Apunte momentos y FGM - Parte 1

Lara Sánchez Peña

1. Condición de cierre, esperanza y varianza de variables aleatorias discretas

En cada una de las siguientes subsecciones podrá ver cómo calcular los primeros dos momentos no centrados $E(X)$ y $E(X^2)$:

(a) usando la función de probabilidad puntual (PMF)

(b) usando la función generatriz de momentos (MGF)

1.1. Variable aleatoria Bernoulli

La función de probabilidad puntual de $X \sim Be(p)$ es

$$P(X = x) = p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{si } x = 0 \text{ ó } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición de cierre:

$$P(X = 0) + P(X = 1) = p + 1 - p = 1$$

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF

$$E(X) = \sum_{x:p(x)>0} xp(x) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E(X^2) = \sum_{x:p(x)>0} x^2 p(x) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

Entonces,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

(b) Calculemos primero la función generadora de momentos si $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. La función de probabilidad puntual de X está dada por

$$\mathrm{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

para $x = 0, 1$ por lo que la función generatriz de momentos es

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] \\ &= \sum_{x=0}^{1} e^{tx}\mathrm{P}(X = x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} e^{tx}p^x(1-p)^{1-x} \\ &= (1-p) + e^t p \\ &= 1 - p + pe^t \end{aligned}$$

En primer lugar, derivamos $M_X(t) = 1 - p + pe^t$ respecto de t una y dos veces. Luego, evaluamos dichas expresiones en $t = 0$ para obtener los momentos no centrados:

$$M'_X(t) = pe^t \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = p$$
$$M''_X(t) = pe^t \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = p$$

Lo que conduce a que $\text{Var}(X) = p - p^2$

1.2. Variable aleatoria binomial

La función de probabilidad puntual de $X \sim B(n, p)$ es

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición de cierre:

$$p_X(1) + \cdots p_X(2) + \cdots + p_X(n) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + 1 - p)^n = 1$$

donde usamos que $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} = (a+b)^n$, con $a = p$, $b = 1 - p$.

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \underbrace{0 \cdot \frac{n!}{0!(n-0)!} p^0 (1-p)^{n-0}}_{0} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Reescribiendo el factorial $(n-x)!$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x-1+1)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Notemos que, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Sustituimos el índice x por el índice ℓ, de la siguiente manera $\ell = x - 1$. Es decir, como x toma los valores $1, \ldots, n$; entonces ℓ toma los valores $0, \ldots, n-1$. Reescribiendo la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= np \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!((n-1)-\ell)!} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell}}_{=1,\text{ suma PMF de } L \sim Bin(n-1,p)} = np
\end{aligned}$$

Calculemos ahora $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \left(\left(x^2 - x\right) + x\right) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \left(x^2 - x\right) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Usando que:

- si $x = 0$ ó $x = 1$ entonces $x^2 - x = 0$, por lo que la primera sumatoria se puede empezar a sumar desde $x = 2$.
- si $x = 0$ entonces $x = 0$, por lo que la segunda sumatoria se puede empezar a sumar desde $x = 1$.
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$
- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $p^x = p \cdot p^{x-1}$
- $p^x = p^2 \cdot p^{x-2}$
- haciendo los cambios de índices $s = x - 2$ en la primera sumatoria y $\ell = x - 1$ en la segunda sumatoria

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] =& n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x} + np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
=& n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{s=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-s)!s!} p^{s} (1-p)^{n-2-s}}_{=1,\text{ suma PMF de } S \sim Bin(n-2,p)} = np + np \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-\ell)!\ell!} p^{\ell} (1-p)^{n-1\ell}}_{=1,\text{ suma PMF de } L \sim Bin(n-1,p)} = np \\
=& n(n-1)p^2 + np.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$\text{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

(b) En este caso mostramos cómo obtener la función generadora de momentos. No obstante, también podemosusar una propiedad que explica por qué la MGF de $X \sim Bin(n, p)$ tiene esta expresión:

$$M(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

Si $X \sim Bin(n, p)$, se puede escribir a $X = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, donde $A_i \sim_{iid} Be(p)$.

En ese caso vale que $M_X(x) = M_{A_1+\cdots+A_n(x)} \underbrace{=}_{A_i \text{ indep}} \prod_{i=1}^{n} M_{A_i}(x) = M_{A_1}(x) \cdots M_{A_n}(x) \underbrace{=}_{A_i\ id} (M_{A_1}(x))^n$

Por eso la MGF de una v.a. $X \sim Bin(n, p)$ es la MGF de una v.a. $Y \sim Be(p)$ elevada a la n.

Ahora sí, mostremos por definición cómo obtener la MGF de $X \sim Bin(n, p)$.

$$\begin{aligned} M(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\ M(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(pe^t\right)^x(1-p)^{n-x} \\ &= \left(pe^t+1-p\right)^n \end{aligned}$$

donde en el último paso se usa la regla del binomio:

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x} = (a+b)^n$$

Por lo tanto, para obtener los primeros dos momentos, derivamos una y dos veces respecto de t y luego evaluamos en $t = 0$.

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= n\left(pe^t+1-p\right)^{n-1}\cdot pe^t \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = np \\ M''_X(t) &= n\left(pe^t+1-p\right)^{n-1}\cdot pe^t + n(n-1)\left(pe^t+1-p\right)^{n-2}\cdot p^2e^{2t} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = np+n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Var}(X) = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-p)$

1.3. Variable aleatoria geométrica

La función de probabilidad puntual de $X \sim Ge(p)$ es

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{si } x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición de cierre:

- Si $p = 1$ entonces $p_X(1) = 1$ porque el evento ocurre con certeza.
- Si $p < 1$, entonces:

$$p_X(1) + p_X(2) + \cdots = \sum_{x=1}^{+\infty}(1-p)^{x-1}p = p\sum_{x=0}^{+\infty}(1-p)^x = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} = p\cdot\frac{1}{p} = 1$$

donde usamos que $a = 1-p < 1$, que $\sum_{x=1}^{+\infty} a^{x-1} = \sum_{x=0}^{+\infty} a^x$, porque si x toma los valores naturales desde 1..., entonces $x-1$ toma los valores desde 0 y $\sum_{x=0}^{+\infty} a^x = \frac{1}{1-a}$, ver apéndice, resultado 0 para ver la demostración.

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF. Para poder demostrar cuánto vale su esperanza, usamos el resultado 1 del apéndice con $a = 1-p$.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p(1-p)^{x-1} \\
&= p \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\
&= p \frac{1}{[1-(1-p)]^2} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

Para poder demostrar cuánto vale su varianza, usamos el resultado 2 del apéndice con $a = 1 - p$.

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(1-p)^{x-1} \\
&= p \sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-p)^{x-1} \\
&= p \frac{1+1-p}{[1-(1-p)]^3} \\
&= \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,
$\text{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

(b) Consideramos la MGF de $X \sim Ge(p)$,

$$
M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}
$$

Para obtener los primeros dos momentos, derivamos una y dos veces respecto de t y luego evaluamos en $t = 0$.

$$
\begin{aligned}
M_X'(t) &= \frac{pe^t[1 - \cancel{(1-p)e^t} + \cancel{(1-p)e^t}]}{(1-(1-p)e^t)^2} \Rightarrow M_X'(0) = E(X) = \frac{1}{p} \\
M_X''(t) &= \frac{pe^t\left[\left(1-(1-p)e^t\right)^2 + 2(1-p)(1-(1-p)e^t)\right]}{(1-(1-p)e^t)^4} \Rightarrow M_X''(0) = E(X^2) = \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,
$\text{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

1.4. Variable aleatoria binomial negativa

Esperanza de una variable aleatoria con Distribución Binomial Negativa BN(r, p):

$$
p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & \text{si } x = r, r+1, r+2, r+3, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

- Si $p = 1$ entonces $p_X(r) = 1$ porque los éxitos ocurren con certeza en las primeras r repeticiones del experimento.

- Si $p < 1$, entonces:

Veamos que se cumple la condición de cierre, note que en este caso vamos a demostrarlo de dos maneras, ambas tienen una dificultad mayor a la promedio (no se espera que puedan hacer esto en un examen).

$$p_X(r) + p_X(r+1) + \cdots = \sum_{x=r}^{+\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} = p^r \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{x+r-1}{r-1} (1-p)^x = p^r \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{x+r-1}{x} (1-p)^x$$

Para la **forma 1**, vamos a reescribir el coeficiente binomial de la última expresión:

$$\binom{x+r-1}{x} = \binom{x+r-1}{r-1} = \frac{(x+r-1)!}{(r-1)!x!} = \frac{(x+r-1)(x+r-2)\cdots r}{x!}.$$

Hay que elegir $r-1$ éxitos en $x+r-1$ experimentos y no en $x+r$ experimentos porque el último experimento, el $x+r$-ésimo, es un éxito por definición.

Esta cantidad puede ser escrita alternativamente de la siguiente manera, lo que explica el nombre de la distribución, "binomial negativa".

$$\begin{aligned}
\frac{(x+r-1)\cdots r}{x!} &= (-1)^x \frac{(-r)(-r-1)(-r-2)\cdots(-r-x+1)}{x!} \\
&= (-1)^x \frac{(-r)(-r-1)(-r-2)\cdots(-r-x+1)\cdots(-3)(-2)(-1)}{x!(-r-x)!} = (-1)^x \binom{-r}{x}
\end{aligned}$$

Notemos que la expresión anterior se puede reescribir:

$$\begin{aligned}
p_X(r) + p_X(r+1) + \cdots &= \sum_{x=r}^{+\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} = p^r \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{x+r-1}{x} (1-p)^x \\
&= p^r \sum_{x=0}^{+\infty} (-1)^x \binom{-r}{x} (1-p)^x = p^r \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{-r}{x} [-(1-p)]^x \\
&= p^r \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{-r}{x} [-(1-p)]^x \cdot 1^{-r-x} = p^r (1-(1-p))^{-r} = p^r \cdot p^{-r} = 1
\end{aligned}$$

forma 2 para ver que se cumple la condición de cierre:

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. Si $|x| < 1$, entonces podemos encontrar la expansión de series de potencias para $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$$

Es decir, si $|x| < 1$, se tiene que

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$$

Para demostrar que se cumple la condición de cierre tenemos que derivar a ambos lados de la igualdad $r-1$ veces. Hay detalles técnicos de por qué del lado derecho las operaciones suma y tomar derivada se pueden intercambiar, exceden el contenido del curso.

Derivando $r-1$ veces a $f(x)$ respecto de x, obtenemos:

- $f'(x) = (1-x)^{-2}$
- $f''(x) = 2 \cdot 1(1-x)^{-3}$
- $f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1(1-x)^{-4}$
- $f^{(r-1)}(x) = (r-1)!(1-x)^{-r}$

Derivamos la serie de potencias del lado derecho $r-1$ veces térmono por término. Notemos que al derivar $r-1$ veces los términos x^j con $j < r-1$ tienen $(r-1)-$derivada igual a 0.

Si $j \geq r-1$ entonces si derivamos x^j un total de $(r-1)$ veces, la derivada es $j(j-1)\cdots(x-j+1)x^{k-j+1}$.

En la expresión superior $j = k-1$, entonces, si $k \geq r$ vale que la $(r-1)$derivada de x^{k-1} es igual a

$$(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)x^{k-r} = \frac{(k-1)!}{(k-r)!}x^{k-r}$$

Concluimos que

$$(r-1)!(1-x)^{-r} = f^{(r-1)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(k-r)!}x^{k-r}.$$

Dividiendo a ambos lados por $(r-1)!(1-x)^{-r}$, obtenemos que

$$1 = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1}(1-x)^r x^{k-r}$$

Reemplazando $x = 1-p$ y $1-x = p$, obtenemos que:

$$1 = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$$

Reemplazando k por x

$$1 = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$$

Lo que muestra la condición de cierre.

(a)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=r}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \\
&= \sum_{x=r}^{\infty} \frac{x(x-1)!r}{r(r-1)!(x-r)!} p^r (1-p)^{x-r} \\
&= r \sum_{x=r}^{\infty} \frac{x!}{r!(x-r)!} p^r (1-p)^{x-r} \\
&= \frac{r}{p} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x}{r} p^{r+1} (1-p)^{x-r} \\
&= \frac{r}{p} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x+1-1}{r+1-1} p^{r+1} (1-p)^{x+1-(r+1)} \\
&= \frac{r}{p} \underbrace{\sum_{m=r+1}^{\infty} \binom{m-1}{r+1-1} p^{r+1} (1-p)^{m-(r+1)}}_{=1,\text{ suma de PMF de } M \sim BN(r+1,p)} \qquad \text{donde } m = x+1 \\
&= \frac{r}{p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=r}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \\
&= \sum_{x=r}^{\infty} (x^2 + x) \cdot p(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} - \underbrace{\sum_{x=r}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}}_{\frac{r}{p}} \\
&= \sum_{x=r}^{\infty} \frac{(x+1)x(x-1)!r(r+1)}{r(r+1)(r-1)!(x-r)!} p^r (1-p)^{x-r} - \frac{r}{p} \\
&= r(r+1) \sum_{x=r}^{\infty} \frac{(x+1)!}{(r+1)!(x-r)!} p^r (1-p)^{x-r} - \frac{r}{p} \\
&= \frac{r(r+1)}{p^2} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x+1}{r+1} p^{r+2} (1-p)^{x-r} - \frac{r}{p} \\
&= \frac{r(r+1)}{p^2} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x+2-1}{r+2-1} p^{r+1} (1-p)^{x+2-(r+2)} - \frac{r}{p} \\
&= \frac{r(r+1)}{p^2} \underbrace{\sum_{m=r+2}^{\infty} \binom{m-1}{r+2-1} p^{r+2} (1-p)^{m-(r+2)}}_{=1,\text{ suma de PMF de } M \sim BN(r+2,p)} - \frac{r}{p} \qquad \text{donde } m = x+2 \\
&= \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} \\
&= \frac{r(1-p)}{p^2}
\end{aligned}
$$

(b) En este caso no calculamos la función generadora de momentos, pero usamos una propiedad que explica por qué la MGF de $X \sim BN(r,p)$ tiene esta expresión:

$$
M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^r
$$

Si $X \sim BN(r,p)$, se puede escribir a $X = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$, donde $A_i \sim_{iid} Ge(p)$.

En ese caso vale que $M_X(x) = M_{A_1+\cdots+A_r(x)} \underbrace{=}_{A_i \text{ indep}} \prod_{i=1}^{n} M_{A_i}(x) = M_{A_1}(x)\cdots M_{A_r}(x) \underbrace{=}_{A_i\ id} (M_{A_1}(x))^n$

Por eso la MGF de una v.a. $X \sim BN(r,p)$ es la MGF de una v.a. $Y \sim Ge(p)$ elevado a la r.

Por lo tanto, para obtener los primeros dos momentos, derivamos una y dos veces respecto de t y luego evaluamos en $t = 0$.

$$M'_X(t) = r\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^{r-1} \cdot \frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2} \Rightarrow M'_X(0) = \frac{r}{p}$$

$$M''_X(t) = r(r-1)\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^{r-2} \cdot \frac{\left(pe^t\right)^2}{(1-(1-p)e^t)^4} + r\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^{r-1} \cdot \frac{pe^t\left[\left(1-(1-p)e^t\right)^2 + 2(1-p)(1-(1-p)e^t)\right]}{(1-(1-p)e^t)^4}$$

$$\Rightarrow M''_X(0) = \frac{r^2+r-rp}{p^2}$$

1.5. Variable aleatoria Hipergeométrica $H(n,r,m)$:

$$P(X=x) = p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} & \text{para } x = 0,1,\ldots,r \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición de cierre:

$$p_X(0) + \cdots + p_X(r) = \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} = \frac{1}{\binom{n}{m}} \underbrace{\sum_{x=0}^{r} \binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}_{=\binom{n}{m}} = 1$$

Donde usamos (no probamos) la identidad de Vandermonde para números combinatorios: hacer click aquí.

(a)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{r} x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{r} x \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} \\ &= \frac{m \cdot r}{n} \sum_{x=1}^{r} \frac{\binom{r-1}{k-1}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n-1}{m-1}} \\ &= \frac{m \cdot r}{n} \underbrace{\sum_{s=0}^{r-1} \frac{\binom{r-1}{s}\binom{n-r}{m-1-s}}{\binom{n-1}{m-1}}}_{=1 \text{ suma de PMF de } S\sim H(n-1,r-1,m-1)} \qquad \text{donde } s = k-1 \\ &= \frac{m \cdot r}{n} \end{aligned}$$

ya que $x\binom{r}{x} = r\binom{r-1}{x-1}$ y $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{x=0}^{r} x^2 \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} = \sum_{x=1}^{r} x^2 \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} \\
&= \sum_{x=1}^{r} (x^2 - x + x) \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} \\
&= \sum_{x=2}^{r} x(x-1) \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} - \sum_{x=0}^{r} x \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} \\
&= \sum_{x=2}^{r} x(x-1) \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} - \underbrace{\sum_{x=0}^{r} x \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}}}_{\frac{m\cdot r}{n}} \\
&= m(m-1) \sum_{x=2}^{r} x(x-1) \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{m(m-1)\binom{n}{m}} - \frac{m \cdot r}{n} \\
&= \sum_{x=2}^{r} \frac{r(r-1)\binom{r-2}{x-2}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} - \frac{m \cdot r}{n} \\
&= \frac{r(r-1)m(m-1)}{n(n-1)} \underbrace{\sum_{x=2}^{r} \frac{\binom{r-2}{x-2}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n-2}{m-2}}}_{=1} - \frac{m \cdot r}{n} \\
&= \frac{mr}{n}\left(\frac{(m-1)(r-1)}{n-1} + 1\right)
\end{aligned}
$$

donde usamos que

- $x(x-1)\binom{r}{x} = r(x-1)\binom{r-1}{x-1} = r(r-1)\binom{r-2}{x-2}$
- $m(m-1)\binom{n}{m} = n(x-1)\binom{n-1}{m-1} = n(n-1)\binom{n-2}{m-2}$

Entonces, se tiene que:

$$
\text{Var}(X) = \frac{mr}{n}\left(\frac{(m-1)(r-1)}{n-1} + 1 - \frac{mr}{n}\right)
$$

(b) $M_X(t) = \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} e^{tx}$

$$
\begin{aligned}
M_X'(t) &= \sum_{x=0}^{r} x \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} e^{tx} \Rightarrow M_X'(0) = E(X) = \sum_{x=0}^{r} x \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} \\
M_X''(t) &= \sum_{x=0}^{r} x^2 \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}} e^{tx} \Rightarrow M_X''(0) = E(X^2) = \sum_{x=0}^{r} x^2 \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}}
\end{aligned}
$$

Notar que en ambos casos son las sumas calculadas anteriormente.

1.6. Variable aleatoria Poisson

Esperanza de una Variable Aleatoria con Distribución Poisson $Poi(\lambda)$:

$$
p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots
$$

Ver que se cumple la condición de cierre surge de usar que se puede escribir a e^{λ} como una serie de potencias, es decir:

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Entonces

$$p_X(0) + p_X(1) + \cdots = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}}_{=e^{\lambda}} = 1$$

(a)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s}{s!} \qquad \text{donde } s = x-1 \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} (x-1+1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} 1 \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s}{s!} \qquad \text{donde } s = x-1 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

Entonces $Var(X) = \lambda + \lambda^2 - (E(X))^2 = \lambda$

(b)

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!} = e^{\lambda e^t} e^{-\lambda} = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

donde usamos que

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{a^x}{x!} = e^a$$

$$M'_X(t) = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t - 1)} \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = \lambda \cdot e^0 = \lambda$$
$$M''_X(t) = \left[\lambda e^t + \lambda^2 e^{2t}\right] \cdot e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = \left[\lambda + \lambda^2\right] \cdot e^0 = \lambda + \lambda^2$$

2. Apéndice

2.1. Resultado 0:

Sumatorias útiles

- $\sum_{x=0}^{n} a^x = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ Si $a \neq 1$
- $\sum_{x=1}^{n} a^x = a \sum_{x=1}^{n} a^{x-1} = a \sum_{x=0}^{n-1} a^x = \frac{a(1-a^n)}{1-a} = \frac{a-a^{n+1}}{1-a}$
- $\sum_{x=m}^{n} a^x = a^m \sum_{x=m}^{n} a^{x-m} = a^m \sum_{x=0}^{n-m} a^x = \frac{a^m(1-a^{n-m+1})}{1-a} = \frac{a^m - a^{n+1}}{1-a}$
- $\sum_{x=0}^{\infty} a^x = \frac{1}{1-a}$ Si $|a| < 1$
- $\sum_{x=1}^{\infty} a^x = a \sum_{x=1}^{\infty} a^{x-1} = a \sum_{x=0}^{\infty} a^x = \frac{a}{1-a}$
- $\sum_{x=m}^{\infty} a^x = a^m \sum_{x=m}^{\infty} a^{x-m} = a^m \sum_{x=0}^{\infty} a^x = \frac{a^m}{1-a}$
- $\sum_{x=0}^{\infty} a^{xr} = \sum_{x=0}^{\infty} (a^r)^x = \frac{1}{1-a^r}$
- $\sum_{x=m}^{\infty} a^{xr} = a^{mr} \sum_{x=0}^{\infty} a^{xr} = a^{mr} \sum_{x=0}^{\infty} (a^r)^x = \frac{a^{mr}}{1-a^r}$

Demostramos 3 casos, las demostraciones del resto siguen una intuición similar.

- Veamos cuánto vale $\sum_{x=0}^{n} a^x$.

  Llamamos:

$$S_n = \sum_{x=0}^{n} a^x = 1 + a + a^2 + ... + a^n$$

  Consideramos:

$$(1-a)S_n = S_n - aS_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n - (a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1})$$
$$(1-a)S_n = 1 - a^{n+1} \Longrightarrow \boxed{S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \sum_{x=0}^{n} a^x}$$

- Veamos cuánto vale $\sum_{x=1}^{n} a^x$.

$$\sum_{x=1}^{n} a^x = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = a(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$
$$= a\sum_{x=0}^{n-1} a^x = a\frac{1 - a^{n+1-1}}{(1-a)}$$

$$\boxed{\sum_{x=1}^{n} a^x = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}}$$

- Veamos cuánto vale $\sum_{x=0}^{\infty} a^x$

$$S = \sum_{x=0}^{\infty} a^x = 1 + a + a^2 + \dots$$
$$aS = a\sum_{x=0}^{\infty} a^x = a + a^2 + a^3 + \dots$$
$$(1-a)S = 1$$

$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty} a^x = \lim_{N\to\infty} \sum_{x=0}^{N} a^x = \frac{1}{1-a}} \quad \text{Si } a \in (-1, 1)$$

2.2. Resultado 1

Supongamos que queremos calcular $\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a^x = \frac{a}{(1-a)^2}$ ó $\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a^{x-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$

Se puede hacer de dos formas:

Forma 1:

Notamos que

$$\sum_{x=0}^{\infty} a^x = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} a^x$$

Recordamos que

$$\sum_{x=0}^{\infty} a^x = \frac{1}{1-a}$$

Derivando término a término se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{x=1}^{\infty} a^x\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{x=0}^{\infty} a^x\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

Por lo que

$$\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a^{x-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a^{x} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Donde el segundo renglón se obtiene de multiplicar el primer renglón por a a ambos lados de la ecuación.

Forma 2:

Consideremos $\sum_{x=1}^{\infty} xa^{x-1} = 1 + 2a + 3a^2 + \cdots$

Podemos reordenar la suma de la siguiente manera:

$$\sum_{x=1}^{\infty} xa^{x-1} =$$

$$\underbrace{1 + a + a^2 + \cdots}_{\sum_{x=0}^{\infty} a^x} + \underbrace{a + a^2 + \cdots}_{\sum_{x=1}^{\infty} a^x} + \underbrace{a^2 + \cdots}_{\sum_{x=2}^{\infty} a^x} + \underbrace{\cdots}_{\sum_{x=3}^{\infty} a^x + \sum_{x=4}^{\infty} a^x + \cdots}$$

Notando que si tenemos

$$\sum_{x=r}^{\infty} a^x = a^r \sum_{x=0}^{\infty} a^x,$$

es decir, se puede sacar a^r de factor común podemos reescribir la expresión anterior:

$$\sum_{x=1}^{\infty} xa^{x-1} = 1 \sum_{x=0}^{\infty} a^x + a \sum_{x=0}^{\infty} a^x + a^2 \sum_{x=0}^{\infty} a^x + \cdots$$

Por lo tanto

$$\sum_{x=1}^{\infty} xa^{x-1} = \sum_{x=0}^{\infty} a^x \cdot \sum_{x=0}^{\infty} a^x$$

Es decir

$$\sum_{x=1}^{\infty} xa^{x-1} = \left(\sum_{x=0}^{\infty} a^x \right)^2 = \frac{1}{(1-a)^2}$$

Por lo tanto

$$\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a^x = a \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a^{x-1} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

2.3. Resultado 2

Supongamos que queremos calcular $\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot a^x = \frac{a(1+a)}{(1-a)^3}$ ó $\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot a^{x-1} = \frac{1+a}{(1-a)^3}$

Recordamos que

$$\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a^x = a \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a^{x-1} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Derivando término a término se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{x=1}^{\infty} xa^x \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{a}{(1-a)^2} \right)$$

Por lo que

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot a^{x-1} = \frac{1+a}{(1-a)^3}$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot a^{x} = \frac{a(1+a)}{(1-a)^2}$$

Donde el segundo renglón se obtiene de multiplicar el primer renglón por a a ambos lados de la ecuación.

3. Resumen de las v.a. más usadas

Distribution	PMF / PDF	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{Var}[X]$	$M_X(s)$
Bernoulli	$p_X(1) = p$ and $p_X(0) = 1-p$	p	$p(1-p)$	$1-p+pe^s$
Binomial	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pe^s)^n$
Geometric	$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$
Poisson	$p_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^s-1)}$
Gaussian	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}$
Exponential	$f_X(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - s}$
Uniform	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{sb}-e^{sa}}{s(b-a)}$