Soluciones Práctica 4 Bis

1. Ejercicio 1

a

Para que $f_X(x) = c \cdot (1 - x^2) \cdot 1_{(0;1)}(x)$ resulte una densidad se tiene que verificar que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot (1 - x^2) \cdot 1_{(0;1)}(x)\, dx = \int_{0}^{1} c \cdot (1 - x^2)\, dx = c \int_{0}^{1} 1 - x^2\, dx = c \cdot \left(x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 \right)$$
$$= c \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3\right) - \left(0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) \right] = c \cdot \frac{2}{3} = 1,$$

vemos entonces que $c = 3/2$.

b

Calculemos la distribución acumulada de X para $x \in (0;1)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{3}{2} \cdot (1 - t^2)\, dt = \frac{3}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^x \right)$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \left[\left(x - \frac{1}{3} \cdot x^3\right) - \left(0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) \right] = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot x^3 + x \right) = -\frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x.$$

Queda que la distribución acumulada será:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

c

Si llamamos N a el número de botellas (entre las 10) que tienen un porcentaje de alcohol menor al 50 %, se tiene entonces que $N \sim Bi(10; p)$ con

$$p = P(X \leq 0{,}5) = F_X(0{,}5) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}6875,$$

luego se concluye $N \sim Bi(10; 0{,}6875)$

2. Ejercicio 2

$$X = \text{“}\textit{Precio promedio semanal (en dólares)}\text{”} \sim N(30; 8{,}2^2)$$

a

$$\begin{aligned} P(40 \leq X) &= P\left(\frac{40-30}{8{,}2} \leq \frac{X-30}{8{,}2}\right) = P(1{,}219512 \leq Z) \\ &= 1 - F_Z(1{,}219512) = 1 - 0{,}888675 = 0{,}111325 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} P(X \leq 20) &= P\left(\frac{X-30}{8{,}2} \leq \frac{20-30}{8{,}2}\right) = P(Z \leq -1{,}219512) \\ &= F_Z(-1{,}219512) = 0{,}111325 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} & P(x \leq X) = 0{,}1 \\ \iff & P\left(\frac{x-30}{8{,}2} \leq Z\right) = 0{,}1 \\ \iff & 1 - P\left(Z \leq \frac{x-30}{8{,}2}\right) = 0{,}1 \\ \iff & F_Z\left(\frac{x-30}{8{,}2}\right) = 0{,}9 \\ \iff & \frac{x-30}{8{,}2} = 1{,}281552 \\ \iff & x = 1{,}281552 \cdot 8{,}2 + 30 = 40{,}50872 \end{aligned}$$

d

El supuesto de normalidad es relativamente complejo de asumir. Pero si nos focalizamos en el aspecto específico de la simetría, en este caso vemos que no hay mayores problemas pues, en base al inciso anterior, el máximo precio entre el 10 % de las acciones más baratas sería $30 - (40{,}50872 - 30) = 30 - 10{,}50872$ y da como resultado un numero positivo.

e

En este caso suponer normalidad en los precios de las acciones sería inapropiado pues $10 - 10{,}50872 < 0$.

3. Ejercicio 3

Tenemos que $ln(X) \sim (9{,}8; 0{,}4^2)$ con

$$X = \text{“}\mathit{Ingreso\ en\ Argentina\ durante\ el}\ 2017\text{”}$$

a

Los deciles serán 9 ingresos que llamaremos $d_1, \ldots, d_9$ los cuales funcionan como valores de corte para dividir a los ingresos del 2017, ordenados de manera ascendente, en 10 grupos de aproximadamente igual tamaño. Por

ejemplo, d_1 debe ser un ingreso tal que aproximadamente el 10 % de los ingresos más bajos se encuentren por debajo de este valor, es decir $P(X \leq d_1) = 0{,}1$.
Aplicando logaritmo y teniendo en cuenta que es una función monótona creciente:

$$\begin{aligned}
& P(X \leq d_1) = 0{,}1 \\
\iff & P(ln(X) \leq ln(d_1)) = 0{,}1 \\
\iff & P\left(Z \leq \frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = 0{,}1 \\
\iff & F_Z\left(\frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = 0{,}1 \\
\iff & \frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4} = -1{,}281552 \\
\iff & ln(d_1) = -1{,}281552 \cdot 0{,}4 + 9{,}8 \\
\iff & d_1 = e^{9{,}287379} = 10800{,}84
\end{aligned}$$

Repitiendo estos pasos para calcular $P(X \leq d_i) = 0{,}1 \cdot i$ con $2 \leq i \leq 9$

$$\begin{aligned}
d_2 &= 12878{,}98 \\
d_3 &= 14621{,}38 \\
d_4 &= 16295{,}78 \\
d_5 &= 18033{,}74 \\
d_6 &= 19957{,}07 \\
d_7 &= 22242{,}5 \\
d_8 &= 25251{,}69 \\
d_9 &= 30110{,}24
\end{aligned}$$

b

Decil 4 en adelante.

c

Decil 1 a 4.

d

Por debajo del decil 1.

e

$$\begin{aligned}
P(15000 \leq X) &= P(ln(15000) \leq ln(X)) \\
&= P\left(\frac{9{,}615805 - 9{,}8}{0{,}4} \leq \frac{ln(X) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = P(-0{,}4604875 \leq Z) \\
&= 1 - F_Z(-0{,}4604875) = 1 - 0{,}3225832 = 0{,}6774168
\end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}
P(X \leq 6000) &= P(ln(X) \leq ln(6000)) \\
&= P\left(\frac{ln(X) - 9{,}8}{0{,}4} \leq \frac{8{,}699515 - 9{,}8}{0{,}4}\right) = P(Z \leq -2{,}751213) \\
&= F_Z(-2{,}751213) = 0{,}002968751
\end{aligned}$$

4. Ejercicio 4

Consideramos las variables:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Si la proyección 1 es precisa.} \\ 2 & \text{Si la proyección 2 es precisa.} \end{cases}$$
$$Y = \text{“}Ventas\ durante\ el\ próximo\ trimestre\ (en\ millones\ USD)\text{”}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
X &\sim Bernoulli(0{,}5) \\
Y \mid X = 1 &\sim N(325; 60^2) \\
Y \mid X = 2 &\sim N(300; 50^2)
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
P(350 \leq Y \mid X = 1) &= P\left(\frac{350 - 325}{60} \leq Z\right) \\
&= 1 - P(Z \leq 0{,}4166667) \\
&= 1 - 0{,}6615389 = 0{,}3384611
\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
P(350 \leq Y \mid X = 2) &= P\left(\frac{350 - 300}{50} \leq Z\right) \\
&= 1 - P(Z \leq 1) \\
&= 1 - 0{,}8413447 = 0{,}1586553
\end{aligned}$$

c

Usando Bayes y Ley de probabilidad total

$$\begin{aligned}
P(X = 1 \mid 350 \leq Y) &= \frac{P(350 \leq Y \mid X = 1) \cdot P(X = 1)}{P(350 \leq Y \mid X = 1) \cdot P(X = 1) + P(350 \leq Y \mid X = 2) \cdot P(X = 2)} \\
&= \frac{0{,}3384611 \cdot 0{,}5}{0{,}3384611 \cdot 0{,}5 + 0{,}1586553 \cdot 0{,}5} \\
&= 0{,}6808488
\end{aligned}$$

d

Usando Bayes y Ley de probabilidad total

$$\begin{aligned} P(X=2 \mid 350 \leq Y) &= \frac{P(350 \leq Y \mid X=2) \cdot P(X=2)}{P(350 \leq Y \mid X=1) \cdot P(X=1) + P(350 \leq Y \mid X=2) \cdot P(X=2)} \\ &= \frac{0{,}1586553 \cdot 0{,}5}{0{,}3384611 \cdot 0{,}5 + 0{,}1586553 \cdot 0{,}5} \\ &= 0{,}3191512 \end{aligned}$$

5. Ejercicio 5

Definimos

$$X = \text{“}Oferta\ de\ mi\ competidor\text{”} \sim U(10000; 15000)$$

a

Para que mi oferta de \$12000 sea aceptada, mi competidor debe ofertar menos que esa cantidad:

$$P(X \leq 12000) = \int_{10000}^{12000} \frac{1}{15000-10000} dt = \int_{10000}^{12000} \frac{1}{5000} = 0{,}4$$

b

Para que mi oferta de \$14000 sea aceptada, mi competidor debe ofertar menos que esa cantidad:

$$P(X \leq 14000) = \int_{10000}^{14000} \frac{1}{5000} = 0{,}8$$

c

Teniendo en cuenta que mi competidor ofrece como máximo \$15000, cualquier suma superior a esa cantidad me aseguraría apoderarme de la parcela. Entonces hacer una oferta de \$15000 me aseguraría con probabilidad 1 no perderla.

d

Notemos que ofertar una cantidad mayor a \$15000 sería resignar beneficio, pues mi competidor no ofertará más de esa cantidad, por lo que no hay necesidad de que yo lo haga. Luego, en vistas de optimizar el beneficio, la cantidad c ofertada deberá estar entre \$10000 y \$15000.
Si llamamos c a la cantidad ofertada, la ganancia será:

$$G = \begin{cases} 16000 - c & \text{Si } X \leq c \\ 0 & \text{Si } c < X \end{cases}$$

entonces

$$E(G) = \sum_{k \in R_G} k \cdot P(G=k) = 0 \cdot P(c \leq X) + (16000-c) \cdot P(c \geq X) = (16000-c) \cdot \frac{c-10000}{5000}.$$

Se puede ver que la esperanza de la ganancia se maximiza cuando $c = 13000$. Entonces, si bien ofrecer 15000 me aseguraría obtener la parcela y posteriormente obtener una diferencia de 1000 al venderla por 16000, dependiendo del riesgo que uno esté dispuesto a tomar, se podría considerar ofrecer una cantidad de dinero entre 13000 y 15000. En ese espectro de posibilidades, cuanto menor sea la oferta, mayor será el riesgo de no obtener la parcela, pero a su vez sería mayor la ganancia obtenida. Lo relevante es notar que si a uno se le presentará esta situación en reiteradas ocasiones y uno contara con un capital abundante, entonces lo ideal sería ofrecer 13000 sistematicamente.

6. Ejercicio 6

Calculemos primero la función de distribución acumulada de $Y = X_{\text{máx}}$

$$\begin{aligned} P\left(X_{\text{máx}} \leq x\right) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\ &\underbrace{=}_{X_i \text{ indep}} P(X_1 \leq x) \ldots P(X_n \leq x) \underbrace{=}_{X_i \text{ id}} P(X \leq x)^n. \end{aligned}$$

Ahora

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$$

Luego

$$P\left(X_{\text{máx}} \leq x\right) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & x \geq \theta. \end{cases}$$

$$f_{X_{\text{máx}}}(x) = nx^{n-1}\frac{1}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(x).$$

Entonces

$$E(X_{\text{máx}}) = \int_0^\theta nx^n \frac{1}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta,$$

$$E(X_{\text{máx}}^2) = \int_0^\theta nx^{n+1}\frac{1}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n}\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

y

$$Var(X_{\text{máx}}) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

Calculemos $P(X_{\text{máx}} > a\theta)$ con $a < 1$.

$$P(X_{\text{máx}} > a\theta) = \int_{a\theta}^\theta \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{x^n}{\theta^n}\Big|_{a\theta}^\theta = 1 - \frac{(a\theta)^n}{\theta^n} = 1 - a^n.$$

7. Ejercicio 7

$$\begin{aligned} F_{\hat{\theta_n}}(u) &= P\left(\hat{\theta_n} \leq u\right) \\ &= 1 - P\left(\hat{\theta_n} \geq u\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P\left(X_i \geq u\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 \geq u\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - P\left(X_1 \leq u\right)\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{u-\theta}{1-\theta}\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{1-u}{1-\theta}\right)^n \end{aligned}$$

Para calcular la esperanza y la varianza, calculamos primero la densidad.

$$f_{\hat{\theta}_n}(u) = n\frac{(1-u)^{n-1}}{(1-\theta)^n}$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\theta_n}\right) &= \int_\theta^1 un\frac{(1-u)^{n-1}}{(1-\theta)^n}du \\
&= \left[\frac{-u(1-u)^n}{(1-\theta)^n}\right]_\theta^1 + \int_\theta^1 \frac{(1-u)^n}{(1-\theta)^n}du \\
&= 0 + \frac{\theta(1-\theta)^n}{(1-\theta)^n} - \left[\frac{(1-u)^{n+1}}{(1-\theta)^n(n+1)}\right]_\theta^1 \\
&= \theta + \frac{(1-\theta)}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\theta_n^2}\right) &= \int_\theta^1 u^2 n\frac{(1-u)^{n-1}}{(1-\theta)^n}du \\
&= \left[\frac{-u^2(1-u)^n}{(1-\theta)^n}\right]_\theta^1 + 2\int_\theta^1 \frac{u(1-u)^n}{(1-\theta)^n}du \\
&= \theta^2 + 2\left[\left[\frac{-u(1-u)^{n+1}}{(1-\theta)^n(n+1)}\right]_\theta^1 + \int_\theta^1 \frac{(1-u)^{n+1}}{(1-\theta)^n(n+1)}du\right] \\
&= \theta^2 + \frac{2\theta(1-\theta)}{n+1} + \frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\theta_n}\right) &= \theta^2 + \frac{2\theta(1-\theta)}{n+1} + \frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\theta + \frac{(1-\theta)}{n+1}\right)^2 \\
&= \theta^2 + \frac{2\theta(1-\theta)}{n+1} + \frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\theta^2 + \frac{2\theta(1-\theta)}{(n+1)} + \frac{(1-\theta)^2}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{(1-\theta)^2}{(n+1)}\left[\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{(1-\theta)^2 n}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}
$$

8. Ejercicio 8

Tenemos $X_i \overset{indep}{\sim} Exp(\lambda_i)$ con $i = 1, \ldots, n$. Buscamos la distribución de $X_{\text{mín}}$. En este caso el soporte de $X_{\text{mín}}$ será $(0, \infty)$. Calculamos la distribución

$$
\begin{aligned}
1 - F_{X_{\text{mín}}}(x) =& P\left(\text{mín}\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} \geq x\right) = P\left(X_1 \geq x, \ldots, X_n \geq x\right) \\
&\overset{X_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^n P\left(X_i \geq x\right) = \prod_{i=1}^n \left(1 - F_i(x)\right) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i x} = e^{-\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)x} \\
&\implies F_{X_{\text{mín}}} = 1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)x}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto vemos que $X_{\text{mín}} \sim Exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$. Finalmente, como $X_{\text{mín}}$ tiene distribución exponencial

$$
\mathbb{E}\left[X_{\text{mín}}\right] = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \qquad Var\left(X_{\text{mín}}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2}
$$

9. Ejercicio 9

Consideremos $X_i, Y_i \overset{iid}{\sim} Be(p)$

A

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(W\right) &= \alpha E\left(\overline{X_n}\right) + \beta E\left(\overline{Y_n}\right)\\ &= \alpha p + \beta p\\ &= p \cdot (\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Entonces se tiene que cumplir que $\alpha + \beta = 1$.

B

Ahora resolvemos el siguiente problema de minimización sujeta a la restricción hallada en el punto a)

$$\min_{\alpha,\beta} Var\left(W\right) \text{ s.a } \alpha + \beta = 1$$

Lo que es equivalente a

$$\min_{\alpha,\beta} Var\left(\alpha\overline{X_n} + \beta\overline{Y_n}\right) \text{ s.a } \alpha + \beta = 1$$

Como las muestras son independientes, podemos escribir

$$\min_{\alpha,\beta} \alpha^2 Var\left(\overline{X_n}\right) + \beta^2 Var\left(\overline{Y_n}\right) \text{ s.a } \alpha + \beta = 1$$

Usando que $\beta = 1 - \alpha$

$$\min_{\alpha} \alpha^2 Var\left(\overline{X_n}\right) + (1-\alpha)^2 Var\left(\overline{Y_n}\right)$$

De donde podemos derivar respecto de α e igualar a cero

$$2\alpha Var\left(\overline{X_n}\right) - 2(1-\alpha) Var\left(\overline{Y_n}\right) = 0$$

Despejando α de la condición de primer orden queda que

$$\alpha = \frac{Var\left(\overline{Y_n}\right)}{Var\left(\overline{X_n}\right) + Var\left(\overline{Y_n}\right)}$$

Notando que las variables X_i e Y_i provienen de la misma población, se tiene que $Var(X_i) = Var(Y_j) = p(1-p)$ por lo tanto $Var(\bar{X}_n) = Var(\bar{Y}_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ y por lo tanto, $\alpha = \dfrac{\frac{p(1-p)}{n}}{\frac{p(1-p)}{n} + \frac{p(1-p)}{n}} = \dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto, reemplazando en la restricción para encontrar β obtenemos que $\beta = \dfrac{1}{2}$.

10. Ejercicio 10

- $P \sim Po(2)$
- $R \sim Po(120)$

- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = e^{-2}$
- $P(X > 39 | X \geq 38) = \dfrac{P(X > 39)}{P(X \geq 38)} = \dfrac{e^{-2 \cdot 39}}{e^{-2 \cdot 38}} = e^{-2 \cdot 1} = e^{-2} = P(X > 1)$ Recordar la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial!
- $P(X > 2340 | X \geq 2280) = \dfrac{P(X > 2340)}{P(X \geq 2280)} = \dfrac{e^{-2 \cdot 2340}}{e^{-2 \cdot 2280}} = e^{-2 \cdot 60} = P(X > 60)$ Recordar la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial!

Por otro lado, sea $X \sim Po(\lambda)$ y definamos $Y = \dfrac{X}{a}$ con $a > 0$. Luego

$$P(Y \leq y) = P(X \leq ya) = F_X(ya) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ 1 - e^{\lambda a \cdot y} \text{ si } y \geq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$f_Y(y) = \lambda a e^{-\lambda a \cdot y} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y)$$

Lo que implica que $Y \sim Exp(\lambda a)$.