Universidad Torcuato Di Tella
Maestrías en Economía y en Econometría

Exámen Final de Econometría

29 de mayo de 2024

Nombre y Apellido					
	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Total
Nota					

Importante: Valores críticos para utilizar en el exámen: $t(5\%) = \pm 2$**,** $F(5\%) = 8.66$**,** $\chi^2(5\%) = 6$**.**

1. (**25 puntos**) Suponga que tiene una muestra aleatoria (iid) de n observaciones $\{y_i, x_i\}_{i=1}^n$ tal que,

$$\begin{aligned} y_i &= x_i \beta + e_i, \\ E(e_i \mid x_i) &= 0, \; E\left(e_i^2 \mid x_i\right) = \sigma^2(x_i) \end{aligned}$$

donde $\sigma^2(x_i)$ es alguna función acotada y estríctamente positiva de x_i. Considere el estimador de β dado por:

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n h(x_i) y_i}{\sum_{i=1}^n h(x_i) x_i}$$

donde $h(x_i)$ es una función acotada de x_i. Asuma que $E(h(x_i) x_i) \neq 0$.

(a) Muestre que $\tilde{\beta}$ es consistente y asintóticamente normal y derive la expresión para la varianza asintótica de $\sqrt{n}(\tilde{\beta} - \beta)$. Establezca cualquier supuesto adicional que necesite para derivar el resultado.

(b) Encuentre la distribución asintótica del estimador que usa:

$$h(x_i) = \frac{x_i}{\sigma^2(x_i)}$$

2. (**25 puntos**) Suponga que Y es una variable aleatoria que tiene densidad

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{\left(\frac{-(y-\theta)^2}{2\theta}\right)}$$

donde $\theta > 0$ es el parámetro desconocido. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ.

3. (**25 puntos**) Suponga que

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

con $(y_i, x_i)'\, i = 1, \ldots, n$ i.i.d., y $E[\varepsilon_i] = E[z_i \varepsilon_i] = 0$. Se le dan los siguientes datos con $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} y_1 & x_1 & z_1 \\ y_2 & x_2 & z_2 \\ y_3 & x_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Construya un intervalo del 95% de confianza para β utilizando la distribución asintótica de la extimación por variables instrumentales de $(\alpha, \beta)'$. No asuma que $E[\varepsilon_i^2 \mid z_i]$ es una constante. Note que β, el segundo componente del vector $(\alpha, \beta)'$, es un escalar. Su derivación tiene que ser específica para este ejercicio.

(b) Estime por MCC

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma e_i + \varepsilon_i$$

donde e_i son los residuos de una regresión de x_i sobre una constante y z_i. Cuál es la estimación de β? Cómo se compara con la estimación de variables instrumentales? Justifique.

4. (**25 puntos**) Considere la ecuación estructural

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i \tag{1}$$

con x_i endógena, tal que $E(x_i e_i) \neq 0$. Asuma que y_i y x_i son escalares. Suponga que tiene un instrumento, z_i, también un escalar, que satisface

$$E(e_i \mid z_i) = 0$$

En particular $E(e_i) = 0, E(z_i e_i) = 0$ y $E(z_i^2 e_i) = 0$.

(a) x_i^2 se puede tratar como variable endógena o exógena? Justifique.

(b) Suponga que tiene un instrumento z_i, un escalar, que satisface

$$x_i = \gamma_0 + \gamma_1 z_i + u_i \tag{2}$$

con u_i independiente de z_i y con media cero. Considere usar $(1, z_i, z_i^2)$ como instrumentos. Es un número suficiente de instrumentos para identificar exactamente los parámetros de la ecuación. Justifique.

(c) Escriba la forma reducida para x_i^2. Bajo que condiciones de los parámetros en (2) están identificados los parámetros en (1)?