Matemática: Álgebra Matricial

Lara Sánchez Peña

Universidad Torcuato di Tella

10 de enero de 2022

¿Por qué pasamos a estudiar álgebra lineal?

- Terminamos de estudiar cálculo en una variable y, antes de pasar a estudiar cálculo en varias variables, necesitamos cubrir algunos temas de álgebra lineal. ¿Por qué?
- Como dice en el libro de Simon y Blume, "Since a primary goal of multivariable calculus is to provide mechanism for approximating complicated nonlinear systems by simpler linear ones, it makes sense to begin by squeezing out of all the information we can about linear systems".
- Para ver ejemplos concretos de sistemas lineales leer el capítulo 10 de Simon & Blume.

Sistemas de ecuaciones lineales

Decimos que tenemos un **sistema** de ecuaciones, cuando consideramos tenemos más de una ecuación y al menos una incógnita. Un sistema de $n \times k$ tiene n ecuaciones y k incógnitas.

¿Cómo podemos resolver un sistema lineal?

- por sustitución
- eliminación de Gauss-Jordan
- usando notación matricial
  - Pre-multiplicando por la matriz inversa (si es que se puede).
  - Pre-multiplicando por otra matriz de manera que el producto de ambas matrices tenga inversa (si es que se puede).
  - utilizando el sistema ampliado.

Si bien vamos a enumerar distintos ejemplos, tendremos los siguientes tres ejemplos en mente para resolver usando los tres métodos.

Ejemplo 1: Sistema de 2×2

$$\begin{aligned} 2a - 3b =& 8 \\ -4a + b =& -3 \end{aligned}$$

Sol: $a = 1/10$, $b = -2{,}6$.

Ejemplo 2: Sistema de 3×3

$$\begin{aligned} 3a + b - 2c =& 9 \\ a + b =& -7 \\ 5a + b + 4c =& 11 \end{aligned}$$

Sol: $a = 25/4$, $b = -53/4$ y $c = -7/4$.

Ejemplo 3: Sistema de 3×2

$$\begin{aligned} 2a - 3b =& 8 \\ -4a + b =& -3 \\ 3a - 4b =& 10{,}7 \end{aligned}$$

Sol: $a = 1/10$, $b = -2{,}6$.

¿Existe la solución? ¿Cuántas?

Hay tres tipos de sistemas lineales:

- **incompatible**: Es un sistema en donde hay ecuaciones que llevan a resultados contradictorios y por lo tanto el sistema no tiene solución.
- **determinado compatible**: Es un sistema en donde las ecuaciones son consistentes entre sí y existe una única solución.
- **indeterminado compatible** Es un sistema en donde las ecuaciones son consistentes entre sí y existen infinitas soluciones.

Los tres ejemplos anteriores son casos de sistemas determinados compatibles. Sin embargo, el ejemplo 3 difiere de los dos casos anteriores, ¿por qué?
Link para hacer cálculos con matrices: https://matrixcalc.org/

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- En general, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- En este sistema, las x_j son las incógnitas, y las a_{ij} y las b_j son los coeficientes de las ecuaciones, son valores dados.
- ¿Tiene solución este sistema? ¿Es única? ¿Cómo la encontramos?

- Una forma útil de resolver un sistema de ecuaciones lineales puede ser reescribirlo con notación matricial. Una **matriz** A $n\mathbb{R}^{n\times k}$ es un ordenamiento rectangular de números. Si una matriz tiene n filas y k columnas, decimos que es una matriz de $n \times k$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

- Un vector columna es una matriz $v \in \mathbb{R}^{k\times 1}$
- Un vector fila es una matriz $w \in \mathbb{R}^{1\times \ell}$

Álgebra Matricial - Suma y Resta

- Para poder sumar dos matrices, deben tener igual tamaño, es decir, igual número de columnas y filas. La suma sea realiza exactamente como uno supondría, es decir, sumando casilla a casilla ambas matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix}$$

- Un **escalar** es un número $r \in \mathbb{R}$. Si multiplicamos a una matriz por un escalar r, ello resulta equivalente a multiplicar cada elemento de dicha matriz por r:

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{k1} & \cdots & ra_{kn} \end{pmatrix}$$

Álgebra Matricial - Producto Matricial

- También podemos multiplicar matrices entre sí. Sin embargo, la forma de hacerlo es un poco más complicada que la suma o resta de matrices. No es posible multiplicar cualquier par de matrices entre sí.
- Sean A y B dos matrices. Entonces la matriz producto, AB, está definida si y solo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Es decir, si A es una matriz de $k \times n$, entonces para que AB esté definida deberá ser cierto que B es una matriz de $n \times m$, donde k, n, m son enteros positivos.
- Si A es $k \times n$ y B es $n \times m$, entonces AB es $k \times m$.

Álgebra Matricial - Producto Matricial

- Cada elemento de la matriz AB se computa multiplicando elemento por elemento la correspondiente fila de A con la correspondiente columna de B. Si, por ejemplo, queremos el elemento (i, j) de AB, multiplicamos la i-ésima fila de A por la j-ésima fila de B, normalmente escribimos $\langle A, B \rangle$ y lo denominamos el producto interno entre A y B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}$$

- Repitiendo esto para cada elemento podemos armar la matriz AB. Notemos que con este procedimiento vemos por qué el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B.

Multiplicación de matrices

Si queremos escribir la multiplicación de dos matrices $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$, tenemos varias formas de hacerlo:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times m}$.

$$A = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ C_1^A & \cdots & C_k^A \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & F_1^A & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & F_n^A & - \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ C_1^B & \cdots & C_m^B \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & F_1^B & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & F_k^B & - \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Notar que para el caso donde $m = n = k = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ y } B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

En ese caso:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 & a \cdot y_1 + b \cdot y_2 + c \cdot y_3 & a \cdot z_1 + b \cdot z_2 + c \cdot z_3 \\ d \cdot x_1 + e \cdot x_2 + f \cdot x_3 & d \cdot y_1 + e \cdot y_2 + f \cdot y_3 & d \cdot z_1 + e \cdot z_2 + f \cdot z_3 \\ g \cdot x_1 + h \cdot x_2 + i \cdot x_3 & g \cdot y_1 + h \cdot y_2 + i \cdot y_3 & g \cdot z_1 + h \cdot z_2 + i \cdot z_3 \end{pmatrix}$$

Notar que las columnas de $A \cdot B$ son combinaciones lineales de las columnas de B.

Multiplicación de matrices

En general,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \langle F_1^A, C_1^B \rangle & \langle F_1^A, C_2^B \rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \langle F_1^A, C_m^B \rangle \\ \langle F_2^A, C_1^B \rangle & \langle F_2^A, C_2^B \rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \langle F_2^A, C_m^B \rangle \\ \vdots & \vdots C_2^B \rangle & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \langle F_{n-1}^A, C_1^B & \langle F_{n-1}^A, C_2^B \rangle & \cdots & \ddots & \cdots & \langle F_{n-1}^A, C_m^B \rangle \\ \langle F_n^A, C_1^B & \langle F_n^A, C_2^B \rangle & \cdots & \cdots & \ddots & \langle F_n^A, C_m^B \rangle \end{pmatrix}$$

Ejemplo: dadas las matrices A y B, compute las matrices producto:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Definimos a la matriz **identidad** como la matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la diagonal son 1, siendo el resto de sus elementos 0:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz identidad tiene la propiedad de que, dada una matriz A tal que AI está definido, vale que $AI = A$. De igual modo, si IB está definida para una matriz B, entonces $B = BI$.

Álgebra Matricial - Propiedades

- **Leyes Asociativas**: $(A+B)+C = A+(B+C)$ y $(AB)C = A(BC)$.
- **Ley Conmutativa para la Suma**: $A+B = B+A$.
- **Leyes Distributivas**: $A(B+C) = AB+AC$ y $(A+B)C = AC+BC$.
- Una ley que no necesariamente es cierta es que $A \cdot B = B \cdot A$, incluso cuando se puede calcular ambos productos. Chequear que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Traspuesta

- Sea A una matriz de $k \times n$, definimos a la **Matriz Traspuesta** A^T como la matriz de $n \times k$ que surge de permutar las filas y las columnas de A.
- **Ejemplo**: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ entonces $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$
- Calcule las matrices traspuestas de las matrices de la filmina 8.
- Propiedades:
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $\left(A^T\right)^T = A$
  - $(AB)^T = B^T A^T$

Sistemas de Ecuaciones en Forma Matricial

Luego de esta breve introducción al mundo de las matrices, estamos listos para expresar al sistema de ecuaciones de la primera filmina en forma matricial. Recordemos que el sistema en cuestión era:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Estes sistema puede expresarse como la combinación de tres matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- El sistema queda reducido a una multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

  O bien, de manera compacta como $Ax = b$.

- Ahora bien, ¿qué ventaja nos da esto? En primer lugar, con esta forma de expresar el sistema podemos aplicar la eliminación de Gauss-Jordan. Además, cuando presentemos un concepto más, vamos a poder resolver el sistema directamente a partir de las matrices.
- Antes de ello, vamos a definir algunas matrices utilizadas con frecuencia en economía.

Matrices Especiales

- Cuando una matriz es de $n \times n$ (es decir, tiene igual número de filas y columnas) decimos que es una matriz **cuadrada**.
- Cuando una matriz posee una única columna (es decir, es de $k \times 1$), decimos que es una matriz **columna**. Cuando posee una única fila ($1 \times n$), decimos que es una matriz **fila**. Ambas matrices también pueden denominarse **vectores**.
- Cuando todos los elementos de una matriz cuadrada son 0 exceptuando los de la diagonal, decimos que la matriz es una matriz **diagonal**.
- Si $A^T = A$, entonces decimos que la matriz es **simétrica**.
- Si $BB = B$, decimos que la matriz es **idempotente**.

Matriz Inversa

- Vamos a pasar a definir a la matriz inversa, un concepto muy importante de álgebra matricial. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$, entonces la matriz cuadrada de $n \times n$ B es la inversa de A si y solo si $AB = BA = I$.
- La matriz inversa de una matriz A suele expresarse como A^{-1}.
- Esta matriz inversa, cuando existe, es muy útil para resolver sistemas lineales de ecuaciones. Recordemos que podíamos expresar un sistema lineal de ecuaciones de manera compacta como $Ax = b$. Si A posee inversa, podemos premultiplicar a ambos lados por A^{-1} para obtener:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I}x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

- Notemos que de este modo podemos obtener la única solución al sistema.

Sean A y B dos matrices cuadradas inversibles, entonces vale que:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$
- AB es inversible, y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^m es inversible para todo $m \in \mathbb{Z}$ y $(A^m)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m = A^{-m}$
- Para todo $r \neq 0$ vale que rA es inversible y $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$.

Matriz Inversa - Cálculo

- Ahora bien, seguramente nos estamos preguntando, ¿cómo calculamos la inversa de una matriz?
- Para poder hacerlo, debemos definir dos conceptos, la matriz adjunta ($\mathrm{adj}\,(A)$) y el determinante de una matriz ($\det(A)$ o $|A|$).
- Definiremos al determinante de manera inductiva. Comencemos con una matriz A de 1×1. El determinante de esta matriz es simplemente el elemento que la constituye (es decir si a es el único elemento de A, entonces $\det(A) = a$).
- Si A es una matriz de 2×2 de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- Si A es una matriz de 3×3 de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el procedimiento es un poco más complejo.

Definición

Sea $a_{i,j}$ un elemento de una matriz cuadrada A de $n \times n$. Definimos al **cofactor** de $a_{i,j}$, $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, donde $M_{i,j}$ es el determinante de la matriz que surge de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

- Si bien esta definición puede parecer un tanto arcana, aplicarla resulta bastante sencillo. Para verlo, calculemos algunos de los cofactores de:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa - Cálculo

- Para calcular el determinante de la matriz A de 3×3 genérica de la filmina anterior, debemos elegir alguna fila o columna de A (da lo mismo cual). Supongamos que elegimos la fila 1. El determinante es entonces:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

- Esto ya nos señala cómo obtener el determinante de una matriz de $n \times n$: fijamos una fila o columna, y calculamos

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

- Claramente esto es algebráicamente complicado. En la práctica cuando tratamos con matrices de un orden mayor a 3×3 solemos recurrir a una computadora. Para matrices de 3×3 disponemos de algunos trucos adicionales para poder computar el determinante.

Matriz Inversa - Cálculo

Definición

Sea A una matriz cuadrada, la **matriz adjunta**, $\mathrm{adj}(A)$ se obtiene reemplazando a cada elemento $a_{i,j}$ por $(-1)^{i-j} M_{i,j}$, donde $M_{i,j}$ es el **cofactor** de $a_{i,j}$. El cofactor de $a_{i,j}$ se obtiene computando el determinante de la matriz resultante de ignorar la columna i y la fila j de la matriz A.

- La **matriz adjunta** de A, $\mathrm{adj}(A)$, se obtiene reemplazando a cada elemento $a_{i,j}$ de A por su cofactor.
- Finalmente, la matriz inversa de A viene dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)^T$$

- Notemos que esta expresión solo tiene sentido cuando $\det(A) \neq 0$.
- Volviendo a nuestro sistema de ecuaciones, podemos ver que $Ax = b$ tiene solución única si y solo si $\det(A) \neq 0$.

Determinantes: Propiedades

Teorema

Sean A y B matrices cuadradas de $n \times n$. Entonces:

- Si todos los elementos de una fila o columna son 0, entonces $\det(A) = 0$
- $\det(A) = \det\left(A^T\right)$
- Si todos los elementos de una fila o columna son multiplicados por α, entonces el determinante es multiplicado por α
- Si permutamos dos filas o columnas del determinante, su valor no cambia, pero su signo se invierte
- Si dos filas o columnas son proporcionales, entonces $\det(A) = 0$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

Eliminación Gaussiana - Sistema Ampliado

- Otro método para resolver un sistema de ecuaciones es la **eliminación gaussiana** o **método de Gauss-Jordan**.
- Veamoso a través de un ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

- Para encontrar la solución, vamos a intentar reescribir el sistema para que cada ecuación incluya a una única incógnita. Escribamos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & -10 \end{array}\right)$$

Eliminación Gaussiana - Sistema Ampliado

- Podemos aplicar las siguientes operaciones al sistema sin que cambie el resultado:
  - Intercambiar una fila por otra.
  - Multiplicar una fila por un escalar.
  - Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.
- Si bien al principio resulta un tanto engorroso, una vez que nos acostumbramos a utilizarlo este método nos permite resolver eficientemente sistemas de más de dos ecuaciones.

Regla de Cramer

Teorema (Regla de Cramer)

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Si $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene una solución única que viene dada por $x_i = \frac{D_i}{\det(A)}$, donde D_i es el determinante de la matriz que resulta de reemplazar la fila correspondiente a x_i por el vector b.

Aplicaciones: MCC

1. Consideremos un modelo de regresión lineal, donde el modelo poblacional es $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ donde $u_i \sim_{iid} (0, \sigma^2)$ y X tiene rango completo, de manera que se cumple que $X^\mathsf{T} u = 0$. Tenemos n observaciones para (x_i, y_i) con $i = 1, \cdots, n$. ¿Cómo podemos encontrar (β_0, β_1)?
2. Sea $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ de rango completo. Se puede probar entonces que $X^\mathsf{T} X \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tiene determinante distinto de cero. Muestre que $X^\mathsf{T} X$:
   - es una matriz simétrica.
   - es una matriz definida positiva, es decir, $v^\mathsf{T} \cdot X^\mathsf{T} X \cdot v > 0$ si v no es el vector nulo.
   - se puede escribir de la siguiente manera: $\sum_{i=1}^{n} X_i^\mathsf{T} X_i$, donde X_i, $i = 1, \cdots, n$ son las filas de la matriz X. Esta notación será útil para describir la distribución asintótica de estimadores utilizando la ley de grandes números.
   - cumple que la matriz $I - X(X^\mathsf{T} X)^{-1} X^\mathsf{T}$ es simétrica e idempotente.

Aplicaciones: MCC

3. Matrices definidas positivas. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz definida positiva. Entonces Ω se puede escribir de la siguiente manera:
$\Omega = L^{\mathsf{T}}L$ por lo tanto, $X^{\mathsf{T}}\Omega X = \sum_{i=1}^{n}(LX)_i^{\mathsf{T}}(LX)_i$ donde $(LX)_i$, $i = 1, \cdots, n$ son las filas de la matriz LX.
4. Matrices particionadas, por ejemplo, usado al usar el teorema de Frisch-Waugh-Lovell. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ donde $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} & -\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} A_{12}A_{22}^{-1} \\ -\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} A_{21}A_{11}^{-1} & \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Link: Apunte aquí