Práctica 1 - Vectores y Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Dados los vectores $u = (1, 2)$, $v = (-1, 3)$ y $w = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

(*a*) $u + v$;
(*b*) $v + w$;
(*c*) $3u + 3v$;
(*d*) $3(u + v)$;
(*e*) $(u + v) + w$;
(*f*) $u + (v + w)$;
(*g*) $u - v$;
(*h*) $u + (v - w)$;
(*i*) $\frac{5}{4}u + \frac{1}{2}v - \frac{3}{2}w$.

Ejercicio 2. Sea $w = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ un vector. Graficar en el plano:

(*a*) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}\}$.
(*b*) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.
(*c*) $L = \{tw : t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq 1\}$.

Ejercicio 3. Dados los vectores $u = (0, 1, 2)$, $v = (1, 1, 0)$ y $w = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:

(*a*) $u + v$;
(*b*) $u + v + w$;
(*c*) $u - v$;
(*d*) $2u$;
(*e*) $-3v$;
(*f*) $-v + \dfrac{2}{3}w$.

Ejercicio 4. Halle x e y para que los vectores v y w resulten iguales.

(*a*) $v = (x, 3)$ y $w = (2, x + y)$;
(*b*) $v = (4, y)$ y $w = x(2, 3)$;
(*c*) $v = x(3, 2)$ y $w = 2(y, -1)$;
(*d*) $v = x(2, y)$ y $w = y(1, -2)$.

Ejercicio 5. Normalizar los siguientes vectores

(*a*) $u = (-3, 1, -2, 4, -5)$;
(*b*) $v = (4, -2, -3, 8)$;
(*c*) $w = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4})$.

Ejercicio 6. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:

(*a*) El vector $u = (4, k)$ tiene norma 5;
(*b*) El vector $v = (1, k, 0)$ tiene norma 2;

(c) El vector $w = k \cdot (2, 2, 1)$ tiene norma 1;

(d) El vector $z = (1, k, -2, 5)$ tienen norma $\sqrt{39}$.

Ejercicio 7. Dados los vectores $v = (1, -2, 2)$, $w = (2, 0, 3)$ y $z = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:

(a) $v \cdot w$;

(b) $w \cdot v$;

(c) $(v + w) \cdot z$;

(d) $(v \cdot z) + (w \cdot z)$.

(e) $(3v) \cdot w$;

(f) $v \cdot (3w)$;

(g) $3(v \cdot w)$;

(h) $v \cdot v$;

(i) $w \cdot w$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos calcule el ángulo entre los vectores u y v.

(a) $u = (1, 1)$ y $v = (1, -1)$;

(b) $u = (3, -1, 2)$ y $v = (4, 3, -1)$;

(c) $u = (1, -2, 3)$ y $v = (2, 5, 4)$;

En cada uno de los casos anteriores indicar si u y v son ortogonales.

Ejercicio 9. Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$ $u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, -1, 1)$.

(a) Escriba al vector $w = (1, 7, -4)$ como combinación lineal de u y v.

(b) Escriba al vector $z = (2, -5, 4)$ como combinación lineal de u y v.

(c) ¿Para qué valores de k el vector $y = (1, k, 5)$ es una combinación lineal de u y v?

Ejercicio 10. Estudie si el conjunto de vectores $S = \{(2, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 2, -1)\}$ es una base $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11. Enccuentre un sistema generador del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + 2z - 3t + 2y = 0\}.$$

Ejercicio 12. Determine si los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^3$

(a) $\{(1,1,4),(0,2,1),(3,1,9)\}$;

(b) $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$;

(c) $\{(2,1,1),(2,2,1),(2,2,-1)\}$;

(d) $\{(1,2,1),(1,3,1),(1,4,1),(1,5,1)\}$;

(e) $\{(1,1,1),(-2,1,0),(-1,0,1)\}$.

Ejercicio 13. Sea $B = \{(2,1,1),(1,-1,3),v\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Halle v sabiendo que las coordenadas del vector $(1,-2,5)$ en la base B son $(2,-1,3)$.

Ejercicio 14. Sean $B = \{(-1,4,2),v,(0,0,-1)\}$ y $B' = \{w,(1,-1,1),(-1,0,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Halle v y w sabiendo que las coordenadas de v en la base de B' son $(1,2,3)$ y que las coordenadas de w en la base B son $(1,2,3)$.

Ejercicio 15. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios

(a) $\{(x,y,z)\colon x = y = z\}$ de $\mathbb{R}^3$;

(b) $\{(x,y,z,t)\colon x = z, y = t\}$ de $\mathbb{R}^4$;

(c) $\{(x,y,z,t)\colon 2y + 3z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$;

Ejercicio 16. Una compañía petrolera puede convertir un barril de crudo en tres clases distintas de combustible. Sin aditivos de plomo sus producciones de las tres clases de combustible a partir de un barril de crudo vienen dadas por el vector $(2,2,4)$. Con el máximo de aditivos de plomo permitidos legalmente las producciones son $(5,0,3)$. Supongamos que los efectos de los aditivos de plomo son proporcionales, es decir, que al usar una fracción α del máximo permitido $(0 \leq \alpha \leq 1)$ se tiene la producción

$$(1-\alpha)(2,2,4) + \alpha(5,0,3).$$

Determine si es posible que la compañía produzca los siguientes vectores

(a) $\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2}\right)$;

(b) $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6}\right)$;

(c) $(1,6,9)$.

Ejercicio 17. Consideremos el conjunto

$$V = \{(w, td, ti, P, GP) \colon P = w, td + ti = GP\}$$

donde w es el crecimiento de los salarios nominales, td es el crecimiento de los impuestos directos, ti es el crecimiento de los impuestos indirectos, P es el crecimiento de los precios y GP es el crecimiento del gasto público.

(a) Muestre que V es un subsepacio vectorial de $\mathbb{R}^5$;

(b) Halle una base y la dimensión de V. De una interpretación económica del resultado.