Repaso

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Autovalores y autovectores

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Un número real λ se llama **autovalor** de A si existe un vector $v \in \mathbb{R}^m$ no nulo tal que

$$Av^t = \lambda v^t.$$

El vector v se denomina **autovector** de A correspondiente al autovalor λ.

Autovalores y autovectores

Definición.

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. El polinomio

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_m) \quad \text{o} \quad p_A(\lambda) := \det(\lambda I_m - A).$$

se denomina el **polinomio característico** de A y la ecuación

$$p_A(\lambda) = 0$$

se denomina **ecuación característica** de A.

Autovalores y autovectores

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y λ un autovalor de A. El espacio

$$E_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^m \colon Av^t = \lambda v^t\}$$

se denomina **autoespacio** (o **espacio propio**) de A correspondiente a λ.

Autovalores y autovectores

Teorema.

Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.

Autovalores y autovectores

Procedimiento para calcular autovalores y autovectores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

- Primero encontrar el caracteristico de A, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$;
- Buscar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $p_A(\lambda)$;
- Se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I_m)v^t = 0$ para cada autovalor λ_i.

Autovalores y autovectores

Propiedad.

- La suma de los autovalores de una matriz es igual a la traza de la matriz.
- El producto de todos lo autovalores de una matriz es igual al determinante de la matriz.
- Si λ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ entonces λ es un autovalor de A^t.
- Si λ es un autovalor de una matriz no singular $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ entonces $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.
- Una matriz es singular si y sólo si cero es autovalor.

Diagonalización

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Decimos que A es diagonalizable, si existen $D, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que D es diagonal, P es inversible y

$$A = PDP^{-1}.$$

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A es diagonalizable si y solo si A tiene $n-$autovectores linealmente independientes.

Diagonalización

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Decimos que A es diagonalizable, si existen $D, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que D es diagonal, P es inversible y

$$A = PDP^{-1}.$$

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A es diagonalizable si y solo si A tiene $n-$autovectores linealmente independientes.

Corolario.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A tiene n autovalores distintos entonces A es diagonalizable.

Diagonalización

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y λ un autovalor de A. Entonces la dimensión de E_λ es menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz de p_A.

Diagonalización

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y λ un autovalor de A. Entonces la dimensión de E_λ es menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz de p_A.

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A es diagonalizable si y solo si el polinomio característico p_A de A tiene todas sus raíces reales y para todo autovalor λ de A se tiene que

$$\dim(E_\lambda) = \text{ multiplicidad de } \lambda \text{ como raíz de } p_A.$$

El método

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para decidir si A es digonalizable procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos p_A, el polinomio caracteristico de A;
2. Hallamos las raíces de p_A, si tiene raíces complejas paramos;
3. Hallamos los autovectores de A, si no tenemos n autovectores l.i. paramos;
4. Construimos la matriz P ubicando a los autovectores hallados en el punto anterior como columnas.

Ortogonalidad

Diremos que un conjunto de vectores $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ es un conjunto ortogonal si $v_i \cdot v_j = 0$ para todo $i \neq j$. Si además $v_i \cdot v_i = 1$, diremos que B es un conjunto ortonormal.

Proposición.

Todo conjunto de vectores no nulos ortogonales es linealmente independiente.

Ortogonalidad

Entonces, si tenemos un conjunto $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores ortonormales, podemos definir una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que las filas de P son los vectores de B y usando que B es ortogonal podemos concluir que $P^{-1} = P^t$.

Ortogonalidad

Entonces, si tenemos un conjunto $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vectores ortonormales, podemos definir una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que las filas de P son los vectores de B y usando que B es ortogonal podemos concluir que $P^{-1} = P^t$.

Definición.

Decimos que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz ortogonal si su inversa es su transpuesta, es decir

$$P^{-1} = P^t.$$

Ortogonalidad

Entonces, si tenemos un conjunto $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores ortonormales, podemos definir una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que las filas de P son los vectores de B y usando que B es ortogonal podemos concluir que $P^{-1} = P^t$.

Definición.

Decimos que $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal si su inversa es su transpuesta, es decir

$$P^{-1} = P^t.$$

Ejemplo 1. $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

Ortogonalidad

Proposición.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica entonces

- Todas las raíces del polinomio característico de A son reales;
- A es diagonalizable;
- Los autovectores de A correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

Ortogonalidad

Por lo tanto si A es simétrica entonces es diagonalizable, pero resultado anterior nos dice un poco mas.

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Entonces existe una matriz ortogonal P tal que

$$D = P^{-1}AP$$

es diagonal.

Ortogonalidad

Ejemplo 2. Diagonalizar la siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas

Maestría en Econometría–Matemática I

1er Trimestre 2023

F. Cuadráticas–Motivación

Cuando tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente regular, si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t_0) = 0$, entonces

$$f(t) \simeq f''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + f(t_0)$$

para valores cercanos a t_0.

F. Cuadráticas–Motivación

Cuando tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente regular, si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t_0) = 0$, entonces

$$f(t) \simeq f''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + f(t_0)$$

para valores cercanos a t_0. Entonces

- Si $f''(t_0) > 0$ entonces $f(t_0)$ es un mínimo local de f;

F. Cuadráticas–Motivación

Cuando tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente regular, si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t_0) = 0$, entonces

$$f(t) \simeq f''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + f(t_0)$$

para valores cercanos a t_0. Entonces

- Si $f''(t_0) > 0$ entonces $f(t_0)$ es un mínimo local de f;
- Si $f''(t_0) < 0$ entonces $f(t_0)$ es un máximo local de f;

F. Cuadráticas–Motivación

Cuando tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente regular, si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t_0) = 0$, entonces

$$f(t) \simeq f''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + f(t_0)$$

para valores cercanos a t_0. Entonces

- Si $f''(t_0) > 0$ entonces $f(t_0)$ es un mínimo local de f;
- Si $f''(t_0) < 0$ entonces $f(t_0)$ es un máximo local de f;
- Si $f''(t_0) = 0$ no podemos concluir nada.

F. Cuadráticas–Motivación

Si ahora consideramos una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suficientemente regular para la cual existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (0, 0)$$

F. Cuadráticas–Motivación

Si ahora consideramos una función $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suficientemente regular para la cual existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (0, 0)$$

tenemos que

$$F(x, y) \simeq \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0) D^2 F(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + F(x_0, y_0)$$

cerca de (x_0, y_0). Donde

$$D^2 F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

es la matriz hessiana de F que es simétrica si la función es suficientemente regular.

F. Cuadráticas–Motivación

¿Cómo determinar el signo de $(x - x_0, y - y_0) D^2 F(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$?

Formas bilineales

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales.

- Decimos que $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

para todo $u, v \in \mathbb{V}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Formas bilineales

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales.

- Decimos que $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

para todo $u, v \in \mathbb{V}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Una **forma bilineal** es una aplicación $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2, v_1) = \alpha f(u_1, v_1) + \beta f(u_2, v_1)$$
$$f(u_1, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(u_1, v_1) + \beta f(u_1, v_2)$$

para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Formas bilineales

Ejemplo 3.

(a) Sean $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$f(u, v) = uAv^t.$$

Formas bilineales

Ejemplo 3.

(a) Sean $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$f(u, v) = uAv^t.$$

(b) Sean $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$.

$$f(u, v) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3.$$

Formas bilineales

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.

Formas bilineales

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.
Como B es una base de $\mathbb{V}$, entonces para todo $u, v \in \mathbb{V}$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Formas bilineales

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.
Como B es una base de $\mathbb{V}$, entonces para todo $u, v \in \mathbb{V}$ existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Usando que f es bilineal tenemos que

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(v_i, v_j).$$

Formas bilineales

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.
Como B es una base de $\mathbb{V}$, entonces para todo $u, v \in \mathbb{V}$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Usando que f es bilineal tenemos que

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(v_i, v_j).$$

Si tomamos $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ tenemos que

$$f(u, v) = [u]_B A [v]_B^t.$$

Formas bilineales

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.

Como B es una base de $\mathbb{V}$, entonces para todo $u, v \in \mathbb{V}$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Usando que f es bilineal tenemos que

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(v_i, v_j).$$

Si tomamos $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ tenemos que

$$f(u, v) = [u]_B A [v]_B^t.$$

A se denomina la **representación matricial** de f.

Formas bilineales simétricas

Definición.

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Decimos que f es **simétrica** si

$$f(u, v) = f(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

Formas bilineales simétricas

Ejemplo 4. Sean $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$.

$$f(u, v) = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Formas bilineales simétricas

Proposición.

Si f es una forma bilineal simétrica entonces su representación matricial A es simétrica.

Formas bilineales simétrica

Observación.

Si f es una forma bilineal simétrica entonces su representación matricial A es simétrica y por lo tanto existe P ortogonal tal que P^tAP es diagonal.

Formas cuadráticas

Definición.

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Una aplicación $q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definida por $q(v) = f(v, v)$ es una **forma cuadrática**.

Formas cuadráticas

Definición.

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Una aplicación $q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definida por $q(v) = f(v, v)$ es una **forma cuadrática**.

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Una **forma cuadrática** en $\mathbb{R}^n$ es una función $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x) = xAx^t.$$

La matriz A se denomina la matriz asociada a q.

Ejemplo 5. Decidir si la siguiente función $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática

$$q(x, y, z) = 7x^2 + 5y^2 - 4xy + 26xz + 30yz.$$

Clasificación

Vamos a clasificar a las formas cuadráticas segun su signo.
Una forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

- **definida positiva** si $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;

Clasificación

Vamos a clasificar a las formas cuadráticas segun su signo.
Una forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

- **definida positiva** si $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;
- **semidefinida positiva** si $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

Clasificación

Vamos a clasificar a las formas cuadráticas segun su signo.
Una forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

- **definida positiva** si $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;
- **semidefinida positiva** si $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- **definida negativa** si $q(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;

Clasificación

Vamos a clasificar a las formas cuadráticas segun su signo.
Una forma cuadrática $q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

- **definida positiva** si $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;
- **semidefinida positiva** si $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- **definida negativa** si $q(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;
- **semidefinida negativa** si $q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

Clasificación

Vamos a clasificar a las formas cuadráticas segun su signo.
Una forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

- **definida positiva** si $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;
- **semidefinida positiva** si $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- **definida negativa** si $q(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;
- **semidefinida negativa** si $q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- **indefinida** en cualquier otro caso.

Clasificación

Ejemplo 6. Comencemos por algunos ejemplos simples.

(a) $q_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$ es definida positiva.

Clasificación

Ejemplo 6. Comencemos por algunos ejemplos simples.

(a) $q_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$ es definida positiva.

(b) $q_2(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ es semidefinida positiva ya que se anula en toda la recta $y = -x$;

Clasificación

Ejemplo 6. Comencemos por algunos ejemplos simples.

(a) $q_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$ es definida positiva.

(b) $q_2(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ es semidefinida positiva ya que se anula en toda la recta $y = -x$;

(c) $q_3(x,y) = -q_1(x,y)$ es definida negativa;

Clasificación

Ejemplo 6. Comencemos por algunos ejemplos simples.

(a) $q_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$ es definida positiva.

(b) $q_2(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ es semidefinida positiva ya que se anula en toda la recta $y = -x$;

(c) $q_3(x,y) = -q_1(x,y)$ es definida negativa;

(d) $q_4(x,y) = -q_2(x,y)$ es semidefinida negativa;

Clasificación

Ejemplo 6. Comencemos por algunos ejemplos simples.

(a) $q_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$ es definida positiva.

(b) $q_2(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ es semidefinida positiva ya que se anula en toda la recta $y = -x$;

(c) $q_3(x,y) = -q_1(x,y)$ es definida negativa;

(d) $q_4(x,y) = -q_2(x,y)$ es semidefinida negativa;

(e) $q_5(x,y) = x^2 - y^2$ es indefinida, porque por ejemplo $q(1,0) = 1 > 0$ mientras que $q(0,1) = -1 < 0$.

Clasificación

Sean

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Clasificación

Sean

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y $q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Clasificación

Por lo tanto q es

- definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

Clasificación

Por lo tanto q es

- definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida positiva si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

Clasificación

Por lo tanto q es

- definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida positiva si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- definida negativa si $\lambda_i < 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

Clasificación

Por lo tanto q es

- definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida positiva si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- definida negativa si $\lambda_i < 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida negativa si $\lambda_i \leq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

Clasificación

Por lo tanto q es

- definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida positiva si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- definida negativa si $\lambda_i < 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida negativa si $\lambda_i \leq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- indefinida si existe i, j tal que $\lambda_i \lambda_j < 0$.

Clasificación

Por lo tanto q es

- definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida positiva si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- definida negativa si $\lambda_i < 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida negativa si $\lambda_i \leq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- indefinida si existe i, j tal que $\lambda_i \lambda_j < 0$.

Clasificación

Por lo tanto q es

- definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida positiva si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- definida negativa si $\lambda_i < 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- semidefinida negativa si $\lambda_i \leq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- indefinida si existe i, j tal que $\lambda_i \lambda_j < 0$.

¿Qué pasa en general?

Clasificación

Ejemplo 7. Clasificar la siguiente forma cuadrática

$$q(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz.$$

Clasificación

Propiedad.

Sean $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A su matriz asociada. Entonces

- q es definida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores estrictos que cero;

Clasificación

Propiedad.

Sean $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A su matriz asociada. Entonces

- q es definida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores estrictos que cero;
- q es semidefinida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores o iguales que cero;

Clasificación

Propiedad.

Sean $q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A su matriz asociada. Entonces

- q es definida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores estrictos que cero;
- q es semidefinida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores o iguales que cero;
- q es definida negativa si y solo si todos los autovalores de A son menores estrictos que cero;

Clasificación

Propiedad.

Sean $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A su matriz asociada. Entonces

- q es definida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores estrictos que cero;
- q es semidefinida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores o iguales que cero;
- q es definida negativa si y solo si todos los autovalores de A son menores estrictos que cero;
- q es semidefinida negativa si y solo si todos los autovalores de A son menores o iguales que cero;

Clasificación

Propiedad.

Sean $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A su matriz asociada. Entonces

- q es definida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores estrictos que cero;
- q es semidefinida positiva si y solo si todos los autovalores de A son mayores o iguales que cero;
- q es definida negativa si y solo si todos los autovalores de A son menores estrictos que cero;
- q es semidefinida negativa si y solo si todos los autovalores de A son menores o iguales que cero;
- q es indefinida si A tiene autovalores mayores estrictos que cero y menores estrictos que cero.

Clasificación

Ejemplo 8. Clasificar las siguientes formas cuadráticas

(a) $q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

Clasificación

Ejemplo 8. Clasificar las siguientes formas cuadráticas

(a) $q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

(b) $q(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2.$

Aplicación

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica tal que la forma cuadrática asociada a A es semidefinida positiva y $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal tal

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Aplicación

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica tal que la forma cuadrática asociada a A es semidefinida positiva y $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal tal

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definimos la **raíz cuadrada** de A de la siguiente manera

$$\sqrt{A} = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Aplicación

Ejemplo 9. Calcular la raíz cuadrada de $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Clasificación

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Clasificación

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Llamamos **menores principales dominantes** de A a los siguientes determinantes

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_{11} \\
\Delta_2 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
\Delta_3 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
\Delta_n &= \det(A).
\end{aligned}
$$

Clasificación

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por $q(x) = xAx^t$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces

- q es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$;

Clasificación

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y $q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por $q(x) = xAx^t$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces

- q es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$;
- q es definida negativa si y sólo si $(-1)^i \Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$;

Clasificación

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por $q(x) = xAx^t$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces

- q es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$;
- q es definida negativa si y sólo si $(-1)^i\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$;
- q es indefinida en cualquier otro caso.

Clasificación

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por $q(x) = xAx^t$. Si $\det(A) = 0$, entonces

- Si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ entonces q es semidefinida positiva

Clasificación

Propiedad.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por $q(x) = xAx^t$. Si $\det(A) = 0$, entonces

- Si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ entonces q es semidefinida positiva
- Si $(-1)^i\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ q es semidefinida negativa.

Clasificación

Ejemplo 10. Clasificar las formas cuadráticas que tienen como matrices asociadas a las siguientes

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

Clasificación

Ejemplo 10. Clasificar las formas cuadráticas que tienen como matrices asociadas a las siguientes

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Clasificación

Ejemplo 10. Clasificar las formas cuadráticas que tienen como matrices asociadas a las siguientes

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Clasificación

Ejemplo 11. Hallar todos los valores de a para los cuales la siguiente forma cuadrática es definida positiva

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Clasificación

Ejemplo 12. La función de costos de una empresa viene representada por

$$C = L^2 + 3LK + 3K^2.$$

siendo K y L el trabajo y el capital respectivamente. El equipo de economistas de dicha empresa recibe una notificación según la cual deben facilitar al consejo directivo de la empresa las cantidades de capital y trabajo que minimizan los costes.
Reunido dicho equipo llegan a la conclusión de que las cantidades pedidas son $L = K = 0$. Justifique la respuesta.