Guía Práctica 3

1. Encuentre las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = 2x + x^2y^3$
   b) $f(x,y) = \frac{x}{e^y}$
   c) $f(x,y) = \ln(x-y)$
   d) $f(x,y) = x^5 \ln y$
   e) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$
   f) $f(x,y) = e^{xy}$
   g) $f(x,y) = x^7 - y^7$
   h) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

2. Grafique las curvas de nivel de las siguientes funciones en $\mathbb{R}^2$:

   a) $f(x,y) = 3 - x - y$
   b) $f(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$
   c) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$
   d) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   e) $u(x,y) = x \cdot y$
   f) $u(x,y) = x^\alpha \cdot y^{1-\alpha}$, donde $\alpha \in (0,1)$.
   g) $u(x,y) = \text{mín}\{x,y\}$
   h) $u(x,y) = \text{máx}\{x,y\}$

3. Demuestre que todos los puntos (x,y) que cumplen con $xy = 3$ se encuentran sobre una curva de nivel de la función $g(x,y) = \frac{3(xy+1)^2}{x^4y^4-1}$

4. Encuentre las derivadas parciales y la matriz Hessiana de:

   a) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$
   b) $f(x,y,z) = \frac{x^4}{yz}$
   c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$
   d) $f(x,y,z) = 3xyz + x^2y - xz^3$

5. Sea $f(x,y) = 3x^2 + xy - y^2$.

   a) Compute $f(1{,}02, 1{,}99)$.
   b) Aproxime a $f(1{,}02, 1{,}99)$ a través del diferencial total.

6. Encuentre $\partial z/\partial t$ cuando:

   a) $z = x\ln y + y \ln x$, $x = t+1$ e $y = \ln t$
   b) $z = \ln x + \ln y$, $x = Ae^{ay}$ e $y = Be^{bt}$

7. Utilice la regla de la cadena para encontrar a $\frac{\partial w}{\partial t}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$ en los siguientes casos:

   a) $w = xy^2z^3$ con $x = t^2$, $y = s$ y $z = t$.

   b) $w = x^2 + y^2 + z^2$ con $x = \sqrt{t+s}$, $y = e^{ts}$ y $z = s^3$.

8. Encuentre $y'(x)$ y $y''(x)$ de manera implícita:

   a) $x^2y = 1$

   b) $x - y + 3xy = 2$

   c) $y^5 - x^6 = 0$

9. Muestre que la ecuación $3x^2 - 3xy^2 + y^3 + 3y^2 = 4$ define implícitamente a y en función de x. Calcule $y'(x)$ utilizando el Teorema de la Función Implícita.

10. Sea $u(x, y, z) = \ln\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$. Muestre que:

    a) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3$

    b) $(x + y + z)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 3$

11. Encuentre el grado de homogeneidad de $f(p, r) = Ap^{-1{,}5}r^{2{,}08}$.

12. Demuestre que la función CES, $f(K, L) = A\left(aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$ es homogénea de grado 1.

13. Muestre que si $f(x, y)$ es homogénea de grado 1, entonces para $x, y > 0$ vale que $\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x \partial y}\right]^2 = 0$

14. Encuentre los puntos extremos de las siguientes funciones. Determine si se trata de un máximo o mínimo local:

    a) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102$

    b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 35$

    c) $f(x, y, z) = xy - z^2$

    d) $f(x, y, z) = \left(x^2 - 2xy\right)e^y$

15.
    - Sea una consumidor que consume bienes x e y de acuerdo con sus preferencias, representadas por una función de utilidad $u(x, y) = x + ln(y)$. El individuo cuenta con una restricción presupuestaria $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$; donde p_x es el precio del bien x, p_y es el precio del bien y y M representa el ingreso del individuo. Notar que permitimos que x tome cualquier valor en $\mathbb{R}$. Si $p_x = p_y = 5$ y $M = 100$ ¿Cuánto comprará el individuo con tal de maximizar su utilidad?
    - Repita el ejercicio anterior para valores p_x y p_y genéricos.

16.
    - Sea una consumidor que consume bienes x e y de acuerdo con sus preferencias, representadas por una función de utilidad $u(x, y) = x^2 \cdot y$. El individuo cuenta con una restricción presupuestaria $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$; donde p_x es el precio

del bien x, p_y es el precio del bien y y M representa el ingreso del individuo. Si $p_x = 10, p_y = 5$ y $M = 300$ ¿Cuánto comprará el individuo con tal de maximizar su utilidad?

- ¿Cuánto comprará el individuo con tal de maximizar su utilidad si $p_x = 5, p_y = 5$ y $M = 300$?
- Repita el ejercicio anterior para valores p_x y p_y genéricos.

17.
- Sea un productor que cuenta con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/3}L^{1/3}$. Si la firma quiere producir $y = 36$ unidades, el precio del factor K, r es 1 y el precio del factor L, w, es 0,5, encuentre la combinación de factores K y L que **minimiza la función de costo** $C = wL + rK$ cuando se quiere producir $f(K, L) = 36$.
- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.

18.
- Sea un productor con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/3}L^{1/3}$. Si el precio final del producto es 12, el precio del factor K, r es 1 y el precio del factor L, w, es 0,5 encuentre la combinación de factores K y L que maximiza el beneficio (y el valor máximo de los beneficios obtenidos)

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK$$

- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.
- Note que en este caso los beneficios son mayores que cero. Muestre que $f(K, L)$ es homogénea de grado $k < 1$. Decimos que una tecnología exhibe **rendimientos decrecientes a escala** (DRS) si $f(K, L)$ es HOD k, con $k < 1$.

19.
- Sea un productor con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/2}L^{1/2}$. Si el precio final del producto es p, el precio del factor K, r es 1 y el precio del factor L, w, es 0,5 encuentre la combinación de factores K y L que maximiza el beneficio (y el valor máximo de los beneficios obtenidos)

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK$$

- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.
- Note que en este caso los beneficios son mayores iguales a cero. Muestre que $f(K, L)$ es homogénea de grado $k = 1$. Decimos que una tecnología exhibe **rendimientos constantes a escala** (CRS) si $f(K, L)$ es HOD k, con $k = 1$.