Práctica 1 - Vectores y Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Dados los vectores $u = (1, 2)$, $v = (-1, 3)$ y $w = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

(a) $u + v$;
(d) $3(u + v)$;
(g) $u - v$;
(b) $v + w$;
(e) $(u + v) + w$;
(h) $u + (v - w)$;
(c) $3u + 3v$;
(f) $u + (v + w)$;
(i) $\frac{5}{4}u + \frac{1}{2}v - \frac{3}{2}w$.

Ejercicio 2. Sea $w = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ un vector. Graficar en el plano:

(a) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}\}$.

(b) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

(c) $L = \{tw : t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq 1\}$.

Ejercicio 3. Dados los vectores $u = (0, 1, 2)$, $v = (1, 1, 0)$ y $w = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:

(a) $u + v$;
(c) $u - v$;
(e) $-3v$;
(b) $u + v + w$;
(d) $2u$;
(f) $-v + \dfrac{2}{3}w$.

Ejercicio 4. Halle x e y para que los vectores v y w resulten iguales.

(a) $v = (x, 3)$ y $w = (2, x + y)$;
(c) $v = x(3, 2)$ y $w = 2(y, -1)$;
(b) $v = (4, y)$ y $w = x(2, 3)$;
(d) $v = x(2, y)$ y $w = y(1, -2)$.

Ejercicio 5. Normalizar los siguientes vectores

(a) $u = (-3, 1, -2, 4, -5)$;
(c) $w = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4})$.
(b) $v = (4, -2, -3, 8)$;

Ejercicio 6. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:

(a) El vector $u = (4, k)$ tiene norma 5;

(b) El vector $v = (1, k, 0)$ tiene norma 2;

(c) El vector $w = k \cdot (2, 2, 1)$ tiene norma 1;

(d) El vector $z = (1, k, -2, 5)$ tienen norma $\sqrt{39}$.

Ejercicio 7. Dados los vectores $v = (1, -2, 2),\ w = (2, 0, 3)$ y $z = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:

(a) $v \cdot w$;

(b) $w \cdot v$;

(c) $(v + w) \cdot z$;

(d) $(v \cdot z) + (w \cdot z)$.

(e) $(3v) \cdot w$;

(f) $v \cdot (3w)$;

(g) $3(v \cdot w)$;

(h) $v \cdot v$;

(i) $w \cdot w$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos calcule el ángulo entre los vectores u y v.

(a) $u = (1, 1)$ y $v = (1, -1)$;

(b) $u = (3, -1, 2)$ y $v = (4, 3, -1)$;

(c) $u = (1, -2, 3)$ y $v = (2, 5, 4)$;

En cada uno de los casos anteriores indicar si u y v son ortogonales.

Ejercicio 9. Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$ $u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, -1, 1)$.

(a) Escriba al vector $w = (1, 7, -4)$ como combinación lineal de u y v.

(b) Escriba al vector $z = (2, -5, 4)$ como combinación lineal de u y v.

(c) ¿Para qué valores de k el vector $y = (1, k, 5)$ es una combinación lineal de u y v?

Ejercicio 10. Estudie si el conjunto de vectores $S = \{(2, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 2, -1)\}$ es una base $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11. Enccuentre un sistema generador del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + 2z - 3t + 2y = 0\}.$$

Ejercicio 12. Determine si los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^3$

(*a*) $\{(1,1,4),(0,2,1),(3,1,9)\}$;

(*b*) $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$;

(*c*) $\{(2,1,1),(2,2,1),(2,2,-1)\}$;

(*d*) $\{(1,2,1),(1,3,1),(1,4,1),(1,5,1)\}$;

(*e*) $\{(1,1,1),(-2,1,0),(-1,0,1)\}$.

Ejercicio 13. Sea $B = \{(2,1,1),(1,-1,3),v\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Halle v sabiendo que las coordenadas del vector $(1,-2,5)$ en la base B son $(2,-1,3)$.

Ejercicio 14. Sean $B = \{(-1,4,2),v,(0,0,-1)\}$ y $B' = \{w,(1,-1,1),(-1,0,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Halle v y w sabiendo que las coordenadas de v en la base de B' son $(1,2,3)$ y que las coordenadas de w en la base B son $(1,2,3)$.

Ejercicio 15. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios

(*a*) $\{(x,y,z) \colon x = y = z\}$ de $\mathbb{R}^3$;

(*b*) $\{(x,y,z,t) \colon x = z, y = t\}$ de $\mathbb{R}^4$;

(*c*) $\{(x,y,z,t) \colon 2y + 3z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$;

Ejercicio 16. Una compañía petrolera puede convertir un barril de crudo en tres clases distintas de combustible. Sin aditivos de plomo sus producciones de las tres clases de combustible a partir de un barril de crudo vienen dadas por el vector $(2,2,4)$. Con el máximo de aditivos de plomo permitidos legalmente las producciones son $(5,0,3)$. Supongamos que los efectos de los aditivos de plomo son proporcionales, es decir, que al usar una fracción α del máximo permitido $(0 \leq \alpha \leq 1)$ se tiene la producción

$$(1-\alpha)(2,2,4) + \alpha(5,0,3).$$

Determine si es posible que la compañía produzca los siguientes vectores

(*a*) $\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2}\right)$;

(*b*) $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6}\right)$;

(*c*) $(1,6,9)$.

Ejercicio 17. Consideremos el conjunto

$$V = \{(w, td, ti, P, GP) \colon P = w, td + ti = GP\}$$

donde w es el crecimiento de los salarios nominales, td es el crecimiento de los impuestos directos, ti es el crecimiento de los impuestos indirectos, P es el crecimiento de los precios y GP es el crecimiento del gasto público.

(a) Muestre que V es un subsepacio vectorial de $\mathbb{R}^5$;

(b) Halle una base y la dimensión de V. De una interpretación económica del resultado.

Trabajo Práctico N° 1:
Vectores y Espacios Vectoriales.

Ejercicio 1.

Dados los vectores u= (1, 2), v= (-1, 3) y w= (-1, -2), calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones.

(a)

u + v= (1, 2) + (-1, 3)
u + v= (0, 5).

Gráfico.

(b)

v + w= (-1, 3) + (-1, -2)
v + w= (-2, 1).

Gráfico.

(c)

3u + 3v= 3 (1, 2) + 3 (-1, 3)
3u + 3v= (3, 6) + (-3, 9)
3u + 3v= (0, 15).

Gráfico.

(d)

3 (u + v)= 3 [(1, 2) + (-1, 3)]
3 (u + v)= 3 (0, 5)
3 (u + v)= (0, 15).

Gráfico.

(e)

(u + v) + w= [(1, 2) + (-1, 3)] + (-1, 2)
(u + v) + w= (0, 5) + (-1, 2)
(u + v) + w= (-1, 7).

Gráfico.

(f)

u + (v + w)= (1, 2) + [(-1, 3) + (-1, -2)]
u + (v + w)= (1, 2) + (-2, 1)
u + (v + w)= (-1, 3).

Gráfico.

(g)

u - v= (1, 2) - (-1, 3)
u - v= (4, -1).

Gráfico.

(h)

u + (v - w)= (1, 2) + [(-1, 3) - (-1, -2)]
u + (v - w)= (1, 2) + (0, 5)
u + (v - w)= (1, 7).

Gráfico.

(i)

$\frac{5}{4}$ u + $\frac{1}{2}$ v - $\frac{3}{2}$ w= $\frac{5}{4}$ (1, 2) + $\frac{1}{2}$ (-1, 3) - $\frac{3}{2}$ (-1, -2)
$\frac{5}{4}$ u + $\frac{1}{2}$ v - $\frac{3}{2}$ w= ($\frac{5}{4}$, $\frac{5}{2}$) + ($\frac{-1}{2}$, $\frac{3}{2}$) + ($\frac{3}{2}$, 3)
$\frac{5}{4}$ u + $\frac{1}{2}$ v - $\frac{3}{2}$ w= ($\frac{9}{4}$, 7).

Gráfico.

Ejercicio 2.

Sea $w = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ *un vector. Graficar en el plano.*

(a) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}\}$.

Gráfico.

(b) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

Gráfico.

(c) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$.

Gráfico.

Ejercicio 3.

Dados los vectores u= (0, 1, 2), v= (1, 1, 0) y w= (-1, 1, 1), calcular las operaciones:

(a)

u + v= (0, 1, 2) + (1, 1, 0)
u + v= (1, 2, 2).

(b)

u + v + w= (0, 1, 2) + (1, 1, 0) + (-1, 1, 1)
u + v + w= (0, 3, 3).

(c)

u - v= (0, 1, 2) - (1, 1, 0)
u - v= (-1, 0, 2).

(d)

2u= 2 (0, 1, 2)
2u= (0, 2, 4).

(e)

-3v= -3 (1, 1, 0)
-3v= (-3, -3, 0).

(f)

$-v + \frac{2}{3} w = -(1, 1, 0) + \frac{2}{3} (-1, 1, 1)$
$-v + \frac{2}{3} w = (-1, -1, 0) + (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
$-v + \frac{2}{3} w = (\frac{-5}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$.

Ejercicio 4.

Hallar x e y para que los vectores v y w resulten iguales.

(a) *v= (x, 3) y w= (2, x + y).*

v= w
(x, 3)= (2, x + y).

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3 = x + y \end{cases}.$$

x + y= 3
y= -x + 3
y= -2 + 3
y= 1.

Por lo tanto, los valores de x e y para que los vectores v y w resulten iguales son (2, 1).

(b) *v= (4, y) y w= x (2, 3).*

v= w
(4, y)= x (2, 3)
(4, y)= (2x, 3x).

$$\begin{cases} 4 = 2x \\ y = 3x \end{cases}.$$

x= $\frac{4}{2}$
x= 2.

y= 3 * 2
y= 6.

Por lo tanto, los valores de x e y para que los vectores v y w resulten iguales son (2, 6).

(c) *v= x (3, 2) y w= 2 (y, -1).*

v= w
x (3, 2)= 2 (y, -1)
(3x, 2x)= (2y, -2).

$$\begin{cases} 3x = 2y \\ 2x = -2 \end{cases}.$$

x= $\frac{-2}{2}$
x= -1.

2y= 3x
y= $\frac{3}{2}$ x
y= $\frac{3}{2}$ (-1)
y= $\frac{-3}{2}$.

Por lo tanto, los valores de x e y para que los vectores v y w resulten iguales son (-1, $\frac{-3}{2}$).

(d) *v= x (2, y) y w= y (1, -2).*

v= w
x (2, y)= y (1, -2)
(2x, xy)= (y, -2y).

$$\begin{cases} 2x = y \\ xy = -2y \end{cases}.$$

x2x= -2 * 2x
2x^2= -4x
x^2= $\frac{-4}{2}$ x
x^2= -2x
x^2 + 2x= 0
x (x + 2)= 0.
x_1= 0.
x_2= -2.

y_1= 2 * 0= 0.
y_2= 2 (-2)= -4.

Por lo tanto, los valores de x e y para que los vectores v y w resulten iguales son (0, 0) y (-2, -4).

Ejercicio 5

Normalizar los siguientes vectores.

(a) *u= (-3, 1, -2, 4, -5).*

$u' = \frac{u}{\|u\|}$
$u' = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2+4^2+(-5)^2}}$ (-3, 1, -2, 4, -5)
$u' = \frac{1}{\sqrt{9+1+4+16+25}}$ (-3, 1, -2, 4, -5)
$u' = \frac{1}{\sqrt{55}}$ (-3, 1, -2, 4, -5)
$u' = (\frac{-3}{\sqrt{55}}, \frac{1}{\sqrt{55}}, \frac{-2}{\sqrt{55}}, \frac{4}{\sqrt{55}}, \frac{-5}{\sqrt{55}})$
$u' = (\frac{-3\sqrt{55}}{55}, \frac{\sqrt{55}}{55}, \frac{-2\sqrt{55}}{55}, \frac{4\sqrt{55}}{55}, \frac{-5\sqrt{55}}{55})$
$u' = (\frac{-3\sqrt{55}}{55}, \frac{\sqrt{55}}{55}, \frac{-2\sqrt{55}}{55}, \frac{4\sqrt{55}}{55}, \frac{-\sqrt{55}}{11})$.

(b) *v= (4, -2, -3, 8).*

$v' = \frac{v}{\|v\|}$
$v' = \frac{1}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-3)^2+8^2}}$ (4, -2, -3, 8)
$v' = \frac{1}{\sqrt{16+4+9+64}}$ (4, -2, -3, 8)
$v' = \frac{1}{\sqrt{93}}$ (4, -2, -3, 8)
$v' = (\frac{4}{\sqrt{93}}, \frac{-2}{\sqrt{93}}, \frac{-3}{\sqrt{93}}, \frac{8}{\sqrt{93}})$
$v' = (\frac{4\sqrt{93}}{93}, \frac{-2\sqrt{93}}{93}, \frac{-3\sqrt{93}}{93}, \frac{8\sqrt{93}}{93})$
$v' = (\frac{4\sqrt{93}}{93}, \frac{-2\sqrt{93}}{93}, \frac{-\sqrt{93}}{31}, \frac{8\sqrt{93}}{93})$.

(c) *w=* $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$.

$w' = \frac{w}{\|w\|}$
$w' = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{2}{3})^2+(\frac{-1}{4})^2}} (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$
$w' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{1}{16}}} (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$
$w' = \frac{1}{\sqrt{\frac{109}{144}}} (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$
$w' = \frac{1}{\frac{\sqrt{109}}{12}} (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$

w´= $\frac{12}{\sqrt{109}}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4}\right)$

w´= $\left(\frac{6}{\sqrt{109}}, \frac{8}{\sqrt{109}}, \frac{-3}{\sqrt{109}}\right)$

w´= $\left(\frac{6\sqrt{109}}{109}, \frac{8\sqrt{109}}{109}, \frac{-3\sqrt{109}}{4*109}\right)$

w´= $\left(\frac{6\sqrt{109}}{109}, \frac{8\sqrt{109}}{109}, \frac{-3\sqrt{109}}{109}\right)$.

Ejercicio 6.

Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:

(a) *El vector u= (4, k) tiene norma 5.*

$\|u\|$= 5
$\sqrt{4^2 + k^2}$= 5
$\sqrt{16 + k^2}$= 5
16 + k^2= 5^2
16 + k^2= 25
k^2= 25 - 16
k^2= 9
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{9}$
$|k|$= 3
k= $\pm$ 3.

(b) *El vector v= (1, k, 0) tiene norma 2.*

$\|v\|$= 2
$\sqrt{1^2 + k^2 + 0^2}$= 2
$\sqrt{1 + k^2 + 0}$= 2
$\sqrt{1 + k^2}$= 2
1 + k^2= 2^2
1 + k^2= 4
k^2= 4 - 1
k^2= 3
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{3}$
$|k|$= $\sqrt{3}$
k= $\pm$ $\sqrt{3}$.

(c) *El vector w= k (2, 2, 1) tiene norma 1.*

$\|w\|$= 1
$\sqrt{(2k)^2 + (2k)^2 + 1^2}$= 1
$\sqrt{4k^2 + 4k^2 + 1}$= 1
$\sqrt{8k^2 + 1}$= 1
$8k^2$ + 1= 1^2
$8k^2$ + 1= 1
$8k^2$= 1 - 1
$8k^2$= 0
k^2= $\frac{0}{8}$

k^2= 0
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{0}$
$|k|$= 0
k= $\pm$ 0
k= 0.

(d) *El vector z= (1, k, -2, 5) tiene norma* $\sqrt{39}$.

$||z||$= $\sqrt{39}$
$\sqrt{1^2 + k^2 + (-2)^2 + 5^2}$= $\sqrt{39}$
$\sqrt{1 + k^2 + 4 + 25}$= $\sqrt{39}$
$\sqrt{30 + k^2}$= $\sqrt{39}$
30 + k^2= $(\sqrt{39})^2$
30 + k^2= 39
k^2= 39 - 30
k^2= 9
$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{9}$
$|k|$= 3
k= $\pm$ 3.

Ejercicio 7.

Dados los vectores v= (1, -2, 2), w= (2, 0, 3) y z= (4, 4, 4), realizar las operaciones.

(a)

v * w= (1, -2, 2) * (2, 0, 3)
v * w= 1 * 2 - 2 * 0 + 2 * 3
v * w= 2 - 0 + 6
v * w= 8.

(b)

w * v= (2, 0, 3) * (1, -2, 2)
w * v= 2 * 1 + 0 (-2) + 3 * 2
w * v= 2 + 0 + 6
w * v= 8.

(c)

(v + w) * z= [(1, -2, 2) + (2, 0, 3)] * (4, 4, 4)
(v + w) * z= (3, -2, 5) * (4, 4, 4)
(v + w) * z= 3 * 4 - 2 * 4 + 5 * 4
(v + w) * z= 12 - 8 + 20
(v + w) * z= 24.

(d)

(v * z) + (w * z)= (1, -2, 2) * (4, 4, 4) + (2, 0, 3) * (4, 4, 4)
(v * z) + (w * z)= [(1, -2, 2) + (2, 0, 3)] * (4, 4, 4)
(v * z) + (w * z)= (3, -2, 5) * (4, 4, 4)
(v * z) + (w * z)= 3 * 4 - 2 * 4 + 5 * 4
(v * z) + (w * z)= 12 - 8 + 20
(v * z) + (w * z)= 24.

(e)

3v * w= 3 (1, -2, 4) * (2, 0, 3)
3v * w= (3, -6, 12) * (2, 0, 3)
3v * w= 3 * 2 - 6 * 0 + 12 * 3
3v * w= 6 - 0 + 36

3v * w= 42.

(f)

v * 3w= (1, -2, 2) * 3 (2, 0, 3)
v * 3w= (1, -2, 2) * (6, 0, 9)
v * 3w= 1 * 6 - 2 * 0 + 2 * 9
v * 3w= 6 - 0 + 18
v * 3w= 24.

(g)

3 (v * w)= 3 [(1, -2, 2) * (2, 0, 3)]
3 (v * w)= 3 (1 * 2 - 2 * 0 + 2 * 3)
3 (v * w)= 3 (2 - 0 + 6)
3 (v * w)= 3 * 8
3 (v * w)= 24.

(h)

v * v= (1, -2, 2) * (1, -2, 2)
v * v= 1 * 1 - 2 (-2) + 2 * 2
v * v= 1 - 4 + 4
v * v= 1.

(i)

w * w= (2, 0, 3) * (2, 0, 3)
w * w= 2 * 2 + 0 * 0 + 3 * 3
w * w= 4 + 0 + 9
w * w= 13.

Ejercicio 8.

En cada uno de los siguientes casos, calcular el ángulo entre los vectores u y v.

(a) *u= (1, 1) y v= (1, -1).*

u * v= (1, 1) * (1, -1)
u * v= 1 * 1 + 1 (-1)
u * v= 1 - 1
u * v= 0.

φ= arccos ($\frac{\cos(\varphi)}{\|u\|\|v\|}$)
φ= arccos (0)
φ= 90°.

Por lo tanto, u y v son ortogonales.

(b) *u= (3, -1, 2) y v= (4, 3, -1).*

u * v= (3, -1, 2) * (4, 3, -1)
u * v= 3 * 4 - 1 * 3 + 2 (-1)
u * v= 12 - 3 - 2
u * v= 7.

$\|u\|$= $\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}$
$\|u\|$= $\sqrt{9+1+4}$
$\|u\|$= $\sqrt{14}$.

$\|v\|$= $\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}$
$\|v\|$= $\sqrt{16+9+1}$
$\|v\|$= $\sqrt{26}$.

φ= arccos ($\frac{\mathrm{u*v}}{\|u\|\|v\|}$)
φ= arccos ($\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}}$)
φ= arccos ($\frac{7}{\sqrt{14*26}}$)
φ= arccos ($\frac{7}{\sqrt{390}}$)
φ= 69,24°.

Por lo tanto, u y v no son ortogonales.

(c) *u= (1, -2, 3) y v= (2, 5, 4).*

u * v= (1, -2, 3) * (2, 5, 4)
u * v= 1 * 2 - 2 * 5 + 3 * 4
u * v= 2 - 10 + 12
u * v= 4.

$\|u\|= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}$
$\|u\|= \sqrt{1 + 4 + 9}$
$\|u\|= \sqrt{15}$.

$\|v\|= \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2}$
$\|v\|= \sqrt{4 + 25 + 16}$
$\|v\|= \sqrt{40}$.

φ= arccos $(\frac{u*v}{\|u\|\|v\|})$
φ= arccos $(\frac{4}{\sqrt{15}\sqrt{40}})$
φ= arccos $(\frac{4}{\sqrt{15*40}})$
φ= arccos $(\frac{4}{\sqrt{600}})$
φ= 80,6°.

Por lo tanto, u y v no son ortogonales.

Ejercicio 9.

Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^3$ *u= (1, -3, 2) y v= (2, -1, 1).*

(a) *Escribir al vector w= (1, 7, -4) como combinación lineal de u y v.*

w= au + bv
(1, 7, -4)= a (1, -3, 2) + b (2, -1, 1)
(1, 7, -4)= (a, -3a, 2a) + (2b, -b, b)
(1, 7, -4)= (a + 2b, -3a - b, 2a + b).

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ 7 = -3a - b. \\ -4 = 2a + b \end{cases}$$

2b= 1 - a
b= $\frac{1-a}{2}$
b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a.

7= -3a - ($\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a)
7= -3a - $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ a
7= $\frac{-5}{2}$ a - $\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$ a= $\frac{-1}{2}$ - 7
$\frac{5}{2}$ a= $\frac{-15}{2}$
a= $\frac{\frac{-15}{2}}{\frac{5}{2}}$
a= -3.

b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ (-3)
b= $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{2}$
b= 2.

-4= 2 (-3) + 2
-4= -6 +2
-4= -4.

Por lo tanto, se escribe al vector w como combinación lineal de u y v de la siguiente manera:

w= -3u + 2v
(1, 7, -4)= -3 (1, -3, 2) + 2 (2, -1, 1).

(b) *Escribir al vector z= (2, -5, 4) como combinación lineal de u y v.*

z= au + bv
(2, -5, 4)= a (1, -3, 2) + b (2, -1, 1)
(2, -5, 4)= (a, -3a, 2a) + (2b, -b, b)
(2, -5, 4)= (a + 2b, -3a - b, 2a + b).

$$\begin{cases} 2 = a + 2b \\ -5 = -3a - b. \\ 4 = 2a + b \end{cases}$$

2b= 2 - a
b= $\frac{2-a}{2}$
b= 1 - $\frac{1}{2}$ a.

-5= -3a - (1 - $\frac{1}{2}$ a)
-5= -3a - 1 + $\frac{1}{2}$ a
-5= $\frac{-5}{2}$ a - 1
$\frac{5}{2}$ a= -1 + 5
$\frac{5}{2}$ a= 4
a= $\frac{4}{\frac{5}{2}}$
a= $\frac{8}{5}$.

b= 1 - $\frac{1}{2}$ $\frac{8}{5}$
b= 1 - $\frac{4}{5}$
b= $\frac{1}{5}$.

4= 2 $\frac{8}{5}$ + $\frac{1}{5}$
4= $\frac{16}{5}$ + $\frac{1}{5}$
4≠ $\frac{17}{5}$.

Por lo tanto, no es posible escribir al vector z como combinación lineal de u y v.

(c) *¿Para qué valores de k el vector y= (1, k, 5) es una combinación lineal de u y v?*

y= au + bv
(1, k, 5)= a (1, -3, 2) + b (2, -1, 1)
(1, k, 5)= (a, -3a, 2a) + (2b, -b, b)
(1, k, 5)= (a + 2b, -3a - b, 2a + b).

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ k = -3a - b. \\ 5 = 2a + b \end{cases}$$

2b= 1 - a
b= $\frac{1-a}{2}$
b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a.

5= 2a + $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a
5= $\frac{3}{2}$ a + $\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$ a= 5 - $\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$ a= $\frac{9}{2}$
a= $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}$
a= 3.

b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ * 3
b= $\frac{1}{2}$ - $\frac{3}{2}$
b= -1.

k= -3 * 3 - (-1)
k= -9 + 1
k= -8.

Por lo tanto, el vector y es una combinación lineal de u y v para k= -8.

Ejercicio 10.

Estudiar si el conjunto de vectores S= {(2, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 2, -1)} es una base $\mathbb{R}^3$.

a (2, 1, 0) + b (3, 1, 1) + c (3, 2, -1)= (0, 0, 0)
(2a, a, 0) + (3b, b, b) + (3c, 2c, -c)= (0, 0, 0)
(2a + 3b + 3c, a + b + 2c, b - c)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} 2a + 3b + 3c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}.$$

b= c.

a + c + 2c= 0
a + 3c= 0
a= -3c.

2 (-3c) + 3c + 3c= 0
-6c + 6c= 0
0= 0.

Por lo tanto, S no es linealmente independiente y, entonces, no es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11.

Encontrar un sistema generador del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por:

T= {(x, y, z, t) ∈ $\mathbb{R}^4$: x + 2z - 3t + 2y= 0}.

x= -2z + 3t - 2y.

(x, y, z, t)= (-2z + 3t - 2y, y, z, t)
(x, y, z, t)= y (-2, 1, 0, 0) + z (-2, 0, 1, 0) + t (3, 0, 0, 1).

T= $\langle(-2,1,0,0),(-2,0,1,0),(3,0,0,1)\rangle$.

Ejercicio 12.

Determinar si los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^3$.

(a) *{(1, 1, 4), (0, 2, 1), (3, 1, 9)}.*

a (1, 1, 4) + b (0, 2, 1) + c (3, 1, 9)= (0, 0, 0)
(a, a, 4a) + (0, 2b, b) + (3c, c, 9c)= (0, 0, 0)
(a + 3c, a + 2b + c, 4a + b + 9c)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} a + 3c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ 4a + b + 9c = 0 \end{cases}.$$

3c= -a
c= $\frac{-1}{3}$ a.

a + 2b - $\frac{1}{3}$ a= 0
$\frac{2}{3}$ a + 2b= 0
2b= $\frac{-2}{3}$ a
b= $\frac{\frac{-2}{3}}{2}$ a
b= $\frac{-1}{3}$ a.

4a - $\frac{1}{3}$ a + 9 ($\frac{-1}{3}$ a)= 0
4a - $\frac{1}{3}$ a - 3a= 0
$\frac{2}{3}$ a= 0
a= $\frac{0}{\frac{2}{3}}$
a= 0.

b= $\frac{-1}{3} * 0$
b= 0.

c= $\frac{-1}{3} * 0$
c= 0.

a= b= c= 0.

a (1, 1, 4) + b (0, 2, 1) + c (3, 1, 9)= (x, y, z)
(a, a, 4a) + (0, 2b, b) + (3c, c, 9c)= (x, y, z)
(a + 3c, a + 2b + c, 4a + b + 9c)= (x, y, z).

$$\begin{cases} a + 3c = x \\ a + 2b + c = y \\ 4a + b + 9c = z \end{cases}.$$

3c= x - a
c= $\frac{x-a}{3}$
c= $\frac{1}{3}$ x - $\frac{1}{3}$ a.

a + 2b + $\frac{1}{3}$ x - $\frac{1}{3}$ a= y
$\frac{2}{3}$ a + 2b + $\frac{1}{3}$ x= y
2b= y - $\frac{2}{3}$ a - $\frac{1}{3}$ x
b= $\frac{y-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}x}{2}$
b= $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{3}$ a - $\frac{1}{6}$ x.

4a + $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{3}$ a - $\frac{1}{6}$ x + 9 ($\frac{1}{3}$ x - $\frac{1}{3}$ a)= z
4a + $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{3}$ a - $\frac{1}{6}$ x + 3x - 3a= z
$\frac{2}{3}$ a + $\frac{17}{6}$ x + $\frac{1}{2}$ y= z
$\frac{2}{3}$ a= $\frac{-17}{6}$ x - $\frac{1}{2}$ y + z
a= $\frac{\frac{-17}{6}x-\frac{1}{2}y+z}{\frac{2}{3}}$
a= $\frac{-51}{12}$ x - $\frac{3}{4}$ y + $\frac{3}{2}$ z
a= $\frac{-51x-9y+18z}{12}$.

b= $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{3}$ ($\frac{-51}{12}$ x - $\frac{3}{4}$ y + $\frac{3}{2}$ z) - $\frac{1}{6}$ x
b= $\frac{1}{2}$ y + $\frac{17}{12}$ x + $\frac{1}{4}$ y - $\frac{1}{2}$ z - $\frac{1}{6}$ x
b= $\frac{15}{12}$ x + $\frac{3}{4}$ y - $\frac{1}{2}$ z
b= $\frac{15x+9y-6z}{12}$.

c= $\frac{1}{3}$ x - $\frac{1}{3}$ ($\frac{-51}{12}$ x - $\frac{3}{4}$ y + $\frac{3}{2}$ z)
c= $\frac{1}{3}$ x - $\frac{17}{12}$ x + $\frac{1}{4}$ y - $\frac{1}{2}$ z
c= $\frac{-13}{12}$ x + $\frac{1}{4}$ y - $\frac{1}{2}$ z
c= $\frac{-13x+3y-6z}{12}$.

Por lo tanto, este conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

(b) *{(1, 0, 1), (1, 1, 0)}.*

Este conjunto no es base de $\mathbb{R}^3$, ya que dim ($\mathbb{R}^3$)= 3.

(c) *{(2, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 2, -1)}.*

a (2, 1, 1) + b (2, 2, 1) + c (2, 2, -1)= (0, 0, 0)
(2a, a, a) + (2b, 2b, b) + (2c, 2c, -c)= (0, 0, 0)
(2a + 2b + 2c, a + 2b + 2c, a + b - c)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} 2a+2b+2c=0 \\ a+2b+2c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases}.$$

2 (a + b + c)= 0
a + b + c= $\frac{0}{2}$
a + b + c= 0
c= -a - b.

a + 2b + 2 (-a - b)= 0
a + 2b - 2a - 2b= 0
-a= 0
a= $\frac{0}{-1}$
a= 0.

c= -0 - b
c= -b.

0 + b - (-b)= 0
b + b= 0
2b= 0
b= $\frac{0}{2}$
b= 0.

c= -0
c= 0.

a= b= c= 0.

a (2, 1, 1) + b (2, 2, 1) + c (2, 2, -1)= (x, y, z)
(2a, a, a) + (2b, 2b, b) + (2c, 2c, -c)= (x, y, z)
(2a + 2b + 2c, a + 2b + 2c, a + b - c)= (x, y, z).

$$\begin{cases} 2a+2b+2c=x \\ a+2b+2c=y \\ a+b-c=z \end{cases}.$$

2 (a + b + c)= x
a + b + c= $\frac{1}{2}$ x

c= $\frac{1}{2}$ x - a - b.

a + 2b + 2 ($\frac{1}{2}$ x - a - b)= y
a + 2b + x - 2a - 2b= y
-a + x= y
a= x - y.

c= $\frac{1}{2}$ x - (x - y) - b
c= $\frac{1}{2}$ x - x + y - b
c= $\frac{-1}{2}$ x + y - b.

x - y + b - ($\frac{-1}{2}$ x + y - b)= z
x - y + b + $\frac{1}{2}$ x - y + b= z
$\frac{3}{2}$ x - 2y + 2b= z
2b= $\frac{-3}{2}$ x + 2y + z
b= $\frac{\frac{-3}{2}x+2y+z}{2}$
b= $\frac{-3}{4}$ x + y + $\frac{1}{2}$ z
b= $\frac{-3x+4y+2z}{4}$.

c= $\frac{-1}{2}$ x + y - ($\frac{-3}{4}$ x + y + $\frac{1}{2}$ z)
c= $\frac{-1}{2}$ x + y + $\frac{3}{4}$ x - y - $\frac{1}{2}$ z
c= $\frac{1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ z
c= $\frac{x-2z}{4}$.

Por lo tanto, este conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

(d) *{(1, 2, 1), (1, 3, 1), (1, 4, 1), (1, 5, 1)}.*

Este conjunto no es base de $\mathbb{R}^3$, ya que es linealmente dependiente.

(e) *{(1, 1, 1), (-2, 1, 0), (-1, 0, 1)}.*

a (1, 1, 1) + b (-2, 1, 0) + c (-1, 0, 1)= (0, 0, 0)
(a, a, a) + (-2b, b, 0) + (-c, 0, c)= (0, 0, 0)
(a - 2b - c, a + b, a + c)= (0, 0, 0).

$$\begin{cases} a - 2b - c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}.$$

b= -a.

c= -a.

a - 2 (-a) - (-a)= 0
a + 2a + a= 0
4a= 0
a= $\frac{0}{4}$
a= 0.

b= -0
b= -0.

c= -0
c= 0.

a= b= c= 0.

a (1, 1, 1) + b (-2, 1, 0) + c (-1, 0, 1)= (x, y, z)
(a, a, a) + (-2b, b, 0) + (-c, 0, c)= (x, y, z)
(a - 2b - c, a + b, a + c)= (x, y, z).

$$\begin{cases} a - 2b - c = x \\ a + b = y \\ a + c = z \end{cases}.$$

b= y - a.

c= z - a.

a - 2 (y - a) - (z - a)= x
a - 2y + 2a - z + a= x
4a - 2y - z= x
2a= x + 2y + z
a= $\frac{x+2y+z}{4}$
a= $\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ y + $\frac{1}{4}$ z
a= $\frac{x+2y+z}{4}$.

b= y - ($\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ y + $\frac{1}{4}$ z)
b= y - $\frac{1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{4}$ z
b= $\frac{-1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{4}$ z
b= $\frac{-x+2y-z}{4}$.

c= z - ($\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ y + $\frac{1}{4}$ z)
c= z - $\frac{1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ y - $\frac{1}{4}$ z

c= $\frac{-1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ y + $\frac{3}{4}$ z
c= $\frac{-x-2y+3z}{4}$.

Por lo tanto, este conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 13 (*).

Sean B= {(2, 1, 1), (1, -1, 3), v} una base de $\mathbb{R}^3$*. Hallar v sabiendo que las coordenadas del vector (1, -2, 5) en la base B son (2, -1, 3).*

Se sabe que:

B= {(2, 1, 1), (1, -1, 3), v}.

Entonces, se tiene:

$[(1, -2, 5)]_B$= (2, -1, 3).

Operando, se llega a:

(1, -2, 5)= 2 (2, 1, 1) - (1, -1, 3) + 3v
(1, -2, 5)= (4, 2, 2) - (1, -1, 3) + 3v
(1, -2, 5)= (3, 3, -1) + 3v
3v= (1, -2, 5) - (3, 3, -1)
3v= (-2, -5, 6)
v= $\frac{1}{3}$ (-2, -5, 6)
v= ($\frac{-2}{3}$, $\frac{-5}{3}$, 2).

Por lo tanto, v= ($\frac{-2}{3}$, $\frac{-5}{3}$, 2).

Ejercicio 14.

Sean B= {(-1, 4, 2), v, (0, 0, -1)} y B'= {w, (1, -1, 1), (-1, 0, 2)} bases de $\mathbb{R}^3$. Hallar v y w sabiendo que las coordenadas de v en la base de B' son (1, 2, 3) y que las coordenadas de w en la base B son (1, 2, 3).

B= {(-1, 4, 2), v, (0, 0, -1)}.
B'= {w, (1, -1, 1), (-1, 0, 2)}.

$[v]_{B'}$= (1, 2, 3).
$[w]_{B}$= (1, 2, 3).

v= w + 2 (1, -1, 1) + 3 (-1, 0, 2)
v= w + (2, -2, 2) + (-3, 0, 6)
v= w + (-1, -2, 8).

w= (-1, 4, 2) + 2v + 3 (0, 0, -1)
w= (-1, 4, 2) + 2v + (0, 0, -3)
w= 2v + (-1, 4, -1).

v= 2v + (-1, 4, -1) + (-1, -2, 8)
v= 2v + (-2, 2, 7)
2v - v= -(-2, 2, 7)
v= (2, -2, -7).

w= 2 (2, -2, -7) + (-1, 4, -1)
w= (4, -4, -14) + (-1, 4, -1)
w= (3, 0, -15).

Ejercicio 15.

Probar que los siguientes conjuntos son subespacios:

(a) *W= {(x, y, z): x= y= z} de* $\mathbb{R}^3$.

W es cerrado para la suma:

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W \Rightarrow x_1 = y_1 = z_1 \wedge x_2 = y_2 = z_2$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2$
$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$
$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$.

W es cerrado para la multiplicación de escalares:

$(x, y, z) \in W \Rightarrow x = y = z$
$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{R}, kx = ky = kz$
$\Rightarrow (kx, ky, kz) \in W$
$\Rightarrow k\,(x, y, z) \in W$.

Por lo tanto, el conjunto es un subespacio.

(b) *W= {(x, y, z, t): x= z, y= t} de* $\mathbb{R}^4$.

W es cerrado para la suma:

$(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W \Rightarrow x_1 = z_1, y_1 = t_1 \wedge x_2 = z_2, y_2 = t_2$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = z_1 + z_2, y_1 + y_2 = t_1 + t_2$
$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in W$
$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W$.

W es cerrado para la multiplicación de escalares:

$(x, y, z, t) \in W \Rightarrow x = z, y = t$
$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{R}, kx = kz, ky = kt$
$\Rightarrow (kx, ky, kz, kt) \in W$
$\Rightarrow k\,(x, y, z, t) \in W$.

Por lo tanto, el conjunto es un subespacio.

(c) *W= {(x, y, z, t): 2y + 3z= 0} de* $\mathbb{R}^4$.

W es cerrado para la suma:

$(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W \Rightarrow 2y_1 + 3z_1 = 0 \wedge 2y_2 + 3z_2 = 0$

$\Longrightarrow 2y_1 + 2y_2 + 3z_1 + 3z_2 = 0$
$\Longrightarrow 2\ (y_1 + y_2) + 3\ (z_1 + z_2) = 0$
$\Longrightarrow (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2,\ t_1 + t_2) \in$ W
$\Longrightarrow (x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1) + (x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2) \in$ W.

W es cerrado para la multiplicación de escalares:

(x, y, z, t) ∈ W $\Longrightarrow$ 2y + 3z= 0
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, k (2y + 3z)= 0
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, 2ky + 3kz= 0
$\Longrightarrow$ (kx, ky, kz, kt) ∈ W
$\Longrightarrow$ k (x, y, z, t) ∈ W.

Por lo tanto, el conjunto es un subespacio.

Ejercicio 16.

Una compañía petrolera puede convertir un barril de crudo en tres clases distintas de combustible. Sin aditivos de plomo, sus producciones de las tres clases de combustible a partir de un barril de crudo vienen dadas por el vector (2, 2, 4). Con el máximo de aditivos de plomo permitidos legalmente, las producciones son (5, 0, 3). Se supone que los efectos de los aditivos de plomo son proporcionales, es decir, que al usar una fracción del máximo permitido ($0 \leq \alpha \leq 1$) se tiene la producción:

$(1 - \alpha)$ (2, 2, 4) + α (5, 0, 3).

Determinar si es posible que la compañía produzca los siguientes vectores:

(a) *$(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2})$.*

$(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2})= (1 - \alpha)\ (2, 2, 4) + \alpha\ (5, 0, 3)$
$(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2})= (2, 2, 4) + (-2\alpha, -2\alpha, -4\alpha) + (5\alpha, 0, 3\alpha)$
$(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2})= (2 + 3\alpha, 2 - 2\alpha, 4 - \alpha)$.

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = 2 + 3\alpha \\ 1 = 2 - 2\alpha. \\ \frac{7}{2} = 4 - \alpha \end{cases}$$

$3\alpha= \frac{5}{2} - 2$
$3\alpha= \frac{1}{2}$
$\alpha= \frac{\frac{1}{2}}{3}$
$\alpha= \frac{1}{6}$.

$2\alpha= 2 - 1$
$2\alpha= 1$
$\alpha= \frac{1}{2}$.

$\alpha= 4 - \frac{7}{2}$
$\alpha= \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, no es posible que la compañía produzca este vector.

(b) *$(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6})$.*

$(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6})= (1 - \alpha)\ (2, 2, 4) + \alpha\ (5, 0, 3)$

$(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6})$= (2, 2, 4) + (-2$\alpha$, -2$\alpha$, -4$\alpha$) + (5$\alpha$, 0, 3$\alpha$)
$(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6})$= (2 + 3$\alpha$, 2 - 2$\alpha$, 4 - α).

$$\begin{cases} \frac{9}{2} = 2 + 3\alpha \\ \frac{1}{3} = 2 - 2\alpha. \\ \frac{19}{6} = 4 - \alpha \end{cases}$$

$3\alpha = \frac{9}{2} - 2$
$3\alpha = \frac{5}{2}$
$\alpha = \frac{\frac{5}{2}}{3}$
$\alpha = \frac{5}{6}$.

$2\alpha = 2 - \frac{1}{3}$
$2\alpha = \frac{5}{3}$
$\alpha = \frac{\frac{5}{3}}{2}$
$\alpha = \frac{5}{6}$.

$\alpha = 4 - \frac{19}{6}$
$\alpha = \frac{5}{6}$.

Por lo tanto, sí es posible que la compañía produzca este vector.

(c) *(1, 6, 9).*

(1, 6, 9)= (1 - α) (2, 2, 4) + α (5, 0, 3)
(1, 6, 9)= (2, 2, 4) + (-2α, -2α, -4α) + (5α, 0, 3α)
(1, 6, 9)= (2 + 3α, 2 - 2α, 4 - α).

$$\begin{cases} 1 = 2 + 3\alpha \\ 6 = 2 - 2\alpha. \\ 9 = 4 - \alpha \end{cases}$$

$3\alpha = 1 - 2$
$3\alpha = -1$
$\alpha = \frac{-1}{3}$.

$2\alpha = 6 - \frac{1}{3}$
$2\alpha = \frac{17}{3}$

$\alpha = \frac{\frac{17}{3}}{2}$
$\alpha = \frac{17}{6}$.

α= 4 - 9
α= -5.

Por lo tanto, no es posible que la compañía produzca este vector.

Ejercicio 17.

Considerar el conjunto:

V= {(w, td, ti, P, GP): P= w, td + ti= GP},

donde w es el crecimiento de los salarios nominales, td es el crecimiento de los impuestos directores, ti es el crecimiento de los impuestos indirectos, P es el crecimiento de los precios y GP es el crecimiento del gasto público.

(a) *Mostrar que V es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^5$.

V es cerrado para la suma:

$(w_1, td_1, ti_1, P_1, GP_1), (w_2, td_2, ti_2, P_2, GP_2) \in$ V $\Rightarrow P_1= w_1, td_1 + ti_1= GP_1 \wedge P_2= w_2, td_2 + ti_2= GP_2$

$\Rightarrow P_1 + P_2= w_1 + w_2, (td_1 + td_2) + (ti_1 + ti_2)= GP_1 + GP_2$
$\Rightarrow (w_1 + w_2, td_1 + td_2, ti_1 + ti_2, P_1 + P_2, GP_1 + GP_2) \in$ V
$\Rightarrow (w_1, td_1, ti_1, P_1, GP_1) + (w_2, td_2, ti_2, P_2, GP_2) \in$ V.

V es cerrado para la multiplicación de escalares:

(w, td, ti, P, GP) $\in$ V $\Rightarrow$ P= w, td + ti= GP
$\Rightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, kP= kw, k (td + ti)= kGP
$\Rightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, kP= kw, ktd + kti= kGP
$\Rightarrow$ (kw, ktd, kti, kP, kGP) $\in$ V
$\Rightarrow$ k (w, td, ti, P, GP) $\in$ V.

Por lo tanto, V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$.

(b) *Hallar una base y la dimensión de V. Dar una interpretación económica del resultado.*

(P, td, ti, P, td + ti)= P (1, 0, 0, 1, 0) + td (0, 1, 0, 0, 1) + ti (0, 0, 1, 0, 1).

B_V= {(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1)}.

dim (V)= 3.

Práctica 2 - Matrices y Sistemas

Ejercicio 1. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n\times n}$

(*a*) $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^t = A\}$ (matrices simétricas).

(*b*) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^t = -A\}$ (matrices antisimétricas).

(*c*) $S_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores).

(*d*) $S_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales).

(*e*) $S_5 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = \cdots = A_{nn}\}$ (matrices escalares).

(*f*) $S_6 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

Ejercicio 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

calcular:

(*a*) $A + 3B - 3C$. (*b*) $A + 3(B - C)$. (*c*) $A - (B - 2C)$. (*d*) $A - B + 2C$.

Ejercicio 3. Se consideran matrices de los siguientes tamaños:

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 5},\ B \in \mathbb{R}^{5\times 7},\ C \in \mathbb{R}^{7\times 5}.$$

Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

(*a*) $A \cdot B$. (*c*) $B \cdot C$. (*e*) $A \cdot B \cdot C$. (*g*) $B \cdot C \cdot B \cdot C$.

(*b*) $B \cdot A$. (*d*) $C \cdot B$. (*f*) $B \cdot C \cdot A$. (*h*) $A \cdot A$.

Ejercicio 4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular: A^t, B^t, $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

Ejercicio 5. Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matiz A?

(a) $A \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot A$.

(b) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.

(c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

(d) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

Ejercicio 6. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entonces $AB = BA$.

(b) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $AB = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

(c) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $AB = 0$ entonces $BA = 0$.

(d) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$ entonces $A = 0$.

(e) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $A^2 = A$ entonces $A = I_n$ o $A = 0$.

(f) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $tr(AA^t) = 0$ entonces $A = 0$.

Ejercicio 7. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada. En cada caso, describir además el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

$$(a) \left\{ \begin{array}{ll} 3x + 5y & = 2 \\ -2x + 4y & = 6 \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y & = 0 \\ 2x + y & = 0 \\ x + 3y & = 1 \end{array} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y & = 2 \\ 2x + y & = 1 \\ x + 3y & = -1 \end{array} \right.$$

$$(d) \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + z & = 3 \\ x - 2y + z & = 3 \\ 2x + y - z & = 0 \end{array} \right.$$

$$(e) \left\{ \begin{array}{ll} 3y - 2z + 3w & = 9 \\ 2x + y + w & = 5 \\ x - y + z - w & = -2 \end{array} \right.$$

$$(f) \left\{ \begin{array}{ll} 2x + y - z & = 8 \\ x - y + z & = 1 \\ 5x + y - z & = 17 \end{array} \right.$$

$$(g) \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y - z + 2t & = 0 \\ x + y + z + 2t & = 1 \\ -x + y - 5z - 2t & = -3 \end{array} \right.$$

$$(h) \left\{ \begin{array}{ll} 2x + y - z & = 3 \\ x - y + z & = 2 \\ 5x + y - z & = -5 \end{array} \right.$$

Ejercicio 8. Hallar, si es que existen, todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1, -2, 3)$ es solución del sistema lineal dado en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) \left\{ \begin{array}{rcl} 2b\,x + y - z & = & 1 \\ x - a\,y + z & = & 0 \\ 4x - b\,y + a\,z & = & 4 \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2a\,y + z & = & 0 \\ a\,y - b\,z & = & 4 \\ x + b\,y + (2a + b)z & = & b \end{array} \right.$$

Ejercicio 9. Determinar todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - a\,y + 2z & = & 2 \\ x + y - b\,z & = & 3 \\ y - z & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 10. Analizar cada uno de los siguientes sistemas determinando, en cada caso, los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$(a)\ \begin{cases} (k^2-9)x + y + kz &= 0 \\ (k-1)y + z &= 0 \\ (k+2)z &= 0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} 7x + ky + (4+k)z &= 12 \\ 6x + ky + 3z &= 9 \\ kx + (3-k)z &= 3 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x + y + z &= k \\ x + ky + z &= 1 \\ kz &= 2 \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} x + ky + 2z - w &= k+2 \\ x + ky - 2z &= 2 \\ -4z + k^2 w &= -3k-2 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ (k+2)x + ky - z &= 0 \\ -x + y - 2z &= -1 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} 2x + 3y - z &= 3 \\ x - y + 3z &= 1 \\ 3x + 7y - 5z &= k^2 \end{cases}$$

Ejercicio 11. Para cada valor de $a, b \in \mathbb{R}$, clasificar el siguiente sistema lineal en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = b. \end{cases}$$

Ejercicio 12. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Todo sistema lineal **homogéneo** tiene, al menos, una solución.

(b) Los sistemas lineales homogéneos tienen, siempre, infinitas soluciones.

(c) Si un sistema lineal tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

(d) Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde al menos uno de los a_i es no nulo, siempre tiene solución.

(e) Si cada ecuación de un sistema lineal tiene solución, entonces todo el sistema es compatible.

Ejercicio 13. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ \alpha & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = 6x + b$ tiene más de una solución. Para el ó los valores de α hallados, resolver el sistema.

Ejercicio 14. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 15. Verificar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

son inversibles y calcular: A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Ejercicio 16. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, según corresponda, tales que:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular $(A - B^tC)^{-1}$.

(b) Hallar X, de tamaño adecuado, tal que $AX = B^tCX + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifican

$$A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2} C$$

para $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 19. Sea $A = \begin{pmatrix} 7b & -a & 0 & 0 \\ 7d & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}$. Hallar α tal que $\det A = 1$ sabiendo que $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 5$.

Ejercicio 20. Sean $A = \begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\det(B) = -2$. Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $BA^2x = BAx$ tiene una única solución.

Ejercicio 21. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5a & -50b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}$ .Se sabe que $\det(A) = 2$. Calcular $\det(3A^TB)$.

Ejercicio 22. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $A, B \in GL(n)$ entonces $A + B \in GL(n)$.

(b) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Si $\det(A) = 2$ y $\det(B^{-1}) = 4$, entonces $\det(2AB) = 8$.

(c) Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon Ax = 0\} = \langle (1,3,4), (0,0,4) \rangle$. Entonces $\operatorname{rg}(A) = 1$.

(d) Si $A \in GL(2)$ inversible entonces $5A + A^2$ es inversible.

(e) Si $A \in GL(3)$ entonces $\operatorname{rg}(A^3 - 2A) = \operatorname{rg}(A^2 - 2I)$.

Trabajo Práctico N° 2: Matrices y Sistemas.

Ejercicio 1.

Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{nxn}$.

(a) S_1 = *{$A \in \mathbb{R}^{nxn}$: A^t = A} (matrices simétricas).*

S_1 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_1$ $\Rightarrow A_1^t = A_1 \wedge A_2^t = A_2$
$\Rightarrow A_1^t + A_2^t = (A_1 + A_2)^t = A_1 + A_2$
$\Rightarrow A_1 + A_2 \in S_1$.

S_1 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A $\in S_1$ $\Rightarrow A^t$ = A
$\Rightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, k$A^t = (kA)^t$ = kA
$\Rightarrow$ kA $\in S_1$.

Por lo tanto, el conjunto S_1 es un subespacio.

(b) S_2 = *{$A \in \mathbb{R}^{nxn}$: A^t = -A} (matrices antisimétricas).*

S_2 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_2$ $\Rightarrow A_1^t = -A_1 \wedge A_2^t = -A_2$
$\Rightarrow A_1^t + A_2^t = (A_1 + A_2)^t = -(A_1 + A_2)$
$\Rightarrow A_1 + A_2 \in S_2$.

S_2 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A $\in S_2$ $\Rightarrow A^t$ = A
$\Rightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, k$A^t = (kA)^t$ = kA
$\Rightarrow$ kA $\in S_2$.

Por lo tanto, el conjunto S_2 es un subespacio.

(c) S_3 = *{$A \in \mathbb{R}^{nxn}$: A_{ij} = 0 si i > j} (matrices triangulares superiores).*

S_3 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_3$ $\Rightarrow A_{1,ij} = 0 \wedge A_{2,ij} = 0$, si i > j

$\Longrightarrow A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i $>$ j
$\Longrightarrow A_1$ + A_2 ∈ S_3.

S_3 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_3 $\Longrightarrow A_{ij}$= 0, si i $>$ j
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0, si i $>$ j
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_3.

Por lo tanto, el conjunto S_3 es un subespacio.

(d) S_4= *{A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$: A_{ij}= 0 si i≠ j} (matrices diagonales).*

S_4 es cerrado para la suma:

A_1, A_2 ∈ S_4 $\Longrightarrow A_{1,ij}$= 0 ∧ $A_{2,ij}$= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow A_1$ + A_2 ∈ S_4.

S_4 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_4 $\Longrightarrow A_{ij}$= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_4.

Por lo tanto, el conjunto S_4 es un subespacio.

(e) S_5= *{A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$: A_{ij}= 0 si i≠ j y A_{11}= ... = A_{nn}} (matrices escalares).*

S_5 es cerrado para la suma:

A_1, A_2 ∈ S_5 $\Longrightarrow A_{1,ij}$= 0 si i≠ j, $A_{1,11}$= … = $A_{1,nn}$ ∧ $A_{2,ij}$= 0 si i≠ j, $A_{2,11}$= … = $A_{2,nn}$
$\Longrightarrow A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i≠ j ∧ $A_{1,11}$ + $A_{2,11}$= $(A_1 + A_2)_{11}$= … = $A_{1,nn}$ + $A_{2,nn}$= $(A_1 + A_2)_{nn}$
$\Longrightarrow A_1$ + A_2 ∈ S_5.

S_5 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_5 $\Longrightarrow A_{ij}$= 0 si i≠ j ∧ A_{11}= … = A_{nn}
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0 si i≠ j ∧ kA_{11}= $(kA)_{11}$= … = kA_{nn}= $(kA)_{nn}$
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_5.

Por lo tanto, el conjunto S_5 es un subespacio.

(f) S_6= {$A \in \mathbb{R}^{nxn}$: *tr (A)= 0*}.

S_6 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_6$ $\Longrightarrow$ tr (A_1)= 0 ∧ tr (A_2)= 0
$\Longrightarrow$ tr (A_1) + tr (A_2)= tr (A_1 + A_2)= 0 + 0= 0
$\Longrightarrow$ A_1 + $A_2 \in S_6$.

S_6 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_6 $\Longrightarrow$ tr (A)= 0
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, k tr (A)= tr (kA)= k0= 0
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_6.

Ejercicio 2.

Dadas las matrices:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

calcular:

(a) *A + 3B - 3C.*

$A + 3B - 3C= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$A + 3B - 3C= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
$A + 3B - 3C= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) *A + 3 (B - C).*

$A + 3 (B - C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}]$
$A + 3 (B - C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
$A + 3 (B - C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$
$A + 3 (B - C)= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) *A - (B - 2C).*

$A - (B - 2C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}]$
$A - (B - 2C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}]$
$A - (B - 2C)= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
$A - (B - 2C)= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) *A - B + 2C.*

$A - B + 2C= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$A - B + 2C= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

A - B + 2C= $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.

Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4x5}$, $B \in \mathbb{R}^{5x7}$, $C \in \mathbb{R}^{7x5}$. *Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.*

(a) *AB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x7}$.

(b) *BA.*

Esta operación no es posible.

(c) *BC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{5x5}$.

(d) *CB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{7x7}$.

(e) *ABC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x5}$.

(f) *BCA.*

Esta operación no es posible.

(g) *BCBC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{5x5}$.

(h) *AA.*

Esta operación no es posible.

Ejercicio 4.

Sean: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Calcular:*

(a) A^t.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) B^t.

$B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $(AB)^t$.

$(AB)^t = [\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}]^t$

$(AB)^t = [\begin{pmatrix} 6 & -3 & -8 \\ -5 & 6 & -5 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}]^t$

$(AB)^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

(d) $B^t A^t$.

$B^t A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^t A^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.

Dada una matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matriz A?*

(a) $A \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} A.$

$$A \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$$
$$A \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak & bj \\ ck & dj \end{pmatrix}.$$

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera columna por k y la segunda columna por j.

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ jc & jd \end{pmatrix}.$$

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera fila por k y la segunda fila por j.

(b) $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A.$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera columna por 1 y la segunda columna por 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera fila por 1 y la segunda fila por 1.

(c) $A \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A.$

$$A\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & ak+b\\c & ck+d\end{pmatrix}.$$

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la segunda columna se le suma la primera columna por k.

$$\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}a+kc & b+kd\\c & d\end{pmatrix}.$$

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la primera fila se le suma la segunda fila por k.

(d) $A\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}A.$

$$A\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+bk & b\\c+dk & d\end{pmatrix}.$$

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la primera columna se le suma la segunda columna por k.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}a & b\\ka+c & kb+d\end{pmatrix}.$$

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la segunda fila se le suma la primera fila por k.

Ejercicio 6.

Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) *Si A, B* $\in \mathbb{R}^{nxn}$*, entonces, AB= BA.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces, AB= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y BA= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que AB≠ BA.

(b) *Si A* $\in \mathbb{R}^{nxm}$ *y B* $\in \mathbb{R}^{mxp}$ *y AB= 0, entonces, A= 0 o B= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Dadas A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, AB= 0, pero ni A ni B son iguales a cero.

(c) *Si A, B* $\in \mathbb{R}^{nxn}$ *y AB= 0, entonces, BA= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Dadas A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, AB= 0, pero BA= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

(d) *Si A* $\in \mathbb{R}^{nxn}$ *y existe k* $\in \mathbb{N}$ *tal que* A^k*= 0, entonces, A= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, A^2= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero A≠ 0.

(e) *Si A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$ y A^2= A, entonces, A= I_n o A= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A^2= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero ni A= I_n ni A= 0.

(f) *Si A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$ y tr (AA^t)= 0, entonces, A= 0.*

Esta afirmación es VERDADERA.

Dada A= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, se tiene que su transpuesta es:

A^t= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Entonces, el producto entre A y A^t:

AA^t= $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2 \end{pmatrix}$

y la traza de este producto:

tr (AA^t)= $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2$
tr (AA^t)= $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$
tr (AA^t)= $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^2$.

Por hipótesis, se tiene que:

tr (AA^t)= 0,

lo cual implica que $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^2$= 0, que se cumple cuando a_{ij}= 0, ∀ i, j, es decir, cuando A=
A= $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7.

Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada. En cada caso, describir, además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

(a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}.$

A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & | & 2 \\ -2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix}$.

$F_1 = \frac{1}{3} F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ -2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix}$

$F_2 = F_2 + 2F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & | & \frac{22}{3} \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{3}{22} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = \frac{5}{3} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

x= -1.
y= 1.

x= 0.
y= 0.

Por lo tanto, este sistema es compatible determinado, ya que r (A)= r (A_b)= n= 2, y su solución es x= -1 e y= 1. Además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado es x= 0 e y= 0.

(b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0. \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$.

$F_2 = F_2 - 2F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{1}{5} F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = \frac{1}{5} F_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 + 2F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - 5F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$

x= 0.
y= 0.

Por lo tanto, este sistema es incompatible, ya que r (A)= 2≠ r (A_b)= 3, y no tiene solución. Además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado es x= 0 e y= 0.

(c) $\left\{ \right.$.

(d) $\left\{ \right.$.

(e) $\left\{ \right.$.

(f) $\left\{ \right.$.

(g) $\left\{ \right.$.

(h) $\left\{ \right.$.

Ejercicio 20 (*).

Sean $A=\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B \in \mathbb{R}^{3x3}$ *una matriz tal que det (B)= -2. Hallar todos los valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *para los cuales el sistema* BA^2x*= BAx tiene una única solución.*

En primer lugar, se reexpresa el sistema de la siguiente manera:

BA^2x= BAx
BA^2x - BAx= 0_{3x1}
B (A^2 - A) x= 0_{3x1}

A su vez, como se sabe que $|B| \neq 0$ (= -2), se tiene que B es inversible, es decir, que existe la matriz B^{-1}, por lo cual lo anterior se reduce a:

B^{-1}B (A^2 - A) x= B^{-1} * 0_{3x1}
I (A^2 - A) x= 0_{3x1}
(A^2 - A) x= 0_{3x1}.

Operando sobre la matriz (A^2 - A), se llega a:

(A^2 - A)= A (A - I)

$$(A^2 - A)=\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$(A^2 - A)=\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha-3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - A)=\begin{pmatrix} (\alpha-2)(\alpha-3) & 0 & 0 \\ 2(\alpha-3)+3(\alpha-2) & \alpha-2 & 0 \\ 3(\alpha-3)+5 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}.$$

Luego, se computa el determinante de esta matriz (A^2 - A):

$|A^2 - A|$= (α -2) (α - 3) (α - 2) (α - 2)
$|A^2 - A|$= $(\alpha - 2)^3$ (α - 3).

Por último, para que el sistema BA^2x= BAx tenga una única solución, este determinante debe ser distinto de cero:

$|A^2 - A|$= 0
$(\alpha - 2)^3$ (α - 3)= 0.
α_1= 2; α_2= 3.

El lado izquierdo de esta ecuación es igual a cero (i) cuando $(\alpha - 2)^3$= 0, lo cual sucede si α= 2, o (ii) cuando (α - 3)= 0, lo cual sucede si α= 3.

Por lo tanto, los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema BA^2x= BAx tiene una única solución son $\mathbb{R}$ - {2, 3}.

Ejercicio 21.

Ejercicio 22.

Práctica 3 - Autovalores y Autovectores

Ejercicio 1. Determinar si la función T es transformación lineal.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, 2x)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x \cdot y, 0, 0)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $T(A) = A^t$.

Ejercicio 2. Hallar la expresión de la transformación lineal T_1 y T_2.

(*a*) $T_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T_1(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$, $T_1(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0)$, y $T_1(0, 0, 1) = (1, 2, 1, 2)$;

(*b*) $T_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T_2(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $T_2(1, 2, 1, 2) = (0, 0, 1)$ y $T_2(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$.

¿$T_2 \circ T_1$ es una transformación lineal?

Ejercicio 3. Hallar una base y la dimensión de $\ker(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y - z, x + 3y)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z & x + z \\ x + y & y - z \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos hallar una matriz A de manera tal que $T(x) = [Ax^t]^t$.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_2 - 3x_3, x_1 + x_3)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0)$, y $T(0, 0, 1) = (1, 2, 1, 2)$;

(*d*) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $T(1, 2, 1, 2) = (0, 0, 1)$ y $T(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$.

Ejercicio 5. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} k & 2 & 4 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existen, todos los valores de k para los cuales $\ker(T) = \{0\}$.

Ejercicio 6. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & k & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existen, todos los valores de k para los cuales $\operatorname{Img}(T) = \{0\}$.

Ejercicio 7. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8. Determinar si cada una de las matrices A del ejercicio anterior es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz inversible C que diagonalice a A (es decir, tal que $C^{-1} \cdot A \cdot C$ sea diagonal).

Ejercicio 9. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no es diagonalizable cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con tal que $b \neq 0$.

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1,2,0),\ w = (2,6,0)$ y $u = (-2,-2,-1)$ son autovectores de A.

(a) Probar que A es diagonalizable.

(b) Calcular los autovalores de A y determinar los valores de r, s y t.

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible P que diagonalice a A.

(b) Calcular A^{10}.

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (1,2,0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible C que diagonalice a A.

(b) Calcular $A^6 \cdot v^t$ utilizando la diagonalización de A.

(c) Escribir al vector v como combinación lineal de una base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A.

(d) Calcular nuevamente $A^6 \cdot v^t$ sin utilizar la diagonalización de A.

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (-2,2,3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.

(b) Probar que A **no** es diagonalizable.

(c) Escribir al vector v como combinación lineal de autovectores de A.

(d) Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

Ejercicio 14. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Hallar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A.

(b) Para cada b hallado, dar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

Ejercicio 15. Diagonalizar las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ¿Es posible diagonalizarlas ortogonalmente? Si es así, determinar la matriz de cambio de base ortogonal. Calcular $A^7 + 4A^5 - 2A + 3A^2$.

Ejercicio 16. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **no** es diagonalizable.

Ejercicio 17. Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

(b) Para cada a hallado, dar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que $(0, b^2+1, 2)$ es autovector de A.

Ejercicio 18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1, 1, 1) \in \{v \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon (I - A)v^t = 0\}$.

(a) Determinar a, b y c y hallar todos los autovalores de A.

(b) ¿Es A diagonalizable?

(c) Calcular A^{100} y A^{201}.

Ejercicio 19. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz con autovalores $\{0, 1, 5\}$.

(a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.

(b) Calcular los autovalores de $B = (3A - 4I)^3$ y $C = 5A^t + 4I$.

(c) Probar que $H = A+I$ es inversible y calcular los autovalores de H^{-1}, $\det(H^{-1})$ y $\operatorname{tr}(H^{-1})$.

(d) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha A + 3I$ no es inversible.

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de p_A. Sea $B = 5A^2 + 3A - 2I$. Calcular $\det(B)$ y $\operatorname{tr}(B)$.

Ejercicio 21. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A, $\operatorname{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.

(a) Hallar **todos** los autovalores de A.

(b) Decidir si A^t es o no diagonalizable.

Ejercicio 22. Sea A diagonalizable tal que su polinomio característico es $p_A(t) = (t-1)^2(t-3)^2$.

(a) Calcular $rg(A - 3I)$.

(b) Hallar la matriz $B = A^2 - 4A + 5I$.

Ejercicio 23. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\dim(\{x \colon Ax = 0\}) = 1$, $\operatorname{rg}(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

(a) Calcular los autovalores de A.

(b) Decidir si A es inversible y/o diagonalizable.

Ejercicio 24. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz inversible tal que $\operatorname{tr}(A) = -2$, $\operatorname{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$ y $p_A(1) = -8$. Probar que A es diagonalizable.

Ejercicio 25. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz tal que $\{v \in \mathbb{R}^4 \colon (A + I)v^t = 0\} \neq \{0\}$, $\operatorname{rg}(A - 2I) \leq 2$ y $p_A(1) = -4$. Decidir si A es diagonalizable y calcular $A^3 - 4A^2 + A + 6I$.

Ejercicio 26. Dos marcas de tabaco controlan el mercado repartiéndoselo al 60 % y 40 % respectivamente. Este año en el mercado se mueven 500 millones de dolares. Si los consumidores de la marca A son cada año fieles en un 30 % y los de la marca B son fieles en un 40 %. ¿Cómo se repartirán el mercado al cabo de 5 años las dos marcas suponiendo que su volumen se mantiene constante?

Ejercicio 27. Supongamos un mercado duopolista, en el que dos empresas A y B fabrican la totalidad de un cierto producto. Supongamos también que el producto se adquiere mensualmente, y que por medio de estudios de mercado se ha llegado a las siguientes conclusiones sobre la intención de compra de los consumidores.

- El 50 % de los consumidores que compran durante un mes el producto fabricado por la empresa A volverá a hacerlo así al mes siguiente, y el resto cambiará al fabricado por la empresa B.
- El 25 % de los consumidores que compran durante un mes el producto fabricado por la empresa B volverá a proceder así al mes siguiente y el resto cambiará al fabricado por la empresa A.

Sean 50 y 100 las cuotas de mercado de las empresas A y B, respectivamente, durante el mes de octubre de 2018. ¿Cuáles serán las cuotas de mercado de cada una de las empresas al cabo de diez meses, es decir, en el mes de agosto de 2019?

Trabajo Práctico N° 3:
Autovalores y Autovectores.

Ejercicio 1.

Ejercicio 21 (*).

Sea A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ una matriz tal que λ= 1 es autovalor de A, tr(A)= 2 y det(A)= -2.

(a) *Hallar todos los autovalores de A.*

En primer lugar, se sabe que 1 es autovalor de la matriz A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$.

Luego, sabiendo que la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores y que tr(A)= 2, se tiene:

2= 1 + λ_2 + λ_3
2 - 1= λ_2 + λ_3
1= λ_2 + λ_3.

También, sabiendo que el determinante de la matriz A es igual al producto de todos los autovalores y que det(A)= -2, se tiene:

-2= $\lambda_2\lambda_3$.

Entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ -2 = \lambda_2\lambda_3 \end{cases}.$$

Despejando λ_3 de la segunda ecuación, se tiene:

λ_3= $\frac{-2}{\lambda_2}$, $\lambda_2 \neq 0$.

Luego, reemplazando en la primera ecuación, se obtiene:

1= λ_2 + $\frac{-2}{\lambda_2}$
1= $\frac{\lambda_2^2-2}{\lambda_2}$
λ_2= λ_2^2 - 2
λ_2^2 - λ_2 - 2= 0, $\lambda_2 \neq 0$.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan los autovalores faltantes:

λ_2, λ_3= $\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4*1(-2)}}{2*1}$
λ_2, λ_3= $\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$
λ_2, λ_3= $\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}$
λ_2, λ_3= $\frac{1\pm 3}{2}$
λ_2= $\frac{1-3}{2}$= $\frac{-2}{2}$= -1.
λ_3= $\frac{1+3}{2}$= $\frac{4}{2}$= 2.

Por lo tanto, los autovalores de A son: λ_1= 1, λ_2= -1 y λ_3= 2.

(b) *Decidir si A^T es o no diagonalizable.*

Se sabe que la matriz A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ tiene n (3) autovalores distintos (inciso anterior) y que los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (teorema).

También, dado que la matriz A tiene n (3) autovectores linealmente independientes, se sabe que la matriz A es diagonalizable (teorema).

Entonces, esta matriz A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ se puede expresar de la siguiente manera:

A= PDP^{-1},

donde D, P ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$, tal que D es diagonal y P es inversible.

Si se aplica transpuesta a ambos lados de la igualdad, se tiene:

A^T= $(PDP^{-1})^T$
A^T= $(P^{-1})^T D^T P^T$.

Sabiendo que toda matriz diagonal es simétrica (D= D^T) y que la transpuesta de la inversa de una matriz es igual a la inversa de la transpuesta de esa matriz, se tiene:

A^T= $(P^T)^{-1} D P^T$.

Por último, sabiendo que la inversa de la inversa de una matriz es la propia matriz, esta última igualdad se puede reexpresar de la siguiente manera:

A^T= $(P^T)^{-1} D ((P^T)^{-1})^{-1}$.

Por lo tanto, A^T es diagonalizable, ya que es A^T es semejante a una matriz diagonal, es decir, existen D, $(P^T)^{-1}$ ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$, tal que D es diagonal y $(P^T)^{-1}$ es inversible.

Práctica 4 - Forma de Jordan y Formas Cuadráticas

Ejercicio 1. Hallar la forma de Jordan de las siguientes matrices.

$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$

$(b)\ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix};$

$(c)\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$(d)\ D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 2. Hallar e^A donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Hallar la matriz asociada a las siguientes formas cuadráticas y clasificarlas.

$(a)\ q(x,y) = 4x^2 + 5y^2 + 8yx;$

$(b)\ q(x,y) = -x^2 - 3y^2 + yx;$

$(c)\ q(x,y,z) = 3x^2 - 2xy + 3xz + y^2 - 4yz + 3z^2;$

$(d)\ q(x,y,z) = x^2 + z^2 + xz.$

Ejercicio 4. Decidir si las formas cuadráticas que tienen asociadas a las siguientes funciones son definidas positivas o definidas negativas o semidefinidas positivas o semidefinidas negativas o indefinidas

$(a)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$

$(b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

$(c)\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

$(d)\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

(*e*) $E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Hallar la raíz cuadrada de las siguientes matrices

(*a*) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

(*b*) $B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$;

(*c*) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(*d*) $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6. Dada la forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 2yz + az^2$$

hallase $a \in \mathbb{R}$ para que q sea semidefinida, indicando si lo es positivo o negativo.

Ejercicio 7. Hallar los valores de a para los cuales la forma cuadrática que tiene asociada a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & a & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

Ejercicio 8. Dada la forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es fijo, clasificar q para los distinto valores de a.

Ejercicio 9. Clasifique en función de $a \in \mathbb{R}$ la siguiente forma cuadrática

$$q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2axy + 2xz + 4yz.$$

sujeto a la restricción lineal $x = y$.

Ejercicio 10. Determinar si son definidas positivas o negativas las formas cuadráticas siguientes sujetas a la restricción lineal dada:

(a) $q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ sujeta a $x + y = 0$;

(b) $q(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^2$ sujeta a $3x + 4y = 0$;

(c) $q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$, sujeta a $x - y + z = 0$;

Ejercicio 11. Clasifique en función de $a \in \mathbb{R}$ la siguiente forma cuadrática

$$q(x,y,z) = a(x^2 + z^2) + 2y^2 + 4xy$$

sujeto a la restricción lineal $x = y$.

Ejercicio 12. Clasifique en función de a, $b \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática que tiene asociada a la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Trabajo Práctico N° 4:
Forma de Jordan y Formas Cuadráticas.

Ejercicio 1.

Ejercicio 8 (*).

Dada la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

q (x, y, z)= ax^2 + ay^2 + (a - 1) z^2 + 2xy,

donde a ∈ ℝ es fijo, clasificar q para los distintos valores de a.

En primer lugar, para clasificar la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para los distintos valores de a, es necesario encontrar la matriz asociada a q (matriz A). En términos generales, la forma cuadrática q puede ser escrita en términos de esta matriz A como:

q (x, y, z)= $(x \quad y \quad z)$ A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

En particular, se tiene:

q (x, y, z)= $(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Luego, es necesario encontrar los autovalores de la matriz asociada A:

det (A - λI)= 0

det ($\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ - $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)= 0

det ($\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$)= 0

det ($\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{pmatrix}$)= 0

$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{vmatrix}$= 0

(a - 1 - λ) [(a - λ) (a - λ) - 1]= 0

(a - 1 - λ) [$(a-\lambda)^2$ - 1]= 0.

Entonces, los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico de A:

a - 1 - λ= 0

λ_1= a - 1.

$(a-\lambda)^2$ - 1= 0

$(a-\lambda)^2$= 1

$\sqrt{(a-\lambda)^2}$= $\sqrt{1}$

$|a-\lambda|$= 1

a - λ= $\pm$1
λ= a $\mp$ 1
λ_2= a - 1.
λ_3= a + 1.

Se tiene que los autovalores de la matriz asociada A son: λ_1= a - 1, λ_2= a - 1 y λ_3= a + 1.

Por lo tanto, la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

- definida positiva si a $>$ 1, ya que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$.
- semidefinida positiva si a= 1, ya que λ_1= 0, λ_2= 0 y $\lambda_3 > 0$.
- definida negativa si a $<$ -1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$.
- semidefinida negativa si a= -1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y λ_2= 0.
- indefinida si -1 $<$ a $<$ 1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 > 0$.

Práctica 5 - Ecuaciones en diferencias

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

(*a*) $\Delta y_t = 7$;

(*b*) $\Delta y_t = 0{,}3 y_t$;

(*c*) $\Delta y_t = 2y_t - 9$.

Ejercicio 2. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con condición inicial y_0.

(*a*) $\begin{cases} y_t = y_{t-1} + 1, \\ y_0 = 10; \end{cases}$

(*b*) $\begin{cases} y_t + 3y_{t-1} = 4, \\ y_0 = 4; \end{cases}$

(*c*) $\begin{cases} 2y_t - y_{t-1} = 6 \\ y_0 = 7; \end{cases}$

(*d*) $\begin{cases} y_t = 0{,}2y_{t-1} + 4, \\ y_0 = 4; \end{cases}$

Ejercicio 3. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones en diferencias y determine si las soluciones convergen o oscilan en $t = \infty$.

(*a*) $\begin{cases} y_t - \frac{1}{3}y_{t-1} = 6, \\ y_0 = 1; \end{cases}$

(*b*) $\begin{cases} y_t + 2y_{t-1} = 9, \\ y_0 = 4; \end{cases}$

(*c*) $\begin{cases} 2y_t + \frac{1}{4}y_{t-1} = 5 \\ y_0 = 2; \end{cases}$

(*d*) $\begin{cases} y_t - y_{t-1} = 3, \\ y_0 = 5; \end{cases}$

Ejercicio 4. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

(*a*) $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 2$;

(*b*) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 7$;

(*c*) $2y_{t+2} + y_{t+1} - y_t = 10$;

(*d*) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 4$.

Ejercicio 5. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones en diferencias y determine si las soluciones convergen o oscilan en $t = \infty$.

(*a*) $\begin{cases} y_{t+2} + 3y_{t+1} - \frac{7}{4}y_t = 9, \\ y_0 = 6, \\ y_1 = 3; \end{cases}$

(*b*) $\begin{cases} y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 1, \\ y_0 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{4}y_t = 2 \\ y_0 = 4; \\ y_1 = 7; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 2^{-t} \\ y_0 = 0; \\ y_1 = 0; \end{cases}$

Ejercicio 6. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

(a) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 3^t$;

(b) $y_{t+2} - 5y_{t+1} - 6y_t = 2 \cdot 6^t$;

(c) $3y_{t+2} + 9y_t = 3 \cdot 4^t$;

(d) $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = e^t$;

(e) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = t$;

(f) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = 4 + 2t$;

(g) $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = 18 + 6t + 8t^2$;

(h) $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = e^t + 18 + 6t + 8t^2$

Ejercicio 7. Resolver la siguientes ecuación en diferencia de orden 2

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t^3.$$

Trabajo Práctico N° 5:
Ecuaciones en Diferencias.

Ejercicio 1.

Ejercicio 2.

Ejercicio 3.

Ejercicio 4.

Ejercicio 5.

Ejercicio 6.

Ejercicio 7 (*).

Resolver la siguiente ecuación en diferencia de orden 2:

y_{t+2} - $3y_{t+1}$ - $4y_t$= 2^t + t^3.

Se parte de saber que la solución general de una ecuación en diferencias son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a ésta más la solución particular:

y_t= y_t^h + y_t^p.

Siendo así, en primer lugar, se buscan las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación en diferencias:

y_{t+2} - 3y_{t+1} - 4y_t= 0.

Sea y_t= r^t, se tiene:

r^{t+2} - 3r^{t+1} - 4r^t= 0
r^t (r^2 - 3r - 4)= 0.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan las soluciones de la ecuación homogénea:

r_1, r_2= $\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1(-4)}}{2*1}$
r_1, r_2= $\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$
r_1, r_2= $\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$
r_1, r_2= $\frac{3\pm 5}{2}$
r_1= $\frac{3+5}{2}$= $\frac{8}{2}$= 4.
r_2= $\frac{3-5}{2}$= $\frac{-2}{2}$= -1.

Entonces, la solución homogénea es la siguiente:

y_t^h= C_1 4^t + C_2 $(-1)^t$.

En segundo lugar, dado que 1 no es raíz de la ecuación r^2 - 3r - 4= 0, se propone la siguiente solución particular:

y_t^p= $k_1 2^t$ + $k_2 t^3$ + $k_3 t^2$ + k_4t + k_5.

Resolviendo en la ecuación en diferencias, se tiene:

[$k_1 2^{t+2}$ + k_2 $(t+2)^3$ + k_3 $(t+2)^2$ + k_4 (t + 2) + k_5] -
3 [$k_1 2^{t+1}$ + k_2 $(t+1)^3$ + k_3 $(t+1)^2$ + k_4 (t + 1) + k_5] -
4 ($k_1 2^t$ + $k_2 t^3$ + $k_3 t^2$ + k_4t + k_5)=

$[k_1 2^{t+2}$ + k_2 (t^3 + $6t^2$ + 12t + 8) + k_3 (t^2 + 4t + 4) + k_4t + $2k_4$ + k_5] -
3 [$k_1 2^{t+1}$ + k_2 (t^3 + $3t^2$ + 3t + 1) + k_3 (t^2 + 2t + 1) + k_4t + k_4 + k_5] -
($4k_1 2^t$ + $4k_2 t^3$ + $4k_3 t^2$ + $4k_4$t + $4k_5$)=

$k_1 2^{t+2}$ + $k_2 t^3$ + $6k_2 t^2$ + $12k_2$t + $8k_2$ + $k_3 t^2$ + $4k_3$t + $4k_3$ + k_4t + $2k_4$ + k_5 -
3 [$k_1 2^{t+1}$ + $k_2 t^3$ + $3k_2 t^2$ + $3k_2$t + k_2 + $k_3 t^2$ + $2k_3$t + k_3 + k_4t + k_4 + k_5] -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4$t - $4k_5$=

$k_1 2^{t+2}$ + $k_2 t^3$ + $6k_2 t^2$ + $12k_2$t + $8k_2$ + $k_3 t^2$ + $4k_3$t + $4k_3$ + k_4t + $2k_4$ + k_5 -
($3k_1 2^{t+1}$ + $3k_2 t^3$ + $9k_2 t^2$ + $9k_2$t + $3k_2$ + $3k_3 t^2$ + $6k_3$t + $3k_3$ + $3k_4$t + $3k_4$ + $3k_5$) -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4$t - $4k_5$= 2^t + t^3

$k_1 2^{t+2}$ + $k_2 t^3$ + $6k_2 t^2$ + $12k_2$t + $8k_2$ + $k_3 t^2$ + $4k_3$t + $4k_3$ + k_4t + $2k_4$ + k_5 -
$3k_1 2^{t+1}$ - $3k_2 t^3$ - $9k_2 t^2$ - $9k_2$t - $3k_2$ - $3k_3 t^2$ - $6k_3$t - $3k_3$ - $3k_4$t - $3k_4$ - $3k_5$ -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4$t - $4k_5$= 2^t + t^3

-$6k_1 2^t$ - $6k_2 t^3$ - ($3k_2$ + $6k_3$) t^2 + ($3k_2$ - $2k_3$ - $6k_4$) t + ($5k_2$ + k_3 - k_4 - $6k_5$)= 2^t + t^3

Luego, se tiene que las constantes k_1, k_2, k_3, k_4 y k_5, respectivamente, son iguales a:

-$6k_1 2^t$= 2^t
k_1= $\frac{2^t}{-6*2^t}$
k_1= $\frac{-1}{6}$.

-$6k_2 t^3$= t^3
k_2= $\frac{t^3}{-6t^3}$
k_2= $\frac{-1}{6}$.

-($3k_2$ + $6k_3$) t^2= 0
$3k_2$ + $6k_3$= $\frac{0}{-t^2}$
$3k_2$ + $6k_3$= 0
$6k_3$= -$3k_2$
k_3= $\frac{-3k_2}{6}$
k_3= $\frac{-1}{2}$ k_2
k_3= $\frac{-1}{2}$ ($\frac{-1}{6}$)
k_3= $\frac{1}{12}$.

($3k_2$ - $2k_3$ - $6k_4$) t= 0
$3k_2$ - $2k_3$ - $6k_4$= $\frac{0}{t}$
$3k_2$ - $2k_3$ - $6k_4$= 0
$6k_4$= $3k_2$ - $2k_3$
k_4= $\frac{3k_2-2k_3}{6}$
k_4= $\frac{1}{2}$ k_2 - $\frac{1}{3}$ k_3
k_4= $\frac{1}{2}$ ($\frac{-1}{6}$) - $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$
k_4= $\frac{-1}{12}$ - $\frac{1}{36}$

$k_4 = \frac{-1}{9}$.

$5k_2 + k_3 - k_4 - 6k_5 = 0$
$6k_5 = 5k_2 + k_3 - k_4$
$k_5 = \frac{5k_2 + k_3 - k_4}{6}$
$k_5 = \frac{5}{6} k_2 + \frac{1}{6} k_3 - \frac{1}{6} k_4$
$k_5 = \frac{5}{6} (\frac{-1}{6}) + \frac{1}{6} \frac{1}{12} - \frac{1}{6} (\frac{-1}{9})$
$k_5 = \frac{-5}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{54}$
$k_5 = \frac{-1863}{17496}$.

Entonces, la solución particular es la siguiente:

$y_t^p = \frac{-1}{6} 2^t - \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{12} t^2 - \frac{1}{9}$ t - $\frac{1863}{17496}$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias de orden 2 es:

$y_t = C_1 4^t + C_2 (-1)^t - \frac{1}{6} 2^t - \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{12} t^2 - \frac{1}{9}$ t - $\frac{1863}{17496}$.