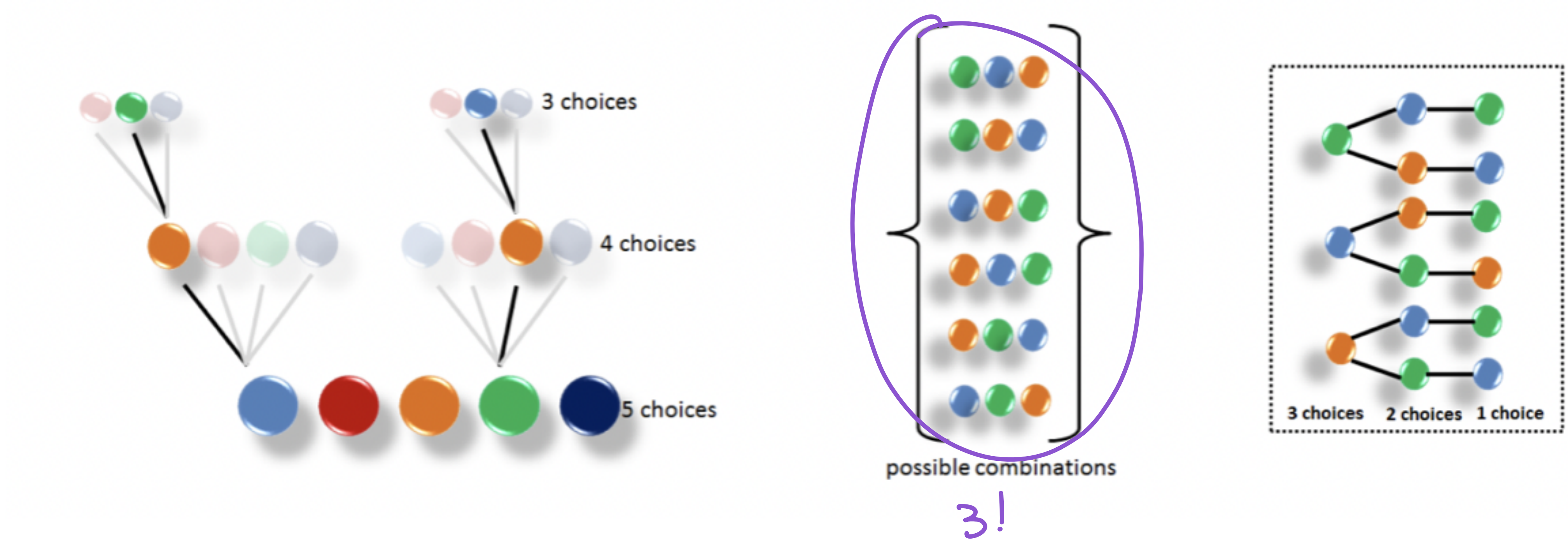
Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\\
=&n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Combinaciones

Tenemos $n=5$ bolitas y queremos separar en
$k=3$ bolitas
$n-k=2$ "
sin que nos importe el orden.

Consideramos n bolillas **distintas**. Supongamos que queremos elegir **sucesivamente** k de las n bolillas sin reposición y **NO** nos importa el orden en el que se eligen,[2] donde $k \leq n$. Sea Ω el espacio muestral de posibles resultados. ¿Cuántos posibles resultados hay en Ω?
Acá es clave que las bolillas son distinguibles y que no nos importa en qué orden se sacan. Por ejemplo, supongamos que $n = 5$ y $k = 3$, entonces



[2] Es lo mismo decir que se sacan las k bolillas de una sola vez.

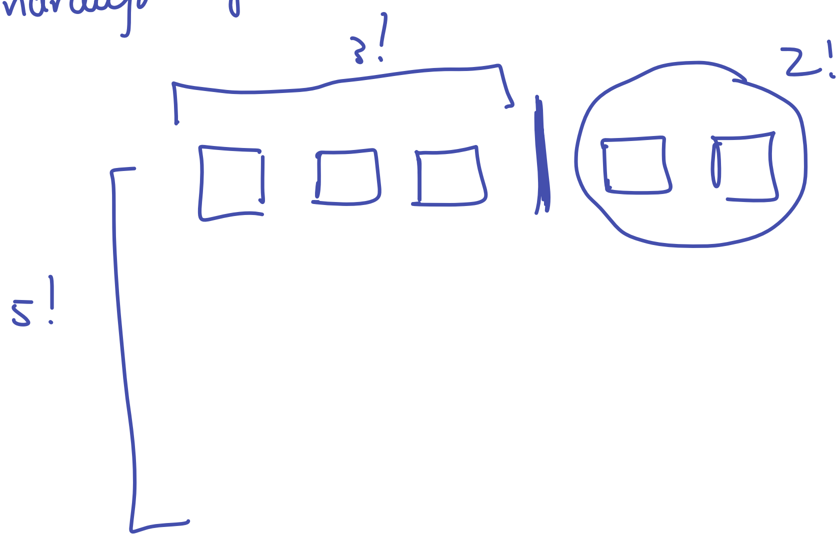
$$5C3 = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3\cdot 2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3\cdot 2}} = 10$$

5 elementos

tomados de a 3

Azul rojo naranja
Azul rojo verde
Azul rojo negro
rojo naranja verde
rojo naranja negro

Azul naranja verde
Azul naranja negro
Azul verde negro
naranja verde negro
rojo verde negro



$$\frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Combinaciones

Notemos que en la figura anterior hay permutaciones que cuentan como una sola combinación, porque cualquiera de los 6 casos mostrados en la derecha nos terminan dando una bolilla azul, una verde y una naranja. Entonces, si consideramos el caso anterior, teníamos 60 permutaciones y cada caso lo estamos contando 6 veces, entonces

$$5C3 = 10 = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3}$$

Generalizando,

$$nCk = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

¿Cómo podemos probar este resultado?

Combinaciones

Para ver de cuántas maneras se pueden elegir k bolillas distintas de un total de n sin reposición sin que nos importe el orden, podemos basarnos en el **resultado anterior** cuando contamos la cantidad de permutaciones.

Cuando sacamos las k bolillas **en orden y sin reposición** de n bolillas hay

$$n\mathrm{P}k = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ formas de hacerlo.}$$

Ahora bien, esas k bolillas se pueden ordenar en cualquier orden. Por lo tanto, hay permutaciones distintas que son la misma combinación. Como hay $k!$ formas de ordenar k bolillas distintas, dividimos $n\mathrm{P}k$ por $k!$. Entonces, la cantidad de formas de extraer k bolillas de un total de n bolillas sin importar el orden es:

$$n\mathrm{C}k = \frac{1}{k!} n\mathrm{P}k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Factorial con repetición - coeficiente multinomial

Supongamos que ahora queremos ordenar n objetos, donde cada elemento pertenece a uno solo de los j grupos. El grupo 1 tiene k_1 elementos, el grupo 2 tiene k_2 elementos, ..., el grupo j tiene k_j elementos. O sea, $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n$. La cantidad de ordenar dichos elementos es el coeficiente multinomial:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_j!} = \binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_j}$$

- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse las letras de la palabra "fosforescente". ¿Cuántos elementos tiene Ω? $\#\Omega = \frac{13!}{2!2!2!3!}$ 13 letras
- ¿Cuántas formas hay de armar un ranking de 10 personas, donde 4 son de MAECO, 1 de MEC y 5 de MECAP? Note que no importa el ranking por individuos, sino por grupo. AAAA E PPPPP $\#\Omega = \frac{10!}{5!4!}$
- ¿Cuál es el coeficiente del término $x^2 \cdot y \cdot z^5$ en la expresión algebraica
  - $(x + y + z)^8$?
  - $(x + y + 3z)^8$?

f o s f o r e s c e n t e

hay 13 ! formas de ordenar 1 palabra de 13 letras distintas.

Sin embargo hay 2 f's
2 o's
2 s's
3 e's
1 n, 1 t, 1 r, 1 c

f o s f o r e s c e n t e
f o s f o r e s c e n t e } mismo ordenamiento

Cantidad de formas de ordenar letras de la palabra fosforescente

$$\frac{13!}{2!\,2!\,2!\,3!} = \binom{13}{2,2,2,3,1,1,1,1}$$

---

el número combinatorio $5\,C\,3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!}$

Azul rojo naranja < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

Azul rojo verde < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

Azul rojo negro < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

rojo naranja verde < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

rojo naranja negro < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

Azul naranja verde < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

Azul naranja negro < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

Azul verde negro < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

naranja verde negro < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

rojo verde negro < $B_4 B_5$ / $B_5 B_4$

- ¿Cuál es el coeficiente del término $x^2 \cdot y \cdot z^5$ en la expresión algebraica
  - $(x + y + z)^8$?
  - $(x + y + 3z)^8$?

$$(x+y+z)^8 = \underbrace{(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)\cdots(x+y+z)}_{8 \text{ veces.}}$$

$$= 1x\cdot x\cdot x\cdots x + 1y\cdot y\cdots y + 8\underbrace{x\cdots x}_{7 \text{ veces}}\, y + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{8!}{5!\,2!}\, x\cdot x\; y\; z\cdot z\cdot z\cdot z\cdot z$$

cantidad de manera de ordenar esta "palabra": $x\cdot x \; y \; z\cdot z\cdot z\cdot z\cdot z$

ordenamientos de esta palabra incluyen:

x · x y z · z · z · z · z

x y x z z z z z

z z z y x x z z

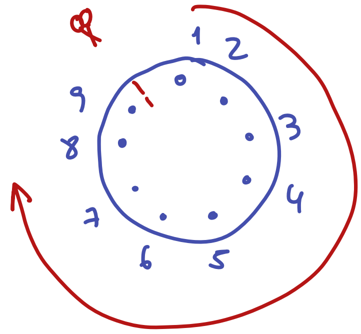
Factorial con repetición (cont) - coeficiente multinomial

- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω? $\#\Omega = \frac{9!}{9}$.
- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular y además los mejores amigos Gachi y Pachi deben sentarse de manera que Gachi esté a la izquierda de Pachi, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω?
- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular y además los mejores amigos Gachi y Pachi deben sentarse juntos, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

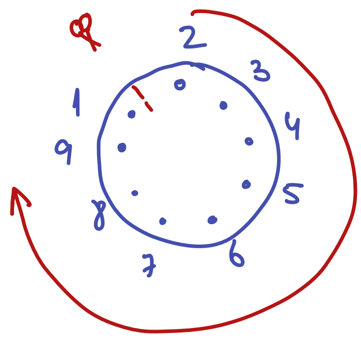
1 Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

1   1 2 3 4 5 6 7 8 9

9! formas de ordenar 9 personas en fila.



2   2 3 4 5 6 7 8 9 1



3   3 4 5 6 7 8 9 1 2

4   4 5 6 7 8 9 1 2 3

5   5 6 7 8 9 1 2 3 4

6   6 7 8 9 1 2 3 4 5

7   7 8 9 1 2 3 4 5 6

8   8 9 1 2 3 4 5 6 7

9   9 1 2 3 4 5 6 7 8

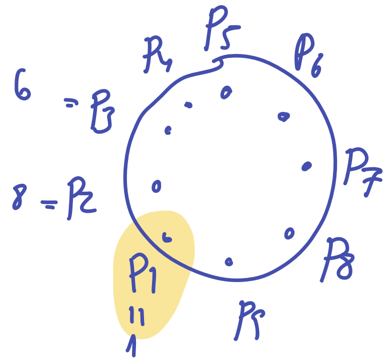
9

hay $8! = \frac{9!}{9}$ formas de ordenar 9 personas en una mesa redonda

1 8 6 5 4 3 2 7 9

P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9

9!



- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular y además los mejores amigos Gachi y Pachi deben sentarse de manera que Gachi esté a la izquierda de Pachi, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

$P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \; P_6 \; P_7 \; \overbrace{P_8 \; P_9}^{g}$

GACHI PACHI

$P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \; P_6 \; P_7 \; g$

$\frac{8!}{8} = 7!$

Cantidad de maneras de sentar 9 personas en una mesa circular con Gachi a la izq de Pachi.

Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular y además los mejores amigos Gachi y Pachi deben sentarse juntos, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

tenemos que multiplicar al resultado anterior por las formas de ordenar en fila de Gachi y Pachi: $2! = 2 \cdot 1$

$$\frac{8!}{8} \cdot 2!$$

Bosones

Los bosones son partículas que exhiben estados totalmente simétricos. En probabilidad, llamamos bosones a objetos que no se pueden distinguir.

Pensemos entonces cuántos elementos tiene Ω el espacio muestral donde se consideran todas las posibles formas de:

- considerar las combinaciones de números x_i que cumplan la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ si $x_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.
- poner n bolitas indistinguibles (iguales entre sí) en k cajitas diferentes.
- ordenar en fila n letras A y $k - 1$ letras B.

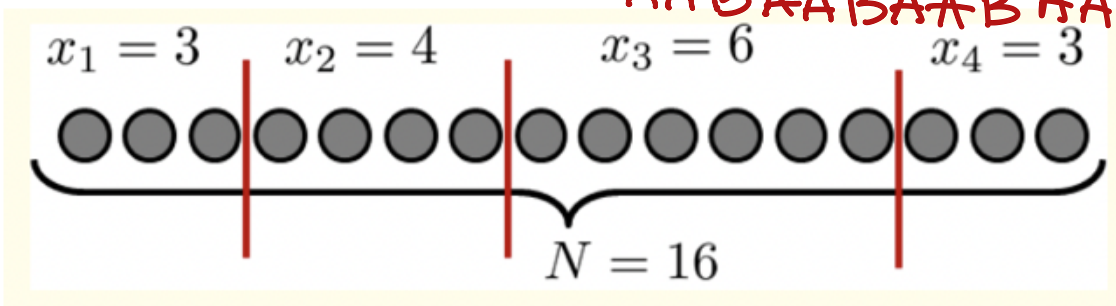
Pensemos cómo resolver estos problemas. Pero antes, ¿están estos problemas de alguna manera relacionados?

Bosones

16 bolitas iguales — 4 cajitas

Por ejemplo, para contar cuántos casos hay si $\underbrace{n = 16}$ y $\underbrace{k = 4}$, necesitamos 3 separadores para decidir si cada una de las bolillas cae en la primera, segunda, tercera o cuartas cajita.

AABAABAAB AAA A A AA A AA



AAABAAAABAAAAAABAAA

$$\frac{(16+4-1)!}{16!\,(4-1)!}$$

Esto es análogo a:

- considerar las combinaciones de números x_i que cumplan la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ si $x_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$
- considerar cómo ordenar una "palabra" con de 19 letras, 16 de las cuales son la letra A y 3 son la letra B.

Tenemos $16 = n$ bolitas indistinguibles, $4 = k$ cajitas $\neq$ y queremos contar

de cuántas maneras podemos ordenarlas.

¿Cómo se escribe el caso en donde todas las bolitas A están en la última cajita?

originalmente

ooo | oooo | oooooo | ooo

3 bolitas en la cajita 1 — 4 bolitas en la cajita 2 — 6 bolitas en la cajita 3 — 3 bolitas en la cajita 4

AAA B AAAA B AAAAAA B AAA

||| ooo oooo oooooo ooo

BBB AAAAAAAAAAAAAAAA.

¿De cuántas maneras se puede ordenar $n=16$ bolitas donde en la primer cajita tiene que haber exactamente 3 bolitas?

fijo

AAA B |

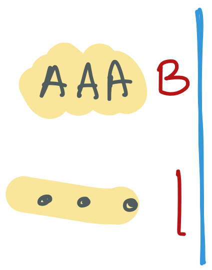
... |

13 bolitas que hay que ordenar en 3 cajitas

hay AAAAAAAAAAAAA BB

$$\frac{(13+3-1)!}{13!\,(3-1)!}$$

¿De cuántas maneras se puede ordenar $n=16$ bolitas donde en la primer cajita tiene que haber ~~exactamente~~ por lo menos 3 bolitas?



separamos 3 bolitas que van a ir en la primera cajita

Nos quedan 13 bolitas para repartir en 4 cajitas

Bosones

en la slide 2 dice $\binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$

$n+k-1-n = k-1$

Entonces, para el ejemplo anterior con $n = 16$ y $k = 4$, hay

$$\frac{19!}{3!16!} = \binom{19}{3} \text{ formas de hacerlo.}$$

Por lo tanto, **en general**, si queremos contar de cuántas maneras se pueden ordenar n bolillas indistinguibles en k cajitas distinguibles ($k-1$ separadores), hay

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!} = \binom{n+k-1}{k-1} \text{ formas de hacerlo.}$$

$n+k-1-(k-1) = n$

Bosones - ejercicios extra

Pensemos entonces cuántos elementos tiene Ω el espacio muestral donde se consideran todas las posibles formas de:

- resolver la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = N$ si $x_i \geq 1$ y además $x_i \in \mathbb{N}$.
- poner N bolitas indistinguibles (iguales entre sí) en k cajitas diferentes y **ninguna cajita puede quedar vacía**.
- poner n_1 bolitas indistinguibles azules (iguales entre sí) y n_2 bolitas indistinguibles rojas (iguales entre sí) en k cajitas diferentes.

tenés N bolitas

separo k bolitas para poner 1 en c/ cajita (de las k cajitas)

quedan N−k bolitas para repartir en k cajitas.

$$\frac{(N-k+k-1)!}{(N-k)!\,(k-1)!} = \frac{(N-1)!}{(N-k)!\,(k-1)!}$$