

Econometría
Problem Set 3
Heterocedasticidad y Autocorrelación

- **Ejercicio 1.** Pruebe que la hipótesis de muestreo aleatorio es consistente con la hipótesis de errores esféricos pero inconsistente con la violación de esta hipótesis.
- **Ejercicio 2.** Muestre que el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados es el estimador que resuelve el siguiente problema de minimización de residuos ponderados:

$$\hat{\beta}_{\text{MCG}} \in \arg \min_{\tilde{\beta}} \left\{ (y - X\tilde{\beta})' \Omega^{-1} (y - X\tilde{\beta}) \right\}$$

- **Ejercicio 3.** Considere el siguiente modelo generalizado,

$$y_t = \beta x_t + u_t; \quad E(u_t^2 | X) = \sigma_u^2 x_t^2$$

Obtenga el modelo transformado para obtener una matriz de varianzas y covarianzas de errores escalar y compare con el modelo original. Muestre que el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados es un estimador que “pondera” las observaciones del regresando. Interprete este resultado a la luz del Ejercicio 4.

- **Ejercicio 4.** Considere el siguiente modelo de regresión:

$$y_t = \alpha x_t + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

donde $\{u_t\}$ son variables aleatorias independientes con función de densidad

$$f(u_t | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta x_t^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_t}{\sqrt{\beta x_t}} \right)^2 \right], \quad \beta > 0.$$

Es decir, los errores se distribuyen condicionalmente normal con media 0 y varianza βx_t^2 . Hallar el estimador lineal insesgado de mínima varianza y verificar que coincide con el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados.

- **Ejercicio 5.** Sea el modelo

$$\begin{aligned} y_i &= \beta' x_i + u_i \\ \{u_i\} &\sim i.i.d. N(0, \sigma_u^2) \\ i &\in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Suponga que los datos se observan de manera agregada por grupos:

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{i=1}^{n_j} y_i, \quad x_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_i \\ j &\in \{1, 2, \dots, J\} \\ \sum_{j=1}^J n_j &= n \end{aligned}$$

de forma tal que el modelo estimado es:

$$y_j = \beta' x_j + u_j$$

¿Qué propiedades tiene el error del modelo agregado por grupos? ¿Se corrige este problema si se toman los promedios de cada grupo?

- **Ejercicio 6.** Sea el modelo

$$\begin{aligned} y_t &= \beta y_{t-1} + u_t, & |\beta| < 1 \\ u_t &= \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, & |\theta| < 1 \end{aligned}$$

donde $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$.

- Pruebe que el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos de β es inconsistente en la medida en que $\theta \neq 0$.
- ¿Cómo testearía la hipótesis de ausencia de autocorrelación en este modelo?