

# Series de Tiempo

## PS0 - Solución

### Ejercicio 1

Derive las funciones teóricas de autocorrelación y autocorrelación parcial de los siguientes procesos estocásticos: AR(1) ; MA(1) ; AR(2) ; MA(2) y ARMA(1; 1) : Explique como puede utilizar estas funciones para identificar el proceso estocástico que sigue una serie.

**MA(1)**   ACF Este proceso viene dado por <sup>1</sup>

$$y_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Calculamos la media:

$$E(y_t) = \theta E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = 0$$

Miremos la covarianza entre períodos  $t$  y  $t - k$

$$Cov(y_t, y_{t-k}) = Cov(\theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \theta \varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k})$$

En este caso, notamos que si  $k = 1$  nos queda:

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_{t-1}) &= Cov(\theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \theta \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \theta^2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) + \theta Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + Cov(\varepsilon_t, \theta \varepsilon_{t-2}) + Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \\ &= \theta \sigma^2 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>No le ponemos constante. Ponerla no altera los resultados: habría que reexpresar todo el modelo como desvíos respecto a la media y funciona igual.

ya que todos los demas terminos son cero dado que  $\varepsilon_t$  tiene correlacion temporal nula. Notamos tambien que para todo periodo  $k \geq 2$ , la covarianza sera cero. Para ver por qué, hagamos la cuenta analaga pero con  $k = 2$ :

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_{t-2}) &= Cov(\theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \theta\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) \\ &= \theta^2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-3}) + \theta Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) + Cov(\varepsilon_t, \theta\varepsilon_{t-3}) + Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lo que ocurre es que ahora todas las covarianzas presentan a  $\varepsilon$  en distintos momentos del tiempo, por lo que todos los terminos son cero. El mismo razonamiento aplica para todo  $k \geq 2$ . Para ver la varianza, notemos que:

$$\begin{aligned} Var(y_t) &= Var(\theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \theta^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + 2Cov(\theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) + Var(\varepsilon_t) \\ &= (\theta^2 + 1)\sigma^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ACF para un MA(1) viene dada por:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta}{\theta^2 + 1} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

En relacion a la PACF, es un poco mas complicado obtener una forma cerrada linda. Para el caso de los MA, la misma decae geometricamente a cero, pero en ningun momento es exactamente igual a cero. Ver Hamilton(1994), p. 111. para mas detalles.

**AR(1)** En ese caso, el proceso seguido por  $y_t$  viene dado por:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

donde asumimos que  $|\phi| < 1$ . Eso nos asegura que el proceso es inversible. Nuevamente, si el proceso tuviera una media no nula, la restamos a ambos lados y escribimos el proceso en terminos de desvios respecto a la media, eso simplifica cuentas. Para obtener la ACF hay varias formas. Una es invertir el proceso y escribirlo como:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}$$

y luego aplicar el procedimiento del punto anterior. Otra forma es usando lo que se conoce como ecuaciones de Yule-Walker. Para obtenerlas, usando (2), tomemos covarianza respecto a  $y_t$  y respecto a  $y_{t-1}$  para obtener:

$$Cov(y_t, y_t) = \phi Cov(y_{t-1}, y_t) + Cov(\varepsilon_t, y_t) \quad (3)$$

$$Cov(y_t, y_{t-1}) = \phi Cov(y_{t-1}, y_{t-1}) + Cov(\varepsilon_t, y_{t-1}) \quad (4)$$

$$(5)$$

Notemos primero que  $Cov(\varepsilon_t, y_{t-1}) = 0$  ya que  $\varepsilon_t$  esta incorrelacionado con los valores pasados de si mismo. Por otro lado:

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t, y_t) &= Cov(\varepsilon_t, \phi y_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= Cov(\varepsilon_t, \phi y_{t-1}) + Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Con eso, (3) y (4) quedan

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi \gamma_1 + \sigma^2 \\ \gamma_1 &= \phi \gamma_0 \end{aligned}$$

Donde usamos la notacion  $Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k$ . Con eso, tenemos un sistema de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$  que puede resolverse facilmente para obtener:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \\ \gamma_1 &= \phi \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

Y para todo  $\gamma_k$  con  $k > 1$  tenemos que  $\gamma_k = \phi \gamma_{k-1}$ , asi que podemos obtenerlos recursivamente. En relacion a la PACF, en este caso, es simple de obtener. Siguiendo a Hamilton, la autocorrelacion parcial de orden  $m$  se define como el m-esimo coeficiente poblacional en una regresion de  $y_t$  en sus primeros  $m$  lags<sup>2</sup>, es decir, el coeficiente  $\alpha_m^{(m)}$  en:

$$y_t = \alpha_1^{(m)} y_{t-1} + \alpha_2^{(m)} y_{t-2} + \dots + \alpha_m^{(m)} y_{t-m} + v_t^{(m)} \quad (6)$$

Para el caso de un AR(1), vemos que para la de primer orden tendríamos

$$y_t = \alpha_1^{(1)} y_{t-1} + v_t^{(1)}$$

---

<sup>2</sup>de nuevo, todo esta escito en desvios respecto a la media por lo que no es necesario agregar una constante

Por lo que, intuitivamente, vemos que  $\alpha_1^{(1)} = \phi$ , como esperabamos <sup>3</sup>. Para correlaciones de orden superior, intuitivamente, si el proceso verdadero viene dado por (2), agregar regresores mas alla de  $y_{t-1}$  no tiene ningun poder explicativo. Por lo tanto,  $\alpha_m^{(m)} = 0$  para todo  $m > 1$ . Por ende, para un AR(1) tenemos

$$ACF(k) = \phi^k$$

$$PACF(k) = \begin{cases} \phi & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

**MA(2)** El proceso viene dado por:

$$y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \quad (7)$$

Las cuentas son isomorficas a las del MA(1). Notemos que ahora, cuando hacemos  $Cov(y_t, y_{t-k})$ , tenemos mas casos. Para  $k = 1$  obtenemos

$$Cov(y_t, y_{t-1}) = Cov(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-1})$$

Dejando solo aquellas covarianzas que se solapan

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_{t-1}) &= \theta_1 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 \theta_2 Cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}) \\ &= (\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma^2 \end{aligned}$$

Sin embargo, como ahora el MA es de orden 2, ahora tambien sera no nula la autocovarianza de orden 2, ya que

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_{t-2}) &= Cov(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_2 \varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-2}) \\ &= \theta_2 \sigma^2 \end{aligned}$$

La varianza podemos obtenerla igual que antes:

$$Var(y_t) = Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2^2 Var(\varepsilon_{t-2}) + \dots$$

---

<sup>3</sup>Esta intuicion es correcta una vez que uno hace las cuentas. Usando lo que sabemos de OLS

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{Var(y_t, y_t)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi$$

Donde ... representa todas las covarianzas, que son cero. Con esto, la varianza nos queda

$$Var(y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$$

Con esto, la ACF viene dada por

$$ACF(k) = \begin{cases} \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & si \ k = 1 \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & si \ k = 2 \\ 0 & si \ k > 2 \end{cases}$$

Nuevamente, la PACF es mas complicada de obtener.

**AR(2)** El proceso viene dado por

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Obtener la ACF en este caso es posible mediante las ecuaciones de Yule-Walker nuevamente.

Calculando  $Cov(y_t, y_t)$ ,  $Cov(y_t, y_{t-1})$  y  $Cov(y_t, y_{t-2})$  obtenemos:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0$$

Resolviendo este sistema podemos obtener  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ . Las demas autocorrelaciones pueden ser obtenidas recursivamente usando que  $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$

Para obtener las PACF, tenemos que para  $k = 1$  deberiamos regresar  $y_t$  en  $y_{t-1}$ . Por lo que sabemos de OLS,  $PAC(1) = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{Var(y_t)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ . Para la de orden 2, sabemos que al regresar  $y_t$  en  $(y_{t-1}, y_{t-2})$ , los coeficientes poblaciones son los mismos que los del proceso, por lo que  $PAC(2) = \phi_2$ . Por la misma razon que antes, todas las demas autocorrelaciones parciales serán iguales a cero.

Como vemos, los proceso MA tienen la característica de que la ACF se hace cero en un numero finito de lags, mientras que la PACF decae geometricamente a cero pero nunca es cero. Para los procesos AR es al reves: la PACF se hace cero en un numero finito de periodos, mientras que la ACF decae geometricamente.

**ARMA(1,1)** El proceso viene dado por:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Para obtener la ACF, utilizamos el mismo truco que antes:

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_t) &= \phi Cov(y_{t-1}, y_t) + Cov(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, y_t) \\ Cov(y_{t-1}, y_t) &= \phi Cov(y_{t-1}, y_{t-1}) + Cov(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) \end{aligned}$$

Notemos, sin embargo, que ahora

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, y_t) &= Cov(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}) \\ &= (1 + \theta^2)\sigma^2 + \phi Cov(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) \\ &= (1 + \theta^2)\sigma^2 + \phi Cov(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \phi y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}) \\ &= (1 + \phi\theta + \theta^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) &= \theta Cov(\varepsilon_{t-1}, y_{t-1}) \\ &= \theta(1 + \phi\theta + \theta^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

Con eso, podemos obtener  $(\gamma_0, \gamma_1)$  resolviendo

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi\gamma_1 + (1 + \phi\theta + \theta^2)\sigma^2 \\ \gamma_1 &= \phi\gamma_0 + \theta(1 + \phi\theta + \theta^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

Las demas salen recursivamente de que  $\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}$ . La PACF, nuevamente, es un poco mas complicada. Sin embargo, en general decaera a cero con algun patron, pero no deberia hacerse igual a cero a partir de cierto punto como pasaba con los AR puros, ya que el termino MA del modelo hace que siempre haya correlacion parcial.

## Ejercicio 2

siguiendo a Hamilton (1994), la metodologia de Box-Jenkins puede descomponerse en 4 pasos:

- En caso de ser necesario, transformar la serie para asegurar que el supuesto de estacionariedad en covarianzas se cumple. Esto puede incluir tener en cuenta formas funcionales (como por ejemplo, usar  $\log(X_t)$  en vez de  $X_t$  y tomar diferencias.
- Hacer un guess inicial de pequeños valores de  $p$  y  $q$  para un modelo  $ARMA(p, q)$  que podría llegar a describir el comportamiento de la serie
- Estimar los parametros de dicho modelo
- Hacer analisis de diagnostico para confirmar que el modelo utilizado es consistente con los patrones observados en los datos.

Es importante notar que esta metodologia nos permitirá encontrar un modelo potencialmente apropiado para hacer **forecasting**. Es decir, es muy probable que el verdadero modelo generador de datos sea mucho mas complejo, y que incluye relaciones con otras variables. Sin embargo, dado que los parametros son estimados con error, muchas veces es mejor utilizar modelos mas simples, con menos parametros, aunque esten misspecified. Por ejemplo, uno de los criterios que se usa para evaluar si el modelo es consistente con los datos es mirar los correlogramas de los residuos. Si en dichos correlogramas se ve relacion temporal en los mismos, esto puede indicar que hay estructura que falta modelar. Sin embargo, si para elimiar totalmente la correlacion presente en los resiudos es necesario usar mucha estructura, quiza sea mejor estimar un modelo mas simple aun si el correlograma no está perfectamente limpio.

## Ejercicio 3

1. De lo que hicimos antes, tenemos que para un  $MA(1)$ ,  $\gamma_0^{MA(1)} = \sigma^2(1 + \theta^2)$  mientras que para un  $AR(1)$ ,  $\gamma_0^{AR(1)} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$ . Por ende, los  $R^2$  converjen en probabilidad a:

$$R^{2,MA} = 1 - \frac{1}{1 + \theta^2}$$

$$R^{2,MA} = 1 - (1 - \phi^2) = \phi^2$$

2. Como vemos, dependiendo de la estructura asumida, el  $R^2$  converge en probabilidad a cosas distintas, por lo que la comparacion tiene problemas desde el vamos. Por otro lado, existe un punto un poco mas sutil. Si la idea de estos modelos es utilizarlos para predecir, no nos importa tanto como el modelo funciona en los datos usados para estimarlo, sino en

como predice. Y en este caso, hay cierto trade-off entre ambas cosas. El problema es que los parametros del modelo no son conocidos, sino que deben ser estimados. Y esta estimacion, naturalmente, ocurre con error. Cuantos mas parametros sean estimados, mayor error tendra dicha estimacion. Ahora bien, el error de estimacion en los parametros genera a su vez errores en el forecast. Aqui es donde se ve el trade-off: cuantos mas parametros pongamos (es decir, cuantos mas terminos AR y/o MA pongamos), mayor será el fit del modelo en la muestra <sup>4</sup>. Sin embargo, agregar estos parametros genera mayor error de estimacion, y por lo tanto mayor error en el forecast. Por ende, al decidir que modelo usar, debe tenerse en cuenta el trade-off entre mejor fit y mayor error de estimacion.

3. En terminos de seleccion de modelos, existen los llamados criterios de informacion. Estos resumen en un numero el trade-off entre mejor fit y mayor error de estimacion. Algunos de los mas usados son el de Akaike y el de Schwartz. Las formulas de ambos son:

$$AIC = \log(\hat{\sigma}^2) + 2(p + q)T^{-1}$$

$$SIC = \log(\hat{\sigma}^2) + 2(p + q) \log(T)T^{-1}$$

En la practica, uno elige el modelo con menor criterio de informacion. Notar que ambas formulas se componen de una parte que tiene en cuenta el fit del modelo  $\log(\sigma^2)$  (la varianza estimada del error, cuanto mas grande peor es el fit) y una parte que penaliza por la cantidad de parametros utilizados.

## Ejercicio 4

**Serie y1** Viendo el correlograma, notamos que parece tener dos correlaciones parciales significativamente distintas de cero, mientras que las autocorrelaciones parecen decaer geometricamente. Por lo tanto, solo mediante el correlograma, podemos pensar que estamos en presencia de un modelo AR(2). Para ver si este modelo es correcto, es bueno empezar de lo particular a lo general. Empezamos estimando un AR(1). Al chequear el correlograma de los residuos, vemos que sigue habiendo correlacion temporal en los mismos (esto lo notamos, por ejemplo, mirando los tests basados en el estadistico  $Q$ ). Esto nos indica que deberiamos agregar mas estructura. Es por eso que procedemos a estimar un AR(2). Ahora si, el correlograma sale limpio: no hay

---

<sup>4</sup>Recuerden que si agregamos regresores, el  $R^2$  nunca cae



mas correlacion en los residuos que falte modelar. Por otro lado, los coeficientes agregados son todos significativos.

**Serie y2** Nuevamente tenemos dos correlaciones parciales distintas de cero, y las autocorrelaciones decaen geometricamente. La diferencia en este caso es que la segunda correlacion parcial es claramente distinta de cero. Por ende, si bien lo ideal sería empezar con un  $AR(1)$  e ir agregando terminos, en este caso es muy probable que estemos en presencia de un  $AR(2)$ . Estimando este modelo y chequeando los correlogramas de los residuos, vemos que este modelo captura apropiadamente el comportamiento de la serie. Vemos ademas que los coeficientes son todos significativos.

**Serie y3** En este caso, vemos que hay una autocorrelacion distinta de cero, mientras que la PACF muestra un decaimiento sinusoidal hacia cero. Empezamos estimando un  $MA(1)$ . Vemos que, al hacer esto, este termino resulta significativo y el correlograma sale limpio. Por lo tanto, este sería el modelo apropiado.

**Serie y4** En este caso, no es tan claro el patron: ambas (la ACF y la PACF) tienen los dos primeros componentes distintos de cero, y luego decaen. Empezamos estimando un  $AR(1)$ . Vemos que no limpia los residuos, así que agregamos un termino  $AR(2)$ . En este caso, vemos que el correlograma sale limpio. Sin embargo, tenemos que ver todavía si modelando al proceso como un MA no genera mejores resultados. Utilizando un  $MA(2)$ , vemos tambien que el correlograma sale limpio y todo es significativo. Como elegimos entre ambos modelos? En este caso, podemos mirar los criterios de informacion. En este caso, el modelo  $MA(2)$  posee valores mas bajos para todos los criterios, así que este es el modelo elegido.

**Serie y5** En este caso, tanto la ACF como la PACF tienen a los primeros valores significativamente distintos de cero, y decaen hacia cero. Eso es un indicio de que pueden ser necesario usar una combinacion de terminos AR y MA. Veamos. Empecemos con un  $AR(1)$ . El correlograma no sale limpio. Sigamos agregando terminos AR. Habiendo probado hasta un  $AR(4)$ , vemos que no podemos limpiar el correlograma. Esto es un indicio de que puede haber terminos MA dando vueltas. Recuerden que, intuitivamente, si un MA es inversible, un termino MA es equivalente a infinitos terminos AR. Si probamos con modelos MA puros, tenemos el mismo problema: agregar terminos MA no limpia el correlograma. Probemos entonces con un modelo

ARMA(1,1). En este caso, vemos que el correlograma sale limpio, por lo que probablemente este sea el modelo que generó los datos.

## Ejercicio 5

Viendo el correlograma, parece haber algo en el primer lag. Empecemos utilizando un AR(1). Viendo el correlograma de los residuos, vemos que a partir del 6to lag se empieza a rechazar la hipótesis nula. Por lo tanto, podemos pensar en agregar un término AR(6). Noten que es posible agregar este término directamente, sin estimar coeficientes para los demás lags. Es decir, podemos estimar el modelo:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_6 y_{t-6} + \varepsilon_t$$

Sin ningún problema. Este modelo sería un AR(6), pero con restricciones para que los coeficientes de los lags 2 a 5 sean cero. El término extra es significativo, y el correlograma queda limpio. Mirando los criterios de información, el modelo AR(6) presenta unos más bajos que los del modelo AR(1), por lo que será preferible. Probamos también con algunos MA y un ARMA, pero en todos los casos el modelo AR(6) es mejor según los criterios de información. En este caso, es importante notar que en general no hay un único modelo correcto para una serie de datos. Por ejemplo, podría ocurrir que para cierto criterio de información sea preferible un modelo, y para otro criterio sea preferible otro.

## Ejercicio 6

1. En este caso, vamos a pensar intuitivamente que el producto tiene una tendencia de largo plazo, determinística, y que los movimientos alrededor de ella serían los business cycles.

El modelo que tenemos en mente, entonces sería algo como:

$$y_t = c + \alpha t + z_t + \varepsilon_t$$

Donde  $y_t$  es el logaritmo del PBI. La parte  $c + \alpha t$  tiene en cuenta la tendencia determinística, mientras que  $z_t$  captura los ciclos alrededor de esa tendencia.

Para estimar una tendencia lineal en Eviews, vamos a *quick* → *Estimate equation* y en la ventana que sale, ponemos lo que muestra la figura 1. Al darle OK, se estima la ecuación.

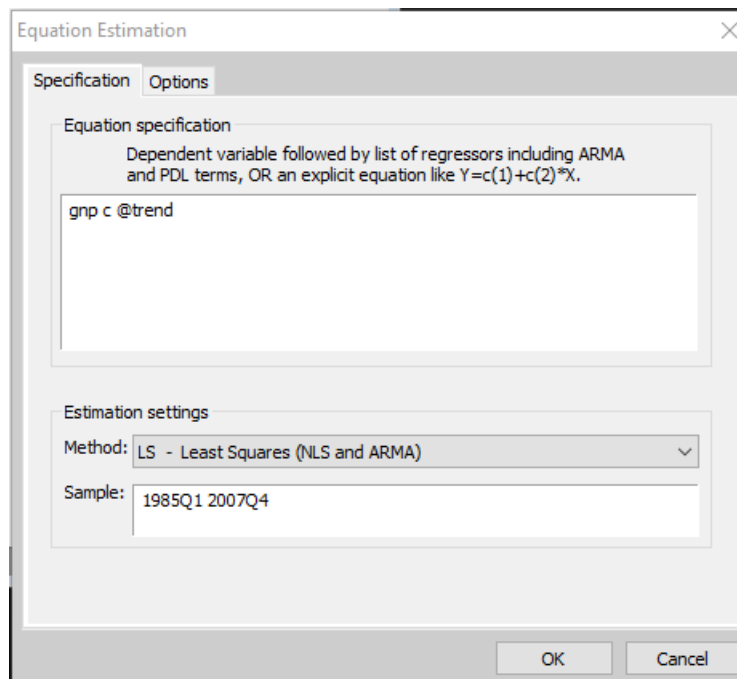


Figura 1: Especificacion de la ecuacion a estimar

2. Para quitarle la tendencia, lo que deberiamos hacer es quedarnos con los residuos de lo que estimamos antes. Al estimar constante y tendencia, estaríamos estimando la parte  $c + \alpha t$ . Por ende, queda en el residuo de la ecuación la expresion  $z_t + \varepsilon_t$ . Para obtener los residuos de la estimacion en Eviews, una vez estimada la ecuacion vamos a *Proc*  $\rightarrow$  *Make residuals series*, elegimos el nombre que le ponemos a la serie y listo. Eviews genera automaticamente una nueva variable en la base de datos que contiene los residuos de la regresion que acabamos de correr. Si graficamos la serie temporal (Figura 2), vemos que ya no tiene una tendencia al alza sino que fluctua alrededor de una media. Si bien esto no es evidencia suficiente de que sea estacionaria (como veremos en futuras clases, podria ser no estacionaria igual), es claro que ahora se parece mas a una serie estacionaria. En lo que sigue, vamos a asumir que efectivamente lo es. Mas adelante veremos formas de testear esto.

3. Para identificar el proceso, hacemos el mismo procedimiento que antes. Empezamos mirando el correlograma (Figura 3 ). Aqui, vemos que las autocorrelaciones siguen un patron que decrece hacia cero. Por otro lado, las correlaciones parciales tienen valores significativamente distintos de cero para los primeros lags, pero luego parecen hacerse cero. Esto nos da evidencia en favor de un modelo AR.

Empezamos probando con un AR(1). Noten que la serie que estamos usando son residuos

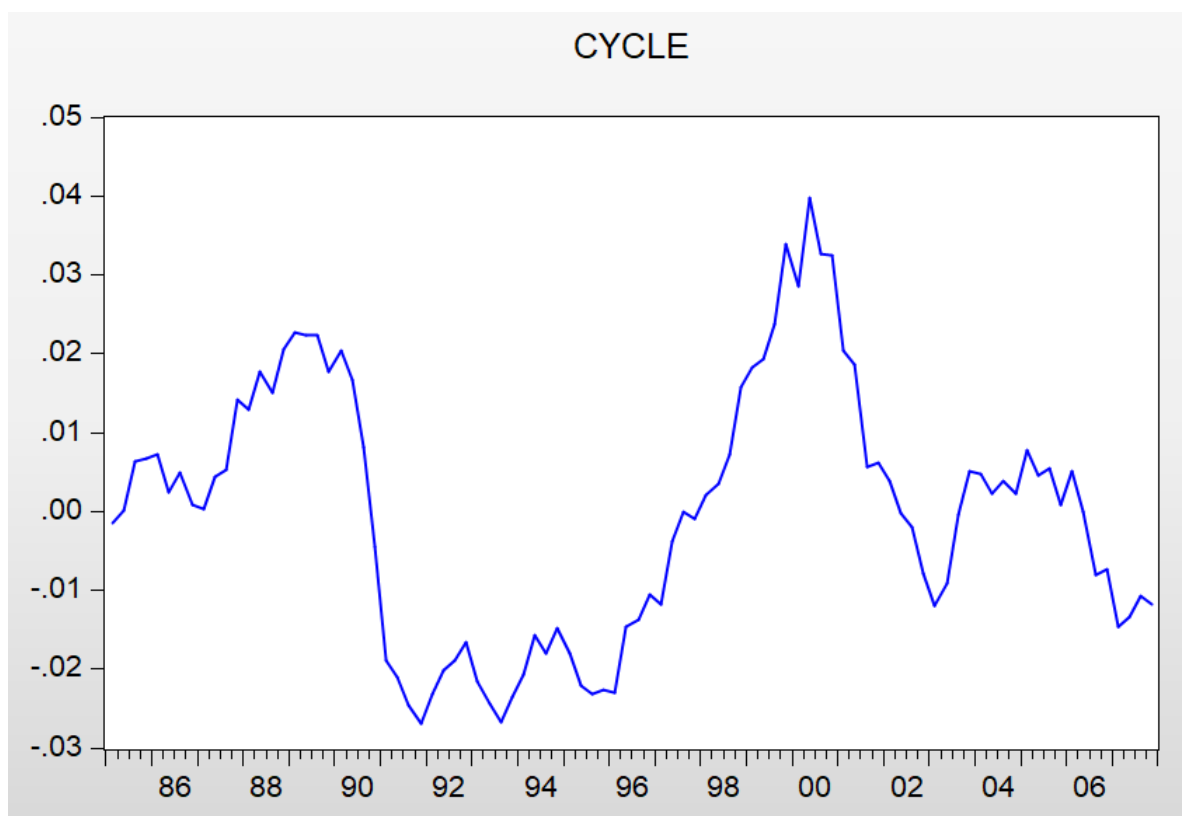


Figura 2: Residuos de la estimacion

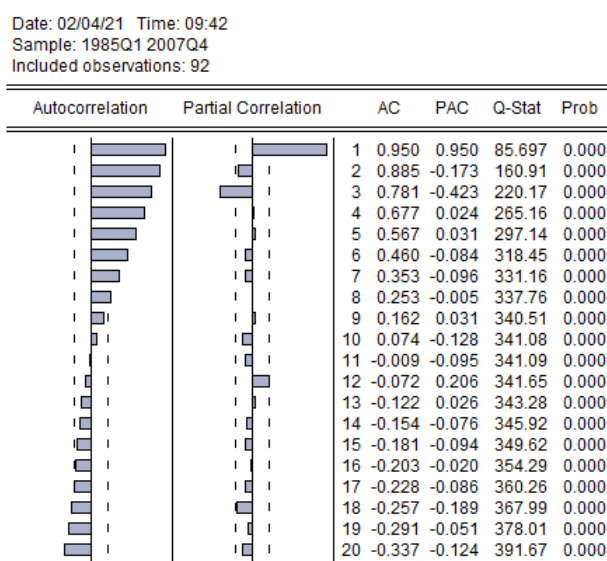


Figura 3: Residuos de la estimacion

Date: 02/04/21 Time: 09:49  
Sample: 1985Q1 2007Q4  
Included observations: 92  
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.154 -0.154	2.2457		
		2 0.175 0.155	5.1749		
		3 -0.108 -0.064	6.3066	0.012	
		4 0.037 -0.012	6.4410	0.040	
		5 -0.007 0.024	6.4458	0.092	
		6 0.125 0.123	8.0146	0.091	
		7 0.003 0.033	8.0158	0.155	
		8 -0.109 -0.150	9.2336	0.161	
		9 0.144 0.138	11.386	0.123	
		10 0.074 0.166	11.961	0.153	
		11 -0.127 -0.200	13.693	0.134	
		12 -0.058 -0.151	14.054	0.171	
		13 -0.110 -0.047	15.381	0.166	
		14 0.019 0.056	15.423	0.219	
		15 -0.020 -0.063	15.470	0.279	
		16 0.057 -0.039	15.838	0.323	
		17 -0.027 0.111	15.922	0.387	
		18 -0.081 -0.050	16.690	0.406	
		19 0.155 0.081	19.543	0.298	
		20 -0.019 0.066	19.588	0.357	

Figura 4: Correlograma de los residuos de la estimacion de la siguiente ecuacion  $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$

de OLS, por lo que por construccion va a tener media cero. Por ende, no es necesario agregar una constante a la estimacion. Al ver el correlograma de los residuos de esta regresion, vemos que sigue quedando estructura sin modelar en los primeros lags. En particular, en el lag 2. Por lo tanto, agregamos un nuevo termino AR y estimamos un AR(2). El nuevo termino AR no da significativo, y sigue habiendo correlacion parcial no nula en los residuos. Si recordamos el correlograma original, veiamos que habia una correlacion parcial de orden 3 significativamente distinta de cero. Por lo tanto, podemos probar un AR(3) (sin poner el termino AR(2)). Es interesante mirar el correlograma de esta los residuos en este caso. El mismo se muestra en la figura 4. En dicha figura, vemos que en apariencia el correlograma parece limpio: todas las barritas se encuentran dentro de las bandas. Sin embargo, al mirar los tests de significatividad conjunta (los Q-stats y sus p-valores) vemos que se rechaza la hipotesis nula de ausencia de correlacion. Por lo tanto, eso parece indicar que queda un poco de estructura por modelar. Probamos incluyendo de nuevo el termino AR(2), por lo que ahora estimamos un modelo AR(3) no restringido. La salida de la regresion muestra que todos los coeficientes son significativos, y el correlograma de los residuos sale limpio. Mirando criterios de informacion, vemos que el AR(3) no restringido funciona mejor que el restringido. Por lo tanto, el modelo seleccionado es:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$$

Dependent Variable: ZT  
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)  
Date: 02/04/21 Time: 11:11  
Sample: 1985Q1 2007Q4  
Included observations: 92  
Convergence achieved after 7 iterations  
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	1.193455	0.065097	18.33343	0.0000
AR(3)	-0.275452	0.061849	-4.453648	0.0000
SIGMASQ	1.98E-05	3.61E-06	5.468690	0.0000
R-squared	0.923780	Mean dependent var	-6.68E-15	
Adjusted R-squared	0.922068	S.D. dependent var	0.016189	
S.E. of regression	0.004519	Akaike info criterion	-7.897398	
Sum squared resid	0.001818	Schwarz criterion	-7.815166	
Log likelihood	366.2803	Hannan-Quinn criter.	-7.864208	
Durbin-Watson stat	2.301851			
Inverted AR Roots	.80+.14i	.80-.14i	-.41	

Figura 5: Salida de la regresion estimada

La salida de la regresion se muestra en la figura 5

- Primero, me parece importante aclarar la diferencia entre un forecast dinamico y un forecast estatico. Del inciso anterior tenemos el modelo estimado:

$$y_t = \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \hat{\phi}_2 y_{t-2} + \hat{\phi}_3 y_{t-3} + u_t \quad (8)$$

Donde cambia la notacion intencionalmente, para enfatizar que estamos hablando de el modelo estimado. Hay dos tipos de forecast que se pueden hacer en Eviews: dinamicos y estaticos.

- Un forecast **dinamico** utilizando informacion a tiempo  $t$  para la variable en  $t + s$  se computa **usando solamente informacion hasta tiempo  $t$** . Veamos en nuestro caso que quiere decir esto. Para estimar el modelo usamos la muestra 1985Q1:2007Q4. Vamos a hacer un forecast dinamico para los periodos 2008Q1 en adelante. El hecho de que sea dinamico implica que, por ejemplo, para el valor forecasteado de la variable en 2009Q1, **NO estamos usando los datos de 2008**. El forecast dinamico responde a la siguiente pregunta: parado 2007Q4, solo con la informacion disponible en ese momento, cual es tu forectast para la variable en (por ejemplo) 2009Q2.
- Un forecast **estatico** utiliza, para cada momento del tiempo, la informacion disponible hasta ese momento para realizar el forecast. Veamos como funciona esto. Si estamos parados, por ejemplo, en 2008Q3, y pudieramos usar todas la informacion disponible hasta ese momento, Cual seria nuestro forecast para el valor de  $y_t$  en

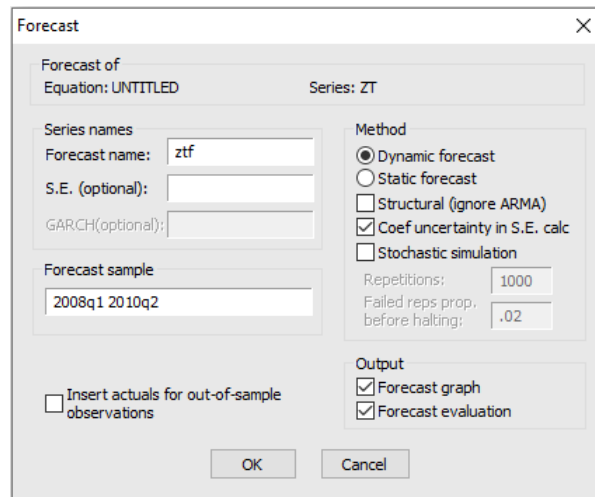


Figura 6: Especificacion del forecast dinamico

2008Q4? Usando nuestro modelo tendríamos que:

$$\hat{y}_{2008Q4} = \hat{\phi}_1 y_{2008Q3} + \hat{\phi}_2 y_{2008Q2} + \hat{\phi}_3 y_{2008Q1} \quad (9)$$

Notar que los parametros no se reestiman <sup>5</sup>, pero usamos datos **que no habiamos usado antes para computar el forecast**.

Para hacer esto en Eviews, una vez estimado el modelo vamos a *Proc* → *Forecast...* y elegimos el tipo de forecast para hacer. En *Forecast sample*, elegimos el periodo que queremos forecastar (2008Q1 2010Q2). La especificacion se ve en la figura 6. El output se ve en la figura 8. Grafico tambien en la figura ?? el crecimiento del PBI forecasteado vs el dato real. Vemos que el forecast no es muy bueno. Sin embargo, sabiendo que estos son datos de EEUU, este error se debe a la Gran Recesion de 2008, evento atipico, por lo que es esperable que cualquier modelo estimado con datos previos funcione mal para forecastear este periodo.

5. Para forecastear la serie original, tenemos dos caminos: uno es simplemente tomar todo lo que hicimos hasta ahora y sumarle la tendencia lineal que estimamos,  $\hat{c} + \hat{a}t$ . El otro es reestimar todo usando la serie original y agregar una constante y una tendencia. Para ver como serie el segundo camino, estimemos un AR(3) en los niveles con constante y tendencia. La figura ?? muestra la ecuacion estimada. A partir de aqui, se procede

<sup>5</sup>Podria reestimarselos, ese seria otro ejercicio, quiza mas cercano a la realidad: en cada momento, reestimo todo, tratando de usar toda la informacion disponible.

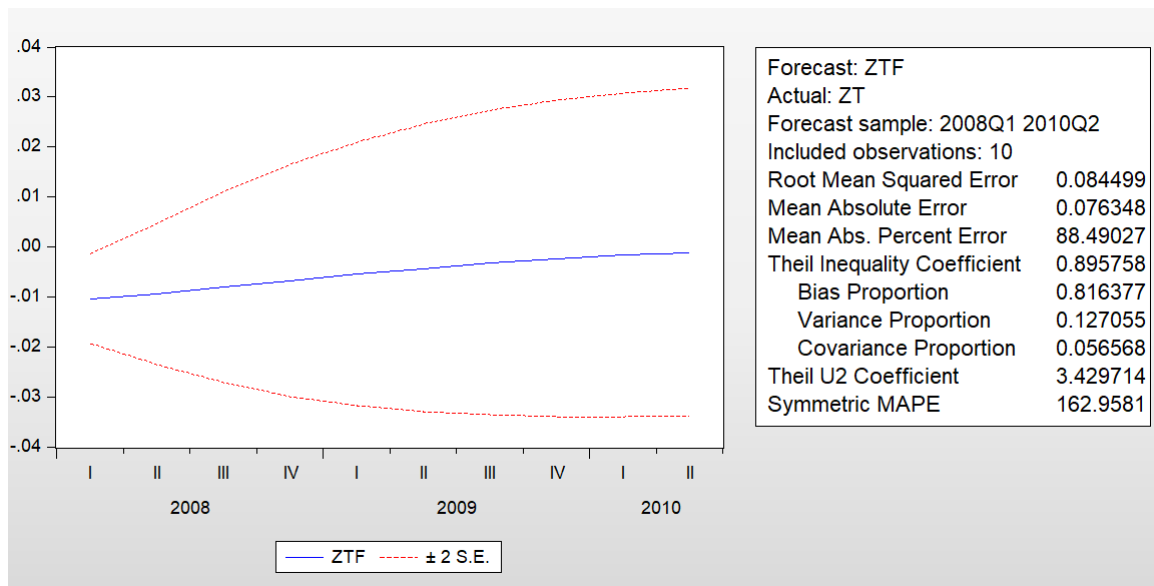


Figura 7: Grafico de los valores forecasteados

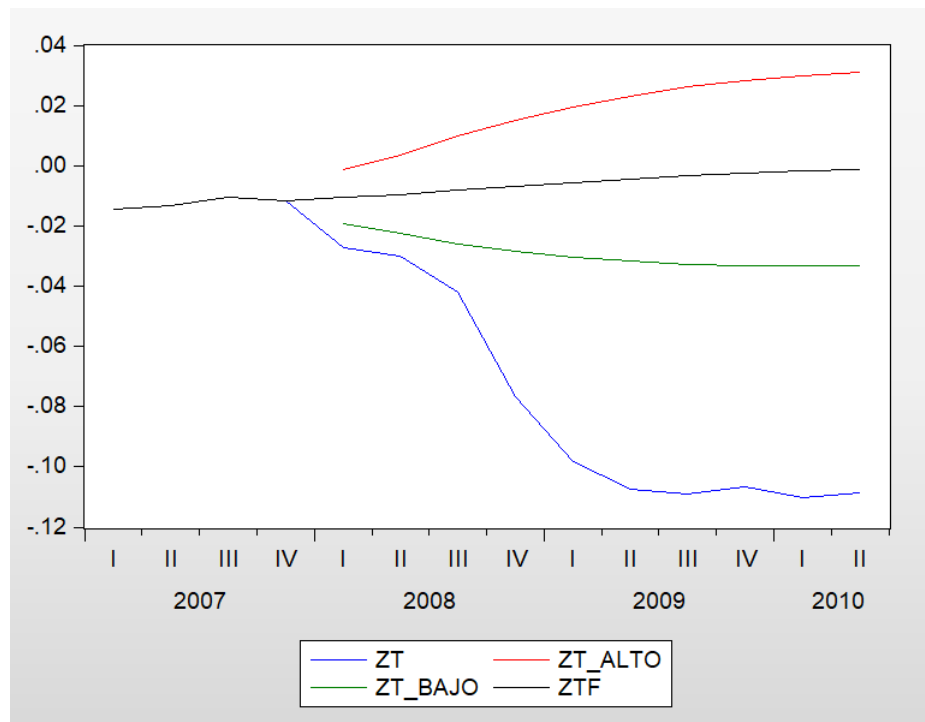


Figura 8: Grafico de los valores forecasteados con la serie original



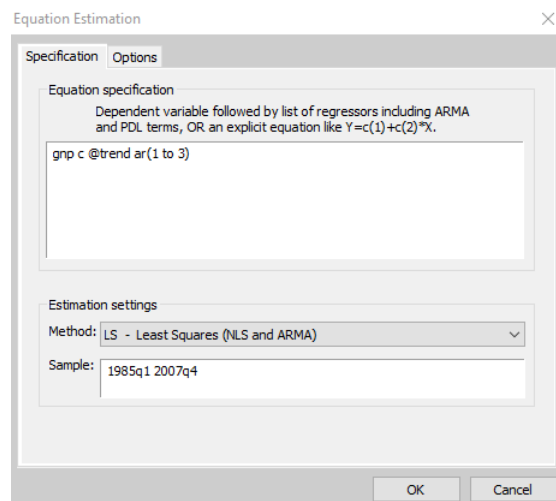


Figura 9: Especificacion de la estimacion en niveles

igual que antes. La unica diferencia va a ser que ahora hay una tendencia al alza en la estimacion, por lo que el forecast va a tener eso en cuenta.