Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 1:
Espacios Muestrales y Eventos. Conteo.

ESPACIOS MUESTRALES, EVENTOS Y PROBABILIDADES

Ejercicio 1.

Dos dados equilibrados se arrojan de forma secuencial y se registran los valores obtenidos.

(a) *Listar los resultados del espacio muestral Ω. Clasificar su cardinal según corresponda: finito, infinito numerable o infinito no numerable. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada resultado posible?*

La lista de los resultados del espacio muestral Ω si dos dados equilibrados se arrojan de forma secuencial (η_1 y η_2 son el primer y segundo dado, respectivamente) es:

	η_2						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
η_1	**1**	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Por lo tanto, Ω es un conjunto con cardinal finito, siendo #(Ω)= 6 * 6= 36, ya que cada tirada de dado tiene 6 resultados. Dado que el espacio muestral es equiprobable, es decir, todos los resultados son igual de probables, la probabilidad de obtener cada resultado posible es P ({i, j})= $\frac{1}{36}$.

(b) *Listar los elementos de los siguientes eventos:*

A= {La suma de ambos resultados es de, al menos (es por lo menos), 5}.
B= {El valor del primer dado es mayor al valor del segundo}.
C= {El valor del primer dado es 4}.

A= {(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.

B= {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)}.

C= {(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)}.

(c) *Listar los elementos de A ∩ C, B ∪ C y A ∩ (B ∪ C).*

A ∩ C= C= {(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)}.

B ∪ C= {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)}.

A ∩ (B ∪ C)= {(3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)}.

(d) *Listar los resultados del espacio muestral Ω y la probabilidad de cada posible resultado si dos dados se arrojan simultáneamente. Notar qué diferencias se observan respecto el inciso (a).*

La lista de los resultados del espacio muestral Ω si dos dados equilibrados se arrojan de forma simultánea (η_1 es el dado con mayor número en cada tirada) es:

		$\boldsymbol{\eta_2}$					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	1	(1, 1)					
	2	(2, 1)	(2, 2)				
$\boldsymbol{\eta_1}$	**3**	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)			
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)		
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Por lo tanto, a diferencia del inciso (a), el espacio muestral Ω no es equiprobable, ya que P ({i, j})= $\frac{1}{18}$ si i≠ j y P ({i, j})= $\frac{1}{36}$ si i= j.

Ejercicio 2.

Ana, Beatriz y Cecilia tiran la misma moneda en ese orden sucesivamente hasta que salga cara (c) por primera vez. Quien obtiene cara por primera vez, gana. Si no sale cara, sale cruz (x). El espacio muestral, entonces, está dado por:

Ω= {c, xc, xxc, xxxc, ...}.

Definir los siguientes eventos:

A= {Ana gana}, B= {Beatriz gana}, C= {Cecilia gana}.

(a) *Explicar qué denota cada elemento de Ω.*

Cada elemento de Ω es el resultado cruz (x) de las n - 1 tiradas de la moneda más (si sale) el resultado cara (c) de la tirada n.

(b) *Definir, en términos de subconjuntos de Ω, los eventos A, B y* $(A \cup B)^c$.

Se definen los siguientes conjuntos:

A_i= {sale cara (c) en el 3n + i-nésimo tiro, con n ∈ ℕ}, donde i= 1, 2, 3.
A_∞= {no sale cara}.

Entonces:

Ω= $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_\infty$.

Por lo tanto:

A= A_1= {c, xxxc, xxxxxxc, …}.
B= A_2= {xc, xxxxc, xxxxxxxc, …}.
$(A \cup B)^c$= $A_3 \cup A_\infty$= {xc, xxxxc, xxxxxxxc, … , xxxxxxxxxx…}.

Ejercicio 3.

Suponer el siguiente experimento: Usted arroja un dado hasta que aparece el número 1, una vez que esto ocurre el experimento culmina.

(a) *¿Cuál es el espacio muestral Ω de este experimento? Clasificar su cardinal según corresponda: finito, infinito numerable o infinito no numerable.*

Se definen los siguientes conjuntos:

A_m= {(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, … , a_m), donde $a_i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ para i ∈ {1, … , m - 1} y a_m= 1}.
B= {(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, …), donde $b_i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ para i ∈ ℕ}

Por lo tanto, el espacio muestral Ω de este experimento es:

$\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \cup B$,

siendo su cardinal infinito numerable.

(b) *Denotar por A_m al evento en que se necesita m tiros hasta obtener, por primera vez, el número 1. ¿Qué elementos del espacio muestral están contenidos en A_m?*

Los elementos del espacio muestral que están contenidos en A_m son los casos donde el número 1 sale en la tirada m.

(c) *¿Qué evento describe el conjunto $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$?*

El conjunto $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$ describe todos los posibles casos en donde salen resultados en cada una de las tiradas del dado en el conjunto {2, 3, 4, 5, 6} y nunca sale el número 1.

Ejercicio 4.

Usted está interesado en investigar sobre la relación entre nivel educativo y la intención de voto en las próximas elecciones presidenciales entre el personal administrativo de la universidad. Usted considerará dos niveles de estudio (universitario completo y universitario incompleto) y los votos pueden ir al Partido Justicialista, Unión Cívica Radical o Independientes. Suponer que no es posible votar en blanco ni impugnar el voto. Si, en la universidad, hay 10 empleados administrativos:

(a) *¿Cuántos resultados posibles hay en el espacio muestral?*

Ω= {posibles respuestas para cada uno de los 10 empleados administrativos}.
Ω= {$(e_1, p_1, \dots, e_{10}, p_{10})$, donde $(e_i, p_i) \in$ C para i ∈ {1, … , 10}},

donde C= {(e, p), donde e ∈ {c, nc} y p ∈ {j, r, i}},

donde c= universitario completo, nc= universitario incompleto, j= Partido Justicialista, r= Unión Cívica Radical e i= Independientes.

Por lo tanto, en el espacio muestral, hay 6^{10}= 60.466.176 resultados posibles, ya que hay 6 resultados posibles para cada uno de los 10 empleados administrativos.

(b) *¿Cuántos resultados hay en el evento en el que, al menos, un miembro del personal administrativo tenga nivel educativo igual a universitario incompleto?*

B= {al menos, un miembro del personal administrativo tiene nivel educativo igual a universitario incompleto}.
B= Ω - B^c,

donde:

B^c= {ningún miembro del personal administrativo tiene nivel educativo igual a universitario incompleto}.
B^c= {{(c, $p_1, \dots$, c, p_{10}), donde $p_i \in$ {j, r, i} para i ∈ {1, … , 10}}.

Por lo tanto, en este evento B, hay 6^{10} - 3^{10}= 60.407.127 resultados posibles.

(c) *¿Cuántos resultados hay en el evento en el que ningún miembro del personal administrativo votará a un Independiente?*

C= {ningún miembro del personal administrativo votará a un Independiente}.
C= {$(e_1, p_1, \dots, e_{10}, p_{10})$, donde e ∈ {c, nc} y p ∈ {j, r} para i ∈ {1, … , 10}},

Por lo tanto, en este evento C, hay 4^{10}= 1.048.576 resultados posibles.

Ejercicio 5.

Clasificar las siguientes igualdades como verdaderas o falsas:

(a) $(A \cup B \cup C \cup D)^c = A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c$.

Esta igualdad es VERDADERA.

(b) $[(A \cup B) \cap (C \cup D)]^c = (A^c \cap B^c) \cup (C^c \cap D^c)$.

Esta igualdad es VERDADERA.

(c) $[A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c]^c = A \cup B \cup C \cup D$.

Esta igualdad es VERDADERA.

(d) *Si dos eventos son mutuamente excluyentes, entonces, son exhaustivos.*

Esta implicación es FALSA, ya que no necesariamente, si $A \cap B = \emptyset$, entonces, $A \cup B = \Omega$.

Ejercicio 6.

A partir de los axiomas vistos en clase, demostrar las siguientes propiedades:

(a) *P (A)= 1 - P (A^c).*

A^c= Ω - A, A ∩ A^c= ∅, A ∪ A^c= Ω.

P (A ∪ A^c)= P (Ω)
P (A ∪ A^c)= 1
P (A) + P (A^c)= 1
P (A)= 1 - P (A^c).

(b) *P (∅)= 0.*

∅= $Ω^c$.

P (∅)= P ($Ω^c$)
P (∅)= 1 - P (Ω)
P (∅)= 1 - 1
P (∅)= 0.

(c) *Si A ⊂ B, entonces, P (A) ≤ P (B).*

Si A ⊂ B, entonces, B= A ∪ (A^c ∩ B).

P (B)= P [A ∪ (A^c ∩ B)]
P (B)= P (A) + P (A^c ∩ B)
P (A)= P (B) - P (A^c ∩ B)
P (A) ≤ P (B).

(d) *P (A ∪ B)= P (A) + P (B) - P (A ∩ B).*

A ∪ B= (A ∩ B) ∪ (A^c ∩ B) ∪ (A ∩ B^c).

P (A ∪ B)= P [(A ∩ B^c) ∪ (A^c ∩ B) ∪ (A ∩ B)]
P (A ∪ B)= P (A ∩ B^c) + P (A^c ∩ B) + P (A ∩ B)
P (A ∪ B)= P (A) - P (A ∩ B) + P (B) - P (A ∩ B) + P (A ∩ B)
P (A ∪ B)= P (A) + P (B) - P (A ∩ B).

CONTEO Y PROBABILIDADES

Ejercicio 1: Contando Arreglos.

(a) *Trabajadores y Puestos.*

Si veinte trabajadores se asignan a veinte puestos, uno en cada puesto, ¿cuántos arreglos diferentes posibles existen?

20!= 2432902008176640000.

Por lo tanto, existen 2.432.902.008.176.640.000 arreglos diferentes posibles.

(b) *The Beatles e instrumentos.*

Suponer que, en la banda de The Beatles, los 4 integrantes podían tocar los 4 instrumentos más usados por la banda (guitarra, bajo, batería y piano). ¿De cuántas formas diferentes podrán distribuirse los instrumentos a la hora de grabar una canción? Suponer, ahora, que, en realidad, George Harrison y Ringo Star sólo pueden tocar la batería y la guitarra (ambos instrumentos) ¿Cuántos posibles arreglos de instrumentos asignados uno a cada miembro de la banda posibles podría haber entonces?

Si, en la banda The Beatles, los 4 integrantes pueden tocar los 4 instrumentos más usados por la banda (guitarra, bajo, batería y piano), se pueden distribuir de 4!= 24 formas diferentes los instrumentos a la hora de grabar una canción.

Si, ahora, hay 2 integrantes que sólo tocan 2 instrumentos y 2 integrantes que tocan los 4 instrumentos, entonces, podría haber 2! * 2!= 2 * 2= 4 posibles arreglos de instrumentos asignados uno a cada miembro de la banda posible.

(c) *Permutaciones de letras.*

¿Cuántos arreglos diferentes de letras se pueden hacer a partir de las siguientes palabras?

(i) *MURCIÉLAGO.*

#arreglos= $\frac{10!}{1!1!1!1!1!1!1!1!1!1!}$
#arreglos= $\frac{3628800}{1*1*1*1*1*1*1*1*1*1}$
#arreglos= $\frac{3628800}{1}$
#arreglos= 3628800.

Por lo tanto, se pueden hacer 3.628.800 arreglos.

(ii) *PARPADEO.*

#arreglos= $\frac{8!}{2!2!1!1!1!1!}$
#arreglos= $\frac{40320}{2*2*1*1*1*1}$
#arreglos= $\frac{40320}{4}$
#arreglos= 10080.

Por lo tanto, se pueden hacer 10.080 arreglos.

(iii) *PROBABILIDAD.*

#arreglos= $\frac{12!}{1!1!1!2!2!2!1!2!}$
#arreglos= $\frac{479001600}{1*1*1*2*2*2*1*2}$
#arreglos= $\frac{479001600}{16}$
#arreglos= 29937600.

Por lo tanto, se pueden hacer 29.937.600 arreglos.

(iv) *MISSISSIPPI.*

#arreglos= $\frac{11!}{1!4!4!2!}$
#arreglos= $\frac{39916800}{1*24*24*2}$
#arreglos= $\frac{39916800}{1152}$
#arreglos= 34650.

Por lo tanto, se pueden hacer 34.650 arreglos.

(d) ***<u>Pasantías en organismos internacionales.</u>***

En los organismos internacionales, suele existir una cuota de regiones para las pasantías. Suponer que, para Asia el cupo es de 10, para América del Sur es de 7, para Europa de 4 y para América Central de 2. Si hay 50 candidatos de Asia, 15 de América del Sur, 7 de Europa y 3 de América Central; ¿de cuántas formas diferentes pueden otorgarse las pasantías?

#pasantías= #asia + #américadelsur + #europa + #américacentral
#pasantías= $\binom{50}{10}\binom{15}{7}\binom{7}{4}\binom{3}{2}$

#pasantías= 10272278170 * 6435 * 35 * 3
#pasantías= 694072155251475.

Por lo tanto, las pasantías pueden otorgarse de 6.940.721.552.514.75 formas diferentes.

(e) *Sentando a los invitados.*

Usted está planeando una reunión y, para ello, invita a 8 amigos, 4 de Independiente y 4 de Racing. Si los invitados se sientan en una fila (uno al lado del otro) ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse si:

(i) *no hay restricciones en la forma de sentarse?*

(ii) *las personas A y B siempre deben sentarse juntas?*

(iii) *sólo un hincha de Independiente y uno de Racing pueden sentarse juntos?*

(iv) *los invitados son cuatro parejas que deben sentarse juntas?*

Ejercicio 2: Calculando Probabilidades.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2:
Probabilidad Condicional.

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 3:
Variables Aleatorias Discretas.

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 4.1:
Variables Aleatorias Continuas (Parte 1).

Ejercicio 1.

Trabajo Práctico N° 4.2:
Variables Aleatorias Continuas (Parte 2).

Ejercicio 1.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5:
Variables Aleatorias Conjuntas.

Ejercicio 1.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 6: Convergencia y Desigualdades.

Ejercicio 1.