Repaso

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Modelo de Leontief

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned}
$$

o lo que es lo mismo

$$
\begin{pmatrix}
(1-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\
-a_{21} & (1-a_{22}) & \cdots & -a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1-a_{nn})
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n \end{pmatrix}.
$$

Sistemas Lineales

Teorema.

Sean $v_1, \ldots, v_n$ soluciones del sistema lineal homogéneo $Ax = 0$. Entonces todo $v \in \langle v_1, \ldots v_n \rangle$ es también una solución de $Ax = 0$.

Propiedad.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. El conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo $Ax = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

Sistemas Lineales

Teorema.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y v_0 una solución de $Ax = b$ y W el espacio de soluciones de $Ax = 0$. Entonces v es una solución de $Ax = b$ si y solo si existe $w \in W$ tal que $v = w + v_0$.

Teorema.

Un sistema $Ax = b$ o no tiene soluciones o tiene una única solución o tiene infinitas soluciones.

Compatibles e incompatibles

- **Sistema compatible** si tiene solución, en este caso además puede distinguirse entre:
  - **Sistema compatible determinado** cuando tiene una única solución.
  - **Sistema compatible indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones.
- **Sistema incompatible** si no tiene solución.

Eliminación de Gauss-Jordan

Proposición.

Dado un sistema lineal de ecuaciones, los siguientes cambios en las ecuaciones dan lugar a sistemas equivalentes:

i) Intercambiar dos ecuaciones/filas de lugar;

ii) Multiplicar una ecuación/fila por una constante no nula;

iii) Reemplazar una ecuación/fila por ella misma más un múltiplo de otra.

Eliminación de Gauss-Jordan

Sea $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matriz. Decimos que B es **escalonada** si

1. Las filas nulas están en la parte inferior de la matriz.
2. Si una fila no es nula, entonces el primer elemento (de izquierda a derecha) es 1. Estos se llaman **pivotes**.
3. Los pivotes de las filas superiores están a la izquierda de los pivotes de las filas inferiores.
4. Las columnas que contienen a los pivotes tienen ceros debajo de estos.

Ejemplo 1. Las siguientes matrices son escalonadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eliminación de Gauss-Jordan

Teorema.

Dado un sistema lineal de n ecuaciones con m incógnitas, aplicando los cambios descriptos en la proposición anterior, puede obtenerse un sistema equivalente cuya matriz asociada es escalonada.

http://www.matrixcalc.org

Ejemplo

Ejemplo 2. Determinar si las siguientes matrices son linealmente indepedientes o dependientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

http://www.matrixcalc.org

Matriz identidad

- **Matriz identidad**: $I_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriztal que $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$, y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$:

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Definición.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice **inversible** (o invertible) si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$

Observación.

La matriz B de la definición es única. Habitualmente se denota $A^{-1} = B$

Una matriz cuadrada que no es inversible se llama **singular** y una matriz inversible se llama también **no singular**.

Matrices inversibles

Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto de todas la matices inversibles en $\mathbb{R}^n$ se denota

$$GL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A \text{ es inversible}\}.$$

Proposición.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

- $I_n \in GL(n)$;
- Si $A \in GL(n)$ entonces $A^{-1} \in GL(n)$;
- Si $A, B \in GL(n)$ entonces $AB \in GL(n)$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- Si $A \in GL(n)$ y $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ entonces el sistema $Ax = b$ tiene una única solución $(x = A^{-1}b)$.

Rango de una matriz

Definición.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $F_1, \ldots, F_n$ las filas de A. El **rango fila** de A es la dimensión del subespacio generado por las filas de A, es decir

$$\mathrm{rg}_F(A) = \dim(\langle F_1, \ldots, F_n\rangle)$$

Definición.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $C_1, \ldots, C_m$ la filas de A. El **rango columna** de A es la dimensión del subespacio generado por las columnas de A, es decir

$$\mathrm{rg}_C(A) = \dim(\langle C_1, \ldots, C_m\rangle)$$

Rango de una matriz - (se acabó el repaso)

Observación.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Entonces

- $0 \leq \mathrm{rg}_F(A) \leq n$;
- $0 \leq \mathrm{rg}_C(A) \leq m$;
- $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A^t)$.

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Entonces $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A)$.

Rango de una matriz

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Al número $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A)$ lo llamaremos **rango** de A y lo denotaremos $\mathrm{rg}(A)$.

Observación.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Entonces $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{mín}\{n, m\}$.

Rango de una matriz

Proposición.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $S = \{x \in \mathbb{R}^m \colon Ax = 0\}$ Entonces

$$\dim(S) = m - \operatorname{rg}(A).$$

En otras palabras, la dimensión del espacio de soluciones de un sistema lineal homogéneo es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes.

Rango de una matriz

Ejemplo 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon Ax = 0\} \text{ y } \mathrm{rg}(A).$$

Rango de una matriz

Ejemplo 4. Determinar una base para el espacio generado por los siguientes cuatro vectores

$$v_1 = (1, 2, -3),\ v_2 = (-2, 0, 4),\ v_3 = (0, 4, -2), v_4 = (-2, -4, 6).$$

Rango de una matriz

Proposición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces A es inversible si y solo si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Proposición.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Entonces

$$\operatorname{rg}(AB) \leq \text{mín}\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\}$$

Rango de una matriz

Teorema.

Sen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in GL(n)$ y $D \in GL(m)$. Entonces

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(CA) = \operatorname{rg}(AD) = \operatorname{rg}(CAD).$$

Matrices y Determinantes

Maestría en Econometría–Matemática I

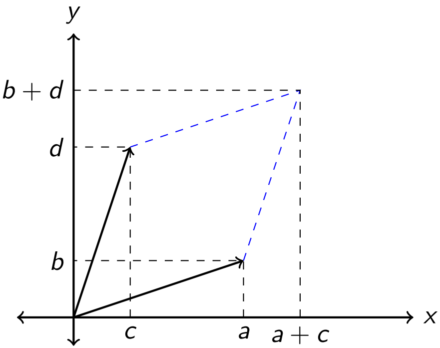
1er Trimestre 2023

Determinante de una matriz

Sea

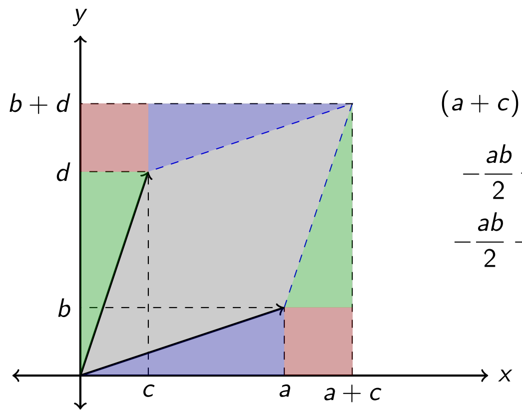
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el $\mathrm{rg}(A) = 2$. Entonces los vectores filas generan un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$.



Determinante de una matriz

Calculemos el área del paralelogramo.



$$(a+c)(b+d)$$

$$-\frac{ab}{2} - cb - \frac{cd}{2}$$

$$-\frac{ab}{2} - cb - \frac{cd}{2}$$

Área$= (a+c)(b+d) - ab - 2cb - cd = ad - cb$

Determinante de una matriz

Definición.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Definimos el determinante de A de la siguiente manera

$$\det(A) = ad - bc.$$

Ejemplo 5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Determinante de una matriz

Teorema.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

I) Entonces A es inversible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

II) Si $\det(A) \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Determinante de una matriz

Ejemplo 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Determinante de una matriz

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Denotamos por M_{ij} la submatriz de A que se obtiene suprimiendo su $i-$ésima fila y $j-$ésima columna. M_{ij} se llama la **menor** ij de A. Observar que $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Ejemplo 7. Hallar M_{11}, M_{12} y M_{13} para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Determinante de una matriz

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Definimos el **determinante** de A de la siguiente manera

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}).$$

Determinante de una matriz

Ejemplo 8. Hallar el determinante de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Determinante de una matriz

Observación.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Determinante de una matriz

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definimos el **determinante** de A de la siguiente manera

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}).$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El **cofactor** ij de A, denotado por A_{ij}, esta dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Entonces

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$$

Determinante de una matriz

En realidad uno puede elegir la fila que quiera, es decir

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

En este caso se dice que el determinante esta desarrollado por la fila $i-$ésima.
También se puede desarrollar por columnas

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

En este caso se dice que el determinante esta desarrollado por la columna $j-$ésima.

Determinante de una matriz

Ejemplo 9. Calcule el $\det(A)$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Determinante de una matriz

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces A es inversible si y solo si

$$\det(A) \neq 0.$$

Determinante de una matriz

Ejemplo 10. Determinar para cada valor de α si el sistema es incompatible, o compatible.

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + y + z = 1 \end{cases}$$

Determinante de una matriz

Ejemplo 11. Calcule el determinante de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 1/100 \end{pmatrix}$$

Determinante de una matriz

Teorema.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de $n \times n$ triangular superior o inferior entonces

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Propiedades del determinante

Ejemplo 12. Calcular los determinantes de A, B y AB, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

http://www.matrixcalc.org

Propiedades del determinante

Teorema.

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Entonces

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Corolario.

Sea A una matriz de $n \times n$. Si A es inversible entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Propiedades del determinante

Teorema.

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Propiedades del determinante

Propiedad.

Si A es una matriz de $n \times n$ con una fila o columna de ceros entonces $\det(A) = 0$

Propiedades del determinante

- $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i_0 1} & ka_{i_0 2} & \cdots & ka_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 2} & \cdots & a_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

- $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ka_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ka_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ka_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Propiedades del determinante

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_0}+\alpha_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j_0}+\alpha_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj_0}+\alpha_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Propiedades del determinante

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_0 1}+\alpha_{i_0 1} & a_{i_0 2}+\alpha_{i_0 2} & \cdots & a_{i_0 n}+\alpha_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 2} & \cdots & a_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_0 1} & \alpha_{i_0 2} & \cdots & \alpha_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Propiedades del determinante

Propiedad.

Sea A una matriz de $n \times n$. Si B es una matriz de $n \times n$, que se obtiene intercambiando dos filas o columnas de A entonces $\det(B) = -\det(A)$.

Propiedades del determinante

Propiedad.

Si A es una matriz de $n \times n$ que tiene dos filas o columnas iguales entonces $\det(A) = 0$.

Propiedades del determinante

Propiedad.

Sea A una matriz de $n \times n$. Si una fila (o columna) de A es un multiplo escalar de otra fila (o columna) de A entonces $\det(A) = 0$.

Propiedad.

Sea A una matriz de $n \times n$. Si B es una matriz de $n \times n$, que se obtiene sumando un múltiplo escalar de una fila (o columna) de A a otra fila (o columna) entonces $\det(B) = \det(A)$

Propiedades del determinante

Ejemplo 13. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & e \\ c & 3 & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2a-d & a & 3-5a \\ 2b-e & b & 6-5b \\ 2c-f & c & 9-5c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Se sabe que $\det(A) = 2$. Calcular $\det(B)$ y $\det(\frac{1}{4}A^t B^{-1} A^5)$.

Matriz adjunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, recordemos que el cofactor ij de A, denotado por A_{ij}, esta dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}),$$

donde M_{ij} es la menor ij de A, es decir la submatriz de A que se obtiene suprimiendo su $i-$ésima fila y $j-$ésima columna de A.
La matriz

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

se denomina la **matriz adjunta** de A.

Matriz adjunta

Ejemplo 14. Calculara la matriz adjunta de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

y $A\,\mathrm{adj}(A)$.

Solución: 1.- Los cofactores

$$A_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 12, \qquad A_{12} = -\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = -3, \qquad A_{13} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = -13, \qquad A_{22} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 5, \qquad A_{23} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = \det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -7, \qquad A_{32} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2, \qquad A_{33} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Matriz adjunta

2.- La adjunta de A.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.- Calculamos $A \operatorname{adj}(A)$.

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matriz adjunta

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces

$$A\,\operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n.$$

Si $\det(A) \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A).$$

Resumen: Matrices inversibles

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(I) A es inversible;

(II) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$;

(III) La única solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ es la solución trivial (es decir $x = 0$);

(IV) La matriz A es equivalente a la matriz identidad;

(V) El rango de A es n;

(VI) $\det(A) \neq 0$.

Cambio de base

Supongamos que tenemos dos bases, $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, de un espacio vectorial $\mathbb{V}$.
Por ser B' base, cada vector de B se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de B'.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n, \\ u_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n, \\ &\vdots \\ u_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

La matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz de cambio de base** de la base B a la base B'.

Cambio de base

Teorema.

Sea P una matriz de cambio de base de una base B a una base B' en un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Entonces P es inversible y para todo $w \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$[w]_{B'}^t = P[w]_B^t \quad \text{y por consiguiente } [w]_B^t = P^{-1}[w]_{B'}^t.$$

Cambio de base

Ejemplo 15. Sean $B = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Otra base posible de $\mathbb{R}^2$ es $B' = \{v_1 = (1, 3), v_2 = (-1, 2)\}$. Hallar la matriz de cambio de base de B a B'.