Repaso

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** es un conjunto de elementos $\mathbb{V}$ para el cual existen dos operaciones una llamada suma $(+)$ y la otra llamada producto por escalares, las cuales cumplen:

a) Para todo $u, v, w \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$u + v \in \mathbb{V},\ u + v = v + u,\ \text{ y } (u + v) + w = u + (v + w);$$

b) Existe un único elemento neutro para la suma en $\mathbb{V}$ denotado por 0;

c) Para cada elemento $v \in \mathbb{V}$ existe un inverso aditivo para la suma en $\mathbb{V}:\ -v \in \mathbb{V}$,

d) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{V}$ tenemos que $\alpha v \in \mathbb{V}$ y $\alpha v = v\alpha$;

e) Para todo $v \in \mathbb{V}$ tenemos que $1v = v,\ $ y $0v = 0$;

f) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{V}$ tenemos que $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ y $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;

g) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{V}$ tenemos que $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Espacios vectoriales

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Decimos que un elemento $u \in \mathbb{V}$ es una **combinación lineal** de los elementos $v_1, \ldots, v_n$ en $\mathbb{V}$ si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Espacios vectoriales

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $C = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{V}$ $(m \geq 2)$.

- Decimos que el conjunto C es **linealmente dependiente** (ld) si al menos uno de los elementos de C es una combinación lineal de los demás.

  Es equivalente: existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$, no todos iguales a 0, para los cuales

$$\sum_{i=1}^{m} k_i v_i = \vec{0}$$

- Decimos que el conjunto C es **linealmente independiente** (li) si la única solución de

$$\sum_{i=1}^{m} k_i v_i = \vec{0}$$

  es $k_1 = \cdots = k_m = 0$.

Bases

Definición.

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{V}$. Decimos que B es **base** de $\mathbb{V}$ si B es linealmente independiente y cualquier elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de los elementos de B.

Bases

Definición.

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y B una base de $\mathbb{V}$ de $k-$elementos. Decimos que k es la **dimensión** de $\mathbb{V}$ y notamos $\dim(V) = k$.

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ de $k-$elementos y $v \in \mathbb{V}$. Decimos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ son las **coordenadas de v en la base B** si

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

Notación $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Subespacios

Definición.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Un **subespacio** de $\mathbb{V}$ es un subconjunto no vacío $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ que resulta espacio vectorial con las mismas operaciones suma y multiplicación por un escalar definidas en $\mathbb{V}$.

Subespacios

Teorema.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ es un subespacio si y solo si

1. Es cerrado para la suma: Si $v, w \in \mathbb{W}$ entonces $v + w \in \mathbb{W}$;
2. Es cerrado para la multiplicación por escalares: si $w \in \mathbb{W}$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $kw \in \mathbb{W}$.

Subespacios

Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tal que por lo menos uno de los elementos de S es diferente de 0. Definimos el **espacio generado** por S como

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_m) = \langle v_1, \dots, v_m \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i v_i : k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

y se dice que $v_1, \dots, v_m$ son los **generadores del espacio**.
Observar que $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y que

$$\dim(\langle v_1, \dots, v_m \rangle) \leq m.$$

Más aun,

$$\dim(\langle v_1, \dots, v_m \rangle) = m$$

si y sólo si S es linealmente independiente.

Matrices

Definición.

Una **matriz** A es un tablero rectangular de escalares a_{ij} de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las matrices de $n \times m$ se denota por $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Suma de matrices

Sean A y B dos matrices de $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

La **suma** de A y B se define de la siguiente manera

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Producto por un escalar

El **producto de un escalar** k y una matriz A de $n \times m$, se define de la siguiente manera

$$kA := \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

Propiedades

La matriz de $n \times m$ cuyos elementos son todos nulos se conoce como la matriz nula y se denota por $0_{n\times m}$ (o por 0). Obviamente

$$A + 0 = 0 + A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Propiedad ($\mathbb{R}^{n\times m}$ es un espacio vectorial)**.**

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

i) $A + B = B + A$;
ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
iii) $A + 0 = A$ y $A + (-A) = 0$;
iv) $1A = A$ y $0A = 0$;
v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
vi) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
vii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Base y dimensión

El conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^{n \times m}$. B se denomina la **base canónica** de $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Observación.

$$\dim(\mathbb{R}^{n \times m}) = n \cdot m.$$

Producto de matrices

Definición.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Definimos el **producto de A por B** como la matriz de $n \times q$ cuya entrada ij se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

Producto de matrices

Si denotamos con A_i a la $i-$ésima fila de A y con B^j a la $j-$ésima columna de A tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^q \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n \cdot B^1 & A_n \cdot B^2 & \cdots & A_n \cdot B^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times q}.$$

Observemos que $(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$.

Producto de matrices

Observación.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Entonces el producto de A por B esta definido sólo en el caso que $m = p$.

Observación.

a) El producto de matrices **no es conmutativo**, es decir AB y BA no necesariamente son iguales.

b) $AB = 0$ **no implica** que $A = 0$ o que $B = 0$.

Producto de matrices

Propiedad.

I) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$, entonces
$$(AB)C = A(BC) \quad \text{Ley asociativa;}$$

II) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$, entonces
$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{Ley distributiva por izquierda;}$$

III) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$, entonces
$$(A+B)C = AC + BC \quad \text{Ley distributiva por derecha;}$$

IV) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces
$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

Matriz transpuesta

La **transpuesta** de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

es la matriz que se obtiene poniendo las filas de A como columnas (respetando el orden)

$$A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

En otras palabra si A es una matriz de $n \times m$ entonces A^t es una matriz de $m \times n$ y $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

Matriz transpuesta

Propiedad.

I) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \quad (A^t)^t = A, \quad (kA)^t = kA^t.$$

II) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ entonces

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Matriz transpuesta

Definición.

Una matriz que tiene la misma cantidad de filas que de columnas se denomina **matriz cuadrada**.

Ejemplo 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & e & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada.

Matriz transpuesta

Definición.

Una matriz A se denomina **simétrica** si $A^t = A$.

Ejemplo 2. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica.

Matrices, Sistemas de Ecuaciones Lineales y Determinantes

Maestría en Econometría–Matemática I

1er Trimestre 2023

Modelo de Leontief

Supongamos un sistema económico que tiene n industrias y que posee dos tipos de demanda la externa y la interna. Por ejemplo, si el sistema es un país la demanda externa puede provenir de otro país mientras que la demanda interna es la que se da entre las mismas empresas del país. Supongamos que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la $i-$ésima industria y que a_{ij} representa la demanda interna que la $j-$ésima industria ejerce sobre la $i-$ésima. Más concretamente a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria i que se necesitan para producir una unidad de la industria j. Notemos con x_i la producción de la industria i y supongamos que la producción de cada industria es igual a su demanda. En estas condiciones podemos construir el siguiente sistema

Modelo de Leontief

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= e_1 \\
-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= e_2 \\
&\vdots \\
-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n &= e_n
\end{aligned}$$

Modelo de Leontief

$$\begin{pmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1-a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Sistemas Lineales

Con la notación matricial, el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned}$$

se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

se denomina la **matriz asociada** del sistema. Mientras que la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

se denomina la **matriz ampliada** del sistema.

Sistemas Lineales

Dada una matriz A, el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ se denomina sistema lineal homogéneo.

Teorema.

Sean $v_1, \ldots, v_n$ soluciones del sistema lineal homogéneo $Ax = 0$. Entonces todo vector $v \in \langle v_1, \ldots v_n \rangle$ es también una solución de $Ax = 0$.

Sistemas Lineales

Propiedad.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. El conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo $Ax = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

Sistemas Lineales

Teorema.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, v_0 una solución de $Ax = b$, y W el espacio de soluciones de $Ax = 0$. Entonces v es una solución de $Ax = b$ si y solo si existe $w \in W$ tal que $v = w + v_0$.

Sistemas Lineales

Teorema.

Un sistema $Ax = b$ no tiene soluciones, o tiene una única solución o tiene infinitas soluciones.

Compatibles e incompatibles

Gracias a este ultimo resultado los sistemas de ecuaciones lineales se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden presentar:

- **Sistema compatible** si tiene solución, en este caso además puede distinguirse entre:
  - **Sistema compatible determinado** cuando tiene una única solución.
  - **Sistema compatible indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones.
- **Sistema incompatible** si no tiene solución.

Eliminación de Gauss-Jordan

Dos sistemas lineales se dicen **equivalentes** si sus conjuntos de soluciones son iguales.

Ejemplo 3. Los siguientes sistemas son equivalentes

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Eliminación de Gauss-Jordan

Proposición.

Dado un sistema lineal de ecuaciones, los siguientes cambios en las ecuaciones dan lugar a sistemas equivalentes:

i) Intercambiar dos ecuaciones de lugar;

ii) Multiplicar una ecuación por una constante no nula;

iii) Reemplazar una ecuación por ella misma más un múltiplo de otra.

Eliminación de Gauss-Jordan

Observación.

Sea A la matriz ampliada de un sistema lineal H. Efectuar las operaciones de la proposición anterior sobre las ecuaciones de H equivale a hacerlo sobre las filas de A.

Ejemplo 4. Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1 \end{cases}$$

Eliminación de Gauss-Jordan

Sea $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matriz. Decimos que B es **escalonada** si

1. Las filas nulas están en la parte inferior de la matriz.
2. Si una fila no es nula, entonces el primer elemento (de izquierda a derecha) es 1. Estos se llaman **pivotes**.
3. Los pivotes de las filas superiores están a la izquierda de los pivotes de las filas inferiores.
4. Las columnas que contienen a los pivotes tienen ceros debajo de estos.

Ejemplo 5. Las siguientes matrices son escalonadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eliminación de Gauss-Jordan

Teorema.

Dado un sistema lineal de n ecuaciones con m incógnitas, aplicando los cambios descriptos en la proposición anterior, puede obtenerse un sistema equivalente cuya matriz asociada es escalonada.

Matrices Cuadradas

Recordemos que decimos que una matriz es **cuadrada** si tiene las misma cantidad de columnas que de filas.

Ejemplo 6. Las siguientes son matrices cuadradas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 & -{,}15 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definimos la **diagonal** de A, como el vector $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.
Se llama **traza** de A, denotado $\mathrm{tr}(A)$, al escalar

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Matrices cuadradas

- **Matriz triangular superior**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas

- **Matriz diagonal**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz escalar**: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal tal que $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas

Observación.

Observemos que

- Toda matriz escalar es diagonal;
- Toda matriz diagonal es simétrica;
- La matriz nula es escalar y por lo tanto diagonal y simétrica.

Matrices cuadradas

- **Matriz identidad**: $I_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz escalar tal que $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$.

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Observación.

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- AB y BA están bien definidos;
- $AI_n = A = I_nA$, es decir, la matriz identidad es el neutro para el producto de matrices cuadradas.

Definición.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice **inversible** (o invertible) si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$

Matrices inversibles

Observación.

La matriz B de la definición, si existe, es única. Habitualmente se denota $A^{-1} = B$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto de todas la matrices inversibles en $\mathbb{R}^n$ se denota

$$GL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A \text{ es inversible}\}.$$

Una matriz cuadrada que no es inversible se llama **singular** y una matriz inversible se llama también **no singular**.

Matrices inversibles

Proposición.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

- $I_n \in GL(n)$;
- Si $A \in GL(n)$ entonces $A^{-1} \in GL(n)$;
- Si $A, B \in GL(n)$ entonces $AB \in GL(n)$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- Si $A \in GL(n)$ y $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ entonces el sistema $Ax = b$ tiene una única solución ($x = A^{-1}b$).

Matrices inversibles

Ejemplo 7. Halle, si es posible, A^{-1} en cada uno de los siguientes casos

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rango de una matriz

Definición.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $F_1, \ldots, F_n$ las filas de A. El **rango fila** de A es la dimensión del subespacio generado por las filas de A, es decir

$$\mathrm{rg}_F(A) = \dim(\langle F_1, \ldots, F_n \rangle)$$

Definición.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $C_1, \ldots, C_m$ la filas de A. El **rango columna** de A es la dimensión del subespacio generado por las columnas de A, es decir

$$\mathrm{rg}_C(A) = \dim(\langle C_1, \ldots, C_m \rangle)$$

Rango de una matriz

Ejemplo 8. Halle el rango fila y columna de las siguientes matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

Observación.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Entonces

- $0 \leq \mathrm{rg}_F(A) \leq n$;
- $0 \leq \mathrm{rg}_C(A) \leq m$;
- $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A^t)$.

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Entonces $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A)$.

Rango de una matriz

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Al número $\text{rg}_C(A) = \text{rg}_F(A)$ lo llamaremos **rango** de A y lo denotaremos $\text{rg}(A)$.

Observación.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Entonces $0 \leq \text{rg}(A) \leq \text{mín}\{n, m\}$.