# Índice

# Capítulo 1

# Fundamentos

## 1.1 Los conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos y estos objetos se denominan elementos del conjunto.

**Ejemplo 1.1.1.**

1. $C = \{$*Los clubes de la superliga del fútbol argentino*$\}$.
2. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. $B = \{$*Rojo, Azul, Amarillo, Verde*$\}$.

*Observemos que, por ejemplo,* $-2$ *es un elemento de* $A$ *y Azul es un elemento de* $B$.

Si $x$ es un elemento de un conjunto $C$ decimos que $x$ pertenece a $C$ y notamos $x \in C$.

**Ejemplo 1.1.2.** $-2 \in A$, *y Azul* $\in B$.

Si $x$ no es un elemento del conjunto $C$ decimos que $x$ no pertenece a $C$ y notamos $x \notin C$.

**Ejemplo 1.1.3.** $10 \notin A$, *y Violeta* $\notin B$.

El conjunto que no tiene elementos se denomina **conjunto vacío** y se denota por $\emptyset$.

### 1.1.1 Operaciones entre conjuntos

**Definición 1.1.4.**

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos.

- La **unión** de $A$ y $B$ es el conjunto $A \cup B$ que consta de todos los elementos que están en $A$ o en $B$.

$$A \cup B \coloneqq \{x \colon x \in A \textbf{ o } x \in B\}.$$

- La **intersección** de $A$ y $B$ es el conjunto $A \cap B$ que consta de todos los elementos que están tanto en $A$ como en $B$.

$$A \cap B \coloneqq \{x \colon x \in A \textbf{ y } x \in B\}.$$

**Ejemplo 1.1.5.**

1. *Sean* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *y* $B = \{-\sqrt{2}, 0, \pi, 6\}$. *Entonces*
$$A \cup B = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, 2, 3, \pi, 4, 5, 6\} \quad y \quad A \cap B = \{0, 6\}.$$
2. *Sean* $C = \{0, 10, 100\}$ *y* $D = \{1, 11, 101\}$. *Entonces*
$$C \cup D = \{0, 1, 10, 11, 100, 101\} \quad y \quad C \cap D = \emptyset.$$
3. *Sean* $E = \{Boca,\ River\}$ *y* $F = \{Boca,\ River,\ Racing,\ Independiente\}$. *Entonces*
$$E \cup F = \{Boca,\ River,\ Racing,\ Independiente\} = F.$$
$$E \cap F = \{Boca,\ River\} = E.$$

**Definición 1.1.6.**

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. Decimos que $A$ esta incluido en $B$ si todo elemento de A también pertenece a $B$. Notación $A \subseteq B$.

**Ejemplo 1.1.7.**

1. *Sean* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Entonces* $A \subseteq B$.
2. *Sean* $C = \{-1, 0\}$ *y* $D = \{0, 1\}$. *En este caso ni* $C$ *esta incluido en* $D$, *ni* $D$ *esta incluido en* $C$.

**Observación 1.1.8.**

Si $A$ y $B$ son dos conjuntos entonces

- $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.
- $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
- Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.

**Definición 1.1.9.**

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. La **resta** de $A$ menos $B$ es el conjunto que consta de todos los elementos de $A$ que no son elementos de $B$.
$$A \setminus B \coloneqq \{x \in A \colon x \notin B\}.$$

**Ejemplo 1.1.10.**

1. *Sean* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $B = \{0, 1, 2\}$. *Entonces*

$$A \setminus B = \{3, 4\}.$$

2. *Sean* $C = \{0, 10, 100\}$ *y* $D = \{1, 11, 101\}$. *Entonces*

$$C \setminus D = \{0, 10, 100\} = C.$$

3. *Sean* $E = \{\textit{Boca, River}\}$ *y* $F = \{\textit{Boca, River, Racing, Independiente}\}$. *Entonces*

$$E \setminus F = \emptyset.$$

$$F \setminus E = \{\textit{Racing, Independiente}\}.$$

**Observación 1.1.11.**

- Si $A \subseteq B$ entonces $A \setminus B = \emptyset$.
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \setminus B = A$.

## 1.2 Los números reales

Comencemos por recordar los número naturales

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Otro conjunto importante de números con el que trabajaremos en clase es el conjunto de los **números enteros**

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Observar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Los **números racionales** se construyen al formar cocientes con números enteros

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{-2}, \frac{3}{7}, 8 = \frac{8}{1}, -0,07 = \frac{-7}{100}.$$

En otras palabras, $r$ es un número racional si existen dos números enteros $m$ y $n$ tales que $n \neq 0$ y $r = \dfrac{m}{n}$. Es decir que el conjunto de los números racionales es

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\right\}.$$

**Notación 1.1.**

En la definición anterior $n$ tiene que ser distinto de cero porque no se puede dividir por cero.

Observar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Sabemos que existen números que no pueden se escritos como cocientes de números enteros.

**Ejemplo 1.2.1.** *Probar que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

**Solución.** Para demostrarlo supongamos lo contrario, es decir, asumimos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Entonces, existen $m \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Más aun podemos asumir que $m$ y $n$ no tienen factores en común, es decir que el máximo común divisor entre $m$ y $n$ es 1.

Observemos que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Longrightarrow \sqrt{2}n = m \Longrightarrow 2n^2 = m^2$$

Entonce $m^2$ es par y por lo tanto $m$ también lo es, lo que implica que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$. Entonces

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Longrightarrow n^2 = 2k^2.$$

Entonce $n^2$ es par y por lo tanto $n$ también lo es.

Hemos demostrado que $m$ y $n$ son pares lo que nos dice que 2 divide tanto $m$ como a $n$. Por otro lado $m$ y $n$ no tenían factores en común, es decir que arribamos a una contradicción, la cuál provino de asumir que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ luego $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

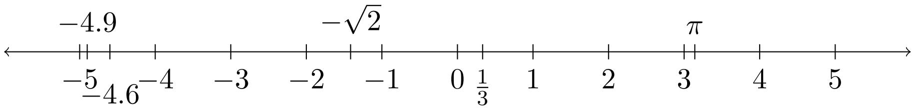
Los números que no pertenecen a $\mathbb{Q}$ se denominan **números irracionales**. El conjunto de todos los números racionales e irracionales es el conjunto de los **números reales** y se denota $\mathbb{R}$. Observar que de la definición de $\mathbb{R}$ podemos inferir que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

**Observación 1.2.2.**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

### 1.2.1 La recta numérica

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta.




Los números reales están ordenados. Decimos que $a$ es **menor que** $b$ si $b - a$ es un número positivo. Desde el punto de vista geométrico esto quiere decir que $a$ queda a la izquierda de $b$ en la recta numérica, por lo que escribimos $a < b$. Esto es lo mismo que decir que $b$ es **mayor que** $a$ y escribir $b > a$.

**Notación 1.2.**

En algunos casos escribimos $a \leq b$ (o $b \geq a$) que significa que $a < b$ (o $b > a$) o $a = b$ y se lee como "$a$ es menor o igual que $b$" (o "$b$ es mayor o igual que $a$").

Luego, dados dos números reales $a$ y $b$ tales que $a$ es menor que $b$ tenemos los siguientes conjuntos:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\}$. **Intervalo abierto**.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x \leq b\}$. **Intervalo cerrado**.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x \leq b\}$.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x < b\}$.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x\}$.
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x\}$.
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon x < b\}$.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq b\}$.
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

**Ejercicio 1.2.3.** *Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y luego grafíquelos.*

*(a)* $I_1 = [-1, 2)$.

*(b)* $I_2 = [\frac{3}{2}, 4]$.

*(c)* $I_3 = (-3, +\infty)$.

**Ejercicio 1.2.4.** *Grafique cada uno de los siguientes conjuntos.*

*(a)* $(1, 3) \cap [2, 7]$.

*(b)* $(1, 3) \cup [2, 7]$.

### 1.2.2 Operaciones

Las operaciones básicas entre los números reales son: la suma, la resta, el producto y la división. A continuación vamos a listar la propiedades elementales para estas operaciones.

**Propiedad 1.2.5** (Propiedades conmutativas)**.**

Sean $a$ y $b$ dos números reales, entonces

- $a + b = b + a$.
- $ab = ba$.

Cuando se suman o multiplican dos números, no importa el orden.

**Ejemplo 1.2.6.**

$$2 + 3 = 5 = 3 + 2 \quad y \quad 2 \cdot 3 = 6 = 3 \cdot 2$$

**Propiedad 1.2.7** (Propiedades asociativas)**.**

Sean $a$ $b$ y $c$ tres números reales, entonces

- $(a + b) + c = a + (b + c)$. Cuando se suman 3 números, no importan cuales dos se suman primero.
- $(ab)c = a(bc)$. Cuando se multiplican 3 números, no importan cuales dos se multiplican primero.

**Ejemplo 1.2.8.**

$$(2 + 3) + 4 = 9 = 2 + (3 + 4) \quad y \quad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24 = 2 \cdot (3 \cdot 4).$$

**Propiedad 1.2.9** (Propiedades distributiva)**.**

Sean $a$ $b$ y $c$ tres números reales, entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$

Cuando se multiplica un número por la suma de otros dos, se obtiene el mismo resultado al multiplicar dicho número por cada uno de los términos y luego sumar los resultados.

**Ejemplo 1.2.10.**

*(a)* $2 \cdot (3+4) = 14 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$.

*(b)* $2(x+3) = 2x + 2 \cdot 3 = 2x + 6$.

*(c)* $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

**Propiedad 1.2.11.**

- Elemento neutro para suma. El número 0 es especial para la suma ya que si $a$ es un número real entonces

$$a + 0 = a.$$

- Inverso aditivo. Todo número real $a$ tiene asociado un número real negativo $-a$ que cumple que

$$a + (-a) = 0.$$

Observemos que la resta, operación inversa a la suma, puede escribirse como la suma de un número y el inverso aditivo del otro. Por definición:

$$a - b = a + (-b).$$

**Propiedad 1.2.12.**

Sean $a$ y $b$ dos números reales, entonces

- $(-1)a = -a$.
- $-(-a) = a$.
- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- $-(a+b) = -a - b$.
- $-(a-b) = -a + b = b - a$.

**Ejemplo 1.2.13.**

*(a)* $(-1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$.

*(b)* $-(-\pi) = \pi$.

*(c)* $(-2)3 = -6 = 2(-3) = -(2 \cdot 3)$.

*(d)* $-(2+3) = -5 = -2 - 3$.

*(e)* $-(2-3) = 1 = -2 + 3 = 3 - 2$.

*(f)* $-(x+2) = -x-2$.

*(g)* $-(x+y-z) = -x-y+z$.

*(h)* $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

**Propiedad 1.2.14.**

- Elemento neutro para el producto. El número 1 es especial para el producto ya que si $a$ es un número real entonces
$$1 \cdot a = a.$$
- Inverso multiplicativo. Todo número real distinto de cero $a$ tiene un inverso multiplicativo, $\frac{1}{a}$ que tiene la siguiente propiedad
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Notemos que la división, operación inversa a la multiplicación, puede escribirse como la multiplicación de un número y el inverso multiplicativo del otro. Por definición:
$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

**Propiedad 1.2.15.**

Sean $a, b, c, d$ números reales.

- Si $b$ y $d$ son distintos de cero entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- Si $b$, $c$ y $d$ son distintos de cero entonces $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.
- Si $c$ es distinto de cero entonces $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.
- Si $b$ y $d$ son distintos de cero entonces $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.
- Si $b$ y $c$ son distintos de cero entonces $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.
- Si $b$ y $d$ son distintos de cero y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$.

**Ejemplo 1.2.16.**

$$a - 3 + \frac{3}{a-1} = \frac{(a-3)(a-1)+3}{a-1} = \frac{a^2 - a - 3a + 3 + 3}{a-1} = \frac{a^2 - 4a + 6}{a-1}.$$

## 1.3 Los números complejos

Desde las propiedades que presentamos en la sección anterior se puede deducir que: si $a \in \mathbb{R}$ entonces $a^2 \geq 0$. Por lo tanto no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$. Para superar este inconveniente introducimos la **unidad imaginaria** $i$ que tiene la siguiente propiedad $i^2 = -1$. Luego el conjunto de los **números complejos** se define de la siguiente manera

$$\mathbb{C} \coloneqq \{a + ib \colon a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Observemos que, por definición, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Si $z = a + ib$ decimos que $a$ es la **parte real** de $z$ mientras que $b$ es la **parte imaginaria** de $z$. Notamos $\mathrm{Re}(z) = a$ y $\mathrm{Im}(z) = b$. Observar que cuando $\mathrm{Im}(z) = 0$ es porque $z$ es un numero real.

Diremos que dos número complejos $z$ y $w$ son iguales (notamos $z = w$) si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ y $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$. Diremos que $z$ y $w$ son distintos (notamos $z \neq w$) si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ o $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.

Si $z$ es un número complejo tal que $\mathrm{Re}(z) = 0$ y $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ decimos que $z$ es un **número imaginario**.

Por ultimo si $z$ es un número complejo definimos su conjugado y su modulo de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i && (\textbf{conjugado de } z); \\ |z| &= \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} && (\textbf{modulo de } z). \end{aligned}$$

### 1.3.1 Operaciones

Dados $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos definimos la suma $z + w$ y el producto $z \cdot w$ de la siguiente manera

$$z + w \coloneqq (a + c) + (b + d)i, \quad \text{y} \quad z \cdot w \coloneqq (ac - bd) + (ad + cb)i.$$

**Ejercicio 1.3.1.** *Mostrar que para todo número complejo $z$ se tiene que*

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

**Propiedad 1.3.2.**

Las operaciones de suma y multiplicación para los números complejos satisfacen las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas. Además el 0 es el neutro para la suma y el 1 para el producto.

Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$ definimos

$$z^{-1} := \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{y} \quad \frac{w}{z} := w \cdot z^{-1}.$$

### 1.3.2 Teorema fundamental del álgebra

Para finalizar con este primer capítulo, enunciamos un resultado que sera de suma importancia a lo largo de este apunte.

**Teorema 1.3.3** (Teorema fundamental del álgebra)**.**

Todo polinomio de una variable con coeficientes complejos y de grado $n \geq 1$ tiene una raíz.

# Capítulo 2

## Vectores y espacios vectoriales

### 2.1 El plano

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ (un par de números). Como conjunto $\{a, b\} = \{b, a\}$ no importa el orden en el que aparecen los elementos $a$ y $b$. Cuando el orden de $a$ y $b$ si tiene importancia decimos que es un par ordenado y notamos $(a, b)$ y $(b, a)$.

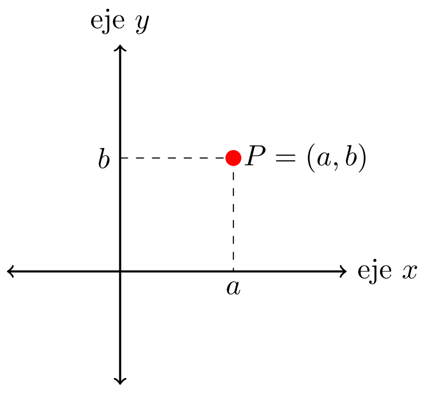
**Observación 2.1.1.**

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $(a, b) = (b, a)$ si y solo si $a = b$.

**Ejemplo 2.1.2.** *Para mostrar la edad y el peso de cada estudiante en una clase, se puede formar pares ordenados $(e, p)$, en los que el primer elemento indica la edad en años y el segundo elemento indica el peso en kilos. Ejemplos* $(42, 84)$, $(60, 75)$, $(75, 60)$.

El conjunto de todos los pares ordenados $(a, b)$ se denomina plano,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}.$$



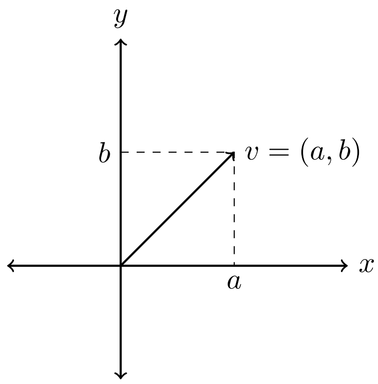

Al eje $x$ también lo solemos denominar el eje de las abscisas, mientras que el eje $y$ también se conoce como el eje de las ordenadas.

Si $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ decimos que $a, b$ son las coordenadas cartesianas del punto $P$.

**Notación 2.1.**

A lo largo de este curso utilizaremos el término escalar para referirnos a los elementos de $\mathbb{R}$.

Dado un punto $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tenemos asociado un segmento de recta dirigida de el origen (es decir el $(0, 0)$) a $P$. este segmento se denominara **vector** y se denotara por $v = (a, b)$.




**Observación 2.1.3.**

El vector $0 = (0, 0)$ es el único vector que tiene longitud 0 y no tiene dirección.

Observemos que cada punto en el plano tiene asociado un vector y viceversa. Por ese motivo, las nociones de "plano"y conjunto de todos los vectores se suelen intercambiar. Sin embargo para muchas aplicaciones es importante pensar un vector no como un punto sino como un objeto con longitud y dirección.

Gracias a el Teorema de Pitagoras, podemos calcular la longitud o **norma** de un vector $v = (a, b)$ de la siguiente manera

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Ejemplo 2.1.4.** *Calcular la norma de los siguientes vectores*

*(a)* $u = (2, 1)$;

*(b)* $v = (\sqrt{9}, 4)$;

*(c)* $w = (4, -\sqrt{9})$.

**Solución.**

(a) $\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$;

(b) $\|v\|^2 = \sqrt{9}^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ entonces $\|v\| = 5$;

(c) $\|w\|^2 = 4^2 + (-\sqrt{9})^2 = 25$ entonces $\|w\| = 5$.

## 2.2 $n-$Vectores

La idea de esta sección es generalizar la noción de vector introducida en la sección anterior. Comencemos por extensión la noción de punto.

Sea $n \in \mathbb{N}$, un $n-$punto (o simplemente un punto) $P$ es una $n-$upla de números reales, es decir,

$$P = (a_1, \ldots, a_n) \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

En ese caso el origen es el punto

$$0 = (0, \ldots, 0).$$

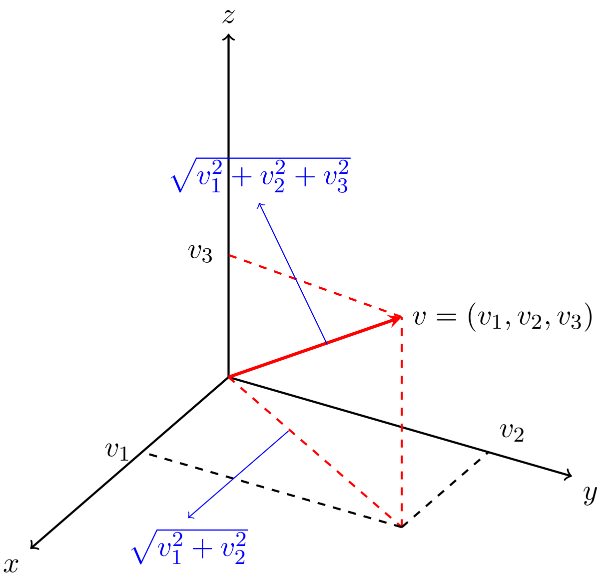
Como antes, dado un punto $P$ tenemos asociado un segmento de recta dirigida de el origen a $P$, este segmento se denominara $n-$**vector** (o simplemente vector). Definimos $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todos los $n-$vectores.

Observar que, como en el caso en que $n = 2$, todo vector tiene asociada una longitud y una dirección. El único vector sin dirección es el vector 0, el que habitualmente se denomina vector nulo.

Sea $v = (v_1, \ldots, v_n)$, un vector en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $v_i$ es la coordenada $i-$esima de $v$ y definimos la **norma** (o longitud) de $v$, de la siguiente manera

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

En el caso $n = 3$, gracias al teorema de Pitagoras, es sencillo verificar que nuestra definición de norma coincide con la longitud geométrica del vector.




**Ejemplo 2.2.1.** *Calcular la norma de los siguientes vectores*

*(a)* $u=(2,1,3)$;

*(b)* $v=(\sqrt{9},4,7,5)$;

*(c)* $w=(e,-\pi,1,\sqrt{2},8,35)$.

**Solución.**

(a) $\|u\|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$;

(b) $\|v\|=\sqrt{(\sqrt{9})^2+4^2+7^2+5^2}=\sqrt{9+16+49+25}=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$

(c) La norma del vector $w=(e,-\pi,1,\sqrt{2},8,35)$ queda como ejercicio para el lector.

**Definición 2.2.2.**

Dos vectores $u$ y $v$ son iguales, si tienen la misma cantidad de coordenadas y la $i-$esima coordenada de $u$ es igual a la $i-$esima coordenada de $v$. En el caso que $u$ y $v$ sean iguales notaremos $u=v$.

En algunas ocasiones los $n-$vectores se escriben como columnas en lugar de filas:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}e\\\sqrt{2}\\\pi\\4\\7\end{pmatrix}.$$

Tales vectores se denominan vectores columnas.

Los vectores columnas puede transformarse en vectores filas y viceversa a través de la operación transposición. Esta operación sera denotada con un superindice $t$.

$$(1,2,3)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e \\ \sqrt{2} \\ \pi \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}^t = (e, \sqrt{2}, \pi, 4, 7).$$

**Observación 2.2.3.**

Si $v$ es un vector (fila o columna) entonces $(v^t)^t = v$.

**Ejemplo 2.2.4.** *Observemos que los siguientes vector*

$$v = \begin{pmatrix} e \\ \sqrt{2} \\ \pi \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad w = (e, \sqrt{2}, \pi, 4, 7)$$

*no son iguales ya que $v$ es un vector columna mientras que $w$ es un vector fila. Notemos que $v^t = w$ y que $w^t = v$.*

## 2.3 Operaciones vectoriales

Sean $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$.

La **suma** de $u$ y $v$ se define de la siguiente manera

$$u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n),$$

es decir, sumamos coordenada a coordenada.

La **resta** de $u$ menos $v$ esta definida de la siguiente manera

$$u - v := (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n),$$

es decir, resto coordenada a coordenada.

Por ultima dado un número real $k$, definimos el producto de $k$ por $v$ de la siguiente manera

$$kv = (kv_1, \ldots, kv_n)$$

es decir, es el vector que se genera al multiplicar cada coordenada de $v$ por $k$.

Observar que $u+v$, $u-v$ y $kv$ también pertenecen a $\mathbb{R}^n$. Definimos, además

$$-v := -1v.$$

**Propiedad 2.3.1.**

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ vectores y $\alpha, \beta$ escalares. Entonces

(I) $u+v=v+u$;

(II) $(u+v)+w=u+(v+w)$;

(III) El 0 es el único elemento neutro para la suma;

(IV) $\alpha v = v\alpha$

(V) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;

(VI) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$;

(VII) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.

**Ejemplo 2.3.2.** *Sean $u=(1,1)$ y $v=(-2,3)$ dos vectores. Encuentre*

*(a)* $u+v$;

*(b)* $u-v$;

*(c)* $2u$;

*(d)* $-2u$;

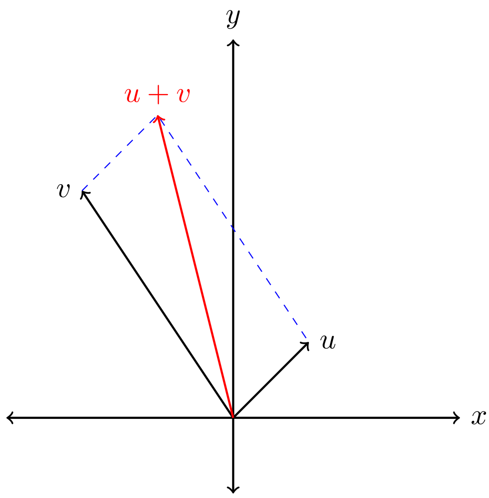
*(e)* $\frac{1}{2}u$;

*(f)* $3u+2v$.

*Graficar los vectores encontrados.*

**Solución.** Por definición

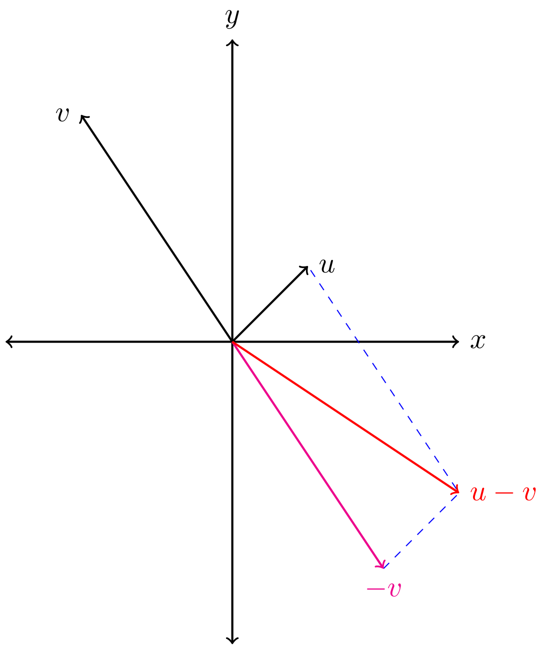
$$u+v=(1-2,1+3)=(-1,4).$$




Regla del paralelogramo.

En el caso de la resta, tenemos

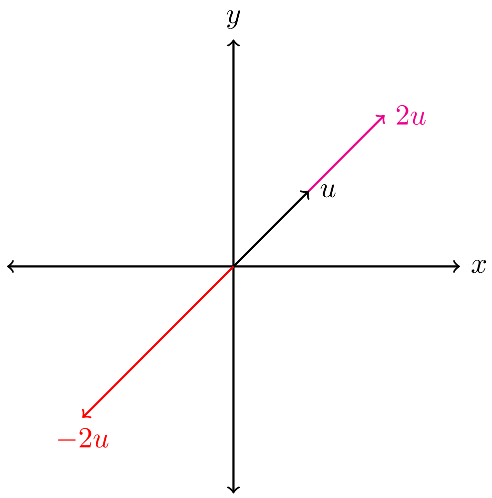
$$u - v = (1 - (-2), 1 - 3) = (3, -2).$$




En el caso del producto

$$2u = (2, 2), \quad -2u = (-2, -2), \quad \frac{1}{2}u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Observemos que $\|2u\| = 2\|u\|$, $\|-2u\| = 2\|u\|$ y $\|\frac{1}{2}u\| = \frac{1}{2}\|u\|$. Entonces en los dos primeros casos dilato la longitud de $u$ por dos, mientras que en el segundo caso la magnitud se contrae a la mitad.




Notemos que tanto en el primer caso como en el tercero la dirección se preserva pero en el segundo caso la dirección es opuesta a la original, esto se debe a que en este caso estamos multiplicando por un escalar negativo.

El último item de este ejemplo queda como ejercicio para el lector.

**Propiedad 2.3.3.**

Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\|kv\| = |k|\|v\|.$$

**Ejemplo 2.3.4.** *Sea* $v = (1, 1, -1)$ *y* $k = -3$. *Entonces*

$$\begin{aligned}
\| - 3v\| &= \|(-3, -3, 3)\| \\
&= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{27} \\
&= 3\sqrt{3} \\
&= | - 3|\|v\|.
\end{aligned}$$

Un vector $v$ se denomina **unitario** si $\|v\| = 1$. Observemos que si $v \neq 0$ entonces el vector

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección de $v$. El proceso por el cual hallamos $\hat{v}$ se denomina normalización de $v$.

**Ejemplo 2.3.5.** *Consideremos el vector* $v = (2, -3, 8, -5)$. *Entonces la normalización de* $v$ *nos arroja el siguiente vector*

$$\hat{v} = \left( \frac{2}{\sqrt{102}}, -\frac{3}{\sqrt{102}}, \frac{8}{\sqrt{102}}, -\frac{5}{\sqrt{102}} \right).$$

## 2.4 Producto interno o escalar

**Ejemplo 2.4.1.** *Supongamos que una fabrica produce cuatro artículos y que su demanda esta dada por el vector demanda* $d = (30, 20, 40, 10)$. *El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dada por el vector precio* $p = (\$20, \$15, \$18, \$40)$. *Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?*

**Solución.** Podemos poner la información en una tabla

| Artículo | Demanda | Precio | Recibe |
|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 20 | 600 |
| 2 | 20 | 15 | 300 |
| 3 | 40 | 18 | 720 |
| 4 | 10 | 40 | 400 |
| | | Total | 2020 |

Observemos que lo que hicimos fue multiplicar la $i-$esima coordenada del vector demanda por $i-$esima coordenada del vector precio y luego sumamos, es decir

$$30 \cdot 20 + 20 \cdot 15 + 40 \cdot 18 + 10 \cdot 40 = 2020.$$

**Definición 2.4.2.**

Sean $u = (u_1, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, \dots, v_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$. Definimos el **producto interno o escalar** de $u$ y $v$ de la siguiente manera

$$u \cdot v := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Observemos que para poder realizar el producto interno entre dos vectores $u$ y $v$ es necesario que $u$ y $v$ tengan la misma cantidad de coordenadas.

En el caso que $u$ y $v$ son dos vectores columnas que poseen las misma cantidad de coordenadas definimos el producto escalar entre $u$ y $v$ de la siguiente manera

$$u \cdot v := u^t \cdot v^t.$$

Por ultimo en el caso que $u = (u_1, \dots, u_n)$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, definimos el producto escalar entre $u$ y $v$ de la siguiente manera

$$u \cdot v = (u_1, \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

**Teorema 2.4.3.**

Sean $u, v, w$ tres vectores en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces

(I) $u \cdot 0 = 0$;

(II) $u \cdot v = v \cdot u$;

(III) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;

(IV) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$;

(V) $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0$ si solo si $u = 0$.

**Observación 2.4.4.**

1. Para todo vector $u$ en $\mathbb{R}^n$ tenemos que
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$
2. $u \cdot v = 0$ **no implica que** $u = 0$ **o que** $v = 0$. Por ejemplo
$$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0.$$

Ahora mostraremos una de las desigualdades fundamentales en este campo.

**Teorema 2.4.5** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|.$$

*Demostración.* En el caso que $u$ o $v$ son el vector cero tenemos que $|u \cdot v| = 0 = \|u\|\|v\|$.

Ahora supongamos que $u$ y $v$ son distintas del vector nulo. Entonces $\|u\| \neq 0$ y $\|v\| \neq 0$ y por lo tanto podemos normalizar $u$ y $v$. Sean

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|} \quad \text{y} \quad \hat{v} = \frac{v}{\|v\|}.$$

Entonces

$$|\hat{u} \cdot \hat{v}| = \left| \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \hat{v}_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\hat{u}_i \hat{v}_i|.$$

Ahora recodamos una propiedad de los números reales: si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Entonces, como $\hat{u}_i$ y $\hat{v}_i$ son números reales, resulta que

$$|\hat{u} \cdot \hat{v}| \leq \sum_{i=1}^{n} |\hat{u}_i \hat{v}_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{u}_i^2 + \hat{v}_i^2}{2} = \frac{\|\hat{u}\|}{2} + \frac{\|\hat{v}\|}{2} = 1.$$

Como $\|\hat{u}\| = \|\hat{v}\| = 1$ resulta que

$$|\hat{u} \cdot \hat{v}| \leq 1.$$

Por otro lado

$$|\hat{u} \cdot \hat{v}| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|}.$$

Entonces

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

quera lo que queríamos ver. □

Gracias a esta desigualdad, podemos probar la desigualdad triangular para la norma.

**Teorema 2.4.6** (Desigualdad triangular)**.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

*Demostración.* Sean $u$ y $v$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que $2u \cdot v \leq 2\|u\| \|v\|$, y entonces

$$\|u + v\|^2 \leq= \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Por lo tanto
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$
Lo que concluye la demostración. $\square$

Luego hemos visto que la norma de vectores se tienen las siguientes propiedades.

**Propiedad 2.4.7.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

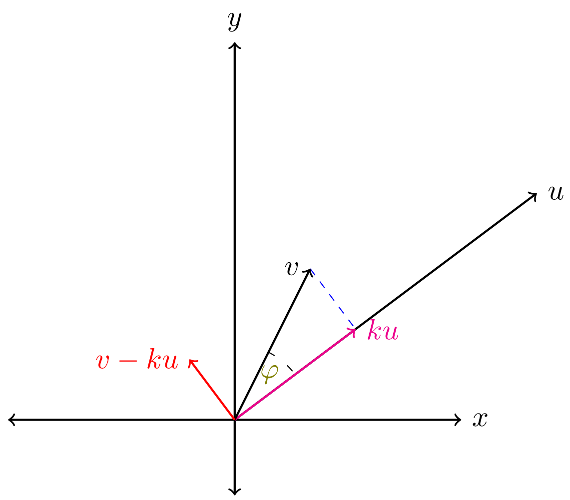
1. $\|v\| = 0$ si y solo si $v$ es el vector nulo;
2. $\|kv\| = |k|\|v\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Una aplicación interesante del producto escalar es que nos permite calcular el coseno del ángulo entre dos vectores no nulos.

**Teorema 2.4.8.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores no nulos. Si $\varphi$ es el ángulo entre ellos entonces
$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

*Demostración.* Sean $u$ y $v$ dos vectores.



Entonces

$$0 = (v - ku) \cdot u = v \cdot u - k(u \cdot u)$$

es decir

$$k = \frac{v \cdot u}{\|u\|^2}.$$

Entonces

$$\cos(\varphi) = \frac{k\|u\|}{\|v\|} = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

□

Observar que Si $\varphi$ es el ángulo entre dos vectores no nulos entonces $\varphi \in (0, \pi)$. Por lo tanto, $\arccos(\cos(\varphi)) = \varphi$.

**Ejemplo 2.4.9.** *Encuentre el ángulo entre los* $u = (2, 3)$ *y* $v = (-7, 1)$.

**Solución.** Sea $\varphi$ el ángulo entre $u$ y $v$, entonces

$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}}.$$

Entonces

$$\varphi = \arccos(\cos(\varphi)) = \arccos\left(\frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}}\right) \approx 2.0169 \text{ (radianes)}.$$

Teniendo en cuenta nuestro último teorema, la siguiente definición es natural.

**Definición 2.4.10.**

Sean $u$ y $v$ dos vectores no nulos. Decimos que $u$ y $v$ son ortogonales (o perpendiculares) si $u \cdot v = 0$ (es decir el ángulo entre ellos es $\pi/2$). Si además $\|u\| = \|v\| = 1$, decimos que $u$ y $v$ son ortonormales.

**Ejemplo 2.4.11.** *Mostrar que los siguientes vectores son ortogonales* $u = (1, -2, 3, -4)$ *y* $w = (5, -4, 5, 7)$.

**Solución.** Lo único que tenemos que hacer es calcular $u \cdot w$.

$$u \cdot w = 1 \cdot 5 + (-2)(-4) + 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 7 = 5 + 8 + 15 - 28 = 0.$$

Luego $u$ y $w$ son ortogonales.

## 2.5 Distancia entre vectores o puntos

Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$. Definimos la **distancia** entre $u$ y $v$ de la siguiente manera
$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

**Ejemplo 2.5.1.** *Calcular la distancia entre los siguientes dos vectores* $u = (1, 5, 2)$ *y* $v = (-4, 3, 7)$.

**Solución.** Comencemos por observar que

$$u - v = (1 - (-4), 5 - 3, 2 - 7) = (5, 2, -5).$$

Entonces
$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{54}.$$

Utilizando las propiedades vistas para la norma de vectores tenemos las siguientes propiedades.

**Propiedad 2.5.2.**

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ vectores y $k$ un escalar. Entonces

(I) $d(u, v) = d(v, u)$;

(II) $d(u, v) \geq 0$;

(III) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;

(IV) $d(ku, kv) = |k|d(u, v)$;

(V) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(v, w)$.

Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$ tenemos asociados dos vectores $u = P$ y $v = Q$, Definimos la **distancia** entre $P$ y $Q$ de la siguiente manera

$$d(P, Q) = \|u - v\|.$$

## 2.6 Espacios vectoriales

A continuación vamos a generalizar algunos de los resultados que vimos hasta el momento.

**Definición 2.6.1.**

Un espacio vectorial es un conjunto de elementos $\mathcal{V}$ para el cual existen dos operaciones una llamada suma + y la otra llamada producto por escalares, las cuales cumplen las siguientes propiedades:

(I) Para todo $u, v \in \mathcal{V}$ tenemos que $u + v \in \mathcal{V}$ y $u + v = v + u$;

(II) Para todo $u, v, w \in \mathcal{V}$ tenemos que $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(III) Existe un único elemento neutro para la suma en $\mathcal{V}$ denotado por 0. Es decir que $v + 0 = v$ para todo $v \in \mathcal{V}$;

(IV) Para cada elemento $v \in \mathcal{V}$ existe un elemento $-v \in \mathcal{V}$ tal que $v + (-v) = 0$;

(V) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathcal{V}$ tenemos que $\alpha v \in \mathcal{V}$ y $\alpha v = v\alpha$;

(VI) Para todo $v \in \mathcal{V}$ $1v = v$, y $0v = 0$;

(VII) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathcal{V}$ tenemos que

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \quad \text{y} \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v;$$

(VIII) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathcal{V}$ tenemos que

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \beta v.$$

**Ejemplo 2.6.2.** *Por lo que vimos $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial. No es complicado ver que el conjunto de todos los polinomios también resulta ser un espacio vectorial.*

**Definición 2.6.3.**

Decimos que une elemento $u$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es una combinación lineal de los elementos $v_1, \ldots, v_n$ en $\mathcal{V}$ si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i.$$

**Ejemplo 2.6.4.** *Veamos que el vector* $(1, 0, 0)$ *es una combinación lineal de los vectores* $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ *y* $(1, 1, -1)$. *Es decir queremos ver que existen* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$(1, 0, 0) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 1) = (a + c, b + c, a + b - c)$$

*es decir*

$$\begin{aligned}
1 &= a + c \\
0 &= b + c \Rightarrow b = -c \\
0 &= a + b - c \Rightarrow a = 2c.
\end{aligned}$$

*Entonces* $1 = 3c$ *y por lo tanto* $a = 2/3$ $b = -1/3$ *y* $c = 1/3$ *Es decir*

$$(1,0,0) = \frac{2}{3}(1,0,1) - \frac{1}{3}(0,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,-1).$$

**Definición 2.6.5.**

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y $C = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathcal{V}$ $(m \geq 2)$. Decimos que $C$ es **linealmente dependientes** si uno de los elementos de $C$ es una combinación lineal de los demás.

**Ejemplo 2.6.6.** *El conjunto de vectores* $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$ *es linealmente dependiente ya que el* $(1,0,0)$ *es una combinación lineal de los vectores* $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ *y* $(1,1,-1)$.

**Definición 2.6.7.**

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y $C = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathcal{V}$ $(m \geq 2)$. Decimos que $C$ es **linealmente independientes** si la única solución de

$$\sum_{i=1}^{m} k_i v_i = 0$$

es $k_1 = \cdots = k_m = 0$.

**Ejemplo 2.6.8.** *¿Los vectores* $(1,2)$ *y* $(3,4)$ *son linealmente independientes?*

**Solución.** Supongamos que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = \alpha(1,2) + \beta(3,4) = (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta).$$

entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha + 3\beta, \\
0 &= 2\alpha + 4\beta.
\end{aligned}$$

De lo que se deduce que

$$\alpha = -3\beta,$$
$$\alpha = 2\beta.$$

Es decir $-3\beta = 2\beta$, entonces $5\beta = 0$, es decir $\beta = 0$. Lo que implica $\alpha = 0$.

Hemos mostrado que

$$0 = \alpha(1,2) + \beta(3,4) = (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta).$$

implica $\alpha = \beta = 0$. Por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

**Definición 2.6.9.**

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathcal{V}$. Decimos que $B$ es **base** de $\mathcal{V}$ si $B$ es linealmente independiente y cualquier elemento de $\mathcal{V}$ es una combinación lineal de los elementos de $B$.

**Ejemplo 2.6.10.** *Mostrar que* $\{(1,2),(3,4)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$.

**Solución.** Ya probamos que el conjunto $\{(1,2),(3,4)\}$ es linealmente independiente. Nos falta ver que cualquier vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de $(1,2)$ y $(3,4)$ es decir queremos ver si para todo vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$v = (v_1, v_2) = \alpha(1,2) + \beta(3,4) = (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta)$$

entonces

$$v_1 = \alpha + 3\beta$$
$$v_2 = 2\alpha + 4\beta \Rightarrow \frac{v_2}{2} = \alpha + 2\beta$$

Por lo tanto

$$v_1 = \alpha + 3\beta = \alpha + 2\beta + \beta = v_2 + \beta \Rightarrow \beta = v_1 - v_2.$$

Por otro lado

$$\frac{v_2}{2} = \alpha + 2\beta = \alpha + 2v_1 - 2v_2 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}v_2 - 2v_1.$$

Lo que nos dice que cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ resulta ser una combinación lineal de $(1,2)$ y $(3,4)$.

Observación si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial que posee una base $B$ de $k-$elementos entonces cualquier subconjunto de $\mathcal{V}$ de mas de $k-$elemento es linealmente dependiente.

**Definición 2.6.11.**

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y $B$ una base de $\mathcal{V}$ de $k-$elementos. Decimos que $k$ es la dimensión de $\mathcal{V}$ y notamos $\dim(V) = k$. .

**Ejemplo 2.6.12.** $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. *No es difícil ver que*

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

*es una base de* $\mathbb{R}^n$. *Esta base se suele denominar* **base canónica** *de* $\mathbb{R}^n$.

**Observación 2.6.13.**

Un espacio tiene mas de una base. Por ejemplo

$$\begin{aligned}&\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}\\&\{(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}\\&\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}\end{aligned}$$

son 3 bases distintas de $\mathbb{R}^3$

**Definición 2.6.14.**

Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $B$ una base de $\mathcal{V}$ de $k-$elementos y $v \in \mathcal{V}$. Decimos que $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ son las **coordenadas de** $v$ **en la base** $B$ si

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

**Notación 2.2.**

$$[v]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

**Ejemplo 2.6.15.** *Mostrar que* $B = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$. *Como la dimensión de* $\mathbb{R}^3$ *es 3 alcanza con ver que* $B$ *es un conjunto linealmente independiente.*

**Solución.** Veamos que $B$ es una base. Comencemos viendo que $B$ es linealmente independiente. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = a(1, -1, 0) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) = (a + b, -a + b + c, c)$$

entonces

$$\begin{aligned}0 =&a+b \Rightarrow a=-b,\\ 0 =&-a+b+c \Rightarrow a=b+c,\\ 0 =&c.\end{aligned}$$

Entonces

$$a=-b \quad \text{y} \quad a=b \Rightarrow a=-a \Rightarrow a=0 \Rightarrow b=0.$$

Por lo tanto $a=b=0$, lo que implica que $B$ es un conjunto linealmente independiente.

Para concluir que $B$ es una base de $\mathbb{R}^3$ basta con observar que $B$ es un conjunto de 3 elementos linealmente independiente y que $\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

Buscamos ahora las coordenadas de $v=(5,3,4)$ en la base $B$. Es decir busco $\alpha,\beta,\gamma$ escalares tales que

$$(5,3,4)=\alpha(1,-1,0)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,1,1)=(\alpha+\beta,-\alpha+\beta+\gamma,\gamma).$$

Entonces

$$\begin{aligned}5 =&\alpha+\beta;\\ 3 =&-\alpha+\beta+\gamma \Rightarrow \beta=3+\alpha-\gamma;\\ 4 =&\gamma.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\beta =&\alpha-1\\ 5 =&\alpha+\beta=2\alpha-1 \Rightarrow \alpha=3 \Rightarrow b=2.\end{aligned}$$

Luego las coordenadas de $v$ en la base $B$ son $(3,2,4)$.

**Ejemplo 2.6.16.** *Sean*

$$B=\{(1,0,0),(0,-1,1),(2,-1,-4)\} \text{ y } B'=\{(0,1,2),(3,-4,-5),(0,1,0)\}.$$

*Hallen dos vectores linelmente independientes $v,w$ tales que $[v]_B=[v]_{B'}$ y $[w]_B=[w]_{B'}$.*

**Solución.** Comencemos buscando los vectores $v$ que tienen la mismas coordenadas en la dos bases. Buscamos $\alpha,\beta$ y $\gamma$ tales que

$$\alpha(1,0,0)+\beta(0,-1,1)+\gamma(2,-1,-4)=\alpha(0,1,2)+\beta(3,-4,-5)+\gamma(0,1,0)$$
$$(\alpha+2\gamma,-\beta-\gamma,\beta-4\gamma)=(3\beta,\alpha-4\beta+\gamma,2\alpha-5\beta)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha + 2\gamma = 3\beta &\Rightarrow \alpha = 3\beta - 2\gamma, \\
-\beta - \gamma = \alpha - 4\beta + \gamma &\Rightarrow \alpha = 3\beta - 2\gamma, \\
\beta - 4\gamma = 2\alpha - 5\beta &\Rightarrow \alpha = 3\beta - 2\gamma.
\end{aligned}$$

Entonces $[v]_B = [v]_{B'} = (3\beta - 2\gamma, \beta, \gamma)$.

Dos posibilidades diferentes son $[v]_B = [v]_{B'} = (3, 1, 0)$ y $[w]_B = [w]_{B'} = (-2, 0, 1)$. Es decir

$$\begin{aligned}
v &= (3, -1, 1) \\
w &= (0, -1, -4).
\end{aligned}$$

Observemos que $v$ y $w$ son linealmente independientes porque $v$ tiene todas sus coordenadas distintas de cero mientras que la primera coordenada de $w$ es 0.

## 2.7 Subespacios vectoriales

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial. Un **subespacios** de $\mathcal{V}$ es un subconjunto no vacío $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ que resultan espacio vectorial con las mismas operaciones suma y multiplicación por un escalar definidas en $\mathcal{V}$.

**Teorema 2.7.1.**

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ es un subespacio si y solo si

(i) Es cerrado para la suma: si $v, w \in \mathcal{W}$ entonces $v + w \in \mathcal{W}$;

(ii) Es cerrado para la multiplicación por escalares: si $w \in \mathcal{W}$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $kw \in \mathcal{W}$.

**Ejemplo 2.7.2.** *Mostrar que* $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}^3$. *Calcular su dimensión.*

**Solución.** Comencemos observando que $0 \in \mathcal{W}$.

Veamos que es cerrado para la suma. Si $v, w \in \mathcal{W}$ entonces su segunda coordenada es cero lo que implica que $v + w$ tiene segunda coordenada 0 y por lo tanto $v + w \in \mathcal{W}$.

Por ultimo tenemos que ver que es cerrado para el producto. Si $v \in \mathcal{W}$ entonces la segunda coordenada de $v$ es 0 y entonces para todo escalar $k$ tenemos que la segunda coordenada de $kv$ es cero. Por lo tanto, $kv \in \mathcal{W}$ para todo $v \in \mathcal{W}$ y $k \in \mathbb{R}$.

Por ultimo, si $v \in \mathcal{W}$ entonces

$$v = (x, 0, y) = x(1, 0, 0) + y(0, 0, 1).$$

Es decir que todo elemento de $\mathcal{W}$ es una combinación lineal de $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Como estos dos vectores son linealmente independientes resulta que $B = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathcal{W}$. Por lo tanto $\dim(\mathcal{W}) = 2$

**Ejemplo 2.7.3.** *Mostrar que* $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 2\}$ *no es un subespacio de* $\mathbb{R}^3$.

**Solución.** El conjunto $\mathcal{W}$ no es un subespacio ya que no es cerrado para la suma, por ejemplo $u = (0, 2, 0)$ y $v = (0, 2, 1)$ son dos elementos de $\mathcal{W}$ pero$u + v = (0, 4, 1)$ no es un elemento de $A$ puesto que la segunda coordenada de $u + v$ es 4.

**Notación 2.3.**

Sea $\mathcal{W}$ un subespasio de $\mathbb{R}^n$. Si $\dim(\mathcal{W}) = 1$ decimos que $\mathcal{W}$ es una recta; si $\dim(\mathcal{W}) = 2$ decimos que $\mathcal{W}$ es un plano; si $2 < \dim(\mathcal{W}) = m$ decimos que $\mathcal{W}$ es un hiperplano de dimensión $m$.

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ tal que por lo menos uno de los elementos de $S$ es diferente de 0. Definimos el espacio generado por $S$ como

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i v_i \colon k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

y se dice que $v_1, \ldots, v_m$ son los generadores del espacio.

Observar que $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ y que

$$\dim(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) \leq m.$$

Más aun,

$$\dim(\langle v_1, \ldots, v_m \rangle) = m$$

si y solo si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son linealmente independientes.

# Capítulo 3

# Matrices

## 3.1 Definición

**Ejemplo 3.1.1.** *Consideremos un inventario de camisetas en un negocio de ropa. Se tienen camisetas de tres diferentes tamaños y cinco colores. Cada noche el encargado del local prepara un inventario de las existencias. Un párrafo de dicho inventario podría tener la forma siguiente: "Camisetas: Nueve amarillas de talla S y cinco amarillas de talla M; ocho S de color verde y seis M verdes; las de tamaño L casi se han agotado pues sólo quedan tres rojas, una rosa y dos negras; también tenemos tres M rosas, cinco M rojas, una M negra y siete S negras..."*.

*Esta información se puede almacenar de la siguiente manera*

| | *Amarillo* | *Negro* | *Rojo* | *Rosa* | *Verde* |
|---|---|---|---|---|---|
| *S* | *9* | *7* | *0* | *0* | *8* |
| *M* | *5* | *1* | *5* | *3* | *6* |
| *L* | *0* | *2* | *3* | *1* | *0* |

**Definición 3.1.2.**

Una **matriz** $A$ es un tablero rectangular de escalares $a_{ij}$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

También se suele denotar de la siguiente manera $A = (a_{ij})_{n\times m}$. Los $n$ $m-$vectores fila

$$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m}), (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m}), \ldots, (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nm}).$$

son las filas de la matriz de $A$. Los $m$ $n-$vectores columnas

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

son las columnas de la matriz de $A$.

Los elementos $a_{ij}$ se llaman **elemento** (o componente) $ij$ y aparecen en la $i-$esima fila y en la $j-$esima columna.

El orden de una matriz está dado por el número de filas y el número de columnas. Una matriz de $n-$filas y $m-$columnas, se denomina matriz de $n \times m$.

**Ejemplo 3.1.3.** *La siguiente es una matriz de* $2 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 10 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Notación 3.1.**

El conjunto de todas las matrices de $n \times m$ se denota por

$$\mathbb{R}^{n \times m}.$$

Con esta notación podemos pensar a los $n-$vectores filas como una matriz de $1 \times n$ y a los $n-$vectores columnas son matrices de $n \times 1$.

**Definición 3.1.4.**

Diremos que dos matrices $A$ y $B$ son iguales, si tienen la misma cantidad de filas y columnas y si sus elementos correspondientes coinciden. En el caso que $A$ y $B$ sean iguales notaremos $A = B$.

**Ejemplo 3.1.5.** *La afirmación*

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

*es equivalente a*

$$\begin{aligned} x+y &= 3, & 2z+w &= 5, \\ x-y &= 1, & z-w &= 4. \end{aligned}$$

## 3.2 Suma de matrices y producto por un escalar

Sean $A$ y $B$ dos matrices de $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

La **suma** de $A$ y $B$ se define de la siguiente manera

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}.$$

El **producto de un escalar** $k$ y una matriz $A$, se define de la siguiente manera

$$kA := \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

Observemos que $A + B$ y $kB$ son matrices de $n \times m$. Además definimos

$$-A = -1A \quad \text{y} \quad A - B = A + (-B).$$

**Ejemplo 3.2.1.** *Hallar $A + B$, $2A$ y $2A - 3B$, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** Comencemos por calcular $A + B$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & (2)\cdot(-2) & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix}$$

Por ultimo

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz de $n \times m$ cuyos elementos son todos nulos se conoce como la matriz nula y se denota por $0_{n,m}$ (o por 0). Obviamente

$$A + 0 = 0 + A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

**Propiedad 3.2.2.**

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

(I) $A + B = B + A$;

(II) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(III) $A + 0 = A$ y $A + (-A) = 0$;

(IV) $1A = A$ y $0A = 0$;

(V) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(VI) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(VII) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Entonces $\mathbb{R}^{n\times m}$ es una espacio vectorial. El conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una bases de $\mathbb{R}^{n\times m}$. $B$ se denomina la **base canónica** de $\mathbb{R}^{n\times m}$.

**Observación 3.2.3.**

$$\dim(\mathbb{R}^{n\times m}) = n \cdot m.$$

## 3.3 Producto de matrices

Gracias al producto interno entre vectores, tenemos definido un producto para $m-$vectores fila (matriz de $1 \times m$) por un $m-$ vector columna

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 + 6 \cdot 2 = 18.$$

Vamos a utilizar esta herramienta para definir el producto entre matrices.

**Definición 3.3.1.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Definimos el **producto entre $A$ y $B$** como la matriz de $n \times q$ cuya entrada $ij$ se obtiene multiplicando la $i-$ésima fila de A por la $j-$ésima columna de $B$.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Si denotamos con $A_i$ a la $i-$ésima fila de $A$ y con $B^j$ a la $j-$ésima columna de $A$ tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^q \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n \cdot B^1 & A_n \cdot B^2 & \cdots & A_n \cdot B^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times q}.$$

Observemos que

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

**Observación 3.3.2.**

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Entonces $AB$ esta definido solo en el caso que $m = p$.

**Ejemplo 3.3.3.** *Calcular $AB$ y $BA$ (siempre que sea posible) en los siguientes casos*

*(a)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

*(b)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

*(c)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

**Solución.**

(a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & 14 \end{pmatrix}$

$BA$ no esta definida porque el número de columnas de $B$ es 3 y el número de columnas de $A$ es 2.

(b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}.$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$

Observemos que $AB \neq BA$ y por lo tanto el producto de matrices no es conmutativo.

(c) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 0.$

Esto muestra que $AB = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$.

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Observación 3.3.4.**

(I) El producto de matrices **no es conmutativo**, es decir $AB$ y $BA$ no necesariamente son iguales.

(II) $AB = 0$ **no implica** que $A = 0$ o que $B = 0$.

A continuación enumeramos las propiedades básicas del producto de matrices.

**Propiedad 3.3.5.**

(I) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$, entonces

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{Ley asociativa;}$$

(II) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$, entonces

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{Ley distributiva por izquierda;}$$

(III) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$, entonces

$$(A + B)C = AC + BC \quad \text{Ley distributiva por derecha;}$$

(IV) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

## 3.4 Matriz transpuesta

La **transpuesta** de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

es la matriz que se obtiene poniendo las filas de $A$ como columnas (respetando el orden)

$$A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

En otras palabra si $A$ es una matriz de $n \times m$ entonces $A^t$ es una matriz de $m \times n$ y $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

**Ejemplo 3.4.1.** *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *entonces* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**Propiedad 3.4.2.**

(I) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} (A+B)^t &= A^t + B^t, \\ (A^t)^t &= A, \\ (kA)^t &= kA^t. \end{aligned}$$

(II) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ entonces

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Una matriz que tiene la misma cantidad de filas que de columnas se denomina **matriz cuadrada**.

**Ejemplo 3.4.3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & e & 4 \end{pmatrix}$ *es una matriz cuadrada.*

Una matriz $A$ se denomina **simétrica** si $A^t = A$.

**Ejemplo 3.4.4.** *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *es simétrica.*

**Observación 3.4.5.**

Si $A$ es simétrica entonces es $A$ es una matriz cuadrada. Por lo tanto si $A$ no es cuadrada entonces no puede ser simétrica.

## 3.5 Sistemas Lineales

Con la notación matricial, el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned}$$

se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

se denomina la **matriz asociada** del sistema.

Mientras que la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

se denomina la **matriz ampliada** del sistema.

Dada una matriz $A$, el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ se denomina **sistema lineal homogéneo**.

**Teorema 3.5.1.**

Sean $v_1, \dots, v_n$ soluciones del sistema lineal homogéneo $Ax = 0$. Entonces todo $v \in \langle v_1, \dots v_n \rangle$ es también una solución de $Ax = 0$.

*Demostración.* Sea $v \in \langle v_1, \dots v_n \rangle$ entonces existe $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i.$$

Por lo tanto

$$Av = \sum_{i=1}^{n} k_i A v_i.$$

Por otro lado $Av_1 = \cdots = Av_n = 0$ por hipótesis, de lo que se deduce que

$$Av = 0,$$

es decir que $v$ es una solución del sistema homogéneo $Ax = 0$. $\square$

**Proposición 3.5.2.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. El conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo $Ax = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

*Demostración.* Tenemos que ver que $S = \{v \in \mathbb{R}^m \colon Av^t = 0\}$ es un subespacio.
*Primer paso.* Observar que $A0 = 0$ y por lo tanto $0 \in S$. Lo que implica que $S$ es no vacío.
*Segundo paso.* Veamos que $S$ es cerrado para la suma. Si $v$ y $w$ son dos elemento de $V$ entonces $Av^t = 0$ y $Aw^t = 0$. Por lo tanto $A(v+w)^t = A(v^t + w^t) = Av^t + Aw^t = 0$, lo que implica que $v + w \in S$, como queríamos ver.
*Tercer paso.* Veamos que $S$ es cerrado por la multiplicación por un escalar. Si $v \in S$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $A(kv^t) = k(Av^t) = k0 = 0$.

Luego, hemos probado que $S$ es un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^m$ que es cerrado para la suma y para el producto por escalares. Por lo tanto $S$ es un subespacio. $\square$

En el caso que el sistema no es homogéneo tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.3.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $v_0$ una solución de $Ax = b$ y $\mathcal{W}$ el espacio de soluciones de $Ax = 0$. Entonces $v$ es una solución de $Ax = b$ si y solo si existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $v = w + v_0$.

*Demostración.* Por el teorema previo, tenemos que si $w \in \mathcal{W}$ entonces $Aw = 0$. Por lo tanto si $v = w + v_0$ resulta que

$$Av = A(w + v_0) = Aw + Av_0 = 0 + b = b,$$

es decir $v$ es una solución de $Ax = b$.

Ahora supongamos que tenemos $v$ solución de $Ax = b$ y mostremos que existe $w \in \mathcal{W}$.

Observemos que

$$A(v - v_0) = Av - Av_0 = b - b = 0$$

entonces $w = v - v_0 \in \mathcal{W}$ y $v = v_0 + w$. □

**Teorema 3.5.4.**

Un sistema $Ax = b$ o no tiene soluciones o tiene una única solución o tiene infinitas soluciones.

*Demostración.* Nos alcanza con probar que si existen $u$ y $v$ dos soluciones distintas de $Ax = b$ entonces tengo infinitas soluciones.

Comencemos por observar que para todo $k \in \mathbb{R}$, $u + k(u - v)$ es solución de $Ax = b$.

$$\begin{aligned} A(u + k(u - v)) &= Au + A(k(u - v)) = b + k(A(u - v)) = b + k(Au - Av) \\ &= b + k(b - b) = b. \end{aligned}$$

Efectivamente $u + k(u - v)$ es una solución de $Ax = b$ para todo $\mathbb{R}$.

Para ver que son infinitas tenemos que mostrar que si $k_1 \neq k_2$ entonces

$$u + k_1(u - v) \neq u + k_2(u - v).$$

Supongamos que no, es decir que existen $k_1 \neq k_2$ tal que

$$u + k_1(u - v) = u + k_2(u - v).$$

Entonces

$$(k_1 - k_2)(u - v) = 0$$

y por lo tanto $u = v$ o $k_1 = k_2$ lo que es un absurdo.

La contradicción provino de suponer que existen $k_1 \neq k_2$ tal que

$$u + k_1(u - v) = u + k_2(u - v).$$

Luego no existen, es decir que $u + k(u - v)$ son todos distintos y por lo tantos son infinitos. □

Gracias a este ultimo resultado los sistemas de ecuaciones lineales se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden presentar:

- **Sistema compatible** si tiene solución, en este caso además puede distinguirse entre:
  - **Sistema compatible determinado** cuando tiene una única solución.
  - **Sistema compatible indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones.
- **Sistema incompatible** si no tiene solución.

## 3.6 Aplicaciones: Modelo de Leontief

Supongamos un sistema económico que tiene $n$ industrias y que posee dos tipos de demanda la externa y la interna. Por ejemplo si el sistema es un país la demanda externa puede provenir de otro país mientras que la demanda interna es la que se da entre las misma empresas del país.

Supongamos que $e_i$ representa la demanda externa ejercida sobre la $i-$ésima industria y que $a_{ij}$ representa la demanda interna que la $j-$ésima industria ejerce sobre la $i-$ésima. Mas concretamente $a_{ij}$ representa el número de unidades de producción de la industria $i$ que se necesitan para producir una unidad de la industria $j$. Notemos con $x_i$ la producción de la industria $i$ y supongamos que la producción de cada industria es igual a su demanda. En estas condiciones podemos construir el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned}
(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= e_1 \\
-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= e_2 \\
&\vdots \\
-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})x_n &= e_n.
\end{aligned}$$

Matricialmente nos que

$$\begin{pmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1-a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 3.6.1.** *El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico de tres industrias. Supongamos que las demandas externas en un sistema de tres industrias son 10, 25 y 20 respectivamente. Supongamos que*

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 0.20 & a_{12} = 0.50 & a_{13} = 0.15 \\ a_{21} = 0.40 & a_{22} = 0.10 & a_{23} = 0.30 \\ a_{31} = 0.25 & a_{32} = 0.50 & a_{33} = 0.15 \end{array}$$

*Matricialmente tenemos lo siguiente sistema*

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 & -0.15 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** Hallar la todas la soluciones del sistema Para resolverlo planteamos la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0.8 & -0.5 & -0.15 & 10 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 20 \end{array}\right).$$

Trabajamos con la filas de la matriz ampliada como si fueran la ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0.8 & -0.5 & -.15 & 10 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 20 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 4/5 & -1/2 & -3/20 & 10 \\ -2/5 & 9/10 & -3/10 & 25 \\ -1/4 & -1/2 & 17/20 & 20. \end{array}\right)$$

Observemos que trabajar con las ecuaciones es equivalente a trabajar con las filas de la matriz ampliada. Nuestro primer objetivo es poner un 1 en la posición 11 de la matriz ampliada y poner 0 en la posiciones 21 y 31.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4/5 & -1/2 & -3/20 & 10 \\ -2/5 & 9/10 & -3/10 & 25 \\ -1/4 & -1/2 & 17/20 & 20. \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{F3}=4F3]{\tilde{F1}=10F1;\tilde{F2}=10F2} \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & -5 & -3/2 & 100 \\ -4 & 9 & -3 & 250 \\ -1 & -2 & 17/5 & 80 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\tilde{F3}=F1]{\tilde{F1}=-F3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ -4 & 9 & -3 & 250 \\ 8 & -5 & -3/2 & 100 \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{F3}=F3-8F1]{\tilde{F2}=F2+4F1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 17 & -83/5 & -70 \\ 0 & -21 & 257/10 & 740 \end{array}\right).$$

Nuestro segundo objetivo es poner un uno en la posición 22 y un 0 en la posición 32 de la matriz ampliada. Para eso dividimos a la F3 por 21 y F2 por 17

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 17 & -83/5 & -70 \\ 0 & -21 & 257/10 & 740 \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{F3}=\frac{F3}{21}]{\tilde{F2}=\frac{F2}{17}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 1 & -83/85 & -70/17 \\ 0 & -1 & 257/210 & 740/21 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\tilde{F3}=F3+F2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 1 & -83/85 & -70/17 \\ 0 & 0 & 883/3570 & 1110/357 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\tilde{F3}=3570/883F3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 1 & -83/85 & -70/17 \\ 0 & 0 & 1 & 111100/883 \end{array}\right).$$

Esto nos dice que

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{111100}{883}, \\ x_2 - \frac{83}{85}x_3 &= -\frac{70}{17} \Rightarrow x_2 = \frac{104850}{883}, \\ x_1 + 2x_2 - \frac{17}{5}x_3 &= -80 \Rightarrow x_1 = \frac{97400}{883}. \end{aligned}$$

El metodo que utilizamos para resolver el sistema del ejemplo anterior se conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

## 3.7 Eliminación de Gauss-Jordan

Dos sistemas lineales se dicen **equivalentes** si sus conjuntos de soluciones son iguales.

**Ejemplo 3.7.1.** *Los siguientes sistemas son equivalentes*

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

*Es fácil ver que los dos sistemas tienen como solución el siguiente conjunto* $S = \{t(0,1,-1) \colon t \in \mathbb{R}\}$ *por ese motivo son equivalentes.*

**Proposición 3.7.2.**

Dado un sistema lineal de ecuaciones, los siguientes cambios en las ecuaciones dan lugar a sistemas equivalentes:

(I) Intercambiar dos ecuaciones de lugar;

(II) Multiplicar una ecuación por una constante no nula;

(III) Reemplazar una ecuación por ella misma más un múltiplo de otra.

**Observación 3.7.3.**

Sea $A$ la matriz ampliada de un sistema lineal $H$. Efectuar las operaciones de la proposición anterior sobre las ecuaciones de $H$ equivale a hacerlo sobre las filas de $A$.

Sea $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ una matriz. Decimos que $B$ es **escalonada** si $b_{11} = 1$ y $b_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

**Ejemplo 3.7.4.** *Las siguientes matrices son escalonadas:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 13 & 7 \\ 0 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 3.7.5.**

Dado un sistema lineal de $n$ ecuaciones con $m$ incógnitas, aplicando los cambios descriptos en la proposición anterior, puede obtenerse un sistema equivalente cuya matriz asociada es escalonada.

**Ejemplo 3.7.6.** *Resolver el siguiente sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5, \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

**Solución.** Comencemos por plantear la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array}\right).$$

Ahora, aplicamos el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{F3}=F3+F1]{\tilde{F2}=F2-2F1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\tilde{F3}=F3-F2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto nuestro sistema es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

La segunda ecuación nos dice que

$$x_2 = 7x_3 - 1.$$

Reemplazando en la primera ecuación tenemos que

$$2 = x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 = x_1 + 14x_3 - 2 - x_3 = x_1 + 13x_3 - 2$$

y por lo tanto

$$x_1 = -13x_3 + 4.$$

Entonces el conjunto de soluciones de nuestro sistema es

$$\begin{aligned} S &= \{(-13t + 4, 7t - 1, t) \colon t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(-13, 7, 1) + (4, -1, 0) \colon t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

## 3.8 Matrices Cuadradas

Decimos que una matriz es **cuadrada** si tiene las misma cantidad de columnas que de filas.

**Ejemplo 3.8.1.** *Las siguientes son matrices cuadradas.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 & -.15 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 \end{pmatrix}.$$

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definimos la **diagonal** de $A$, como el vector $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ y la **traza** de $A$, denotado $\operatorname{tr}(A)$, como el escalar

$$\operatorname{tr}(A) \coloneqq a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

**Ejemplo 3.8.2.** *Por ejemplo las matrices del ejemplo anterior tienen las siguientes trazas:*

$$\operatorname{tr}(A) = 1 + 4 = 5, \quad \operatorname{tr}(B) = 0.8 + 0.9 + 0.85 = 2.55.$$

Varios tipos particulares de matrices cuadradas que se utilizan frecuentemente en econometría.

- **Matrices simétricas**: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $A^t = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matrices indepotentes**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es indepotente si $A^2 = AA = A$.

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

- **Matrices nilpotentes**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k-\text{veces}} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  Si $A$ es nilpotente definimos el **orden de nilpotencia** como $\min\{k \in \mathbb{N} \colon A^k = 0\}$.

- **Matrices triangular superior**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matrices triangular inferior**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matrices diagonal**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- **Matrices escalar**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal tal que $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Observación 3.8.3.**

Observemos que,

- Toda matriz escalar es diagonal;
- Toda matriz diagonal es simétrica;
- La matriz nula es escalar y por lo tanto diagonal y simétrica.

- **Matriz identidad**: $I_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz escalar tal que $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$.

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Observación 3.8.4.**

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $AB$ y $BA$ están bien definidos;
- $AI_n = A = I_nA$, es decir, la matriz identidad es el neutro para el producto de matrices cuadradas.

**Definición 3.8.5.**

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice **inversible** (o invertible) si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$

La matriz $B$ de la definición es única. Habitualmente se denota $A^{-1} = B$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto de todas la matices inversibles en $\mathbb{R}^n$ se denota

$$GL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A \text{ es inversible}\}.$$

Una matriz cuadrada que no es inversible se llama **singular** y una matriz inversible se llama también **no singular**.

**Proposición 3.8.6.**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

- $I_n \in GL(n)$;
- Si $A \in GL(n)$ entonces $A^{-1} \in GL(n)$;
- Si $A, B \in GL(n)$ entonces $AB \in GL(n)$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- Si $A \in GL(n)$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ entonces el sistema $AX = B$ tiene una única solución ($X = A^{-1}B$).

**Ejemplo 3.8.7.** *Halle, si es posible $A^{-1}$ en cada uno de los siguientes casos*

*(a)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

*(b)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

**Solución.** En ambos casos, nos preguntamos si existe una matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

tal que

$$AB = I_3$$

es decir

$$\left( A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que se pueden leer como tres sistema diferentes

$$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si los tres sistemas tiene solución entonces la matriz $A$ es inversible.

Como los tres sistemas tienen como matriz asociada a la matriz $A$, en lugar de resolverlos por separados podemos resolverlos los tres al mismo tiempo considerando al siguiente matriz ampliada

$$\left( A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right).$$

*(a)* Comencemos con el primer ejemplo

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{F3}=F3-2F1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\tilde{F2}=-F3;\tilde{F3}=F2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\tilde{F3}=F3-2F2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\tilde{F2}=F2+F3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\tilde{F2}=F1-F2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Ejercicio para el lector, verificar que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*(b)* En el segundo caso sucede lo siguiente

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{F3}=F3+F1]{\tilde{F2}=F2-2F1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\tilde{F3}=F3-F2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

La tercer fila de la ultima matriz me indica que no existe solución. Por lo tanto en este caso $A$ es no inversible o singular.

¿Cuál es la diferencia entre los dos casos? En el primer caso las filas de $A$ son linealmente independientes (esto implica que $\{x\colon Ax = 0\} = \{0\}$) mientras que en el segundo las filas son linealmente dependientes (esto implica que $\{x\colon Ax = 0\}$ tiene infinitas soluciones).

## 3.9 Rango de una matriz

**Definición 3.9.1.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $F_1, \ldots, F_n$ las filas de $A$. El **rango fila** de $A$ es la dimensión del subespacio generado por las filas de $A$, es decir

$$\mathrm{rg}_F(A) = \dim(\langle F_1, \ldots, F_n\rangle).$$

**Definición 3.9.2.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $C_1, \ldots, C_m$ la filas de $A$. El **rango columna** de $A$ es la dimensión del subespacio generado por las columnas de $A$, es decir

$$\mathrm{rg}_C(A) = \dim(\langle C_1, \ldots, C_n\rangle).$$

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, entonces es fácil ver que

- $0 \le \mathrm{rg}_F(A) \le n$;

- $0 \leq \mathrm{rg}_C(A) \leq m$;
- $\mathrm{rg}_C(A) = rg_F(A^t)$.

**Ejemplo 3.9.3.** *Halle el rango fila y columna de las siguientes matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Solución.** Observemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\tilde{F4}=F4-3F1]{\tilde{F2}=F2-5F1;\tilde{F3}=F3-6F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -10 \\ 0 & -8 & -13 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\tilde{F4}=-\frac{F4}{5}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -10 \\ 0 & -8 & -13 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\tilde{F3}=F3+8F4]{\tilde{F2}=F2+9F4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\tilde{F3}=F3-5F4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta ultima matriz nos dice que la tercer fila es una combinación lineal de las otras 4 y que la filas 1,2 y 4 son linealmente independientes ya que la fila 1 tiene todas sus coordenadas diferentes de ceros, la fila 2 tiene dos ceros en la primera dos coordenadas mientras que la fila 4 tiene un cero en la primer coordenada. Por lo tanto

$$\mathrm{rg}_F(A) = 3.$$

Para calcular el rango columna calculamos el rango fila de la matriz $A^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\tilde{F3}=F3-3F1]{\tilde{F2}=F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & -9 & -8 & -5 \\ 0 & -10 & -13 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\tilde{F3}=F3-F2]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & -9 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\tilde{F2}=F2-9F3]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 37 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Razonando de manera similar a como lo hicimos en el paso anterior tenemos que

$$\mathrm{rg}_C(A) = 3.$$

En el ejemplo anterior el rango fila y el rango columna son iguales, esto no es casualidad.

**Teorema 3.9.4.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Entonces $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A)$.

**Definición 3.9.5.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Al número $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A)$ lo llamaremos **rango** de $A$ y lo denotaremos $\mathrm{rg}(A)$.

Observar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ entonces

$$0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq \min\{n, m\}.$$

Además

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t).$$

Se puede observar una relación entre el rango de una matriz $A$ y la dimensión del del sistema homogéneo que tiene como matriz asocia a $A$.

**Proposición 3.9.6.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $S = \{x \in \mathbb{R}^m \colon Ax = 0\}$ Entonces

$$\dim(S) = m - \mathrm{rg}(A).$$

En otras palabras, la dimensión del espacio de soluciones de un sistema lineal homogéneo es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes.

**Ejemplo 3.9.7.** *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Hallar*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon Ax = 0\} \text{ y } \mathrm{rg}(A).$$

**Solución.** Comencemos por resolver el sistema homogéneo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{F2}=(F2-2F1)/5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{F1}=F1-2F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el sistema $Ax = 0$ es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$S = \{(-t, t, t) \colon t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 1, 1) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces $\dim(S) = 1$. Luego por la proposición anterior tenemos que

$$\operatorname{rg}(A) = 3 - \dim(S) = 2.$$

**Ejemplo 3.9.8.** *Determinar una base para el espacio generado por los siguientes cuatro vectores*

$$v_1 = (1, 2, -3),\ v_2 = (-2, 0, 4),\ v_3 = (0, 4, -2), v_4 = (-2, -4, 6).$$

**Solución.** Si construimos un matriz que tenga a los vectores como fila

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix},$$

el rango de $A$ nos indicara cuantos de estos vectores son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\tilde{F4}=F4-F2+F3]{\tilde{F1}=2F1+F2-F3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces el $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\{v_2, v_3\}$ es una base. Observar que

$$v_1 = \frac{-v_2 + v_3}{2},$$
$$v_2 = v_2 - v_3.$$

**Proposición 3.9.9.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Entonces

$$\operatorname{rg}(AB) \leq \min\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\}.$$

*Demostración.* Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\},\ S' = \{y \in \mathbb{R}^p : By = 0\},$$

$$\tilde{S} = \{y \in \mathbb{R}^p : ABy = 0\}.$$

Comencemos mostrando que $S' \subset \tilde(S)$. Si tomamos $y \in S'$ entonces

$$By = 0,$$

si multiplicamos ambos lados de la igualdad por $A$ resulta que

$$A(By) = A0 = 0,$$

decir $ABy = 0$ y por lo tanto $y \in \tilde{S}$. Con esto queda probado que $S' \subset \tilde{S}$. Entonces $\dim(S') \leq \dim(\tilde{S})$.

Por otro lado, por la Proposición 3.9.6, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= m - \dim(S) \\ \mathrm{rg}(B) &= p - \dim(S') \\ \mathrm{rg}(AB) &= p - \dim(\tilde{S}). \end{aligned}$$

Como $\dim(S') \leq \dim(\tilde{S})$, resulta que

$$\mathrm{rg}(B) \geq \mathrm{rg}(AB).$$

Por otro lado, tenemos que $(AB)^t = B^tA^t$ y según lo que acabamos de probar tenemos que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t) \geq \mathrm{rg}(B^tA^t = \mathrm{rg}(AB)).$$

Es decir hemos probado que

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A) \quad \text{y} \quad \mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(B).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}.$$

□

Ahora vamos a relacionar la noción de matriz inversible con la de rango.

**Proposición 3.9.10.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $A$ es inversible si y solo si $\mathrm{rg}(A) = n$.

El próximo resultado nos indica que el rango no se altera por el producto de una matriz inversible.

**Teorema 3.9.11.**

Sen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in GL(n)$ y $D \in GL(m)$. Entonces

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(CA) = \mathrm{rg}(AD) = \mathrm{rg}(CAD).$$

# Capítulo 4

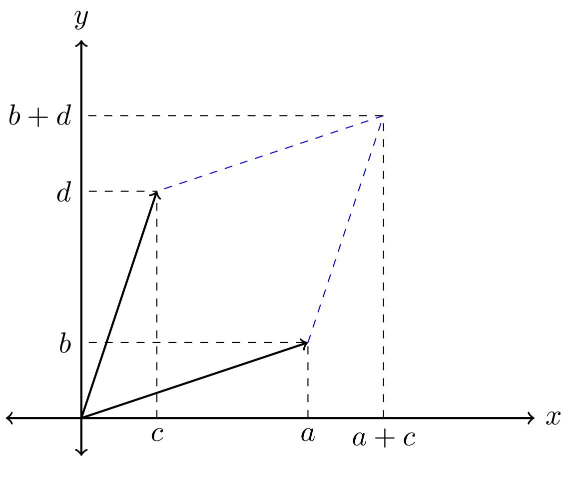
# Determinante

## 4.1 Matrices de $2 \times 2$. Idea geométrica.

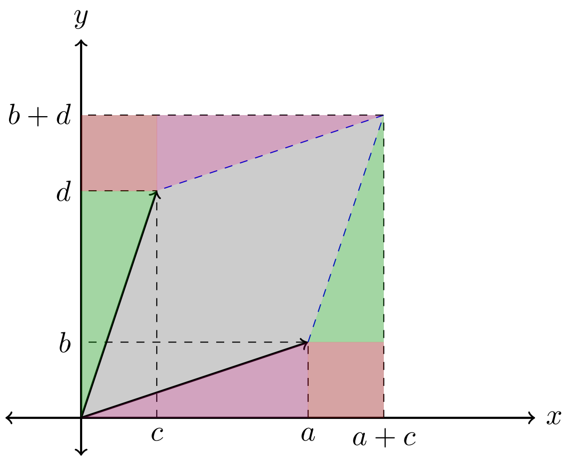
Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el $\mathrm{rg}(A) = 2$. Entonces los vectores filas generan un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$.




Calculemos el área de este paralelogramos. Para el área del rectángulo de base $(a+c)$ y altura $(b+d)$ le restamos el área de la figuras geométricas que están entre el rectángulo y el paralelogramo.




Área del paralelogramo$= (a+c)(b+d) - ab - 2cb - cd = ad - cb$

Vamos a definir el determinante de $A$ como el área del paralelogramo que forman sus filas.

**Definición 4.1.1.**

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Definimos el determinante de $A$ de la siguiente manera

$$\det(A) = ad - bc.$$

**Ejemplo 4.1.2.** *Calcular los determinantes de las siguientes matrices.*

*(a)* $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

*(b)* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**Solución.** Comencemos por el determinante de $A$.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 0.$$

Esto nos dice que las filas de $A$ no forman un paralelogramo, esto implica que son linealmente dependientes. Por lo tanto el $\mathrm{rg}(A) < 2$ y entonces $A$ no es inversible.

En el caso de $B$ tenemos lo siguiente

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

En este caso la filas de $B$ si forman un paralelogramo y por lo tanto $\mathrm{rg}(B) = 2$. Entonces podemos concluir que $B$ es inversible.

Entonces el determinante nos da otra manera de decidir si una matriz es o no inversible.

**Teorema 4.1.3.**

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(I) Entonces $A$ es inversible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

(II) Si $\det(A) \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 4.1.4.** *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. *Calcule* $A^{-1}$ *si existe.*

**Solución.** Comencemos calculando el determinante de $A$.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - (-4) \cdot 1 = 10.$$

Entonces $A$ es inversible. Gracias al último teorema tenemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Observación 4.1.5.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entones

$$A \in GL(2) \iff \mathrm{rg}(A) = 2 \iff \det(A) \neq 0.$$

## 4.2 Matrices de $n \times n$

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Denotamos por $M_{ij}$ la submatriz de $A$ que se obtiene suprimiendo su $i-$ésima fila y $j-$ésima columna de $A$. $M_{ij}$ se llama la **menor** $ij$ de $A$. Observar que $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

**Ejemplo 4.2.1.** *Por ejemplo si*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

*Entonces*

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$
$$M_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$
$$M_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad M_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definición 4.2.2.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Definimos el **determinante** de $A$ de la siguiente manera

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}).$$

**Ejemplo 4.2.3.** *Calculemos el determinante de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot(-19) - 30 + 4\cdot(-6 = \\ &= -38 - 30 - 24 \\ &= -92. \end{aligned}$$

**Observación 4.2.4.**

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{array}$$

**Ejemplo 4.2.5.** *Usemos esta formula para calcular el determinante de*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 - (2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 2) \\ &= 6 - (-6) \\ &= 12. \end{aligned}$$

Podemos extender esta definición a toda matriz de $n \times n$.

**Definición 4.2.6.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definimos el **determinante** de $A$ de la siguiente manera

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}).$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El **cofactor** $ij$ de A, denotado por $A_{ij}$, esta dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Entonces

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$$

**Ejemplo 4.2.7.** *Calculemos el determinante de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\det(A) =& \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
=& 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&+ 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -92 - 3 \cdot (-70) + 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-16) \\
&= 160.
\end{aligned}$$

En realidad uno puede elegir la fila que quiera, es decir

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

En este caso se dice que el determinante esta desarrollado por la fila $i-$ésima.

**Ejemplo 4.2.8.** *Calculemos el determinante de la matriz anterior por la fila 2.*

$$\begin{aligned}
\det(A) =& \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
=& -0 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&- 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -20 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 48 \\
&= 160.
\end{aligned}$$

También se puede desarrollar por columnas

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

En este caso se dice que el determinante esta desarrollado por la columna $j-$ésima.

**Ejemplo 4.2.9.** *Calculemos el determinante de la matriz anterior por la columna 1.*

$$\begin{aligned}
\det(A) =& \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
=& 1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&+ 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 3\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix} \\
&= -92 + 2\cdot 84 - 3\cdot(-28) \\
&= 160.
\end{aligned}$$

**Teorema 4.2.10.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $A$ es inversible si y solo si

$$\det(A) \neq 0.$$

**Ejemplo 4.2.11.** *Determinar para cada valor de $\alpha$ si el sistema es incompatible, o compatible.*

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 1, \\ x + y + \alpha z = 1, \\ \alpha x + y + z = 1. \end{cases}$$

**Solución.** La matriz asociada del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A$ es inversible entonces el sistema es compatible determinado. Calculemos el determinante de $A$,

$$\det(A) = 1 + 1 + \alpha^3 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha-1)^2(\alpha+2).$$

Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ entonces $\det(A) \neq 0$ y por lo tanto $A$ es inversible lo que implica que el sistema es compatible determinado.

Cuando $\alpha = 1$, solo tenemos una ecuación

$$x + y + z = 1.$$

Como solo tengo una ecuación y tres incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

Veamos que pasa cuando $\alpha$ es igual a $-2$. En este caso tenemos que

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ x + y - 2z = 1, \\ -2x + y + z = 1. \end{cases}$$

Planteemos la matriz ampliada del sistema y utilicemos el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{F3}=F3+2F2]{\tilde{F2}=F2-F1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\tilde{F3}=F3+F2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

La tercer fila de la ultima columna nos indica que el sistema es incompatible.

*Respuesta:* Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ entonces el sistema es compatible determinado, si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $\alpha = -2$ es incompatible.

**Ejemplo 4.2.12.** *Calcule el determinante de las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 57 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 8 & e & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1/100 & 0 & 0 \\ -\pi & e & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

**Solución.** En el primer caso desarrollamos los determinantes por la primer columna.

$$\begin{aligned}
det(A) = &\det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 4 & 57 & \pi & 0\\ 0 & 0 & 8 & e & 9\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\\
=& -2\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 57 & \pi & 0\\ 0 & 8 & e & 9\\ 0 & 0 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\\
=& -2\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix} 8 & e & 9\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\\
=& -2\cdot 4\cdot 8\cdot\det\begin{pmatrix} -3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\
=& -2\cdot 4\cdot 8\cdot(-3)\cdot 2.
\end{aligned}$$

Observar que es el producto de los elementos de la diagonal de $A$.

En el caso del determinante de $B$, si desarrollamos siempre por fila tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(B) = &\det\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 7 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 1/100 & 0 & 0\\ -\pi & e & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8\end{pmatrix}\\
=&100\cdot\det\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/100 & 0 & 0\\ e & 0 & 4 & 0\\ 0 & 6 & 7 & 8\end{pmatrix}\\
=&100\cdot 7\cdot\det\begin{pmatrix} 1/100 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 6 & 7 & 8\end{pmatrix}\\
=&100\cdot 7\cdot 1/100\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 7 & 8\end{pmatrix}\\
=&100\cdot 7\cdot 1/100\cdot 4\cdot 8.
\end{aligned}$$

Observemos que nuevamente es el producto de los elementos de la diagonal.

Lo que se puede probar es que siempre que tengamos una matriz triangular superior o inferior vamos a tener que el determinante es el producto de los elementos de la diagonal de la matriz.

**Teorema 4.2.13.**

Si $A = (a_i j)$ es una matriz cuadrada de $n \times n$ triangular superior o inferior entonces
$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

## 4.3 Propiedades del determinante

**Teorema 4.3.1.**

Sea $A$ y $B$ dos matrices de $n \times n$. Entonces
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

**Ejemplo 4.3.2.** *Sean*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
*Entonces*
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{pmatrix}.$$
*Luego* $\det(A) = 16$, $\det(B) = -8$ *y*
$$\det(AB) = -128 = 16 \cdot (-8) = \det(A)\det(B).$$

**Teorema 4.3.3.**

Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Si $A$ es inversible entonces
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

*Demostración.* Sabemos que
$$I_n = AA^{-1}.$$
Entonces
$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}),$$

y por lo tanto

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

□

**Teorema 4.3.4.**

Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det(A^t) = \det(A).$$

**Ejemplo 4.3.5.** *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

*tiene como matriz transpuesta*

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

*Se puede ver que* $\det(A^t) = 16 = \det(A)$.

**Propiedad 4.3.6.**

Si $A$ es una matriz de $n \times n$ con una fila o columna de ceros entonces $\det(A) = 0$.

**Ejemplo 4.3.7.** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

*Si desarrollamos el determinante de $A$ por la segunda fila tenemos que* $\det(A) = 0$. *Si desarrollamos el determinante de $B$ por la tercer columna tenemos que* $\det(B) = 0$.

**Propiedad 4.3.8.**

Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$, y $k \in \mathbb{R}$. Si $B = (b_{ij})$ un matriz de $n \times n$ tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq i_0 \\ ka_{i_0 j} & \text{si } i = i_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \neq j_0 \\ ka_{ij_0} & \text{si } j = j_0. \end{cases}$$

entonces $\det(B) = k\det(A)$.

Los que nos dice la propiedad anterior es lo siguiente

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i_0 1} & ka_{i_0 2} & \cdots & ka_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k\det(A),$$

y

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ka_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ka_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ka_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k\det(A).$$

**Ejemplo 4.3.9.** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \ y\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Como ya vimos* $\det(A) = 16$. *Calculemos el determinante de* $B$.

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 1 & 4\cdot \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = 64 = 4\cdot 16 = 4\det(A).$$

*Por ultimo calculemos el determinante de* $C$.

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot(-1) & 2 \\ 3 & 2\cdot 1 & 4 \\ 0 & 2\cdot(-2) & 5 \end{pmatrix} = 32 = 2\cdot\det(A).$$

**Propiedad 4.3.10.**

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matriz de $n \times n$, tales que

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq i_0 \\ \alpha_{i_0 j} & \text{si } i = i_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \neq j_0 \\ \alpha_{i j_0} & \text{si } j = j_0. \end{cases}$$

Si $C = (c_{ij})$ una matriz de $n \times n$ tal que

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq i_0 \\ a_{i_0 j} + \alpha_{i_0 j} & \text{si } i = i_0 \end{cases} \text{ o } c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \neq j_0 \\ a_{i j_0} + \alpha_{i j_0} & \text{si } j = j_0. \end{cases}$$

entonces $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

Ene este caso la propiedad anterior nos dice que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_0 1} + \alpha_{i_0 1} & a_{i_0 2} + \alpha_{i_0 2} & \cdots & a_{i_0 n} + \alpha_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 2} & \cdots & a_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_0 1} & \alpha_{i_0 2} & \cdots & \alpha_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

También resulta que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_0} + \alpha_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j_0} + \alpha_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj_0} + \alpha_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 4.3.11.** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

*y*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Entonces* $\det(A) = 16$, $\det(B) = 108$ *y* $\det(C) = 124 = \det(A) + \det(B)$.

**Propiedad 4.3.12.**

Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Si $B$ es una matriz de $n \times n$, que se obtiene intercambiando dos filas o columnas de $A$ entonces $\det(B) = -\det(A)$.

**Ejemplo 4.3.13.** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ y\ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Entonces* $\det(A) = 16$, $\det(B) = -16 = -\det(A)$ *y* $\det(C) = -16 = -\det(A)$.

**Propiedad 4.3.14.**

Si $A$ es una matriz de $n \times n$ que tiene dos filas o columnas iguales entonces $\det(A) = 0$.

*Demostración.* Supongamos que $A$ tiene dos filas iguales. Sea $B$ la matriz que se genera por intercambiar las dos filas que son iguales entonces $A = B$ y $\det(B) = -\det(A)$. Por lo tanto $\det(A) = -\det(A)$, lo que implica que $2\det(A) = 0$ y por lo tanto $\det(A) = 0$. $\square$

**Ejemplo 4.3.15.** *Por ejemplo un calculo directo nos muestra que*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Combinando las Propiedades 4.3.8 y 4.3.14 tenemos el siguiente resultado.

**Propiedad 4.3.16.**

Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Si una fila (o columna) de $A$ es un múltiplo escalar de otra fila (o columna) de $A$ entonces $\det(A) = 0$.

**Ejemplo 4.3.17.** *Por ejemplo un calculo directo nos muestra que*

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

**Propiedad 4.3.18.**

Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Si $B$ es una matriz de $n \times n$, que se obtiene sumando un múltiplo escalar de una fila (o columna) de $A$ a otra fila (o columna) entonces $\det(B) = \det(A)$

**Ejemplo 4.3.19.** *Calcular el determinante de las siguiente matriz utilizando las propiedades vistas*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** Para calcular el determinante utilizaremos las propiedades que hemos visto y la eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}
\det(A) &\overset{F3-2F1}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{F4-3F1}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{F3-5F2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{pmatrix} \overset{F4-7F2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{pmatrix} \\
&=1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -16 & -18 \\ 0 & -32 & -26 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} -16 & -18 \\ -32 & -26 \end{pmatrix} \\
&= -(-16) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -18 \\ 2 & -26 \end{pmatrix} = 16 \cdot (-2) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \\
&= -32 \cdot (13 - 2 \cdot 9) = -32 \cdot (-5) = 160.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.3.20.** *Calcular el determinante de las siguientes matrices utilizando las propiedades vistas*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** Como en el ejercicio anterior calcularemos el determinante utilizaremos las propiedades que hemos visto y la eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}
\det(A) &\overset{F5+F2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&\overset{F5+F4}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Como tenemos una fila de ceros, resulta que $\det(A) = 0$.

**Ejemplo 4.3.21.** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & e \\ c & 3 & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

*y*

$$B = \begin{pmatrix} 2a-d & a & 3-5a \\ 2b-e & b & 6-5b \\ 2c-f & c & 9-5c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

*Se sabe que* $\det(A) = 2$.

*(a) Calcular* $\det(B)$.

*(b) Calcular* $\det(\frac{1}{4}A^t B^{-1} A^5)$.

**Solución.** *(a)* Lo que tenemos que hacer es relacionar el determinante de $A$ con el de $B$, utilizando las propiedades del determinante.

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 2a & a & 3-5a \\ 2b & b & 6-5b \\ 2c & c & 9-5c \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -d & a & 3-5a \\ -e & b & 6-5b \\ -f & c & 9-5c \end{pmatrix}.$$

El primero de los dos determinante es 0 puesto que la columna 1 es un múltiplo de la columna 2. Entonces

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} -d & a & 3-5a \\ -e & b & 6-5b \\ -f & c & 9-5c \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -d & a & 3 \\ -e & b & 6 \\ -f & c & 9 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -d & a & -5a \\ -e & b & -5b \\ -f & c & -5c \end{pmatrix}.$$

En este caso el último determinante es 0 puesto que la columna 3 es un múltiplo de la columna 2.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det\begin{pmatrix} -d & a & 3 \\ -e & b & 6 \\ -f & c & 9 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} d & a & 3 \\ e & b & 6 \\ f & c & 9 \end{pmatrix} \text{ sacamos el } -1 \text{ de la } C1 \\
&= \det\begin{pmatrix} a & d & 3 \\ b & e & 6 \\ c & f & 9 \end{pmatrix} \text{ intercambiamos } C1 \text{ por } C2 \\
&= -\det\begin{pmatrix} a & 3 & d \\ b & 6 & e \\ c & 9 & f \end{pmatrix} \text{ intercambiamos } C2 \text{ por } C3 \\
&= -3\det\begin{pmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & e \\ c & 3 & f \end{pmatrix} \text{ extraemos un 3 de la } C3 \\
&= -3\det(A) = -6.
\end{aligned}$$

*(b)* Comencemos por sacar el $\frac{1}{4}$ del determinante

$$\det\left(\frac{1}{4}A^tB^{-1}A^5\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \det\left(A^tB^{-1}A^5\right).$$

Ahora usamos la propiedad que nos dice que el determinante se distribuye con respecto al producto de matrices.

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{1}{4}A^tB^{-1}A^5\right) &= \frac{1}{64}\det(A^t)\det(B^{-1})\det(A^5)\\ &= \frac{1}{64}\det(A^t)\det(B^{-1})(\det(A))^5.\end{aligned}$$

Ahora usamos que $\det(A^t) = \det(A)$ y que $\det(B^{-1}) = \dfrac{1}{\det(B)}$, entonces

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{1}{4}A^tB^{-1}A^5\right) &= \frac{1}{64}\det(A^t)\det(B^{-1})(\det(A))^5\\ &= \frac{1}{64}\frac{1}{\det(B)}(\det(A))^6\\ &= \frac{1}{64}\frac{1}{(-6)}2^6\\ &= -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

## 4.4 Matriz adjunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El cofactor $ij$ de A, denotado por $A_{ij}$, esta dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}),$$

donde $M_{ij}$ es la menor $ij$ de $A$, es decir la submatriz de $A$ que se obtiene suprimiendo su $i-$ésima fila y $j-$ésima fila de $A$.

La matriz

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

se denomina la **matriz adjunta** de $A$.

**Ejemplo 4.4.1.** *Calculemos la matriz adjunta de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

*Comencemos por calcular los cofactores.*

$$A_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 12, \qquad A_{12} = -\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = -3,$$
$$A_{13} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -3, \qquad A_{21} = -\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = -13,$$
$$A_{22} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 5, \qquad A_{23} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2,$$
$$A_{31} = \det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -7, \qquad A_{32} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$
$$A_{33} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

*Entonces la adjunta de $A$ es*

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Observemos que*

$$A\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Por otro lado* $\det(A) = 3$, *entonces*

$$A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_3.$$

**Teorema 4.4.2.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces

$$A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n.$$

Si $\det(A) \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A).$$

**Ejemplo 4.4.3.** *Si consideramos la matriz del ejercicio anterior tenemos que*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4.4.4** (Resumen: Matrices inversibles)**.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) $A$ es inversible;

(ii) La única solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ es la solución trivial (es decir $x = 0$);

(iii) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$;

(iv) La matriz $A$ es equivalente a la matriz identidad;

(v) El rango de $A$ es $n$;

(vi) $\det(A) \neq 0$.

# Capítulo 5

# Autovalores y autovectores

## 5.1 Cambio de base

**Ejemplo 5.1.1.** *Sean* $B = \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^2$. *Otra base posible de* $\mathbb{R}^2$ *es* $B' = \{v_1 = (1,3), v_2 = (-1,2)\}$.

*Dado* $w = (x, y)$ *un vector en* $\mathbb{R}^2$,

$$w = xu_1 + yu_2$$

*entonces*

$$[w]_B = (x, y).$$

*Como* $B'$ *también es una base de* $\mathbb{R}^2$ *existen* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

*entonces* $[w]_{B'} = (c_1, c_2)$.

*Por ejemplo*

$$\begin{aligned} u_1 = (1,0) &= \frac{2}{5}(1,3) - \frac{3}{5}(-1,2) = \frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2, \\ u_2 = (0,1) &= \frac{1}{5}(1,3) + \frac{1}{5}(-1,2) = \frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2. \end{aligned}$$

*Entonces*

$$\begin{aligned} w &= xu_1 + yu_2 \\ &= x\left(\frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2\right) + y\left(\frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2\right) \\ &= \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right)v_1 + \left(-\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y\right)v_2 \end{aligned}$$

*Por lo tanto*

$$[w]_{B'} = (c_1, c_2) = \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y\right).$$

*Es decir*

$$[w]_{B'}^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} [w]_B^t.$$

*Si por ejemplo* $[w]_B = (3, -4)$ *entonces*

$$[w]_{B'}^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

*Verifiquemos*

$$\frac{2}{5}v_1 - \frac{13}{5}v_2 = \frac{2}{5}(1,3) - \frac{13}{5}(-1,2) = (3,-4) = w.$$

Supongamos que $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y que $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es otra.

Por ser $B'$ base, cada vector de $B$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de $B'$.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n, \\ u_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n, \\ &\vdots \\ u_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

La matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz de cambio de base** de la base $B$ a la base $B'$.

**Ejemplo 5.1.2.** *En el ejemplo anterior*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

*Observemos que*

$$\det(P) = \frac{1}{5}$$

*entonces $P$ es inversible y no es difícil verificar que*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Notar que la columnas de $P^{-1}$ son las coordenadas de los vectores de $B'$ en la base $B$.*

*Por otro lado tenemos que*

$$[w]^t_{B'} = P[w]^t_B.$$

*Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $P^{-1}$ y usando que $P^{-1}P$ es la identidad tenemos que*

$$P^{-1}[w]^t_{B'} = [w]^t_B,$$

*es decir que $P^{-1}$ matriz de cambio de base de la base $B'$ a la base $B$.*

**Teorema 5.1.3.**

Sea $P$ una matriz de cambio de base de una base $B$ a una base $B'$ en un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Entonces para todo $v \in \mathcal{V}$ tenemos que

$$[w]^t_{B'} = P[w]^t_B \quad \text{y por consiguiente } [w]^t_B = P^{-1}[w]^t_{B'}.$$

**Ejemplo 5.1.4.** *Determinar si las siguientes matrices son linealmente independientes o dependientes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

**Solución.** Supongamos que las 4 matrices son linealmente independientes, entonces

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de base $B$ a la base canónica

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si $B$ es una base $P$ tiene que ser inversible. Calculemos el determinante de $P$

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \underset{F2-2F1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F3-3F1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \underset{F4-6F1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 7 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F4-F2-F3}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Por lo tanto , $P$ no es inversible lo que nos dice que $P$ no puede ser un cambio de base, de lo que se deduce que $B$ no es base. Entonces podemos concluir que las matrices no son linealmente independientes.

## 5.2 Transformaciones lineales

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales. Una aplicación $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una **transformación lineal** si para cualesquiera dos escalares $\alpha$ y $\beta$ y cualesquiera dos vectores $u, v \in \mathcal{V}$ se verifica la siguiente igualdad

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

**Ejemplo 5.2.1.** *Decidir cual de la siguientes aplicaciones son transformación lineal. Justifique su respuesta.*

*(a)* $T_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *T(x,y)=(x,y,x+y);*

*(b)* $T_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (xy, yz)$;

*(c)* $T_3\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $T(A) = tr(A)$;

*(d)* $T_4\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $T(A) = \det(A)$.

**Solución.** *(a)* Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} T_1(\alpha(v_1, v_2) + \beta(w_1, w_2)) &= T_1(\alpha v_1 \beta w_1, \alpha v_2 \beta w_2) \\ &= (\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2, \alpha v_1 + \beta w_1 + \alpha v_2 + \beta w_2) \\ &= (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_1 + \alpha v_2) + (\beta w_1, \beta w_2, \beta w_1 + \beta w_2) \\ &= \alpha(v_1, v_2, v_1 + v_2) + \beta(w_1, w_2, w_1 + w_2) \\ &= \alpha T_1(v_1, v_2) + \beta T_1(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto $T_1$ es transformación lineal.

*(b)* En este caso podemos observar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$T_2(\alpha, \alpha, \alpha) = (\alpha^2, \alpha^2) = \alpha^2(1, 1) = T_2(1, 1, 1).$$

Si por ejemplo $\alpha = 2$, tenemos que

$$T_2(2, 2, 2) = 4(1, 1) = 4T_2(1, 1, 1) \neq 2T_2(1, 1, 1).$$

Por lo tanto $T_2$ no es transformación lineal.

*(c)* Comencemos por observar que si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son do matrices de $R^{n\times n}$ y $\alpha$ y $\beta$ son dos escalares entones $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})$ y por lo tanto

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} + \beta b_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B).$$

Por lo tanto $T$ es transformación lineal.

*(d)* En el último caso podemos observar lo siguiente

$$T_4(I_2) = \det(I_2) = 1 \text{ y } T_4(-I_2) = \det(-I_2) = \det(I_2) = 1$$

pero

$$T_4(I_2 + (-I_2)) = T_4(0) = \det(0) = 0 \neq T_4(I_2) + T_4(-I_2),$$

no es una transformación lineal.

**Ejemplo 5.2.2.** *Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(1,0,0) = (1,2)$, $T(0,1,0) = (1,-1)$ y $T(0,0,1) = (-1,1)$. Hallar $T(x,y,z)$.*

**Solución.** Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Entonces, como $T$ es una transformación lineal tenemos que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= x(1,2) + y(1,-1) + z(-1,1) \\ &= (x+y-z, 2x-y+z). \end{aligned}$$

**Teorema 5.2.3.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces la aplicación $T(v) = Av^t$ es una transformación lineal.

*Demostración.* Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha v + \beta w) &= A(\alpha v + \beta w)^t \\ &= A(\alpha v^t + \beta w^t) \\ &= A(\alpha v^t) + A(\beta w^t) \\ &= \alpha A v^t + \beta A w^t \\ &= \alpha T(v) + \beta T(w). \end{aligned}$$

por lo tanto $T$ es una transformación lineal. $\square$

**Ejemplo 5.2.4.** *Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por*

$$T(a,b) = (a+b, a-b, 2b).$$

*No es difícil ver que*

$$T(a,b) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]^t.$$

*Es decir, tenemos asociada una matriz a la transformación $T$. Observemos que las columnas de $T$ son $T(1,0)^t$ y $T(0,1)^t$.*

**Teorema 5.2.5.**

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^m$ es una transformación lineal entonces existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $T(v) = [Av^t]^t$.

## 5.3 Kernel e imagen de una transformación lineal

Comencemos mostrando que el 0 es un punto fijo de cualquier transformación lineal.

**Proposición 5.3.1.**

Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Entonces $T(0) = 0$.

*Demostración.* Sea $v \in \mathcal{V}$, como $T$ es una transformación lineal tenemos que

$$T(0) = T(0v) = 0T(v) = 0.$$

□

**Definición 5.3.2.**

Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Definimos el **kernel** (o **núcleo**) de $T$ de la siguiente manera

$$N(T) = \ker(T) \coloneqq \{v \in \mathcal{V}\colon T(v) = 0\}.$$

**Ejemplo 5.3.3.** *Hallar el núcleo de la siguiente transformación lineal* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida de la siguiente manera*

$$T(x, y, z) = (x + y + 5z, 2x - y + z).$$

**Solución.** Si $(x, y, z) \in \ker(T)$ entonces

$$T(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x + y + 5z = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones tenemos que

$$3x + 6z = 0 \iff x = -2z.$$

Reemplazamos esto en la primera de nuestras ecuaciones y obtenemos que

$$0 = x + y + 5z = y + 3z \iff y = -3z.$$

Por lo tanto

$$(x, y, z) \in \ker(T) \iff (x, y, z) = (-2z, -3z, z) = z(-2, -3, 1),$$

es decir

$$\ker(T) = \langle(-2, -3, 1)\rangle.$$

**Proposición 5.3.4.**

Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Entonces $\ker(T)$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

*Demostración.* Por la Proposición 5.3.1, sabemos que $\ker(T) \neq \emptyset$. Entonces nos resta ver que $\ker(T)$ es cerrado para la suma y el producto por escalares.
*Cerrado para la suma.* Sea $u, v \in \ker(T)$ entonces $T(u) = T(v) = 0$. Luego usando que $T$ es una transformación lineal tenemos que

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0.$$

Por lo tanto $u + v \in \ker(T)$.
*Cerrado para la multiplicación por escalares.* Sea $k \in \mathbb{R}$, $v \in \ker(T)$ entonces $T(v) = 0$. Luego usando que $T$ es una transformación lineal tenemos que

$$T(kv) = kT(v) = k0 = 0.$$

Por lo tanto $kv \in \ker(T)$. □

**Definición 5.3.5.**

Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ dos subespacios y $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Definimos **imagen** de $T$ de la siguiente manera

$$\operatorname{Img}(T) := \{w \in \mathcal{W} \colon \text{si existe } v \in \mathcal{V} \text{ tal que } T(v) = w\}.$$

**Teorema 5.3.6.**

Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Entonces $\operatorname{Img}(T)$ es un subespacio de $\mathcal{W}$.

*Demostración.* Como $T(0) = 0$ tenemos que $\mathrm{Img}(T) \neq \emptyset$. Nos resta ver que $\mathrm{Img}(T)$ es cerrado para la suma y el producto por escalares.
*Cerrado para la suma.* Sea $w, z \in \mathrm{Img}(T)$ entonces existen $u, v \in \mathcal{V}$ tal que $T(u) = w$ y $T(v) = z$. Luego usando que $T$ es una transformación lineal tenemos que

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = w + z.$$

Por lo tanto $w + z \in \mathrm{Img}(T)$.
*Cerrado para la multiplicación por escalares.* Sea $k \in \mathbb{R}$, $w \in \mathrm{Img}(T)$ entonces existe $v \in \mathcal{V}$ tal que $T(v) = w$. Luego, usando que $T$ es una transformación lineal tenemos que

$$T(kv) = kT(v) = kw.$$

Por lo tanto $kw \in \mathrm{Img}(T)$. □

**Ejemplo 5.3.7.** *Hallar la imagen de la siguiente transformación lineal* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida de la siguiente manera*

$$T(x, y, z) = (x + y + 5z, 2x - y + z).$$

**Solución.** Observemos que $T(1, 0, 0) = (1, 2)$ y $T(0, 1, 0) = (1, -1)$ son dos vectores linealmente independientes que pertenecen a la imagen de $T$. Como la imagen de $T$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, podemos concluir que

$$\mathrm{Img}(T) = \mathbb{R}^2.$$

**Teorema 5.3.8.**

Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathcal{V}$ entonces

- $\mathrm{Img}(T) = \langle T(v_1), \ldots, T(v_n) \rangle$;
- $\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Img}(T)) = \dim(\mathcal{V})$.

**Ejemplo 5.3.9.** *Sean* $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$, *y* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *una transformación lineal tal que* $T(1, 1, 1) = (1, 0)$, $T(1, 1, 0) = (2, -1)$ *y* $T(1, 0, 0) = (4, 3)$. *Calcular:*

*(a)* $\ker(T)$, *Img*$(T)$ *y sus dimensiones.*

*(b) La imagen del vector* $(2, -3, 5)$.

**Solución.** *(a)* Sabemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Img}(T) &= \langle T(1,1,1), T(1,1,0), T(1,0,0)\rangle = \langle (1,0), (2,-1), (4,3)\rangle \\ &= \langle (1,0), (2,-1)\rangle = \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Entonces $\dim(\operatorname{Img}(T)) = 2$. Por lo tanto, como

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Img}(T)) = \dim(\mathbb{R}^3),$$

resulta que $\dim(\ker(T)) = 1$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}T(1,0,0) &= (4,3) = -3(2,-1) + 10(1,0) = -3T(1,1,0) + 10T(1,1,1) \\ &= T(-3(1,1,0) + 10(1,1,1)) = T(7,7,10)\end{aligned}$$

entonces

$$0 = T(7,7,10) - T(1,0,0) = T((7,7,10) - (1,0,0)) = T(6,7,10).$$

Lo que nos dice que $(6,7,10)\ker(T)$. Como $\dim(\ker(T)) = 1$, podemos concluir que

$$\ker(T) = \langle (6,7,10)\rangle.$$

*(b)* Observemos que

$$(2,-3,5) = 5(1,1,1) - 8(1,1,0) + 5(1,0,0).$$

Entonces, usando que $T$ es una transformación lineal tenemos que

$$\begin{aligned}T(2,-3,5) &= T(5(1,1,1) - 8(1,1,0) + 5(1,0,0)) \\ &= 5T(1,1,1) - 8T(1,1,0) + 5T(1,0,0) \\ &= 5(1,0) - 8(2,-1) + 5(4,3) \\ &= (9,23).\end{aligned}$$

**Ejemplo 5.3.10.** *Un fabricante produce 3 artículos diferentes, cada uno de los cuales requiere para su elaboración de 2 materias primas. Los tres productos se denotan por $p_1$, $p_2$ y $p_3$ y las dos materias primas por $M_1$ y $M_2$. En la tabla que se indica a continuación se representa el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de producto*

*(a) Determinar la ley que asocia a cada vector de producción $(p_1, p_2, p_3)$ el vector de materias primas $(M_1, M_2)$ que le corresponde para que dicha producción sea posible.*

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $M_1$ | 1 | 2 | 1 |
| $M_2$ | 3 | 1 | 2 |

*(b) ¿Es una transformación lineal la ley determinada en el apartado anterior?*

*(c) Determinar los subespacios núcleo e imagen.*

**Solución.** *(a)* La información que nos da el cuadro la podemos expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} M_1 &= p_1 + 2p_2 + p_3, \\ M_2 &= 3p_1 + p_2 + 2p_3. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = T(p_1, p_2, p_3).$$

*(b)* Como a la transformación $T$ tenemos expresada como un producto de una matriz por un vector podemos concluir que $T$ es una transformación lineal.

*(c)* Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Img}(T) &= \langle T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1) \rangle = \langle (1,3), (2,1), (1,2) \rangle \\ &= \langle (1,3), (2,1) \rangle = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Por otro lado $(p_1, p_2, p_3) \in \ker(T)$ si y sólo si

$$T(p_1, p_2, p_3) = (0,0) \iff \begin{cases} p_1 + 2p_2 + p_3 = 0, \\ 3p_1 + p_2 + 2p_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvemos usando la eliminación de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{F2} = F2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{F1} = F1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces nuestro sistema es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{cases} p_1 - 3p_2 = 0, \\ -5p_2 - p_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = 3p_2, \\ p_3 = -5p_2. \end{cases}$$

Por lo tanto $\ker(T) = \langle (3, 1, -5) \rangle$.

**Ejemplo 5.3.11.** *La población activa de un país se clasifica en 3 categorías profesionales: técnicos superiores (ts), obreros especializados (oe) y obreros no especializados (one). Así, en cada generación $k$ la fuerza de trabajo del país está caracterizada por el número de personas incluidas en las 3 categorías, es decir te, oe y one. Suponiendo que:*

- *Cada trabajador activo sólo tiene un hijo.*
- *El* 50% *de los hijos de los ts lo son también, el* 25% *pasa a ser oe y el* 25% *restante es one.*
- *Los hijos de los oe, se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes.* 30%, 40% *y* 30%.
- *Para los hijos de los one las proporciones de reparto entre las categorías son* 50%, 25% *y* 25%.

*Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza del trabajo del país de generación en generación. ¿Cuál será la distribución de los trabajadores a largo plazo independientemente de la distribución inicial?*

**Solución.** En este caso la información del problema se puede expresar de la siguiente manera

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ts(k+1) \\ oe(k+1) \\ one(k+1) \end{pmatrix}}_{v_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,5 \\ 0,25 & 0,4 & 0,25 \\ 0,25 & 0,3 & 0,25 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} ts(k) \\ oe(k) \\ one(k) \end{pmatrix}}_{v_k}.$$

Entonces, si miramos la evolución del tiempo, vemos que

$$\begin{aligned} v_1 &= Av_0 \\ v_2 &= Av_1 = AAv_0 = A^2v_0 \\ v_3 &= Av_2 = AA^2v_0 = A^3v_0 \end{aligned}$$

Podemos concluir que, a tiempo $k$ tenemos que

$$v_k = A^k v_0.$$

**Ejemplo 5.3.12.** *Fidelidad a una marca determinada.*

*Supongamos que un producto (digamos por ejemplo leche) es ofertado por cuatro empresas que abastecen su demanda. Supongamos que los nombres de las marcas son A, B, C y D.*

*Imaginemos que se realiza un análisis sobre 2000 consumidores de ese producto, obteniéndose los siguientes resultados:*

- *Consumen la marca A: 475 personas;*
- *Consumen la marca B: 550 personas;*
- *Consumen la marca C: 485 personas;*
- *Consumen la marca D: 490 personas.*

*Tras sucesivos muestreos repetidos en diferentes periodos, se observa la siguiente evolución de la demanda de las citadas marcas:*

| | *Aumentos* | | | | *Disminuciones* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* | *D* | *A* | *B* | *C* | *D* | *Total* |
| *A* | *0* | *10* | *5* | *10* | *0* | *5* | *20* | *30* | *445* |
| *B* | *5* | *0* | *5* | *5* | *10* | *0* | *5* | *25* | *525* |
| *C* | *20* | *5* | *0* | *15* | *5* | *5* | *0* | *10* | *505* |
| *D* | *30* | *25* | *10* | *0* | *10* | *5* | *15* | *0* | *525* |

*en donde indicamos por filas los aumentos o disminuciones que ha sufrido cada marca y de dónde o hacia dónde han ido las preferencias de los consumidores.*

*Si aceptamos que la preferencia de los consumidores se estabiliza en el tiempo, los datos anteriores se pueden resumir en la siguiente tabla:*

| | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | *420* | *10* | *5* | *10* |
| *B* | *5* | *510* | *5* | *5* |
| *C* | *20* | *5* | *465* | *15* |
| *D* | *30* | *25* | *10* | *460* |
| *Totla* | *475* | *550* | *485* | *490* |

*A partir de estos datos podemos calcular la matriz de transición de un periodo a otro, que nos indicará las probabilidades de retención o de transición de clientes para cada marca, esto es, la fracción de clientes que seguramente siguen consumiendo la misma marca o que se cambian a otras. Esta matriz se puede obtener dividiendo cada elemento de la tabla anterior por la suma total de la columna a la que pertenece.*

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{84}{95} & \frac{1}{55} & \frac{1}{97} & \frac{1}{49} \\ \frac{1}{95} & \frac{51}{55} & \frac{1}{97} & \frac{1}{98} \\ \frac{4}{95} & \frac{1}{110} & \frac{93}{97} & \frac{3}{98} \\ \frac{6}{95} & \frac{1}{22} & \frac{2}{97} & \frac{46}{49} \end{pmatrix}$$

*Cada elemento* $q_{ij}$ *representa la probabilidad de que un consumidor de la marca* $j$ *se pase a la marca* $i$*, para* $i, j = 1, 2, 3, 4$ *y los elementos de la diagonal principal de* $Q$ *indica la probabilidad correspondiente a la fidelidad de los consumidores a su propia marca.*

*Con ayuda de esta matriz podemos estudiar el comportamiento de los consumidores, y por tanto definir nuevas estrategias empresariales en su competencia con las otras marcas.*

*Si denominamos $v_k$ al vector de 4 componentes que nos proporciona las distintas situaciones en el periodo $k-$ésimo (la cantidad de consumidores que posee cada marca), medidos éstos en unidades convenientes (meses, años, etc.), tendremos*

$$\begin{aligned} v_0 &= \begin{pmatrix} 475 \\ 550 \\ 485 \\ 490 \end{pmatrix} \\ v_1 &= Qv_0 \\ v_2 &= Qv_1 = QQv_0 = Q^2 v_0 \\ v_3 &= Qv_2 = QQ^2 v_0 = Q^3 v_0, \end{aligned}$$

*entonces*

$$v_k = Q^k v_0.$$

En los dos últimos ejemplo se ve que necesitamos encontrar una manera eficiente de calcular potencias altas de matrices cuadradas.

## 5.4 Autovalores y autovectores

En general, dado $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tenemos la siguiente transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(x) = Ax^t.$$

Entonces

$$T^k(x) = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k-\text{veces}}(x) = A^k x^t.$$

¿Cómo calcular de manera "simple" $A^k$?

Por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n^k \end{pmatrix}.$$

Dado $A$ nos preguntamos si existe una base $B$ tal que

$$T(x) = Ax^t$$

en esa base $B$ es

$$[T(x)]_B = D[x]_B^t$$

donde $D$ es una matriz diagonal. Si $B$ existe entonces existe una matriz de cambio de base $P$ de la base $B$ a la base canónica. Entonces

$$Ax^t = T(x) = PDP^{-1}x^t.$$

Es decir buscamos $P$ inversible tal que

$$A = PDP^{-1}.$$

**Definición 5.4.1.**

Sea $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Decimos que $A$ y $B$ son **semejantes** (o **similares**) si existe una matriz no singular $P$ tal que

$$B = PAP^{-1}.$$

**Proposición 5.4.2** (Propiedades de las matrices semejantes)**.**

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces:

- $A$ es semejante a ella misma;
- Si $A$ es semejante a $B$ entonces $B$ es semejante a $A$;
- Si $A$ es semejante a $B$ y $B$ es semejante a $C$ entonces $A$ es semejante a $C$;
- Si $A$ y $B$ son semejantes entonces $A^k$ y $B^k$ son semejantes;
- Dos matrices semejantes tienen el mismo rango;
- Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante;
- Dos matrices semejantes tienen la misma traza.

**Ejemplo 5.4.3.** *¿Se* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *es semejante a* $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$*?*

*Podemos observar que* $\operatorname{tr}(A) = 4$ *pero la* $\operatorname{tr}(B) = 3$*. Por lo tanto* $A$ *y* $B$ *no son semejeantes.*

Observemos que si una matriz cuadrad $A$ es semejante a una matriz diagonal $D$ entonces existe una matriz $P$ tal que

$$A = PDP^{-1}$$

es decir

$$AP = PD.$$

Si $C_i$ son la columnas de $P$, la ultima igualdad la podemos escribir de la siguiente manera

$$(AC_1|\cdots|AC_n) = (d_{11}C_1|\cdots|d_{nn}C_n),$$

es decir

$$AC_i = d_{ii}C_i.$$

**Definición 5.4.4.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Un número real $\lambda$ se llama **autovalor** de $A$ si existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que

$$Av^t = \lambda v^t.$$

El vector $v$ se denomina **autovector** de $A$ correspondiente al autovalor $\lambda$.

**Ejemplo 5.4.5.** *Sea* $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$. *Entonces*

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*Entonces* $(2,1)$ *y* $(3,2)$ *son autovectores de* $A$ *asociados a* $1$ *y* $-2$ *respectivamente.*

Observemos que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda$ es un autovalor de $A$ entonces existe $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que

$$Av^t = \lambda v^t \iff Av^t - \lambda v^t = 0 \iff (A - \lambda I_n)v^t = 0$$

luego existe $v$ autovector de $A$ asicado a $\lambda$ si y solo si

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

**Definición 5.4.6.**

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El polinomio

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) \quad \text{o} \quad p_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A)$$

se denomina el **polinomio característico** de $A$.

La ecuación

$$p_A(\lambda) = 0$$

se denomina **ecuación característica** de A.

**Ejemplo 5.4.7.** *El polinomio característico de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

*es*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

*Entonces* $5$ *y* $-1$ *son autovalores de* $A$.

**Teorema 5.4.8.**

Matrices similares tienen el mismo polinomio característico.

*Demostración.* Si $B, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices semejantes, es decir existe una matriz $P$ tal que

$$B = PAP^{-1}.$$

Entonces

$$B - \lambda I_n = PAP^{-1} - \lambda I_n = PAP^{-1} - \lambda PP^{-1} = P(A - \lambda I_n)P^{-1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) \\ &= \det(P(A - \lambda I_n)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(A - \lambda I_n)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P) p_A(\lambda) \frac{1}{\det(P)} \\ &= p_A(\lambda). \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.4.9.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de $A$.Entonces

$$E_\lambda \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^n \colon Av^t = \lambda v^t\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

*Demostración.* Como $\lambda$ es un autovalor de $A$ existe $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal $Av^t = \lambda v^t$. Por lo tanto $E_\lambda$ es un conjunto no vació. Veamos que es cerrado para la suma y el producto por un escalar.
*Cerrado para la suma.* Sean $v, w \in E_\lambda$ entonces $Av^t = \lambda v^t$ y $Aw^t = \lambda w^t$. Por lo tanto

$$A(v+w)^t = A(v^t + w^t) = Av^t + Aw^t = \lambda v^t + \lambda w^t = \lambda(v^t + w^t) = \lambda(v+w)^t.$$

Entonces $v + w \in E_\lambda$.
*Cerrado para el producto por un escalar.* Sean $v \in E_\lambda$ entonces $Av^t = \lambda v^t$. Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$A(kv)^t = A(kv^t) = kAv^t = k\lambda v^t = \lambda(kv^t) = \lambda(kv)^t.$$

Entonces $kv \in E_\lambda$. □

**Definición 5.4.10.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda$ un autovalor de $A$. El espacio $E_\lambda$ se denomina **autoespacio** (o **espacio propio**) de $A$ correspondiente a $\lambda$.

**Teorema 5.4.11.**

Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.

*Demostración.* Supongamos que $v, w$ son autovectores correspondientes a los autovalores distinto $\lambda$ y $\mu$ de una matriz $A$, respectivamente.

Razonamos por el absurdo. Si $v, w$ no son linealmente independiente entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha w$. Entonces

$$\lambda v^t = Av^v = A(\alpha w)^t = \alpha Aw^t = \alpha\mu w^t = \mu v^t.$$

Por lo tanto

$$(\lambda - \mu)v^t = 0$$

lo que es un absurdo ya que $\lambda \neq \mu$ y $v \neq 0$ por ser un autovector. El absurdo provino de suponer que $v$ y $w$ son linealmente dependientes luego no lo son. $\square$

**Propiedad 5.4.12.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda$ un autovalor de $A$. Entonces la dimensión de $E_\lambda$ es menor o igual que la multiplicidad de $\lambda$ como raíz de $p_A$.

**Método.**

Procedimiento para calcular autovalores y autovectores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Primero encontrar el característico de $A$, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$;
- Buscar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de $p_A(\lambda)$;
- Se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I_n)v^t = 0$ para cada autovalor $\lambda_i$.

**Ejemplo 5.4.13.** *Halle, si existen, los autovectores y autovalores de las siguientes matrices*

*(a)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

*(b)* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

*(c)* $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

*(d)* $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

**Solución.** *(a)* Comencemos por calcular el polinomio característico de $A$.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5. \end{aligned}$$

Observemos que

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

El próximo paso es hallar las raíces de $p_A$

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = -1 \text{ o } \lambda = 5.$$

Luego los autovalores de $A$ son $-1$ y $5$.

Ahora busquemos los autovectores.

$\lambda = -1$ : buscamos $(x, y)$ no nulo tal que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir buscamos una solución no nula de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0.$$

Por lo tanto

$$E_{-1} = \{t(1, -1) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Luego $(1, -1)$ es una autovector correspondiente a $\lambda = -1$.

$\lambda = 5$ : buscamos $(x, y)$ no nulo tal que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir buscamos una solución no nula de

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x + y = 0.$$

Por lo tanto

$$E_5 = \{t(1, 2) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Es decir, $(1, 2)$ es una autovector correspondiente a $\lambda = 5$.

*(b)* Comencemos por calcular el polinomio característico de $B$.

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_2) = \det \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)] \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$p_B(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2.$$

Por lo tanto $B$ solo tiene un autovalor.

Ahora buscamos los autovectores, es decir buscamos $(x, y)$ no nulo tal que

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo buscamos una solución no nula de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = 0.$$

En este caso
$$E_2 = \{t(1,0)\colon t \in \mathbb{R}\}.$$
Es decir no tengo dos autovectores correspondientes a $\lambda = 2$ que sean linealmente independientes. El $(1,0)$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 2$.

*(c)* Comencemos por calcular el polinomio característico de $C$.

$$\begin{aligned}
p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) &= \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - (2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) \\
&= -\lambda(2-\lambda)^2
\end{aligned}$$

Entonces
$$p_C(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ o } \lambda = 2.$$
Por lo tanto 0 y 2 son los autovalores de $C$.

Ahora buscamos los autovectores.

$\lambda = 0$ : buscamos $(x, y, z)$ no nulo tal que
$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
o lo que es lo mismo buscamos una solución no nula de
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$$

En este caso
$$E_0 = \{t(0,1,-1)\colon t \in \mathbb{R}\}.$$
Por lo tanto $(0,1,-1)$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 0$.

$\lambda = 2$ : buscamos $(x, y, z)$ no nulo tal que
$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
o lo que es lo mismo buscamos una solución no nula de
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y + z = 0.$$

En este caso

$$E_2 = \{t(1,1,0) + s(0,1,1) \colon t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ son autovectores correspondiente a $\lambda = 2$.

*(d)* Comencemos por calcular el polinomio característico de $D$.

$$\begin{aligned} p_D(\lambda) &= \det(D - \lambda I_2) = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$p_D(\lambda) = 0$$

no tiene soluciones reales. En este caso no tengo autovalor real y por lo tanto no tengo autovectores.

**Proposición 5.4.14.**

Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

*Demostración.* Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= ad - (a+d)\lambda + \lambda^2 - bc \\ &= \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A). \end{aligned}$$

□

**Proposición 5.4.15.**

Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de la diagonal.

*Demostración.* Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular. Entonces $A - \lambda I_n$ es una matriz triangular y por lo tanto

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda).$$

Por lo tanto

$$p_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = a_{11} \text{ o } \lambda = a_{22} \text{ o } \cdots \text{ o } \lambda = a_{nn}.$$

□

**Propiedad 5.4.16.**

- La suma de los autovalores de una matriz es igual a la traza de la matriz.
- El producto de todos lo autovalores de una matriz es igual al determinante de la matriz.
- Si $\lambda$ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $\lambda$ es un autovalor de $A^t$.
- Si $\lambda$ es un autovalor de una matriz no singular $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $1/\lambda$ es un autovalor de $A^{-1}$.
- Una matriz es singular si y sólo si tiene un autovalor cero.

## 5.5 Diagonalización

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Decimos que $A$ es **diagonalizable,** si $A$ es semejante a una matriz diagonal, es decir si existen $D, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $D$ es diagonal, $P$ es inversible y

$$A = PDP^{-1}.$$

**Ejemplo 5.5.1.** *Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables*

*(a)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

*(b)* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

*(c)* $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

*(d)* $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

**Solución.** *(a)* Por lo que vimos en el Ejemplo 5.4.13 $(1, -1)$ y $(1, 2)$ son autovectores de $A$ correspondientes a $-1$ y $5$ respectivamente. Entonces, si tomamos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

resulta que

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y
$$PDP^{-1} = A.$$

Por lo tanto $A$ es diagonalizable.

*(b)* En este, caso vimos que $B$ sólo tiene un autovalor $\lambda = 2$ y que

$$E_\lambda = \{t(1,2) \colon t \in \mathbb{R}\},$$

ver Ejemplo 5.4.13. Entonces no tengo dos autovectores linealmente independientes asociados a $\lambda = 2$. Por lo tanto $B$ no es diagonalizable.

*(c)* En este caso vimos en el Ejemplo 5.4.13, que los autovectores de $C$ son 0 y 2. Ademas probamos que

$$E_0 = \{t(0,1,-1) \colon t \in \mathbb{R}\}$$
$$E_2 = \{t(1,1,0) + s(0,1,1) \colon t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces $\{(0,1,-1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ es una base formada por autovectores de $C$, por lo tanto $C$ es diagonalizable. En este caso

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces
$$A = PDP^{-1}.$$

*(d)* $D$ no tiene autovalores reales, ver Ejemplo 5.4.13. Por lo tanto $D$ no es diagonalizable.

**Teorema 5.5.2.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A es diagonalizable si y solo si los $A$ tiene $n-$autovectores linealmente independientes.

Cabe destacar que el caso que la matriz $A$ tenga $n$ autovalores distinto, obtengo $n$ autovectores linealmente independiente y por lo tanto $A$ es diagonalizable. Es decir, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 5.5.3.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $A$ tiene $n$ autovalores distintos entonces $A$ es diagonalizable.

**Ejemplo 5.5.4.** *Volvamos a nuestro primer de fidelidad a una marca determinada (Ver el Ejemplo 5.3.12). Teníamos*

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{84}{95} & \frac{1}{55} & \frac{1}{97} & \frac{1}{49} \\ \frac{1}{95} & \frac{51}{55} & \frac{1}{97} & \frac{1}{98} \\ \frac{4}{95} & \frac{1}{110} & \frac{93}{97} & \frac{3}{98} \\ \frac{6}{95} & \frac{1}{22} & \frac{2}{97} & \frac{46}{49} \end{pmatrix} \quad y \quad v_0 = \begin{pmatrix} 475 \\ 550 \\ 485 \\ 490 \end{pmatrix}.$$

*En este caso, se puede ver que $Q$ diagonalizable y que tenemos que*

$$P = \begin{pmatrix} 0,2083747 & 0.7697748 & 0,1270075 & -0,1229961 \\ 0,2197761 & -0,0045350 & -0,2469419 & 0,0044165 \\ 0,7225466 & -0,1432143 & -0,6166777 & 0,7585115 \\ 0,6214539 & -0,6220255 & 0,7366121 & -0,6399319 \end{pmatrix}$$

*y*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86569 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,91717 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,92616 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_k &= Q^k v_0 = P D^k P^{-1} v_0 \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0,86569)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0,91717)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0,92616)^k \end{pmatrix} P^{-1} v_0. \end{aligned}$$

*Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} v_k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} v_0 = \begin{pmatrix} 235.17 \\ 248.03 \\ 815.45 \\ 701.36 \end{pmatrix}.$$

*Los dueños de la marcas $A$ y $B$ deben realizar cambios ya que a largo plazo perderán muchos consumidores.*

**Teorema 5.5.5.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A es diagonalizable si y solo si $p_A$ el polinomio característico de $A$ tiene todas sus raíces reales y para todo autovalor $\lambda$ de $A$ se tiene que

$$\dim(E_\lambda) = \text{ multiplicidad de } \lambda \text{ como raíz de } p_A.$$

**Ejemplo 5.5.6.** *Sea* $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ *una matriz tal que*

- $\{v \in \mathbb{R}^4 \colon (A - I_4)v^t = 0\} \neq \{0\}$;
- $\mathrm{rg}(A + 3I_4) \leq 2$;
- $p_A(-2) = 6$.

*Decidir si* $A$ *es diagonalizable y calcular* $A^3 + 2A^2 - 3A$.

**Solución.** Comencemos observando que

$$\{v \in \mathbb{R}^4 \colon (A - I_4)v^t = 0\} \neq \{0\}$$

implica que existe $v \in \mathbb{R}^4$ diferente de 0 tal que

$$(A - I_4)v^t = 0 \Longleftrightarrow Av^t - v^t = 0 \Longleftrightarrow Av^t = v^t.$$

Por lo tanto 1 es un autovalor de $A$.

Por otro lado la condición $\mathrm{rg}(A + 3I_4) \leq 2$ implica que

$$\dim(\{v \in \mathbb{R}^4 \colon (A + 3I_4)v^t = 0\}) = 4 - \mathrm{rg}(A + 3I_4) \geq 2.$$

Lo que implica que $-3$ es autovalor de $A$ y que $\dim(E_{-3}) \geq 2$ o dicho de otra manera tengo por lo menos dos autovectores correspondientes a $-3$ que son linealmente independientes. Entonces podemos deducir que $-3$ es una raíz del característico de $A$ que tiene como mínimo multiplicidad 2.

Entonces

$$p_A(t) = (t - 1)(t + 3)^2(t - \lambda).$$

Nos faltaría averiguar quien es $\lambda$. Para esto usamos la ultima condición

$$6 = p_A(-2) = (-3)(-2 - \lambda) \Longleftrightarrow -2 = -2 - \lambda \Longleftrightarrow \lambda = 0.$$

Luego tengo tres autovalores $-3, 0, 1$ y vimos que menos 3 tiene dos autovectores asociados linealmente independientes. Por lo tanto $A$ es diagonalizable y entonces existe $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ inversible tal que

$$A = PDP^{-1}.$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A^3 + 2A^2 - 3A &= \left[PDP^{-1}\right]^3 + 2\left[PDP^{-1}\right]^2 - 3PDP^{-1} \\ &= PD^3P^{-1} + 2PD^2P^{-1} - 3PDP^{-1} \\ &= P\left[D^3 + 2D^2 - 3D\right]P^{-1} \end{aligned}$$

Observemos que

$$D^3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2D^2 = 2\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por ultimo

$$3D = 3\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} D^3 + 2D^2 - 3D &= \\ &= \begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$A^3 + 2A^2 - 3A = P\left[D^3 + 2D^2 - 3D\right]P^{-1} = 0.$$

## 5.6 Ortogonalidad

Recordemos que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son vectores ortogonales si

$$u \cdot v = 0.$$

Diremos que un conjunto de vectores $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un **conjunto ortogonal** si $v_i \cdot v_j = 0$ para todo $i \neq j$. Si además $v_i \cdot v_i = 1$, diremos que $B$ es un **conjunto ortonormal**.

**Ejemplo 5.6.1.** *Por ejemplo no es complicado mostrar que el conjunto*

$$B = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0,0,1) \right\}$$

*es ortogonal.*

**Observación 5.6.2.**

Cualquier conjunto ortogonal de vectores no nulos se puede transformar en un conjunto ortonormal dividiendo cada vector por su norma.

**Proposición 5.6.3.**

Todo conjunto de vectores no nulos ortogonales es linealmente independiente.

Entonces si tenemos un conjunto $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores no nulos ortonormales, podemos definir una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que las filas de $P$ son los vectores de $B$ y usando que $B$ es ortogonal podemos concluir que $P^{-1} = P^t$.

**Definición 5.6.4.**

Decimos que $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una **matriz ortogonal** si su inversa es su transpuesta, es decir

$$P^{-1} = P^t.$$

**Ejemplo 5.6.5.** *Por ejemplo, si tomamos*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Entonces* $P^t = P$ *y* $P^tP = I_3$. *Es decir que* $P$ *es ortogonal.*

En el caso de las matrices simétricas uno tiene el siguiente resultado,

**Proposición 5.6.6.**

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica entonces

- Todas las raíces del polinomio característico de $A$ son reales;
- $A$ es diagonalizable;
- Los autovectores de $A$ correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

Por lo tanto si $A$ es simétrica entonces es diagonalizable, pero resultado anterior no dice un poco mas.

**Teorema 5.6.7.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Entonces existe una matriz ortogonal $P$ tal que

$$D = P^{-1}AP$$

es diagonal.

**Ejemplo 5.6.8.** *Diagonalizar las siguientes matrices*

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** *(a)* Comencemos por calcular el polinomio característico de $A$.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 1\right] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) \\ &= -(\lambda-3)^2(\lambda-5). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \text{ o } \lambda = 5.$$

Entonces los autovalores de $A$ son 3 y 5.

Ahora calculemos los autovectores.

$\lambda = 3$ : buscamos $(x, y, z)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0.$$

Por lo tanto

$$E_3 = \{t(1,-1,0) + s(0,0,1) \colon t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces $(1,-1,0)$ y $(0,0,1)$ son autovectores de $A$ correspondientes a 3. Observar que si dividimos a $(1,-1,0)$ por su norma obtenemos $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ que también es un autovector de $A$ correspondiente a 3.

$\lambda = 5$ : buscamos $(x, y, z)$ tal que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$E_5 = \{t(1,1,0) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces $(1,1,0)$ es un autovectores de $A$ correspondiente a 5. Como antes si dividimos al $(1,1,0)$ por su norma obtenemos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ que también es un autovector de $A$ correspondiente a 5. Entonces en este caso

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que ya vimos que es ortogonal en el Ejemplo 5.6.5. En este caso

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*(b)* Como antes comencemos por calcular el polinomio característico de $B$.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^3 - 12(4-\lambda) + 16$$

Por lo tanto

$$p_B(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 8.$$

Entonces los autovalores de $B$ son 2 y 8.

Ahora calculemos los autovectores.

$\lambda = 2$ : buscamos $(x, y, z)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0.$$

Por lo tanto
$$E_2 = \{t(1,0,-1) + s(0,1,-1) \colon t,s \in \mathbb{R}\}.$$

Buscamos dos vectores $v_1, v_2$ en $E_2$ que sean ortogonales y tengan norma uno. Por ejemplo tomamos como $v_1 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ y $v_2 = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$.

$\lambda = 8$ : buscamos $(x,y,z)$ tal que
$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso resolvemos utilizando Gauss-Jordan
$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{F}1=F1+F2+F3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{F}3=\frac{F3-F2}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\tilde{F}2=\frac{F2+4F3}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces estamos buscando $(x,y,z)$ de manera que
$$\begin{cases} x - z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto
$$E_8 = \{t(1,1,1) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ es un autovectores de $B$ correspondiente a 8.

Entonces en este caso
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

que ya vimos que es ortogonal en el Ejemplo 5.6.5. En este caso
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

## 5.7 Exponencial de una matriz diagonalizable

No es complicado ver que

$$e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}.$$

Ahora si tenemos una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

resulta que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$D^i = \begin{pmatrix} d_{11}^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^i \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\frac{D^i}{i!} = \begin{pmatrix} \frac{d_{11}^i}{i!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_{22}^i}{i!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{d_{nn}^i}{i!} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i}{i!} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{11}^i}{i!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{22}^i}{i!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{nn}^i}{i!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Concluimos que

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

Si $A$ es una matriz es diagonalizable entonces existe una matriz $P$ inversible tal que

$$A = PDP^{-1}$$

donde $D$ es diagonal entonces definimos

$$e^A = Pe^D P^{-1}.$$

La pregunta que surge de manera natural es la siguiente ¿Qué pasa si $A$ no es diagonalizable? En el próximo capítulo trataremos de responder esta pregunta.

# Capítulo 6

# Forma de Jordan

## 6.1 Matrices por bloques

Si tenemos una matriz de tamaño muy grande digamos

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} & m_{1n+1} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{r1} & \cdots & m_{rn} & m_{rn+1} & \cdots & m_{rp} \\ m_{r+11} & \cdots & m_{r+1n} & m_{r+1n+1} & \cdots & m_{r+1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kn} & m_{kn+1} & \cdots & m_{kp} \end{pmatrix}$$

lo que conviene para facilitar el manejo algebraico es partir a esta matriz en bloques (matrices mas pequeñas)

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{11} & \cdots & m_{1n} & m_{1n+1} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{r1} & \cdots & m_{rn} & m_{rn+1} & \cdots & m_{rp} \\ \hline m_{r+11} & \cdots & m_{r+1n} & m_{r+1n+1} & \cdots & m_{r+1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kn} & m_{kn+1} & \cdots & m_{kp} \end{array}\right)$$

es decir

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{r\times n}, B \in \mathbb{R}^{r\times(p-n)}, C \in \mathbb{R}^{(k-r)\times n}$ y $D \in \mathbb{R}^{(k-r)\times(p-n)}$.

**Proposición 6.1.1.**

Sean $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C, C' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D, D' \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Entonces

- $M + M' = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$;
- $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$;
- Si $C = 0$ entonces
$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

**Ejemplo 6.1.2.** *Sean $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ y para cada $1 \le i \le n$ sea $A_i \in \mathbb{R}^{r_i\times r_i}$. Se considera la matriz de bloques*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}.$$

*Utilizando el ultimo item de la proposición anterior de manera reiterada tenemos que*

$$\det(M) = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_n).$$

## 6.2 Forma de Jordan

**Ejemplo 6.2.1.** *Decidir si la siguiente matriz es diagonalizable*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** Comencemos por calcular el característico de $A$.

$$p_A(\lambda) = \det \left[ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

entonces

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)^3.$$

Por lo tanto la única raíz de $p_A$ es 3 lo que implica que el único autovalor de $A$ es 3.

Ahora buscamos los autovectores de $A$. Busco $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$E_3 = \langle (0,0,1) \rangle.$$

Esto me dice que no tengo tres autovectores linealmente independientes asociado a 3 por lo tanto $A$ no es diagonalizable.

Si bien la matriz del ejemplo anterior no es diagonalizable podemos observar lo siguiente

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 2\cdot 3 & 3^2 & 0 \\ 1 & 2\cdot 3 & 3^2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 3\cdot 3^2 & 3^3 & 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 3^2 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 3^4 & 0 & 0 \\ 4\cdot 3^3 & 3^4 & 0 \\ 6\cdot 3^2 & 4\cdot 3^3 & 3^4 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 3^5 & 0 & 0 \\ 5\cdot 3^4 & 3^5 & 0 \\ 10\cdot 3^3 & 5\cdot 3^5 & 3^5 \end{pmatrix}.$$

De lo que se deduce que

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ n3^{n-1} & 3^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} & n3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix}$$

que implica que

$$e^A = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ e^3 & e^3 & 0 \\ \dfrac{e^3}{2} & e^3 & e^3 \end{pmatrix}.$$

Como para este tipo de matrices tengo una expresión clara, en estas sección veremos que tipo de matrices son semejantes a estas.

Observemos que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = D + N.$$

La matriz $N$ es nilpotente

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definición 6.2.2.**

La matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se denomina **bloque de Jordan nilpotente**.

**Observación 6.2.3.**

- $\operatorname{rg}(J) = n - 1$;
- El orden de nilpotencia de $J$ es $n$.

**Proposición 6.2.4.**

Sea $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz nilpotente entonces

- $\det(N) = 0$;
- El único autovalor de $N$ es 0.

*Demostración.* Supongamos que $N$ es nilpotente de orden $k$, es decir $N^k = 0$, entonces

$$0 = \det(N^k) = \det(N)^k$$

y por lo tanto $\det(N) = 0$.

Como el determinante de una matriz es el producto de los autovalores y el $\det(N) = 0$, podemos concluir que 0 es autovalor de $N$. Veamos que es el único.

Supongamos que $\lambda$ es un autovalor de $N$ entonces existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Nv^t = \lambda v^t$$

entonces
$$0 = N^k v^t = \lambda^k v^t$$
lo que implica que $\lambda = 0$. Es decir que 0 es el único autovalor de $N$. $\square$

**Propiedad 6.2.5.**

Sea $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz nilpotente de orden $k$. Entonces existe una matriz inversible $P$ tal que

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$ es un bloque de Jordan nilpotente y $k = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$.

La matriz
$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}$$
se denomina la **forma de Jordan** de la matriz $N$.

**Ejemplo 6.2.6.** *Hallar la forma de Jordan de las siguientes matriz*
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** Comencemos mostrando que $N$ es nilpotente
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $N^3 = 0$.

Como $N$ es nilpotente el único autovalor de $N$ es el 0. Según el teorema la forma de Jordan de $N$ tiene que tener un bloque de Jordan nilpotente de

$3 \times 3$. De lo anterior se deduce, ya que $N$ es una matriz de $4 \times 4$, que la forma de Jordan sólo tiene dos bloques de Jordan nilpotentes uno de $3 \times 3$ y otro de $1 \times 1$.

Si definimos $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $T(x) = Nx^t$ entonces $T^2(x) = T \circ T(x) = N^2 x^t$ y $T^3(x) = T \circ T^2(x) = 0$. Luego no es difícil ver que

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \langle (-3,0,0,1),(0,1,0,0) \rangle \\
\ker(T^2) &= \langle (-3,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1) \rangle \\
\ker(T^3) &= \langle (-3,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,1,0) \rangle.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\ker(T) \subset \ker(T^2) \subset \ker(T^3)$$

y además

$$\begin{aligned}
&T(0,0,1,0) = (3,0,0,1) \in \ker(T^2) \\
&T^2(0,0,1,0) = T(3,0,0,1) = (0,6,0,0) \in \ker(T).
\end{aligned}$$

Observemos que $\{(0,0,1,0),(3,0,0,1),(0,6,0,0)\}$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces si escogemos otro vector que resulte linealmente independiente con esto 3 tendremos una base de $\mathbb{R}^4$. Tomemos el vector que falta de los elementos del $\ker(T)$, por ejemplo no es complicado chequear que

$$B = \{(0,0,1,0),(3,0,0,1),(0,6,0,0),(-3,0,0,1)\}$$

es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto una base de $B$, que tiene la siguiente propiedad

$$\begin{aligned}
[T(0,0,1,0)]_B &= [(3,0,0,1)]_B = (0,1,0,0), \\
[T(3,0,0,1)]_B &= [(0,6,0,0)]_B = (0,0,1,0), \\
[T(0,6,0,0)]_B &= [(0,0,0,0)]_B = (0,0,0,0), \\
[T(-3,0,0,1)]_B &= [(0,0,0,0)]_B = (0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Entonces, construimos la matriz $P$ poniendo los vectores de $B$ como columnas de $P$, es decir

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resulta que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y

$$P^{-1}NP = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

**Observación 6.2.7.**

Sean $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotente de orden $k$ y $T(x) = Nx^t$. Entonces

$$\{0\} \subset \ker(T) \subset \ker(T^2) \subset \cdots \subset \ker(T^{k-1}) \subset \ker(T^k) = \mathbb{R}^n.$$

**Ejemplo 6.2.8.** *Hallar la forma de Jordan de las siguientes matriz*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solución.** Verifiquemos si $N$ es nilpotente

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $N^3 = 0$. Si definimos $T(x) = Nx^t$, tenemos que

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \langle e_3, e_4, e_6\rangle \\ \ker(T^2) &= \langle e_3, e_4, e_6, e_5, e_2\rangle \\ \ker(T^3) &= \langle e_3, e_4, e_6, e_5, e_2, e_1\rangle, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0,0,0), \\ e_4 &= (0,0,0,1,0,0), \quad e_5 = (0,0,0,0,1,0), \quad e_6 = (0,0,0,0,0,1). \end{aligned}$$

Como antes tomamos el ultimo vector que aparece cuando calculamos $\ker(T^3)$, es decir $e_1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (0,1,-1,0,-1,1) \in \ker(T^2) \\ T^2(e_1) &= T(0,1,-1,0,-1,1) = (0,0,-1,0,0,1)\ker(T). \end{aligned}$$

No es complicado ver que

$$\{e_1, (0, 1, -1, 0, -1, 1), (0, 0, -1, 0, 0, 1)\}$$

es linealmente independiente. Para completar una base realizo el siguiente procedimiento, tomo un vector del $\ker(T^2)$ que no pertenezca a el $\ker(T)$, por ejemplo $e_5$, entonces

$$T(e_5) = (0, 0, 0, 1, 0, -1).$$

Observemos que el conjunto

$$\{e_1, (0, 1, -1, 0, -1, 1), (0, 0, -1, 0, 0, 1), e_5, (0, 0, 0, 1, 0, -1)\}$$

es linealmente independiente. Para tener una base solo necesito escoger un vector linealmente independiente en con los 5 vectores anteriores, lo escojo del $\ker(T)$, por ejemplo $e_3$. Resulta fácil ver que

$$B = \{e_1, (0, 1, -1, 0, -1, 1), (0, 0, -1, 0, 0, 1), e_5, (0, 0, 0, 1, 0, -1), e_3\}$$

es una base de $\mathbb{R}^6$ que tiene la siguiente propiedad

$$\begin{aligned}
&[T(e_1)]_B = [(0, 1, -1, 0, -1, 1)]_B = (0, 1, 0, 0, 0, 0)\\
&[T(0, 1, -1, 0, -1, 1)]_B = [(0, 0, -1, 0, 0, 1)]_B = (0, 0, 1, 0, 0, 0)\\
&[T(0, 0, -1, 0, 0, 1)]_B = [(0, 0, 0, 0, 0, 0)]_B = (0, 0, 0, 0, 0, 0)\\
&[T(e_5)]_B = [(0, 0, 0, 1, 0, -1)]_B = (0, 0, 0, 0, 1, 0)\\
&[T(0, 0, 0, 1, 0, -1)]_B = [(0, 0, 0, 0, 0, 0)]_B = (0, 0, 0, 0, 0, 0)\\
&[T(e_3)]_B = [(0, 0, 0, 0, 0, 0)]_B = (0, 0, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Entonces, construimos la matriz $P$ poniendo los vectores de $B$ como columnas de $P$, es decir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$P^{-1}NP = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

**Proposición 6.2.9.**

Si $J$ y $J'$ son formas de Jordan semejantes entonces $J = J'$.

**Proposición 6.2.10.**

Dada una matriz nilpotente $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existe una única forma de Jordan $J$ semejante a $N$.

**Ejemplo 6.2.11.** *Sean $A$ y $B$ dos matrices nilpotentes en $\mathbb{R}^{4\times 4}$ de orden 3. Mostrar que $A$ y $B$ son semejantes.*

**Solución.** Como $A$ y $B$ dos matrices nilpotentes en $\mathbb{R}^{4\times 4}$ de orden 3, entonces la forma de Jordan asociada a $A$ y $B$ tiene que tener un bloque de Jordan nilpotente de $3 \times 3$ y otro $1 \times 1$, es decir existen $P$ y $Q$ matrices inversibles tales que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{y} \quad Q^{-1}BQ = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto

$$P^{-1}AP = Q^{-1}BQ \Longleftrightarrow A = PQ^{-1}BQP^{-1} = PQ^{-1}B(PQ^{-1})^{-1},$$

es decir $A$ y $B$ son semejantes.

Supongamos ahora que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que tiene un único autovalor, no es diagonal y que

$$p_A(t) = (t - \lambda)^n.$$

En este caso se puede mostrar que $A-\lambda I_n$ es nilpotente de orden $k \leq n$. Entonces existe una matriz $P$ inversible tal que

$$A - \lambda I_n = P \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es un bloque de Jordan nilpotente y $k = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$. Entonces

$$A = P \begin{pmatrix} J_1 + \lambda I_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 + \lambda I_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} + \lambda I_{n_{r-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r + \lambda I_{n_r} \end{pmatrix} P.$$

**Definición 6.2.12.**

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. La matriz

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

se denomina **bloque de Jordan asociado al autovalor** $\lambda$ **de tamaño** $n$.

Decimos que $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una **forma de Jordan** si

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^i) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2^i) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J(\lambda_i, n_{r_i-1}^i) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J(\lambda_i, n_{r_i}^i) \end{pmatrix}$$

donde $n_1^i \geq \cdots \geq n_{r_i}^i$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

**Teorema 6.2.13.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $A$ tiene todos sus autovalores reales entonces $A$ es semejante a una única forma de Jordan.

**Ejemplo 6.2.14.** *Hallar la forma de Jordan del siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solución.** El primer paso es hallar el polinomio característico de $A$.

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^4.$$

Por lo tanto $A$ tiene un único autovalor que es 2. Observemos que

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz del Ejemplo 6.2.6. Como vimos en el mencionado ejemplo, si tomamos

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resulta que

$$A - 2I_4 = P \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1}.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
A &= P \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1} + 2I_4 = P \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1} + 2PP^{-1} \\
&= P \left[ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1} \\
&= P \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) P^{-1}.
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 6.2.15.** *Halle la forma de Jordan de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** Comencemos por observar que el característico de $A$ es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Por lo tanto 1 y $-1$ son los autovalores de $A$.

Calculemos los autovectores asociados a $\lambda = -1$. Como

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

no es difícil ver que el autoespacio asociado a $-1$ es

$$E_{-1} = \langle e_2, e_3 \rangle,$$

donde

$$e_2 = (0, 1, 0, 0) \quad \text{y} \quad e_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Entonces $\{e_2, e_3\}$ es un conjunto linealmente independiente de autovectores de $A$ asociados a $-1$. Como la multiplicidad de $-1$ como raíz de $p_A$ es dos, podemos concluir que $-1$ tiene asociada la cantidad máxima de autovectores linealmente independientes.

Ahora calculemos los autovectores asociados a $\lambda = 1$. Como

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos ver que el autoespacio asociado a 1 es

$$E_1 = \langle (1, 1, 1, 0) \rangle.$$

Entonces $(1, 1, 1, 0)$ un autovector de $A$ asociados a 1.

Notemos que $\{(1, 1, 1, 0), e_2, e_3\}$ es un conjunto linealmente independiente de autovectores de $A$. Para encontrar el vector que falta para tener una base actuamos de la siguiente manera:
Primero calculamos $(A - I_4)^2$.

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segundo paso buscamos las soluciones $(A - I_4)^2 x^t = 0$. En este caso son

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \colon (A - I_4)^2 x^t = 0\} = \langle (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Observemos que apareció un nuevo vector $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Además se puede ver que

$$(A - I_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1.$$

Si tomamos como base $T(x) = Ax^t$ y $B = \{e_4, (2, 2, 2, 0), e_2, e_3\}$ resulta que

$$\begin{aligned}
&[T(e_4)]_B = [(3, 2, 2, 0)]_B = (1, 1, 0, 0); \\
&[T(2, 2, 2, 0)]_B = [(2, 2, 2, 0)]_B = (0, 1, 0, 0); \\
&[T(e_2)]_B = [-e_2]_B = (0, 0, -1, 0); \\
&[T(e_3)]_B = [-e_3]_B = (0, 0, 0, -1).
\end{aligned}$$

Luego, construimos $P$ poniendo a los vectores de $B$ como columnas, es decir

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

¿Qué pasa con $e^A$? Comencemos por observar que

$$e^{J(\lambda,n)} = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e^\lambda & e^\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{e^\lambda}{2!} & e^\lambda & e^\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{e^\lambda}{(n-1)!} & \frac{e^\lambda}{(n-2)!} & \cdots & e^\lambda & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Luego

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

es la forma de Jordan de $A$ tenemos que

$$e^A = Pe^J P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J_{r-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{J_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$

$$e^{J_i} = \begin{pmatrix} e^{J(\lambda_i,n_1^i)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J(\lambda_i,n_2^i)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J(\lambda_i,n_{r_i-1}^i)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{J(\lambda_i,n_{r_i}^i)} \end{pmatrix} -$$

**Ejemplo 6.2.16.** *Vimos que si tomamos*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*tenemos que*

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

*y por lo tanto*

$$e^A = P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ e & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

# Capítulo 7

# Formas cuadráticas

## 7.1 Motivación

Cuando tenemos una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente regular, si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t_0) = 0$, entonces

$$f(t) \simeq f''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + f(t_0)$$

para valores cercanos a $t_0$. Entonces

- Si $f''(t_0) > 0$ entonces $f(t_0)$ es un mínimo local de $f$;
- Si $f''(t_0) < 0$ entonces $f(t_0)$ es un máximo local de $f$;
- Si $f''(t_0) = 0$ no podemos concluir nada.

Si ahora consideramos una función $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suficientemente regular para la cual existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = (0, 0)$$

tenemos que

$$F(x, y) \simeq \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0)D^2F(x_0)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + F(x_0, y_0)$$

cerca de $(x_0, y_0)$. Donde

$$D^2F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

es la matriz hessiana de $F$ que es simétrica si la función es suficientemente regular.

¿Cómo determinar el signo de $(x - x_0, y - y_0)D^2F(x_0)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$?

## 7.2 Definición

**Definición 7.2.1.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Una **forma cuadrática** en $\mathbb{R}^n$ es una función $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x) = xAx^t.$$

La matriz $A$ se denomina la matriz asociada a $q$.

**Ejemplo 7.2.2.** *Decidir si la siguiente función $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática*

$$q(x, y, z) = 7x^2 + 5y^2 - 4xy + 26xz + 30yz.$$

**Solución.** Si $q$ es una forma cuadrática tiene que tener una matriz simétrica $A$ asociada $q$. Buscamos que

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{array}{lll} a = 7, & d = 5, & f = 0 \\ 2b = -4, & 2c = 26, & 2e = 30. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{lll} a = 7, & d = 5, & f = 0 \\ b = -2, & c = 13, & e = 15, \end{array}$$

es decir

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 13 \\ -2 & 5 & 15 \\ 13 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 7.3 Clasificación de formas cuadráticas

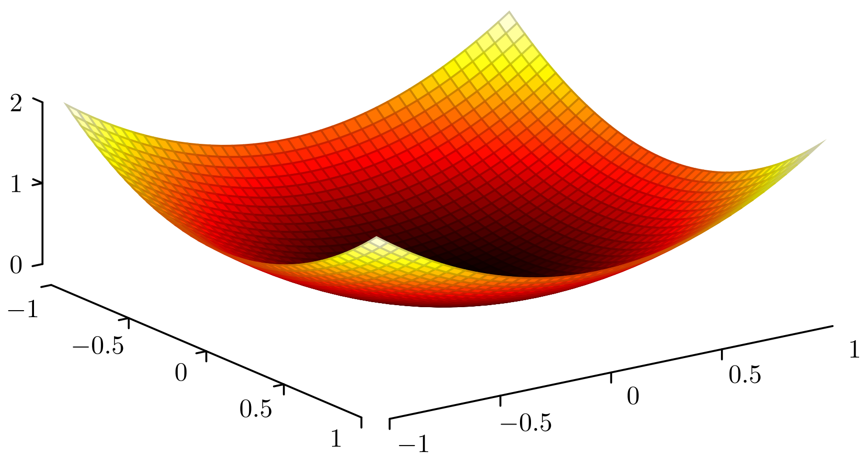
**Definición 7.3.1.**

Una forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

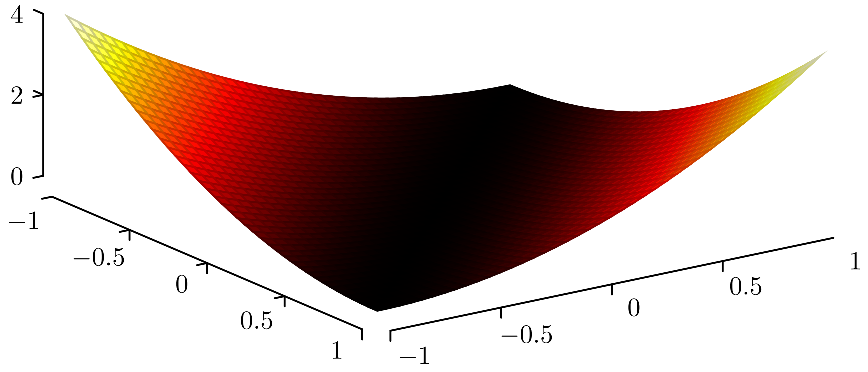
- **definida positiva** si $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;
- **semidefinida positiva** si $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- **definida negativa** si $q(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$;
- **semidefinida negativa** si $q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- **indefinida** en cualquier otro caso.

**Ejemplo 7.3.2.** *Comencemos por algunos ejemplos simples.*

*(a)* $q_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$ *es definida positiva.*



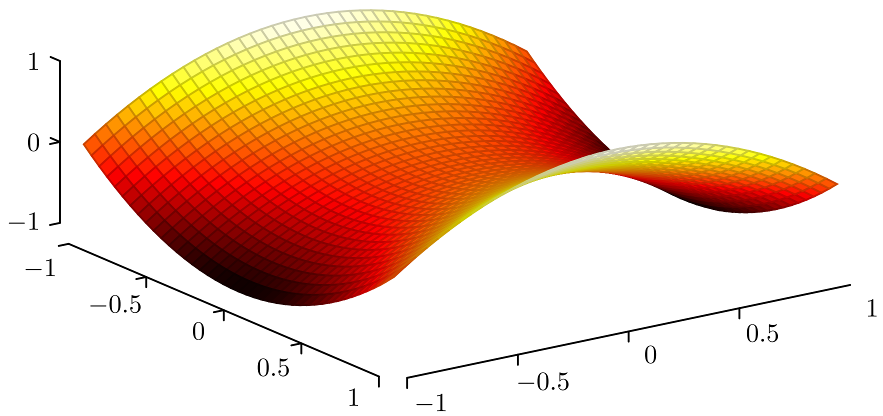

*(b)* $q_2(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ *es semidefinida positiva ya que se anula en toda la recta* $y = -x$;




*(c)* $q_3(x,y) = -q_1(x,y)$ *es definida negativa;*

*(d)* $q_4(x,y) = -q_2(x,y)$ *es semidefinida negativa;*

*(e)* $q_5(x,y) = x^2 - y^2$ *es indefinida, porque por ejemplo* $q(1,0) = 1 > 0$ *mientras que* $q(0,1) = -1 < 0$.




Nuestro próximo objetivo es encontrar una herramienta que nos permita clasificar formas cuadráticas de manera sencilla. Comencemos por observar que si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Por lo tanto $q$ es

- definida positiva si $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
- semidefinida positiva si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
- definida negativa si $\lambda_i < 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
- semidefinida negativa si $\lambda_i \leq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
- indefinida si existe $i, j$ tal que $\lambda_i \lambda_j < 0$.

¿Qué pasa en general?

**Ejemplo 7.3.3.** *Clasificar las siguientes forma cuadrática*

$$q(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz.$$

**Solución.** Comencemos por observar que

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a $q$. Como $A$ es simétrica es diagonalizable. A continuación diagonalizamos $A$. Comencemos por observar que

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = (3 - \lambda)(6 - \lambda)(9 - \lambda).$$

Por lo tanto los autovalores de $A$ son 3, 6 y 9. A continuación calculamos los autovectores de $A$.

$\lambda = 3$. Tenemos que

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

No es complicado ver que

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \colon (A - 3I_3)x^t = 0\} = \langle \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \rangle = E_3.$$

Entonces $\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$ es un autovector de $A$ asociado a 3.

$\lambda = 6$. Tenemos que

$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso se puede ver que

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \colon (A - 3I_3)x^t = 0\} = \langle \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) \rangle = E_6.$$

Entonces $\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ es un autovector de $A$ asociado a 6.

$\lambda = 9$. Tenemos que

$$A - 9I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En este caso se puede ver que

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \colon (A - 9I_3)x^t = 0\} = \langle \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right) \rangle = E_9.$$

Entonces $\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$ es un autovector de $A$ asociado a 9.

Notemos que

$$\left\{ \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right), \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right) \right\}$$

es una base ortogonal. Si normalizamos cada uno de sus vectores tendremos una base ortonormal

$$\left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

Entonces

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal y

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^t$$

Por lo tanto

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z & \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right) \\ 6\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z\right) \\ 9\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right) \end{pmatrix}$$

$$= 3\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z\right)^2 + 9\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)^2.$$

Como todos los autovalores de la matriz asociada a $q$ son positivos tenemos que $q(x,y,z) \geq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Veamos cuando vale cero

$$q(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \iff P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $P^t$ es inversible tenemos que la única solución es $(0,0,0)$.

Por lo tanto $q(x,y,z) > 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Es decir $q$ es definida positiva.

**Propiedad 7.3.4.**

Sean $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $A$ su matriz asociada. Entonces

- $q$ es definida positiva si y solo si todos los autovalores de $A$ son mayores estrictos que cero;
- $q$ es semidefinida positiva si y solo si todos los autovalores de $A$ son mayores o iguales que cero;
- $q$ es definida negativa si y solo si todos los autovalores de $A$ son menores estrictos que cero;
- $q$ es semidefinida negativa si y solo si todos los autovalores de $A$ son menores o iguales que cero;
- $q$ es indefinida si $A$ tiene autovalores mayores estrictos que cero y menores estrictos que cero.

**Ejemplo 7.3.5.** *Clasificar las siguientes formas cuadráticas*

*(a)* $q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

*(b)* $q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2.$

**Solución.** *(a)* Calculemos los autovlaores de $A$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10).$$

Por lo tanto $1, 10$ son los autovalores de $A$, de lo que se deduce que $q$ es definida positiva.
*(b)* Primero identifiquemosla matriz asociada a $q$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora identificamos los autovalores de $A$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

y por lo tanto los autovalores de $A$ son $0, 1, 6$. De lo que se deduce que $q$ es semidefinida positiva.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica tal que la forma cuadrática asociada a $A$ es semidefinida positiva y $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal tal

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definimos la **raíz cuadrada** de $A$ de la siguiente manera

$$\sqrt{A} = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**Ejemplo 7.3.6.** *En el Ejemplo 7.3 vimos que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

*tiene asociada una forma cuadrática definida positiva. Ademas vimos que*

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^t$$

*donde*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

*Entonces*

$$\sqrt{A} = P \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^t.$$

Supongamos ahora que la matriz asociada a una forma cuadrática $q$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Como $A$ simétrica, existen $\lambda_1, \lambda_2$ autovalores de $A$ y $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, 2)$ autovectores de $A$ asociados a $\lambda_1$ y $\lambda_2$ respectivamente tal que $\{u, v\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 v_1^2 & \lambda_1 u_1 u_2 + \lambda_2 v_1 v_2 \\ \lambda_1 u_1 u_2 + \lambda_2 v_1 v_2 & \lambda_1 u_2^2 + \lambda_2 v_2^2 \end{pmatrix}$$

Si $q$ es definida positiva entonces $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y por lo tanto $a = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 v_1^2 > 0$ y $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$.

Por otro lados si $\det(A) > 0$ entonces $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ o $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Si además pedimos que $0 < a = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 v_1^2$, tenemos que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, lo que implica que $q$ es definida positiva.

Por lo tanto hemos probado que

$$q \text{ es definida positiva } \iff a > 0 \text{ y } \det(A).$$

Ahora presentaremos un resultado que generaliza el anterior, pero antes debemos introducir notación. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Llamamos **menores principales** a los siguientes determinantes

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_{11} \\
\Delta_2 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
\Delta_3 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
\Delta_n &= \det(A).
\end{aligned}$$

**Propiedad 7.3.7.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por $q(x) = xAx^t$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces

- $q$ es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$;
- $q$ es definida negativa si y sólo si $(-1)^i \Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$;
- $q$ es indefinida en cualquier otro caso.

**Ejemplo 7.3.8.** *Clasificar las formas cuadráticas que tienen como matrices asociadas a las siguientes*

*(a)* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

*(b)* $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

*(c)* $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Solución.** *(a)* Observemos que $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 1$, y $\Delta_3 = 3$. Entonces la forma cuadrática asociada a $A$ es definida positiva.

*(b)* Observemos que $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 0$, y $\Delta_3 = 0$. Entonces la propiedad no sirve para clasificar en este caso. Calculemos los autovalores de $B$. Observemos que

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \lambda\,(1-\lambda)\,(\lambda - 10)$$

y por lo tanto los autovalores de $C$ son $0, 1, 10$ lo que implica que la forma cuadrática asociada a $B$ es semidefinida positiva.

*(c)* Observemos que $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 0$, y $\Delta_3 = 0$. Como en el caso anterior, la propiedad no sirve para clasificar en este caso y tenemos que calcular los autovalores de $C$. Observemos que

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = -\lambda \left( \frac{3 - \sqrt{17}}{2} - \lambda \right) \left( \frac{3 + \sqrt{17}}{2} - \lambda \right)$$

y por lo tanto los autovalores de $C$ son $\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ lo que implica que la forma cuadrática asociada a $C$ es indefinida.

**Teorema 7.3.9.**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $A$ es inversible si y solo si la forma cuadrática definida por $q(x) = x(A^tA)x^t$ es definida positiva.

*Demostración.* Si $q$ es definida positiva entonces

$$0 < \det(A^tA) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2$$

entonces $\det(A) \neq 0$ y por lo tanto $A$ es inversible.

Supongamos ahora que $A$ es inversible y probemos que $q$ es definida positiva. Comencemos por observar que

$$q(x) = x(A^tA)x^t = (Ax^t)^t(Ax^t) = \|Ax^t\|^2 \geq 0$$

Por lo tanto para probar que $q$ es definida positiva tenemos que demostrar que $q(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

$$0 = q(x) = \|Ax^t\| \Longleftrightarrow Ax^t = 0.$$

Como $A$ es inversible la única solución de $Ax^t = 0$ es $x = 0$. Con lo cual queda demostrado que $q$ es definida positiva. $\square$

**Ejemplo 7.3.10.** *Hallar todos los valores de $a$ para los cuales la siguiente forma cuadrática es definida positiva*

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Solución.** Calculemos los menores principales de la matriz asociada a $q$ :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a; \\ \Delta_2 &= a^2 - 1 = (a-1)(a+1); \\ \Delta_3 &= a^3 + 2 - 3a = (a-1)^2(a+2). \end{aligned}$$

Sabemos que $q$ es definida positiva si y sólo si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, y $\Delta_3 > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 > 0 \Longleftrightarrow a > 0;\\
&\Delta_2 > 0 \Longleftrightarrow a > 1 \text{ o } a < -1;\\
&\Delta_3 > 0 \Longleftrightarrow a > -2.
\end{aligned}$$

Entonces podemos concluir que $q$ es definida positiva si y sólo si $a > 1$.

**Ejemplo 7.3.11.** *La función de costes de una empresa viene representada por*

$$C = L^2 + 3LK + 3K^2,$$

*siendo $K$ y $L$ el trabajo y el capital respectivamente. El equipo de economistas de dicha empresa recibe una notificación según la cual deben facilitar al consejo directivo de la empresa las cantidades de capital y trabajo que minimizan los costes.*

*Reunido dicho equipo llegan a la conclusión de que las cantidades pedidas son $L = K = 0$. Justifique la respuesta.*

**Solución.** Observemos que

$$C = \begin{pmatrix} L & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ K \end{pmatrix}$$

es una forma cuadrática. Calculemos los menores principales de la matriz asociada a $C$

$$\Delta_1 = 1 > 0 \quad \Delta_2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} > 0.$$

Por lo tanto $C$ es definida positiva, lo que implica que en $(0, 0)$ se alcanza el mínimo absoluto de $C$.

En el caso que el determinante de la matriz asociada a la forma cuadrática sea 0 tenemos el siguiente resultado.

**Propiedad 7.3.12.**

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por $q(x) = xAx^t$. Si $\det(A) = 0$, entonces

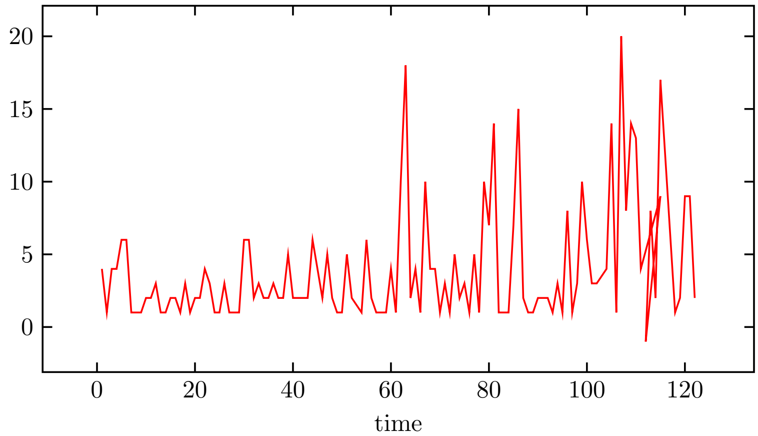
- Si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ entonces $q$ es semidefinida positiva;
- Si $(-1)^i\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ entonces $q$ es semidefinida negativa.

# Capítulo 8

# Series Temporales

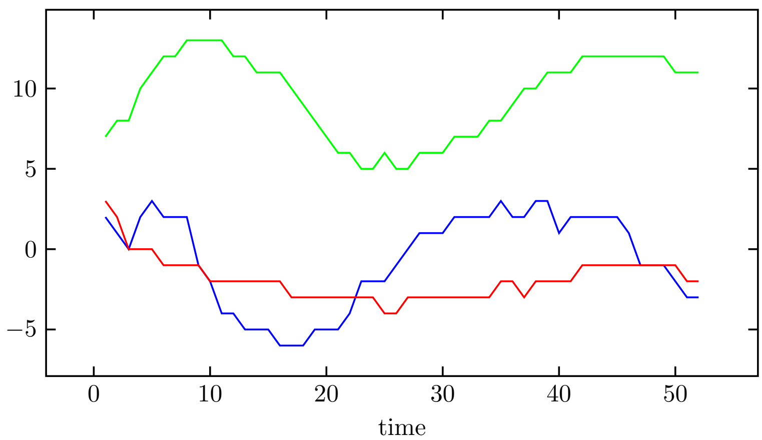
## 8.1 Introducción

Una **serie temporal** (o **serie de tiempo**) es el resultado de observar una variable a lo largo del tiempo en un intervalos regulares (cada día, cada mes, cada año, etc).




Vamos a suponer que las observaciones están ordenados cronológicamente y, espaciados entre sí de manera uniforme, así los datos usualmente son dependientes entre sí.

El objetivo del análisis de series temporales es desarrollar modelos capaces de predecir, interpretar y testear hipótesis relativas a datos económicos



Formalmente una serie temporal es una función

$$y = f(t)$$

donde $t$ es la variable independiente y toma valores en un conjunto discreto $D$. Como asumimos que las observaciones están ordenados cronológicamente y, espaciados entre sí de manera uniforme, asumimos que $D$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$.

Si notamos de la siguiente manera

$$y_t = f(t)$$

tenemos una sucesión $\{y_t\}_{t\in D}$, y esta sucesión es a la que denominamos serie temporal.

## 8.2 Ecuaciones en diferencias

En este contexto podemos introducir una noción similar a la noción de derivada para funciones de una variable.

- **Primera diferencia**
$$\Delta y_t \coloneqq y_t - y_{t-1};$$
- **Segunda diferencia**
$$\begin{aligned}\Delta^2 y_t &\coloneqq \Delta(\Delta y_t)\\ &= (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})\\ &= y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2};\end{aligned}$$
- $n-$**ésima diferencia**
$$\Delta^n y_t \coloneqq \Delta(\Delta^{n-1} y_t).$$

El operador $\Delta$ se denomina el **operador de diferencias**.

Una **ecuación en diferencias** es una expresión del tipo

$$G(y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-n}, t) = 0 \quad \forall t \in D$$

donde $\{y_t\}_{t\in D}$ es una serie temporal.

**Ejemplo 8.2.1.** *La ecuación*

$$5y_t - 4y_{t-2} + y_{t-3} + (t-6)^3 = 0$$

*es una ecuación en diferencias.*

Una ecuación en diferencias se dice **lineal** si se puede expresar de la siguiente manera

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) y_{t-i} + x_t.$$

El número $n$ se denomina el**orden de la ecuación**, los coeficientes $a_1, \dots, a_n$ se denominan los **coeficientes de la ecuación** y $x_t$ se denomina el **proceso de forzamiento** de la ecuación.

- Cuando $x_t \equiv 0$ decimos que la ecuación en diferencias lineal es **homogénea**.
- Cuando los coeficientes de la ecuación no dependen del tiempo diremos que la ecuación en diferencias lineal es de coeficientes constantes.

**Comentario 8.2.2.**

Observemos que cualquier ecuación en diferencias lineal

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) y_{t-i} + x_t.$$

se puede rescribir de la siguiente manera

$$y_t - y_{t-1} = (a_1(t) - 1) y_{t-1} + \sum_{i=2}^{n} a_i(t) y_{t-i} + x_t$$

es decir

$$\Delta y_t = (a_1(t) - 1) y_{t-1} + \sum_{i=2}^{n} a_i(t) y_{t-i} + x_t.$$

**Ejemplo 8.2.3.** *Resolver la siguiente ecuación en diferencias*

$$\Delta y_t = 2.$$

**Solución.** Comencemos por observar que

$$\Delta y_t = 2 \Longleftrightarrow y_t - y_{t-1} = 2 \Longleftrightarrow y_t = y_{t-1} + 2.$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y_0 + 2 \\ y_2 & = & y_1 + 2 = y_0 + 4 \\ y_3 & = & y_2 + 2 = y_0 + 6 \\ & \vdots & \\ y_n & = & y_0 + 2n \end{array}$$

Es decir

$$y_t = 2t + C$$

donde $y_0 = C$.

Verifiquemos

$$y_t = 2t + C = 2(t-1) + C + 2 = y_{t-1} + 2.$$

Por lo tanto

$$\Delta y_t = 2 \checkmark$$

Observemos que en el ejemplo anterior tenemos infinitas soluciones, ya que la constante $C$ puede tomar cualquier valor.

**Ejemplo 8.2.4.** *Supongamos que una determinada población de insectos con 100 individuos, duplica su numero en cada generación, y que ademas, 10 nuevos individuos se incorporan en cada generación procedente de otro lugar. Construir una ecuación en diferencias que modele esta situación y posteriormente resolverla.*

**Solución.** Notaremos con $y_t$ a la población de insectos a tiempo $t$. Se sabe que $y_0 = 100$. En este caso no interesa estudiar lo que pasa de $t = 0$ en adelante por eso vamos a considerar $t \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Para cada $t \in \mathbb{N}$, nos dice que la población se duplica y además se suman 10 individuos, es decir

$$y_t = 2y_{t-1} + 10 \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Comencemos a resolverlo

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & 2y_0 + 10 \\ y_2 & = & 2y_1 + 10 = 2^2 y_0 + 2 \cdot 10 + 10 = 2^2 y_0 + 3 \cdot 10 \\ y_3 & = & 2y_2 + 10 = 2^3 y_0 + 6 \cdot 10 + 10 = 2^3 y_0 + 7 \cdot 10 \\ & \vdots & \\ y_n & = & 2^n y_0 + (2^n - 1)10. \end{array}$$

Entonces, usando que $y_0 = 100$ tenemos que

$$y_t = 2^t \cdot 100 + (2^t - 1)10 = 2^t \cdot 110 - 10.$$

Verifiquemos

$$y_0 = 2^0 \cdot 110 - 10 = 100 \checkmark$$

y para todo $t \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} 2y_{t-1} + 10 &= 2(2^{t-1} \cdot 110 - 10) + 10 \\ &= 2^t \cdot 110 - 20 + 10 \\ &= 2^t \cdot 110 - 10 \\ &= y_t \checkmark \end{aligned}$$

Observemos que en el ejemplo anterior encontramos una única solución. La diferencia entre el primer ejemplo y el ultimo, es que en el último tenemos una condición inicial.

**Ejemplo 8.2.5.** *Resolver* $y_t = 0.7y_{t-1} + x_t$ $t \in \mathbb{Z}$.

**Solución.** Observemos que

$$\begin{aligned} y_t &= 0.7y_{t-1} + x_t \\ &= (0.7)^2 y_{t-2} + 0.7x_{t-1} + x_t \\ &= (0.7)^3 y_{t-3} + (0.7)^2 x_{t-2} + 0.7x_{t-1} + x_t \\ &\vdots \\ &= (0.7)^n y_{t-n} + (0.7)^{n-1} x_{t-(n-1)} + \cdots + 0.7x_{t-1} + x_t \\ &= (0.7)^n y_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} (0.7)^i x_{t-i}. \end{aligned}$$

Proponemos como solución

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} (0.7)^i x_{t-i}.$$

Verifiquemos

$$y_{t-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (0.7)^i x_{t-1-i} \Longrightarrow 0.7y_{t-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (0.7)^{i+1} x_{t-1-i}$$

tomando $j = i + 1$ tenemos que

$$0.7y_{t-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (0.7)^j x_{t-j} = y_t - x_t.$$

Por lo tanto

$$y_t = 0.7y_{t-1} + x_t \checkmark$$

¿Es la única solución? La respuesta esta pregunta es no. Veamos

$$y_t = C(0.7)^t + \sum_{i=0}^{\infty} (0.7)^i x_{t-i}$$

es solución para toda constante $C$. Como

$$y_{t-1} = C(0.7)^{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} (0.7)^i x_{t-1-i}$$

entonces

$$(0.7)y_{t-1} + x_t = C(0.7)^t + \sum_{i=0}^{\infty}(0.7)^{i+1}x_{t-1-i} + x_t.$$

Ahora tomando $j = i + 1$, resulta que

$$(0.7)y_{t-1} + x_t = C(0.7)^t + \sum_{j=1}^{\infty}(0.7)^j x_{t-j} + x_t = y_t \checkmark$$

Por lo tanto en este caso no tenemos unicidad de solución. Es mas tenemos infinitas soluciones.

## 8.3 Método iterativo

### 8.3.1 Con condición inicial

Si se conoce el valor de $y$ en algún período específico, un método directo para halla la solución es iterar hacia adelante desde ese período. Denominamos al valor conocido de $y$ como la **condición inicial** o el valor de $y$ para $t = 0$.

Para ilustrar el proceso consideremos la siguiente ecuación en diferencia de orden uno

$$y_t = ay_{t-1} + x_t \quad \forall t \in \mathbb{N}, \tag{8.1}$$

con condición inicial $y_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
y_1 &= ay_0 + x_1 \\
y_2 &= ay_1 + x_2 = a(ay_0 + x_1) + x_2 = a^2y_0 + ax_1 + x_2 \\
y_3 &= ay_2 + x_3 = a(a^2y_0 + ax_1 + x_2) + x_3 = a^2y_0 + a^2x_1 + ax_2 + x_3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es

$$y_t = \sum_{i=0}^{t-1} a^i x_{t-i} + a^t y_0 \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

¿Es la única solución de (8.1)? Supongamos que tenemos dos soluciones $y^1$ e $y^2$ de (8.1) con condición inicial $y_0$, entonces

$$\begin{aligned}
y_t^1 &= ay_{t-1}^1 + x_t, \\
y_t^2 &= ay_{t-1}^2 + x_t,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{N}$ y $y_0^1 = y_0^2 = y_0$. Por lo tanto

$$y_t^1 - y_t^2 = a(y_{t-1}^1 - y_{t-1}^2) \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

y $(y^1 - y^2)_0 = 0$. Es decir que $y^1 - y^2$ es solución de la ecuación homogénea asociada a (8.1) con condición inicial 0. Mas concretamente, $y^1 - y^2$ resuelve

$$\begin{cases} y_t = ay_{t-1} & \forall t \in \mathbb{N}, \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Es claro que la única solución de este ultimo problema es 0 y por lo tanto $y^1 - y^2 = 0$. Lo que implica que $y^1 = y^2$.

Hemos probado que la solución de (8.1) con condición inicial $y_0$ es única.

### 8.3.2 Sin condición inicial

En el caso de no tener un condición inicial, no tenemos un tiempo $t_0$ donde parar nuestra iteración y por lo tanto

$$\begin{aligned} y_t &= ay_{t-1} + x_t \\ &= a(ay_{t-2} + x_{t-1}) + x_t = a^2 y_{t-2} + ax_{t-1} + x_t \\ &= a^2 a(y_{t-3} + x_{t-2}) + ax_{t-1} + x_t = a^3 y_{t-3} + a^2 x_{t-2} + ax_{t-1} + x_t \\ &\vdots \\ &= a^m y_{t-m} + \sum_{i=0}^{m-1} a^i x_{t-i}. \end{aligned}$$

Si $|a| < 1$ y $y$ es acotada entonces

$$a^m y_{t-m} \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty.$$

Por lo tanto

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}.$$

¿Es la única solución? Como vimos en el ultimo de nuestros ejemplos

$$y_t = Ca^t + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}.$$

también resulta una solución de nuestro problema. Por lo tanto en este caso, tenemos infinitas soluciones.

### 8.3.3 Relación entre los dos casos

Vimos que

$$y_t = Ca^t + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}.$$

es solución de

$$y_t = ay_{t-1} + x_t.$$

Ahora si queremos que satisfaga la condición inicial $y_0$ necesitamos que

$$y_0 = C + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{-i}.$$

es decir que necesitamos que

$$C = y_0 - \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{-i}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_t &= \left( y_0 - \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{-i} \right) a^t + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i} \\ &= y_0 a^t - \sum_{i=0}^{\infty} a^{i+t} x_{-i} + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}. \end{aligned}$$

Si tomamos $j = t + i$ tenemos que

$$y_t = y_0 a^t - \sum_{j=t}^{\infty} a^j x_{t-j} + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i}.$$

Tomando $j = i$ resulta que

$$y_t = y_0 a^t - \sum_{i=t}^{\infty} a^i x_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i} = y_0 a^t \sum_{i=0}^{t-1} a^i x_{t-i}$$

que es la solución que obtuvimos en el primer caso.

### 8.3.4 Dependencia del coeficiente

Consideremos la siguiente ecuación en diferencias de primer orden

$$\begin{cases} y_t = a y_{t-1} + x_t, \\ y_0 = 1. \end{cases} \tag{8.2}$$

Esta ecuación en diferencias tiene asociada la siguiente ecuación homogénea

$$\begin{cases} y_t = a y_{t-1}, \\ y_0 = 1, \end{cases} \tag{8.3}$$

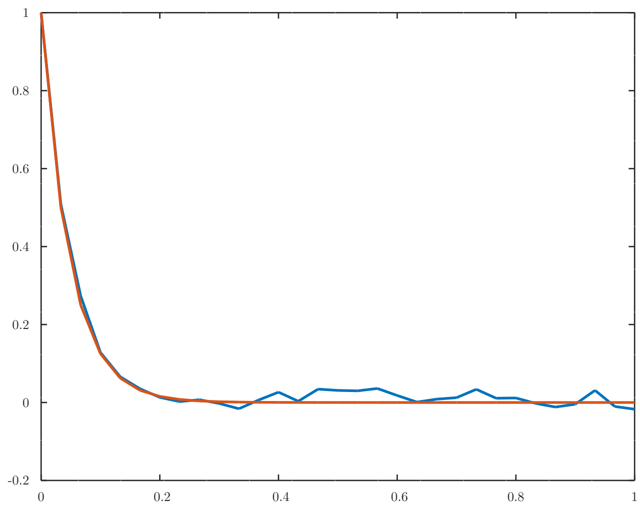
que tiene como solución $y_t^h = a^t$.

A continuación estudiaremos el comportamiento de las soluciones del problema (8.2) y (8.3) con respecto al coeficiente $a$.

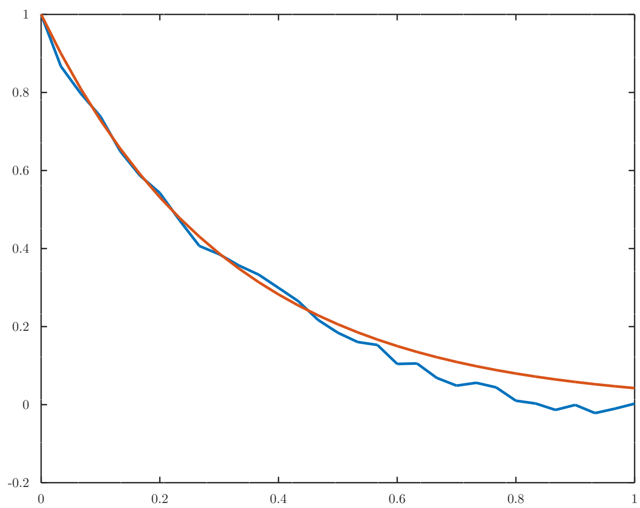
Se grafican las soluciones de ambos problemas bajo las siguientes condiciones:

- $t \in \{0, \ldots, 30\}$;
- $x_t$ se toman de manera aleatoria entre $(0, \frac{1}{30})$.

En todos los casos el gráfico con color azul es la solución de (8.2) y el de color rojo es la solución del no homogéneo

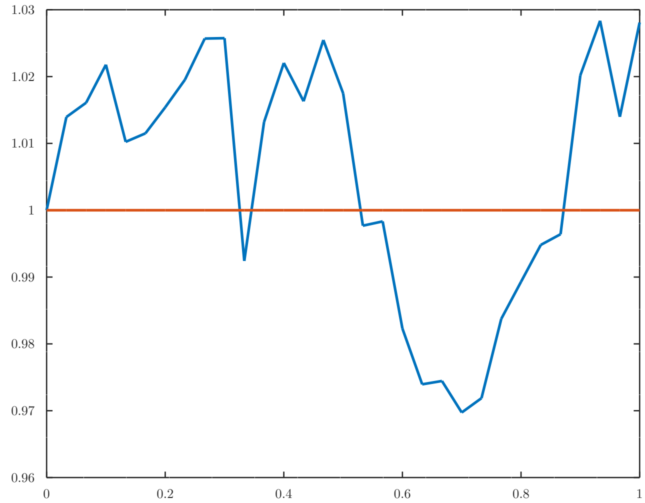



$a = 0.5$



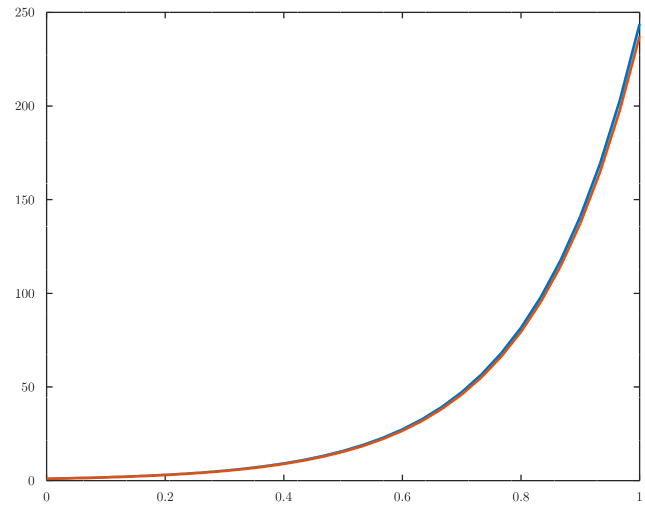

$a = 0.9.$

En este dos casos se observa que ambas funciones tienden a 0 cuando el tiempo se va infinito. Observar que en ambos casos la solución del homogéneo es decreciente.




$a = 1$

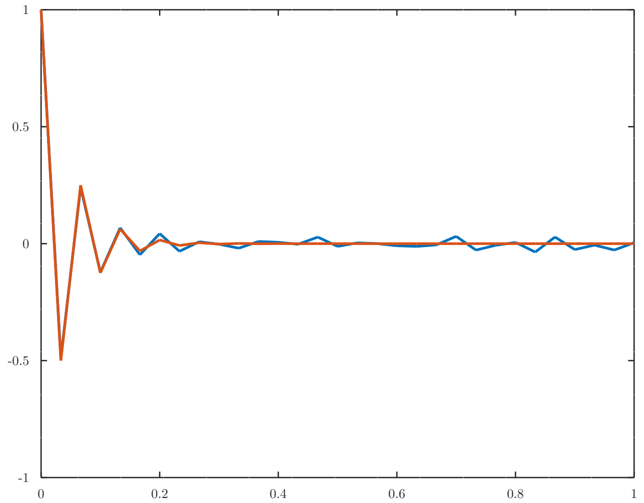
En este caso la solución del homogéneo es constantemente 1.



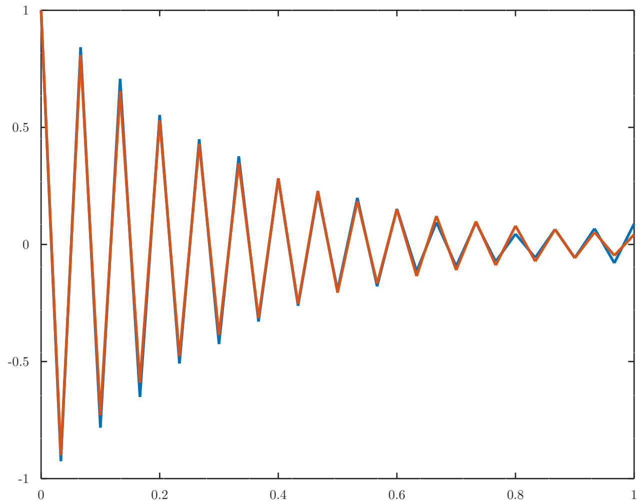

$a = 1.2.$

En este caso se observa que las dos soluciones tienden a infinito cuando $t$ tiende a infinito y que la solución homogénea es creciente.

Ahora estudiamos el caso en el coeficiente $a < 0$

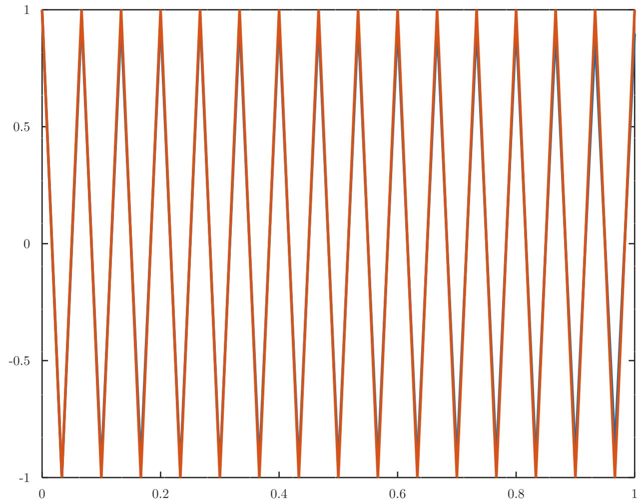



$a = -0.5.$



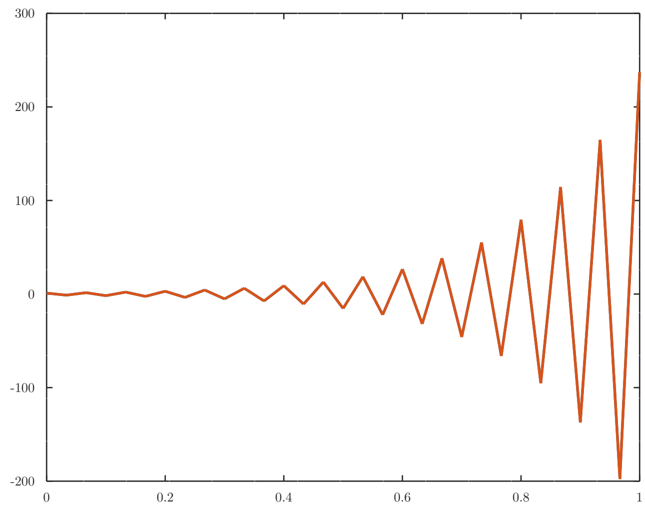

$a = -0.9.$

En ambos casos las soluciones oscilan a 0.




$a = -1.$

En este caso la solución homogénea oscila entre 1 y $-1$.




$a = -1.2.$

En este caso la soluciones son oscilantes y tienden en modulo a infinito.

Podemos resumir lo que sucede para el problema homogéneo de la siguiente Si $y_0 \neq 0$ se observa lo siguiente

- Si $y_0 > 0$ ($y_0 < 0$), $a > 0$ y $a \neq 1$ entonces $y$ es creciente (decreciente);
- Si $a < 0$ entonces $y$ oscila;

- Si $|a| < 1$ entonces $y_t \to 0$ cuando $t \to \infty$.
- Si $|a| > 1$ entonces $|y_t| \to \infty$ cuando $t \to \infty$ en este caso decimos que la solución es **no estable**.
- Si $a = 1$ entonces $y_t \equiv y_0$.
- Si $a = -1$ entonces

  $$y_t = \begin{cases} y_0 & \text{si } t \text{ es par,} \\ -y_0 & \text{si } t \text{ es impar.} \end{cases}$$

  En este caso decimos que la solución es **meta estable**.

## 8.4 Otro método para hallar soluciones

Comencemos observando que si $y^1$ e $y^2$ son soluciones de

$$y_t = ay_{t-1} + x_t \tag{8.4}$$

entonces $y^1 - y^2$ es solución de la ecuación homogénea asociada a (8.4) es decir

$$y_t = ay_{t-1}.$$

Entonces, por lo que vimos existe una constante $C$ tal que

$$(y^1 - y^2)_t = Ca^t,$$

por lo tanto

$$y_t^1 = Ca^t + y_t^2.$$

Es decir que se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 8.4.1.**

La soluciones de una ecuación en diferencias lineal son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a esta más una solución particular.

**Ejemplo 8.4.2.** *En el ejemplo en la sección anterior mostramos que las soluciones de*

$$y_t = ay_t + x_t$$

*son*

$$y_t = Ca^t + \sum_{i=0}^{\infty} a^i x_{t-i} = y_t^h + y^p.$$

Los que nos dice el resultado anterior es que para hallar las soluciones de una ecuación en diferencias tendremos que hallar todas las soluciones de la ecuación homogénea asociada y una solución particular. Entonces la pregunta que surge es la siguiente: ¿cómo saber cuantas son las soluciones de una ecuación homogénea? La respuesta a esta pregunta es el siguiente teorema.

**Teorema 8.4.3.**

Las soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea forman un espacio vectorial. La dimensión de este espacio es el orden de la ecuación.

Luego el método para hallar las soluciones de una ecuación en diferencias lineal se reduce a los siguientes 4 pasos:

Paso 1. Hallar las soluciones de la ecuación homogénea asociada a mi ecuación en diferencias lineal.

Paso 2. Hallar una solución particular de a mi ecuación en diferencias lineal.

Paso 3. Obtener las solución general de mi ecuación en diferencias como la suma de las soluciones de la ecuación homogénea asociada a esta mas la solución particular.

Paso 4. En caso de tener una condiciones iniciales, imponerlas para fijar las constantes que aparecen en la solución general.

## 8.5 Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden

**Ejemplo 8.5.1.** *Hallar las soluciones de*

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3.$$

**Solución.** En este caso como no tenemos condición inicial necesitamos realizar los pasos 1,2 y 3.
*Paso 1.* Buscamos la solución de la ecuación homogénea asociada a la nuestra, es decir

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2}.$$

Sabemos que el espacio de soluciones de esta ecuación tiene dimensión dos, por lo tanto necesitamos hallar dos soluciones linealmente independientes para poder generar todo el espacio de soluciones.

Proponemos como posible solución

$$y_t^h = Cr^t.$$

¿Existe $C$ y $r$ de manera tal que $y_t^h$ es solución de mi ecuación en diferencias lineal homogénea?

$$\begin{aligned} y_t^h = 0.9y_{t-1}^h - 0.2y_{t-2}^h &\iff Cr^t = 0.9Cr^{t-1} - 0.2Cr^{t-2} \\ &\iff Cr^t - 0.9Cr^{t-1} + 0.2Cr^{t-2} = 0 \\ &\iff Cr^{t-2}\left(r^2 - 0.9r + 0.2\right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $C = 0$ o $r = 0$ o

$$r^2 - 0.9r + 0.2 = 0.$$

En los dos primeros caso $y_t^h = 0$ y por lo tanto no tengo soluciones linealmente independiente. Veamos que pasa cuando

$$r^2 - 0.9r + 0.2 = 0 \iff r = \frac{2}{5} \quad \text{o} \quad r = \frac{1}{2}.$$

Entonces tengo las siguientes soluciones

$$y_t^1 = \left(\frac{2}{5}\right)^t \quad \text{y} \quad y_t^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Verifiquemos

$$\begin{aligned} y_t^1 - 0.9y_{t-1}^1 + 0.2y_{t-2}^1 &= \left(\frac{2}{5}\right)^t - 0.9\left(\frac{2}{5}\right)^{t-1} + 0.2\left(\frac{2}{5}\right)^{t-2} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^t \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 0.9\left(\frac{2}{5}\right) + 0.2\right] \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_t^2 - 0.9y_{t-1}^2 + 0.2y_{t-2}^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^t - 0.9\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} + 0.2\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^t \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0.9\left(\frac{1}{2}\right) + 0.2\right] \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

Hemos probado que $y_t^1$ y $y_t^2$ son dos soluciones de la ecuación homogénea.

Veamos si $y_t^1$ y $y_t^2$ son linealmente independientes. Supongamos que existen $a$ y $b$ dos números reales tales que

$$ay_t^1 + by_t^2 = 0$$

para todo $t$. En particular

$$\begin{aligned} 0 &= ay_0^1 + by_0^2 = a + b \iff a = -b \\ 0 &= ay_1^1 + by_1^2 = a\frac{2}{5} + b\frac{1}{2} \iff a = -\frac{4}{5}b \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-b = -\frac{4}{5}b \iff b = 0 \implies a = 0,$$

Es decir $y_t^1$ y $y_t^2$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Luego cualquier solución de la ecuación homogénea se escribe de la siguiente manera

$$C_1\left(\frac{2}{5}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

*Paso 2.* Buscamos un solución particular de nuestra ecuación, es decir buscamos una solución de

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3.$$

Como el forzante es 3, proponemos como solución una serie temporal constante, es decir $y_t = C$. Veamos como tendría que se $C$ para que $y_t$ sea solución

$$\begin{aligned} y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3 &\iff C = 0.9C - 0.2C + 3 \\ &\iff C = 0.7C + 3 \\ &\iff 0.3C = 3 \\ &\iff C = 10. \end{aligned}$$

Por lo tanto mi solución particular es $y_t = 10$ Verifiquemos

$$\begin{aligned} y_t^1 = 0.9y_{t-1}^1 - 0.2y_{t-2}^1 + 3 &\iff 10 = 0.9 \cdot 10 - 0.2 \cdot 10 + 3 \\ &\iff 10 = 10 \checkmark \end{aligned}$$

*Paso 3.* De acuerdo a los paso 1 y 2, tenemos que todas las soluciones de mi ecuación son

$$y_t = C_1\left(\frac{2}{5}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + 10$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

**Ejemplo 8.5.2.** *Hallar las soluciones de*

$$\begin{cases} y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-1} + 3 \\ y_0 = 13 \\ y_1 = 11.3 \end{cases}$$

**Solución.** En el ejemplo anterior mostramos que todas las soluciones de la ecuación son de la forma

$$y_t = C_1 \left(\frac{2}{5}\right)^t + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t + 10.$$

Ahora tenemos que elegir $C_1$ y $C_2$ para que se cumplan las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} 13 = y_0 = C_1 + C_2 + 10 &\Longleftrightarrow 3 = C_1 + C_2 \\ 11.3 = y_1 = C_1\frac{2}{5} + C_2\frac{1}{2} + 10 &\Longleftrightarrow 1.3 = C_1\frac{2}{5} + C_2\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De lo que se deduce que $C_1 = 2$ y $C_2 = 1$. Por lo tanto la única solución de nuestro problema es

$$y_t = 2\left(\frac{2}{5}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t + 10.$$

En esta sección buscaremos las soluciones de la siguiente ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c. \tag{8.5}$$

Vimos que las soluciones de esta ecuación son las soluciones de la ecuación homogénea asociada mas una solución particular.

Comencemos por encontrar una solución particular. Como el termino de forzamiento es una constante, proponemos como solución particular una serie temporal constante, es decir

$$y_t = k \in \mathbb{R}.$$

Observemos que $y_t$ es solución de (8.5) si y solo si

$$c = K + a_1 K + a_2 K = K(1 + a_1 + a_2).$$

Entonces si $1 + a_1 + a_2 \neq 0$ entonces $y_t$ es solución de (8.5) si y solo si

$$K = \frac{c}{1 + a_1 + a_2}.$$

Si $1 + a_1 + a_2 = 0$ y $c \neq 0$, las series temporales constantes no son solución, en este caso proponemos como solución

$$y_t = Kt \quad (k \in \mathbb{R}).$$

En este caso podemos observar que $y_t$ es solución de (8.5) si y solo si

$$\begin{aligned} c &= K(t+2) + a_1 K(t+1) + a_2 Kt \\ &= Kt(1 + a_1 + a_2) + K(a_1 + 2) \\ &= K(a_1 + 2). \end{aligned}$$

Entonces si $1 + a_1 + a_2 = 0$ y $a_1 \neq -2$ entonces $y_t$ es solución de (8.5) si y solo si
$$K = \frac{c}{a_1 + 2}.$$

Por último si $1 + a_1 + a_2 = 0$ y $a_1 = -2$ entonces $a_2 = 1$. Proponemos como solución
$$y_t = Kt^2 \quad (k \in \mathbb{R}).$$
En este caso podemos observar que $y_t$ es solución de (8.5) si y solo si
$$\begin{aligned} c &= K(t+2)^2 + a_1K(t+1)^2 + a_2Kt^2 \\ &= K(t^2 + 4t + 4) - 2K(t^2 + 2t + 1) + Kt^2 \\ &= 2K. \end{aligned}$$
Entonces si $1 + a_1 + a_2 = 0$ y $a_1 = -2$ entonces $y_t$ es solución de (8.5) si y solo si
$$K = \frac{c}{2}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que una solución particular de (8.5) es
$$y_t^p = \begin{cases} \dfrac{c}{1 + a_1 + a_2} & \text{si } a_1 + a_2 \neq -1, \\ \dfrac{c}{a_1 + 2}t & \text{si } a_1 + a_2 = -1 \text{ y } a_1 \neq -2, \\ \dfrac{c}{2}t^2 & \text{se } a_1 = -2 \text{ y } a_2 = 1. \end{cases}$$

Ahora buscamos las soluciones de la ecuación homogénea asociada (8.5), es decir buscamos las soluciones de la siguiente ecuación lineal homogénea
$$y_{t+2} + a_1y_{t+1} + a_2y_t = 0. \tag{8.6}$$

Sabemos que el espacio de soluciones de (8.6) es un espacio vectorial de dimensión 2, por lo tanto necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes de (8.6) para tener una base del espacio de soluciones.

Ahora, proponemos como solución
$$y_t = r^t$$
donde $r \in \mathbb{R}$ con $r \neq 0$. Entonces $y_t$ es una solución de (8.6) si y solo si
$$\begin{aligned} 0 &= r^{t+2} + a_1r^{t+1} + a_2r^t \\ &= r^t \left(r^2 + a_1r + a_2\right). \end{aligned}$$
Por lo tanto $y_t$ es una solución de (8.6) si y solo si
$$r^2 + a_1r + a_2 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática se denomina la ecuación característica de (8.6) o de (8.5). Se plantean 3 casos.
*Caso 1:* $a_1^2 - 4a_2 > 0$. En este caso la ecuación característica tiene dos soluciones reales

$$r_1, r_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

y por lo tanto

$$y_t^1 = r_1^t \quad \text{y} \quad y_t^2 = r_2^t.$$

Veamos que estas dos soluciones son linealmente independiente, es decir, queremos ver que si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$ay_t^1 + by_t^2 = 0 \Longrightarrow a = b = 9.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &= ay_0^1 + by_0^2 = a + b \\ 0 &= ay_1^1 + by_1^2 = ar_1 + br_2. \end{aligned}$$

La matriz asociada a este sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = r_1 - r_2 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2} > 0$, el sistema homogéneo tiene una única solución $a = b = 0$.

Hemos probado que $y_t^1$ y $y_t^2$ son linealmente independiente, por lo tanto todas las soluciones de (8.6) son

$$y_t^h = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t.$$

*Caso 2:* $a_1^2 - 4a_2 = 0$. En este caso la ecuación característica tiene una única solución

$$r = \frac{-a_1}{2}$$

y por lo tanto tenemos una única solución

$$y_t^1 = r^t.$$

Necesitamos encontrar otra solución que sea linealmente independiente con $y_t^1$. Proponemos como solución

$$y_t^2 = tr^t.$$

Chequeamos,

$$\begin{aligned} y^2_{t+2}+a_1y^2_{t+1}+a_2y^2_t &= (t+2)r^{t+2}+a_1(t+1)r^{t+1}+a_2tr^t \\ &= r^t(r^2(t+2)+a_1r(t+1)+a_2t) \\ &= r^t\left[t(r^2+a_1r+a_2)+(2r+a_1)r\right] \\ &= r^{t+1}\left[2\left(-\frac{a_1}{2}\right)+a_1\right] \\ &= 0\checkmark \end{aligned}$$

Ahora tenemos que ver que $y_1^t$ y $y_2^t$ son linealmente independientes. Supongamos que existen $a$ y $b$ números reales tales que

$$ay_t^1+by_t^2=0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= ay_0^1+by_0^2=a, \\ 0 &= ay_1^1+by_1^2=ar+br, \end{aligned}$$

entonces $a=b=0$. Por lo tanto $y_1^t$ y $y_2^t$ son linealmente independientes, lo que implica que en este caso las soluciones de de (8.6) son

$$y_t^h=C_1r^t+C_2tr^t=(C_1+C_2t)\,r^t.$$

*Caso 3:* $a_1^2-4a_2<0$. En este caso la ecuación característica tiene dos soluciones complejas

$$r_1,r_2=\alpha\pm i\beta$$

donde

$$\alpha=-\frac{a_1}{2} \quad \text{y} \quad \beta=\frac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}.$$

Las soluciones de (8.6) en este caso son

$$y_t^h=R^t\left(C_1\cos(\theta t)+C_2\sin(\theta t)\right),$$

donde $R=\sqrt{a_2}$ y $\theta\in[0,2\pi)$ tal que

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\alpha}{R}, \\ \sin(\theta) &= \frac{\beta}{R}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 8.5.3.** *Hallar la soluciones de las siguientes ecuaciones en diferencias de segundo orden.*

*(a)* $y_{t+2}-3y_{t+1}+2y_t=6$ *con* $y_0=1$ *y* $y_1=1$.

*(b)* $y_{t+2}+y_{t+1}+\frac{1}{4}y_t=9$ *con* $y_0=0$ *y* $y_1=1$.

*(c)* $y_{t+2} + \frac{1}{4}y_t = 5$ *con* $y_0 = 0$ *y* $y_1 = 1$.

*(d)* $y_{t+2} + y_t = 2$ *con* $y_0 = 0$ *y* $y_1 = 2$.

**Solución.** *(a)* Primero buscamos las soluciones de la ecuación homogénea asociada al problema, para eso planteamos la ecuación característica del problema

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Que tiene como soluciones

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases}$$

Por lo tanto las soluciones de la ecuación homogénea asociadas son

$$y_t^h = C_1 2^t + C_2.$$

Ahora busquemos una solución particular. Como $1+a_1+a_2 = 1-3+2 = 0$ y $a_1 \neq -2$, tenemos que

$$y_t^p = \frac{6}{a_1 + 2}t = \frac{6}{-3+2}t = -6t.$$

Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación son

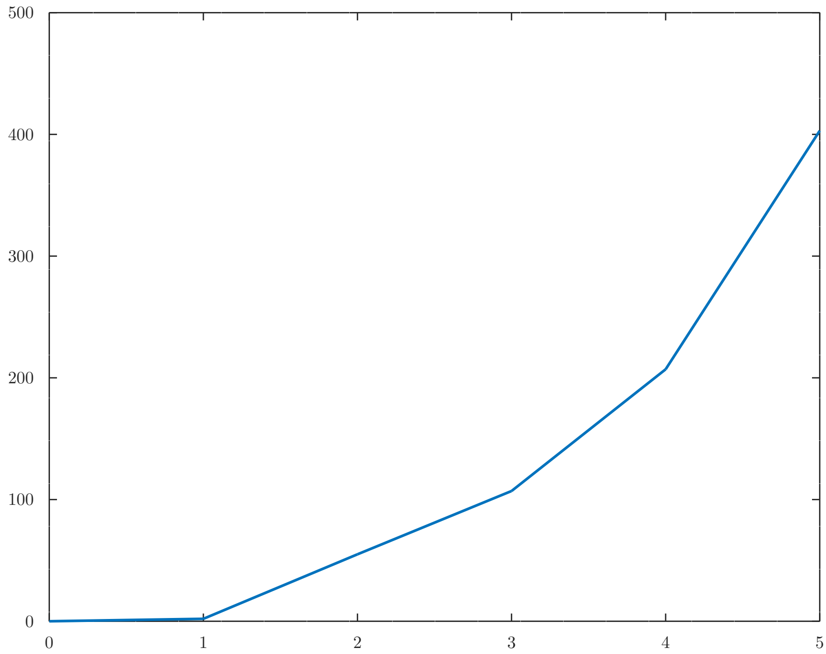
$$y_t = C_1 2^t + C_2 - 6t.$$

Por ultimo imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} 1 = y_0 = C_1 + C_2 &\Longrightarrow 1 = C_1 + C_2, \\ 1 = 2C_1 + C_2 - 6 &\Longrightarrow 7 = 2C_1 + C_2, \end{aligned}$$

lo que implica que $C_1 = 6$ y $C_2 = -5$. Entonces la única solución del problema es

$$y_t = 6 \cdot 2^t - 6t - 5.$$




*(b)* Nuevamente busquemos primero las soluciones de la ecuación homogénea asociada, para esto planteamos la ecuación característica del problema

$$r^2 + r + \frac{1}{4} = 0.$$

Esta ecuación tiene como solucion

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces las soluciones de la ecuación homogénea asociada son

$$y_t^h = \left(-\frac{1}{2}\right)^t (C_1 + C_2 t)\,.$$

Busquemos ahora la solución particular de la ecuación. Como

$$1 + a_1 + a_2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

tenemos que

$$y_t^p = \frac{9}{\frac{9}{4}} = 4.$$

Entonces las soluciones del ecuación son

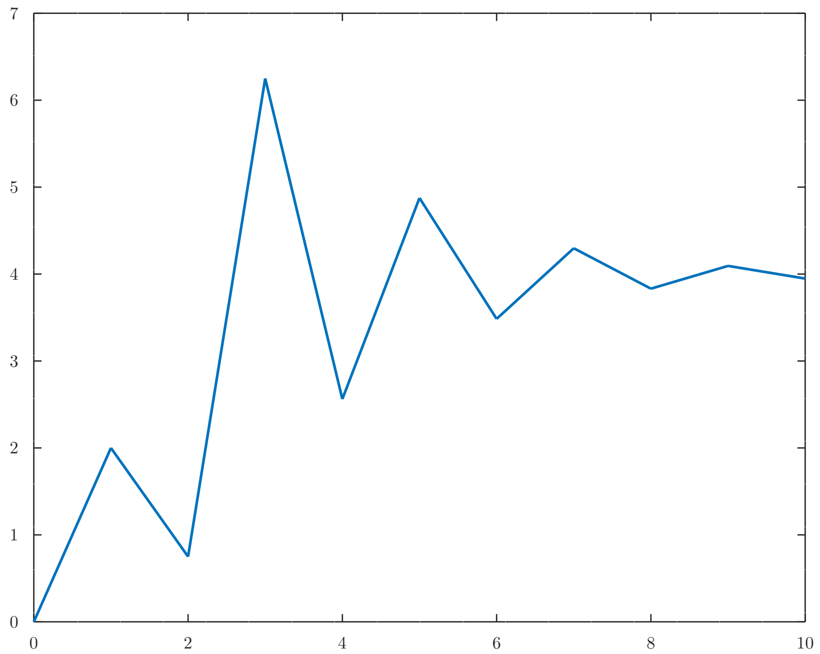
$$y_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t (C_1 + C_2 t) + 4.$$

Ahora imponemos las condiciones iniciales

$$
\begin{aligned}
&0 = y_0 = C_1 + 4 \Longrightarrow C_1 = -4, \\
&1 = y_1 = -\frac{1}{2}(C_1 + C_2) + 4 = -\frac{1}{2}(-4 + C_2) + 4 \\
&\quad \Longrightarrow C_2 = 10.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la única solución del problema son

$$
y_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t (-4 + 10t) + 4.
$$




*(c)* Como en los ejemplos anteriores comenzamos buscando las soluciones de la ecuación homogénea asociada, para esto planteamos la ecuación característica del problema

$$
r^2 + \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow r = \pm\frac{i}{2}.
$$

Entonces las soluciones de la ecuación homogéneo asociada son

$$
y_t^h = \left(\frac{1}{2}\right)^t (C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t))
$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$ y

$$\cos(\theta) = 0 \text{ y } \sin(\theta) = 1.$$

Por lo tanto $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, lo que nos dice que las soluciones de la ecuación homogénea asociada son

$$y_t^h = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left[C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right].$$

Ahora busquemos una solución particular. Como

$$1 + a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

tenemos que

$$y_t^p = \frac{5}{\frac{5}{4}} = 4.$$

Entonces todas las soluciones de la ecuación son

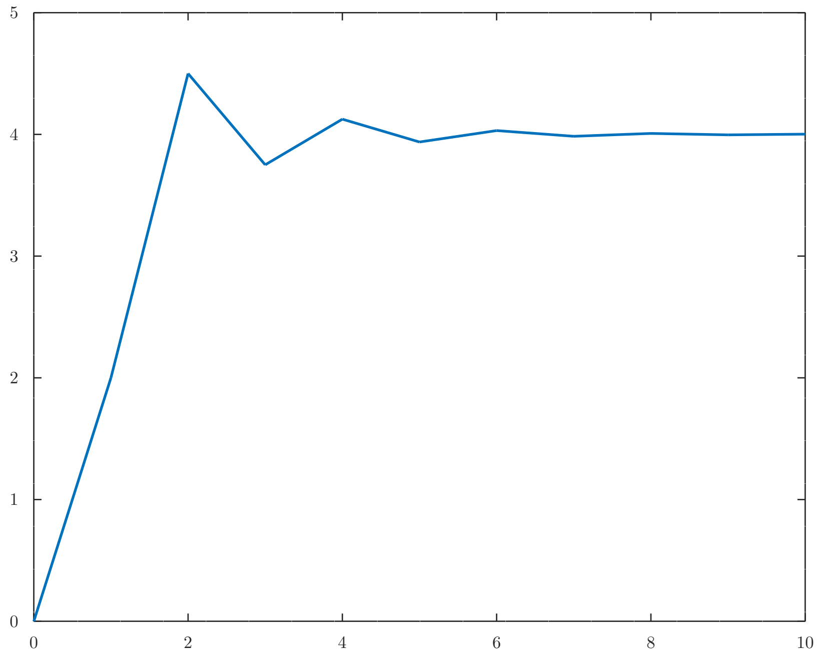
$$y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left[C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] + 4.$$

Ahora imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} 0 = y_0 = C_1 + 4 &\Longrightarrow C_1 = -4, \\ 1 = y_1 = \frac{1}{2}C_2 + 4 &\Longrightarrow C_2 = -6. \end{aligned}$$

Por lo tanto la única solución del problema es

$$y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left[-4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 6 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] + 4.$$




*(d)* Comenzamos buscando las soluciones de la ecuación homogénea asociada, para esto planteamos la ecuación característica del problema

$$r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r = \pm i.$$

Entonces las soluciones de la ecuación homogéneo asociada son

$$y_t^h = C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t)$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$ y

$$\cos(\theta) = 0 \text{ y } \sin(\theta) = 1.$$

Por lo tanto $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, lo que nos dice que las soluciones de la ecuación homogénea asociada son

$$y_t^h = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Ahora busquemos una solución particular. Como

$$1 + a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$$

tenemos que

$$y_t^p = \frac{2}{2} = 1.$$

Entonces todas las soluciones de la ecuación son

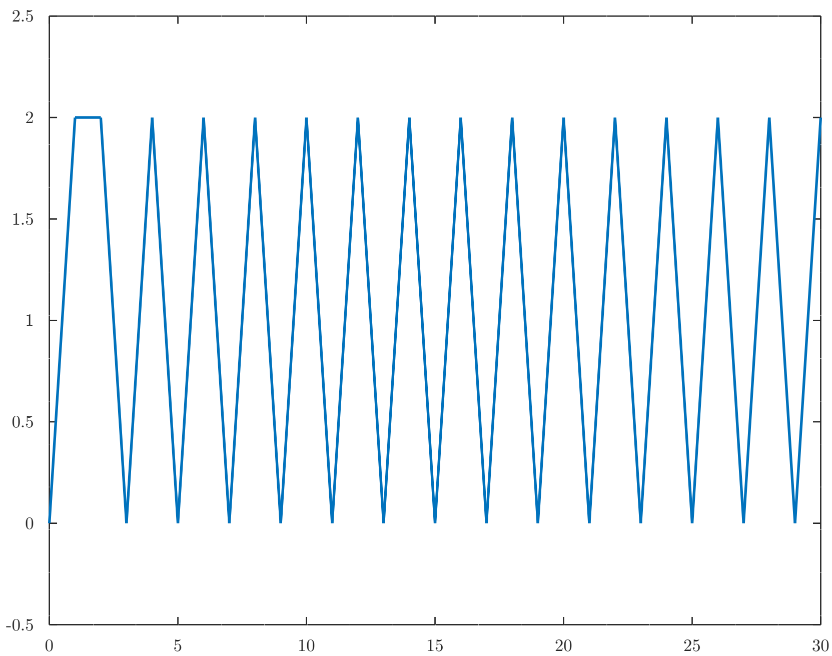
$$y_t = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1.$$

Ahora imponemos las condiciones iniciales

$$0 = y_0 = C_1 + 1 \Longrightarrow C_1 = -1,$$
$$2 = y_1 = C_2 + 1 \Longrightarrow C_2 = 1.$$

Por lo tanto la única solución del problema es

$$y_t = -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1.$$




**Ejemplo 8.5.4.** *Hallar una solución particular de la siguiente ecuación*

$$y_{t+2} + y_{t+1} - 3y_t = 7^t.$$

**Solución.** Planteamos como solucion

$$y_t^p = K7^t \quad K \in \mathbb{R}.$$

Veamos que condición le tenemos que pedir a $K$ para que $y_t^p$ sea solución del problema

$$\begin{aligned} 7^t &= K7^{t+2} + K7^{t+1} - 3K7^t \\ &= 7^t K(49 + 7 - 3) \\ &= 7^t K53. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y_t^p$ es solución particular de la ecuación si y solo si

$$K = \frac{1}{53}.$$

Es decir

$$y_t^p = \frac{7^t}{53}.$$

En general, si $m \neq 0$ se puede ver que una solución particular de

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = cm^t$$

es

$$y_p = \begin{cases} \dfrac{c}{m^2 + a_1 m + a_2} m^t & \text{si } m^2 + a_1 m + a_2 \neq 0, \\ \dfrac{c}{2m^2 + a_1 m} t m^t & \text{si } m^2 + a_1 m + a_2 = 0, 2m + a_1 \neq 0, \\ \dfrac{c}{2m^2} t^2 m^t & \text{si } m^2 + a_1 m + a_2 = 2m + a_1 = 0. \end{cases}$$

**Ejemplo 8.5.5.** *Hallar una solución particular de la siguiente ecuación*

$$y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = t^2.$$

**Solución.** Planteamos como solucion

$$y_t^p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2.$$

Veamos que condición le tenemos que pedirles a $A_0, A_1, A_2$ para que $y_t^p$ sea solución del problema

$$\begin{aligned} t^2 &= A_0 + A_1(t+2) + A_2(t+2)^2 + 5\left[A_0 + A_1(t+1) + A_2(t+1)^2\right] \\ &\quad + 2\left[A_0 + A_1 t + A_2 t^2\right] \\ &= 8A_0 + 7A_1 + 9A_2 + (8A_1 + 14A_2)t + 8A_2 t^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y_t^p$ es solución particular de la ecuación si y solo si

$$\begin{aligned} 0 &= 8A_0 + 7A_1 + 9A_2, \\ 0 &= 8A_1 + 14A_2, \\ 1 &= 8A_2. \end{aligned}$$

Necesitamos que

$$A_2 = \frac{1}{8}, \quad A_1 = -\frac{7}{32} \quad A_0 = \frac{13}{256}.$$

Es decir

$$y_t^p = \frac{13}{256} - \frac{7}{32}t + \frac{1}{8}t^2.$$

En general, si $n \neq 0$ entonces una solución particular de

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = ct^n$$

es de la forma

$$y_t^p = A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n.$$