Repaso

Maestría en Econometría–Matemática

1er Trimestre 2023

Determinante de una matriz

Definición.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Definimos el determinante de A de la siguiente manera

$$\det(A) = ad - bc.$$

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entonces

$$A \in GL(2) \iff \mathrm{rg}(A) = 2 \iff \det(A) \neq 0.$$

Determinante de una matriz

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Denotamos por M_{ij} la submatriz de A que se obtiene suprimiendo su $i-$ésima fila y $j-$ésima columna. M_{ij} se llama la **menor** ij de A. Observar que $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

$$M_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & 1 & 5 \\ \cancel{6} & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad M_{22} = \begin{pmatrix} 2 & \cancel{-1} & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{5} \\ 6 & \cancel{3} & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Determinante de una matriz

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Definimos el **determinante** de A de la siguiente manera

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}).$$

Determinante de una matriz

Entonces, si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, tenemos:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - idb.$$

La manera de recordarla (usarla) es a través de la *regla de Sarrus*:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Los primeros tres términos del determinante son los productos de las tres diagonales en el sentido $\searrow$, y los otros tres términos son los productos de las tres diagonales en el sentido $\swarrow$ con signo negativo.

Determinante de una matriz

Definición.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definimos el **determinante** de A de la siguiente manera

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}).$$

El **cofactor** ij de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, denotado por A_{ij}, esta dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Entonces

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$$

Determinante de una matriz

Observación.

- Se puede elegir cualquier fila de A, entonces

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

En este caso se dice que el determinante esta desarrollado por la fila $i-$ésima.

- También se puede desarrollar por columnas

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

En este caso se dice que el determinante esta desarrollado por la columna $j-$ésima.

Propiedades del determinante. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Si $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular superior o inferior, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Si A es inversible, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A^t) = \det(A)$.
- Si A tiene una fila o columna de ceros, entonces $\det(A) = 0$.
- Si B se obtiene intercambiando dos filas o columnas de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
- Si A tiene dos filas o columnas iguales, entonces $\det(A) = 0$.
- Si una fila (o columna) de A es un múltiplo escalar de otra fila (o columna) de A, entonces $\det(A) = 0$.
- Si B es una matriz que se obtiene sumando un múltiplo escalar de una fila (o columna) de A a otra fila (o columna) de A, entonces $\det(B) = \det(A)$.

Matriz adjunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la **matriz adjunta** de A se define por

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

donde A_{ij} es el cofactor (ij) de la matriz A.

Teorema.

- Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$.
- Si $\det(A) \neq 0$ entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.

Resumen: Matrices inversibles

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) A es inversible;

(ii) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$;

(iii) La única solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ es la solución trivial (es decir $x = 0$);

(iv) La matriz A es equivalente a la matriz identidad;

(v) El rango de A es n;

(vi) $\det(A) \neq 0$.

Transformaciones Lineales, Autovalores y Autovectores

Maestría en Econometría–Matemática I

1er Trimestre 2023

Transformación lineal

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales. Una aplicación $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una **transformación lineal** si para cualesquiera dos escalares α y β y cualesquiera dos elementos $u, v \in \mathbb{V}$ se verifica la siguiente igualdad

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Transformación lineal

Ejemplo 1. Decidir cuál de la siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, T(x,y)=(x,y,x+y);

b) $T_2 : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $T(A) = \det(A)$.

Transformación lineal

Ejemplo 2. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(1,0,0) = (1,2)$, $T(0,1,0) = (1,-1)$ y $T(0,0,1) = (-1,1)$. Hallar $T(x,y,z)$.

Transformación lineal

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces la aplicación $T(v) = [Av^t]^t$ es una transformación lineal.

Teorema.

Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal entonces existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $T(v) = [Av^t]^t$.

Transformación lineal

Ejemplo 3. Hallar la matriz asociada a la transformación lineal $T_1(x, y) = (x, y, x + y)$.

Núcleo e imagen

Proposición.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces $T(0) = 0$.

Definición.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Definimos el **kernel** (o **núcleo**) de T de la siguiente manera

$$N(T) = \ker(T) := \{v \in \mathbb{V} \colon\ T(v) = 0\}.$$

Núcleo e imagen

Ejemplo 4. Hallar el núcleo de la siguiente transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida de la siguiente manera

$$T(x, y, z) = (x + y + 5z, 2x - y + z).$$

Núcleo e imagen

Proposición.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces $\ker(T)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Núcleo e imagen

Definición.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Definimos la **imagen** de T de la siguiente manera

$$\operatorname{Img}(T) := \{w \in \mathbb{W} \colon \text{si existe } v \in \mathbb{V} \text{ tal que } T(v) = w\}.$$

Núcleo e imagen

Teorema.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces $\mathrm{Img}(T)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

Núcleo e imagen

Ejemplo 5. Hallar la imagen de la siguiente transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida de la siguiente manera

$$T(x, y, z) = (x + y + 5z, 2x - y + z).$$

Núcleo e imagen

Teorema.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ entonces

- $\operatorname{Img}(T) = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle$;
- $\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Img}(T)) = \dim(\mathbb{V})$.

Núcleo e imagen

Teorema.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales y $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva si solo si $\dim(\ker(T)) = 0$.

Núcleo e imagen

Ejemplo 6. Sean $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(1,1,1) = (1,0)$, $T(1,1,0) = (2,-1)$ y $T(1,0,0) = (4,3)$. Calcular:

(a) $\ker(T)$, $\mathrm{Img}(T)$ y sus dimensiones.

(b) La imagen del vector $(2,-3,5)$.

Cambio de base

Supongamos que tenemos dos bases, $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Por ser B' base, cada vector de B se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de B'.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n, \\ u_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n, \\ &\vdots \\ u_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

La matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz de cambio de base** de la base B a la base B'.

Cambio de base

Teorema.

Sea P una matriz de cambio de base de una base B a una base B' en un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Entonces P es inversible y para todo $w \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$[w]^t_{B'} = P[w]^t_B \quad \text{y por consiguiente } [w]^t_B = P^{-1}[w]^t_{B'}.$$

Cambio de base

Ejemplo 7. Sean $B = \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Otra base posible de $\mathbb{R}^2$ es $B' = \{v_1 = (1,3), v_2 = (-1,2)\}$. Hallar la matriz de cambio de base de B a B'.

Aplicaciones

Ejemplo 8. Un fabricante produce 3 artículos diferentes, cada uno de los cuales requiere para su elaboración de 2 materias primas. Los tres productos se denotan por p_1, p_2 y p_3 y las dos materias primas por M_1 y M_2. En la tabla que se indica a continuación se representa el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto

	p_1	p_2	p_3
M_1	1	2	1
M_2	3	1	2

(a) Determinar la ley que asocia a cada vector de producción (p_1, p_2, p_3) el vector de materias primas (M_1, M_2) que le corresponde para que dicha producción sea posible.

(b) Utilizar una transformación lineal para describir la ley del apartado anterior.

(c) Determinar los subespacios vectoriales núcleo e imagen.

(d) Cuidado!

Aplicaciones

Ejemplo 9. La población activa de un país se clasifica en 3 categorías profesionales:

- Técnicos superiores (ts);
- Obreros especializados (oe);
- Obreros no especializados (one).

Así, en cada generación k la fuerza de trabajo del país está caracterizada por el número de personas incluidas en las 3 categorías, es decir te, oe y one. Suponiendo que:

- Cada trabajador activo sólo tiene un hijo.
- El 50 % de los hijos de los ts lo son también, el 25 % pasa a ser oe y el 25 % restante es one.
- Los hijos de los oe, se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes: 30 %, 40 % y 30 %.
- Para los hijos de los one las proporciones de reparto entre las categorías son 50 %, 25 % y 25 %.

Aplicaciones

(a) Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza de trabajo del país de generación en generación.

(b) ¿Cuál será la distribución de los trabajadores a largo plazo independientemente de la distribución inicial?