TP3 Clase 4/15

8) Si teníamos A,

λ es autovalor y $v \neq 0$ es autovector

si $Av = \lambda v$

$A = PDP^{-1} \rightarrow A^2 = PD\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$

$AP = PD$

$$A\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \cdots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$Av_i = \lambda_i v_i$ $\qquad E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i Id)$

Supongamos $\exists\, v \in \ker(A - \lambda_1 Id) \cap \ker(A - \lambda_2 Id)$

$\Rightarrow \begin{matrix} Av = \lambda_1 v \\ Av = \lambda_2 v \end{matrix} \Rightarrow 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v \Rightarrow v = 0$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$

$E_{\lambda_1} = \langle (0,1) \rangle, \quad E_{\lambda_2} = \langle (2,1) \rangle$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

i)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \longrightarrow P_A(\lambda) = (7-\lambda)^{2}(3-\lambda)^{2}$$

$\rightarrow \lambda_1 = 7 \longrightarrow E_{\lambda_1} = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

$\rightarrow \lambda_2 = 3 \longrightarrow E_{\lambda_2} = \langle (0,5,0,4), (0,1,1,0) \rangle$

multiplicidad 2 dimensión 2

$$\left(P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} Av = \lambda v \\ Av - \lambda v = 0 \\ (A - \lambda Id)v = 0 \end{matrix} \right)$$

$\Rightarrow$ A es diagonalizable, y:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Recordatorio

dado $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal

Qué es un autovalor/autovector?

λ_i es un autovalor y $v_i \neq 0$ es un autovector asociado al autovalor λ_i, si

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

Cómo los encuentro?

$$A v_i = \lambda_i \, Id \, v_i \longleftrightarrow A v_i - \lambda_i \, Id \, v_i = 0$$

$$\longleftrightarrow (A - \lambda_i Id) \underline{\underline{v_i}} = 0 \quad (*)$$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = 0 \longrightarrow$ tiene n raíces, λ_i Encontré los autovalores

Para $\lambda_i \xrightarrow[\text{en } (*)]{\text{reemplazo}} (A - \lambda_i Id) \underline{v_i} = 0 \longrightarrow v_i \in Ker(A - \lambda_i Id)$

$\uparrow$ incógnita

$Ker(A - \lambda_i Id) := \underline{\underline{E_{\lambda_i}}} \longrightarrow \underset{\text{(base)}}{B(E_{\lambda_i})}$ } los llamo autovectores

Para qué sirve? Vimos que si A es diagonalizable,

$$A = P D P^{-1} \quad \text{donde}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A - \lambda Id = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = (-2-\lambda)^2(-1-\lambda)$

Autovalores: $\lambda_1 = -2$ (multiplicidad 2)

$\lambda_2 = -1$ (multiplicidad 1)

Autovectores

$\lambda_2 = -1$

$A - \lambda_2 Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$

los $(x,y,z) \in \ker(A - \lambda_2 Id)$

tienen que cumplir $x = 0$, $y = 0$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$

$\ker(A - \lambda_2 Id) = E_{\lambda_2} = \{(x,y,z) : \underbrace{(x,y,z) = (0,0,z)}_{= z(0,0,1)}, z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (0,0,1) \rangle \rightarrow v_2 = (0,0,1)$

$\lambda_1 = -2$

$A - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

quiero (x,y,z) /
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0=0 \checkmark \\ 0=0 \checkmark \\ 3x+z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y \text{ libre} \\ z=-3x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A-\lambda_1 Id) = E_{\lambda_1} &= \{(x,y,z) : y\in\mathbb{R},\ z=-3x\} \\ &= \{(x,y,-3x) : y\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,-3)+y(0,1,0) : y\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,-3), (0,1,0) \rangle \end{aligned}$$

$v_{1,1} = (1,0,-3)$

$v_{1,2} = (0,1,0)$

Diagonalización : es diagonalizable :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Si hubiera tenido
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A-\lambda Id = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$ $\leftarrow$ el polinomio es = que antes

$\Rightarrow$ los autovalores son = :

Autovalores: $\lambda_1 = -2$ (multiplicidad 2)
$\lambda_2 = -1$ (multiplicidad 1)

Autovectores

$\lambda_2 = -1$

$$A - \lambda_2 Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=0$$

los $(x,y,z) \in Ker(A - \lambda_2 Id)$
tienen que cumplir $x=0, y=0$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,z), \; z \in \mathbb{R}$

$$Ker(A - \lambda_2 Id) = E_{\lambda_2} = \{(x,y,z) : \underbrace{(x,y,z) = (0,0,z)}_{= z(0,0,1)}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (0,0,1) \rangle \rightarrow v_2 = (0,0,1)$$

$\lambda_1 = -2$

$$A - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quiero $(x,y,z) \in Ker(A - \lambda_1 Id) = E_{\lambda_1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \; ✓ \\ x = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 = z, \; y \text{ libre}$$

$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \langle (0,1,0) \rangle$, $\quad v_1 = (0,1,0)$

$\Rightarrow$ no me alcanzan los autovectores para construir $P \Rightarrow$ no es diagonalizable

Ejercicio 9

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{b \neq 0}}$$

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 \\ b & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (a-\lambda)^2 \rightarrow \lambda = a \quad \text{(raíz doble)}$$

$$\lambda = a \rightarrow A - aId = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Quiero $(x,y) /$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \checkmark \\ bx = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0$

$E_a = \langle (0,1) \rangle \Leftarrow \dim(E_a) = 1 <$ multiplicidad de $\lambda = a$

$\Rightarrow$ no es diagonalizable $\square$

Ejercicio 10

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} r & s & t \\ \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$v = (1,2,0)$, $\quad w = (2,6,0)$, $\quad u = (-2,-2,-1)$ autovectores

a) A es diagonalizable:

D/. $P_A(\lambda)$ tiene grado $3 \rightarrow$ x Teo fundamental del álgebra, $\exists\ \lambda_v, \lambda_w, \lambda_u \in \mathbb{C}$ raíces.

Como $v, w, u \in \mathbb{R}^3$,
y son autovectores
y $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\underbrace{Av}_{\in \mathbb{R}^3} = \lambda_v \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_v \in \mathbb{R}$$

lo mismo para el resto: $\lambda_u, \lambda_w \in \mathbb{R}$ (chequear que son l.i)

$\Rightarrow \exists D \in \mathbb{R}^{3\times3} \,/\, D = \begin{pmatrix} \lambda_v & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_u & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_w \end{pmatrix}$

$\wedge \exists P \in GL(3) \,/\, P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

con $A = PDP^{-1}$ $\square$

b)

$$A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$v = (1,2,0)$, $w = (2,6,0)$, $u = (-2,-2,-1)$ autovectores

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} r-\lambda & s & t \\ -12 & 6-\lambda & 16 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)\left[(r-\lambda)(6-\lambda) + 12s\right] \leftarrow \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w \text{ raíces}$$

$$\begin{pmatrix} r-\lambda & s & t \\ -12 & 6-\lambda & 16 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Como w es autovector, $(A - \lambda_w Id)\, w = 0$

$\Rightarrow$ tomo $(x,y,z) = w = (2,6,0)$

Reemplazo w

$$\begin{pmatrix} r-\lambda_w & s & t \\ -12 & 6-\lambda_w & 16 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(r-2) + 6s = 0 \quad (A) \\ -24 + 6(6-\lambda_w) = 0 \rightarrow -24 + 36 - 6\lambda_w = 0 \rightarrow \lambda_w = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Reemplazo v

$$\begin{pmatrix} r-\lambda_v & s & t \\ -12 & 6-\lambda_v & 16 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} r+2s=0 \quad (B) \\ -12+2(6-\lambda_v)=0 \rightarrow -12+12-2\lambda v=0 \rightarrow \lambda v=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

de (A), (B): $\begin{cases} 2(r-2)+6s=0 \\ r+2\cdot s=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} s=2 \\ r=-4 \end{matrix}$

Reemplazo u: (y uso $s=2$, $r=-4$)

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda_u & 2 & t \\ -12 & 6-\lambda_u & 16 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (-4-2)(-2)+(-2)2-t=0 \rightarrow 12-4=t \rightarrow t=8 \\ -(2-\lambda u)=0 \rightarrow \lambda u=2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$ los autovalores son 2 (doble), 0

Ejercicio 13

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & +1 \end{pmatrix}, \quad v = (-2,2,3)$$

a) $A - \lambda Id = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -3 & -2 \\ 3 & 4-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & +1-\lambda \end{pmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) \leftarrow$ autovalores (raíces): $\lambda = 1$ (triple)

$\lambda = 1$: $\quad A - \lambda Id = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3y+2z=0 \\ 3(x+y+z=0) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -z=0 \\ \Rightarrow x+y=0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \ker(A - \lambda Id) = \{(x,y,z) : z=0,\ y=-x,\ x \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,y,z) = (x,-x,0) = x(1,-1,0),\ x \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,-1,0) \rangle = E_1, \quad w = (2,-2,0)$

c) $, v = (-2,2,3)$

$v + w = (-2,2,3) + (2,-2,0) = (0,0,3)$
$= 3e_3$

$\Rightarrow \quad v = 3e_3 - w$

d) calcular $A^{63} v$

Veamos: "$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n v = (3n+1)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3e_3$"

D/. $n=0, \quad v = -w + 3e_3$ ✓

Supongamos que la afirmación vale para n

(qvq vale para $n+1$)

$$A^n v = (3n+1)(-w) + 3e_3$$

$\downarrow$

$Aw = 1 \cdot w$

$A(-w) = -w$

$$A^{n+1} v = A(3n+1)(-w) + 3Ae_3$$

$$= (3n+1)(-w) + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (3n+1)(-w) + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$= (3n+1)(-w) + 3(-w) + 3e_3$$

$$A^{n+1} v = [3(n+1)+1](-w) + 3e_3 \quad \square$$

$$A^{63} v = (3 \cdot 63 + 1)(-w) + 3e_3$$

$$= 190\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -380 \\ 380 \\ 3 \end{pmatrix}.$$