Slide 17 - Power rule

Problema 1: notar que si bien los dígitos toman los valores en $\{1,4,5\}$

cada dígito ocupa un rol distinto y por lo tanto son elementos DISTINGUI-

BLES. Para $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7$ $\quad d_7$ representa las unidades,

d_6 las decenas ...

para cada dígito d_i $\quad i=1,\dots,7$ tenemos 3 posibilidades $\begin{cases} 1 \\ 4 \\ 5 \end{cases}$

entonces hay $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$ posibles números de 7 cifras

para d_1 $\quad$ para d_2 $\quad$ .... $\quad$ para d_7

O sea que Ω tiene 3^7 elementos.

Problema 2

$$\underbrace{\underset{\text{lugar }1}{\_\_\_} \ \underset{\text{lugar }2}{\_\_\_} \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \cdots \ \underset{\text{lugar }k-1}{\_\_\_} \ \underset{\text{lugar }k}{\_\_\_}}_{k \text{ lugares}}$$

para el lugar 1 hay n alternativas: $a_1, \dots, a_n$

" " " 2 " " " : " "

⋮ $\qquad\qquad$: " "

k " " "

en total Ω tiene $\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k \text{ veces}} = n^k$ elementos.

Slide 18 – Factorial

- Problema 1

__ __ __ __ __ __ __ __ __ __

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° 8° 9° 10° → hay 1 posible...

hay 10 posibles opciones para el primer lugar

hay 9 posibles ...

hay 8 posibles ...

hay 3 posibles...

hay 2 posibles...

Ω tiene $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ elementos.

- MURCIÉLAGO

este ejercicio es matemáticamente al anterior, ¿cómo?

Imaginemos que las 10 personas del ejercicio anterior se llaman:

Mónica	1
Ursula	2
Ricardo	3
Cristian	4
Irina	5
Élise	6
Laurencio	7
Ana	8
Gabriel	9
Oscar	10

Ordenar las personas en fila es equivalente a ordenar sus iniciales (en este caso porque son $\neq$ entre sí) a ordenar las personas.

Ω tiene $10!$ elementos.

- Problema 3 generalizando los ejemplos anteriores:

  Ω tiene $n!$ elementos.

Slide 22 hecho en clase.

Slide 26 – Coeficiente multinomial (queda definir esto y el triángulo de Pascal la clase que viene)

- PROBLEMA 1

FOSFORESCENTE (tiene 13 letras)

grupos:		cantidad de permutaciones en el grupo
F, F	(el de las f's)	$2! = 2$
O, O	(el de las o's)	$2! = 2$
S, S	(el de las s's)	$2! = 2$
R	(el de la r)	$1! = 1$
E, E, E	(el de las e's)	$3! = 6$
C	(el de la c)	$1! = 1$
N	(el de la n)	$1! = 1$
T	(el de la t)	$1! = 1$

Ω tiene $\dfrac{13!}{2!\,2!\,2!\,3!} = \binom{13}{\underbrace{2,2,2,1,3,1,1,1}_{\text{Tienen que sumar 13}}}$ elementos.

$$\left[\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}^{3}\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3\cdot 2}}{\cancel{2}\cdot \cancel{2\cdot 2}\cdot \cancel{3\cdot 2}} = 129729600\right]$$

• <u>Problema 2</u>

pensemos el problema de manera similar al anterior

Denotemos con A a una persona que estudia la MAECO.

" " E " " " " " la MEC.

" " P " " " " " la MECAP.

Armar un ranking por grupos es equivalente a escribir una "palabra" con las letras AAAAEPPPPP

hay $\dfrac{10!}{4!\,5!} = \binom{10}{4,1,5}$ elementos en Ω.

<u>problema 3 – inciso 1</u>

Este problema puede parecer diferente pero guarda similitudes con los problemas anteriores aunque no lo parezca.

necesitamos contar de cuántas maneras podemos obtener términos que se "reduzcan" a $x^2 y z^5 = x\,x\,y\,z\,z\,z\,z\,z$.

Términos del estilo: $z\,x\,y\,x\,z\,z\,z\,z$ se reducen a $x^2 y z^5$

$z\,x\,z\,z\,y\,z\,x\,z$

$\vdots$

porque la multiplicación en este caso es una operación conmutativa (abeliana - el orden de los factores no altera el producto).

La pregunta se reduce a encontrar todas las formas de armar palabras (o rankings) de 8 letras con: 2 x

1 y

5 z

por lo tanto, el coeficiente de $x^2 y z^5$ es igual a

$$\frac{8!}{2!\,1!\,5!} = \binom{8}{2,1,5} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{2}\;\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}} = 168$$

<u>Problema 3 – inciso 2</u> en este caso lo único que cambia es que los grupos son:

2 de x

1 de y

5 de $3z$

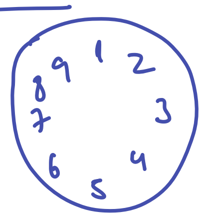
entonces ahora el término de $x^2 y z^5$ es

$$168\cdot x^2 y\,(3z)^5 = 168\cdot 3^5\, x^2 y z^5$$
$$= 40824\, x^2 y z^5$$

lo que implica que el coeficiente es 40824.

<u>Slide 27</u>

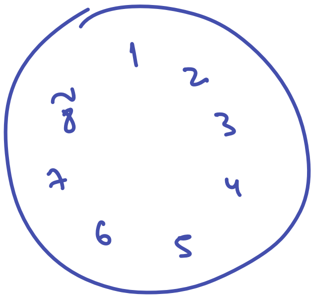
• <u>Problema 1</u>



como vimos en clase, hay $\frac{9!}{9} = 8!$ maneras de ordenar 9 personas en una mesa redonda

Ω tiene $8!$ elementos

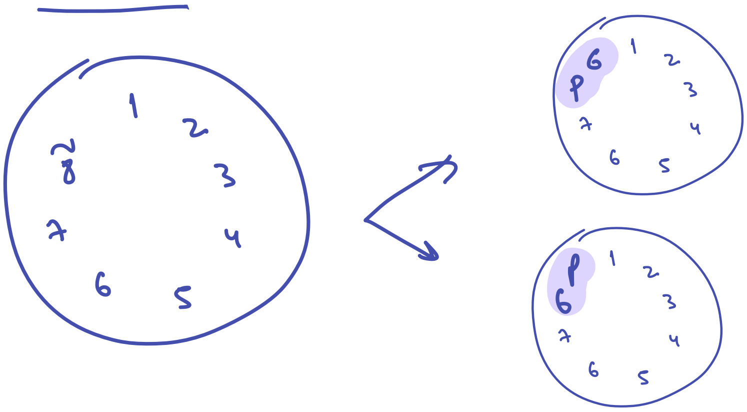
• <u>Problema 2</u> Si Gachi y Pachi se sientan juntas, con Gachi a la izquierda de Pachi tenemos lo siguiente:



donde en $\tilde{8}$ Gacli está a la izquierda de Pacli.

en ese caso Ω tiene $\frac{8!}{8} = 7!$ elementos

• <u>Problema 3</u>: La diferencia con el caso anterior es que hay 2 posibilidades:



Como hay 2! posibles permutaciones entre Gacli y Pacli, Ω tiene $2! \cdot 7!$ elementos

<u>Slide 28</u>

En bosones hay 3 formas equivalentes (probablemente haya más) de pensar cómo contar:

si tenemos $\underbrace{A \dots A}_{n \text{ letras } A}$ $\underbrace{B \dots B}_{k-1 \text{ letras } B}$ y queremos contar cuántas palabras se pueden formar con n A's y $k-1$ B's

es equivalente a pensar en

$\underbrace{\bullet \dots \bullet}_{n \text{ bolitas}}$ $\underbrace{| \dots |}_{k-1 \text{ separadores}}$ y queremos contar de cuántas maneras se pueden ordenar n bolitas iguales en k cajitas distintas ($k-1$ separadores iguales) es equivalente a pensar en

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

donde $x_i \in \mathbb{N}_0$

número total de bolitas

x_1 cuenta la cantidad de bolitas en la cajita 1

⋮ " " " k

x_k " " " " " " " "

Slide 31

Problema 1 y Problema 2 es el "mismo" problema escrito de dos maneras diferentes.

Tiene que haber al menos 1 cajita, $k \geq 1$.

Si $x_i \geq 1$ entonces tiene que haber al menos una bolita en c/ cajita.

Esto será posible si $N \geq k$.

Si $N < k$ entonces hay 0 maneras de hacerlo

Si $N \geq k$ Agarramos k bolitas y las separamos (sabemos que vamos a tener que poner 1 bolita en c/ cajita para asegurar que cada cajita no quede vacía). hay 1 sola manera de poner 1 bolita en c/ cajita porque las bolitas son todas iguales.

Nos quedan $N-k$ bolitas para repartir sin restricciones en k cajitas

$$\underbrace{\bullet \cdots \bullet}_{N-k \text{ bolitas}} \quad \underbrace{| \cdots |}_{k-1 \text{ separadores}}$$

hay $\binom{N-k+k-1}{N-k} = \binom{N-1}{N-k}$ formas de hacerlo

Pensando en la ecuación sabemos que $x_i \geq 1 \ \forall i = 1, \dots, k$

entonces

$$\underset{1}{x_1} + \underset{1}{x_2} + \cdots + \underset{1}{x_k} = N$$

← pongo al menos 1 bolita en c/ cajita y quedan $N-k$ bolitas por repartir

<u>Problema 3</u>

$$\underbrace{\bullet \cdots \bullet}_{n_1 \text{ bolitas AZULES}} \quad \underbrace{x \cdots x}_{n_2 \text{ bolitas ROJAS}} \quad \underbrace{| \cdots |}_{k-1 \text{ separadores}}$$

$$\binom{n_1+n_2+k-1}{n_1, n_2, k-1} = \frac{(n_1+n_2+k-1)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot (k-1)!}$$

coeficiente multinomial