Probabilidad

Conteo

10/03/2023

Lara Sánchez Peña[1]

UTDT 2023 - MEC

[1] Basado en las notas de Andrea Rotnitzky

Permutaciones, Combinaciones, Power Rule y Bosones

Para poder calcular probabilidades necesitamos aprender a **contar cuántos elementos hay en** Ω y en subconjuntos de Ω. Por lo tanto, vamos a aprender distintas formas de contar, según el caso que estemos analizando.

- **Power rule**: hay n^k formas de **elegir ordenadamente** k objetos con reposición de entre n objetos diferentes.
- **Factorial**: hay $n!$ formas de **ordenar** n objetos diferentes **en fila**.
- **Permutaciones**: hay $\frac{n!}{(n-k)!}$ formas de **extraer y ordenar** k objetos diferentes de un total de n elementos **en fila**.
- **Combinaciones**: hay $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ formas de **extraer** k objetos diferentes de un total de n elementos. No importa el orden.
- **Bosones**: hay $\binom{n+k-1}{n}$ formas de ordenar n objetos **indistinguibles** en k grupos **distinguibles**.

Power rule

- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras que se pueden considerar números de 7 dígitos que pertenecen al conjunto $\{1, 4, 5\}$. ¿Cuántos elementos tiene Ω?
- Supongamos que Ω es el espacio muestral donde se listan todas las formas de elegir cómo rellenar k lugares con alguno de los n elementos que se pueden elegir del conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con reposición. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

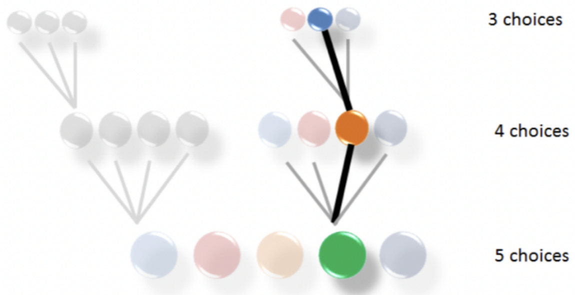
Factorial

- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 10 personas en una fila. ¿Cuántos elementos tiene Ω?
- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse las letras de la palabra "murciélago". ¿Cuántos elementos tiene Ω?
- Supongamos que Ω es el espacio muestral donde se listan todas las maneras en que pueden ordenarse n personas en una fila. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

Definimos $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ y se llama n **factorial**.

Permutaciones

Consideramos n bolillas **distintas**. Supongamos que queremos elegir **sucesivamente** k de las n bolas sin reposición y nos importa el orden en el que se eligen, donde $k \leq n$. Sea Ω el espacio muestral de posibles resultados. ¿Cuántos posibles resultados hay en Ω?
Acá es clave que las bolillas son distinguibles y que nos importa en qué orden se sacan. Por ejemplo, supongamos que $n = 5$ y $k = 3$, entonces



Permutaciones

Por lo tanto en este caso, la cantidad de posibles resultados en Ω es

$$5P3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Si en vez de 5 bolillas todas distintas hubiera 8 bolillas y quisiéramos sacar ordenadamente y sin reposición $k = 3$ bolillas, ¿cuántos elementos tendría Ω?

Generalizando,

$$n\mathrm{P}k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

¿Cómo podemos probar este resultado?

Permutaciones

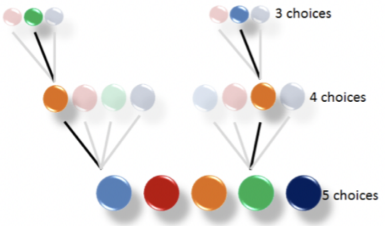
Se elige la bolilla	Cuántas opciones hay	Por qué?
1°	n	no se eligió niguna bola
2°	$n-1$	ya se eligió 1 bola
3°	$n-2$	ya se eligieron 2 bolas
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k°	$n-k+1$	ya se eligieron $k-1$ bolas

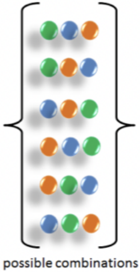
Por lo tanto,

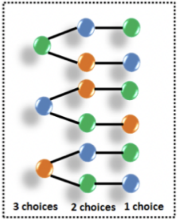
$$
\begin{aligned}
& n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1) \\
= & n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Combinaciones

Consideramos n bolillas **distintas**. Supongamos que queremos elegir **sucesivamente** k de las n bolillas sin reposición y **NO** nos importa el orden en el que se eligen,[2] donde $k \leq n$. Sea Ω el espacio muestral de posibles resultados. ¿Cuántos posibles resultados hay en Ω?
Acá es clave que las bolillas son distinguibles y que no nos importa en qué orden se sacan. Por ejemplo, supongamos que $n = 5$ y $k = 3$, entonces







[2] Es lo mismo decir que se sacan las k bolillas de una sola vez.

Combinaciones

Notemos que en la figura anterior hay permutaciones que cuentan como una sola combinación, porque cualquiera de los 6 casos mostrados en la derecha nos terminan dando una bolilla azul, una verde y una naranja. Entonces, si consideramos el caso anterior, teníamos 60 permutaciones y cada caso lo estamos contando 6 veces, entonces

$$5C3 = 10 = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3}$$

Generalizando,

$$nCk = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

¿Cómo podemos probar este resultado?

Combinaciones

Para ver de cuántas maneras se pueden elegir k bolillas distintas de un total de n sin reposición sin que nos importe el orden, podemos basarnos en el **resultado anterior** cuando contamos la cantidad de permutaciones.

Cuando sacamos las k bolillas **en orden y sin reposición** de n bolillas hay

$$n\mathrm{P}k = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ formas de hacerlo.}$$

Ahora bien, esas k bolillas se pueden ordenar en cualquier orden. Por lo tanto, hay permutaciones distintas que son la misma combinación. Como hay $k!$ formas de ordenar k bolillas distintas, dividimos $n\mathrm{P}k$ por $k!$. Entonces, la cantidad de formas de extraer k bolillas de un total de n bolillas sin importar el orden es:

$$n\mathrm{C}k = \frac{1}{k!} n\mathrm{P}k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Factorial con repetición - coeficiente multinomial

Supongamos que ahora queremos ordenar n objetos, donde cada elemento pertenece a uno solo de los j grupos. El grupo 1 tiene k_1 elementos, el grupo 2 tiene k_2 elementos, ..., el grupo j tiene k_j elementos. O sea, $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n$. La cantidad de ordenar dichos elementos es el coeficiente multinomial:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_j!} = \binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_j}$$

- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse las letras de la palabra "fosforescente". ¿Cuántos elementos tiene Ω?
- ¿Cuántas formas hay de armar un ranking de 10 personas, donde 4 son de MAECO, 1 de MEC y 5 de MECAP? Note que no importa el ranking por individuos, sino por grupo.
- ¿Cuál es el coeficiente del término $x^2 \cdot y \cdot z^5$ en la expresión algebraica
    - $(x + y + z)^8$?
    - $(x + y + 3z)^8$?

Factorial con repetición (cont) - coeficiente multinomial

- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω?
- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular y además los mejores amigos Gachi y Pachi deben sentarse de manera que Gachi esté a la izquierda de Pachi, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω?
- Supongamos que Ω es el espacio muestral de todas las maneras en que pueden ordenarse 9 personas en una mesa circular y además los mejores amigos Gachi y Pachi deben sentarse juntos, donde lo único que importa es la posición relativa de los comensales en la mesa y no la posición respecto de la habitación en la cual se encuentra la mesa. ¿Cuántos elementos tiene Ω?

Bosones

Los bosones son partículas que exhiben estados totalmente simétricos. En probabilidad, llamamos bosones a objetos que no se pueden distinguir.

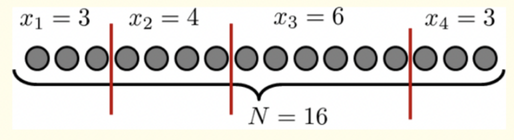
Pensemos entonces cuántos elementos tiene Ω el espacio muestral donde se consideran todas las posibles formas de:

- considerar las combinaciones de números x_i que cumplan la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ si $x_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.
- poner n bolitas indistinguibles (iguales entre sí) en k cajitas diferentes.
- ordenar en fila n letras A y $k-1$ letras B.

Pensemos cómo resolver estos problemas. Pero antes, ¿están estos problemas de alguna manera relacionados?

Bosones

Por ejemplo, para contar cuántos casos hay si $n = 16$ y $k = 4$, necesitamos 3 separadores para decidir si cada una de las bolillas cae en la primera, segunda, tercera o cuartas cajita.



Esto es análogo a:

- considerar las combinaciones de números x_i que cumplan la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ si $x_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$
- considerar cómo ordenar una "palabra" con de 19 letras, 16 de las cuales son la letra A y 3 son la letra B.

Bosones

Entonces, para el ejemplo anterior con $n = 16$ y $k = 4$, hay

$$\frac{19!}{3!16!} = \binom{19}{3} \text{ formas de hacerlo.}$$

Por lo tanto, **en general**, si queremos contar de cuántas maneras se pueden ordenar n bolillas indistinguibles en k cajitas distinguibles ($k - 1$ separadores), hay

$$\binom{n + k - 1}{k - 1} \text{ formas de hacerlo.}$$

Bosones - ejercicios extra

Pensemos entonces cuántos elementos tiene Ω el espacio muestral donde se consideran todas las posibles formas de:

- resolver la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = N$ si $x_i \geq 1$ y además $x_i \in \mathbb{N}$.
- poner N bolitas indistinguibles (iguales entre sí) en k cajitas diferentes y **ninguna cajita puede quedar vacía**.
- poner n_1 bolitas indistinguibles azules (iguales entre sí) y n_2 bolitas indistinguibles rojas (iguales entre sí) en k cajitas diferentes.