Matemática: Cálculo en $\mathbb{R}^n$

Lara Sánchez Peña

Universidad Torcuato di Tella

10 de enero de 2022

Función de dos variables

Definición

Una función de dos variables, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es una regla que asigna un valor de $\mathbb{R}$ para cada par $(x, y) \in D$.

- Tal como antes, D es el dominio de la función (que en este caso está compuesto de dos valores por elemento, uno para x y otro para y), y $\mathbb{R}$ el codominio.
- **Ejemplo**: Una función de dos variables típica en economía es la función **Cobb-Douglas**, $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$, siendo $\alpha, \beta \in (0, 1)$.
- Como en el caso con una variable, podemos escribir a $z = f(x, y)$, en cuyo caso z es la variable dependiente, mientras que x e y son las variables independientes.
- Para facilitar el aprendizaje, en esta presentación trabajaremos con funciones de dos variables. Todos los resultados analizados tienen su extensión natural a funciones de más variables.

Derivadas parciales

- La **derivada parcial** respecto de la variable x de una función $f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ nos indica el efecto de un cambio infinitesimal en x *manteniendo a y constante* (el procedimiento es análogo para y).
- Para encontrar la derivada parcial respecto a x, procedemos igual que como procedíamos con la derivada en funciones de una sola variable, solo que tomamos como constantes a todas las variables que no son x.
- **Ejemplo**: Sea $f(x,y) = x^3 + 2y^2$, entonces $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y$

Definición

Formalmente, la derivada parcial respecto a x viene dada por el siguiente límite:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Derivadas parciales

- Para calcular derivadas parciales de orden superior, simplemente derivamos la derivada respecto a la variable de la cual queremos saber la derivada. Por ejemplo, si queremos calcular la derivada parcial segunda (de segundo orden) respecto a dos veces x:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial x}$$

- Análogamente, podemos calcular:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial y}$$

Gradiente y matriz Hessiana

- Denotamos gradiente de $f(x,y)$ al vector columna de las derivadas parciales.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f\,(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f\,(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Denotamos hessiano de $f(x,y)$ a la matriz de las derivadas parciales de segundo orden.

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial xy} \\ \dfrac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial yx} & \dfrac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Derivadas parciales

- **Ejemplo**: calcule las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = x^3y^2$.
- Algo peculiar que podemos notar es que en el ejemplo anterior $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$. Esto no es casualidad, y de hecho existe un teorema que establece este resultado cuando se cumplen ciertas condiciones.

Teorema de Schwarz

Sea $f(x, y)$ una función cuyas derivadas parciales segundas son continuas. Entonces vale que $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$.

- Calcule las derivadas parciales de segundo orden de
  - $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + x + y^2$
  - $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
  - $f(x, y) = x^3y - cos(xy)$

Derivadas direccionales

- Cuando tenemos una función con al menos dos variables, se puede calcular, además de las derivadas parciales, **derivadas direccionales**.
- Si $v = (v_1, v_2)$ definimos la derivada de $f(x, y)$ en la dirección v en el punto (a, b) de la siguiente manera:

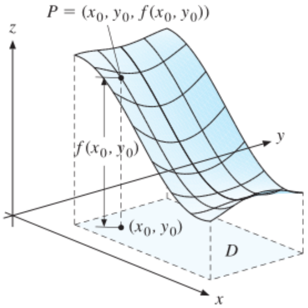
$$\frac{\partial f}{\partial v}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f((a, b) + h \cdot v) - f(a, b)}{h}$$

Derivadas direccionales - diferenciabilidad

- Si una función tiene derivadas parciales en un punto (a, b) se llama **derivable** en (a, b). Si una función admite un **plano tangente**, una aproximación lineal, entonces se dice que es **diferenciable**. Notar que
  - f diferenciable $\Rightarrow f$ derivable, pero
  - f derivable $\not\Rightarrow f$ diferenciable.
- Si la función es **diferenciable**
$$\frac{\partial f}{\partial v}(a, b) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (v_1, v_2) \cdot \nabla f(a, b)$$
- Ver apéndice para **límites de funciones** en varias variables.

Representación Gráfica

- Para funciones de dos variables debemos recurrir a una representación en 3 dimensiones.



- Las funciones de 3 o más variables no pueden ser representadas gráficamente.

- El gráfico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$G_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel c es el conjunto

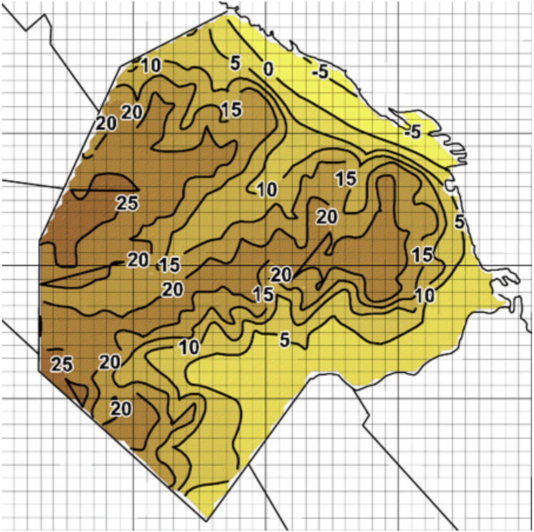
$$f^{-1}(c) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\right\}$$

- Los conjuntos $f^{-1}(c)$ se denominan también curvas de nivel.

Representación Gráfica - curvas de nivel

- Tomemos la función $f(x, y) = xy$. Supongamos que queremos que $f(x, y) = 40$. Claramente existen infinitas combinaciones de x e y tales que $xy = 40$.
- Podríamos graficar, en un gráfico de 2 dimensiones, todas esas combinaciones de x e y. A esa curva la llamamos **curva de nivel**.
- Este concepto es el análogo al utilizado por los cartógrafos cuando realizan una representación topográfica de un área.

Representación Gráfica - curvas de nivel

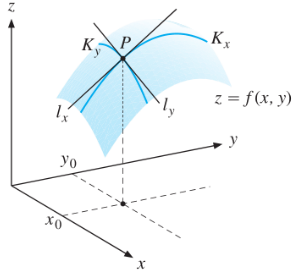


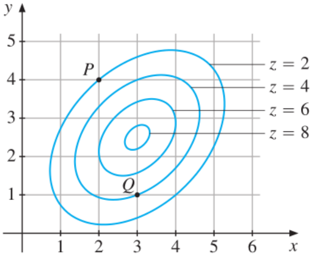
Representación Gráfica - curvas de nivel

- Para poder representar las curvas de nivel de manera gráfica, lo que hacemos es reemplazar a $f(x, y)$ por distintos valores para luego despejar a y en función de x. De ese modo tenemos una curva que puede ser representada en un gráfico de 2 dimensiones.
- Grafique las curvas de nivel de las siguientes funciones **(usar geogebra y sliders con trace on)**:
  - $f(x, y) = x^2 + y^2$
  - $f(x, y) = xy$
  - $f(x, y) = \min\{x, y\} = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$
  - $f(x, y) = x + y$
  - $f(x, y) = x + \ln y$
  - $f(x, y) = x^2 - y^2$
  - $f(x, y) = x^2 \cdot y^2$
  - $f(x, y) = x \cdot y$
  - $f(x, y) = x^2 \cdot y$

Derivadas parciales – Interpretación Gráfica

- Una interpretación geométrica interesante de las derivadas parciales es que nos dan una idea de la "topografía" del gráfico de una función en la vecindad de un punto.





- Esto nos sirve para analizar dos conceptos importantes, el de **vector gradiente** y el de **diferencial total**.

Vector gradiente

- Recordemos que la intuición de la derivada respecto a, por ejemplo x es que representa el cambio en f como resultado de un cambio infinitesimal en x. Un valor mayor de la derivada indica una mayor pendiente.
- Si entendemos a la derivada parcial como la derivada *dejando a la otra variable constante*, podemos utilizar a ambas derivadas parciales para dilucidar la dirección de máximo crecimiento de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|}{\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)|}{\|(x_0, y) - (x_0, y_0)\|}$$

Calcular las derivadas parciales de $f(x, y) = 3x^2y^2 + 4xy^3 + 7y$

Vector gradiente – Dirección de máximo crecimiento

Definición de vector gradiente

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 y sean x e y sus dos variables independientes. Definimos al **vector gradiente** en un punto (x_0, y_0) como la matriz de $n \times 1$ armada con las derivadas parciales de dicha función:

$$\nabla f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{array} \right) = Df(x_0, y_0)^{\mathsf{T}}$$

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 y sean x e y sus dos variables independientes. Siempre que $\nabla f(x, y) \neq 0$, la dirección de máximo crecimiento viene dada por $\nabla f(x, y)$.

- Consideremos la función de producción $f(L, K) = L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$. Determinemos la dirección de máximo crecimiento desde $(10000, 625)$.

Productividades marginales

Aplicación económica:

- Para una función de producción f de una variable x sabemos que si $y = f(x)$, dado un incremento Δx se puede estimar el incremento en la variable y por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$.
- Sea $Q = F(K, L)$ una función de producción que depende del capital K y del trabajo L. Consideremos incrementos ΔK y ΔL en el capital y en el trabajo, respectivamente. Entonces el incremento ΔQ en la producción puede estimarse tanto por $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)\,\Delta K$ o por $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)\,\Delta L$
- $\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)$ y $\frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)$ son estimaciones para el incremento en la producción cuando se incrementa en una unidad el capital y el trabajo, respectivamente. $\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)$ se denomina **productividad marginal del capital** mientras que $\frac{\partial Q}{\partial L}(K^*, L^*)$ es denominada **productividad marginal del trabajo**.

Diferencial Total - Aproximación de primer orden

- Del mismo modo que podemos aproximar la variación en una función de una variable, también podemos hacerlo en funciones de más de una variable.
- En esencia, del mismo modo que con una variable aproximábamos el cambio en una función a partir de una **recta tangente**, con dos variables lo hacemos a través de un **plano tangente**.
- Formalmente, podemos aproximar la variación de $f(x_0, y_0)$ a partir de una variación pequeña en x y/o y a partir del **diferencial total**:
  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$
- Consideremos la función de producción $f(L, K) = L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$.
  Aproximemos el valor de $\Delta f(L, K)$ cuando L pasa de 10000 a 10010 y K pasa de 625 a 623.

Regla de la Cadena - Dos casos importantes

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces

Teorema (Regla de la Cadena I)

Sean $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones con t como variable, y sea $f(x(t), y(t))$ una función de x e y. Entonces vale que:

$$\frac{df(\cdot)}{dt} = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt}$$

Teorema (Regla de la Cadena II)

Sean $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones con t como variable, y sea $f(x(n,m), y(n,m))$ una función de x e y. Entonces vale que:

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial n} = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}\frac{\partial x(n,m)}{\partial n} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}\frac{\partial y(n,m)}{\partial n}$$
$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial m} = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}\frac{\partial x(n,m)}{\partial m} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}\frac{\partial y(n,m)}{\partial m}$$

Regla de la Cadena - caso general

Sea $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en u^* y $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $f(\mathrm{u}^*)$.
Entonces $h = g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es diferenciable en u^* y

$$\frac{\partial h}{\partial u_i}(\mathrm{u}^*) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(f(\mathrm{u}^*)) \frac{\partial x_k}{\partial u_i}(\mathrm{u}^*), \quad i = 1, \ldots, m$$

En términos matriciales

$$Dh(\mathrm{u}^*) = D\underbrace{g(f(\mathrm{u}^*))}_{\mathbb{R}^{1\times n}} \cdot \underbrace{Df(\mathrm{u}^*)}_{\mathbb{R}^{n\times m}}$$

Ejemplo 1: Sea $f(u,v) = \left(u+v, v^2\right)$ y $g(x,y) = x^2 + y$ hallar la matriz diferencial de $g \circ f$.
Ejemplo 2: Dadas $f(u,v) = \left(u^2 v, 3u, u+2v\right)$ y
$g(x,y,z) = \left(x + yz, z^2 + 2y\right)$, calcular $D(g \circ f)(1,2)$.

Regla de la Cadena

- Intuitivamente, la regla de la cadena para funciones de varias variables nos dice que el efecto de t sobre f es igual a la suma de los efectos de t sobre las variables de f, "ponderado" por el efecto de dichas variables sobre f.
- Consideremos la función de producción $f(L, K) = L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$. Supongamos que K y L dependen del tiempo a partir de las funciones $K = 100t^2$ y $L = 6t^2 + 25$. Calcular la derivada de f respecto a t cuando $t = 10$.

Diferenciación implícita

- Hasta ahora estudiamos funciones del tipo $y = F(x_1, \ldots, x_n)$.
- Nos interesa estudiar funciones del tipo $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ dadas en forma implícita; es decir, y satisface la ecuación $G(x_1, \ldots, x_n, y) = c$
- En el caso $4x + 3y = 2$ es fácil expresar y en función de x o x en función de y.
- ¿Y si la ecuación es $x^2 - 3xy + y^3 - 7 = 0$? No es evidente cómo despejar una variable en función de la otra.

Diferenciación Implícita

- Recordemos que dada una función $f(x, y)$, podemos encontrar la curva de nivel k igualando $f(x, y) = k$.
- Podríamos suponer que esta ecuación define implícitamente a y en función de x, es decir, $y = f(x)$.

Teorema

Sea $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 en un entorno de (x_0, y_0). Supongamos que $G(x_0, y_0) = c$. Si $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe una función C^1 definida por $y = y(x)$ en un intervalo I alrededor de x_0 que satisface:

1. $G(x, y(x)) = c$ para todo $x \in I$,
2. $y(x_0) = y_0$
3. $y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)}$

- **Ejercicio 1:** Sea $f(x,y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y$. Calcule $y'(x)$ cuando $f(x,y) = 0$, para el punto $(x_0, y_0) = (2,1)$.
- **Ejercicio 2:** Consideremos la ecuación $x^2z^2 + y^4z^3 = 2$ alrededor del $(1,1,1)$. Asumiendo que la función $z = z(x,y)$ es C^1, satisface la ecuación anterior en un disco alrededor de (1,1) , podemos calcular sus dos derivadas parciales.

Teorema de la función inversa

Teorema

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^1 tal que $F\left(\mathrm{u}^*\right) = \mathrm{v}^*$. Si $\det DF\left(u^*\right) \neq 0$, entonces existe una bola B alrededor de u^* y un conjunto abierto V alrededor de v^* tal que $F : B \to V$ es biyectiva. Además, $F^{-1} : V \to B$ es C^1 y

$$\left(DF^{-1}\right)\left(\mathrm{v}^*\right) = \left(DF\left(\mathrm{u}^*\right)\right)^{-1}$$

Ejemplo: Probar que el teorema de la función garantiza que $F(x, y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$ es localmente inversible en todos los puntos excepto en $(x, y) = (0, 0)$. Sabiendo que $F(0, 1) = (-1, 0)$, calcular $\left(DF^{-1}\right)(-1, 0)$.

Función Homogénea

Definición

Decimos que la función $f(x,y)$ es **homogénea de grado k** si para todo $\lambda > 0$ vale que: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$

- Intuitivamente, una función es homogénea de grado k si existe una relación entre la escala de las variables independientes y la escala de la función.
- Notemos que cuando $k > 1$, un aumento en las variables independientes lleva a un aumento más que proporcional de f, mientras que cuando $k < 1$, un aumento en las variables independientes lleva a un aumento menos que proporcional de f.
- Analice la homogeneidad de $f(x,y) = 3x^2y - y^3$.

Función Homogénea

Teorema

Si una función $f(x, y)$ es homogénea de grado k, entonces sus derivadas parciales son homogéneas de grado $k - 1$

Teorema (Euler)

Si una función $f(x, y)$ es homogénea de grado k, entonces vale que:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot y = k \cdot f(x, y)$$

- Diga si las funciones de la slide 12 son homogéneas y, en caso de serlo, diga cuál es su grado de homogeneidad.
- Cabe destacar que no todas las funciones son necesariamente homogéneas de algún grado. Por ejemplo: función $f(x, y) = x + \ln y$.

Aplicación económica

- Decimos que una **tecnología** es una función que convierte insumos en productos.
- Se dice que una tecnología exhibe **rendimientos constantes a escala** (CRS) si f es homogénea de grado 1.
- Muestre que si una tecnología f utiliza trabajo ℓ y capital k y exhibe **CRS** y la firma es **tomadora de precios**, es decir, no puede elegir el precio al que vende los bienes, p ni el precio que paga por los insumos (salario w por cada unidad de trabajo ℓ y r por cada unidad alquilada de capital) **entonces sus beneficios serán iguales a cero**. Los beneficios se definen como:

$$\pi = pf(k, \ell) - w \cdot \ell - r \cdot k$$

- Idea: mostrar que $\dfrac{w}{p} = \dfrac{\partial f}{\partial \ell}$ y que $\frac{r}{p} = \dfrac{\partial f}{\partial k}$.

Convexidad

- El análisis de la concavidad/convexidad de una función de varias variables resulta un poco más complejo. Para poder hablar al respecto, debemos definir a la matriz Hessiana.

Definición

Sea $f(x, y)$ una función tal que existen sus derivadas segundas. Definimos a la matriz Hessiana $H(x_0, y_0)$ como la matriz construida con las derivadas segundas evaluadas en (x_0, y_0):

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Convexidad

- Dependiendo la naturaleza de la matriz hessiana, la función será convexa o cóncava en (x_0, y_0).
- Sea A una matriz de $n \times n$. Definimos a los menores principales A_k como todas las matrices de $k \times k$ para todo $k \leq n$ que se forman a partir de las primeras k filas y columnas de A. Notar que por construcción, una matriz de $n \times n$ tiene n menores principales.
- con esta definición, estamos listos para hablar de la convexidad de funciones de varias variables.

Convexidad

Teorema

Sea $f(x, y)$ una función dos veces derivable, y sea $H(x_0, y_0)$ la matriz Hessiana evaluada en (x_0, y_0). Entonces vale que:

- Si para **todos los menores principales** de H vale que $\det(H_k) > 0$ entonces la función es **estrictamente convexa** en (x_0, y_0).
- Si para **todos los menores principales** de H vale que $\det(H_k) \geq 0$ entonces la función es **convexa** en (x_0, y_0).
- Si para **todos los menores principales** de H vale que $\det(H_k) < 0$ si k es impar y $\det(H_k) > 0$ si k es par entonces la función es **estrictamente cóncava** en (x_0, y_0).
- Si para **todos los menores principales** de H vale que $\det(H_k) \leq 0$ si k es impar y $\det(H_k) \geq 0$ si k es par entonces la función es **cóncava** en (x_0, y_0).

Convexidad

- Cuando los determinantes de los menores principales son estrictamente positivos decimos que la **matriz hessiana** es **definida positiva**, cuando son mayores o iguales a cero, **semidefinida positiva**, cuando alternan estrictamente de signo, **definida negativa** y cuando alternan de signo permitiéndose las igualdades, **semidefinida negativa**.
- Calcule los conjuntos de convexidad y concavidad de:
  - $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 514$
  - $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$
  - $f(x, y) = \sqrt{x} + e^y$
- Como este procedimiento para hallar la concavidad y convexidad de una función resulta bastante complicado, muchas veces es mejor aplicar las propiedades de concavidad/convexidad que aprendimos en la unidad de cálculo en una variable, las cuales también valen a la hora de analizar la concavidad/convexidad en funciones de más de una variable.

Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función.

- Un punto $u^* \in U$ es **un máximo global** de F si $F(u^*) \geq F(u)$ para todo $u \in U$.
- Un punto $u^* \in U$ es **un mínimo global de** F si $F(u^*) \leq F(u)$ para todo $u \in U$.
- Un punto $u^* \in U$ es **un máximo local de** F si existe una bola $B_{u^*} \subseteq U$ de u^* tal que $F(u^*) \geq F(u)$ para todo $u \in B_{u^*}$
- Un punto $u^* \in U$ **es un mínimo local** de F si existe una bola $B_{u^*} \subseteq U$ de u^* tal que $F(u^*) \leq F(u)$ para todo $u \in B_{u^*}$

- Decimos que un punto (x_0, y_0) es un punto crítico de $f(x, y)$ **si todas sus derivadas parciales son cero**, es decir:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \text{ y además}$$
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

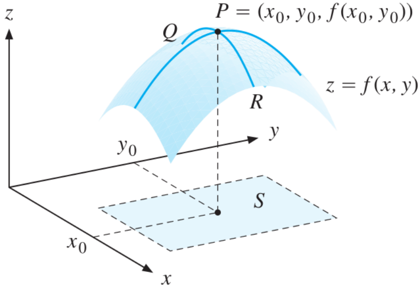
Teorema

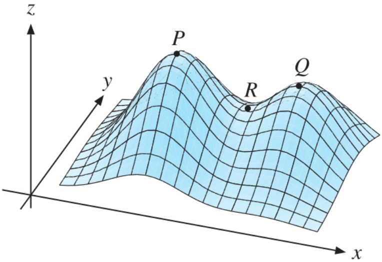
Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1. Si un punto interior x^* es un máximo o mínimo de F, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

Optimización - Condiciones de Primer Orden

- Al igual que en funciones de una variable, la intuición de este resultado resulta inmediata de observar un gráfico.





- Los puntos P y Q son máximos locales, mientras que el punto R es un punto de ensilladura (ni máximo ni minimo).

Derivadas de orden superior

Definimos las derivadas de segundo orden de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_1, \ldots, x_n)$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Se dice que una $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función C^2 si todas sus segundas derivadas son continuas.
La **matriz Hessiana** $Hf\,(x^*)$ de una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $\mathrm{x}^* \in U$ es la matriz $H\,f\,(x^*)$ cuya entradas se definen por

$$(H_f\,(x^*))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)$$

Aproximación de segundo orden

- Se puede ver que si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función C^2y $\mathrm{x}^* \in D$ es un punto interior, entonces

$$f\left(x^* + h\right) \approx f\left(x^*\right) + \nabla f\left(x^*\right) \cdot h + \frac{1}{2} h' \cdot Hf\left(x^*\right) \cdot h$$

- Si x^* es un extremo local de f entonces

$$f\left(x^* + h\right) - f\left(x^*\right) \approx \frac{1}{2} h' \cdot Hf\left(x^*\right) \cdot h$$

- Estudiando $Hf\left(x^*\right)$ podemos saber que tipo de extremo es x^*. Notemos que $Hf\left(x^*\right)$ es una forma cuadrática cuando consideramos $Hf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h \to h' \cdot Hf(x^*) \cdot h$.

Aproximación de segundo orden

- **Ejercicio 1:** Utilice una aproximación de segundo orden para $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5xy + 7y - 6x - 8$ en $(x_0, y_0) = (1,2)$
- **Ejercicio 2:** Utilice una aproximación de segundo orden para $f(x,y) = x^2y + y^2 - 5xy - 7y - 3$ en $(x_0, y_0) = (2,3)$
- **Ejercicio 3:** Utilice una aproximación de segundo orden para $f(x,y) = \ln(x) + y^2$ en $(x_0, y_0) = (1,2)$

Formas cuadráticas

- Una **forma cuadrática** es una función $Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ que se expresa como $Q(x) = x' \cdot A \cdot x$ con A simétrica.
- Una matriz simétrica A de $k \times k$ es **definida positiva** si $\mathrm{x}' \cdot A \cdot \mathrm{x} > 0$ para todo $\mathrm{x} \neq 0$ en $\mathbb{R}^k$
- Una matriz simétrica A de $k \times k$ es **definida negativa** si $x' \cdot A \cdot x < 0$ para todo $x \neq 0$ en $\mathbb{R}^k$
- Una matriz simétrica A de $k \times k$ es **indefinida** si existen x e y en $\mathbb{R}^k$ tales que $x' \cdot A \cdot x > 0$ y $y' \cdot A \cdot y < 0$.
- La i-ésima **matriz menor principal** de una matriz A de $k \times k$ es el la matriz de $i \times i$ que se obtiene de A borrando las últimas $k - i$ columnas y las últimas $k - i$ filas y la notamos por A_i.

Criterio sobre formas cuadráticas

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica y sean $M_1, \ldots, M_n$ los menores principales de M.

1. Si $M_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces A es definida positiva.
2. Si $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, M_4 > 0, \ldots,$ entonces A es definida negativa.
3. Si M_k es negativo para k par o M_k y M_l tienen signos opuestos para $k \neq \ell$ impares, entonces M es indefinida.

Criterio de la derivada segunda

Teorema

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 y $x^* \in U$ un punto interior tal que $\nabla f(x^*) = 0$.

1. Si $(Hf(x^*))_{11} < 0$y $\det Hf(x^*) > 0$, entonces x^* es un máximo local.
2. Si $(Hf(x^*))_{11} > 0$ y $\det Hf(x^*) > 0$, entonces x^* es un mínimo local.
3. Si $\det Hf(x^*) < 0$, entonces x^* es un punto silla.

Ejemplo: Clasificar los extremos locales de la función $f(x, y) = x^3 - y^3 + 9xy$. ¿Son globales?

Optimización - Condiciones de Segundo Orden

Teorema

Sea $f(x, y)$ una función y sea (x_0, y_0) un punto crítico.

- Si f es cóncava en (x_0, y_0) entonces el punto crítico es un máximo local.
- Si f es cónvexa en (x_0, y_0) entonces el punto crítico es un mínimo local.

- Nuevamente vale que si una función es estrictamente cóncava entonces si encontramos un punto crítico este será necesariamente un máximo local, mientras que si es estrictamente convexa, el punto encontrado será necesariamente un mínimo local.

Ejercicio aplicado 1

- Sea una consumidor que consume bienes x e y de acuerdo con sus preferencias, representadas por una función de utilidad $u(x, y) = x \cdot y$. El individuo cuenta con una restricción presupuestaria $p_x \cdot x + p_y \cdot y = M$; donde p_x es el precio del bien x, p_y es el precio del bien y y M representa el ingreso del individuo. Si $p_x = p_y = 5$ y $M = 100$ ¿Cuánto comprará el individuo con tal de maximizar su utilidad?
- Repita el ejercicio anterior para valores p_x y p_y genéricos.

Ejercicio aplicado 2

- Sea un productor que cuenta con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/2}L^{1/4}$. Si la firma quiere producir $y = 36$ unidades, el precio del factor K, r es 1,2 y el precio del factor L, w, es 0,6, encuentre la combinación de factores K y L que m**inimiza la función de costo** $C = wL + rK$ cuando se quiere producir $f(K, L) = 36$.
- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.

Ejercicio aplicado 3

- Sea un productor con una función de producción dada por $f(L, K) = K^{1/2}L^{1/4}$. Si el precio final del producto es 12, el precio del factor K, r es 1,2 y el precio del factor L, w, es 0,6 encuentre la combinación de factores K y L que maximiza el beneficio

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK$$

- Repita el ejercicio anterior para valores r y w genéricos.
- Note que en este caso los beneficios son mayores que cero. Muestre que $f(K, L)$ es homogénea de grado $k < 1$. Decimos que una tecnología exhibe **rendimientos decrecientes a escala** (DRS) si $f(K, L)$ es HOD k, con $k < 1$.

Función de Valor

- Tomemos el problema de la filmina anterior, pero reemplacemos a los precios del producto final y los factores K y L por p, r y w, respectivamente.
- Claramente podemos reemplazar a K^* y a L^*, los valores óptimos, en la función de beneficios, para obtener los beneficios en función de p, r y w.
- Esta función, $\Pi(p, r, w)$ se denomina **Función de Valor**.
- Esta expresión es muy útil cuando queremos analizar los efectos de cambios en los parámetros sobre el valor de la función en equilibrio. En el curso de microeconomía hablaremos más al respecto.

Máximos y mínimos globales

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2

1. Las siguientes condiciones son equivalentes:
    1. f es una función cóncava en D.
    2. $f(y) - f(x) \leq Df(x) \cdot (y - x)$ para todo $x, y \in U$.
    3. $Hf(x)$ es definida negativa para todo $x \in U$.
2. Las siguientes condiciones son equivalentes:
    1. f es una función convexa en D.
    2. $f(\mathrm{y}) - f(\mathrm{x}) \geq Df(\mathrm{x}) \cdot (\mathrm{y} - \mathrm{x})$ para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \boldsymbol{U}$,
    3. $Hf(x)$ es definida positiva para todo $x \in U$.

Apéndice: Límites en dos variables

- Cuando queremos calcular límites de funciones que tienen más de una variable, por ejemplo, $(x, y) \to (a, b)$ cada variable puede acercarse al valor del límite de manera independiente.
- Esto quiere decir que pueden acercarse vía rectas, curvas **parametrizadas**, o de maneras más generales.
- Por eso, probar cuánto vale un límite en más derivadas requiere técnicas más avanzadas que no veremos en este curso.
- Lo que podemos decir, es que si una función es continua, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.
- Podría pasar, por ejemplo, que el límite vía cualquier recta exista y, sin embargo, el límite no exista. Por ejemplo : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^4 + y^2}$.