Inferencia Estadística

G2: Estimación puntual

Gabriel Martos Email: gmartos@utdt.edu
Nicolás Ferrer Email: nicolas.ferrer.747@gmail.com

Listados de ejercicios teórico–prácticos

1. Siendo $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una muestra aleatoria de una población Uniforme discreta con soporte $\{0, 1, \ldots, \theta - 1, \theta\}$, siendo θ un entero mayor a 1, se pide:

   (a) Hallar el estimador de momentos del parámetro θ.

   (b) De una muestra de tamaño $n = 10$ se tiene que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 7$. Computa la estimación de momentos de θ con los datos de la muestra.

   (c) Si el soporte del modelo uniforme fuera en cambio: $\{-\theta, -\theta+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \theta-1, \theta\}$; ¿qué ocurre con el estimador que hallaste en el punto (a)? ¿Cómo redefines el estimador de momentos en este caso? Vuelve a computar la estimación de momentos en relación a la muestra dada en (b).

2. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Binomila(θ, k) donde $(\theta; k)$ resultan desconocidos.

   (a) Hallar los estimadores de momentos de (θ, k).

   (b) Para una muestra de tamaño $n = 10$ se tiene que $\bar{x} = 1$ y $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 1)^2 = 20$. Son las estimaciones de momentos de los dos parámetros coherentes con el modelo de probabilidad?

3. Sabiendo que $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Gamma(α, λ), esto es:

$$f(x; \lambda, \gamma) = \begin{cases} \lambda \exp\left(-\lambda x\right) \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } , x > 0, \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

   con $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$. Hallar los estimadores de momentos de $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda)$. De una muestra de tamaño $n = 10$ se sabe que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 50$ y que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 144$, computar las estimaciones de momentos de $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda)$

4. Para los siguientes modelos de probabilidad:

   (a) Poisson: $f(x, \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, con $\lambda \in (0, \infty)$ y $x \geq 0$.

   (b) Exponencial: $f(x, \lambda) = \dfrac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}$, con $\lambda \in (0, \infty)$ y $x \geq 0$.

   (c) Truncada en λ: $f(x; \lambda) = \lambda^{-1} e^{1-x/\lambda}$ con $0 < \lambda < x$.

   (d) Gamma: $f(x; \lambda, k) = \lambda e^{-\lambda x} \dfrac{(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}$, con $\lambda > 0$, $k = 2$ (conocido) y $x > 0$.

   Computa en cada caso el estimador de momentos y el estimador máximo verosímil de λ. Sabiendo que el valor del estadístico $\sum_{i=1}^{20} x_i = 25$, computa las estimaciones de momentos y máximo verosímiles relativas a λ en cada caso.

5. Demuestra que los estimadores de los puntos (a) y (b) son UMVUE y que sus ECM convergen a cero cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito (consistencia).

6. Si $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim} f(x;\theta)$ donde $-1 \leq \theta \leq 1$ y

$$f(x;\theta) = \frac{1+\theta x}{2}, \text{ para } x \in [-1,1].$$

   (a) Obtener el estimador de momento del modelo.

   (b) Utiliza argumentos de la distribución en el muestreo para justificar una aproximación del riesgo cuadrático del estimador cuando $n \gg 0$ (cuando n es grande).

   (c) ¿Es el estimador de momentos consistente?

   (d) Para una muestra de tamaño $n = 4$ donde $X_1 = -0.5, X_2 = -0.1, X_3 = -0.2$, y $X_4 = 0.6$ compara el estimador de momentos contra el estimador máximo verosímil (tendrás que implementar algún método numérico para computar el segundo).

7. La información de la tabla representa una muestra realizada (de tamaño $n = 55$) de una población que sigue una distribución Poisson de parámetro λ. Con esta información se pide que halles la estimación máximo verosímil del parámetro $\psi_\lambda = P_\lambda(X = 2)$.

X:	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	7	14	12	13	6	3

8. Considerando $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, se pide:

   (a) Hallar los estimadores máximo verosímiles de los parámetro μ y σ^2 (verifica que se cumplen las condiciones necesarias y suficientes para un máximo).

   (b) De una muestra se tiene que $\sum_{i=1}^{100} x_i = 170$ y $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 810$, con esta información computa las estimaciones máximo verosímiles de μ y σ^2.

   (c) Computa el riesgo del estimador máximo verosímil de σ^2 y compara el riesgo de éste en relación al estimador insesgado S^2.

   (d) Computa la matriz de Información de Fisher y la cota CR.

   (e) Son los estimadores máximo verosímiles de μ y σ^2 eficientes.

   (f) Con la información del punto (b), construye una ellipse de confianza de nivel 0.95.

9. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una muestra aleatoria de una población Uniforme (continua) con soporte en $[0, \theta]$, hallar el estimador máximo verosímil del parámetro θ.

10. Siendo W un estimador de θ, demuestre que $\text{ECM}(W, \theta) = \text{Sesgo}^2(W) + \text{Var}(W)$.

11. Si W es un estimador insesgado de θ, demuestre que: (1) $a + bW$ es insesgado para el parámetro $a + b\theta$ (con a y b dos constantes conocidas); y (2) W^2 es sesgado para θ^2.

12. Si $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \text{Bin}(p)$, considera los siguientes estimadores de p: $\widehat{p}_1 = \overline{X}$ (EMV) y $\widehat{p}_2 = (\sqrt{n/4} + n\overline{X})/(n + \sqrt{n})$ (estimador Bayesiano)

   (a) Computar el error cuadrático medio (ECM) de ambos estimadores.

   (b) Para n fijo, para que valores de p ocurre que $\text{ECM}(\widehat{p}_1, p) < \text{ECM}(\widehat{p}_2, p)$.

   (c) ¿Qué estimador prefieres para valores pequeños y cuál para valores grandes de n?

13. Si $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, considera el estimador de σ^2: $\widehat{\sigma}_b^2 = bS^2$ $(b > 0)$.

   (a) Computar el ECM de $\widehat{\sigma}_b^2$ (Utiliza las propiedades de S^2 en poblaciones normales).

   (b) Demuestre que para cualquier valor de σ^2, el estimador $\widehat{\sigma}_b^2$ minimiza el riesgo cuadrático cuando $b = (n-1)/(n+1)$.

14. Consideremos $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Cauchy(θ) donde θ es un parámetro de localización:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1 + (x-\theta)^2}\right].$$

   (a) ¿Puedes dar una solución analítica para el EMV de θ?

   (b) Determine las expresiones de las funciones $S(\theta)$ (score) y $H(\theta)$ (hessiano) relativas al método de Newton–Raphson discutidas en clase.

   (c) Experimento numérico: Considerando $\theta = 1$ (verdadero valor del parámetro), genera muestras de tamaños $n = 10, 100, 1000$ del modelo (`rcauchy(n,location = 1)`). Con estas muestras implementa el método Newton–Raphson para obtener una estimación numérica de θ. ¿Qué esperas que ocurra con tus estimaciones a medida que n crece?

15. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Unif$(0, \theta)$ (modelo continuo), considera el estimador de momentos y $\frac{n+1}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$, como candidatos para estimar θ.

   (a) Computa el ECM de cada uno de los estimadores.

   (b) ¿Son estos estimadores consistentes?

   (c) Computa la eficiencia relativa entre los pares de estimadores.

   (d) ¿Con cuál de ellos te quedas al hacer inferencia para θ?.

16. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Exp(θ), con $E(X_1) = \theta$; se proponen dos estimadores para θ: $\widehat{\theta} = \bar{X}$ (EMV) y $W = nX_{(1)}$ (donde recordemos $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n) \sim$ Exp(θ/n)).

   (a) Demuestra que $X_{(1)} \sim$ Exp(θ/n).

   (b) Computa el ECM de ambos estimadores para dirimir cuál de los dos prefieres.

   (c) ¿Son ambos estimadores consistentes?

17. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Beta$(\theta, 1)$ con $\theta > 0$; esto es

$$f(x; \theta) = \theta x^{(\theta-1)}, \text{ para } x \in [0, 1].$$

   (a) Computar la información de Fisher del modelo.

   (b) Compute el estimador MV de θ: ¿Es insesgado? ¿Es eficiente?.

   (c) ¿Cómo construiría un intervalo de confianza aproximada (cuando $n \gg 0$) para θ con las cuentas del punto (a)?

   (d) Imagine que con los datos de una muestra de tamaño $n = 100$ (considere ésta una muestra grande), se tiene que $\widehat{\theta} = 7$. Indique los límites del intervalo de confianza aproximado (a un nivel $\alpha = 5\%$) para el parámetro θ.

18. Considere el siguiente modelo (lineal) $Y = \beta x + \varepsilon$, donde las x's se pueden considerar fijas (las elige quien observa los datos) y $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Considere una muestra aleatoria $\{(Y_1, x_1), \ldots, (Y_n, x_n)\}$ de este modelo, en donde además los valores de x se eligieron de tal forma que $\sum_{i=1}^n x_i/n = 1 = 0$ y $\sum_{i=1}^n x_i^2/n = 1$. Con esta información se pide:

    (a) Identifique el modelo estadístico de Y y sus parámetros.

    (b) Hallar los estimadores máximo verosímiles de los parámetros anteriores.

    (c) Computa $I(\beta)$ y determina si el estimador $\widehat{\beta}$ es eficiente.

    (d) ¿Cómo se distribuye $\widehat{\beta}$?

    (e) Computa el ECM de $\widehat{\beta}$. ¿Es $\widehat{\beta}$ consistente?

19. Considere el siguiente modelo estadístico:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2}\theta^3 x^2 e^{-\theta x}, \text{ si } x, \theta > 0.$$

    (a) Computa el estimador máximo verosímil de θ.

    (b) Demuestre que cuando el tamaño de muestra es grande, la varianza del EMV es aproximadamente $\frac{\theta^2}{3n}$.

    (c) Construye un intervalo aleatorio $[L, U]$ tal que cuando la muestra es grande con una probabilidad de aproximadamente 0.95, θ pertenezca a dicho intervalo.

    (d) En una muestra de tamaño $n = 250$ se tiene que $\sum_{i=1}^{250} x_i = 432$. Obtenga el valor de la estimación máximo verosímil y determine los valores de los límites *estimados* del intervalo anterior.

20. Una empresa encuestadora quiere estimar la proporción de votantes θ en la Ciudad de Buenos Aires con intención de votar al candidato A en las próximas elecciones (suponga en todo momento que en la Ciudad de Buenos Aires hay 4 millones de votantes). Con este objetivo se tomará una muestra de $n = 1000$ votantes, preguntando *¿Votará ud a A en las próximas elecciones?*, registrando la preferencia de cada uno de los encuestados con las opciones *SI* y *NO* (no hay indecisos en esta población). La empresa necesita de su asesoramiento en lo respectivo a los siguientes puntos:

    (a) Usted propone estimar la proporción de votantes en favor de A utilizando el estadístico $\widehat{p}$ (proporción muestral) y su colega, Juan Perez, propone en cambio:

$$\widehat{p}_{JP} = \frac{n_{si} + 10}{n + 20},$$

    donde n_{si} es el número de encuestados que manifiesta intención de votar por el candidato A. ¿Es insesgado $\widehat{p}_{JP}$? Calcule su error cuadrático medio como función de p. Si el criterio para comparar estimadores es el error cuadrático medio, ¿es uno de los estimadores $\widehat{p}$ o $\widehat{p}_{JP}$ mejor que el otro cualquiera sea el valor de p en la población?

21. Se sabe que el tiempo T de respuesta de un servidor web dedicado a las apuestas online se sigue (ajusta a) una distribución Rayleigh de parámetro $\alpha > 0$, con función de densidad

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha t \exp(-\frac{\alpha}{2}t^2) \text{ si } t > 0; \\ 0 \text{ si } t \leq 0. \end{cases}$$

    (a) Hallar la expresión del estimador máximo verosímil del parámetro α en la población.

    (b) De una muestra de 50 tiempos de respuesta se obtuvo que $\sum_{i=1}^n t_i = 146.28$ y $\sum_{i=1}^n t_i^2 = 510.58$, cual es el valor de la estimación máximo verosímil de α?

Addendum G1: demostrar que $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente si $\underline{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Bernoulli (θ).
Hacerlo aplicando la definición de estadístico suficiente.

. $X \overset{iid}{\sim}$ Bernoulli $(\theta) \Rightarrow \underline{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \Rightarrow f_{\underline{X}}(\underline{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$

$$= \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{\sum(1-x_i)} = \theta^{n\bar{x}}(1-\theta)^{n-n\bar{x}}$$

$$= e^{n\bar{x}\ln(\theta)} \cdot e^{(n-n\bar{x})\ln(1-\theta)}$$

$$= e^{n\bar{x}\ln(\theta) + n\ln(1-\theta) - n\bar{x}\ln(1-\theta)}$$

$$= e^{n\ln(1-\theta)} \cdot e^{n\bar{x}\ln\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]}$$

$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$

$T(\underline{X}) = \sum X_i \Rightarrow M_{T(\underline{X})}(t) = \left(M_X(t)\right)^n = \left[(1-\theta) + \theta e^t\right]^n = M_Y(t) \,/\, Y \sim \text{Binomial}(\theta, n)$

$T(\underline{X}) \sim \text{Binomial}(\theta, n) = \binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}$

$$\Rightarrow f_{\underline{X}|T=t}(\underline{x}|T=t) = \frac{f_{\underline{X},T}(\underline{X}=\underline{x}, T=t)}{f_T(t)} = \frac{e^{n\ln(\theta)}\, e^{\sum x_i \ln\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}}$$

$$= \frac{\theta^n \cdot \theta^{\sum x_i} \cdot (1-\theta)^{-\sum x_i}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} \quad \Big\} \sum x_i = t$$

$$= \frac{\theta^t(1-\theta)^{n-t}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} = \binom{n}{t}^{-1} \longrightarrow \text{no depende de } \theta$$

Recap

Terminología:
- Parámetro del modelo: θ que indexa la colección $\mathcal{F} = \{F(\cdot,\theta) / \theta \in \Theta\}$
  θ^* suele usarse para el verdadero de θ que originó la data.
- Parámetro de interés: aspecto de la distribución de $\mathbb{X}$ sobre la que quiero hacer una inferencia. Suele ser una función $g(\theta)$.
- Estimador de $g(\theta)$: es una función de $\mathbb{X}$ / $\hat{g} = \delta(\mathbb{X})$ (variable aleatoria)
  ↳ regla de decisión s/ $g(\theta)$ en base a $\mathbb{X}$
- Estimación: es el valor de la función $\delta(\cdot)$ evaluada en los datos observados $\mathbb{X}$ (valor fijo)
- Estadístico: cualquier función de los datos $T(\mathbb{X})$ => reducción de los datos

Principios de reducción de datos:
- Suficiencia
- Verosimilitud
- Invarianza

Propiedades de los estadísticos $T(\mathbb{X})$:
- Suficiencia → Suficiencia Minimal
- Ancillariedad
- Completitud

Teorema de Factorización de Fisher-Neyman

Teorema de Basu

Teorema de Bahadur

- Estimación puntual
  - Método de Momentos
  - Máxima Verosimilitud

} procedimientos para transformar $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ en $\hat{g}(\theta)$, donde $g(\theta)$ es el parámetro de interés.

2. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Binomila(θ, k) donde $(\theta; k)$ resultan desconocidos.

   (a) Hallar los estimadores de momentos de (θ, k).

   (b) Para una muestra de tamaño $n = 10$ se tiene que $\bar{x} = 1$ y $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 1)^2 = 20$. Son las estimaciones de momentos de los dos parámetros coherentes con el modelo de probabilidad?

$\underset{\sim}{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Binomial(θ, k)

$\boxed{Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \mathbb{E}[X_i] \overset{iid}{=} \mathbb{E}[X] = k\theta \\ \cdot\ Var[X_i] \overset{iid}{=} Var[X] = k\theta(1-\theta) \end{array}\right\} \text{Momentos poblacionales}$$

$$\cdot\ M_1[\underset{\sim}{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \xrightarrow{P} \mathbb{E}_{\theta,k}[X] = k\theta \text{, por LLN. Entonces, } \bar{x} \approx k\theta$$

dato

$$\cdot\ M_2[\underset{\sim}{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \bar{X^2} \xrightarrow{P} \mathbb{E}_{\theta,k}[X^2] = Var[X] + \mathbb{E}[X]^2$$
$$= k\theta(1-\theta) + k^2\theta^2 \Rightarrow \bar{x^2} \approx k\theta(1-\theta) + k^2\theta^2$$

Resolvemos para θ, k:

$$\begin{cases} k\theta = \bar{x} \\ k\theta(1-\theta)+k^2\theta^2 = \overline{x^2} \end{cases} \longrightarrow \bar{x}(1-\theta)+\bar{x}^2 = \overline{x^2}$$

$$\bar{x} - \bar{x}\theta + \bar{x}^2 = \overline{x^2}$$

$$-\bar{x}\theta = \overline{x^2} - \bar{x}^2 - \bar{x}$$

$$\bar{x}\theta = -\overline{x^2} + \bar{x}^2 + \bar{x}$$

$$\theta = \frac{\bar{x}^2 + \bar{x} - \overline{x^2}}{\bar{x}}$$

$$\boxed{S^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}^2 + \bar{x} - \overline{x^2}}{\bar{x}} = \underbrace{\frac{\bar{x} - S^2}{\bar{x}}}$$

$\leftarrow$ V.A

$$\hat{k} = \bar{x}/\hat{\theta} = \bar{x} \cdot \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} - S^2}\right) = \frac{\bar{x}^2}{\bar{x} - S^2}$$

b) $n=10$

$\bar{x} = 1$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - 1)^2 = 20 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10}(x_i^2 - 2x_i + 1) = 20$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{10} x_i + 10 = 20$$

$$10\overline{x^2} - 20\bar{x} + 10 = 20$$

$$10\overline{x^2} - 20 + 10 = 20$$

$$10\overline{x^2} = 30$$

$$\overline{x^2} = 3$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\theta}(\underline{X} = \underline{x}) &= \frac{1+1-3}{1} = -1 \\ \hat{k}(\underline{X} = \underline{x}) &= -1 \end{aligned}\right\} \theta \in [0,1] \text{ y } k > 0 \,?$$

No ocurre, por ende este resultado es incoherente

4. Para los siguientes modelos de probabilidad:

   (a) Poisson: $f(x,\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, con $\lambda \in (0,\infty)$ y $x \geq 0$.

   (b) Exponencial: $f(x,\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}$, con $\lambda \in (0,\infty)$ y $x \geq 0$.

   (c) Truncada en λ: $f(x;\lambda) = \lambda^{-1}e^{1-x/\lambda}$ con $0 < \lambda < x$.

   (d) Gamma: $f(x;\lambda,k) = \lambda e^{-\lambda x}\dfrac{(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}$, con $\lambda > 0$, $k = 2$ (conocido) y $x > 0$.

   Computa en cada caso el estimador de momentos y el estimador máximo verosímil de λ. Sabiendo que el valor del estadístico $\sum_{i=1}^{20} x_i = 25$, computa las estimaciones de momentos y máximo verosímiles relativas a λ en cada caso.

5. Demuestra que los estimadores de los puntos (a) y (b) son UMVUE y que sus ECM convergen a cero cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito (consistencia).

a) $\underline{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+_0$ y $x \in \mathbb{Z}^+$

. $\mathbb{E}_\lambda[X] = \mathbb{V}ar_\lambda[X] = \lambda$

. MM:

$$M_1(\underline{X}) = \bar{x} \xrightarrow{P} \mathbb{E}_\lambda[x] = \lambda$$

∴ para muestra finita, $M_1(\underline{X}) = \bar{x} \approx \lambda$

. MLE:

$$\mathcal{L}(\lambda; \underline{X} = \underline{x}) = f_{\underline{X}}(\underline{x}|\lambda) \overset{iid}{=} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i)!} e^{-\lambda} \lambda^{x_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i)!} e^{-\lambda} e^{x_i \ln\lambda}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i)!}\right) e^{-n\lambda} e^{\ln\lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

$$\ell(\lambda; \underline{X} = \underline{x}) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i)!}\right) - n\lambda + \ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \propto -n\lambda + \ln(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Estadístico suficiente

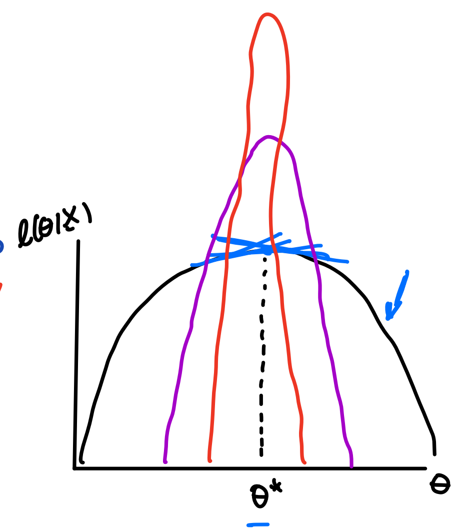
$$\text{CPO: } \frac{\partial}{\partial\lambda} \ell(\lambda; \underline{X} = \underline{x}) = \boxed{-n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}} = -n + \frac{n\bar{x}}{\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \hat{\lambda}_{MLE}}$$

$$\text{CSO: } \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \ell(\lambda; \underline{X} = \underline{x}) = -n\bar{x} \cdot \frac{1}{\lambda^2} < 0 \Rightarrow \ell(\lambda; \underline{X}) \text{ alcanza un máximo en } \lambda = \bar{x}$$

. Un estimador $\hat{g}(\theta)$ es insesgado si: $\mathbb{E}_\theta[\hat{g}(\theta)] = g(\theta)$.

. Algoritmo: 1) Pruebo que $\mathbb{E}_\theta[\hat{g}(\theta)] = g(\theta)$.

2) $\mathbb{V}ar[\hat{g}(\theta)]$ alcanza la cota inferior de Cramer-Rao



$$\text{. CICR: } \mathbb{V}ar_\theta[\hat{g}(\theta)] \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}[\hat{g}(\theta)]\right)^2}{\mathbb{E}_\theta\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_{\underline{X}}(\underline{x};\theta)\right]^2\right)} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}[\hat{g}(\theta)]\right)^2}{\mathbb{E}_\theta\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta;\underline{x})\right]^2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}[\hat{g}(\theta)]\right)^2}{-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ell(\theta|\underline{x})\right]}$$

5) a) $\mathbb{E}_\lambda[\hat{\lambda}_{MLE}] = \mathbb{E}_\lambda[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_\lambda[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}$ es un estimador insesgado de λ

b) $\mathbb{V}ar_\lambda[\hat{\lambda}_{MLE}] = \mathbb{V}ar_\lambda[\bar{x}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar[x_i] = \frac{n.\mathbb{V}ar[x_i]}{n^2} = \frac{\lambda}{n}$

$\longrightarrow$ Numerador de CICR: $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{E}[\hat{\lambda}]\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda\right)^2 = 1$

$\longrightarrow$ Denominador de CICR: $-\mathbb{E}_\lambda\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ell(\lambda;\underline{X})\right] = -\mathbb{E}_\lambda\left[-\frac{1}{\lambda^2}n.\bar{x}\right]$

$$= \frac{1}{\lambda^2} n\,\mathbb{E}_\lambda[\bar{x}]$$

$$\underbrace{= \frac{1}{\lambda^2} n\lambda = \frac{n}{\lambda}}_{i(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow I(\lambda) = n\,i(\lambda) = \frac{n}{\lambda}}$$

CICR $= \frac{1}{n/\lambda} = \frac{\lambda}{n} = \mathbb{V}ar[\hat{\lambda}]$

$\therefore$ Dado que $\hat{\lambda}_{MLE} = \bar{x}$ es un estimador insesgado de λ y su varianza alcanza la CICR $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\lambda}$ es UMVUE

. Un estimador $\hat{g}(\theta)$ es consistente si y solo si: $\hat{g}(\theta) \xrightarrow{P} g(\theta)$ cuando $n\to\infty$.

$\text{ECM}(\hat{g}(\theta), g(\theta)) = \mathbb{E}_\theta\left[(\hat{g}(\theta) - g(\theta))^2\right] = \mathbb{E}_\theta\left[(\hat{g}(\theta) - \mathbb{E}[\hat{g}(\theta)])^2\right]$

$\hookrightarrow \mathbb{E}[\hat{g}(\theta)] = g(\theta)$ (solo porque es insesgado)

$= \mathbb{V}ar_\theta[\hat{g}(\theta)] = \lambda/n$

Si $n\to\infty$, $\text{ECM}(\hat{g}(\theta), g(\theta)) \to 0 \Rightarrow \hat{g}(\theta) \xrightarrow{m.c} g(\theta) \Rightarrow \hat{g}(\theta) \xrightarrow{P} g(\theta)$

$\therefore \hat{g}(\theta)$ es un estimador consistente de $g(\theta)$.

$\longrightarrow$ Solución de solución: dado que $\hat{\lambda}_{MLE}$ es una función de $\bar{x}$ el cual es $\overbrace{\text{completo y suficiente}}^{\text{EFE}}$ y además $\hat{\lambda}_{MLE}$ es insesgado, por el teorema de Lehmann-Scheffé, $\hat{\lambda}_{MLE} = \bar{x}$ es el único estimador UMVUE de λ.