① Ω : {reordenamientos de la palabra EXAMEN}.

a) $\#\Omega = 6! = 720$.

Por lo tanto, el espacio muestral equiprobable Ω tiene 720 elementos, dado que importa el orden y es con repetición.

b) F: {un elemento de Ω elegido al azar empieza con la letra A}.

G: {un elemento de Ω elegido al azar termina con la letra X}.

$$P(F \cap G) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

$$P(F \cap G) = \frac{4!}{6!}$$

$$P(F \cap G) = \frac{\cancel{4!}}{6.5.\cancel{4!}}$$

$$P(F \cap G) = \frac{1}{30}.$$

c) H: {un elemento de Ω elegido al azar tiene las letras A y X juntas}.

$$P(H) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

$$P(H) = \frac{5!}{6!}$$

$$P(H) = \frac{\cancel{5!}}{6.\cancel{5!}}$$

$$P(H) = \frac{1}{6}.$$

② a) X_i = { una persona seleccionada al azar nace en cualquiera de los 365 días del año, en el planeta Nobis }.

$$P(X) = \frac{1}{365}.$$

$p_1 = P(X_1 \cap X_2 \cap X_3)$ — X_i vale para cualquier día del año (en este caso, 1º de enero)

$p_1 = P(X_1) . P(X_2) . P(X_3)$ — por independencia entre los X_i

$p_1 = [P(X_1)]^3$ — por idénticamente distribuidas

$$p_1 = \frac{1}{(365)^3}.$$

$$p_2 = \frac{1}{365} \cdot \frac{1}{364} \cdot \frac{1}{363}$$

$$p_2 = \frac{1}{365.364.363}$$

$$p_2 = \frac{1}{\frac{365!}{(365-3)!}}$$

$$p_2 = \frac{1}{\frac{365!}{362!}}$$

$$p_2 = \frac{362!}{365!}.$$

b) X = { suma de los resultados de un dado equilibrado que se tire 4 veces consecutivas, siendo los tirados independientes }.

$\# \Omega = 6^4 = 1296.$

$$p_1 = P(X=21) = \frac{\frac{4!}{1!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{1!}}{6^4}$$

$$p_1 = \frac{4 + 12 + 4}{1296}$$

$$p_1 = \frac{20}{1296}.$$

→ Consideras que suma 21 es posible obtenerla con:
- $6+6+6+3$, lo cual puede suceder 4 veces
- $6+6+5+4$, lo cual puede suceder 12 veces
- $6+6+5+5$, lo cual puede suceder 4 veces

$$p_2 = P(X=22) = \frac{\frac{4!}{1!} + 6}{6^4}$$

$$p_2 = \frac{4+6}{1296}$$

$$p_2 = \frac{10}{1296}.$$

→ análogamente, suma 22 es posible obtenerla con:
- $6+6+6+4$, lo cual puede suceder 4 veces
- $6+6+5+5$, lo cual puede suceder 6 veces

Juan I. Menduiña
37.102.205

Maestría en Econometría
Probabilidad

(3) A = { abuso conyugal }.

S = { un cónyuge es asesinado por alguien }.

C = { el otro cónyuge es culpable }.

$P(C|S) = 0{,}25$

$P(A|C^c \cap S) = \frac{8}{75}$

$P(A|C \cap S) = 0{,}4$

a) $P(C^c|S) = 1 - P(C|S)$

$P(C^c|S) = 1 - 0{,}25$

$P(C^c|S) = 0{,}25.$

b) $\boxed{P(A \cap C \cap S) = P(A|C \cap S) . P(C|S) P(S)}$ ← llegar a

$P(A|C \cap S) = \frac{P(A \cap C \cap S)}{P(C \cap S)}$ por ley de la multiplicación

$P(A \cap C \cap S) = P(A|C \cap S) . P(C \cap S)$

$P(A \cap C \cap S) = P(A|C \cap S) . P(C|S) . P(S).$ por ley de la multiplicación.

c) $P(A \cap S) = P(A \cap C \cap S) + P(A \cap C^c \cap S)$

$P(A \cap S) = P(A|C \cap S) P(C|S) P(S) +$
$P(A|C^c \cap S) P(C^c|S) P(S)$

$P(A \cap S) = P(S) [P(A|C \cap S) P(C|S) + P(A|C^c \cap S) P(C^c|S$

$P(A \cap S) = P(S) [0{,}4 . 0{,}25 + \frac{8}{75} . 0{,}75]$

$P(A \cap S) = 0{,}18 \ P(S).$

d) $P(C \mid A \cap S) = \dfrac{P(C \cap A \cap S)}{P(A \cap S)}$

$$P(C \mid A \cap S) = \frac{P(A \mid C \cap S)\,P(C \mid S)\,P(S)}{P(S)\left[P(A \mid C \cap S)\,P(C \mid S) + P(A \mid C^c \cap S)\,P(C^c \mid S)\right]}$$

→ inciso b)
→ inciso c)

$$P(C \mid A \cap S) = \frac{P(A \mid C \cap S)\,P(C \mid S)}{P(A \mid C \cap S)\,P(C \mid S) + P(A \mid C^c \cap S)\,P(C^c \mid S)}$$

$$P(C \mid A \cap S) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}25}{0{,}4 \cdot 0{,}25 + \frac{8}{75} \cdot 0{,}75}$$

$$P(C \mid A \cap S) = 0{,}\hat{5}.$$

El error del razonamiento del abogado defensor es que no condiciona a que se sabe que un cónyuge es asesinado por alguien (S).

(4) X: { tener un accidente en un día cualquiera al pasar debajo de la escalera }.

$P(X) = 0{,}002.$ $\quad X \sim Be\,(p = 0{,}002).$

Y = { cantidad de accidentes al pasar debajo de la escalera en una semana }.

$$Y \sim B\,(n = 7,\ p = 0{,}002).$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1)$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - \binom{7}{0}(0{,}002)^0(0{,}998)^{7-0}$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}98608372$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - 0{,}98608372$$
$$P(Y \geq 1) = 0{,}013916279.$$

⑤ $X = \{$ número de tickets dorados cuando se abren tres sobres elegidos al azar sin reposición $\}$.

$X \sim H(n=100,\ r=40,\ m=3)$.

a) $P(X=2) = \dfrac{\binom{40}{2}\binom{100-40}{3-2}}{\binom{100}{3}}$

$P(X=2) = \dfrac{780\binom{60}{1}}{161700}$

$P(X=2) = \dfrac{780.60}{161700}$

$P(X=2) = \dfrac{46800}{161700}$

$P(X=2) = 0{,}289.$

b) $Sop(X) = \{1, \dots, r=40\}$.

PMF: $P(X=k) = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$,

donde:

- $\binom{n}{m}$ corresponde al número posible de "m" extracciones que se pueden sacar de "n" elementos
- $\binom{r}{k}$ corresponde al número posible de "k" extracciones que se pueden sacar de "r" elementos
- $\binom{n-r}{m-k}$ corresponde al número posible de "m-k" extracciones que se pueden sacar de "n-r" elementos

donde: - "n" corresponde al número total de elementos
- "m" corresponde al número de extracciones
- "r" corresponde al número total de posibles aciertos
- "k" corresponde al número de extracciones que fueron aciertos
- "n-r" corresponde al número total de posibles "no aciertos"
- "m-k" corresponde al número de extracciones que no fueron aciertos

c) $E(X) = \frac{mr}{m}$

$E(X) = \frac{3 \cdot 40}{100}$

$E(X) = \frac{120}{100}$ → dado el soporte de X

$E(X) = 1,2 \cong 1.$

Por lo tanto, en promedio, para poder visitar a la fabrica de chocolates de Charlie, se espera sacar 1 ticket dorado.

⑥ $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ y, además, $0 < x < y$

a) $\int_0^1 \int_0^y c \, dx \, dy = 1$

$\int_0^1 (cx)\Big|_0^y dy = 1$

$\int_0^1 cy \, dy = 1$

$\left(c\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1$

$c\frac{1^2}{2} = 1$

$c \cdot \frac{1}{2} = 1$

$c = 2.$

b) $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \int_0^1 \int_0^y \frac{x}{y} \, 2 \, dx \, dy$

$E\left(\frac{X}{Y}\right) = 2\int_0^1 \left[\frac{1}{y} \int_0^y x \, dx\right] dy$

$E\left(\frac{X}{Y}\right) = 2 \int_0^1 \frac{1}{y}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^y dy$

$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{2}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{y} dy$

$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \int_0^1 y \, dy$

$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1$

$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{1^2}{2}$

$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{1}{2}.$

c) $$f_{Y|X=x} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-x} \quad \text{para } x<y<1$$

$$f_X(x) = \int_x^1 2\,dy$$

$$f_X(x) = (2y)\Big|_x^1$$

$$f_X(x) = 2.1 - 2x$$

$$f_X(x) = 2 - 2x$$

$$f_X(x) = 2(1-x)$$

$\Rightarrow$

$$f_{Y|X=x} = \frac{2}{2(1-x)}$$

$$f_{Y|X=x} = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para } 0<x<y<1.$$

d) $$E(Y|X=x) = \int_x^1 y\,\frac{1}{1-x}\,dy$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1}{1-x}\int_x^1 y\,dy$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^1$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1}{1-x}\,\frac{1-x^2}{2}$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1-x^2}{2(1-x)}$$

$$E(Y|X=x) = \frac{(1+x)(1-x)}{2(1-x)}$$

$$E(Y|X=x) = \frac{1+x}{2}.$$

e) $\text{Var}(Y \mid X=x) = E(Y^2 \mid X=x) - [E(Y \mid X=x)]^2$

$\text{Var}(Y \mid X=x) = \int_x^1 y^2 \frac{1}{1-x}\, dy - \left(\frac{1+x}{2}\right)^2$

$\text{Var}(Y \mid X=x) = \frac{1}{1-x} \int_x^1 y^2\, dy - \frac{(1+x)^2}{4}$

$\text{Var}(Y \mid X=x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_x^1 - \frac{(1+x)^2}{4}$

$\text{Var}(Y \mid X=x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{(1+x)^2}{4}$

$\text{Var}(Y \mid X=x) = \frac{1}{1-x} \, \frac{1-x^3}{3} - \frac{(1+x)^2}{4}$

$\text{Var}(Y \mid X=x) = \frac{1-x^3}{3(1-x)} - \frac{(1+x)^2}{4}$

$\text{Var}(Y \mid X=x) = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{3(1-x)} - \frac{(1+x)^2}{4}$

$\text{Var}(Y \mid X=x) = \frac{1+x+x^2}{3} - \frac{(1+x)^2}{4}$.

(7) $E(X) = 5$; $E(X^2) = 57$; $E(Y \mid X=x) = 11 - x$;
$\text{Var}(Y \mid X=x) = x^2$

a) $E(Y) = E[E(Y \mid X=x)]$ por ley de expectativas iteradas

$E(Y) = E(11 - X)$

$E(Y) = E(11) - E(X)$ por linealidad de la esperanza

$E(Y) = 11 - 5$ por $E(c) = c$, con c constante

$E(Y) = 6$.

b) $\text{Var}(Y) = \text{Var}[E(Y \mid X=x)] + E[\text{Var}(Y \mid X=x)]$

$\text{Var}(Y) = \text{Var}(11 - X) + E(X^2)$

$\text{Var}(Y) = \text{Var}(11) + \text{Var}(X) + E(X^2)$

$\text{Var}(Y) = 0 + \{E(X^2) - [E(X)]^2\} + E(X^2)$

$\text{Var}(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(X^2)$

$\text{Var}(Y) = 2E(X^2) - [E(X)]^2$

$\text{Var}(Y) = 2 \cdot 57 - 5^2$

$\text{Var}(Y) = 114 - 25$

$\text{Var}(Y) = 89$

(8) $X = \{$ tiempo de espera medido en horas de un cliente cualquiera elegido al azar el día 5 de diciembre $\}$.

$X \sim Exp(\lambda = \theta)$, $\theta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\overline{W}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i \text{, donde } W_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) $W_i \overset{iid}{\sim} Be(p)$, donde $p = 1-\theta e^{-\theta}$.

W_i es igual a 1 siempre que $X_i > 1$, lo cual ocurre con probabilidad $p = 1-\theta e^{-\theta}$, por lo tanto $W_i \overset{iid}{\sim} Be(p = 1-\theta e^{-\theta})$

a) $P(X_i > 1) = 1 - P(X_i \leq 1)$

$P(X_i > 1) = 1 - P(X_i = 1)$

$P(X_i > 1) = 1 - \theta e^{-\theta}$.

EN TODOS LOS INCISOS UTILICÉ ESTE RESULTADO Y NO $e^{-\theta}$.

c) $\overline{W}_n \xrightarrow{m.c.} a$.

$$E(\overline{W}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i\right)$$

$$E(\overline{W}_n) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right)$$

$$E(\overline{W}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(W_i)$$

$$E(\overline{W}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p$$ por idénticamente distribuidas

$$E(\overline{W}_n) = \frac{1}{n} n p$$

$$E(\overline{W}_n) = p$$

$$E(\overline{W}_n) = 1-\theta e^{-\theta} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E(\overline{W}_n) = \lim_{n\to\infty} (1-\theta e^{-\theta}) = 1-\theta e^{-\theta}$$

$$Var(\overline{W_n}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i\right)$$

$$Var(\overline{W_n}) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right)$$

$$Var(\overline{W_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(W_i) \quad \text{por independencia}$$

$$Var(\overline{W_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p(1-p) \quad \text{por idénticamente distribuidas}$$

$$Var(\overline{W_n}) = \frac{1}{n^2} n\, p(1-p)$$

$$Var(\overline{W_n}) = \frac{1}{n} p(1-p)$$

$$Var(\overline{W_n}) = \frac{1}{n} (1-\theta e^{-\theta}) [1-(1-\theta e^{-\theta})]$$

$$Var(\overline{W_n}) = \frac{1}{n} (1-\theta e^{-\theta}) (1-1+\theta e^{-\theta})$$

$$Var(\overline{W_n}) = \frac{1}{n} (1-\theta e^{-\theta})\, \theta e^{-\theta} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\overline{W_n}) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(1-\theta e^{-\theta})\,\theta e^{-\theta}\right] = 0.$$

Por lo tanto, ya que $\lim_{n\to\infty} E(\overline{W_n}) = 1-\theta e^{-\theta}$ y

$\lim_{n\to\infty} Var(\overline{W_n}) = 0$, se puede concluir

que $\overline{W_n} \xrightarrow{m.c.} 1-\theta e^{-\theta} \equiv a$.

d) Dado que $\mu \equiv E(\overline{W_n}) \overset{1-\theta e^{-\theta}}{=} < \infty$ y $\sigma^2 = Var(\overline{W_n}) \overset{\frac{1}{n}(1-\theta e^{-\theta})\theta e^{-\theta}}{=} < \infty$,

se tiene que: $\sqrt{n}\,(\overline{W_n} - E(\overline{W_n})) \xrightarrow{d} N(0, Var(\overline{W_n}))$,

donde $E(\overline{W_n})$ y $Var(\overline{W_n})$ se hallaron en el inciso c).

Bonus) Dado que $\sqrt{n}\,(\overline{W_n} - E(\overline{W_n})) \xrightarrow{d} N(0, Var(\overline{W_n}))$

y $g(X) = \ln(X)$ es derivable, se tiene que:

$$\sqrt{n}\,(\ln(\overline{W_n}) - \ln(1-\theta e^{-\theta})) \xrightarrow{d} N(0, [\ln(1-\theta e^{-\theta})]'.Var(\overline{W_n}))$$

$$\xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\theta e^{-\theta}}{1-\theta e^{-\theta}}\frac{1}{n}(1-\theta e^{-\theta})\theta e^{-\theta}\right)$$

$$\xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{n}\theta^2 e^{-2\theta}\right).$$