Práctica 1

Espacios muestrales y eventos. Conteo.

1. Espacio muestrales, eventos y propiedades

1.1. Ejercicio 1

Dos dados equilibrados se arrojan de forma secuencial y se registran los valores obtenidos.

i. Liste los resultados del espacio muestral Ω. Clasifique su cardinal según corresponda: finito, infinito numerable o infinito no numerable. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada resultado posible?

ii. Liste los elementos de los siguientes eventos:

$$A = \{\text{La suma de ambos resultados es de al menos (es por lo menos) 5}\}$$
$$B = \{\text{El valor del primer dado es mayor al valor del segundo}\}$$
$$C = \{\text{El valor del primer dado es 4}\}$$

iii. Liste los elementos de $A \cap C, B \cup C$ y $A \cap (B \cup C)$.

iv. Liste los resultados del espacio muestral Ω y la probabilidad de cada posible resultado si dos dados se arrojan **simultáneamente**. Note qué diferencias observa respecto el inciso i.

1.2. Ejercicio 2

Ana, Beatriz y Cecilia tiran la misma moneda en ese orden sucesivamente hasta que salga cara (c) por primera vez. Quien obtiene cara por primera vez, gana.

Si no sale cara, sale cruz ($\times$). El espacio muestral, entonces, está dado por:

$$\Omega = \{c, \times c, \times \times c, \times \times \times c, \dots\}$$

Defina los siguientes eventos

$$A = \{\text{Ana gana}\} \quad B = \{\text{Beatriz gana}\} \quad C = \{\text{Cecilia gana}\}$$

i. Explique qué denota cada elemento de Ω.

ii. Defina, en términos de subconjuntos de Ω, los eventos A, B y $(A \cup B)^c$.

1.3. Ejercicio 3

Suponga el siguiente experimento: Usted arroja un dado hasta que aparece el número 1, una vez que esto ocurre el experimento culmina.

i. ¿Cuál es el espacio muestral Ω de este experimento? Clasifique su cardinal según corresponda: finito, infinito numerable o infinito no numerable.

ii. Denote por A_m al evento en que se necesitan m tiros hasta obtener por primera vez el número 1. ¿Qué elementos del espacio muestral están contenidos en A_m ?

iii. ¿Qué evento describe el conjunto $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c$?

1.4. Ejercicio 4

Usted está interesado en investigar sobre la relación entre nivel educativo y la intención de voto en las próximas elecciones presidenciales entre el personal administrativo de la universidad. Usted considerará dos niveles de estudio - universitario completo y universitario incompleto- y los votos pueden ir al Partido Justicialista, Unión Cívica Radical o Independientes. Suponga que no es posible votar en blanco ni impugnar el voto. Si en la universidad hay 10 empleados administrativos:

i. ¿Cuántos resultados posibles hay en el espacio muestral?

ii. ¿Cuántos resultados hay en el evento en el que al menos un miembro del personal administrativo tenga nivel educativo igual a universitario incompleto?

iii. ¿Cuántos resultados hay en el evento en el que ningún miembro del personal administrativo votará a un Independiente?

1.5. Ejercicio 5

Clasifique las siguientes igualdades como verdaderas o falsas

i. $[A \cup B \cup C \cup D]^c = A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c$

ii. $[(A \cup B) \cap (C \cup D)]^c = \left(A^c \cap B^c\right) \cup \left(C^c \cap D^c\right)$

iii. $\left[A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c\right]^c = A \cup B \cup C \cup D$

iv. Si dos eventos son mutuamente excluyentes, entonces son exhaustivos.

1.6. Ejercicio 6

A partir de los axiomas vistos en clase, demuestre las siguientes propiedades:

i. $P(A) = 1 - P\left(A^c\right)$

ii. $P(\varnothing) = 0$

iii. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

iv. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Ejercicios de conteo y probabilidades

2.1. Ejercicio 1: contando arreglos

2.1.1. Trabajadores y puestos

Si veinte trabajadores se asignan a veinte puestos, uno en cada puesto, ¿Cuántos arreglos diferentes posibles existen?

2.1.2. The Beatles e instrumentos

Suponga que en la banda de *The Beatles* los 4 integrantes podían tocar los 4 instrumentos más usados por la banda (guitarra, bajo, batería y piano). ¿De cuántas formas diferentes podrán distribuirse los instrumentos a la hora de grabar una canción? Suponga ahora que en realidad George Harrison y Ringo Star sólo pueden tocar la batería y la guitarra (ambos instrumentos) ¿Cuántos posibles arreglos de instrumentos asignados uno a cada miembro de la banda posibles podría haber entonces?

2.1.3. Permutaciones de letras

¿Cuántos arreglos diferentes de letras se pueden hacer a partir de las siguientes palabras?

i. MURCIÉLAGO

ii. PARPADEO

iii. PROBABILIDAD

iv. MISSISSIPPI

2.1.4. Pasantías en organismos internacionales

En los organismos internacionales suele existir una cuota de regiones para las pasantías. Suponga que para Asia el cupo es de 10, para América del Sur es de 7, para Europa de 4 y para América Central de 2. Si hay 50 candidatos de Asia, 15 de América del Sur, 7 de Europa y 3 de América Central; ¿de cuántas formas diferentes pueden otorgarse las pasantías?

2.1.5. Sentando a los invitados

Usted está planeando una reunión y para ello invita a 8 amigos, 4 de Independiente y 4 de Racing. Si los invitados se sientan en una fila (uno al lado del otro) ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse, si

i. no hay restricciones en la forma de sentarse?

ii. las personas A y B siempre deben sentarse juntas?

iii. sólo un hincha de Independiente y uno de Racing pueden sentarse juntos?

iv. los invitados son cuatro parejas que deben sentarse juntas?

2.1.6. Patentamientos en Argentina

El sistema de patentamiento de Argentina consistía en tres letras (de la A a la Z) y tres números (del 0 al 9). Recuerde que, en este sistema, las letras están a la izquierda de los números. Las letras desde la R a la Z están reservados para los autos que existían bajo el antiguo régimen de patentamiento. Las letras de la A a la Q se destinan a los nuevos patentamientos. En el año 2011 hay autos cuyas patentes comienzan con la letra K. Sin contar esta letra, ¿cuántos pantentamientos quedaban por hacer en Argentina en el año 2011?

2.1.7. Mesa redonda (permutaciones cíclicas)

i. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 8 personas en una mesa circular de manera que lo único que importe es quién se sienta al lado de quién, no en qué asiento específico se sienta cada persona?

ii. Suponga ahora que de esas 8 personas hay 1 pareja, ¿en cuántas configuraciones diferentes se puede sentar la pareja junta?

iii. Suponga ahora que de esas 8 personas hay 4 parejas, ¿en cuántas configuraciones diferentes se sientan cada una de la parejas juntas?

iv. Suponga ahora que de esas 8 personas hay 4 parejas, ¿en cuántas configuraciones diferentes se sientan 3 de las 4 parejas al lado de su media naranja?

v. Suponga ahora que de las 8 personas están los cuatro Beatles y se quieren sentar juntos de manera que Ringo esté pegado a la izquierda de Lennon y Lennon esté pegado a la izquierda de McCartney, ¿cuántas configuraciones diferentes existen?

v. Suponga ahora que de las 8 personas están los cuatro Beatles y se quieren sentar juntos Ringo, Lennon y McCartney en cualquier orden, ¿cuántas configuraciones diferentes existen?

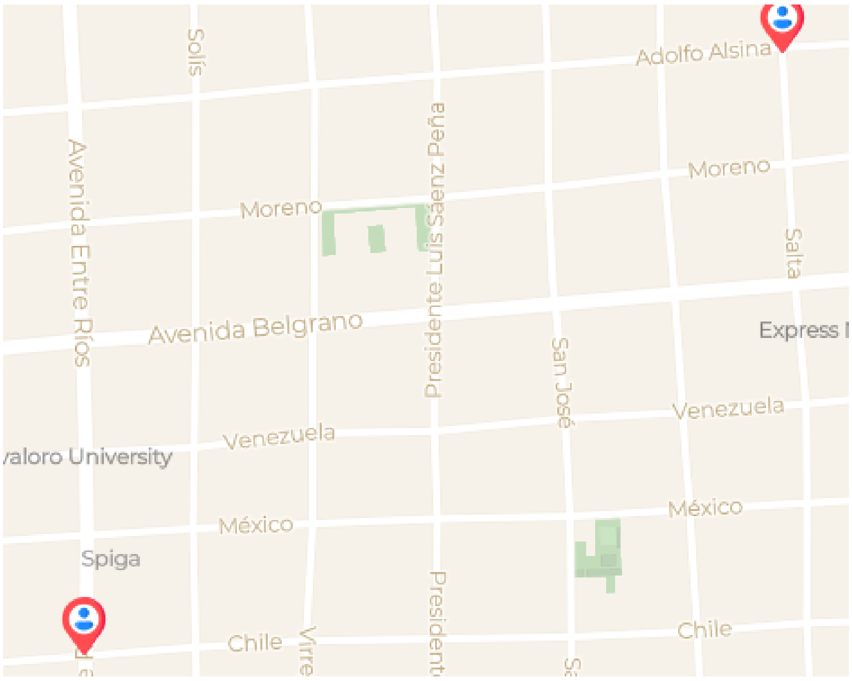
2.1.8. Bolitas indistinguibles y cajitas

i. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar $N \geq 2$ bolitas indistinguibles en $k \geq 4$ cajitas si tiene que pasar que en la segunda cajita tiene que haber **exactamente** 1 bolita y también que en la cuarta tiene que haber **exactamente** 1 bolita?

ii. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar $N \geq 2$ bolitas indistinguibles en $k \geq 4$ cajitas si tiene que pasar que en la segunda cajita tiene que haber **exactamente** 1 bolita o que en la cuarta tiene que haber **al menos** 1 bolita?

2.1.9. Caminos posibles

Imagine que se encuentra en la esquina de las calles Chile y Entre Ríos, y que quiere llegar a la esquina de las calles Salta y Adolfo Alsina.¿Cuántos caminos diferentes puede tomar? Asuma que **solamente puede ir hacia adelante y hacia a la derecha doblando en las esquinas** (no hay galerías que le permitan caminar por la mitad de la manzana), caminando por las veredas (suponga por la duración del ejercicio que usted no es Spiderman ni puede usar su telaraña).



2.2. Ejercicio 2: calculando probabilidades

2.2.1. Suponga que hay una urna con 3 bolillas, una roja, una verde y una azul. Ud. toma una muestra de tamaño 2 con reposición

i. ¿Cuántos elementos hay en el espacio muestral?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una bolilla sea roja?

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las bolillas seleccionada sea roja?

iv. Repita si el muestreo es sin reposición

2.2.2. Usted elije al azar, sin reposición 5 cartas de un mazo de 52 cartas con palos ♣♦♠♥.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que le toque exactamente un par simple?

ii. ¿Un par doble?

iii. ¿Un full?

iv. ¿Un póker?

v. ¿Un póker de ases?

2.2.3. Representación de países en comités

En un grupo de personas hay cinco australianos, dos asiáticos, tres africanos y cuatro americanos. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los continentes resulten representados seleccionando comités de cuatro personas? ¿Cuál es la probabilidad de que todos los continentes resulten representados seleccionando comités de cinco personas?

2.2.4. Suponga que usted tiene n llaves, sólo una de ellas abre la puerta. ¿Cuál es la probabilidad de que logre abrir la puerta en el k-ésimo intento si:

i. descarta cada llave que no logra abrir la puerta?

ii. no descarta ninguna llave que no logra abrir la puerta?

2.2.5. Una escuela primaria tiene 100 alumnos. Dicha escuela ofrece tres clases de idioma: inglés, portugués y francés. Hay 28 alumnos en la clase de inglés, 26 en la de francés y 16 en la de portugués. Hay 12 alumnos que toman simultáneamente inglés y francés, cuatro que simultáneamente acuden a clases de inglés y portugués y 6 que están en la clase de francés y portugués. Sólo hay 2 alumnos en tomando las tres clases.

i. Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté en ninguna de las clases de idioma?

ii. Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté tomando solo una clase de idioma?

iii. Si dos alumnos se eligen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el menos uno esté tomando una clase de idioma?

2.2.6. Arrojando dados

i. Usted arroja dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer dado sea igual a seis, dado que la suma de ambos resultados es igual a i? Compute el cálculo para $2 \le i \le 12$.

ii. Usted arroja dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un dado sea igual a 6 dado que los dados arrojan resultados diferentes?

2.2.7. Urna y bolillas

Una urna contiene 6 bolillas blancas y 9 bolillas negras. Si 4 bolillas son extraídas aleatoriamente y sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que las primeras dos elegidas sean blancas y las segundas dos sean negras? ¿Cambia su respuesta obtenido si el muestreo es con reposición?

2.2.8. Probabilidad de default y deuda externa

La probabilidad de que un país entre en default de deuda y tenga una razón de deuda externa a PBI mayor a 1 es el doble a la de un país que entra en default de deuda y tiene una razón de deuda externa a PBI menor o igual a 1. Si el 32 % de los países entran en default y tienen una razón de deuda externa a PBI mayor a 1, ¿Cuál es el porcentaje de países, que habiendo entrado en default, tengan una razón de deuda externa a PBI mayor a 1?

2.2.9. Cumpleaños y estaciones del año

En un año hay cuatro estaciones. Suponemos que la probabilidad de nacer en una estación del año (verano, otoño, primavera e invierno) es equiprobable. En un grupo de 7 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya por lo menos una persona nacida en cada estación?

2.2.10. Un poco más del principio de inclusión exclusión

Sea (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad donde se considera una familia finita de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Demuestre que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right)$$

Práctica 2
Probabilidad condicional

1. Ejercicio 1

El 98 % de todos los bebés nacen con vida. Sin embargo el 15 % de todos los nacimientos son por cesárea y cuando se ejecuta una cesárea el 96 % de los bebes nacen con vida. Si aleatoriamente se elige una mujer que no haya tenido una cesárea, ¿cuál es la probabilidad de que su bebé haya nacido con vida?

2. Ejercicio 2

El 46 % de los votantes de cierta ciudad se identifican con el Partido A, el 30 % se identifican con el Partido B, mientras que el 24 % se identifican con el Partido C. En una elección reciente votaron solo el 35 % de los miembros del Partido A, el 62 % de los miembros del Partido B y el 58 % de los del Partido C.

(a) Usted elige un votante al azar. ¿Cuál es la probabilidad que el votante pertenezca al Partido A?

(b) Usted elige un votante al azar. ¿Cuál es la probabilidad que el votante pertenezca al Partido B?

(c) Usted elige un votante al azar. ¿Cuál es la probabilidad que el votante pertenezca al Partido C?

(d) ¿Qué porcentaje de votantes participaron en la elección?

3. Ejercicio 3

Usted toma un mazo de 52 cartas y lo divide en cuatro pilas de 13 cartas. Defina el evento E_i como el evento en que en la i-ésima pila hay sólo un as. Calcule $P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\right)$, es decir, la probabilidad que haya exactametente un as en cada mazo.

4. Ejercicio 4

Suponga que hay 15 pelotas de tenis en una caja, de las cuales 9 son nuevas. Se eligen aleatoriamente 3 pelotas, se las usa un partido y se devuelven a la caja. Luego se eligen nuevamente tres pelotas de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que en el segundo grupo todas sean nuevas?

5. Ejercicio 5

Considere el siguiente juego. Tome una baraja de 52 cartas cuyas cartas están ordenadas al azar. Las cartas se dan vuelta de una en una. En cualquier momento usted puede decir alto, si la siguiente carta es el as de trébol usted gana el juego, en caso contrario pierde. ¿Existe alguna estrategia que maximice la probabilidad de ganar?

6. Ejercicio 6

A tres prisioneros se les informa que uno será elegido al azar y ejecutado, mientras que los otros dos serán liberados. El prisionero A le pide al guardia que le diga en secreto cual de los otros dos prisioneros va a ser liberado.

El guardia le puede informar al prisionero A si el prisionero B será liberado o si el prisionero C será liberado pero no le puede decir que sucederá con él mismo. **El guardia sabe quién será ejecutado y quiénes serán liberados y, en base a esa información, le contestará a A.**

El prisionero A razona que, de no preguntar, su probabilidad de ser liberado es 2/3 pero si le pregunta al guardia y éste le dice cual de B o C será liberado, entonces su probabilidad de ser liberado disminuye a 1/2.

Debería el prisionero A preguntarle al guardia quien será liberado?

7. Ejercicio 7

Una urna contiene 5 bolillas blancas y 10 negras. Se tira un dado y se extraen la misma cantidad de bolillas que el número obtenido en el dado. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las bolillas sean blancas? ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un tres en el dado, si todas las bolillas obtenidas son blancas?

8. Ejercicio 8

Una prueba para diagnosticar cáncer da resultados correctos el 95 % de las veces, sea que la persona tenga o no la enfermedad. Si el 0,4 % de la población tiene cáncer, calcule la probabilidad de que una persona tenga cáncer, dado que el resultado de su diagnóstico fue negativo.

9. Ejercicio 9

Suponga que la probabilidad de que un hombre tenga hemofilia es 0,5. Si dicho hombre tiene hemofilia, la probabilidad de que sus hijos tengan hemofilia es 0.5. Si este hombre tiene 3 hijos sin la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que él tenga hemofilia? Si este hombre tiene un cuarto hijo, ¿cuál es la probabilidad de que el último hijo tenga hemofilia? Establezca los supuestos realizados para el cálculo.

10. Ejercicio 10

Se lanza una moneda con probabilidad de 2/3 que el resultado sea cara. Si aparece una cara, se extrae una pelota, aleatoriamente, de una urna que contiene dos pelotas rojas y tres verdes. Si el resultado es ceca se extrae una pelota, de otra urna, que contiene dos rojas y dos verdes. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una pelota roja?

11. Ejercicio 11

El 5 % de las unidades producidas en una fábrica se encuentran defectuosas cuando el proceso de fabricación se encuentra bajo control. Si el proceso se encuentra fuera de control, se produce un 30 % de unidades defectuosas. La probabilidad marginal de que el proceso se encuentre bajo control es de 0,92. Si se escoge aleatoriamente una unidad y se encuentra que es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso se encuentre bajo control?

12. Ejercicio 12

Una planta armadora recibe microcircuitos provenientes de tres distintos fabricantes A, B y C. El 50 % del total se compra a A, mientras que a B y C se les compra un 25 % a cada uno. El porcentaje de circuitos defectuosos para A, B y C es 5, 10 y 12 % respectivamente. Si los circuitos se almacenan en la planta sin importar quién fue el proveedor:

(a) Determinar la probabilidad de que una unidad armada en la planta contenga un circuito defectuoso.

(b) Si el circuito no está defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido vendido por el proveedor B?

13. Ejercicio 13

Un inversionista está pensando comprar un número muy grande de acciones de una companía. La cotización de las acciones en la bolsa, durante los seis meses anteriores, es de gran interés para el inversionista. Con base en esta información, se observa que la cotización se relaciona con el producto nacional bruto. Si el PNB aumenta la probabilidad de que el valor de las acciones aumente es 0,8. Si en PNB es el mismo, la probabilidad de las acciones aumenten su valor es de 0,2. Si el PNB disminuye la probabilidad es de sólo 0,1. Si para los siguientes seis meses se asignan probabilidad 0,4, 0,3 y 0,3 a los eventos, el PNB aumenta, es el mismo y disminuye, respectivamente, determinar la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos seis meses.

14. Ejercicio 14

Con base en varios estudios una compañía ha clasificado, de acuerdo a la posibilidad de descubrir petróleo, las formaciones geológicas en tres tipos. La compañía pretende perforar un pozo en un determinado sitio, al que se le asignan probabilidades de 0,35, 0,40 y 0,25 para los tres tipos de formaciones respectivamente. De acuerdo con la experiencia se sabe que el petróleo se encuentra en una 40 % de las formaciones del tipo I, en un 20 % de formaciones del tipo II y un 30 % de formaciones del tipo III. Si la compañía no descubre petróleo en ese lugar, determinar la probabilidad que exista una formación del tipo II.

Práctica 3
Variables aleatorias discretas

1. Ejercicio 1

Cinco hombres y cinco mujeres se ordenan según su desempeño en un examen. Sea X la posición más alta alcanzada por una mujer. Esto es, $X = 1$ implica que la persona que mayor puntaje obtuvo en el examen es una mujer. Encuentre la función de probabilidad de masa de X.

2. Ejercicio 2

Sea X_i una variable aleatoria que toma el valor 1 si la persona i votará en las próximas elecciones al candidato A. Suponga que Ud. encuesta a 25 personas. Defina $T = \sum_{i=1}^{25} X_i$ y encuentre un expresión para $P(T = t)$. Establezca los supuestos debió hacer.

3. Ejercicio 3

Muchos fabricantes tienen programas de control de calidad que incluyen la inspección de materiales recibidos para verificar que no tengan defectos. Supongamos que un fabricante de computadoras recibe tarjetas de computadora en lotes de cinco. Se seleccionan dos tarjetas de un lote para inspeccionarlas. Podemos representar los posibles resultados del proceso de selección por pares. Por ejemplo, el par $(1, 2)$ representa la selección de las tarjetas 1 y 2 para inspeccionarlas.

(a) Hacer una lista de los posibles resultados.

(b) Supongamos que las tarjetas 1 y 2 son las únicas defectuosas en un lote de cinco. Se van a escoger dos tarjetas al azar. Se define X como el número de defectuosas observado entre las inspeccionadas. Encontrar la función de probabilidad puntual de X.

(c) Si se denota $F(x)$ la función de distribución acumulada de X, determinar primero $F(0)$, $F(1)$ y $F(2)$ y luego obtener $F(x)$ para toda otra x.

4. Ejercicio 4

Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,3 & 1 \leq x < 3 \\ 0,4 & 3 \leq x < 6 \\ 0,6 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x \end{cases}$$

y sean los eventos $A = [3, 6]$ y $B = [4, \infty)$

(a) Hallar la función de probabilidad puntual de X.

(b) Calcular $P(A)$, $P(B)$, $P\left(B|A^c\right)$ y $P(A|B)$ de dos maneras: utilizando la función de distribución y utilizando la función de probabilidad puntual.

(c) Halle la esperanza de X.

(d) si Y es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad puntual $p(y)$, función de distribución $F(y)$ y $sop(Y) = \{y : y \in \mathbb{N} \text{ tal que } \underline{y} \leq y \leq \overline{y}\}$, demostrar la siguiente relación entre las funciones de probabilidad puntual y acumulada:

$$p(k) = F(k) - F(k-1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

5. Ejercicio 5

Para recaudar fondos una sociedad de beneficencia propone a los participantes de un evento el siguiente juego: a cambio de \$90 el participante lanza dos dados equilibrados. Si el mínimo de esos dados es 5 o 6 recibe \$300, si ese mínimo fuese 1 o 2 pierde los \$90 que había abonado y en los otros casos, recibe los \$90 que había pagado inicialmente.

(a) Hallar la distribución de $X = \text{mín}\{D_1, D_2\}$ donde D_i es el número obtenido en el dado i. Es decir, X es el valor mínimo obtenido al lanzar los dos dados.

(b) Defina G como la ganancia neta del juego. Encuentre la función de distribución acumulada de G y calcule la ganancia neta esperada.

(c) Suponga que se ha arrojado el primer dado y se ha obtenido el número 6. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de X ahora que se conoce que $D_1 = 6$?

(d) Compute la esperanza de la ganancia del juego condicional a que ha salido el número 6 en el primer dado.

(e) Repita los incisos (c) y (d) si ahora $D_1 = 5$.

(f) Repita los incisos (c) y (d) si ahora $D_1 = 4$. ¿Cambia algo entre los incisos (d), (e) y (f)? Comente.

6. Ejercicio 6

Sea X una variable aleatoria que cumple

$$P(X=0) = \frac{1}{3}, \quad P(X=1) = \frac{1}{2}, \quad P(X=2) = \frac{1}{6}$$

Encuentre la función generatriz de momentos de X, $M_X(t)$.

7. Ejercicio 7 *(Adicional, para repasar)*

Sea X una variable aleatoria que toma valores entre -2, 1 y 2 con probabilidades: $p_X(-2) = 0{,}3$, $p_X(1) = 0{,}2$ y $p_X(2) = 0{,}5$. Hallar la función de probabilidad puntual, la esperanza y varianza de

(a) $Y = -3X + 2$

(b) $W = X^2 - 2$

(c) $Z = \ln(X+3)$

(d) $V = |X|$

8. Ejercicio 8

La fabricación de pantallas táctiles es un proceso complicado, lo que tiene como principal consecuencia que el 5 % de la producción es defectuosa. Sea X el número de pantallas defectuosas en una muestra elegida al azar de tamaño $n = 20$, calcular

(a) $P(X < 3)$

(b) Probabilidad de que el número de pantallas defectuosas sea al menos 5.

(c) Probabilidad de que el número de pantallas defectuosas sea a lo sumo 8.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las 20 pantallas sea defectuosa?

9. Ejercicio 9

Supongamos que un motor de avión falla con probabilidad p independientemente de los otros motores del mismo avión. Un avión funciona correctamente si la mayoría de los motores lo hacen.

(a) Sin efectuar cálculos: ¿qué piensa que será más conveniente para la construcción de un avión confiable, colocar tres motores o cinco motores?

(b) Efectuando cálculos analícelo para $p = 0,4$, $p = 0,5$ y para $p = 0,6$. Concluya.

10. Ejercicio 10

Se pide al decano de la facultad de Economía de cierta Universidad que seleccione tres estudiantes para integrar determinado comité. Se presentan como voluntarios 20 estudiantes de primer año y 30 de segundo. Si del total de 50 voluntarios el decano selecciona al azar a los tres estudiantes requeridos:

(a) ¿cuál es la probabilidad de que sean elegidos uno de primer año y dos de segundo año?

(b) ¿cuál es la probabilidad de que sea elegido por lo menos 1 de primer año?

(c) ¿Cuál es la distribución del número de estudiantes de primer año seleccionados? ¿Qué relación tiene con la distribución de los estudiantes de segundo año seleccionados?

11. Ejercicio 11

Suponga que $p = P($ Tener un hijo varón $) = 0,5$. Una pareja desea tener exactamente dos niñas en su familia. Tendrán hijos hasta que se satisfaga esta condición.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga x hijos?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga cuatro hijos?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga a lo sumo 4 hijos?

(d) ¿Cuántos hijos se esperaría que tenga esta familia? ¿Cuántos hijos varones?

12. Ejercicio 12

Una familia decide tener hijos hasta que tenga tres hijos del mismo sexo. Si se supone que $P($ Varón $) = P($ Mujer $) = 0,5$, ¿cuál es la función de probabilidad puntual de la varuable aleatoria $X = \{$ Número de hijos de la familia $\}$ ¿La variable X tiene distribución conocida?

13. Ejercicio 13

Sea X el número de automóviles de un año y modelo particular que en algún momento en el futuro sufrirán un falla grave en el mecanismo de dirección, que ocasionará pérdida completa de control a alta velocidad". Suponga que X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 10$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 10 automóviles sufran dicha falla?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 10 y 15 (inclusive) autos sufran dicha falla?

14. Ejercicio 14

Si $X \sim P(\lambda = 7,5)$, hallar el valor de k tal que $P(X = k)$ sea máxima, es decir, la moda de la distribución.

15. Ejercicio 15

Suponga que aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto según un proceso de Poisson con tasa de $\alpha = 8$ aviones por hora, de modo que el número de llegadas durante un período de t horas es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 8t$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 aviones pequeños lleguen durante un período de una hora? ¿Por lo menos 5? ¿Por lo menos 10?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 20 aviones pequeños lleguen durante un período de 2 horas y media? ¿De que a lo sumo 10 lleguen durante este período?

16. Ejercicio 16

(a) Mostrar que las probabilidades $p(0), p(1), \ldots$ de una variable X con distribución de Poisson pueden calcularse recursivamente mediante la siguiente expresión:

$$p_X(k) = \frac{\lambda}{k} p_X(k-1) \quad k = 1, 2, \ldots$$

(b) Un teléfono recibe llamados en una cierta residencia según un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 2$ llamadas por horas.

(i) Si Diana se ducha durante 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que no pierda ninguna llamada?

(ii) ¿Cuán larga puede ser a lo sumo la ducha si desea que la probabilidad de no perder ninguna llamada supere 0,5?

17. Ejercicio 17

Defina la función $p(x; \lambda, \mu)$ mediante

$$p(x; \lambda, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} + \frac{1}{2} e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!} & x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

(a) Demuestre que $p(x; \lambda, \mu)$ satisface las dos condiciones necesarias para especificar una pmf. Nota: Si una empresa utiliza dos mecanógrafas A y B, las cuales cometen errores tipográficos a razón de λ por página y a razón de μ por página, respectivamente; y cada una hace la mitad de lo que la empresa requiere mecanografiar, entonces $p(x; \lambda, \mu)$ es la pmf de $X = \{$ Número de errores en una página seleccionada al azar $\}$.

(b) ¿Cuál es la distribución de $Y = \{$ Número de errores en una página seleccionada al azar, tipeada por la mecanógrafa $A\}$?

(c) ¿Cuál es la distribución de $Z = \{$ Número de errores en una página seleccionada al azar, tipeada por la mecanógrafa $B\}$?

18. Ejercicio 18

Una caja contiene tres dados blancos y uno negro. Se toma un dado al azar. Si el dado es blanco, se lo arroja reiteradamente hasta obtener un número mayor que 3. Si el dado extraído es negro, se lo arroja repetidamente hasta obtener un as. Definimos $X = \{$ Cantidad de veces que se arroja un dado $\}$.

(a) Si el dado extraído es blanco, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan precisado 5 tiros hasta obtener un número mayor que 3? ¿Cuál es la distribución de X condicional a elegir un dado blanco?

(b) Si el dado extraído es negro, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan precisado 5 tiros hasta obtener un as? ¿Cuál es la distribución de X condicional a elegir un dado negro?

(c) Halle la probabilidad de que se arroje el dado 5 veces.

19. Ejercicio 19

El número de peras que se recogen en un día de cosecha en un pequeño campo es una variable aleatoria Z que sigue una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 800$. De las Z peras recogidas, un número X de ellas cumplen las especificaciones de tamaño y peso para su comercialización. Supongamos que dado Z, la probabilidad que una pera al azar pueda ser comercializada es $0,6$. Encuentre la distribución de $X \mid Z = z$. Encuentre la distribución de X. Ayuda: recuerde que $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{t^y}{y!} = e^t$.

20. Ejercicio 20

Un mecánico tiene 7 fusibles en una caja de herramientas, sólo cuatro de esos 7 son adecuados para el modelo del auto que está reparando. Elige fusibles en forma aleatoria.

(a) Si cada vez que prueba un fusible y no es el adecuado lo vuelve a colocar en la caja, se define la variable X el número de intentos que realiza hasta hallar el fusible adecuado

(i) ¿Cuál es distribución de la variable X? ¿Cuál es su esperanza y varianza? (ii) Calcule la probabilidad de que se precisen como mínimo 3 intentos hasta hallar el fusible adecuado.

(b) Si cada vez que prueba un fusible no lo vuelve a colocar en la caja, se define la variable Y como el número de intentos que realiza hasta hallar el fusible adecuado

(i) Calcule la función de probabilidad puntual de Y.

(ii) Calcule la esperanza y la varianza de Y.

21. Ejercicio 21

Los registros de ventas diarias de una empresa fabricante de computadoras muestran que venderán 0,1 o 2 sistemas centrales de cómputo con la probabilidad dada por la siguiente tabla:

Número de ventas	Probabilidad
0	0,7
1	0,2
2	0,1

(a) Halle la distribución de probabilidad puntual y la acumulada de la variable X que cuenta el número de ventas en dos días de trabajo suponiendo independencia entre las ventas de uno u otro día.

(b) Sabiendo que en un período de dos días se han registrado ventas, calcule la probabilidad de que se hayan registrado más de 2 ventas.

(c) La cantidad de reparaciones que necesita uno de estos sistemas centrales de cómputo sigue un proceso Poisson de tasa media de ocurrencia 0,025 reparaciones por hora de uso.

(d) Calcule la probabilidad de un sistema necesite a lo sumo 4 reparaciones cuando se lo usa durante 10 días sin interrupción.

(e) Se ponen en funcionamiento 5 de estos sistemas durante 10 días sin interrupción, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de ellos necesite a lo sumo 4 reparaciones?

22. Ejercicio 22

Una máquina electrónica de venta de café da una ganancia de 120 pesos por semana (6 días de trabajo) si no tiene desperfectos. Se contrata un service para reparar la máquina que: cobra 20 pesos por cada desperfecto si en la semana se producen a lo sumo 3 desperfectos; si se producen 4 o más desperfectos en la misma semana el costo de la reparación total abonado es de 70 pesos. Si el número de desperfectos semanales sigue un proceso Poisson de tasa media de ocurrencia 2 :

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 15 días de trabajo se produzcan más de 3 desperfectos?

(b) Halle la función de probabilidad puntual de la variable ganancia neta semanal. ¿Cuál es la ganancia esperada la venta semanal de café?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran 5 semanas de trabajo consecutivas hasta lograr que la ganancia de la semana sea de 120? ¿Qué suposición tuvo que efectuar para contestar a esta pregunta?

23. Ejercicio 23 *(Adicional, para practicar)*

(a) Encuentre la esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución Bernoulli con probabilidad de éxito p

(b) Encuentre la esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución Binomial con n intentos y probabilidad de éxito p

(c) Encuentre la esperanza y varianza de una variable aleatoria con Poisson con tasa de ocurrencia promedio igual a λ

(d) Encuentre esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución geométrica con probabilidad de éxito igual a p

24. Ejercicio 24

Sea X es una variable aleatoria discreta con media $\mathbb{E}(X)$ y varianza $Var(X)$, y sea demuestre entonces se cumple que si $Y = aX + b$:

(a) $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b$

(b) $\text{Var}(Y) = a^2\,\text{Var}(X)$.

25. Ejercicio 25

El juego de azar Quini 6 consiste en acertar 6 números de números que van desde 0 a 46. El costo una tarjeta de Quini 6 tiene un costo de $4. El pozo estimado para el primer premio es de $15,000,000. ¿Cuál es la ganancia esperada? ¿Cuántas veces espera jugar hasta ganar el primer premio? ¿Cuánto espera invertir hasta ganar el primer premio?

26. Ejercicio 26

Un puesto de periódicos ha solicitado cinco ejemplares de cierta edición de una revista de fotografía. Sea X el número de individuos que entran a comprar esta revista. Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 4$, ¿cuál es el número esperado de ejemplares que se venderán?

27. Ejercicio 27

Repita el Ejercicio 23 usando la función generatriz de momentos.

28. Ejercicio 28

La demanda anual de autos en cierta concesionaria es una v.a. con distribución Poisson de parámetro $\lambda = 4$. Los ejecutivos de la concesionaria deciden que comenzaran cada año con un stock de tres autos para suplir la demanda. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se les plantean las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante el año?
2. ¿Cuál es la función de probabilidad puntual del número de autos vendidos en un año?
3. Suponga que la precio de cada auto es $700.000 y el costo unitario para la concesionaria es de $100.000. Hallar la función de probabilidad puntual de la ganancia anual de la concesionaria.

29. Ejercicio 29

Supongamos que Kasparov (campeón mundial de ajedrez) da simultáneas a 100 jugadores amateur. Cada partido es un ensayo de Bernoulli con resultados: *Kasparov pierde* (con probabilidad p) y *Kasparov gana* (con probabilidad $1-p$). Supongamos que $p = 1/100$ y que los resultados de los partidos con cada uno de los amateurs son eventos simultáneamente independientes.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que Kasparov gane todos los partidos? Calcule la probabilidad precisamente y luego aproxime dicha probabilidad usando la distribución de Poisson.

Práctica 4
Variables aleatorias continuas

1. Ejercicio 1

Encuentre la esperanza y la varianza de una variable aleatoria X usando

- la función de densidad $f(x)$ [1], y
- la función generatriz de momentos $M_X(t)$

para

(a) $X \sim$ exponencial con parámetro λ.

(b) $X \sim$ uniforme en el intervalo $[a, b]$.

(c) $X \sim$ Gamma con parámetros (α, λ).

(d) $X \sim f(x;\theta) = \dfrac{1 + x\theta}{2}$ si $x \in [-1, 1]$ y con $\theta \in [-1, 1]$

(e) $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$.

2. Ejercicio 2

Si X es una variable aleatoria exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, demostrar que $\mathbb{E}\left[X^k\right] = \frac{k!}{\lambda^k}$.

Ayuda: tenga en cuenta la función de densidad de una variable aleatoria Gamma.

3. Ejercicio 3

Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f(x) = \left[c^2 x - 0,5c\right] I_{(0,1)}(x)$$

(a) Encuentre el valor de la constante c.

(b) Encuentre la mediana de la variable X y llámela $\tilde{\mu}_X$.

(c) Defina una variable aleatoria $Y = a \cdot X + b$. Encuentre su función de densidad y su función de probabilidad acumulada con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

(d) Demuestre que si $\tilde{\mu}_X$ es la mediana de X entonces $\tilde{\mu}_Y = a\tilde{\mu}_X + b$ es la mediana de Y.

(e) ¿Es el resultado en (d) válido para otro percentil?

4. Ejercicio 4

Suponga que el ingreso en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires es una variable aleatoria X, tal que $\ln X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

[1] Esto es para repasar cálculo de esperanza y varianza de Variables Aleatorias continuas

(a) Encuentre una expresión para el percentil 95. Tenga en cuenta que el percentil será función de μ y σ.

(b) Encuentre la función densidad de X.

5. Ejercicio 5

Sea X el tiempo (en horas) que dedica un alumno a estudiar para un examen. Supongamos que la densidad de X es

$$f(x;\theta) = (\theta + 1)x^{\theta} I_{(0,1)}(x)$$

y que sabemos que $\theta > -1$. Calcule la probabilidad de que un alumno estudie a lo sumo 15 minutos o al menos 45 minutos.

6. Ejercicio 6

La duración de un componente es una variable aleatoria X que se distribuye exponencial con parámetro λ.

(a) Si el costo de operación por unidad de tiempo es c, de forma tal que el costo total es cX. ¿Cuál es el costo esperado de operar este componente durante su duración?

(b) A diferencia del inciso anterior, suponga ahora que el costo de operación no es constante, sino que el costo total de operación: $c\left(1 - \frac{1}{2}e^{aX}\right)$ con $a < 0$, de forma tal que el costo de operación es menor a c cuando el componente es nuevo y va siendo cada vez más caro a medida que el componente es más antiguo. Calcule el costo esperado de operación.

7. Ejercicio 7

Sea U una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$.

(a) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria $X = aU$, siendo $a > 0$. ¿Cuál es la distribución de X?

(b) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ siendo $\lambda > 0$ ¿Cuál es la distribución de X?

(c) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria $Y = U^5$.

(d) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria $X = \ln U$.

(e) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria $W = \frac{U}{U+1}$.

8. Ejercicio 8

Mostrar que si $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces $Y = e^X$ tiene distribución lognormal y su función de densidad es

$$f(y, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2} I_{(0,\infty)}(y)$$

9. Ejercicio 9

Sea X una variable aleatoria tal que su función de densidad es $f_X(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2} I_{(0,\infty)}(x)$. Hallar la función de densidad de la variable aleatoria $Y = X^2$. ¿A qué familia pertenece?

10. Ejercicio 10

Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar.

(a) Considere el evento $\left\{X^2 < y\right\}$. ¿A qué evento donde aparece la variable X es equivalente?

(b) Utilizando el inciso (a), encuentre $P\left(X^2 < y\right)$. Luego, demuestre que X^2 tiene una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad.

11. Ejercicio 11

Sea U una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$. Demostrar que la variable $X = -2\ln(U)$ tiene distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad.

Práctica 4 Bis
Variables aleatorias continuas - Parte 2

1. Ejercicio 1

El porcentaje de alcohol que hay en una botella de litro de cierta bebida es una variable aleatoria X. Supongamos que X tiene densidad $f_X(x) = c(1-x^2)$ para $0 < x < 1$ y $f_X(x) = 0$ en otro caso.

(a) ¿Qué valor debe tomar c para que f_X sea verdaderamente una densidad?

(b) Hallar la función de distribución acumulada de X.

(c) Se producen diez botellas de un litro de estas bebidas, de forma independiente. Calcular el número esperado de botellas con un porcentaje de alcohol menor al 50 %.

2. Ejercicio 2

El precio promedio semanal de las acciones de las compañías que conforman el S&P 500 es \$30, con un desvío standard de \$8.20. Asumí que los precios son variables aleatorias que se distribuyen en forma normal. Para una empresa elegida al azar:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el precio de las acciones sea de al menos \$40?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el precio de las acciones sea menor a \$20?

(c) ¿Qué tan alto debería ser el precio de las acciones para colocar a la empresa en el 10 % más alto del S&P 500?

(d) ¿Creés que tiene sentido hacer el supuesto de normalidad en la distribución de los precios? Por qué? Por qué no?

(e) ¿Cómo cambiaría tu respuesta a la pregunta anterior si la media de la distribución fuese de \$10?

3. Ejercicio 3

Suponé que el logaritmo del ingreso de 2017 en Argentina tiene una distribución normal, con una media de 9.8 y desvío estándar de 0.4. La canasta básica, que determina la línea de pobreza, se estimó en 15000 pesos. La canasta alimentaria, que determina la línea de indigencia, se estimó en 6000 pesos.

(a) Con los datos que tenés, separá a la población de acuerdo a los deciles de la distribución del ingreso.

(b) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que no son pobres ni indigentes?

(c) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que son pobres pero no indigentes?

(d) ¿En qué deciles están ubicadas las personas que son indigentes?

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona supere la línea de pobreza?

(f) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no supere la línea de indigencia?

4. Ejercicio 4

La compañía Quick Sales acaba de recibir dos proyecciones de ventas para el trimestre que se avecina. El problema es que estos informes contienen información distinta. La proyección I dice que las ventas (en millones de dólares) estarán normalmente distribuidas con media 325 y desvío estándar 60. La proyección II dice que las ventas estarán normalmente distribuidas con media 300 y desvío estándar 50. El consejo directivo encuentra que cada proyección parece, a priori, ser igualmente fidedigna. Aún más, ha decidido adoptar alguna de las dos proyecciones como base para la toma de decisiones futuras, pero no puede definir cuál.

Con el fin de determinar cuál de ellas deberá utilizarse la junta de directores ha decidido reunirse de nuevo al final del trimestre y utilizar información actualizada sobre las ventas para tomar una determinación sobre la credibilidad de cada proyección.

(a) Suponé que la proyección I es precisa. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga ventas trimestrales mayores a 350 millones de dólares?

(b) Suponé ahora que la proyección II es precisa. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga ventas trimestrales mayores a 350 millones de dólares?

(c) Al final del trimestre, la junta de directores encuentra que la compañía tiene ventas mayores a 350 millones de dólares. Dada esta nueva información, ¿cuál es la probabilidad de que originalmente la proyección I haya sido la correcta?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que originalmente la proyección II haya sido la correcta?

5. Ejercicio 5

Suponé que tenés interés en comprar una parcela de tierra, pero no sos el único interesado en ella, habiendo otro potencial comprador. La actual dueña de la parcela les informó a ambos que aceptará la oferta más alta por encima de $10000. Asumí que conocés que la oferta de tu competidor es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre $10000 y $15000.

(a) Suponé que ofrecés $12000. ¿Cuál es la probabilidad de que tu oferta sea aceptada?

(b) Suponé que ofrecés $14000. ¿Cuál es la probabilidad de que tu oferta sea aceptada?

(c) ¿Qué oferta deberías realizar para maximizar la probabilidad de quedarte con la parcela?

(d) Suponé que alguien está dispuesto a pagarte $16000 por la parcela, si es que la comprás. Considerarías ofrecer menos que en (c)? Por qué o por qué no?

6. Ejercicio 6

Suponga que $X_i \overset{iid}{\sim} U[0,\theta]$ con $i = 1,\ldots,n$.

(a) Encuentre la distribución de $Y = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$

(b) Calcule su esperanza y varianza

(c) Calcule $P(Y > a\theta)$ con $a < 1$

7. Ejercicio 7

Suponga que $X_i \overset{iid}{\sim} U[\theta,1]$ con $i = 1,\ldots,n$. Encuentre la distribución de $Y = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$ Calcule su esperanza y varianza.

8. Ejercicio 8

Suponga que $X_i \sim_{iid} \text{Exp}(\lambda_i)$ con $i = 1,\ldots,n$. Suponga que las variables son independientes. Encuentre la distribución de $Y = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$. Calcule su esperanza y varianza.

9. Ejercicio 9

Sea la variable aleatoria W

$$W = \alpha \overline{X}_n + \beta \overline{Y}_n$$

donde $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ son variables aleatorias todas independientes entre sí e idénticamente distribuidas $Be(p)$. Además $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

(a) Encuentre los valores de α y β para que $E(W) = p$

(b) ¿Para qué valores de α y β se minimiza la varianza de W, teniendo en cuenta que se necesita que $E(W) = p$?

10. Ejercicio 10

Supogamos que el tiempo, **en minutos**, que pasa entre que llegan **pedidos independientes consecutivos** a un centro en distribución de una compañía alimenticia es una variable $X \sim Exp(\lambda)$, donde $\lambda = 2$.

(a) Si definimos la variable aleatoria P como la cantidad de pedidos en 1 minuto, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria P? Responda con lo visto en clase teórica, no hace falta que haga una demostración formal.

(b) Si definimos la variable aleatoria R como la cantidad de pedidos en 1 hora, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria R? Responda con lo visto en clase teórica, no hace falta que haga una demostración formal.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que pase más de un minuto entre dos pedidos consecutivos?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que, habiendo esperado al menos 38 **minutos** y se sabe que no llegó un pedido, que se tenga que esperar al menos 39 **minutos** para que llegue un pedido?

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que, habiendo esperado al menos 38 **horas** y se sabe que no llegó un pedido, que se tenga que esperar al menos 39 **horas** para que llegue un pedido?

Hint: Defina la variable $Y = \frac{X}{60}$ o tenga en cuenta en qué unidades está medida la variable X.

(f) Muestre que, en general, si $X \sim Exp(\lambda)$, entonces $Y = \frac{X}{a} \sim Exp(a\lambda)$.

Práctica 5
Variables aleatorias conjuntas

1. Ejercicio 1

El 60 % de los aspirantes a un cargo ejecutivo de mucha responsabilidad tienen el equilibrio emocional como para sobrellevar situaciones de mucho estrés. Clasificá como "adecuados" a aquellos con el adecuado equilibrio emocional. Como parte del proceso de selección el aspirante debe rendir un exámen que consta de 5 preguntas sobre cómo gestionar distintas situaciones de conflicto. Suponé que la probabilidad de que un aspirante adecuado conteste satisfactoriamente a una pregunta es 0,8 y la probabilidad de que un aspirante inadecuado conteste satisfactoriamente a una pregunta es 0.5. Suponé además que para una persona dada, las respuestas son independientes entre sí. Definí las siguientes variables aleatorias. X : la variable Bernoulli que vale 1 si un aspirante es adecuado y 0 si no lo es, Y : número de respuestas satisfactorias.

(a) Calulá la distribución conjunta de X e Y

(b) Calculá la distribución marginal de Y

(c) Calculá la distribución condicional de X dado $Y = y$ para todo $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(d) Si un aspirante hubiese salido airoso de todas las restantes intancias del proceso de selección, y en el exámen hubiese respondido cuatro preguntas adecuadamente, ¿le ofrecerías el cargo? Y si hubiese respondido solo dos preguntas adecuadamente, ¿se lo ofrecerías? Justificá tu respuesta.

2. Ejercicio 2

Suponé que de los libros antiguos que hay en el mundo, el 10 % son raros. Suponé también que de los libros antiguos con tapa dorada, también el 10 % son raros. Suponé además que el 30 % de los libros antiguos tienen tapa dorada. Te enteraste que tengo un libro antiguo. Llama X a la variable aleatoria Bernoulli que vale 1 si mi libro es raro y llamá Y a la variable aleatoria Bernoulli que vale 1 si mi libro antiguo tiene tapa dorada. Calculá la distribución conjunta de X e Y y demostrá que X e Y son independientes. Suponé ahora que te cuento que vendí mi libro a un librería de libros antiguos que exhibe un libro en la vidriera si y solo si el libro es raro o tiene tapa dorada. Llamá Z a la variable aleatoria Bernoulli que vale 1 si mi libro será exhibido en la vidriera y vale 0 de otro modo. Calculá la probabilidad de éxito de Z. ¿Son X e Y independientes dado $Z = 1$?

Nota: este problema ilustra el así llamado "*sesgo de Berkson*"que en algunas disciplinas también lo denominan "*sesgo de selección*". Este sesgo ocurre cuando dos variables que no tienen relación entre sí (en nuestro ejemplo X e Y) se vuelven dependientes si nos enteramos - es decir, al condicionar en - otra variable aleatoria (en nuestro ejemplo, Z).

3. Ejercicio 3

El número de emergencias médicas que sufre un alumno de una cierta universidad durante el período lectivo es una v.a. Pois(λ). Supongamos que hay dos tipos de alumnos, aquellos mas propensos a sufrir emergencias médicas, para los cuales $\lambda = 2$ y aquellos poco propensos a las emergencias médicas, para las cuales $\lambda = 0{,}2$. El 10 % de los alumnos son del tipo de los propensos a sufrir emergencias médicas. Si cada asistencia a una emergencia médica tiene un costo para la universidad de 2000 pesos, ¿cuál es el gasto esperado en asistencia medica para cada alumno por ciclo lectivo? ¿Cuál es el desvío estandard del gasto por alumno y período? ¿Cuál es la probabilidad de que un nuevo ingresante no ocasione ningún gasto en emergencias médicas durante el próximo ciclo lectivo? ¿Cuál es la probabilidad de que ocasione exactamente 4000 pesos en gastos por emergencias médicas? Para resolver este problema, defini claramente las variables aleatorias que usas.

4. Ejercicio 4

El número de clientes que entran a un comercio de prendas de vestir en un día dado es una variable aleatoria $Pois\,(30)$. Suponé que la cantidad de prendas que compra un cliente en una visita al comercio es una variable aleatoria Poiss(2) y que las decisiones de comprar o no una prenda de cada cliente no está influida por las compras de otros clientes ni por cuán lleno está el comercio.

(a) ¿Cuáles son la esperanza y el desvío estandard del número de prendas vendidas en un día por el comercio?.

(b) Si la ganancia neta de una compra es una variable aleatoria con media 100 y desvío estandard 20 y es independiente del número de compras y de visitas al comercio ¿cuáles son la media y el desvío estandard de la ganancia neta diaria del comercio?

5. Ejercicio 5

El siguiente juego es una variación del juego que se conoce en economía como el juego de las billeteras. Supongamos que hay n personas no relacionadas entre sí, la persona i tiene en su billetera una cantidad X_i de pesos, la cual es desconocida para el resto del grupo. Se subasta la suma $V = X_1 + ... + X_n$ del dinero en las n billeteras, cada una de las n personas hará una oferta y ganará la subasta aquel cuya oferta sea la más alta. Lo único que es sabido por todas las personas es que cada billetera puede a lo sumo tener 100 pesos.

(a) Si la persona i, elegida al azar, NO conoce cuanto dinero hay en su billetera, cuál es la esperanza V?

(b) Si la persona i, elegida al azar, sólo conoce la cantidad de dinero que hay en su billetera, cuál es la esperanza de V ahora?

(c) Suponé que cada persona i oferta el valor esperado en el punto (b). Suponé que la persona $i = 1$ gana la subasta. Condicional en conocer el valor de X_1 y en haber ganado la subasta, cuál es la esperanza de V? Explicá intuitivamente por qué esta esperanza es menor que la que encontraste en el punto (b).

6. Ejercicio 6

Vas a invertir 10000 \$ que tenés la opción de distribuidos en en tres portafolios. Llamá X_1, X_2 y X_3 a las tasas de retorno al cabo de un año de los tres portafolios expresadas en proporciones -NO en porcentajes-, de modo que por ejemplo, si invertís 3000\$ en el portafolio 1, al cabo de un año tu retorno será de $3000X_1$\$.

Suponé que las medias y desvíos estandard de X_1, X_2 y X_3 son

	X_1	X_2	X_3
Media	0.08	0.12	0.1
Desvío	0.02	0.05	0.03

Suponé que las correlaciones son

	X_1	X_2	X_3
X_1	1	-0.4	-0.2
X_2	-0.4	1	0.6
X_3	-0.2	0.6	1

(a) Supone que invertís a_j en el portafolio $j = 1, 2, 3$. Como tenés 10000\$, $a_1 + a_2 + a_3 = 10000$. Entonces, tu retorno será $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$.
Encontrá la función $g\,(a_1, a_2, a_3)$ tal que $g\,(a_1, a_2, a_3) = E\,(Z)$

(b) Encontrá la función $h\,(a_1, a_2, a_3)$ tal que $h\,(a_1, a_2, a_3) = Var\,(Z)$

(c) Suponé que sos averso al riesgo, y que querés distribuir tu inversión de modo tal de que el desvío de tu inversión nunca supere el desvío del portafolio con menor desvío, es decir del portafolio 1.
¿Es posible encontrar una estrategia de inversión para la cual el desvío sea menor o igual a $10000 \times 0{,}02 = 200$ (el desvio del retorno si invirtieras 10000\$ en el portafolio 1) pero cuya esperanza de tasa de retorno sea mayor que $10000 \times 0{,}08 = 800$ (la esperanza del retorno si invirtieras todo tu dinero en el portafolio 1)?

(d) Que problema de maximización deberías plantear formalmente para encontrar la mejor estrategia, en el sentido de maximizar la esperanza del retorno sujeto a que el desvío del retorno no supere a 200$?

7. Ejercicio 7

Considere a X una variable aleatoria que puede tomar únicamente los valores -1, 0 y 1 todos con igual probabilidad. Además considere la variable aleatoria Y definida como:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X = 0 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Calcular la correlación entre X e Y

(b) Son X e Y variables aleatorias independientes?

8. Ejercicio 8

Suponga que Usted desea realizar encuestas sobre las preferencias de los consumidores sobre las tres principales marcas de computadoras portátiles. Para ello usted encuesta a n personas de forma aleatoria, sea la variable X_1 la cantidad de encuestados que eligen la marca 1, la variable X_2 representa la cantidad de personas que eligen la marca 2 y la variable X_3 identifica la cantidad de personas que eligen la marca 3. Se puede pensar entonces que vector (X_1, X_2, X_3) es un vector aleatorio con distribución trinomial, es decir

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \cdot \mathbb{I}_{\{x_1+x_2+x_3=n\}} \mathbb{I}_{\{x_i \geq 0 \forall i\}}$$

con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Encuentre la distribución de X_1.

9. Ejercicio 9

La producción de pantallas para computadoras es un proceso difícil que resulta en una proporción importante de pantallas defectuosas. En una compañía, la proporción diaria de pantallas defectuosas de 16 y 20 pulgadas es el resultado de un vector aleatorio bivariado (Z, Y) donde Z es la proporción diaria de pantallas de 16 pulgadas defectuosas e es la proporción diaria de pantallas defectuosas de 20 pulgadas. Supongamos que las proporciones de pantallas defectuosas de la empresa de distintos días están distribuidas de acuerdo a una distribución conjunta que se asume es igual a:

$$f(y, z) = [\theta z + (2 - \theta) y] \mathbb{I}_{(0<z<1)} \mathbb{I}_{(0<y<1)}$$

(a) Encuentre $\mathbb{E}[Z]$.

(b) Encuentre $\mathbb{E}[Y]$.

10. Ejercicio 10

Sean X e Y dos variables aleatorias con una función de densidad conjunta de probabilidad

$$f(x, y) = \frac{2}{3(x + y)} e^{-x} \mathbb{I}_{(0<x)} \mathbb{I}_{(0<y<1)}$$

Encuentre el coeficiente de correlación entre X e Y.

11. Ejercicio 11

La cantidad de personas que entran a una farmacia es una variable aleatoria con distribución Poisson con media λ. De las personas que entran a dicha farmacia la probabilidad de que una mujer entre es p. Encuentre el valor esperado y la varianza de la cantidad de mujeres que entran a la farmacia. ¿Qué supuesto debió realizar? Usando la función generatriz de momentos encuentre la distribución de la cantidad de mujeres que entran a una farmacia.

12. Ejercicio 12

Considere $f(x|y) = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}} \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$ donde Y es una variable aleatoria con distribución geométrica con probabilidad de éxito es p.

(a) Encuentre $\mathbb{E}[X]$.

(b) Encuentre $\text{Var}(X)$.

13. Ejercicio 13

Sumas aleatorias. Consideremos una suma del estilo

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

donde N es una variable aleatoria con esperanza finita y las X representan variables aleatorias que son independientes entre sí e independientes de N y tienen media común $\mathbb{E}(X)$. Estas sumas aparecen en distintas situaciones:

- Una compañía de seguros podría recibir N reclamos en un periodo de tiempo y los montos de los reclamos individuales pueden modelarse como variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$
- La variable aleatoria N podría representar el número de clientes que ingresan en una tienda y X_i representa los gastos del $i-$ ésimo cliente.
- N podría representar el número de jobs o procesos en la cola de un servidor y X_i podría representar el tiempo de procesamiento del i-ésimo proceso, etc.

Calcule $\mathbb{E}(T)$ y $Var(T)$.

14. Ejercicio 14

Sea $X_i \overset{iid}{\sim} \text{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ para $i = 1, \ldots, n$. Se puede demostrar (lo harán en la siguiente materia) que el estimador de máxima verosimilitud de θ es $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

(a) Demuestre que $\overline{X}_n$ es un estimador insesgado de θ. Es decir, demuestre que $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \theta$.

(b) Encuentre $\text{Var}(\overline{X}_n)$.

15. Ejercicio 15

Encuentre las distribuciones marginales de X e Y ¿A qué familia de distribuciones pertenecen?

(i) $f(x, y) = [2x + 2y - 4xy]\mathbb{I}_{(0<x<1)}\mathbb{I}_{(0<y<1)}$.

(ii) $f(x,y) = [2-2x-2y+4xy]\mathbb{I}_{(0<x<1)}\mathbb{I}_{(0<y<1)}$.

16. Ejercicio 16

La función de densidad conjunta de X e Y está dada por

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\mathbb{I}_{(0<x<1)}\mathbb{I}_{(0<y<2)}$$

(a) Verifique que de hecho $f(x,y)$ es una función de densidad.

(b) Encuentre la función de densidad de X.

(c) Encuentre $P(X > Y)$.

17. Ejercicio 17

¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

(a) $f(x,y) = xe^{-(x+y)}\mathbb{I}_{(0<x)}\mathbb{I}_{(0<y)}$.

(b) $f(x,y) = 2\mathbb{I}_{(0<x<y)}\mathbb{I}_{(0<y<1)}$.

18. Ejercicio 18

Si X tiene distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$ e Y es una variable aleatoria con distribución exponencial con media igual a 1. Hallar la distribución de

(a) $Z = X + Y$.

(b) $Z = \frac{X}{Y}$.

19. Ejercicio 19

Sea la función se densidad conjunta de X e Y

$$f(x,y) = e^{-y}\mathbb{I}_{(0<x<y)}$$

(a) Encuentre la covarianza entre X e Y.

(b) Encuentre las funciones de densidad de las variables aleatorias $X|Y$ y $Y|X$. Calcule sus esperanzas.

20. Ejercicio 20

Sean X e Y dos v.a. con distribución exponencial de manera que la CDF conjunta es

$$F_{X,Y}(x,y) = \left(1-e^{-\lambda x}\right)\left(1-e^{-\lambda y}\right), \quad x \geq 0, y \geq 0$$

Encuentre la PDF conjunta y las PDF marginales de cada variable.

21. Ejercicio 21

Supongamos que se arroja una moneda al aire 3 veces. Sea X la v.a. que representa la cantidad de caras que se obtienen en los 3 intentos, mientras que Y es una v.a. que representa la cantidad de caras que se obtienen en los primeros 2 intentos.

Calcule la probabilidad conjunta de (X, Y).

22. Ejercicio 22

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes tales que $X, Y \sim \text{Unif}(0, 1)$. Encuentre la función de distribución conjunta del vector aleatorio (X, Y).

23. Ejercicio 23

Para la PDF conjunta (vista en la teórica)

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & \text{si } 0 \leq x \leq y, \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

muestre que $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{3}{\lambda^2}$

Además, encuentre las funciones de densidad marginales de X e Y. Luego, encuentre $f_{X|Y}(x|y)$.

24. Ejercicio 24

Consideremos la siguiente función de densidad bivariada:

$$f(x,y) = \frac{12}{7}\left(x^2 + xy\right)\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\mathbb{I}_{[0,1]}(y)$$

Calcule $P(X > Y)$, la función de densidad marginal de X, la función de densidad marginal de Y y las distribuciones condicionales.

25. Ejercicio 25

En este ejercicio no se le pide resolver algo en particular. Es recomendable que lo lea y entienda.

Las carreras ofrecidas en cierta universidad duran cuatro años. Al finalizar cada año, los alumnos rinden un examen general sobre el material de las materias cursadas durante ese año. Las calificaciones posibles, de menor a mayor son $\{1, 2, 3, 4\}$. Elegimos un alumno al azar y registramos X como el año que acaba de finalizar e Y como la nota que obtuvo en el examen final.

$p_{XY}(x,y)$		x (año)				$p_Y(y)$
		1	2	3	4	
y (nota)	1	0.10	0.05	0.03	0.03	0.21
	2	0.08	0.10	0.07	0.05	0.30
	3	0.07	0.06	0.09	0.06	0.28
	4	0.05	0.03	0.05	0.08	0.21
$p_X(x)$		0.30	0.24	0.24	0.22	1

En la siguiente tabla, cada columna registra la función de masa de probabilidad condicional de la nota Y dado cada año x. En la ultima fila, la tabla registra la esperanza de la nota Y dado cada año x

		$p_{Y\|X}(y\|1)$	$p_{Y\|X}(y\|2)$	$p_{Y\|X}(y\|3)$	$p_{Y\|X}(y\|4)$
	1	0.33	0.21	0.125	0.14
y	2	0.27	0.42	0.29	0.23
(nota)	3	0.23	0.25	0.375	0.27
	4	0.17	0.12	0.21	0.36
$E(Y\|X=x)$		**2.24**	**2.28**	**2.67**	**2.85**

donde $E(Y|X=x) = 1 \cdot p_{Y|X}(1|x) + 2 \cdot p_{Y|X}(2|x) + 3 \cdot p_{Y|X}(3|x) + 4 \cdot p_{Y|X}(4|x)$.

La esperanza condicional es útil para resumir la relación que existe entre dos variables Y y X.

x (año)	1	2	3	4
$E(Y\|X=x)$	**2.24**	**2.28**	**2.67**	**2.85**

Vemos que la esperanza de la nota aumenta a medida que avanzan los años de estudio. ¿Por qué?

- Los alumnos mejoran su capacidad de aprendizaje.
- Los alumnos mejoran su concentración para responder en exámenes.
- Los exámenes de los cursos de los años superiores son mas fáciles.
- Los alumnos de los años superiores son los *sobrevivientes* de los años inferiores (notemos que la distribución de X -año- demuestra que hay más alumnos en los años inferiores que superiores)

x (año)	1	2	3	4
$p_X(x)$	0.30	0.24	0.24	0.22

- Los alumnos de los años superiores son mejores porque la calidad de la educación secundaria ha ido empeorando con los años, por lo cual las cohortes superiores vienen mejor preparadas.

Calculemos la esperanza de la nota de un alumno elegido al azar de toda la universidad:

$p_{XY}(x,y)$		x (año)				$p_Y(y)$
		1	2	3	4	
	1	0.10	0.05	0.03	0.03	0.21
y	2	0.08	0.10	0.07	0.05	0.30
(nota)	3	0.07	0.06	0.09	0.06	0.28
	4	0.05	0.03	0.05	0.08	0.21
$p_X(x)$		0.30	0.24	0.24	0.22	1

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \cdot p_Y(1) + 2 \cdot p_Y(2) + 3 \cdot p_Y(3) + 4 \cdot p_Y(4) \\ &= 1 \cdot 0{,}21 + 2 \cdot 0{,}30 + 3 \cdot 0{,}28 + 4 \cdot 0{,}21 \\ &= 2{,}49 \end{aligned}$$

Notemos que el cálculo de $E(Y)$ se usan los valores de $p_Y(y)$ para todo y. Pero supongamos que no conocemos la función $p_Y(y)$, aunque sí:

1. el número de alumnos en los distintos años
2. el promedio de las notas de todos los alumnos en cada año por separado

Entonces conocemos, para cada $x \in \{1,2,3,4\}$ el valor de

$$n_x = \#\text{ alumnos en el año } x$$

Con lo cual podemos calcular, para cada $x \in \{1,2,3,4\}$ el valor de

$$\frac{n_x}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} = p_X(x)$$

Notemos que esta última igualdad es válida pues

- $p_X(x)$ es la probabilidad de que un alumno sea del año x
- todos los alumnos tienen *la misma probabilidad* de ser elegidos.

Por otro lado, conocemos, para cada $x \in \{1,2,3,4\}$ el valor de

$$\overline{y}_x = \frac{1 \cdot n_{1,x} + 2 \cdot n_{2,x} + 3 \cdot n_{3,x} + 4 \cdot n_{4,x}}{n_x} = 1 \cdot \frac{n_{1,x}}{n_x} + 2 \cdot \frac{n_{2,x}}{n_x} + 3 \cdot \frac{n_{3,x}}{n_x} + 4 \cdot \frac{n_{4,x}}{n_x}$$

donde $n_{i,x}$ = # de alumnos en el año x con nota i. Pero

$$\frac{n_{i,x}}{n_x} = p_{Y|X}(i|x)$$

ya que

- $p_{Y|X}(i|x)$ es la probabilidad de que un alumno del año x tenga nota i
- todos los alumnos del año x son equiprobables

Entonces, conocemos, para cada valor $x \in \{1,2,3,4\}$, el valor de

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = 1 \cdot p_{Y|X}(1|x) + 2 \cdot p_{Y|X}(1|x) + 3 \cdot p_{Y|X}(1|x) + 4 \cdot p_{Y|X}(1|x)$$

Recapitulemos: supongamos que conocemos

1. $p_X(x)$ para cada año $x \in \{1,2,3,4\}$
2. $\mathbb{E}(Y|X = x)$ para cada año $x \in \{1,2,3,4\}$ y

O sea, conocemos la tabla

x	1	2	3	4
$\mathbb{E}(Y\|X = x)$	2.24	2.28	2.67	2.85
$p_X(x)$	0.30	0.24	0.24	0.22

que nos permite calcular $\mathbb{E}(Y)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(Y|X = 1)p_X(1) + \mathbb{E}(Y|X = 2)p_X(2) \\ &\quad + \mathbb{E}(Y|X = 3)p_X(3) + \mathbb{E}(Y|X = 4)p_X(4) \\ &= 2{,}24 \cdot 0{,}30 + 2{,}28 \cdot 0{,}24 + 2{,}67 \cdot 0{,}24 + 2{,}85 \cdot 0{,}22 \\ &= 2{,}49\end{aligned}$$

Intuitivamente, la cuenta que estamos haciendo es:

- El promedio global $\overline{y}$ de todas las notas de la universidad es el *promedio ponderado* de los promedios $\overline{y}_x$ de las notas de cada grupo $x = 1,2,3,4$, donde la ponderación es proporcional al tamaño n_x del grupo x.

- Como en nuestro ejemplo Y representa la nota de un alumno elegido al azar de la universidad, y todos los alumnos tienen igual probabilidad de ser elegidos, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \overline{y} \text{ (promedio global)} \\ \mathbb{E}(Y|X=x) &= \overline{y}_x \text{ (promedio del grupo } x\text{)} \\ p_X(x) &= n_x/n \text{ (ponderacion del grupo } x\text{)} \end{aligned}$$

Varianza condicional

Así como calculamos la esperanza de la nota Y para cada año x, también podemos calcular la varianza de la nota Y para cada año x.

		$p_{Y\|X}(y\|1)$	$p_{Y\|X}(y\|2)$	$p_{Y\|X}(y\|3)$	$p_{Y\|X}(y\|4)$
	1	0.33	0.21	0.125	0.14
y	2	0.27	0.42	0.29	0.23
(nota)	3	0.23	0.25	0.375	0.27
	4	0.17	0.12	0.21	0.36
$E(Y\|X=x)^2$		$2{,}24^2$	$2{,}28^2$	$2{,}67^2$	$2{,}85^2$
$E(Y^2\|X=x)$		6.2	6.06	8.02	9.25
$Var(Y\|X=x)$		**1.18**	**0.86**	**0.89**	**1.13**

Por ejemplo,

$$\mathbb{E}(Y^2|X=1) = 1^2 \cdot 0{,}33 + 2^2 \cdot 0{,}27 + 3^2 \cdot 0{,}23 + 4^2 \cdot 0{,}17 = 6{,}2$$

y

$$Var(Y|X=1) = \mathbb{E}(Y^2|X=1) - [\mathbb{E}(Y|X=1)]^2 = 6{,}2 - 2{,}24^2 = 1{,}1824$$

Independencia

En nuestro ejemplo, hemos calculado

		$p_{Y\|X}(y\|1)$	$p_{Y\|X}(y\|2)$	$p_{Y\|X}(y\|3)$	$p_{Y\|X}(y\|4)$	$p_Y(y)$
	1	0.33	0.21	0.125	0.14	**0.21**
y	2	0.27	0.42	0.29	0.23	**0.30**
(nota)	3	0.23	0.25	0.375	0.27	**0.28**
	4	0.17	0.12	0.21	0.36	**0.21**

Entonces, en nuestro ejemplo, cualquiera sea el x, vimos que

$$p_{Y|X}(y|x) \neq p_Y(y) \text{ para al menos un valor de } y$$

De modo que enterarnos en qué año está el alumno sorteado cambia el pronóstico sobre las posibles notas que se sacó. O sea, la distribución condicional de Y dado $X = x$ no coincide con la distribución de Y.

Pero ahora supongamos que la distribución conjunta de (X, Y) fuera como la que viene dada en la siguiente tabla

		x (año)				$p_Y(y)$
		1	2	3	4	
	1	0.075	0.06	0.06	0.055	**0.25**
y	2	0.1125	0.09	0.09	0.0825	**0.375**
(nota)	3	0.075	0.06	0.06	0.055	**0.25**
	4	0.0375	0.03	0.03	0.0275	**0.125**
$p_X(x)$		0.30	0.24	0.24	0.22	1

En este caso,

$$p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y) \quad \forall x, y$$

Por ejemplo,

$$p_{Y|X}(2|4) = \frac{p_{XY}(4,2)}{p_X(4)} = \frac{0{,}03}{0{,}24} = 0{,}125 = p_Y(4)$$

En este ejemplo, la tabla de probabilidades condicionales $p_{Y|X}(y|x)$ y la de probabilidad marginal $p_Y(y)$ es

		$p_{Y\|X}(y\|1)$	$p_{Y\|X}(y\|2)$	$p_{Y\|X}(y\|3)$	$p_{Y\|X}(y\|4)$	$p_Y(y)$
	1	0.25	0.25	0.25	0.25	**0.25**
y	2	0.375	0.375	0.375	0.375	**0.375**
(nota)	3	0.25	0.25	0.25	0.25	**0.25**
	4	0.125	0.125	0.125	0.125	**0.125**

O sea, todas las columnas son iguales. Cuando esto ocurre, decimos que X e Y son variables aleatorias **independientes**. Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes en cuanto a independencia de variables aleatorias

1. $p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)$ para todo $x \in Sop(X)$ e $y \in Sop(Y)$
2. $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ para todo $x \in Sop$(X) e $y \in Sop(Y)$
3. $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$ para todo $x \in Sop(X)$ e $y \in Sop(Y)$

con $Sop(X)$ e $Sop(Y)$ los soportes de X e Y respectivamente.

Práctica 6
Convergencia y desigualdades

1. Ejercicio 1

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple (m.a.s.) de una población normal con media $\mu = 50$ y varianza $\sigma^2 = 16$. Para $n = 1, 10, 100, 1000$ se pide:

(a) Como se distribuye la variable aleatoria media muestral?

(b) ¿Cómo cambia tu respuesta si la distribución de X_i para $i = 1, \dots, n$ fuera desconocida?

(c) Calcula $P(45 \leq \bar{X} \leq 55)$ para los valores de n anteriores.

(d) Discutí que relación hay entre los resultados anteriores y la ley de los grandes números.

2. Ejercicio 2

Sabemos que la v.a. X, que representa una característica de interés de una población, tiene una distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. Si tomamos una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ de la población, responde a las siguientes preguntas: (Superponer las distribuciones de X y $\bar{X}$ para tener intuición sobre tu respuesta)

(a) $P(X \leq \mu)$ es mayor, menor o igual a $P(\bar{X} \leq \mu)$?

(b) $P(|X - \mu| \geq 1)$ es mayor, menor o igual a $P(|\bar{X} - \mu| \geq 1)$?

(c) $P(|X - \mu| \leq 1)$ es mayor, menor o igual a $P(|\bar{X} - \mu| \leq 1)$?

(d) ¿Qué ocurre en todos los puntos anteriores a medida que n se hace cada vez más grande? ¿En términos prácticos, que relevancia tiene?

3. Ejercicio 3

Una encuesta de la AFIP encontró que el 82 % de los contribuyentes manifestaron la importancia de que el organismo se asegurara de que los contribuyentes de mayores ingresos no evadieran impuestos.

(a) Si tomás 8 contribuyentes de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 6 de ellos consideren importante que el organismo se asegure que los contribuyentes de mayores ingresos no evadan impuestos?

(b) Si tomás 80 contribuyentes de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 60 de ellos consideren importante que el organismo se asegure que los contribuyentes de mayores ingresos no evadan impuestos?

Resolvé ambos incisos utilizando la distribución Binomial y la distribución Normal. Compará los resultados.

4. Ejercicio 4

Un videojuego fue descargado por 192 personas. El desarrollador hizo un análisis, determinando que la cantidad de horas diarias que cada usuario utiliza la app se puede suponer $U(1;7)$ y que representan cantidades aleatorias simultáneamente independientes.

(a) Para un día específico, cuál es la probilidad aproximada de que el tiempo acumulado que juegan los 192 usuarios sea de al menos 800 hs?

(b) El desarrollador quiere establecer una tarifa proporcional al tiempo diario de uso de la app, cual debe ser esa tarifa por hora si pretende ganar al menos 2000 USD diarios con una confianza del 95 %?

5. Ejercicio 5

Los pesos de ciertos paquetes de café de una compañía cafetera son variables aleatorias independientes se distribuyen normalmente con media 500 grs. y desvío σ. ¿Cuál debe ser el valor de σ para tener una confianza del 99 % de que el peso promedio de 25 paquetes no se desviará en más de 10 grs. de la media?

6. Ejercicio 6

Un vuelo de Aerolíneas Argentinas dispone de 100 asientos. La experiencia indica que cada reserva tiene una probabilidad de 0,1 de ser cancelada a último momento. Suponé que no hay lista de espera y que los pasajeros hacen sus reservas individualmente, es decir, de forma independiente. Si la compañía desea que la probabilidad de que queden clientes indignados por haber hecho su reserva y no poder viajar sea menor que 0,01 ¿cuál debería ser el número máximo de reservas que deberían aceptar?

7. Ejercicio 7

Un minorista recibe mensualmente galletitas de salvado de 3 fábricas distintas, siendo las cantidades recibidas (en kilos) variables aleatorias independientes X, Y y Z, cuya distribución está dada por $X \sim \mathcal{N}(100, 20)$, $Y = 97 + W$ con $W \sim Exp(1/3)$ y $Z \sim U[80, 90]$. Acotar la probabilidad que el total recibido en un mes se encuentre entre 275 y 295 kilos.

8. Ejercicio 8

(a) Sea X una variable aleatoria con distribución desconocida tal que $\mathbb{E}[X] = 5$ y $Var(X) = 0{,}1$. Acote la probabilidad de que X esté entre 4.5 y 5.5.

(b) Sea $X_1, \ldots, X_{10}$ una muestra aleatoria, es decir, varibles aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}[X_i] = 5$ y $Var(X_i) = 0{,}1$ para todo i. Acote la probabilidad de que la media muestral se sitúe entre 4.5 y 5.5.

(c) Si se contase con una muestra aleatoria de tamaño n: $X_1, \ldots, X_n$ ¿Qué pasaría con la cota hallada en (b) cuando n tendiese a infinito?

(d) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes que verifican $\mathbb{E}[X_i] = 4$ y $Var(X_i) = 9 + \dfrac{2^i + 1}{2^i}$. Hallar a qué converge en probabilidad $Y_n = \overline{X}_n + e^{5-\frac{1}{n}}$.

9. Ejercicio 9

Suponga usted que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n de variables independientes e idénticamente distribuidas como $U(0, \theta)$. Sea $X_{\text{máx}} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Encuentre la función de densidad de $X_{\text{máx}}$.

(b) Calcule $\mathbb{E}[X_{\text{máx}}]$ y $Var(X_{\text{máx}})$.

(c) Calcule el límite en probabilidad de $X_{\text{máx}}$.

(d) Demuestre que $n\,(\theta - X_{\text{máx}})$ converge en distribución a una exponencial.

10. Ejercicio 10

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias con distribución de Poisson, cada una de ellas con media 1.

(a) Usando la desigualdad de Markov, obtener una cota para $P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right)$

(b) Usando el Teorema Central del Límite, apoximar $P\left(\sum_{i=1}^{60} X_i > 15\right)$.

11. Ejercicio 11

Las variables $Z_1, \ldots, Z_n$ son independientes con distribución $U(-20, 10)$. Hallar en forma aproximada

$$P\left(\sum_{i=1}^{900} Z_i > -4470\right).$$

12. Ejercicio 12

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}[X] = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. Demuestre que

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{S} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

13. Ejercicio 13

Una variable aleatoria X continua tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$, $X \sim Exp(\lambda)$, si su función de densidad es

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x).$$

Para $k > 1$, calcule

$$P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k\sqrt{Var(X)}\right)$$

y compare con la cota obtenida a través de la desigualdad de Tchebyshev.

14. Ejercicio 14

Sea $X \sim \mathcal{Poi}(\lambda)$, es decir una variable discreta con distribución Poisson de parámetro λ. Demuestre que $P(X \geq 2\lambda) \leq 1/\lambda$.

15. Ejercicio 15

En una línea de producción los productos pasan por 4 procesos sucesivos (preparación, armado, control y embalaje) hasta quedar listos para la venta. Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 los tiempos que tarda en cumplirse cada uno de los procesos (en minutos). Se sabe que los cuatro procesos actúan en forma independiente y que $X_1 \sim U(3,5)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(3, 1/4)$, $X_3 \sim \mathcal{N}(4, 1/4)$ y $X_4 \sim U(2,4)$. Sea Y la variable aleatoria que mide el tiempo total que tarda un producto en pasar por toda la línea de producción.

a) Halle $E(Y)$ y $Var(Y)$.

b) Acotar la probabilidad de que el tiempo total se aleje del tiempo total esperado en al menos dos minutos.

16. Ejercicio 16

El número de aviones que aterrizan en un aeropuerto por hora es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 30$. Determine una cota inferior para la probabilidad de que el número de aviones que aterrizan en un período de una hora esté entre 20 y 40.

17. Ejercicio 17

Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población adulta argentina apoye cierta política pública. Para estimar p se encuesta a n personas, se cuenta la cantidad de personas a favor y se calcula la media muestral $\overline{X}_n$.

a) Halle una cota superior para $P(|\overline{X}_n - p| \geq 0{,}1)$ que no dependa de p.

b) ¿A cuánta gente debería encuestarse para que $P(|\overline{X}_n - p| \geq 0{,}1) \leq 0{,}1$?

18. Ejercicio 18

Sean $X_i \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$. Muestre que $V_n = \text{mín}\{X_i\} \xrightarrow{p} 0$ y que $V_n = \text{mín}\{X_i\} \xrightarrow{m.c.} 0$.

19. Ejercicio 19

En una línea de producción los productos pasan por 4 procesos sucesivos (preparación, armado, control y embalaje) hasta quedar listos para la venta. Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 los tiempos que tarda en cumplirse cada uno de los procesos (en minutos). Se sabe que los cuatro procesos actúan en forma independiente y que $X_1 \sim U(3,5)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(3,1/4)$, $X_3 \sim \mathcal{N}(4,1/4)$ y $X_4 \sim U(2,4)$. Sea Y la variable aleatoria que mide el tiempo total que tarda un producto en pasar por toda la línea de producción.

a) Halle $E(Y)$ y $Var(Y)$.

b) Acotar la probabilidad de que el tiempo total se aleje del tiempo total esperado en al menos dos minutos.

20. Ejercicio 20

Dadas observaciones independientes $X_1, \ldots, X_n$ tales que $E(X_i) = 0$ y $a_i \leq X_i \leq b_i$, la desigualdad de Hoeffding dice que dado $\varepsilon > 0$ fijo se cumple la siguiente desigualdad

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-2\,\frac{\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right). \tag{1}$$

a) Si $X_1, \ldots, X_n \sim Be(p)$ pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$P(|\overline{X}_n - p| > \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2} \tag{2}$$

donde $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) Muestre que para valores grandes de n la cota de Hoeffding es mejor que la de Tchebyshev.

21. Ejercicio 21

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ variables aleatorias independientes cada una con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sean $S_{50} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}$ y $\overline{X}_{50} = S_{50}/50$.

a) Usar el Teorema Central del Límite para aproximar $P(S_{50} \leq 30)$ y $P(\overline{X}_{50} \geq 0{,}7)$.

b) Hallar el valor de a tal que $P(S_{50} \geq a) \approx 0{,}86$.

22. Ejercicio 22

Supongamos que una medición tiene media (o esperanza) igual a μ y su varianza es $\sigma^2 = 25$. Sea $\overline{X}_n$ el promedio de n de tales mediciones independientes entre sí.

a) Aproximar $P\left(\left|\overline{X}_{64} - \mu\right| < 1\right)$.

b) Usando Tchebychev, determinar cuán grande debe ser n para que

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < 1\right) \geq 0{,}95.$$

c) Usando el Teorema Central del Límite, hallar n tal que $P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < 1\right) \approx 0{,}95$. Comparar con el resultado obtenido en (b).

23. Ejercicio 23

Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. cuya función de densidad es

$$f(x) = \frac{3}{x^4} I_{[1,+\infty)}(x)$$

Calcule aproximadamente

$$P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\right).$$

24. Ejercicio 24

Un código fuente de un software tiene $n = 100$ páginas. Sea X_i la cantidad de errores en la i-ésima página. Supongamos que $X_i \sim \mathscr{P}(1)$ y que son independientes. Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ el número total de errores. Usando el Teorema Central del Límite aproxime $P(Y < 90)$.

25. Ejercicio 25

Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tal que X_i tiene función de densidad dada por $f_X(x) = 2xI_{(0,1)}(x)$. Hallar el límite en probabilidad de

$$Y_n = (X_1 X_2 \ldots X_n)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n}$$

26. Ejercicio 26

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tal que $E(X_1) = 0$, $E(X_1^2) = 2$ y $E(X_1^4) < \infty$. Hallar el límite en distribución de

1. $$V_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

2. $$W_n = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

3. $$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}.$$

4. $$Z_n = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)$$

5. $$R_n = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

6. $$S_n = \frac{1}{n^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)$$

27. Ejercicio 27

Decimos que una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ converge en **media cuadrática** a una variable aleatoria X si

$$\lim_{n \to \infty} E\left(|X_n - X|^2 \right) = 0 .$$

a) Demuestre que la convergencia en media cuadrática implica convergencia en probabilidad.

b) (*) Mediante un contraejemplo, pruebe que la afirmación recíproca no es cierta.