UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA
MAESTRÍA EN ECONOMÍA — MAESTRÍA EN ECONOMETRÍA
2021

Econometría
Problem Set 4
Máxima Verosimilitud

- **Ejercicio 1.** Obtenga la condición de segundo orden del problema de Máxima Verosimilitud en el modelo lineal normal, asumiendo que los regresores son no aleatorios.

- **Ejercicio 2.** Obtenga el estimador de Máxima Verosímilitud y la distribución asintótica de los siguientes parámetros:
$$\theta = (\beta, \sigma), \gamma = (\beta, \sigma^2), \tau = \frac{\beta}{\sigma}$$
para el modelo lineal normal con regresores no aleatorios.

- **Ejercicio 3.** Pruebe que, asintóticamente, para estimar β con la máxima eficiencia posible no se requiere conocer el verdadero valor de σ_u^2.

- **Ejercicio 4.** Considere a los regresores como aleatorios. Bajo el supuesto de normalidad condicional de los errores, obtenga el estimador de Máxima Verosimilitud condicional y muestre que coincide con el estimador de Máxima Verosimilitud con regresores no estocásticos.

- **Ejercicio 5.** Muestre que considerando a los regresores como aleatorios, la muestra de los regresores X es un estadístico ancillar del parámetro $\theta = \left(\beta, \sigma_u^2\right)$ si su distribución (marginal) no depende de θ. ¿Qué le sugiere entonces el Principio de Condicionalidad? ¿Cumple en este caso el estimador de Máxima Verosimilitud lo que dicho principio sugiere? Comente el resultado hallado en el Ejercicio 4 a la luz de su respuesta al Ejercicio 5.

- **Ejercicio 6.** Considere el sistema de hipótesis
$$R\beta = r$$
Muestre que el estimador de Máxima Verosimilitud restringido coincide con el estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos.

- **Ejercicio 7.** Muestre que los estadísticos de Wald, Lagrange Multiplier y Likelihood Ratio para hipótesis lineales se reducen en el contexto del modelo lineal a:
$$\begin{aligned} W &= n\frac{\widehat{\sigma}_R^2 - \widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2} \\ LM &= n\frac{\widehat{\sigma}_R^2 - \widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_R^2} \\ LR &= n\ln\left(\frac{\widehat{\sigma}_R^2}{\widehat{\sigma}^2}\right) \end{aligned}$$
donde $\widehat{\sigma}^2$ es el estimador de Máxima Verosimilitud de σ_u^2 y $\widehat{\sigma}_R^2$ es su estimador de Máxima Verosimilitud restringido. Pruebe además que:
$$W > LR > LM$$

- **Ejercicio 8.** Pruebe que el estadístico de Wald es invariante ante reparametrizaciones lineales. Muestre con un ejemplo cualquiera que no lo es en general para reparametrizaciones no lineales.

- **Ejercicio 9.** Sea y una variable binaria. Considere el modelo
$$\Pr(y_i = 1/x_i) = F(\beta_0 + \beta_1 x_i)$$
donde $F(.)$ es una función de distribución continua.

  (a) Escriba la función de verosimilitud y formule el problema de maximización. Obtenga las condiciones de primer orden.

  (b) Considere el caso en que x también es una variable binaria. Llame n_1 a la cantidad de individuos de la muestra que verifican $x = 1$. Muestre que
  $$F(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1) = \sum_{x_i=1} \frac{y_i}{n_1}, \qquad F(\widehat{\beta}_0) = \sum_{x_i=0} \frac{y_i}{n_0}$$
  donde $n = n_0 + n_1$.

  (c) Escriba los estimadores de β_0 y β_1 de Máxima Versomilitud.