Soluciones Práctica 2[1]

Ejercicio 1

$$V = \{\text{El bebé nace con vida}\}$$
$$C = \{\text{El bebé nace por cesárea}\}$$
$$P(V) = 0{,}98$$
$$P(C) = 0{,}15$$
$$P(V|C) = 0{,}96$$
$$\text{Por Ley de Probabilidad Total: } P(V) = P(C)\cdot P(V|C) + P(C^c)\cdot P(V|C^c) \implies P(V|C^c) = 0{,}9835$$

Ejercicio 2

$$P(A) = 0{,}46$$
$$P(B) = 0{,}30$$
$$P(C) = 0{,}24$$
$$P(V|A) = 0{,}35$$
$$P(V|B) = 0{,}62$$
$$P(V|C) = 0{,}58$$

Por Ley de Probabilidad Total se puede obtener el porcentaje de votantes que participaron de la elección.

$$P(V) = P(A)\cdot P(V|A) + P(B)\cdot P(V|B) + P(C)\cdot P(V|C)$$

Uso Teorema de Bayes para obtener las probabilidades.

$$P(A|V) = \frac{P(A)\cdot P(V|A)}{P(A)\cdot P(V|A) + P(B)\cdot P(V|B) + P(C)\cdot P(V|C)}$$
$$P(B|V) = \frac{P(B)\cdot P(V|B)}{P(A)\cdot P(V|A) + P(B)\cdot P(V|B) + P(C)\cdot P(V|C)}$$
$$P(C|V) = \frac{P(C)\cdot P(V|C)}{P(A)\cdot P(V|A) + P(B)\cdot P(V|B) + P(C)\cdot P(V|C)}$$

Ejercicio 3

$$E_i = \{\text{Hay un as en } i\text{-ésima pila}\}$$
$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = \text{Probabilidad que haya un as en cada pila}$$

Usando la regla de la multiplicación, la probabilidad del evento se puede escribir como

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1)\cdot P(E_2|E_1)\cdot P(E_3|E_1 \cap E_2)\cdot P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$
$$P(E_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

[1] Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Pedro Martínez Bruera.

$$P(E_2|E_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}}$$

$$P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}}$$

$$P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{12}{12}}{\binom{13}{13}}$$

Explicación: Voy armando las pilas secuencialmente. Al principio para que haya un as en la pila 1 tengo 4 ases y 48 cartas que no son un as. Cuando armo la pila 2 tengo 3 ases y 36 cartas que no son un as. Cuando armo la pila 3 tengo 2 ases y 24 cartas que no son un as. Finalmente las cartas restantes para la cuarta pila son un as y 12 cartas, por lo que $P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1$. Como son probabilidades condicionales, y el condicionante siempre es el evento anterior en la secuencia, para obtener la probabilidad conjunta basta con multiplicarlas.

$$\begin{aligned} &P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= P(E_1) \cdot \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \cdot \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_1 \cap E_2)} \cdot \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)}{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)} \\ &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) \end{aligned}$$

Ejercicio 4

$$15 \text{ Pelotas} \begin{cases} 9\, nuevas \\ 6\, viejas \end{cases}$$

$$E = \{\text{Las 3 pelotas del segundo grupo son nuevas}\}$$

$$N_i = \{\text{Hay } i \text{ pelotas nuevas en el primer grupo}\}$$

$$P(E) = P(N_0) \cdot P(E|N_0) + P(N_1) \cdot P(E|N_1) + P(N_2) \cdot P(E|N_2) + P(N_3) \cdot P(E|N_3)$$

$$P(E) = \frac{\binom{9}{0}\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{9}{1}\binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{9}{2}\binom{6}{1}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{7}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{9}{3}\binom{6}{0}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}}$$

Ejercicio 5

$$A_k = \{\text{Ganar el juego despues de dar vuelta } k \text{ cartas}\}$$

$$A_0 = \frac{1}{52}$$

$$A_1 = \frac{51}{52} \cdot \frac{1}{51} = \frac{1}{52}$$

$$\vdots$$

$$A_k = \frac{51}{52} \cdot \ldots \cdot \frac{52-k}{52-(k-1)} \frac{1}{52-k} = \frac{1}{52}$$

No hay ninguna estrategia que maximice la probabilidad de ganar, ya que es la probabilidad de ganar no depende del número de cartas que se saquen del mazo.

Ejercicio 6

Considere los eventos X_i ={el prisionero i es ejecutado} y G_i ={el guardia dice que i es liberado}.

Sabemos que $P(X_i) = \frac{1}{3}$ porque $P(X_i^c) = \frac{2}{3}$ para todo $i = A, B, C$.

Queremos ver si $P(X_A^c|G_B) \neq P(X_A^c)$ que es lo mismo que ver que $P(X_A|G_B) \neq P(X_A)$ (análogamente queremos ver si $P(X_A^c|G_C) \neq P(X_A^c)$ que es lo mismo que ver que $P(X_A|G_C) \neq P(X_A)$)

Notemos que en particular que, como el guardia sabe perfectamente quién va a ser ejecutado y quiénes liberados:

- $P(G_B|X_A) = 1/2$ porque si van a ejecutar a A el guardia puede decir que van a liberar a B o a C.
- $P(G_B|X_B) = 0$ porque el guardia no miente.
- $P(G_B|X_C) = 1$ porque si van a ejecutar a C el guardia solamente puede decir que van a liberar a B porque no quiere dar información sobre A y no quiere mentir sobre C.

Luego

$$P(X_A|G_B) = \frac{P(G_B|X_A)P(X_A)}{P(G_B|X_A)P(X_A) + P(G_B|X_B)P(X_B) + P(G_B|X_C)P(X_C)}$$

Es decir

$$P(X_A|G_B) = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3} = \frac{1}{3}$$

Luego

$$P(X_A) = P(X_A|G_B) = P(X_A|G_C) = \frac{1}{3}$$

Es decir, que el guardia diga a una de las personas que va a ser liberada no va a afectar la probabilidad de que A sea liberado porque la información del guardia depende de que él sabe quién va a ser ejecutado y quiénes van a ser liberados, no da una respuesta al azar.

Ejercicio 7

$$Urna = 15 \text{ Bolillas} \begin{cases} 5\, Blancas \\ 10\, Negras \end{cases}$$

$$N_i = \{\text{El número que sale en el dado es } i\}$$

$$B = \{\text{Todas las bolillas extraidas son blancas}\}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(N_i) \cdot P(B|N_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} P(B|N_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{5} \frac{\binom{5}{i}\binom{10}{0}}{\binom{15}{i}}$$

$$P(B) = 1/6 \cdot \left(\frac{\binom{5}{1}}{\binom{15}{1}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{5}{4}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{5}}{\binom{15}{5}} + 0 \right) = \frac{5}{66}$$

$$P(N_3|B) = \frac{P(B|N_3)P(N_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}}{\frac{5}{66}}$$

Ejercicio 8

$$C = \{\text{La persona tiene cáncer}\}$$
$$G = \{\text{El resultado es correcto}\}$$
$$P\left(G|C\right) = P(G|C^c) = 0{,}95 \implies P\left(G^c|C\right) = P(G^c|C^c) = 0{,}05$$
$$P\left(C\right) = 0{,}004 \implies P\left(C^c\right) = 0{,}996$$
$$P\left(C|G^c\right) = \frac{P\left(C \cap G^c\right)}{P\left(G^c\right)} = \frac{P\left(C \cap G^c\right)}{P\left(C \cap G^c\right) + P\left(C^c \cap G^c\right)} = \frac{P\left(C\right) \cdot P\left(G^c|C\right)}{P\left(C\right) \cdot P\left(G^c|C\right) + P\left(C^c\right) \cdot P\left(G^c|C^c\right)}$$

$$P\left(C|G^c\right) = \frac{0{,}004 \cdot 0{,}05}{0{,}004 \cdot 0{,}05 + 0{,}996 \cdot 0{,}05} = 0{,}004$$

Ejercicio 9

$$H = \{\text{El hombre tiene hemofilia}\}\ P\left(H\right) = 0{,}50$$
$$H_i = \{\text{El hijo i tiene hemofilia}\}\ P\left(H_i|H\right) = P\left(H_i^c|H\right) = 0{,}50$$
$$P\left(H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) = \frac{P\left(H \cap H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right)}{P\left(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right)} =$$
$$\frac{P\left(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c|H\right) \cdot P\left(H\right)}{P\left(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c|H\right) \cdot P\left(H\right) + P\left(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c|H^c\right) \cdot P\left(H^c\right)}$$

Suponiendo que, condicional a H, H_i son independientes:

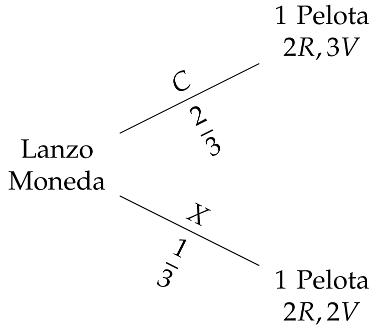
$$P\left(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c|H\right) = P\left(H_1|H\right) \cdot P\left(H_2|H\right) \cdot P\left(H_3|H\right) = 0{,}50^3$$

$$P\left(H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) = \frac{0{,}50^3 \cdot 0{,}50}{0{,}50^3 \cdot 0{,}50 + 1 \cdot 0{,}50} = 1/9$$

$$P\left(H_4|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) = P\left(H_4 \cap H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) + P\left(H_4 \cap H^c|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right)$$
$$= P\left(H_4|H \cap H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) \cdot P\left(H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) + P\left(H_4|H^c \cap H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) \cdot P\left(H^c|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right)$$
$$= P\left(H_4|H\right) \cdot P\left(H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) + P\left(H_4|H^c\right) \cdot P\left(H^c|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right)$$
$$= 0{,}50 \cdot 1/9 + 0 \cdot 8/9 = 1/18$$

$P\left(H_4|H \cap H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c\right) = P\left(H_4|H\right)$ si y solo si asumo que la probabilidad condicional de la hemofilia entre los hijos es independiente.

Ejercicio 10



$$R = \{\text{Se extrae una pelota roja}\}$$
$$C = \{\text{Aparece una cara}\}$$
$$X = \{\text{Aprece una cruz}\}$$

Por Ley de Probabilidad Total: $P(R) = P(C \cap R) + P(X \cap R)$

$$P(R) = P(C) \cdot P(R|C) + P(X) \cdot P(R|X) = 2/3 \cdot 2/5 + 1/3 \cdot 1/2 = 13/30$$

Ejercicio 11

$$D = \{\text{Las unidades producidas son defectuosas}\}$$
$$C = \{\text{El proceso se encuentra bajo control}\}$$
$$P(C) = 0{,}92 \; P(D|C) = 0{,}05 \; P\left(D|C^c\right) = 0{,}30$$
$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D|C) \cdot P(C) + P(D|C^c) \cdot P(C^c)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}92}{0{,}05 \cdot 0{,}92 + 0{,}30 \cdot 0{,}08} = 23/35$$

Ejercicio 12

$$A = \{\text{El circuito proviene del Fabricante A}\}$$
$$B = \{\text{El circuito proviene del Fabricante B}\}$$
$$C = \{\text{El circuito proviene del Fabricante C}\}$$
$$P(A) = 0{,}50 \; P(B) = 0{,}25 \; P(C) = 0{,}25$$
$$D = \{\text{El circuito es defectuoso}\}$$
$$P(D|A) = 0{,}05 \; P(D|B) = 0{,}10 \; P(D|C) = 0{,}12$$

A

Por Ley de Probabilidad Total: $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0{,}05 \cdot 0{,}50 + 0{,}10 \cdot 0{,}25 + 0{,}12 \cdot 0{,}25 = 0{,}08$

B

$$P\left(B|D^c\right) = \frac{P\left(B \cap D^c\right)}{P(D^c)} = \frac{(1 - P(D|B)) \cdot P(B)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - 0{,}10) \cdot 0{,}25}{1 - 0{,}08} = 0{,}2446$$

Ejercicio 13

$$A = \{\text{El valor de las acciones aumenta}\}$$
$$PNB \uparrow = \{\text{El PNB aumenta}\}$$
$$PNB \downarrow = \{\text{El PNB cae}\}$$
$$PNB \rightarrow = \{\text{El PNB se mantiene constante}\}$$
$$P(A|PNB \uparrow) = 0{,}8 \; P(A|PNB \rightarrow) = 0{,}2 \; P(A|PNB \downarrow) = 0{,}1$$

$$P\left(PNB\uparrow\right)=0{,}4\ \left(PNB\rightarrow\right)=0{,}3\ P\left(PNB\downarrow\right)=0{,}2$$

Por Ley de Probabilidad Total: $P\left(A\right)=P\left(A\cap PNB\uparrow\right)+P\left(A\cap PNB\rightarrow\right)+P\left(A\cap PNB\downarrow\right)$.

$$P\left(A\right)=P\left(A|PNB\uparrow\right)\cdot P\left(PNB\uparrow\right)+P\left(A|PNB\rightarrow\right)\cdot P\left(PNB\rightarrow\right)+P\left(A|PNB\downarrow\right)\cdot P\left(PNB\downarrow\right)$$

$$P\left(A\right)=0{,}8\cdot 0{,}4+0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}4$$

Ejercicio 14

$$I=\left\{\text{El pozo es una formación de tipo I}\right\}$$
$$II=\left\{\text{El pozo es una formación de tipo II}\right\}$$
$$III=\left\{\text{El pozo es una formación de tipo III}\right\}$$
$$P\left(I\right)=0{,}35\ P\left(II\right)=0{,}40\ P\left(III\right)=0{,}25$$
$$P=\left\{\text{El pozo tiene petróleo}\right\}$$
$$P\left(P|I\right)=0{,}40\ P\left(P|II\right)=0{,}20\ P\left(P|III\right)=0{,}30$$
$$\begin{aligned}P\left(II|P^c\right)&=\frac{P\left(II\cap P^c\right)}{P\left(I\cap P^c\right)+P\left(II\cap P^c\right)+P\left(III\cap P^c\right)}\\&=\frac{P\left(P^c|II\right)\cdot P\left(II\right)}{P\left(P^c|I\right)\cdot P\left(I\right)+P\left(P^c|II\right)\cdot P\left(II\right)+P\left(P^c|III\right)\cdot P\left(III\right)}\\&=\frac{0{,}80\cdot 0{,}40}{0{,}60\cdot 0{,}35+0{,}80\cdot 0{,}40+0{,}70\cdot 0{,}25}=0{,}4539\end{aligned}$$