Microeconomía

Ingreso MECAP

Teoría de la firma

Elección óptima: minimización de costos

Tomás Bustos
tomasmbustos@gmail.com

Verano 2023

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

Introducción

- Del mismo modo que el problema de maximización de utilidad tiene su dual en el problema de minimización del gasto, existe una relación similar para el productor.
- Notemos que esencialmente la maximización de beneficios *requiere* la minimización de los costos. Entonces, podemos encarar el problema de maximización de beneficios en dos etapas:
  - Primero se averiguamos cómo minimizar los costos de producir una cierta cantidad. Este es el problema de **minimización de costos**.
  - Segundo, qué cantidad de producción maximiza los beneficios.

Introducción

Este procedimiento tiene las siguientes ventajas:

- **El problema está bien definido:** es posible describir la forma más eficiente de producir para cualquier tipo de tecnología de producción, incluso cuando hay rendimientos constantes o crecientes a escala.
- **Simplicidad:** El problema de maximización de beneficios se vuelve difícil de encarar cuando la estructura de mercado no es competitiva. No así el problema de minimización de costos (siempre que el mercado de factores sea competitivo).
- **Simplicidad x2:** Algebraicamente, resulta más sencillo resolver primero la minimización de costos y luego la maximización de beneficios teniendo en cuenta la minimización.

Table of Contents

Table of Contents

Minimización de Costos

Suponga una firma con una función de producción $f(x_1, x_2)$. Buscamos la forma más eficiente (menos costosa) de producir una cantidad $\bar{y}$ dada. El problema de la firma es:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} \quad & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ s.a: \quad & \bar{y} = f(x_1, x_2) \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Notemos que el problema de minimización de costo es exactamente igual al problema de minimización de gasto.
- Si las isocuantas son estrictamente convexas y diferenciables, podemos utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange.

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \mu(f(x_1, x_2) - \bar{y})$$

Minimización de Costos

Las CPO caracterizan completamente la solución al problema del consumidor (vamos a encontrar las demandas óptimas):

$$w_1 = \mu^c \frac{\partial f(x_1^c, x_2^c)}{\partial x_1}$$
$$w_2 = \mu^c \frac{\partial f(x_1^c, x_2^c)}{\partial x_2}$$
$$f(x_1^c, x_2^c) = \bar{y}$$

Dividiendo las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$TMST_{x_1,x_2} = \frac{PMg_1(x_1^c, x_2^c)}{PMg_2(x_1^c, x_2^c)} = \frac{w_1}{w_2}$$

que es la misma condición de óptimo del problema de maximización de beneficios. Esta última ecuación junto con la restricción resuelven (x_1, x_2) óptimos.

Curvas Isocosto

- Podemos representar gráficamente el problema anterior. Para esto, en primer lugar graficamos la isocuanta sobre la cual deseamos producir, es decir combinaciones (x_1, x_2) tal que $\overline{y} = f(x_1, x_2)$. Luego, las combinaciones de (x_1, x_2) tal que obtenemos un costo constante igual a C. Las llamamos **rectas isocosto**.

$$C = w_1x_1 + w_2x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2}x_1$$

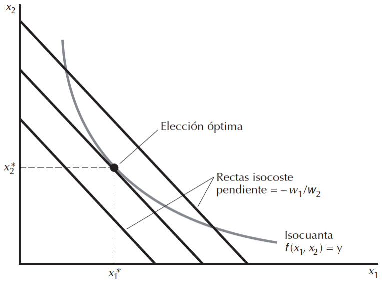


Table of Contents

Minimización de Costos

La solución al problema será:

$$\left(x_1^c(w_1, w_2, \bar{y}),\ x_2^c(w_1, w_2, \bar{y}),\ \mu_1^c(w_1, w_2, \bar{y})\right)$$

- La solución a este problema serán las **demandas condicionadas**
- Funciones que nos dicen la cantidad óptima de insumos a utilizar para producir $\bar{y}$ al mínimo costo posible
- Son *condicionales* a una cantidad de producto que se quiere alcanzar

Propiedades

Propiedades

Las demandas condicionadas satisfacen:

- $\frac{\partial x_i^c}{\partial w_i} \leq 0$
- $x_i^c(tw_1, tw_2, y) = x_i^c(w_1, w_2, y)$

- Notar que, debido a que ambos problemas son idénticos, las propiedades de las demandas condicionadas son idénticas a las de las demandas compensadas.

Table of Contents

Función de Costo Mínimo

- Una vez obtenidas las demandas óptimas de insumos, podemos reemplazarlas en la función de costo y obtener asi la *Función de Costo Mínimo:*

$$C(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^c(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^c(w_1, w_2, y)$$

- Por ejemplo, si la función es Leontief, $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Luego, $x_2 = x_1 = y$ por lo que la función costo mínimo será $C(w_1, w_2, y) = w_1 y + w_2 y = (w_1 + w_2)y$.
- Si $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, dado que los factores 1 y 2 son sustitutos perfectos en la producción, la firma utilizará el más barato. Por lo tanto, el costo mínimo de y unidades de producción será el menor de $w_1 y$ o $w_2 y$. Es decir, $C(w_1, w_2, y) = \min\{w_1, w_2\}y$.

Propiedades

Propiedades

La función de costo mínimo satisface:

- $C(tw_1, tw_2, y) = tC(w_1, w_2, y)$
- **Lema de Shephard:** $\frac{\partial C}{\partial w_i} = x_i^c(w_1, w_2, y)$

- Notar que, debido a que ambos problemas son idénticos, las propiedades de la función de costo mínimo son idénticas a las de la función de gasto mínimo.

Table of Contents

Tecnología Cobb-Douglas

Dados los precios $\mathbf{w}$ y un nivel de producción $\bar{y}$, la firma resuelve:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} \quad & C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ s.a: \quad & \bar{y} = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Siendo f una función estríctamente cóncava, el óptimo está caracterizado completamente por las CPO del método de Lagrange.

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \mu(A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} - \bar{y})$$

Tecnología Cobb-Douglas

La solución a este problema es:

$$x_1^c(w_1, w_2, \bar{y}) = \left(\frac{w_2}{w_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\bar{y}}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$x_2^c(w_1, w_2, \bar{y}) = \left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\bar{y}}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Reemplazando en la función de costos se obtiene la función de costo mínimo:

$$C(w_1, w_2, \bar{y}) = \left[w_1 \left(\frac{w_2}{w_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + w_2 \left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \cdot \left(\frac{\bar{y}}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Tecnología Leontief

Dados los precios $\mathbf{w}$ y un nivel de producción $\bar{y}$, la firma resuelve:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} \quad & C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ s.a: \quad & \bar{y} = \min\{ax_1,\ bx_2\} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dado que f no es diferenciable, debemos hacer inspección gráfica. Naturalmente, en el óptimo se satisface $ax_1 = bx_2$. Por tanto:

$$x_2 = \frac{a}{b} x_1 \qquad \bar{y} = \min\{ax_1,\ ax_1\} = ax_1$$

Estas dos ecuaciones caracterizan el óptimo de la firma

Tecnología Leontief

La solución a este problema es:

$$x_1^c(w_1, w_2, \bar{y}) = \tfrac{1}{a}\ \bar{y}$$
$$x_2^c(w_1, w_2, \bar{y}) = \tfrac{1}{b}\ \bar{y}$$

Reemplazando en la función de costos se obtiene la función de costo mínimo:

$$C(w_1, w_2, \bar{y}) = \left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b}\right) \cdot \bar{y}$$

Table of Contents

Curvas de Costos

- Analizaremos la curva de costos dado que guarda una estrecha relación con la curva de oferta.
- La curva será diferente en el **corto plazo** y en el **largo plazo**
- Corto plazo: hay insumos fijos y, por tanto, costos que deben ser pagados sin importar cuánto se produzca (costos fijos). Luego, hay costos variables debido al pago por los insumos variables que se usan para la producción

$$C(w, y) = c_v(w, y) + F$$

donde F representa el monto a pagar por los costos fijos y $c_v(w, y)$ los variables. En nuestro ejemplo de corto plazo, $c_v(w, y) = w_1 x_1$ y $F = w_2 k$.

Curva de costo medio

A partir de la función de costo mínimo podemos definir otras curvas de costos que serán de interés:

Costo medio

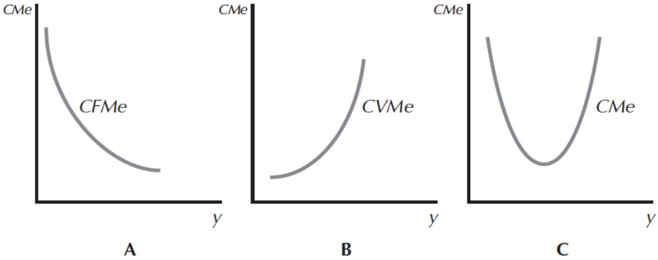
La función de costo medio CMe mide el costo promedio por unidad producida. El mismo se puede descomponer en costo medio variable y costo medio fijo:

$$CMe\left(y\right) = \frac{C\left(y\right)}{y} = \frac{c_v\left(y\right)}{y} + \frac{F}{y} = CMeV\left(y\right) + CMeF\left(y\right)$$

Curva de costo medio

¿Cómo esperamos que luzca esta función?

- El $CMeF(y)$ tiende a 0 cuando y tiende a infinito
- Si al aumentar la escala de producción vamos ganando eficiencia, los costos variables medios pueden llegar a disminuir ($CMeV(y)$ decreciente).
- No obstante, a la larga, $CMeV(y)$ es creciente. Pues, si hay factores fijos, éstos acaban limitando la capacidad de expansión del proceso productivo.



Curva de costo marginal

Costo marginal

La función de costo marginal CMg mide la tasa a la que aumenta en el costo total ante un incremento marginal en la cantidad producida.

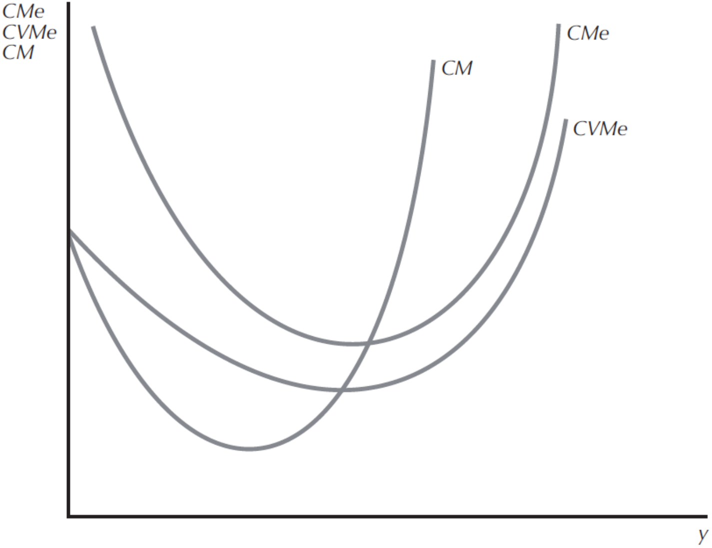
$$CMg = \frac{\partial C\left(y\right)}{\partial y} = \frac{\partial c_v\left(y\right)}{\partial y}$$

- Las curvas CMe y CMg están relacionadas

Relación entre Costo Medio y Marginal

- Primero, al incrementar la producción de $y = 0$ a $y = 1$ el costo marginal de la primera unidad va a ser igual al costo medio de la primera unidad.
- Es decir, cuando nos acercamos a cero, el costo medio variable y el costo marginal son iguales ($CMg = CMeV$).
- Ahora supongamos que estamos produciendo en un punto en el cual los costos medios variables son decrecientes. Para que los últimos decrezcan, debe suceder que cada unidad extra que se agrega sea menor que el promedio del costo variable, pues de otra manera, el promedio aumentará ($CMg < CMeV$).
- Por otro lado, será creciente cuando el costo marginal se encuentre por encima del costo medio variable ($CMg > CMeV$).
- La misma relación vale para las curvas de CMg y CMe

Curvas de Costos



Curvas de Costos

Resumiendo:

- La curva de costo variable medio puede tener pendiente negativa al principio, aunque no necesariamente. Sin embargo, a la larga crece si hay algún factor fijo que limita la producción.
- La curva de costo medio puede descender al principio debido a los costos fijos medios decrecientes, pero después aumenta debido a los costos variables medios crecientes.
- El costo marginal y el costo variable medio de la primera unidad de producción son iguales.
- La curva de costo marginal pasa por el punto mínimo tanto de la curva de costo variable medio como de la curva de costo medio.

Rendimientos a Escala

A partir de la función de costos, podemos identificar rápidamente el tipo de rendimientos a escala de la tecnología de producción:

Relación: CMe y rendimientos a escala

f tiene rendimientos crecientes a escala (economías de escala) $\Leftrightarrow \dfrac{\partial CMe}{\partial y} < 0 \Leftrightarrow CMg(y) < CMe(y)$

f tiene rendimientos constantes a escala $\Leftrightarrow \dfrac{\partial CMe}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow CMg(y) = CMe(y)$

f tiene rendimientos decrecientes a escala (deseconomías de escala) $\Leftrightarrow \dfrac{\partial CMe}{\partial y} > 0 \Leftrightarrow CMg(y) > CMe(y)$

Rendimientos a Escala

- Intuitivamente, bajo rendimientos crecientes a escala, para duplicar la producción se requieren menos del doble que los insumos.
- Por tanto, se podrá duplicar la producción, sin duplicar el costo, lo cual hará caer el costo promedio ($\frac{\partial CMe}{\partial y} < 0$).
- Este análisis se puede repetir para los 2 otros casos.

Proposición

- Si f tiene rendimientos constantes a escala, entonces la función de costos es lineal en y:

$$C(w_1, w_2, y) = C(w_1, w_2)y.$$

- Si f es cóncava, entonces C es una función convexa en y

Relación entre las curvas de corto y largo plazo

- Recordemos que en el corto plazo suponemos que alguno de los insumos se encuentra fijo, mientras que en el largo todos los factores se pueden adaptar óptimamente de forma tal de minimizar el costo de producción.
- Por tanto, el costo total de largo plazo $C^L(y)$ debe ser menor o igual al de corto plazo $C^C(y)$:

$$C^L(y) \leq C^C(y)$$

  pudiendo ambos ser iguales en el caso que el insumo fijo en el corto plazo coincida con el óptimo de largo plazo para la producción de la cantidad y.

Relación entre las curvas de corto y largo plazo

- Por lo tanto, si dividimos ambos lados de la desigualdad por y obtenemos:

$$\frac{C^L(y)}{y} \leq \frac{C^C(y)}{y}$$

  es decir, los costos medios de largo plazo son siempre menores o iguales a los de corto.

- Para distintos valores del insumo fijo, podemos pensar en distintas curvas de CMe de corto plazo, donde todas cumplen con esta propiedad: Siempre se encuentran por encima de la curva de CMe de largo plazo.

Relación entre las curvas de corto y largo plazo

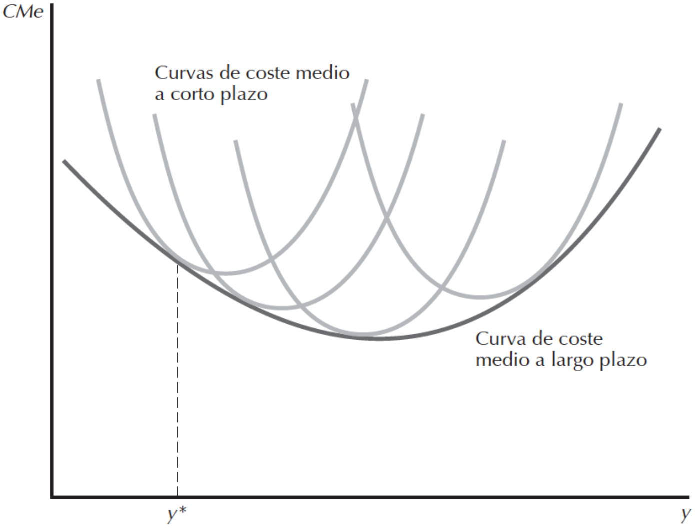


Table of Contents

Relación entre min. de costos y max. de beneficios

Una vez obtenida la función de costo mínimo, el problema de maximización de beneficios se simplifica considerablemente:

$$\max_{\{y\}} \quad p\,y - C(y)$$

Para que el problema esté bien definido, la función objetivo debe ser estríctamente cóncava. Esto ocurre si y solo si $C''(y) > 0$ (costo marginal creciente/rendimientos decrecientes a escala).

En tal caso, la CPO caracteriza la decisión óptima de la firma

$$p = C'(y)$$

Esta ecuación define la función de oferta de la firma: permite encontrar la cantidad óptima y^* para cada precio p.

Relación entre min. de costos y max. de beneficios

Si la tecnología tiene rendimientos constantes a escala, entonces $C''(y) = 0$ por lo que:

$$C(y) = c\,y$$

Entonces, el problema de la firma queda:

$$\max_{\{y\}} \quad (p - c) \cdot y$$

- Si $p > c$ el problema no tiene solución $(y \to \infty)$.
- Si $p = c$, el problema tiene infinitas soluciones $(y \in \mathbb{R}_+)$.
- Si $p < c$, el problema tiene una única solución, $y = 0$.

Por último, si el costo marginal es decreciente monótonamente (rendimientos crecientes a escala) el problema no tiene solución.

Table of Contents

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

Función de Oferta

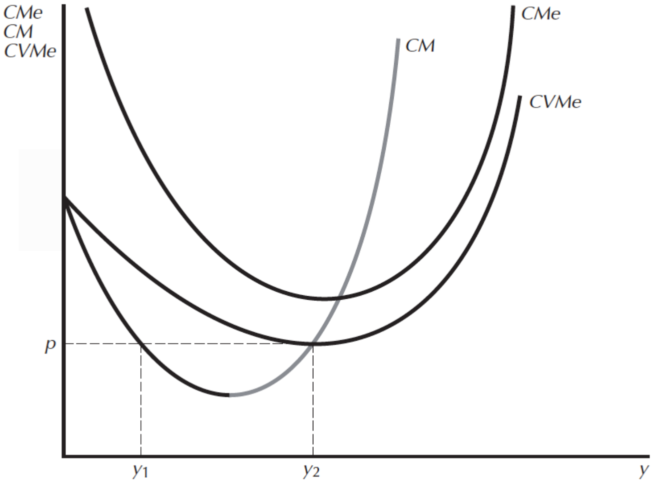
Acabamos de ver que la firma elige un y tal que:

$$p = C'(y)$$

- ¿Qué cantidad decidirá producir? Aquella en la que el ingreso marginal (IMg) sea igual al costo marginal, en la que el ingreso adicional generado por una unidad más de producción sea exactamente igual al costo adicional de esa unidad. Si no se cumple esta condición, la firma siempre podrá aumentar sus beneficios alterando su nivel de producción.
- Notar que en competencia perfecta, $IMg(y) = p$ por lo que $IMg(y) = p = CMg(y)$, como vimos anteriormente.
- Por lo tanto, la curva de costo marginal de una firma competitiva es precisamente su curva de oferta. En otras palabras, el precio de mercado es precisamente el costo marginal, siempre y cuando cada firma esté produciendo en su nivel maximizador del beneficio.

Función de Oferta

- Consideremos el siguiente caso:



Función de Oferta: Corto Plazo

- Consideremos la primera intersección, en la que la curva de costo marginal tiene pendiente negativa. Si ahora aumentamos un poco la producción, disminuirán los costos de cada unidad adicional. Pero el precio de mercado continuará siendo el mismo y, por lo tanto, es evidente que aumentarán los beneficios.
- Por consiguiente, podemos excluir los niveles de producción en los que la curva de costo marginal tiene pendiente negativa. En esos puntos, el incremento de la producción siempre debe elevar los beneficios.
- La curva de oferta de una firma competitiva debe encontrarse a lo largo de la parte ascendente de la curva de costo marginal, lo que significa que la propia curva de oferta siempre debe tener pendiente positiva. Por lo tanto, el fenómeno del "bien Giffen" no puede darse en el caso de las curvas de oferta.

Función de Oferta: Corto Plazo

- La igualdad del precio y el costo marginal es una condición necesaria para la maximización del beneficio, pero por regla general, no es suficiente.
- Si una firma produce una cantidad nula, tiene que seguir pagando los costos fijos F. Por lo tanto, los beneficios que genera la producción de cero unidades son $\breve{}F$. Los beneficios que genera la producción de una cantidad y son $py\breve{}c_v(y)\breve{}F$.
- La firma mejora su situación cerrando cuando:

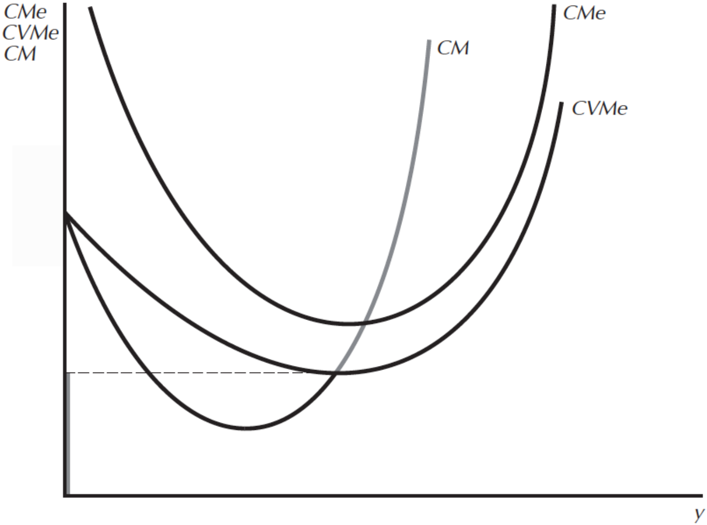
$$-F > py\breve{}c_v(y)\breve{}F \quad \forall y \Leftrightarrow CMeV(y) = \frac{c_v(y)}{y} > p \quad \forall y$$

- Esta es *la condición de cierre*.

Función de Oferta: Corto Plazo

- Este análisis indica que sólo los segmentos de la curva de costo marginal que se encuentran por encima de la curva de costo variable medio son puntos posibles de la curva de oferta. Si un punto en el que el precio es igual al costo marginal se encuentra por debajo de la curva de coste variable medio, la decisión óptima de la firma consistiría en producir cero unidades.

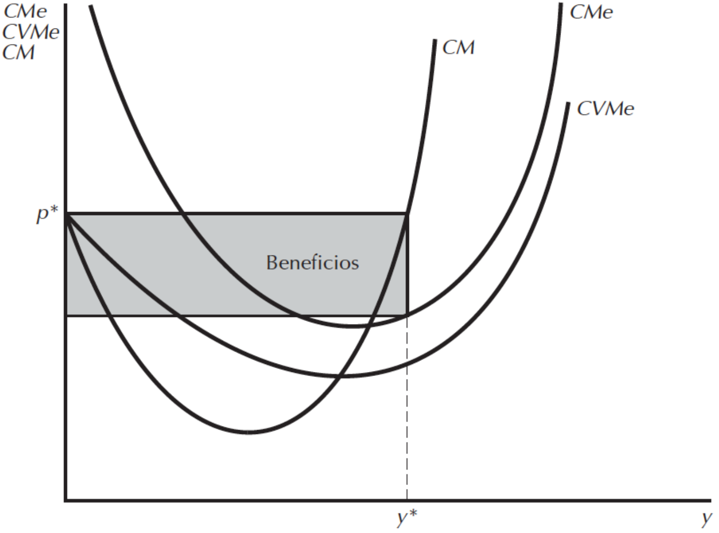
Función de Oferta: Corto Plazo



Beneficios y Excedente del Productor

- Para calcular los beneficios debemos primero obtener los ingresos. Los mismos son el producto de la cantidad vendida por el precio, es decir: py, que es el área del rectanculo que encierran en el plano.
- El costo total se encuentra dado por $C(y) = CMe(y)\, y$ que también define un rectangulo en el plano. Los beneficios, son simplemente la diferencia entre ambos, $\pi = py - C(y)$.

Beneficios y Excedente del Productor



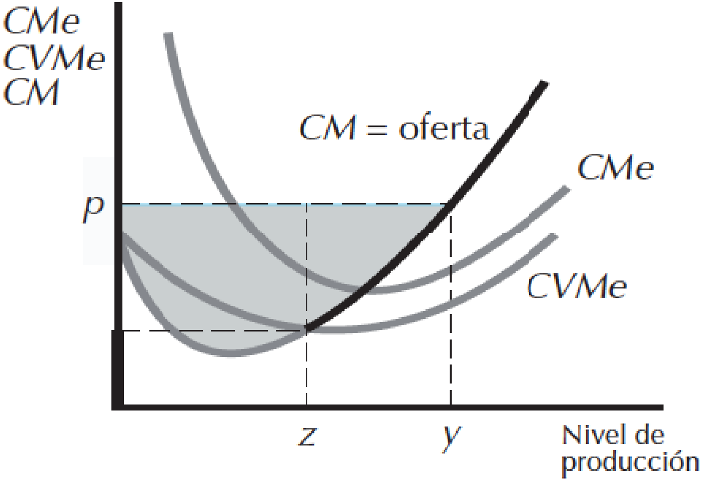
Beneficios y Excedente del Productor

- El **excedente del productor** es otra medida de bienestar de la firma. La misma puede pensarse como el ingreso extra que la firma se encuentra obteniendo por operar en una economía de mercado en donde todas sus unidades se venden al mismo precio. Más concretamente, es igual a los ingresos menos los costos variables o, en otras palabras, a los beneficios más los costos fijos.

Beneficios y Excedente del Productor

- La manera más directa de medir el excedente del productor consiste en hallar la diferencia entre el rectángulo de los ingresos y el rectángulo $y^* CVMe(y^*)$ de la figura anterior.
- Pero hay una forma más útil de medirlo, mediante la propia curva de costo marginal. Esto resulta extremadamente intuitivo: para cada unidad, me indica la diferencia entre lo que me costó producirla y el precio al que la estoy vendiendo.

Beneficios y Excedente del Productor



Curva de Oferta: Largo Plazo

- Como en el largo plazo no existen costos fijos (siempre existe la opción de no producir a costo cero) y continúa siendo óptimo producir en el punto tal que $CMg(y) = p$. Entonces, la frima decide producir siempre y cuando $p > CMe(y)$, por lo tanto, la curva de oferta de largo plazo queda definida como la parte de la curva de costo marginal que se encuentra por encima de la curva de costo medio total.
- Esto refleja la decisión óptima de producción, y en qué casos conviene no producir.

Curva de Oferta: Largo Plazo