Práctica 1 - Vectores y Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Dados los vectores $u = (1, 2)$, $v = (-1, 3)$ y $w = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

(a) $u + v$;

(b) $v + w$;

(c) $3u + 3v$;

(d) $3(u + v)$;

(e) $(u + v) + w$;

(f) $u + (v + w)$;

(g) $u - v$;

(h) $u + (v - w)$;

(i) $\frac{5}{4}u + \frac{1}{2}v - \frac{3}{2}w$.

Ejercicio 2. Sea $w = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ un vector. Graficar en el plano:

(a) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}\}$.

(b) $L = \{tw : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

(c) $L = \{tw : t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq 1\}$.

Ejercicio 3. Dados los vectores $u = (0, 1, 2)$, $v = (1, 1, 0)$ y $w = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:

(a) $u + v$;

(b) $u + v + w$;

(c) $u - v$;

(d) $2u$;

(e) $-3v$;

(f) $-v + \dfrac{2}{3}w$.

Ejercicio 4. Halle x e y para que los vectores v y w resulten iguales.

(a) $v = (x, 3)$ y $w = (2, x + y)$;

(b) $v = (4, y)$ y $w = x(2, 3)$;

(c) $v = x(3, 2)$ y $w = 2(y, -1)$;

(d) $v = x(2, y)$ y $w = y(1, -2)$.

Ejercicio 5. Normalizar los siguientes vectores

(a) $u = (-3, 1, -2, 4, -5)$;

(b) $v = (4, -2, -3, 8)$;

(c) $w = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4})$.

Ejercicio 6. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:

(a) El vector $u = (4, k)$ tiene norma 5;

(b) El vector $v = (1, k, 0)$ tiene norma 2;

(c) El vector $w = k \cdot (2, 2, 1)$ tiene norma 1;

(d) El vector $z = (1, k, -2, 5)$ tienen norma $\sqrt{39}$.

Ejercicio 7. Dados los vectores $v = (1, -2, 2)$, $w = (2, 0, 3)$ y $z = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:

(a) $v \cdot w$;

(b) $w \cdot v$;

(c) $(v + w) \cdot z$;

(d) $(v \cdot z) + (w \cdot z)$.

(e) $(3v) \cdot w$;

(f) $v \cdot (3w)$;

(g) $3(v \cdot w)$;

(h) $v \cdot v$;

(i) $w \cdot w$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos calcule el ángulo entre los vectores u y v.

(a) $u = (1, 1)$ y $v = (1, -1)$;

(b) $u = (3, -1, 2)$ y $v = (4, 3, -1)$;

(c) $u = (1, -2, 3)$ y $v = (2, 5, 4)$;

En cada uno de los casos anteriores indicar si u y v son ortogonales.

Ejercicio 9. Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$ $u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, -1, 1)$.

(a) Escriba al vector $w = (1, 7, -4)$ como combinación lineal de u y v.

(b) Escriba al vector $z = (2, -5, 4)$ como combinación lineal de u y v.

(c) ¿Para qué valores de k el vector $y = (1, k, 5)$ es una combinación lineal de u y v?

Ejercicio 10. Estudie si el conjunto de vectores $S = \{(2, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 2, -1)\}$ es una base $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11. Enccuentre un sistema generador del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + 2z - 3t + 2y = 0\}.$$

Ejercicio 12. Determine si los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^3$

(*a*) $\{(1,1,4),(0,2,1),(3,1,9)\}$;

(*b*) $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$;

(*c*) $\{(2,1,1),(2,2,1),(2,2,-1)\}$;

(*d*) $\{(1,2,1),(1,3,1),(1,4,1),(1,5,1)\}$;

(*e*) $\{(1,1,1),(-2,1,0),(-1,0,1)\}$.

Ejercicio 13. Sea $B = \{(2,1,1),(1,-1,3),v\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Halle v sabiendo que las coordenadas del vector $(1,-2,5)$ en la base B son $(2,-1,3)$.

Ejercicio 14. Sean $B = \{(-1,4,2),v,(0,0,-1)\}$ y $B' = \{w,(1,-1,1),(-1,0,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Halle v y w sabiendo que las coordenadas de v en la base de B' son $(1,2,3)$ y que las coordenadas de w en la base B son $(1,2,3)$.

Ejercicio 15. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios

(*a*) $\{(x,y,z)\colon x=y=z\}$ de $\mathbb{R}^3$;

(*b*) $\{(x,y,z,t)\colon x=z, y=t\}$ de $\mathbb{R}^4$;

(*c*) $\{(x,y,z,t)\colon 2y+3z=0\}$ de $\mathbb{R}^4$;

Ejercicio 16. Una compañía petrolera puede convertir un barril de crudo en tres clases distintas de combustible. Sin aditivos de plomo sus producciones de las tres clases de combustible a partir de un barril de crudo vienen dadas por el vector $(2,2,4)$. Con el máximo de aditivos de plomo permitidos legalmente las producciones son $(5,0,3)$. Supongamos que los efectos de los aditivos de plomo son proporcionales, es decir, que al usar una fracción α del máximo permitido $(0 \leq \alpha \leq 1)$ se tiene la producción

$$(1-\alpha)(2,2,4)+\alpha(5,0,3).$$

Determine si es posible que la compañía produzca los siguientes vectores

(*a*) $\left(\frac{5}{2},1,\frac{7}{2}\right)$;

(*b*) $\left(\frac{9}{2},\frac{1}{3},\frac{19}{6}\right)$;

(*c*) $(1,6,9)$.

Ejercicio 17. Consideremos el conjunto

$$V = \{(w, td, ti, P, GP) \colon P = w, td + ti = GP\}$$

donde w es el crecimiento de los salarios nominales, td es el crecimiento de los impuestos directos, ti es el crecimiento de los impuestos indirectos, P es el crecimiento de los precios y GP es el crecimiento del gasto público.

(a) Muestre que V es un subsepacio vectorial de $\mathbb{R}^5$;

(b) Halle una base y la dimensión de V. De una interpretación económica del resultado.

Práctica 2 - Matrices y Sistemas

Ejercicio 1. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n\times n}$

(*a*) $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^t = A\}$ (matrices simétricas).

(*b*) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^t = -A\}$ (matrices antisimétricas).

(*c*) $S_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores).

(*d*) $S_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales).

(*e*) $S_5 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = \cdots = A_{nn}\}$ (matrices escalares).

(*f*) $S_6 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

Ejercicio 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

calcular:

(*a*) $A + 3B - 3C$. (*b*) $A + 3(B - C)$. (*c*) $A - (B - 2C)$. (*d*) $A - B + 2C$.

Ejercicio 3. Se consideran matrices de los siguientes tamaños:

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 5},\ B \in \mathbb{R}^{5\times 7},\ C \in \mathbb{R}^{7\times 5}.$$

Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

(*a*) $A \cdot B$. (*c*) $B \cdot C$. (*e*) $A \cdot B \cdot C$. (*g*) $B \cdot C \cdot B \cdot C$.

(*b*) $B \cdot A$. (*d*) $C \cdot B$. (*f*) $B \cdot C \cdot A$. (*h*) $A \cdot A$.

Ejercicio 4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular: A^t, B^t, $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

Ejercicio 5. Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matiz A?

(a) $A \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot A$.

(b) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.

(c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

(d) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

Ejercicio 6. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $AB = BA$.

(b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $AB = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

(c) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $AB = 0$ entonces $BA = 0$.

(d) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$ entonces $A = 0$.

(e) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A^2 = A$ entonces $A = I_n$ o $A = 0$.

(f) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $tr(AA^t) = 0$ entonces $A = 0$.

Ejercicio 7. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada. En cada caso, describir además el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

$$(a) \left\{ \begin{aligned} 3x + 5y &= 2 \\ -2x + 4y &= 6 \end{aligned} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ x + 3y &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 2x + y &= 1 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned} \right.$$

$$(d) \left\{ \begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$(e) \left\{ \begin{aligned} 3y - 2z + 3w &= 9 \\ 2x + y + w &= 5 \\ x - y + z - w &= -2 \end{aligned} \right.$$

$$(f) \left\{ \begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \\ x - y + z &= 1 \\ 5x + y - z &= 17 \end{aligned} \right.$$

$$(g) \left\{ \begin{aligned} x + 2y - z + 2t &= 0 \\ x + y + z + 2t &= 1 \\ -x + y - 5z - 2t &= -3 \end{aligned} \right.$$

$$(h) \left\{ \begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x - y + z &= 2 \\ 5x + y - z &= -5 \end{aligned} \right.$$

Ejercicio 8. Hallar, si es que existen, todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1, -2, 3)$ es solución del sistema lineal dado en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) \left\{ \begin{array}{rcl} 2b\,x + y - z &=& 1 \\ x - a\,y + z &=& 0 \\ 4x - b\,y + a\,z &=& 4 \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2a\,y + z &=& 0 \\ a\,y - b\,z &=& 4 \\ x + b\,y + (2a+b)z &=& b \end{array} \right.$$

Ejercicio 9. Determinar todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - a\,y + 2z &=& 2 \\ x + y - b\,z &=& 3 \\ y - z &=& 1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 10. Analizar cada uno de los siguientes sistemas determinando, en cada caso, los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$(a)\ \begin{cases} (k^2-9)x+y+kz &= 0 \\ (k-1)y+z &= 0 \\ (k+2)z &= 0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} 7x+ky+(4+k)z &= 12 \\ 6x+ky+3z &= 9 \\ kx+(3-k)z &= 3 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x+y+z &= k \\ x+ky+z &= 1 \\ kz &= 2 \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} x+ky+2z-w &= k+2 \\ x+ky-2z &= 2 \\ -4z+k^2w &= -3k-2 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ (k+2)x+ky-z &= 0 \\ -x+y-2z &= -1 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} 2x+3y-z &= 3 \\ x-y+3z &= 1 \\ 3x+7y-5z &= k^2 \end{cases}$$

Ejercicio 11. Para cada valor de $a, b \in \mathbb{R}$, clasificar el siguiente sistema lineal en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = b. \end{cases}$$

Ejercicio 12. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Todo sistema lineal **homogéneo** tiene, al menos, una solución.

(b) Los sistemas lineales homogéneos tienen, siempre, infinitas soluciones.

(c) Si un sistema lineal tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

(d) Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde al menos uno de los a_i es no nulo, siempre tiene solución.

(e) Si cada ecuación de un sistema lineal tiene solución, entonces todo el sistema es compatible.

Ejercicio 13. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ \alpha & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = 6x + b$ tiene más de una solución. Para el ó los valores de α hallados, resolver el sistema.

Ejercicio 14. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 15. Verificar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

son inversibles y calcular: A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Ejercicio 16. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, según corresponda, tales que:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular $(A - B^tC)^{-1}$.

(b) Hallar X, de tamaño adecuado, tal que $AX = B^tCX + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifican

$$A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2}C$$

para $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 19. Sea $A = \begin{pmatrix} 7b & -a & 0 & 0 \\ 7d & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}$. Hallar α tal que $\det A = 1$ sabiendo que $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 5$.

Ejercicio 20. Sean $A = \begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\det(B) = -2$. Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $BA^2x = BAx$ tiene una única solución.

Ejercicio 21. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5a & -50b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}$.Se sabe que $\det(A) = 2$. Calcular $\det(3A^TB)$.

Ejercicio 22. Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $A, B \in GL(n)$ entonces $A + B \in GL(n)$.

(b) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Si $\det(A) = 2$ y $\det(B^{-1}) = 4$, entonces $\det(2AB) = 8$.

(c) Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon Ax = 0\} = \langle (1,3,4), (0,0,4) \rangle$. Entonces $\mathrm{rg}(A) = 1$.

(d) Si $A \in GL(2)$ inversible entonces $5A + A^2$ es inversible.

(e) Si $A \in GL(3)$ entonces $\mathrm{rg}(A^3 - 2A) = \mathrm{rg}(A^2 - 2I)$.

Práctica 3 - Autovalores y Autovectores

Ejercicio 1. Determinar si la función T es transformación lineal.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, 2x)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x \cdot y, 0, 0)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $T(A) = A^t$.

Ejercicio 2. Hallar la expresión de la transformación lineal T_1 y T_2.

(*a*) $T_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T_1(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$, $T_1(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0)$, y $T_1(0, 0, 1) = (1, 2, 1, 2)$;

(*b*) $T_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T_2(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $T_2(1, 2, 1, 2) = (0, 0, 1)$ y $T_2(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$.

¿$T_2 \circ T_1$ es una transformación lineal?

Ejercicio 3. Hallar una base y la dimensión de $\ker(T)$ y de $\operatorname{Im}(T)$.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y - z, x + 3y)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z & x + z \\ x + y & y - z \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos hallar una matriz A de manera tal que $T(x) = [Ax^t]^t$.

(*a*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_2 - 3x_3, x_1 + x_3)$;

(*b*) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1)$;

(*c*) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0)$, y $T(0, 0, 1) = (1, 2, 1, 2)$;

(*d*) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $T(1, 2, 1, 2) = (0, 0, 1)$ y $T(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$.

Ejercicio 5. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} k & 2 & 4 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existen, todos los valores de k para los cuales $\ker(T) = \{0\}$.

Ejercicio 6. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & k & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existen, todos los valores de k para los cuales $\mathrm{Img}(T) = \{0\}$.

Ejercicio 7. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

(*a*) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$;

(*b*) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

(*c*) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(*d*) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

(*e*) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(*f*) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(*g*) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

(*h*) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(*i*) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8. Determinar si cada una de las matrices A del ejercicio anterior es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz inversible C que diagonalice a A (es decir, tal que $C^{-1} \cdot A \cdot C$ sea diagonal).

Ejercicio 9. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no es diagonalizable cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con tal que $b \neq 0$.

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1,2,0)$, $w = (2,6,0)$ y $u = (-2,-2,-1)$ son autovectores de A.

(a) Probar que A es diagonalizable.

(b) Calcular los autovalores de A y determinar los valores de r, s y t.

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible P que diagonalice a A.

(b) Calcular A^{10}.

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (1,2,0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible C que diagonalice a A.

(b) Calcular $A^6 \cdot v^t$ utilizando la diagonalización de A.

(c) Escribir al vector v como combinación lineal de una base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A.

(d) Calcular nuevamente $A^6 \cdot v^t$ sin utilizar la diagonalización de A.

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (-2,2,3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.

(b) Probar que A **no** es diagonalizable.

(c) Escribir al vector v como combinación lineal de autovectores de A.

(d) Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

Ejercicio 14. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Hallar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A.

(b) Para cada b hallado, dar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

Ejercicio 15. Diagonalizar las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ¿Es posible diagonalizarlas ortogonalmente? Si es así, determinar la matriz de cambio de base ortogonal. Calcular $A^7 + 4A^5 - 2A + 3A^2$.

Ejercicio 16. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **no** es diagonalizable.

Ejercicio 17. Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

(b) Para cada a hallado, dar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que $(0, b^2+1, 2)$ es autovector de A.

Ejercicio 18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1,1,1) \in \{v \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon (I - A)v^t = 0\}$.

(a) Determinar a, b y c y hallar todos los autovalores de A.

(b) ¿Es A diagonalizable?

(c) Calcular A^{100} y A^{201}.

Ejercicio 19. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz con autovalores $\{0, 1, 5\}$.

(a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.

(b) Calcular los autovalores de $B = (3A - 4I)^3$ y $C = 5A^t + 4I$.

(c) Probar que $H = A+I$ es inversible y calcular los autovalores de H^{-1}, $\det(H^{-1})$ y $\operatorname{tr}(H^{-1})$.

(d) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha A + 3I$ no es inversible.

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de p_A. Sea $B = 5A^2 + 3A - 2I$. Calcular $\det(B)$ y $\operatorname{tr}(B)$.

Ejercicio 21. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A, $\operatorname{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.

(a) Hallar **todos** los autovalores de A.

(b) Decidir si A^t es o no diagonalizable.

Ejercicio 22. Sea A diagonalizable tal que su polinomio característico es $p_A(t) = (t-1)^2(t-3)^2$.

(a) Calcular $rg(A - 3I)$.

(b) Hallar la matriz $B = A^2 - 4A + 5I$.

Ejercicio 23. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\dim(\{x\colon Ax = 0\}) = 1$, $\operatorname{rg}(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

(a) Calcular los autovalores de A.

(b) Decidir si A es inversible y/o diagonalizable.

Ejercicio 24. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz inversible tal que $\operatorname{tr}(A) = -2$, $\operatorname{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$ y $p_A(1) = -8$. Probar que A es diagonalizable.

Ejercicio 25. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz tal que $\{v \in \mathbb{R}^4\colon (A + I)v^t = 0\} \neq \{0\}$, $\operatorname{rg}(A - 2I) \leq 2$ y $p_A(1) = -4$. Decidir si A es diagonalizable y calcular $A^3 - 4A^2 + A + 6I$.

Ejercicio 26. Dos marcas de tabaco controlan el mercado repartiéndoselo al 60 % y 40 % respectivamente. Este año en el mercado se mueven 500 millones de dolares. Si los consumidores de la marca A son cada año fieles en un 30 % y los de la marca B son fieles en un 40 %. ¿Cómo se repartirán el mercado al cabo de 5 años las dos marcas suponiendo que su volumen se mantiene constante?

Ejercicio 27. Supongamos un mercado duopolista, en el que dos empresas A y B fabrican la totalidad de un cierto producto. Supongamos también que el producto se adquiere mensualmente, y que por medio de estudios de mercado se ha llegado a las siguientes conclusiones sobre la intención de compra de los consumidores.

- El 50 % de los consumidores que compran durante un mes el producto fabricado por la empresa A volverá a hacerlo así al mes siguiente, y el resto cambiará al fabricado por la empresa B.
- El 25 % de los consumidores que compran durante un mes el producto fabricado por la empresa B volverá a proceder así al mes siguiente y el resto cambiará al fabricado por la empresa A.

Sean 50 y 100 las cuotas de mercado de las empresas A y B, respectivamente, durante el mes de octubre de 2018. ¿Cuáles serán las cuotas de mercado de cada una de las empresas al cabo de diez meses, es decir, en el mes de agosto de 2019?

Práctica 4 - Forma de Jordan y Formas Cuadráticas

Ejercicio 1. Hallar la forma de Jordan de las siguientes matrices.

$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$ $(c)\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$(b)\ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix};$ $(d)\ D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 2. Hallar e^A donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Hallar la matriz asociada a las siguientes formas cuadráticas y clasificarlas.

(a) $q(x,y) = 4x^2 + 5y^2 + 8yx;$

(b) $q(x,y) = -x^2 - 3y^2 + yx;$

(c) $q(x,y,z) = 3x^2 - 2xy + 3xz + y^2 - 4yz + 3z^2;$

(d) $q(x,y,z) = x^2 + z^2 + xz.$

Ejercicio 4. Decidir si las formas cuadráticas que tienen asociadas a las siguientes funciones son definidas positivas o definidas negativas o semidefinidas positivas o semidefinidas negativas o indefinidas

$(a)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$ $(c)\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

$(b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$ $(d)\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

(e) $E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 5. Hallar la raíz cuadrada de las siguientes matrices

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$

(b) $B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix};$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

(d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 6. Dada la forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 2yz + az^2$$

hallase $a \in \mathbb{R}$ para que q sea semidefinida, indicando si lo es positivo o negativo.

Ejercicio 7. Hallar los valores de a para los cuales la forma cuadrática que tiene asociada a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & a & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

Ejercicio 8. Dada la forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es fijo, clasificar q para los distinto valores de a.

Ejercicio 9. Clasifique en función de $a \in \mathbb{R}$ la siguiente forma cuadrática

$$q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2axy + 2xz + 4yz.$$

sujeto a la restricción lineal $x = y$.

Ejercicio 10. Determinar si son definidas positivas o negativas las formas cuadráticas siguientes sujetas a la restricción lineal dada:

(a) $q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ sujeta a $x + y = 0$;

(b) $q(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^2$ sujeta a $3x + 4y = 0$;

(c) $q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$, sujeta a $x - y + z = 0$;

Ejercicio 11. Clasifique en función de $a \in \mathbb{R}$ la siguiente forma cuadrática

$$q(x,y,z) = a(x^2 + z^2) + 2y^2 + 4xy$$

sujeto a la restricción lineal $x = y$.

Ejercicio 12. Clasifique en función de a, $b \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática que tiene asociada a la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Práctica 5 - Ecuaciones en diferencias

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

(a) $\Delta y_t = 7$;

(b) $\Delta y_t = 0{,}3y_t$;

(c) $\Delta y_t = 2y_t - 9$.

Ejercicio 2. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con condición inicial y_0.

(a) $\begin{cases} y_t = y_{t-1} + 1, \\ y_0 = 10; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_t + 3y_{t-1} = 4, \\ y_0 = 4; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2y_t - y_{t-1} = 6 \\ y_0 = 7; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y_t = 0{,}2y_{t-1} + 4, \\ y_0 = 4; \end{cases}$

Ejercicio 3. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones en diferencias y determine si las soluciones convergen o oscilan en $t = \infty$.

(a) $\begin{cases} y_t - \frac{1}{3}y_{t-1} = 6, \\ y_0 = 1; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_t + 2y_{t-1} = 9, \\ y_0 = 4; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2y_t + \frac{1}{4}y_{t-1} = 5 \\ y_0 = 2; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y_t - y_{t-1} = 3, \\ y_0 = 5; \end{cases}$

Ejercicio 4. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

(a) $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 2$;

(b) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 7$;

(c) $2y_{t+2} + y_{t+1} - y_t = 10$;

(d) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 4$.

Ejercicio 5. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones en diferencias y determine si las soluciones convergen o oscilan en $t = \infty$.

(a) $\begin{cases} y_{t+2} + 3y_{t+1} - \frac{7}{4}y_t = 9, \\ y_0 = 6, \\ y_1 = 3; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 1, \\ y_0 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{4}y_t = 2 \\ y_0 = 4; \\ y_1 = 7; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 2^{-t} \\ y_0 = 0; \\ y_1 = 0; \end{cases}$

Ejercicio 6. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

(a) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 3^t$;

(b) $y_{t+2} - 5y_{t+1} - 6y_t = 2 \cdot 6^t$;

(c) $3y_{t+2} + 9y_t = 3 \cdot 4^t$;

(d) $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = e^t$;

(e) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = t$;

(f) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = 4 + 2t$;

(g) $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = 18 + 6t + 8t^2$;

(h) $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = e^t + 18 + 6t + 8t^2$

Ejercicio 7. Resolver la siguientes ecuación en diferencia de orden 2

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} - 4y_t = 2^t + t^3.$$