Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2: Matrices y Sistemas.

Ejercicio 1.

Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{nxn}$.

(a) S_1= *{$A \in \mathbb{R}^{nxn}$: A^t = A} (matrices simétricas).*

S_1 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_1$ $\Rightarrow A_1^t = A_1 \wedge A_2^t = A_2$
$\Rightarrow A_1^t + A_2^t = (A_1 + A_2)^t = A_1 + A_2$
$\Rightarrow A_1 + A_2 \in S_1$.

S_1 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A $\in S_1$ $\Rightarrow A^t$= A
$\Rightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, kA^t= $(kA)^t$= kA
$\Rightarrow$ kA $\in S_1$.

Por lo tanto, el conjunto S_1 es un subespacio.

(b) S_2= *{$A \in \mathbb{R}^{nxn}$: A^t = -A} (matrices antisimétricas).*

S_2 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_2$ $\Rightarrow A_1^t = -A_1 \wedge A_2^t = -A_2$
$\Rightarrow A_1^t + A_2^t = (A_1 + A_2)^t = -(A_1 + A_2)$
$\Rightarrow A_1 + A_2 \in S_2$.

S_2 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A $\in S_2$ $\Rightarrow A^t$= A
$\Rightarrow \forall$ k $\in \mathbb{R}$, kA^t= $(kA)^t$= kA
$\Rightarrow$ kA $\in S_2$.

Por lo tanto, el conjunto S_2 es un subespacio.

(c) S_3= *{$A \in \mathbb{R}^{nxn}$: A_{ij}= 0 si i > j} (matrices triangulares superiores).*

S_3 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_3$ $\Rightarrow A_{1,ij}$= 0 $\wedge$ $A_{2,ij}$= 0, si i > j

$\Longrightarrow A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i $>$ j
$\Longrightarrow A_1$ + A_2 ∈ S_3.

S_3 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_3 $\Longrightarrow A_{ij}$= 0, si i $>$ j
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0, si i $>$ j
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_3.

Por lo tanto, el conjunto S_3 es un subespacio.

(d) S_4= *{A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$: A_{ij}= 0 si i≠ j} (matrices diagonales).*

S_4 es cerrado para la suma:

A_1, A_2 ∈ S_4 $\Longrightarrow A_{1,ij}$= 0 ∧ $A_{2,ij}$= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow A_1$ + A_2 ∈ S_4.

S_4 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_4 $\Longrightarrow A_{ij}$= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0, si i≠ j
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_4.

Por lo tanto, el conjunto S_4 es un subespacio.

(e) S_5= *{A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$: A_{ij}= 0 si i≠ j y A_{11}= ... = A_{nn}} (matrices escalares).*

S_5 es cerrado para la suma:

A_1, A_2 ∈ S_5 $\Longrightarrow A_{1,ij}$= 0 si i≠ j, $A_{1,11}$= … = $A_{1,nn}$ ∧ $A_{2,ij}$= 0 si i≠ j, $A_{2,11}$= … = $A_{2,nn}$
$\Longrightarrow A_{1,ij}$ + $A_{2,ij}$= $(A_1 + A_2)_{ij}$= 0 + 0= 0, si i≠ j ∧ $A_{1,11}$ + $A_{2,11}$= $(A_1 + A_2)_{11}$= … = $A_{1,nn}$ + $A_{2,nn}$= $(A_1 + A_2)_{nn}$
$\Longrightarrow A_1$ + A_2 ∈ S_5.

S_5 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_5 $\Longrightarrow A_{ij}$= 0 si i≠ j ∧ A_{11}= … = A_{nn}
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, kA_{ij}= $(kA)_{ij}$= k0= 0 si i≠ j ∧ kA_{11}= $(kA)_{11}$= … = kA_{nn}= $(kA)_{nn}$
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_5.

Por lo tanto, el conjunto S_5 es un subespacio.

(f) S_6= $\{A \in \mathbb{R}^{nxn}$: *tr (A)= 0}*.

S_6 es cerrado para la suma:

$A_1, A_2 \in S_6$ $\Longrightarrow$ tr (A_1)= 0 ∧ tr (A_2)= 0
$\Longrightarrow$ tr (A_1) + tr (A_2)= tr $(A_1$ + $A_2)$= 0 + 0= 0
$\Longrightarrow$ A_1 + A_2 ∈ S_6.

S_6 es cerrado para la multiplicación de escalares:

A ∈ S_6 $\Longrightarrow$ tr (A)= 0
$\Longrightarrow$ ∀ k ∈ ℝ, k tr (A)= tr (kA)= k0= 0
$\Longrightarrow$ kA ∈ S_6.

Ejercicio 2.

Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

calcular:

(a) *A + 3B - 3C.*

$$A + 3B - 3C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A + 3B - 3C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A + 3B - 3C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) *A + 3 (B - C).*

$$A + 3(B - C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$A + 3(B - C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A + 3(B - C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A + 3(B - C) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) *A - (B - 2C).*

$$A - (B - 2C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$A - (B - 2C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$A - (B - 2C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A - (B - 2C) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) *A - B + 2C.*

$$A - B + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A - B + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

A - B + 2C= $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.

Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4x5}$, $B \in \mathbb{R}^{5x7}$, $C \in \mathbb{R}^{7x5}$. *Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.*

(a) *AB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x7}$.

(b) *BA.*

Esta operación no es posible.

(c) *BC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{5x5}$.

(d) *CB.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{7x7}$.

(e) *ABC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{4x5}$.

(f) *BCA.*

Esta operación no es posible.

(g) *BCBC.*

Esta operación es posible, por lo que el tamaño de la matriz resultado es $\mathbb{R}^{5x5}$.

(h) *AA.*

Esta operación no es posible.

Ejercicio 4.

Sean: $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Calcular:*

(a) A^t.

$A^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) B^t.

$B^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $(AB)^t$.

$(AB)^t=[\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}]^t$

$(AB)^t=[\begin{pmatrix} 6 & -3 & -8 \\ -5 & 6 & -5 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}]^t$

$(AB)^t=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

(d) B^tA^t.

$B^tA^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^tA^t=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.

Dada una matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matriz A?*

(a) $A\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}A$.

A $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$
A $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} ak & bj \\ ck & dj \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera columna por k y la segunda columna por j.

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} ka & kb \\ jc & jd \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera fila por k y la segunda fila por j.

(b) $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A$.

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera columna por 1 y la segunda columna por 1.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Los cambios que se producen en la matriz A es que se multiplica la primera fila por 1 y la segunda fila por 1.

(c) $A\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A$.

$A\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & ak+b \\ c & ck+d \end{pmatrix}.$

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la segunda columna se le suma la primera columna por k.

$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}.$

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la primera fila se le suma la segunda fila por k.

(d) $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}A.$

$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$
$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+bk & b \\ c+dk & d \end{pmatrix}.$

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la primera columna se le suma la segunda columna por k.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{pmatrix}.$

Los cambios que se producen en la matriz A es que a la segunda fila se le suma la primera fila por k.

Ejercicio 6.

Analizar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) *Si A, B* $\in \mathbb{R}^{nxn}$*, entonces, AB= BA.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces, AB= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y BA= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que AB≠ BA.

(b) *Si A* $\in \mathbb{R}^{nxm}$ *y B* $\in \mathbb{R}^{mxp}$ *y AB= 0, entonces, A= 0 o B= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Dadas A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, AB= 0, pero ni A ni B son iguales a cero.

(c) *Si A, B* $\in \mathbb{R}^{nxn}$ *y AB= 0, entonces, BA= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Dadas A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, AB= 0, pero BA= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

(d) *Si A* $\in \mathbb{R}^{nxn}$ *y existe k* $\in \mathbb{N}$ *tal que* A^k*= 0, entonces, A= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, A^2= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero A≠ 0.

(e) *Si A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$ y A^2= A, entonces, A= I_n o A= 0.*

Esta afirmación es FALSA.

Por ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A^2= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero ni A= I_n ni A= 0.

(f) *Si A ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$ y tr (AA^t)= 0, entonces, A= 0.*

Esta afirmación es VERDADERA.

Dada A= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, se tiene que su transpuesta es:

A^t= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Entonces, el producto entre A y A^t:

AA^t= $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2 \end{pmatrix}$

y la traza de este producto:

tr (AA^t)= $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2$ + … + $\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2$
tr (AA^t)= $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$
tr (AA^t)= $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^2$.

Por hipótesis, se tiene que:

tr (AA^t)= 0,

lo cual implica que $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^2$= 0, que se cumple cuando a_{ij}= 0, ∀ i, j, es decir, cuando A=
A= $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7.

Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada. En cada caso, describir, además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

(a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$.

A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & | & 2 \\ -2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix}$.

$F_1 = \frac{1}{3} F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ -2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix}$

$F_2 = F_2 + 2F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & | & \frac{22}{3} \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{3}{22} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = \frac{5}{3} F_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$.

x= -1.
y= 1.

x= 0.
y= 0.

Por lo tanto, este sistema es compatible determinado, ya que r (A)= r (A_b)= n= 2, y su solución es x= -1 e y= 1. Además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado es x= 0 e y= 0.

(b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0. \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, A_b= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$.

$F_2 = F_2 - 2F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_2 = \frac{1}{5} F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - F_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = \frac{1}{5} F_3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = F_1 + 2F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = F_3 - 5F_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$

x= 0.
y= 0.

Por lo tanto, este sistema es incompatible, ya que r (A)= 2≠ r (A_b)= 3, y no tiene solución. Además, el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado es x= 0 e y= 0.

(c) $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$.

(d) $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$.

(e) $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$.

(f) $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$.

(g) $\left\{ \right.$.

(h) $\left\{ \right.$.

Ejercicio 20 (*).

Sean $A=\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B \in \mathbb{R}^{3x3}$ *una matriz tal que det (B)= -2. Hallar todos los valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *para los cuales el sistema* BA^2x*= BAx tiene una única solución.*

En primer lugar, se reexpresa el sistema de la siguiente manera:

BA^2x= BAx
BA^2x - BAx= 0_{3x1}
B (A^2 - A) x= 0_{3x1}

A su vez, como se sabe que $|B| \neq 0$ (= -2), se tiene que B es inversible, es decir, que existe la matriz B^{-1}, por lo cual lo anterior se reduce a:

B^{-1}B (A^2 - A) x= B^{-1} * 0_{3x1}
I (A^2 - A) x= 0_{3x1}
(A^2 - A) x= 0_{3x1}.

Operando sobre la matriz (A^2 - A), se llega a:

(A^2 - A)= A (A - I)

(A^2 - A)= $\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$]

(A^2 - A)= $\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha-3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha-2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(A^2 - A)= $\begin{pmatrix} (\alpha-2)(\alpha-3) & 0 & 0 \\ 2(\alpha-3)+3(\alpha-2) & \alpha-2 & 0 \\ 3(\alpha-3)+5 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}$.

Luego, se computa el determinante de esta matriz (A^2 - A):

$|A^2 - A|$= (α -2) (α - 3) (α - 2) (α - 2)
$|A^2 - A|$= $(\alpha-2)^3$ (α - 3).

Por último, para que el sistema BA^2x= BAx tenga una única solución, este determinante debe ser distinto de cero:

$|A^2 - A|$= 0
$(\alpha-2)^3$ (α - 3)= 0.
α_1= 2; α_2= 3.

El lado izquierdo de esta ecuación es igual a cero (i) cuando $(\alpha-2)^3$= 0, lo cual sucede si α= 2, o (ii) cuando (α - 3)= 0, lo cual sucede si α= 3.

Por lo tanto, los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema BA^2x= BAx tiene una única solución son $\mathbb{R}$ - {2, 3}.

Ejercicio 21.

Ejercicio 22.