Soluciones Práctica 5[1]

1. Ejercicio 1

(a) Tenemos que

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el aspirante es adecuado} \\ 0 & \text{si no es adecuado} \end{cases}$$

luego $X \sim Bernoulli(0{,}6)$. Además

$$Y \mid X = 0 \sim Bi(5; 0{,}5)$$
$$Y \mid X = 1 \sim Bi(5; 0{,}8)$$

Nos interesa calcular

$$p_{XY}(k,l) \ \ \forall \ \ 0 \le k \le 1;\ 0 \le l \le 5$$

Empecemos por el caso $k = 0$ y $l = 0$, usando la regla de multiplicación

$$p_{XY}(0,0) = P(Y = 0 \mid X = 0) \cdot P(X = 0) = \left[\binom{5}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^5\right] \cdot 0{,}4 = 0,0125$$

Para el caso $k = 1$ y $l = 0$, repitiendo los pasos

$$p_{XY}(1,0) = P(Y = 0 \mid X = 1) \cdot P(X = 1) = \left[\binom{5}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5\right] \cdot 0{,}6 = 0,000192$$

Esto completaría la primer columna de la siguiente tabla (todas las demás se calculan de manera análoga):

		Y					
		0	1	2	3	4	5
X	0	0.0125	0.0625	0.125	0.125	0.0625	0.0125
	1	0.000192	0.00384	0.03072	0.12288	0.24576	0.196608

(b) Para calcular la distribución marginal de Y sumamos por columnas

$$p_Y(l) = \begin{cases} 0{,}012692 & \text{si } l = 0 \\ 0{,}06634 & \text{si } l = 1 \\ 0{,}15572 & \text{si } l = 2 \\ 0{,}24788 & \text{si } l = 3 \\ 0{,}30826 & \text{si } l = 4 \\ 0{,}209108 & \text{si } l = 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(c) Calculemos el caso la función de probabilidad de masa de X cuando $Y = 0$:

$$p_{X|Y=0}(k) = \begin{cases} \dfrac{p_{XY}(0,0)}{p_Y(0)} & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{p_{XY}(1,0)}{p_Y(0)} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} = \begin{cases} 0{,}98487236 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}01512764 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

[1] Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Lara Sánchez Peña y Pedro Martínez Bruera.

Repitiendo los pasos calculamos los casos para $1 \leq Y \leq 5$

$$p_{X|Y=1}(k) = \begin{cases} 0{,}94211637 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}05788363 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_{X|Y=2}(k) = \begin{cases} 0{,}8027228 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}1972772 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_{X|Y=3}(k) = \begin{cases} 0{,}5042763 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}4957237 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_{X|Y=4}(k) = \begin{cases} 0{,}2027509 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}7972491 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_{X|Y=5}(k) = \begin{cases} 0{,}05977772 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}94022228 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(d) A partir del inciso anterior se puede afirmar que aproximadamente el 79.72 % de los aspirantes que responden correctamente 4 preguntas, resultan adecuados. Mientras que aproximadamente solo el 19.73 % de los que responden correctamente 2 preguntas lo serán.
En base a esto, sería sensato ofrecerle el cargo al aspirante si fueran 4 sus preguntas contestadas correctamente. Pero si en cambio fueran solo 2, estaríamos enfrentando un riesgo alto al ofrecercelo.

2. Ejercicio 2

Contamos con los siguientes datos

$$P(X = 1) = 0{,}1$$
$$P(X = 1 \mid Y = 1) = 0{,}1$$
$$P(Y = 1) = 0{,}3$$

a partir de los cuales podemos deducir

- $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 0{,}9$
- $P(X = 1; Y = 1) = P(X = 1 \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) = 0,03$
- $P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = 0,7$

Volcando estos datos en una tabla

		Y		
		0	1	p_X
X	0	a	b	0,9
	1	c	0.03	0,1
	p_Y	0,7	0,3	

donde a, b y c deberán cumplir con la condición de sumar por filas y columnas los valores de las probabilidades marginales. Quedando entonces que

		Y		
		0	1	p_X
X	0	0, 63	0, 27	0,9
	1	0, 07	0.03	0,1
	p_Y	0,7	0,3	

Vemos entonces que las variables son independientes porque se cumple

$$p_{XY}(k,l) = p_X(k) \cdot p_Y(l) \;\; \forall \;\; k \in \{0;1\},\; l \in \{0;1\}$$

Calculemos ahora la probabilidad de que el libro sea exhibido

$$P(Z=1) = 1 - P(X=0; Y=0) = 1 - 0,63 = 0,37$$

Para que X e Y sean independientes dado $Z = 1$ debería ocurrir que

$$P(X=k; Y=l \mid Z=1) = P(X=k \mid Z=1) \cdot P(Y=l \mid Z=1) \;\; \forall \;\; k \in \{0;1\},\; l \in \{0;1\}$$

sin embargo tomando $k = 0$ y $l = 0$ se tiene

$$0 \neq P(X=0 \mid Z=1) \cdot P(Y=0 \mid Z=1)$$

por lo que no hay independencia.

3. Ejercicio 3

Consideramos la variable $X \sim Bernoulli(0,1)$ definida como

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el alumno es propenso a sufrir emergencias médicas} \\ 0 & \text{si no es propenso} \end{cases}$$

Sabemos que la cantidad de emergencias médicas depende del tipo de alumno de la siguiente manera

$$Y \mid X = 0 \sim Poi(0{,}2)$$
$$Y \mid X = 1 \sim Poi(2)$$

y que el gasto en pesos durante un período lectivo por alumno será $G = 2000 \cdot Y$.
Nos interesa calcular $E(G) = 2000 \cdot E(Y)$ y para calcular $E(Y)$ usaremos que

$$E(Y) = E(E(Y \mid X)) = E(g(X))$$

con $g(x) = E(Y \mid X = x)$ para $x \in R_X$.
Luego como $Y \mid X = x$ es en ambos casos una Poisson

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

y la función de probabilidad de $g(X)$ es

$$p_{g(X)}(k) = P(g(X) = k) = \begin{cases} P(X=0) & \text{si } k = 0{,}2 \\ P(X=1) & \text{si } k = 2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0{,}9 & \text{si } k = 0{,}2 \\ 0{,}1 & \text{si } k = 2 \end{cases}$$

se tiene entonces

$$E(Y) = E(g(X)) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}38$$

y por lo tanto

$$E(G) = 2000 \cdot 0{,}38 = 760$$

Para el cálculo del desvío nos ocupamos primero de la varianza

$$Var(G) = Var(2000 \cdot Y) = 2000^2 \cdot Var(Y)$$

para lo cual usaremos la fórmula

$$Var(Y) = Var(E(Y \mid X)) + E(Var(Y \mid X))$$

El primer sumando es

$$Var(g(X)) = E(g^2(X)) - E^2(g(X)) = (0{,}9 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}1 \cdot 2^2) - 0{,}38^2 = 0{,}2916$$

y para el segundo sumando debemos tener en cuenta que $Var(Y \mid X) = h(X)$ con $h(x) = Var(Y \mid X = x)$ para $x \in R_X$. Pero como $Y \mid X = x$ es en ambos casos una Poisson resulta que entonces $h(x) = g(x)$ y por lo tanto

$$E(Var(Y \mid X)) = E(g(X)) = 0{,}38$$

Obtenemos entonces

$$Var(Y) = 0{,}2916 + 0{,}38 = 0{,}6716$$

y el desvío del gasto queda

$$\sigma_G = \sqrt{2000^2 \cdot Var(Y)} = 2000 \cdot \sqrt{0{,}6716} = 1639{,}024$$

Para que un estudiante no ocasione gastos debe ocurrir que $Y = 0$, usando probabilidad total

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(Y = 0 \mid X = 0) \cdot P(X = 0) + P(Y = 0 \mid X = 1) \cdot P(X = 1) \\ &= \frac{e^{-0{,}2} \cdot 0{,}2^0}{0!} \cdot 0{,}9 + \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}7503912 \end{aligned}$$

Para que un estudiante genere gastos por 4000 pesos debe ocurrir que $Y = 2$, usando probabilidad total

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= P(Y = 2 \mid X = 0) \cdot P(X = 0) + P(Y = 2 \mid X = 1) \cdot P(X = 1) \\ &= \frac{e^{-0{,}2} \cdot 0{,}2^2}{2!} \cdot 0{,}9 + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}04180421 \end{aligned}$$

4. Ejercicio 4

Los datos que tenemos del enunciado son:

$$\begin{aligned} N &= \text{“}\mathit{Cantidad\ de\ clientes\ que\ entran\ al\ negocio}\text{”} \sim Poiss(30) \\ X_i &= \text{“}\mathit{Cantidad\ de\ prendas\ que\ compra\ el\ i-ésimo\ cliente}\text{”} \sim Poiss(2) \end{aligned}$$

con todas las variables independientes entre sí.

(a) Definimos

$$Y = \text{“}\mathit{Número\ de\ prendas\ vendidas}\text{”} = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Para calcular su esperanza vamos a condicionar Y de la siguiente forma:

$$Y \mid (N = n) = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

y de esta manera:

$$E(Y \mid N = n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2 \cdot n$$

Ahora bien, por la ley de esperanza total es sabido que $E(Y) = E\big(E(Y \mid N)\big)$, donde:

$$E(Y \mid N) = g(N) \;\; con \;\; g(n) = E(Y \mid N = n) = 2 \cdot n.$$

Entonces ya habiendo calculado $E(Y \mid N) = g(N) = 2 \cdot N$ se concluye que:

$$E(Y) = E\big(E(Y \mid N)\big) = E(2 \cdot N) = 2 \cdot E(N) = 2 \cdot 30 = 60.$$

Para el cálculo del desvío, calculamos la varianza utilizando la fórmula:

$$Var(Y) = E\big(Var(Y \mid N)\big) + Var\big(E(Y \mid N)\big)$$

El segundo sumando de la fórmula es:

$$Var\big(E(Y \mid N)\big) = Var\big(2 \cdot N\big) = 2^2 \cdot Var(N) = 4 \cdot 30 = 120.$$

Para el primer sumando necesitamos calcular $Var(Y \mid N)$ que se define como:

$$Var(Y \mid N) = h(N) \;\; con \;\; h(n) = Var(Y \mid N = n),$$

luego por la independencia entre la cantidad de prendas compradas por cliente, se tiene que:

$$Var(Y \mid N = n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2 \cdot n,$$

entonces $Var(Y \mid N) = h(N) = 2 \cdot N$ y el primer sumando queda:

$$E\big(Var(Y \mid N)\big) = E(2 \cdot N) = 2 \cdot E(N) = 2 \cdot 30 = 60.$$

Finalmente concluimos que:

$$Var(Y) = E\big(Var(Y \mid N)\big) + Var\big(E(Y \mid N)\big) = 60 + 120 = 180,$$

y por lo tanto

$$\sigma_Y = \sqrt{180} = 13{,}41641$$

(b) Sea Z = "*Ganancia neta por compra*", definimos

$$G = \text{“}Ganancia\ neta\ diaria\text{”} = \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

luego

$$(G \mid N = n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

por linealidad e independencia:

$$g(n) = E(G \mid N = n) = n \cdot E(Z_i) = 100 \cdot n$$
$$h(n) = Var(G \mid N = n) = n \cdot Var(Z_i) = 20^2 \cdot n = 400 \cdot n$$

Luego la esperanza será

$$E(G) = E(g(N)) = E(100 \cdot N) = 100 \cdot E(N) = 100 \cdot 30 = 3000$$

Y la varianza

$$\begin{aligned} Var(G) &= E\left(Var(G \mid N)\right) + Var\left(E(G \mid N)\right) \\ &= E(h(N)) + Var(g(N)) \\ &= E(400 \cdot N) + Var(100 \cdot N) \\ &= 400 \cdot E(N) + 100^2 \cdot Var(N) \\ &= 400 \cdot 30 + 100^2 \cdot 30 = 312000 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\sigma_G = \sqrt{312000} = 558{,}5696$$

5. Ejercicio 5

(a) Como no sabemos nada sobre cada X_i, las asumimos $U\,(0;100)$, luego

$$E\,(V) = n \cdot E\,(X_1) = 50 \cdot n.$$

(b) Ahora sabemos que $X_i = x_i$

$$\begin{aligned} E\,(V \mid X_i = x_i) &= E\,(X_1 + \ldots + X_i + \ldots + X_n \mid X_i = x_i) \\ &= E\,(X_1 + \ldots + x_i + \ldots + X_n \mid X_i = x_i) \\ &= x_i + \sum_{j \neq i} E\left(X_j \mid X_i = x_i\right) \end{aligned}$$

como las X_i son independientes se tiene que $E\left(X_j \mid X_i = x_i\right) = E(X_j)$ si $j \neq i$, entonces

$$E\,(V \mid X_i = x_i) = x_i + \sum_{j \neq i} E(X_j) = x_i + (n-1) \cdot 50$$

(c) Nos interesa calcular

$$\begin{aligned}
E\left(V \mid X_1 = x_1, \max\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) &= \sum_{j=1}^{n} E\left(X_j \mid X_1 = x_1, \max\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) \\
&= E\left(X_1 \mid X_1 = x_1, \max\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) + \sum_{j=2}^{n} E\left(X_j \mid X_1 = x_1, \max\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right)
\end{aligned}$$

por independencia entre las X_i

$$\begin{aligned}
E\left(V \mid X_1 = x_1, \max\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) &= E\left(X_1 \mid X_1 = x_1\right) + \sum_{j=2}^{n} E\left(X_j \mid X_j \leq x_1\right) \\
&= E\left(x_1 \mid X_1 = x_1\right) + (n-1) \cdot E\left(X_2 \mid X_2 \leq x_1\right)
\end{aligned}$$

por el ejercicio 16 del TP 8 sabemos que $X_2 \mid X_2 \leq x_1 \sim U(0; x_i)$, entonces

$$E\left(V \mid X_1 = x_1, \max\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) = x_1 + (n-1) \cdot \frac{x_1}{2}$$

Es razonable que la esperanza sea menor que la calculada en (b) porque en en este caso estamos condicionando a información que acota el valor de cada una de las X_j por x_1 mientras que en (b), para $j \neq 1$, solamente sabemos que $X_j < 100$.

6. Ejercicio 6

(a) Usando linealidad de la esperanza

$$E(Z) = a_1 \cdot E(X_1) + a_2 \cdot E(X_2) + a_3 \cdot E(X_3) = 0{,}08 \cdot a_1 + 0{,}12 \cdot a_2 + 0{,}1 \cdot a_3$$

(b) Se puede ver que la varianza de una combinación lineal de 3 variables aleatorias es

$$\begin{aligned}
Var(Z) = {} & {a_1}^2 \cdot Var(X_1) + {a_2}^2 \cdot Var(X_2) + {a_3}^2 \cdot Var(X_3) \\
& + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot Cov(X_1; X_2) + 2 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot Cov(X_1; X_3) + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot Cov(X_2; X_3)
\end{aligned}$$

Reemplazando, teniendo en cuenta que $\rho_{X_i X_j} = \dfrac{Cov(X_i; X_j)}{\sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j}}$ queda que

$$\begin{aligned}
Var(Z) = {} & 0{,}0004 \cdot {a_1}^2 + 0{,}0025 \cdot {a_2}^2 + 0{,}009 \cdot {a_3}^2 \\
& - 0{,}0008 \cdot a_1 \cdot a_2 - 0{,}00024 \cdot a_1 \cdot a_3 + 0{,}0018 \cdot a_2 \cdot a_3
\end{aligned}$$

(c) Sí es posible, por ejemplo diversificando

$$\begin{aligned}
a_1 &= 9000 \\
a_2 &= 1000 \\
a_3 &= 0
\end{aligned}$$

(d) Habría que resolver el problema de extremos restringidos que consiste en maximizar la función $g(a_1, a_2, a_3) = 0{,}08 \cdot a_1 + 0{,}12 \cdot a_2 + 0{,}1 \cdot a_3$ sujeta a las restricciones

$$\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 & \leq 10000 \\
h(a_1, a_2, a_3) & \leq 200^2 \\
0 & \leq a_1 \\
0 & \leq a_2 \\
0 & \leq a_3
\end{cases}$$

Se puede demostrar que la región en cuestión es acotada y sumado a que la función g es continua, entonces necesariamente alcanzará un valor máximo dentro de la región.

7. Ejercicio 7

Dado que

$$X = 0 \Rightarrow Y = 1$$
$$X = -1 \Rightarrow Y = 0$$
$$X = 1 \Rightarrow Y = 0$$

entonces

$$P(Y = 0 \mid X = 0) = P(Y = 1 \mid X = -1) = P(Y = 1 \mid X = 1) = 0$$

y consecuentemente

$$P(Y = 0 \mid X = 0) \Rightarrow p_{XY}(0;0) = 0$$
$$P(Y = 1 \mid X = -1) \Rightarrow p_{XY}(-1;1) = 0$$
$$P(Y = 1 \mid X = 1) \Rightarrow p_{XY}(1;1) = 0$$

Esta información, junto con que X es una variable uniforme, nos dice que

		Y		
		0	1	P_X
X	-1	-	0	$1/3$
	0	0	-	$1/3$
	1	-	0	$1/3$
	P_Y	-	-	

y luego el resto de las posiciones son fácilmente calculables

		Y		
		0	1	P_X
X	-1	$1/3$	0	$1/3$
	0	0	$1/3$	$1/3$
	1	$1/3$	0	$1/3$
	P_Y	$2/3$	$1/3$	

(a)

$$E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$
$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$E(X \cdot Y) = \sum_{k \in R_X} \sum_{l \in R_Y} k \cdot l \cdot p_{XY}(k;l) = 0$$

(notar que $E(X \cdot Y) = 0$ pues cada sumando de la doble sumatoria es nulo, ya que en la tabla se evidencia que para cualquier posición siempre ocurre que alguna de las variables o la conjunta toman valor cero). Finalmente

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0 - 0 \cdot 2/3}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = 0$$

(b) No hay independencia, pues:

$$p_{XY}(0,0) \neq p_X(0) \cdot p_Y(0)$$

ya que $0 \neq 1/3 \cdot 2/3$.
Es importante reconocer que se trata de variables aleatorias no correlacionadas pero que sin embargo resultan ser dependientes. Lo cual muestra que, si bien independencia implica correlación nula (propiedad vista en clase), la vuelta es falsa y por lo tanto no se puede hablar de una equivalencia entre dichas características.

8. Ejercicio 8

$$X_1 = \{\text{Cantidad de encuestados que eligen la marca 1}\}$$
$$X_2 = \{\text{Cantidad de encuestados que eligen la marca 2}\}$$
$$X_3 = \{\text{Cantidad de encuestados que eligen la marca 3}\}$$
$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = X_2, X_3 = X_3\right) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = n \; p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

En estas distribuciones hay solamente dos grados de libertad, entonces

$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\right) = P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right) = \frac{n!}{x_1!x_2!(n-x_1-x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \left(1 - p_1 - p_2\right)^{n-x_1-x_2}$$

Para obtener la distribución marginal de X_1 debo sumar en todo el soporte de X_2 dado x_1. Notar que dado un valor x_1, X_2 se mueve entre 0 y $n - x_1$ ya que $x_1 + x_2 + x_3 = n$.

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 = x_1\right) &= \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!}{x_1!x_2!(n-x_1-x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \left(1-p_1-p_2\right)^{n-x_1-x_2} \\
&= \frac{n!}{x_1!} p_1^{x_1} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!}{(n-x_1)!} \frac{1}{x_2!(n-x_1-x_2)!} p_2^{x_2} \left(1-p_1-p_2\right)^{n-x_1-x_2} \\
&= \overbrace{\frac{n!}{x_1!(n-x_1)!}}^{\binom{n}{x_1}} p_1^{x_1} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{n-x_1} \overbrace{\frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!}}^{\binom{n-x_1}{x_2}} p_2^{x_2} \left(1-p_1-p_2\right)^{n-x_1-x_2}}_{\textit{Binomio de Newton} \rightarrow \textit{ver abajo}} \\
&= \binom{n}{x_1} p_1^{x_1} \left(1-p_1\right)^{n-x_1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $X_1 \sim B\left(n, p_1\right)$.

¿Qué es el binomio de Newton? Consideremos el polinomio $(x+y)^N$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$. Para el caso $N = 1$, dicho polinomio no es más que $x + y$. Para el caso $N = 2$, todos sabemos que

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Para el caso $N = 3$, algunos conocerán la fórmula

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

En general, podemos escribir

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^k$$

Notemos que en el penúltimo paso más arriba, si denominamos $x \equiv p_2$, $y \equiv 1 - p_1 - p_2$, $N \equiv n - x_1$ y $k \equiv x_2$ no tenemos más que la expresión para el binomio de Newton $(x+y)^N$ que reemplazar y escribir como

$$\left(p_2 + 1 - p_1 - p_2\right)^{n-x_1} = \left(1 - p_1\right)^{n-x_1}$$

9. Ejercicio 9

$$Z = \{\text{Proporción diaria de pantallas de 16 pulgadas defectuosas}\}$$
$$Y = \{\text{Proporción diaria de pantallas de 20 pulgadas defectuosas}\}$$
$$f(y,z) = \left[\theta z + (2-\theta)y\right] I_{(0,1)}(z) I_{(0,1)}(y)$$

A

$$f(z) = \int_0^1 \theta z + (2-\theta) y dy = \theta z y + \frac{2-\theta}{2} y|_0^1 = \theta z + \frac{2-\theta}{2} I_{(0,1)}$$

$$\mathbf{E}[Z] = \int_0^1 z\left(\theta z + \frac{2-\theta}{2}\right) dz = \int_0^1 \theta z^2 + \frac{2-\theta}{2} z dz = \frac{\theta}{3} z^3 + \frac{2-\theta}{4} z^2|_0^1 = \frac{\theta}{3} + \frac{2-\theta}{4}$$

B

$$f(y) = \int_0^1 \theta z + (2-\theta) y dz = \frac{\theta}{2} z^2 + (2-\theta) y z|_0^1 = \frac{\theta}{2} + (2-\theta) y I_{(0,1)}(y)$$

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^1 y\left(\frac{\theta}{2} + (2-\theta) y\right) dy = \int_0^1 \frac{\theta}{2} y + (2-\theta) y^2 dy = \frac{\theta}{4} y^2 + \frac{2-\theta}{3} y^3|_0^1 = \frac{\theta}{4} + \frac{2-\theta}{3}$$

10. Ejercicio 10

$$f(x,y) = \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,1)}(y)$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(XY)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

$$Cov(XY) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

$$Var(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2$$

$$Var(Y) = \mathbf{E}\left[Y^2\right] - \mathbf{E}[Y]^2$$

$$\mathbf{E}[XY] = \int_0^\infty \int_0^1 xy \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x} \int_0^1 \left(xy + y^2\right) dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3|_0^1\right)$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx + \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{xe^{-x}}^{G(\alpha=2,\lambda=1)} dx}_{(Cond.Cierre)=1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x} dx + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\Gamma(3)}{2}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(3)x^2e^{-x}}}^{G(\alpha=3,\lambda=1)} dx}_{(Cond.Cierre)=1} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\Gamma(3)}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty \int_0^1 x \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x} \int_0^1 (x+y) dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\left(xy + \frac{1}{2}y^2|_0^1\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{xe^{-x}}^{G(\alpha=2,\lambda=1)} dx}_{(Cond.Cierre)=1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x} dx + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\Gamma(3)\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x}}^{G(\alpha=3,\lambda=1)} dx}_{(Cond.Cierre)=1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\Gamma(3) + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}$$

$$\mathbf{E}\left[X^2\right]=\int_0^\infty\int_0^1 x^2\frac{2}{3}(x+y)e^{-x}dy\,dx=\frac{2}{3}\int_0^\infty x^2e^{-x}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^\infty x^3e^{-x}dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2e^{-x}dx\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\int_0^\infty\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4)}x^3e^{-x}dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3)}x^2e^{-x}dx\right)=\frac{2}{3}\left(\Gamma(4)\underbrace{\int_0^\infty\overbrace{\frac{1}{\Gamma(4)}x^3e^{-x}}^{G(\alpha=4,\lambda=1)}dx}_{(Cond.Cierre)=1}+\frac{\Gamma(3)}{2}\underbrace{\int_0^\infty\overbrace{\frac{1}{\Gamma(3)}x^2e^{-x}}^{G(\alpha=3,\lambda=1)}dx}_{(Cond.Cierre)=1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\Gamma(4)+\frac{\Gamma(3)}{2}\right)=\frac{14}{3}$$

$$\mathbf{E}[Y]=\int_0^\infty\int_0^1 y\frac{2}{3}(x+y)e^{-x}dy\,dx=\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\int_0^1\left(xy+y^2\right)dy\,dx=\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3|_0^1\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty\overbrace{xe^{-x}}^{G(\alpha=1,\lambda=1)}dx}_{(Cond.Cierre)=1}+\frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-x}dx\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{9}$$

$$\mathbf{E}\left[Y^2\right]=\int_0^\infty\int_0^1 y^2\frac{2}{3}(x+y)e^{-x}dy\,dx=\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\int_0^1\left(xy^2+y^3\right)dy\,dx=\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{3}xy^3+\frac{1}{4}y^4|_0^1\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\underbrace{\int_0^\infty\overbrace{xe^{-x}}^{G(\alpha=1,\lambda=1)}dx}_{(Cond.Cierre)=1}+\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-x}dx\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{18}$$

$$Cov(XY)=\frac{8}{9}-\frac{5}{3}\frac{5}{9}=-\frac{1}{27}$$

$$Var\,(X)=\frac{14}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{17}{9}$$

$$Var\,(Y)=\frac{7}{18}-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{13}{162}$$

$$\rho_{XY}=\frac{-1/27}{\sqrt{17/9}\sqrt{13/162}}=-0{,}0951$$

11. Ejercicio 11

$$X=\{\text{Personas que entran en una farmacia}\}$$

$$M=\{\text{Mujeres que entran en una farmacia}\}$$

$$X\sim P\,(\lambda)\;\;M|X\sim B\,(n=X,p)$$

Necesito el supuesto de independencia entre las distintas personas.

$$\text{Por Ley de Expectativas Iteradas }\mathbf{E}\,[M]=\mathbf{E}\,[\mathbf{E}\,[M|X]]$$

$$\mathbf{E}\,[M]=\mathbf{E}\,[\mathbf{E}\,[M|X]]=\mathbf{E}\left[Xp\right]=\lambda p$$

$$\text{Por Ley de Expectativas Iteradas }Var\,(M)=Var\,(\mathbf{E}\,[M|X])+\mathbf{E}\,[Var\,(M|X)]$$

$$Var\,(M)=Var\,(Xp)+\mathbf{E}\left[Xp(1-p)\right]=p^2\lambda+\lambda p(1-p)=\lambda p$$

$$M_M(t)=\mathbf{E}\left[e^{tm}\right]=\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[e^{tm}|X\right]\right]\overset{M|X\sim B(X,p)}{=}\mathbf{E}\left[\left(pe^t+1-p\right)^X\right]=\sum_{x=0}^{\infty}\left(pe^t+1-p\right)^x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda\left(pe^t+1-p\right)\right)^x}{x!}}_{=e^{\lambda\left(pe^t+1-p\right)}}=e^{-\lambda+\lambda pe^t+\lambda-\lambda p}=e^{\lambda p\left(e^t-1\right)}\therefore M\sim P\,(\lambda p)$$

12. Ejercicio 12

$$f(x|y) = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}} \quad Y \sim G(p) \implies X|Y \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{Y}\right)$$

Notar que esto implica que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ y que $Var(X|Y) = Y^2$.

A

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|Y]] = \mathbf{E}[Y] = \frac{1}{p}$$

B

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(\mathbb{E}[X|Y]) + \mathbb{E}[Var(X|Y)] \\ &= Var(Y) + \mathbb{E}(Y^2) \text{ ya que } \mathbb{E}[X|Y] = Y \text{ y } Var(X|Y) = Y^2 \\ &= 2Var(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 \text{ ya que } \mathbb{E}[Y^2] = Var(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{3-2p}{p^2} \end{aligned}$$

13. Ejercicio 13

$$\begin{aligned} N &= \{\text{Número de clientes que entran}\} \\ X_i &= \{\text{Gasto del i-ésimo cliente}\} \\ T &= \{\text{Ingreso total del negocio}\} \\ \mathbf{E}[X_i] &= \mu \ \forall i \\ Var(X_i) &= \sigma^2 \ \forall i \\ T &= \sum_{i=1}^{N} X_i \end{aligned}$$

A

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[T|N]] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]\right] \overset{indep}{=} \mathbf{E}[N\mu] = \mu\mathbf{E}[N]$$

Nótese que $\mathbf{E}[T]$ queda expresado en función del valor esperado de N, que es desconocido.

B

$$Var(T) = Var(\mathbf{E}[T|N]) + \mathbf{E}[Var(T|N)] = Var(N\mu) + \mathbf{E}\left[Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right]$$

$$\overset{indep}{=} \mu^2 Var(N) + \mathbf{E}\left[N\sigma^2\right] = \mu^2 Var(N) + \sigma^2\mathbf{E}[N]$$

14. Ejercicio 14

$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$. El estimador de Máxima Verosimilitud es $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

A

$$\mathbf{E}\left[\bar{X}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \overset{indep}{=} \frac{1}{n} n \mathbf{E}\left[X\right] = \theta$$

B

$$Var\left(\bar{X}\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{iid}{=} \frac{1}{n^2} n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$$

15. Ejercicio 15

A

$$f(x,y) = \left[2x + 2y - 4xy\right] I_{(0,1)}(x) I_{(0,1)}(y)$$
$$f_x = \int_0^1 (2x + 2y - 4xy)\, dy = 2xy + y^2 - 2xy^2|_0^1 = 1 \therefore X \sim U[0,1]$$
$$f_y = \int_0^1 (2x + 2y - 4xy)\, dx = x^2 + 2xy - 2xy^2|_0^1 = 1 \therefore Y \sim U[0,1]$$

B

$$f(x,y) = \left[2 - 2x - 2y + 4xy\right] I_{(0,1)}(x) I_{(0,1)}(y)$$
$$f_x = \int_0^1 (2 - 2x - 2y + 4xy)\, dy = 2y - 2xy - y^2 + 2xy^2|_0^1 = 1 \therefore X \sim U[0,1]$$
$$f_y = \int_0^1 (2 - 2x - 2y + 4xy)\, dx = 2x - x^2 - 2xy + 2x^2y|_0^1 = 1 \therefore Y \sim U[0,1]$$

16. Ejercicio 16

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) I_{(0,1)}(x) I_{(0,2)}(y)$$

A

Para que sea una función de densidad debe verificar la condición de cierre, es decir:

$$\int_0^1 \int_0^2 f(x,y)dy\,dx = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dy\,dx = \frac{6}{7}\int_0^1 \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dy\,dx = \frac{6}{7}\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}|_0^2\right) dx = \frac{6}{7}\int_0^1 \left(2x^2 + x\right) dx$$

$$= \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2|_0^1\right) = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = 1$$

B

$$f_x = \int_0^2 \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dy\, I_{(0,1)}(x) = \frac{6}{7}\left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}|_0^2\right) I_{(0,1)}(x) = \frac{6}{7}\left(2x^2 + x\right) I_{(0,1)}(x)$$

C

$$P(X > Y) = \int_0^1 \int_0^x \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dy\,dx = \frac{6}{7}\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}|_0^x\right) dx = \frac{6}{7}\int_0^1 \frac{5}{4}x^3 dx = \frac{15}{56}$$

17. Ejercicio 17

$$X, Y \text{ Independientes} \Leftrightarrow f(x,y) = f(x)f(y)$$

A

$$f(x,y) = xe^{-(x+y)} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$$

$$f_x = \int_0^\infty xe^{-(x+y)} dy\, I_{(0,\infty)}(x) = xe^{-x}\int_0^\infty e^{-y} dy = xe^{-x}\, I_{(0,\infty)}(x) \therefore X \sim G(\alpha = 2, \lambda = 1)$$

$$f_y = \int_0^\infty xe^{-(x+y)} dx\, I_{(0,\infty)}(y) = e^{-y}\underbrace{\int_0^\infty xe^{-x} dx}_{\mathbf{E}[X]=1}\, I_{(0,\infty)}(y) = e^{-y}\, I_{(0,\infty)}(y) \therefore Y \sim Exp(\lambda = 1)$$

$$f_x f_y = xe^{-x}e^{-y} = xe^{-(x+y)} = f(x,y) \therefore X, Y \text{ independientes}$$

B

$$f(x,y) = 2I_{(0,y)}(x)\, I_{(0,1)}(y)$$

$$f_x = \int_x^1 2dy\, I_{(0,y)}(x) = 2(1-x)\ I_{(0,1)}(x)$$

En este caso como $x < y$ siempre, el límite inferior de la integración para obtener la marignal de X debe ser x, puesto que nunca puede ser menor. Como $y \in (0,1)$ entonces $x \in (0,1)$.

$$f_y = \int_0^y 2dx\, I_{(0,1)}(y) = 2y\, I_{(0,1)}(y)$$

$$f_x f_y = 4(1-x)y \neq f(x,y) \therefore X, Y \text{ no son independientes}$$

18. Ejercicio 18

$$X \sim U[0,1] \qquad Y \sim Exp\,(\lambda = 1)$$
$$X, Y \text{ independientes } \iff f(x,y) = f(x)f(y) = e^{-y} I_{(0,1)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$$

A

$$Z = X + Y$$
$$F_Z(z) = P\,(Z \leq z) = P\,(X + Y \leq z) = P\,(Y \leq z - X)$$

$\underline{z \leq 1} \implies y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq z$

$$F_Z(z) = P\,(Y \leq z - X) = \int_0^z \int_0^{z-x} e^{-y} dy\, dx = \int_0^z \left(-e^{-(z-x)} + 1\right) dx = x - e^{-(z-x)}|_0^z = z - 1 + e^{-z}$$

$\underline{z > 1} \implies y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq z \implies x \in [0,1]$

$$F_Z(z) = P\,(Y \leq z - X) = \int_0^1 \int_0^{z-x} e^{-y} dy\, dx = \int_0^1 \left(-e^{-(z-x)} + 1\right) dx = x + e^{-(z-x)}|_0^1 = 1 - e^{-z}\,(e-1)$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z - 1 + e^{-z} & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - e^{-z}\,(e-1) & z > 1 \end{cases}$$

$$f_z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 + e^{-z} & 0 \leq z \leq 1 \\ -e^{-z}(e-1) & z > 1 \end{cases}$$

B

$$Z = \frac{X}{Y}$$

$$P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = 1 - P\left(Y \leq \frac{X}{z}\right) = 1 - \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{z}} e^{-y} dy\, dx = 1 - \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{x}{z}}\right) dx = x + ze^{-\frac{x}{z}}|_0^1 = z\left(1 + e^{-\frac{1}{z}}\right)$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z\left(1 - e^{-\frac{1}{z}}\right) & z \geq 0 \end{cases}$$

19. Ejercicio 19

$$f(x,y) = e^{-y} I_{(0,y)}(x)$$

A

$$Cov(XY) = \mathbf{E}\,[XY] - \mathbf{E}\,[X]\,\mathbf{E}\,[Y]$$

$$\mathbf{E}[XY] = \int_0^\infty \int_0^y xye^{-y} dx\, dy = \int_0^\infty ye^{-y} \int_0^y x\, dx\, dy = \int_0^\infty \frac{1}{2} y^3 e^{-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4)} y^3 e^{-y} dy$$

$$= \frac{\Gamma(4)}{2} \underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(4)} y^3 e^{-y}}^{G(\alpha=4,\lambda=1)} dy}_{(Cond.\,Cierre)=1} = 3$$

$$f_x = \int_x^\infty e^{-y} dy = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) \therefore X \sim Exp(\lambda = 1) \implies \mathbf{E}[X] = 1$$

$$f_y = \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y} I_{(0,\infty)}(y) \therefore Y \sim G(\alpha = 2, \lambda = 1) \implies \mathbf{E}[Y] = 2$$

$$Cov(XY) = 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

B

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y} I_{(0,y)}(x) \therefore X|Y \sim U[0,y]$$

$$\mathbf{E}[X|Y] = \frac{y}{2}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{x-y} I_{(x,\infty)}(x)$$

$$\mathbf{E}[Y|X] = \int_x^\infty ye^{x-y} dy = e^x \int_x^\infty ye^{-y} dy = e^x \left(-ye^{-y} - e^{-y}|_x^\infty\right) = e^x \left(xe^{-x} + e^{-x}\right) = x + 1$$

20. Ejercicio 20

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\left(1 - e^{-\lambda y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(1 - e^{-\lambda x}\right)\left(\lambda e^{-\lambda y}\right)\right) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y}$$

21. Ejercicio 21

		$Y = y$			
	$P(X = x, Y = y)$	0	1	2	3
	0	1/8	1/8	0	0
$X = x$	1	0	2/8	2/8	0
	2	0	0	1/8	1/8

22. Ejercicio 22

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y) = \int_0^x f_X\left(x'\right) dx' \int_0^y f_Y\left(y'\right) dy'$$

$$= \int_0^x 1 dx' \int_0^y 1 dy' = xy$$

23. Ejercicio 23

Hay que usar partes un par de veces

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_0^{y} xy\lambda^2 e^{-\lambda y} dxdy \\
&\int_0^{+\infty} y\lambda^2 e^{-\lambda y}\frac{x^2}{2}\Big|_0^y dy \\
&\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^3\lambda^2 e^{-\lambda y} dy \\
&-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda y}(\lambda^3 x^3 + 3\lambda^2 y^2 + 6\lambda x + 6)\Big|_0^{+\infty} = \frac{6}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_x^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} dy \\
&= \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0
\end{aligned}
$$

de forma tal que $X \sim Exp(\lambda)$.

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^{y} \lambda^2 e^{-\lambda y} dx \\
&= \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0
\end{aligned}
$$

de forma tal que la distribución de $X \sim \Gamma(2, \lambda)$.

24. Ejercicio 24

$$
P(X > Y) = \frac{12}{7}\int_0^1\int_0^x \left(x^2 + xy\right) dydx = \frac{9}{14}
$$

La función de densidad marginal de X,

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{12}{7}\int_0^1 \left(x^2 + xy\right) dy \\
&= \frac{12}{7}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

La función de densidad marginal de Y

$$
f_Y(y) = \frac{12}{7}\int_0^1 \left(x^2 + xy\right) dx = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right)
$$

y las distribuciones condicionales.