

Trabajo Práctico N° 0: **Repaso de Matemática.**

Ejercicio 1.

Si A es una matriz simétrica y definida positiva, mostrar que puede hallarse una matriz P no singular tal que se verifica que $A = PP'$.

Como A es una matriz cuadrada simétrica ($A = A'$), se puede diagonalizar ortogonalmente:

$$A = CDC'$$

$$A = CD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}C'$$

$$\text{donde } D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_K})$$

$$A = CD^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}})'C'$$

$$A = CD^{\frac{1}{2}}(CD^{\frac{1}{2}})'$$

$$A = PP',$$

$$\text{donde } P = CD^{\frac{1}{2}}.$$

A su vez, se tiene que:

$$\det(P) = \det(CD^{\frac{1}{2}})$$

$$\det(P) = \det(C) \det(D^{\frac{1}{2}})$$

$$\det(P) \neq 0.$$

Como A es una matriz diagonalizable ortogonalmente (producto de ser una matriz cuadrada simétrica), $\det(C) \neq 0$ y, como A es definida positiva, $\det(D^{\frac{1}{2}}) \neq 0$, por lo que $\det(P) \neq 0$ y, por lo tanto, P es una matriz no singular.

Ejercicio 2.

Sea x un vector aleatorio de $n \times 1$ tal que $x \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, donde Σ es una matriz simétrica y definida positiva. Mostrar que $(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \sim \chi^2(n)$.

Como Σ es una matriz simétrica y definida positiva, existe una matriz P no singular tal que:

$$\Sigma = PP'.$$

Luego, se tiene:

$$\Sigma^{-1} = (PP')^{-1}$$

$$\Sigma^{-1} = (P')^{-1}P^{-1}$$

$$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) = (x - \mu)' (P')^{-1}P^{-1} (x - \mu)$$

$$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) = (x - \mu)' (P^{-1})'P^{-1} (x - \mu)$$

$$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) = [P^{-1} (x - \mu)]' P^{-1} (x - \mu)$$

$$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) = z'z, \quad \text{donde } z = P^{-1} (x - \mu).$$

Notar que:

$$E(z) = E[P^{-1} (x - \mu)]$$

$$E(z) = P^{-1} E(x - \mu)$$

$$E(z) = P^{-1} [E(x) - E(\mu)]$$

$$E(z) = P^{-1} (\mu - \mu)$$

$$E(z) = P^{-1} * 0$$

$$E(z) = 0.$$

y

$$V(z) = E(zz')$$

$$V(z) = E\{P^{-1} (x - \mu) [P^{-1} (x - \mu)]'\}$$

$$V(z) = E[P^{-1} (x - \mu) (x - \mu)' (P^{-1})']$$

$$V(z) = P^{-1} E[(x - \mu) (x - \mu)'] (P^{-1})'$$

$$V(z) = P^{-1} \Sigma (P^{-1})'$$

$$V(z) = P^{-1} PP' (P')^{-1}$$

$$V(z) = I$$

$$V(z) = I.$$

Por lo tanto, $z \sim \mathcal{N}(0, I)$ y, considerando que la suma de variables aleatorias normales estándar independientes elevadas al cuadrado tiene una distribución χ_n^2 , se tiene:

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \sim \chi_n^2$$

$$z'z \sim \chi_n^2$$

$$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \sim \chi_n^2.$$

Ejercicio 3.

Sea x un vector aleatorio de $n \times 1$, siendo $x \sim \mathcal{N}(0_n, I_n)$, y A y B son matrices de $n \times n$ simétricas e idempotentes. Mostrar que las formas cuadráticas $x'Ax$ y $x'Bx$ son independientes si y sólo si $AB = 0$.

Dado que A y B son matrices simétricas e idempotentes, se tiene:

$$\begin{aligned} x'Ax &= x'AAx \\ x'Ax &= x'A'Ax \\ x'Ax &= (Ax)'Ax \\ x'Ax &= g(Ax) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x'Bx &= x'BBx \\ x'Bx &= x'B'Bx \\ x'Bx &= (Bx)'Bx \\ x'Bx &= g(Bx). \end{aligned}$$

Luego, como Ax y Bx son transformaciones lineales de un vector normal estándar, se tiene:

$$\begin{aligned} Ax &\sim \mathcal{N}(0_n, AA') \\ Ax &\sim \mathcal{N}(0_n, A) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Bx &\sim \mathcal{N}(0_n, BB') \\ Bx &\sim \mathcal{N}(0_n, B). \end{aligned}$$

Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Ax, Bx) &= E[(Ax)(Bx)'] \\ \text{Cov}(Ax, Bx) &= E(Axx'B) \\ \text{Cov}(Ax, Bx) &= A E(xx')B \\ \text{Cov}(Ax, Bx) &= A E(xx')B \\ \text{Cov}(Ax, Bx) &= AI_nB \\ \text{Cov}(Ax, Bx) &= AB. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $AB = 0$, entonces, Ax y Bx son independientes (por tratarse de vectores normales) y, si estos lo son, las formas cuadráticas $x'Ax$ y $x'Bx$ también lo son.

Ejercicio 4.

Sean x e y variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-C}{2(1-\rho^2)}}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

donde

$$C = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \frac{y-\mu_y}{\sigma_y},$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x\sigma_y},$$

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(X), \quad \sigma_y^2 = \text{Var}(Y).$$

Mostrar que las variables aleatorias u y v , $u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$ y $v = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$, son independientes y tienen distribución normal con media cero y varianzas $2(1+\rho)$ y $2(1-\rho)$, respectivamente.

Trabajo Práctico N° 1:
Mínimos Cuadrados Clásicos.

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 2:
Tópicos en el Modelo Lineal.

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 3:
Heterocedasticidad y Autocorrelación.

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 4:
Máxima Verosimilitud.

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 5:
Modelos Multiecuacionales.

Ejercicio 1.