Guía Práctica 1

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones, encuentre el (los) valor(es) de x, si es que existe(n):

   a) $\sqrt{1+x}+\frac{ax}{\sqrt{1+x}}=0$

   b) $15x-x^2=0$

   c) $(x-3)(x+4)=0$

   d) $\frac{x-3}{x-4}=\frac{x+3}{x+4}$

   e) $\frac{x\ln(x+3)}{x^2+1}=0$

2. Calcule las derivadas primeras y segundas de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

   a) $f(x)=3x^3-2x^4+8$

   b) $f(x)=3x\ln x$

   c) $f(x)=e^{x^2}$

   d) $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

   e) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

   f) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

   g) $f(x)=\left(x^3+2x\right)^3(4x+5)^2$

   h) $f(x)=5\left(x^5-6x^2+3x\right)^{2/3}$

3. Muestre que las siguientes funciones son estrictamente crecientes en sus dominios. Encuentre el dominio y la fórmula de sus funciones inversas:

   a) $f(x)=3+\ln(e^x-2)$, para $x>\ln 2$

   b) $f(x)=\frac{a}{e^{-\lambda x}+a}$, con $a,\lambda>0$ y $x\in\mathbb{R}$.

4. Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=(\ln x)^2-4$

   b) $f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$

   c) $f(x)\,x-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)$

5. Suponga que $\Pi(Q)=QP(Q)-cQ$. Encuentre $\Pi'_Q(Q)$. Provea una interpretación económica cuando Π son los beneficios, Q las cantidades producidas y P el precio de venta.

6. Suponga que $\Pi(L)=Q(L)P-wL$. Encuentre $\Pi'_L(L)$. Provea una interpretación económica cuando Π son los beneficios, Q las cantidades producidas, P el precio de venta, w el salario y L la cantidad de trabajadores.

7. La función de costo de producir un bien x viene dada por $C(x)=0{,}1x^3-0{,}25x^2+300x+100$. Usando la diferencial estime el efecto sobre el costo de un incremento de x de 6 a 6.1.

8. Pruebe utilizando la regla de derivación del cociente que si $f(x) = x^k$ con $k < 0$, entonces $f(x) = kx^{k-1}$.

9. Utilice la definición de derivada para demostrar que la función $f(x) = |x|$ no posee derivada cuando $x = 0$. *Ayuda:* Calcule el límite por izquierda, luego el límite por derecha y note que no coinciden.

10. Evalúe los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3-\sqrt{x+17}}{x+1}$

    b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$

    c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

    d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^2}{3x^2}$

11. Una firma produce un bien y recibe un precio de 100 por cada unidad vendida. El costo de producir y vender x unidades es de $20x + 0{,}25x^2$.

    a) Encuentre el nivel de producción x que maximiza los beneficios de la firma (ingresos menos costos).

    b) Si se cobra un impuesto de 10 por unidad vendida, ¿cuál es el nuevo nivel óptimo de producción?

12. Suponga que una firma es monopolista, es decir, es la única que vende en el mercado. La firma conoce exactamente cuál es la demanda por su bien $P(q) = 11 - 2q$ quiere vender q unidades con tal de maximizar sus beneficios. Producir q unidades le cuesta $C(q) = 3q$.

    Los beneficios son $\pi = P(q) \cdot q - C(q)$.

    - Escriba el problema donde el monopolista maximiza sus beneficios.
    - ¿Cuántas unidades q del bien venderá el monopolista con tal de maximizar sus beneficios?
    - ¿A qué precio $p = P(q)$ venderá esas unidades?
    - Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
    - ¿Cuál es el valor del beneficio máximo que puede obtener el monopolista?

13. Suponga que una firma desea exportar maíz y que puede vender a precio local, que dependerá de la cantidad q que venda de la siguiente manera: $P(q) = 14 - q$ o puede vender a precio internacional a \$5 por unidad. Suponga que la firma cosechó $Q = 10$, es decir, no puede vender más de Q unidades y puede elegir cuántas unidades vender al mercado local, q_L y al mercado internacional q_i, de manera que $q_L + q_i = Q \leq 10$. Si a la firma le cuesta \$2 producir cada unidad de maíz.

    - Explique por qué es óptimo para la firma vender exactamente 10 unidades $q_L + q_i = Q = 10$

- Plantee el problema de maximización de beneficios de la firma de manera que la única incógnita sea q_L.
- Encuentre la cantidad q_L que maximice los beneficios del monopolista.
- ¿A qué precio venderá en el mercado local? ¿Cuáles serán sus beneficios?

14. Yael quiere comprar paquetes de arroz (a) y puede tener dinero de sobra o pedir prestado (m). Como el arroz es un bien de subsistencia, la felicidad de Yael por consumir arroz viene dada por $u(a, m) = m + \ln(a)$, donde $a \geq 0$ pero $m \in \mathbb{R}$.

    Suponga que la restricción de presupuesto de Yael es $m + 2a = 5$, es decir, que tiene 5 pesos para gastar y que cada paquete de arroz cuesta 2 pesos.

    - Escriba el problema donde Yael maximiza su utilidad de manera que solamente dependa de a.
    - ¿Cuántos paquetes de arroz a va a comprar Yael con tal de maximizar su utilidad?
    - ¿Con cuánto dinero m se queda Yael para comprar otros bienes?
    - Chequee que se cumple la condición de segundo orden.
    - ¿Cuál es la utilidad máxima que alcanza Yael?

15. Considere dos mercados monopólicos de galletitas, uno en el país de *Oreostán* y otro en el país *Titalandia*. Las demandas de galletitas en cada país son distintas, pero los costos de producir galletitas son los mismos y son iguales a cero, es decir, $C(q) = 0 \cdot q = 0$.

    $$\text{En } \textit{Oreostán}, \ D_1(p) = 2 - p. \text{ En } \textit{Titalandia}, \ D_2(p) = \frac{1}{p}$$

    (a) ¿Cómo es la elasticidad precio $\varepsilon_{q,p}$ de la demanda para cada país?

    (b) Calcule los beneficios máximos que puede llegar a obtener cada una de las firmas.

    (c) Si los gobernantes de *Oreostán* y *Titalandia* quisieran imponer un precio máximo (es decir, querrían bajar el precio al que venden las firmas), ¿qué firma se verá más perjudicada? ¿por qué?

    (d) Si los gobernantes de *Oreostán* y *Titalandia* quisieran imponer un precio mínimo (es decir, querrían aumentar el precio al que venden las firmas), ¿qué firma se verá más perjudicada? ¿por qué?

16. Considere la función $h(x) = \frac{e^x}{2+e^{2x}}$.

    a) ¿Cuándo es h creciente/decreciente? Encuentre todos los puntos críticos de h.

    b) Si restringimos la función al dominio $(-\infty, 0]$, la función tiene inversa. Encuéntrela.

17. Determine la concavidad o convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(e^{2x} + 4e^{-x}\right)^2$

b) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$

c) $f(x) = -e^{-7x+4}$

18. Decimos que una tecnología medida por los costos de producción $C(q)$ tiene:

- **rendimientos constantes a escala (CRS)** si el costo (pro)medio es igual al costo de producir la última unidad $C'(q)$. Es decir, $\dfrac{C(q)}{q} = C'(q)$, o, análogamente $C(q) = q \cdot C'(q)$.
- **rendimientos decrecientes a escala (DRS)** si el costo (pro)medio es menor al costo de producir la última unidad $C'(q)$. Es decir, $\dfrac{C(q)}{q} < C'(q)$, o, análogamente $C(q) < q \cdot C'(q)$.
- **rendimientos crecientes a escala (IRS)** si el costo (pro)medio es mayor al costo de producir la última unidad $C'(q)$. Es decir, $\dfrac{C(q)}{q} > C'(q)$, o, análogamente $C(q) > q \cdot C'(q)$.

  Suponga que $C(0) = 0$, es decir, que si no se produce nada $q = 0$ eso cuesta 0 pesos. Muestre que:

  - a tecnología exhibe CRS, si $C(q)$ es lineal.
  - la tecnología exhibe DRS, si $C(q)$ es convexa.
  - la tecnología exhibe IRS, si $C(q)$ es cóncava.

  Ayuda: Considere $f(q) = C(q) - q \cdot C'(q)$, note que $f(0) = 0$ y derive esa expresión para ver si $f(x)$ es una función creciente, decreciente o cosntante.

19. Resuelva las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int 5^5 dx$

b) $\int (3 - y)\, dy$

c) $\int x^2 e^x dx$

d) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

e) $\int (x - 2)\, e^{2x} dx$

f) $\int \frac{2}{x+5} dx$

20. Resuelva las siguientes integrales definidas:

a) $\int\limits_0^{12} 50 dx$

b) $\int\limits_0^{2} \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$

c) $\int\limits_1^{5} \frac{2}{x} dx$

$d)$ $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{5}{x^5} dx$

$e)$ $\int\limits_{0}^{5} \frac{1}{9+x} dx$