Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 0: Repaso de Matemática.

Ejercicio 1.

Si A es una matriz simétrica y definida positiva, mostrar que puede hallarse una matriz P no singular tal que se verifica que A= PP′.

Como A es una matriz cuadrada simétrica (A= A′), se puede diagonalizar ortogonalmente:

A= CDC′
A= C$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}$C′ donde $D^{\frac{1}{2}}$= diag ($\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_K}$)
A= C$D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}})'$C′
A= C$D^{\frac{1}{2}}$(C$D^{\frac{1}{2}}$)′
A= PP′, donde P= C$D^{\frac{1}{2}}$.

A su vez, se tiene que:

det (P)= det (C$D^{\frac{1}{2}}$)
det (P)= det (C) det ($D^{\frac{1}{2}}$)
det (P)$\neq$ 0.

Como A es una matriz diagonalizable ortogonalmente (producto de ser una matriz cuadrada simétrica), det (C)$\neq$ 0 y, como A es definida positiva, det ($D^{\frac{1}{2}}$)$\neq$ 0, por lo que det (P)$\neq$ 0 y, por lo tanto, P es una matriz no singular.

Ejercicio 2.

Sea x un vector aleatorio de n x 1 tal que x ~ $\mathcal{N}$ (μ, Σ), donde Σ es una matriz simétrica y definida positiva. Mostrar que (x - μ)′ Σ^{-1} (x - μ) ~ χ^2 (n).

Como Σ es una matriz simétrica y definida positiva, existe una matriz P no singular tal que:

Σ= PP′.

Luego, se tiene:

Σ^{-1}= $(PP')^{-1}$
Σ^{-1}= $(P')^{-1}P^{-1}$
(x - μ)′ Σ^{-1} (x - μ)= (x - μ)′ $(P')^{-1}P^{-1}$ (x - μ)
(x - μ)′ Σ^{-1} (x - μ)= (x - μ)′ $(P^{-1})'P^{-1}$ (x - μ)
(x - μ)′ Σ^{-1} (x - μ)= [P^{-1} (x - μ)]′ P^{-1} (x - μ)
(x - μ)′ Σ^{-1} (x - μ)= z′z, donde z= P^{-1} (x - μ).

Notar que:

E (z)= E [P^{-1} (x - μ)]
E (z)= P^{-1} E (x - μ)
E (z)= P^{-1} [E (x) - E (μ)]
E (z)= P^{-1} (μ - μ)
E (z)= P^{-1} * 0
E (z)= 0.

y

V (z)= E (zz′)
V (z)= E {P^{-1} (x - μ) [P^{-1} (x - μ)]′}
V (z)= E [P^{-1} (x - μ) (x - μ)′ $(P^{-1})'$]
V (z)= P^{-1} E [(x - μ) (x - μ)′] $(P^{-1})'$
V (z)= $P^{-1}\Sigma(P^{-1})'$
V (z)= P^{-1}PP′$(P')^{-1}$
V (z)= II
V (z)= I.

Por lo tanto, z ~ $\mathcal{N}$ (0, I) y, considerando que la suma de variables aleatorias normales estándar independientes elevadas al cuadrado tiene una distribución χ^2_n, se tiene:

$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 \sim \chi^2_n$
z′z ~ χ^2_n
(x - μ)′ Σ^{-1} (x - μ) ~ χ^2_n.

Ejercicio 3.

Sea x un vector aleatorio de nx1, siendo $x \sim \mathcal{N}(0_n, I_n)$*, y A y B son matrices de nxn simétricas e idempotentes. Mostrar que las formas cuadráticas x´Ax y x´Bx son independientes si y sólo si AB= 0.*

Dado que A y B son matrices simétricas e idempotentes, se tiene:

$x'Ax = x'AAx$
$x'Ax = x'A'Ax$
$x'Ax = (Ax)'Ax$
$x'Ax = g(Ax)$

y

$x'Bx = x'BBx$
$x'Bx = x'B'Bx$
$x'Bx = (Bx)'Bx$
$x'Bx = g(Bx)$.

Luego, como Ax y Bx son transformaciones lineales de un vector normal estándar, se tiene:

$Ax \sim \mathcal{N}(0_n, AA')$
$Ax \sim \mathcal{N}(0_n, A)$

y

$Bx \sim \mathcal{N}(0_n, BB')$
$Bx \sim \mathcal{N}(0_n, B)$.

Entonces, se tiene:

$Cov(Ax, Bx) = E[(Ax)(Bx)']$
$Cov(Ax, Bx) = E(Axx'B)$
$Cov(Ax, Bx) = A\,E(xx')\,B$
$Cov(Ax, Bx) = A\,E(xx')\,B$
$Cov(Ax, Bx) = AI_nB$
$Cov(Ax, Bx) = AB$.

Por lo tanto, si AB= 0, entonces, Ax y Bx son independientes (por tratarse de vectores normales) y, si estos lo son, las formas cuadráticas x´Ax y x´Bx también lo son.

Juan Menduiña

Ejercicio 4.

Sean x e y variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$f_{XY}\ (x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\ e^{\frac{-C}{2(1-\rho^2)}}$, *x, y* $\in \mathbb{R}$,

donde

$C = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\ \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\ \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$,
$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$,
σ_x^2= Var (X), σ_y^2= Var (Y).

Mostrar que las variables aleatorias u y v, $u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$ *y* $v = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$*, son independientes y tienen distribución normal con media cero y varianza 2 (1 + ρ) y 2 (1 - ρ), respectivamente.*