Soluciones Práctica 3[1]

1. Ejercicio 1

$$X = \{\text{Posición más alta alcanzada por una mujer}\}$$
$$\#\Omega = 10!$$

Cualquiera de las 5 mujeres alcanza la posición X más alta. En las $X-1$ anteriores se distribuyen hombres y en las $10-X$ siguientes es indistinto. Una fórmula para los casos totales puede ser

$$\#X = 5 \cdot \frac{5!}{(5-(X-1))!}(10-X)!I(X \leq 6)$$

$$P(X) = \frac{\#X}{\#\Omega}$$

Nótese que nunca puede ocurrir que el puesto más alto por una mujer sea mayor a 6.

X	$\#X$	$P(X)$
1	$5 \cdot 9!$	$1/2$
2	$5 \cdot 5 \cdot 8!$	$5/18$
3	$5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7!$	$5/36$
4	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7!$	$5/84$
5	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6!$	$5/252$
6	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4!$	$1/252$
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

La función de probabilidad de masa verifica al condición de cierre. $\sum_{i=1}^{6} P(X_i) = 1$.

2. Ejercicio 2

$$X = \begin{cases} 0 & \text{Persona no vota a A} \\ 1 & \text{Persona vota a A} \end{cases} \implies X \sim Ber(p_i)$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Suponiendo que la probabilidad p de votar al candidato A es igual para todos los votantes entonces y que la intención de voto es independiente entre ellos. $X_1, \ldots, X_{25} \overset{iid}{\sim} Ber(p)$. Entonces $T = \sum_{i=1}^{25} X_i \sim B(25, p)$ de manera tal que

$$P(T = t) = \binom{25}{t} p^t (1-p)^{1-t}$$

[1]Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Pedro Martínez Bruera, Tomás Rosé y Pablo Escobar.

3. Ejercicio 3

A

Ω	1	2	3	4	5
1		$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$
2			$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$
3				$(3,4)$	$(3,5)$
4					$(4,5)$

B

$$D = \{\text{La tarjeta es defectuosa}\}$$

$$ND = \{\text{La tarjeta no es defectuosa}\}$$

$$Lote: \underline{D}\,\underline{D}\,\underline{ND}\,\underline{ND}\,\underline{ND}$$

$$X = \{\text{Número de tarjetas defectuosas entre las inspeccionadas}\}\; X \sim H(n = 5, r = 2, m = 2)$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{3}{2-x}}{\binom{5}{2}}$$

X	0	1	2
$P(X)$	$3/10$	$6/10$	$1/10$

C

$$F(X)\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3/10 & 0 \leq x < 1 \\ 9/10 & 1 \leq x < 1 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

4. Ejercicio 4

A

x	1	3	6	12
$P(x)$	0,3	0,1	0,2	0,4

B

$$A = [3,6]\; B = [4,\infty)$$

Usando la función de distribución

$$P(A) = P(x \in [3,6]) = F(6) - F(3) = F(6) - F(2) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$$

$$P(B) = P(x \geq 4) = 1 - F(4) = 1 - F(3) = 0{,}6$$

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(x \geq 6)}{1 - P(A)} = \frac{F(12) - F(6)}{0{,}7} = 4/7$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(4 \leq x \leq 6)}{P(B)} = \frac{F(6) - F(3)}{0{,}6} = 1/3$$

Usando la función de probabilidad puntual

$$P(A) = P(x = 3) + P(x = 6) = 0{,}3$$

$$P(B) = P(x = 6) + P(x = 12) = 0{,}6$$

$$P\left(B|A^c\right) = \frac{P(x = 12)}{1 - P(x = 3) - P(x = 6)} = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}3} = 4/7$$

$$P(A|B) = \frac{P(x = 6)}{P(x = 6) + P(x = 12)} = \frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}4} = 1/3$$

C

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in sop(X)} p(x)x = 0{,}3 * 1 + 0{,}1 * 3 + 0{,}3 * 6 + 0{,}4 * 12 = 7{,}2$$

D

$$Y \sim p(y)$$

$$F(\bar{y}) = \sum_{y=0}^{\bar{y}} p(y)$$

$$F(\bar{y} - 1) = \sum_{y=0}^{\bar{y}-1} p(y)$$

$$\therefore F(\bar{y}) - F(\bar{y} - 1) = p(\bar{y})$$

5. Ejercicio 5

Arrojo 2 dados

$$D_1 = \{\text{Número obtenido en el primer dado}\}$$

$$D_2 = \{\text{Número obtenido en el segundo dado}\}$$

$$Y = \{\text{Mínimo de los dos dados}\} = \text{mín}\{D_1, D_2\}$$

Y	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

A

Y	1	2	3	4	5	6
$P(Y)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

B

$$Z = \{\text{Pago al jugar}\}$$

$$Z(y) = \begin{cases} 0 & y = 1 \vee y = 2 \\ 90 & y = 3 \vee y = 4 \\ 300 & y = 5 \vee y = 6 \end{cases}$$

Z	0	90	300
$P(Z)$	$20/36$	$12/36$	$4/36$

$$\mathbf{E}[Z] = 20/36 \cdot 0 + 12/36 \cdot 90 + 4/36 \cdot 300 = 190/3$$

$$G = \{\text{Ganancia obtenida en el juego}\}$$

$$G = -90 + Z(Y) \implies \mathbf{E}[G] = -90 + \mathbf{E}[Z] = -80/3$$

C

$$P(X|D_1 = 6) \quad = \quad \frac{P(X = x \cap D_1 = 6)}{P(D_1 = 6)}$$

Para $x = 1$: P(X=1 $||D_1 = 6) = \dfrac{P(D_2 = 1 \cap D_1 = 6)}{P(D_1 = 6)} = \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{6}{36}$

Para $x = 2$: P(X=2 $||D_1 = 6) = \dfrac{P(D_2 = 2 \cap D_1 = 6)}{P(D_1 = 6)} = \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{6}{36}$

. . . ...

$$P(X = x|D_1 = 6) = \begin{cases} \frac{6}{36} & x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$P(X|D_1 = 6) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 6/36 & \text{si } x \leq 2 \\ 12/36 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 18/36 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 24/36 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 30/36 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 36/36 & \text{si } 6 \leq x \end{cases}$$

D

Esperanza de G:

$$\mathbf{E}[G|D_1 = 6] = 300 \underbrace{P(G = 300|D_1 = 6)}_{P(X=5|D_1=6)+P(X=6|D_1=6)} + 90 \underbrace{P(G = 90|D_1 = 6)}_{P(X=3|D_1=6)+P(X=4|D_1=6)} + 0 \underbrace{P(G = 0|D_1 = 6)}_{P(X=1|D_1=6)+P(X=2|D_1=6)} = 130$$

La ganancia restandole el costo de entrada:

$$\mathbf{E}[\mathbf{G}] - 90 = 40$$

E

En este caso:

$$P(X = x|D_1 = 6) = \begin{cases} 6/36 & x \in \{1,2,3,4\} \\ 12/36 & x = 5 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Y la esperanza de G es:

$$\mathbf{E}[G|D_1 = 6] = 300 \underbrace{P(G = 300|D_1 = 6)}_{P(X=5|D_1=6)+P(X=6|D_1=6)} + 90 \underbrace{P(G = 90|D_1 = 6)}_{P(X=3|D_1=6)+P(X=4|D_1=6)} + 0 \underbrace{P(G = 0|D_1 = 6)}_{P(X=1|D_1=6)+P(X=2|D_1=6)} - 90 = 40$$

F

En este caso:

$$P(X = x|D_1 = 6) = \begin{cases} 6/36 & x \in \{1,2,3\} \\ 18/36 & x = 4 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Y la esperanza de G es:

$$\mathbf{E}[G|D_1 = 6] = 90 \underbrace{P(G = 90|D_1 = 6)}_{P(X=3|D_1=6)+P(X=4|D_1=6)} + 0 \underbrace{P(G = 0|D_1 = 6)}_{P(X=1|D_1=6)+P(X=2|D_1=6)} - 90 = -30$$

6. Ejercicio 6

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}$$

Sabemos que $e^{tX} \in \{1, e^t, e^{2t}\}$ con probabilidades $1/3, 1/2, 1/6$ respectivamente. Luego

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \sum_{x \in \{0,1,2\}} p(x)e^{tx} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}$$

7. Ejercicio 7

A

Notemos que

x	-2	1	2
$y = -3x + 2$	8	-1	-4

Además

$$P(Y = y) = P(-3X + 2 = y) = P\left(X = \frac{2-y}{3}\right)$$

De manera que

$$P(Y = y) = \begin{cases} 0,3 & \text{si } y = 2 \\ 0,2 & \text{si } y = -1 \\ 0,5 & \text{si } y = -4 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Y) = -1{,}6$$

$$Var(Y) = \sum_{y \in sop(Y)} p(y)y^2 - (-1{,}6)^2 = 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 16 - 1{,}6^2$$

B

Notemos que

x	-2	1	2
$w = x^2 - 2$	2	-1	2

De manera que

$$P(W = w) = \begin{cases} 0,8 & \text{si } w = 2 \\ 0,2 & \text{si } w = -1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(W) = 1{,}4$$

$$Var(W) = \sum_{w \in sop(W)} p(w)w^2 - (1{,}4)^2 = 0{,}8 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 1 - 1{,}4^2$$

C

Notemos que

x	-2	1	2
$z = \ln(x+3)$	0	$\ln(4)$	$\ln(5)$

De manera que

$$P(Z = z) = \begin{cases} 0,3 & \text{si } z = 0 \\ 0,2 & \text{si } z = \ln(4) \\ 0,5 & \text{si } z = \ln(5) \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Z) = 0{,}2 \cdot \ln 4 + 0{,}5 \cdot \ln 5$$

$$Var(Z) = \sum_{z \in sop(Z)} p(z)z^2 - [\mathbb{E}(Z)]^2 = 0{,}2 \cdot \ln(4)^2 + 0{,}5 \cdot \ln(5)^2 - [0{,}2 \cdot \ln 4 + 0{,}5 \cdot \ln 5]^2$$

D

Notemos que

x	-2	1	2
$v = \lvert x \rvert$	2	1	2

De manera que

$$P(V = v) = \begin{cases} 0,8 & \text{si } v = 2 \\ 0,2 & \text{si } v = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(V) = 1{,}8$$
$$Var(V) = \sum_{v \in sop(V)} p(v)v^2 - (1{,}8)^2 = 0{,}8 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 1 - 1{,}8^2$$

8. Ejercicio 8

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Número de pantallas defectuosas en una muestra elegida al azar de tamaño } n = 20\}$$

Sabemos que X sin $B\left(n = 20, p = 5\,\%\right)$. Luego

$$P\left(X < 3\right) = \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i} 0{,}05^i (1 - 0{,}05)^{20-i}$$

Inciso B

$$P\left(X \geq 5\right) = 1 - P\left(X \leq 4\right) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \binom{20}{i} 0{,}05^i (1 - 0{,}05)^{20-i}$$

Inciso C

$$P\left(X \leq 8\right) = \sum_{i=0}^{8} \binom{20}{i} 0{,}05^i (1 - 0{,}05)^{20-i}$$

Inciso D

$$P\left(X = 0\right) = \binom{20}{0} 0{,}05^0 (1 - 0{,}05)^{20-0} = (1 - 0{,}05)^{20}$$

9. Ejercicio 9

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Número de motores que fallan en un avión de 3 motores}\}$$
$$Y = \{\text{Número de motores que fallan en un avión de 5 motores}\}$$

Sin efectuar cálculos la decisión depende de p. A priori uno debería pensar que a mayor probabilidad de falla le convendrá poner menos motores.

Inciso B

Para que el avión funcione correctamente, necesita que al menos dos motores funcionen correctamente para el caso de un avión de tres motores, y al menos tres en un avión con cinco motores. Definamos

$$E_i = \{\text{Más de la mitad de los motores funcionan en un avión de } i \text{ motores}\}$$

Las probabilidades para distintos valores de p son

p	$P(E_3)$	$P(E_5)$
0.4	0.648	0.683
0.5	0.50	0.50
0.6	0.352	0.317

La conclusión a priori no cambia cuando se lo comprueba con los datos. Con probabilidad de falla baja es preferible muchos motores y cuando es alta es preferible pocos motores.

10. Ejercicio 10

A

Definamos

$$X = \left\{\text{Cantidad de alumnos de primer año}\right\}$$
$$Y = \left\{\text{Cantidad de alumnos de segundo año}\right\} = 3 - X$$

Inciso A

$$P(X = 1) = \frac{\binom{20}{1}\binom{30}{2}}{\binom{50}{3}}$$

Inciso B

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{20}{0}\binom{30}{3}}{\binom{50}{3}}$$

Inciso C

Sabemos que $X \sim H(n = 50, r = 20, m = 3)$. Por otra parte, $Y = m - X$ y entonces $Y \sim H(n = 50, r = n - r_x, m = 3)$, donde $r_x = 20$. Luego $\mathbb{E}[Y] = m - \mathbb{E}[X]$ y $Var(Y) = Var(X)$.

11. Ejercicio 11

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Hijos hasta tener dos hijas mujeres}\}$$

Como la probabilidad de tener una hija mujer es $p = 0{,}5$ tenemos que $X \sim BN\left(r = 2, p = 0{,}5\right)$. Intuitivamente: la binomial negativa calcula la probabilidad de que hayan x ensayos Bernoulli hasta obtener los primeros r éxitos. En este caso el fracaso se interpreta como un hijo varón, mientras que el éxito como una hija mujer. Los padres dejan de tener hijos una vez que tuvieron dos mujeres. Luego

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^x$$

Inciso B

$$P\left(X = 4\right) = \binom{3}{1} 0{,}5^4$$

Inciso C

Teniendo en cuenta que el $Sop(X) = \{2, 3, 4, ...\}$, entonces:

$$P\left(X \leq 4\right) = P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) + P\left(X = 4\right) = \sum_{i=0}^{2} \binom{i + r - 1}{r-1} 0{,}5^{r+i}$$

Inciso D

Como X tiene distribución binomial negativa, $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{r}{p} = 4$ y por lo tanto se esperaría que esta familia tenga 4 hijos, dos de ellos varones.

12. Ejercicio 12

Definamos

$$X = \{\text{Número de hijos de la familia}\}$$

Como la familia tendrá hijos hasta que tenga tres del mismo sexo, entonces $X \in \{3, 4, 5\}$. Que una familia tenga x hijos quiere decir que tuvo tres de un sexo y $x - 3$ del otro sexo. Teniendo en cuenta que la probabilidad de tener un hijo varón es la misma que una hija mujer.

$$P(X = x) = P\left(3 \text{ varones y } x - 3 \text{ mujeres}\right) + P\left(3 \text{ mujeres y } x - 3 \text{ varones}\right) = 2P\left(3 \text{ mujeres y x-3 varones}\right)$$

Podemos pensar a las probabilidades de tener 3 mujeres y x-3 varones como la probabilidad de tener x-3 hijos varones hasta la tercera mujer. Definamos $V = x - 3$. Luego, $V \sim BN\left(r = 3, p = 0{,}5\right)$ con $v + r = x$. Calculamos las probabilidades

$$P(X = x) = 2 * P(V = x - 3) = 2 * \binom{r + v - 1}{2} 0{,}5^v 0{,}5^r = 2\binom{x-1}{2} 0{,}5^x$$

x	P(X=x)
3	0.25
4	0.375
5	0.375

La variable X no tiene distribución conocida, pero podemos expresarla como función de una variable que sí tiene distribución conocida.

13. Ejercicio 13

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Número de automóviles que (...) sufrirán una falla (...)}\}$$

Sabemos que $X \sim P\left(\lambda = 10\right)$. Luego

$$P\left(X \leq 10\right) = \sum_{i=0}^{10} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \sum_{i=1}^{10} \frac{10^i e^{-10}}{i!}$$

Inciso B

$$P\left(10 \leq X \leq 15\right) = \sum_{i=10}^{15} \frac{10^i e^{-10}}{i!}$$

14. Ejercicio 14

Dado $X \sim P\left(\lambda\right)$ queremos hallar el valor k tal que maximice $P(X = k)$. Consideremos la siguiente función:

$$g(x) = \frac{P(X = x)}{P(X = x-1)} = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}} = \frac{\lambda}{x}$$

Analicemos la función: si $g(x) > 1$ entonces la probabilidad de ocurrencia de x es mayor a la de $x - 1$. Por otra parte, si $g(x) < 1$ entonces la probabilidad de ocurrencia de x es menor a la de $x - 1$. Luego, buscamos k tal que $g(k) > 1$ y $g(k + 1) < 1$. Vemos que $g(\lambda) = 1$, por lo que la moda de la distribución estará en la parte entera de λ.

¿Por qué no podemos tomar condiciones de primer orden sencillamente? porque el dominio de la distribución es discreto, razón por la cual no se puede diferenciar $P(X = x)$.

15. Ejercicio 15

Inciso A

Definamos

$$X_t = \{\text{Número de aviones que llegan al aeropuerto en } t \text{ horas}\}$$

Sabemos que como un proceso de Poisson no tiene memoria, $X \sim P(\lambda = t\alpha)$ con $\alpha = 8$. Luego

$$P(X_1 = 5) = \frac{(1 \cdot 8)^5 e^{-1 \cdot 8}}{5!}$$

$$P(X_1 \geq 10) = 1 - P(X_1 \leq 9) = 1 - \sum_{i=0}^{9} \frac{(1 \cdot 8)^i e^{-1 \cdot 8}}{i!}$$

Inciso B

$$P\left(X_{2,5} \geq 20\right) = 1 - P\left(X_{2,5} \leq 19\right) = 1 - \sum_{i=0}^{19} \frac{(2{,}5 \cdot 8)^i e^{-2{,}5 \cdot 8}}{i!}$$

$$P\left(X_{2,5} \leq 10\right) = \sum_{i=0}^{10} \frac{(2{,}5 \cdot 8)^i e^{-2{,}5 \cdot 8}}{i!}$$

16. Ejercicio 16

Inciso A

Sabemos que $p(0) = e^{-\lambda}$ ya que $0! = 1$.

$$\begin{aligned}
p(1) &= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} = \frac{\lambda}{1} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{1} p(0) \\
p(2) &= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} = \frac{\lambda}{1} p(1) \\
p(3) &= \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{\lambda}{3} \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda}{1} p(3) \\
&\vdots \\
p(k) &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{\lambda}{k} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{k} p(k-1)
\end{aligned}$$

Alternativamente, del Ejercicio 9 sabemos que $g(k) = \dfrac{p(k)}{p(k-1)} = \dfrac{\lambda}{k}$. Despejando llegamos a la misma conclusión.

Inciso B

Definamos

$$X_t = \{\text{Llamadas recibidas en } t \text{ horas}\}$$

Sabemos que $X_t \sim P(\lambda = t \cdot 2)$. Buscamos la probabilidad que no hayan llamadas durante los diez minutos de la ducha de manera tal que no pierda ningún llamado. Es decir $P(X_{1/6} = 0)$. Luego

$$P\left(X_{1/6} = 0\right) = e^{-2/6}$$

Ahora buscamos la duración máxima de la ducha tal que la probabilidad de no perder ninguna llamada sea mayor a 0.5. Es decir, buscamos t tal que $P(X_t = 0) = 1/2$.

$$P(X_t = 0) = e^{-2t} = \frac{1}{2} \implies t = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$

Luego, la duración máxima de la ducha es $t = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ horas.

17. Ejercicio 17

Inciso A

Las condicione sobre $p(x, \lambda, \mu)$ para que sea una pmf son $p(x, \lambda, \mu) \geq 0$ para todo x y $\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \lambda, \mu) = 1$. Demostrar la primera propiedad es trivial, ya que todos los términos son positivos. Para demostrar la segunda propiedad, veamos primero la condición de cierre de una variable aleatoria con distribución de Poisson con tasa de arribo λ. La serie de MacLaurin para $f(x) = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$ es

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Con esto se puede verificar la condición de cierre

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i}}_{=e^{\lambda}} = 1$$

Notemos que la condición de cierre de la Poisson implica que converge absolutamente. Luego, como $\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \lambda, \mu)$ es la suma de dos series que convergen absolutamente también converge absolutamente. Esto verifica la condición de cierre.

Inciso B

Definamos

$$Y = \{\text{Número de errores en una página seleccionada al azar, tipeada por la mecanógrafa } A\}$$

Sabemos que $Y \sim Poi(\lambda)$

18. Ejercicio 18

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Cantidad de veces que se arroja un dado}\}$$

Si el dado extraído es blanco, entonces se lo arroja hasta obtener un número mayor que tres. Luego, la distribución de X condicional en extraer un dado blanco es geométrica, con $p = \frac{1}{2}$.

$$P\left(X = 5 | \text{Dado blanco}\right) = (1-p)^4 p^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Inciso B

En este caso, la distribución condicional en extraer un dado negro es geométrica con $p = \frac{1}{6}$.

$$P\left(X = 5 | \text{Dado negro}\right) = (1-p)^4 p^1 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$$

Inciso C

Por Ley de Probabilidad Total

$$P\left(X = 5\right) = P\left(\text{Dado blanco}\right) P\left(X = 5 | \text{Dado blanco}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$$

19. Ejercicio 19

Sabemos que $X|Z = z \sim B\left(n = z, p = 0{,}6\right)$: tenemos una muestra de tamaño z donde sabemos que la probabilidad de éxito es $p = 0{,}6$. Para obtener la distribución no condicional, sabemos que por Ley de Probabilidad Total se cumple lo siguiente

$$P\left(X = x\right) = \sum_{z=x}^{\infty} P\left(Z = z\right) P\left(X = x | Z = z\right)$$

Intuición: para obtener la distribución no condicional tenemos que tener en cuenta que $X = x$ para muchos valores dados de Z. En particular Z puede ser tan pequeño como x. Trabajando esta expresión

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \sum_{z=x}^{\infty} P(Z=z)\,P(X=x|Z=z) \\
&= \sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!}\binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x} \\
&= \sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!}\frac{z!}{x!(z-x)!} p^x (1-p)^{z-x} \\
&= \sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{x!(z-x)!} p^x (1-p)^{z-x} \\
&= \frac{p^x e^{-\lambda}}{x!}\sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^z (1-p)^{z-x}}{(z-x)!}\frac{\lambda^x}{\lambda^x} \\
&= \frac{(p\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}\sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^{z-x} (1-p)^{z-x}}{(z-x)!} \\
&= \frac{(p\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}\underbrace{\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^v}{v!}}_{(\text{MacLaurin})=e^{\lambda(1-p)}} \\
&= \frac{(p\lambda)^x e^{-p\lambda}}{x!}
\end{aligned}
$$

Y por lo tanto $X \sim P(p\lambda)$.

20. Ejercicio 20

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Número de intentos que realiza hasta hallar el fusible adecuado}\}$$

Como cada vez que prueba si no es el adecuado lo vuelve a colocar en la caja, tenemos que $X \sim G\left(p = \frac{4}{7}\right)$. Luego, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} = \frac{7}{4}$ y $Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{21}{16}$. Finalmente

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(1-\frac{3}{7}\right)^0\left(\frac{4}{7}\right)^1 - \left(1-\frac{3}{7}\right)^1\left(\frac{4}{7}\right)^1$$

Inciso B

Definamos

$$Y = \{\text{Número de intentos que realiza hasta hallar el fusible adecuado}\}$$

En este caso si prueba y no es el adecuado no lo vuelve a colocar en la caja. Luego, la función de probabilidad puntual y los momentos serán

y	$P(Y=y)$	$y \cdot P(Y=y)$	$y^2 \cdot P(Y=y)$
1	$\frac{4}{7}$	0,57	0,57
2	$\frac{2}{7}$	0,57	1,14
3	$\frac{4}{35}$	0,34	0,11
4	$\frac{1}{35}$	0,11	0,46

Finalmente

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=1}^{4} y \cdot P(Y=y) = 1{,}60$$

$$Var(Y) = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}[Y]^2 = 0{,}64$$

21. Ejercicio 21

Inciso A

Definamos

$$Y_i = \{\text{Número de ventas en el día } i\}$$
$$X = \{\text{Número de ventas en dos días}\} = Y_1 + Y_2$$

Asumimos que Y_1 es independiente de Y_2. Calculamos la pmf utilizando Ley de Probabilidad Total

$$P(X=0) = P(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 0) \overset{indep}{=} P(Y_1 = 0) \cdot P(Y_2 = 0)$$

$$P(X=1) = P(Y_1 = 1 \cap Y_2 = 0) + P(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 1) \overset{indep}{=} P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 0) + P(Y_1 = 0) \cdot P(Y_2 = 1)$$

$$P(X=2) = P(Y_1 = 2 \cap Y_2 = 0) + P(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 2) + P(Y_1 = 1 \cap Y_2 = 1) \overset{indep}{=}$$
$$P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 0) + P(Y_1 = 0) \cdot P(Y_2 = 1) + P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 1)$$

$$P(X=3) = P(Y_1 = 2 \cap Y_2 = 1) + P(Y_1 = 1 \cap Y_2 = 2) \overset{indep}{=} P(Y_1 = 2) \cdot P(Y_2 = 1) + P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 2)$$

$$P(X=4) = P(Y_1 = 2 \cap Y_2 = 2) \overset{indep}{=} P(Y_1 = 2) \cdot P(Y_2 = 2)$$

x	$P(X=x)$
0	0,49
1	0,28
2	0,18
3	0,04
4	0,01

Inciso B

$$P(X > 2 | X > 0) = \frac{P(X > 2 \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 0)}$$

Inciso C

Definamos

$$Z_t = \{\text{Cantidad de reparaciones en } t \text{ horas de uso}\}$$

Sabemos que $Z_t \sim P(\lambda = 0{,}025 \cdot t)$.

$$P(Z_{240} \leq 4) = \sum_{i=0}^{4} \frac{(0{,}025 \cdot 240)^i e^{-0{,}025 \cdot 240}}{i!}$$

Inciso D

Definamos

$$W = \{\text{Número de centros de entre cinco que necesitan a lo sumo 4 reparaciones}\}$$

Sabemos que $W \sim B\left(n = 5, p = P(Z \leq 4)\right)$.

$$P(W \geq 1) = 1 - P(W = 0) = 1 - \binom{5}{0} P(Z \leq 4)^0 (1 - P(Z \leq 4))^{5-0}$$

22. Ejercicio 22

Inciso A

Definamos

$$D_t = \{\text{Número de desperfectos en } t \text{ semanas}\}$$

Sabemos que $D \sim P(\lambda = 2 \cdot t)$. Asumo que quince días son dos semanas. Luego

$$P(D_2 > 3) = 1 - P(D_2 \leq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{(2 \cdot 2)^i e^{-2 \cdot 2}}{i!}$$

Inciso B

Definamos

$$Z = \{\text{Gasto en mantenimiento}\}$$

Z es la siguietne función de D

$$Z = \begin{cases} 20 \cdot D & D \leq 3 \\ 70 & D \geq 4 \end{cases}$$

Luego, la función de probabilidad de masa es

z	$P(Z=z)$
0	0,1353
20	,2707
40	0,2707
60	0,1804
70	0,1429

Definamos ahora

$$G = \{\text{Ganancia neta semanal}\} = 120 - Z$$

Luego, la función de probabilidad de masa es

g	$P(G=g)$
120	0,1353
100	,2707
80	0,2707
60	0,1804
50	0,1429

Adicionalmente $\mathbb{E}[G] = 120 - \mathbb{E}[Z]$

Inciso C

Definamos

$$S = \left\{\text{Número de semanas transcurridas hasta tener una ganancia mensual de 120}\right\}$$

Asumiendo que las probabilidades son independientes entre semanas, tenemos que $S \sim G\left(p = P(G = 120)\right)$. Luego

$$P\left(S = 5\right) = \left(1 - P\left(G = 120\right)\right)^4 P\left(G = 120\right)^1$$

23. Ejercicios 23 y 27

Note que estos ejercicios ya estaban resueltos en el apunte de momentos para variables aleatorias discretas, subido al Campus Virtual anteriormente. De hecho, en dicho apunte podrá ver cómo calcular los momentos de otras variables aleatorias discretas con distribuciones conocidas.

23.1. Variable aleatoria Bernoulli

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF

$$E(X) = \sum_{x:p(x)>0} xp\left(x\right) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E(X^2) = \sum_{x:p(x)>0} x^2 p\left(x\right) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

Entonces,

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

(b) Calculemos primero la función generadora de momentos si $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$. La función de probabilidad puntual de X está dada por

$$\mathrm{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

para $x = 0, 1$ por lo que la función generatriz de momentos es

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] \\ &= \sum_{x=0}^{1} e^{tx}\mathrm{P}(X = x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} e^{tx}p^x(1-p)^{1-x} \\ &= (1-p) + e^t p \\ &= 1 - p + pe^t \end{aligned}$$

En primer lugar, derivamos $M_X(t) = 1 - p + pe^t$ respecto de t una y dos veces. Luego, evaluamos dichas expresiones en $t = 0$ para obtener los momentos no centrados:

$$\begin{aligned} M'_X(t) = pe^t &\Rightarrow M'_X(0) = E(X) = p \\ M''_X(t) = pe^t &\Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = p \end{aligned}$$

Lo que conduce a que $\mathrm{Var}(X) = p - p^2$

23.2. Variable aleatoria binomial

La función de probabilidad puntual de $X \sim B(n, p)$ es

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición de cierre:

$$p_X(1) + \cdots p_X(2) + \cdots + p_X(n) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + 1 - p)^n = 1$$

donde usamos que $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} = (a+b)^n$, con $a = p$, $b = 1 - p$.

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \underbrace{0 \cdot \frac{n!}{0!(n-0)!} p^0 (1-p)^{n-0}}_{0} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

Reescribiendo el factorial $(n-x)!$

$$
\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x-1+1)!} p^x (1-p)^{n-x}
$$

Notemos que, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

Sustituimos el índice x por el índice ℓ, de la siguiente manera $\ell = x-1$. Es decir, como x toma los valores $1, \ldots, n$; entonces ℓ toma los valores $0, \ldots, n-1$. Reescribiendo la expresión anterior, tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= np \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!((n-1)-\ell)!} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell}}_{=1,\text{ suma PMF de } L \sim Bin(n-1,p)} = np
\end{aligned}
$$

Calculemos ahora $E(X^2)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \left(\left(x^2 - x\right) + x\right) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \left(x^2 - x\right) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

Usando que:

- si $x = 0$ ó $x = 1$ entonces $x^2 - x = 0$, por lo que la primera sumatoria se puede empezar a sumar desde $x = 2$.
- si $x = 0$ entonces $x = 0$, por lo que la segunda sumatoria se puede empezar a sumar desde $x = 1$.

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$
- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $p^x = p \cdot p^{x-1}$
- $p^x = p^2 \cdot p^{x-2}$
- haciendo los cambios de índices $s = x-2$ en la primera sumatoria y $\ell = x-1$ en la segunda sumatoria

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] =& n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} p^{x-2}(1-p)^{n-x} + np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x} \\
=& n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{s=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-s)!s!} p^{s}(1-p)^{n-2-s}}_{=1,\text{ suma PMF de } S \sim Bin(n-2,p)} = np + np \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-\ell)!\ell!} p^{\ell}(1-p)^{n-1\ell}}_{=1,\text{ suma PMF de } L \sim Bin(n-1,p)} = np \\
=& n(n-1)p^2 + np.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$\mathrm{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

(b) En este caso mostramos cómo obtener la función generadora de momentos. No obstante, también podemosusar una propiedad que explica por qué la MGF de $X \sim Bin(n,p)$ tiene esta expresión:

$$M(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

Si $X \sim Bin(n,p)$, se puede escribir a $X = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, donde $A_i \sim_{iid} Be(p)$.

En ese caso vale que $M_X(x) = M_{A_1+\dots+A_n(x)} \underbrace{=}_{A_i \text{ indep}} \prod_{i=1}^{n} M_{A_i}(x) = M_{A_1}(x)\cdots M_{A_n}(x) \underbrace{=}_{A_i\ id} (M_{A_1}(x))^n$

Por eso la MGF de una v.a. $X \sim Bin(n,p)$ es la MGF de una v.a. $Y \sim Be(p)$ elevada a la n.
Ahora sí, mostremos por definición cómo obtener la MGF de $X \sim Bin(n,p)$.

$$\begin{aligned}
M(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\
M(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(pe^t\right)^x(1-p)^{n-x} \\
&= \left(pe^t + 1 - p\right)^n
\end{aligned}$$

donde en el último paso se usa la regla del binomio:

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x} = (a+b)^n$$

Por lo tanto, para obtener los primeros dos momentos, derivamos una y dos veces respecto de t y luego evaluamos en $t = 0$.

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} \cdot pe^t \Rightarrow M_X'(0) = E(X) = np \\
M_X''(t) &= n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} \cdot pe^t + n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2} \cdot p^2e^{2t} \Rightarrow M_X''(0) = E(X^2) = np + n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Var}(X) = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-p)$

23.3. Variable aleatoria geométrica

La función de probabilidad puntual de $X \sim Ge(p)$ es

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{si } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición de cierre:

- Si $p = 1$ entonces $p_X(1) = 1$ porque el evento ocurre con certeza.
- Si $p < 1$, entonces:

$$p_X(1) + p_X(2) + \cdots = \sum_{x=1}^{+\infty} (1-p)^{x-1} p = p \sum_{x=0}^{+\infty} (1-p)^x = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

donde usamos que $a = 1 - p < 1$, que $\sum_{x=1}^{+\infty} a^{x-1} = \sum_{x=0}^{+\infty} a^x$, porque si x toma los valores naturales desde 1..., entonces $x - 1$ toma los valores desde 0 y $\sum_{x=0}^{+\infty} a^x = \frac{1}{1-a}$, ver apéndice, resultado 0 para ver la demostración.

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF. Para poder demostrar cuánto vale su esperanza, usamos el resultado 1 del apéndice con $a = 1 - p$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p (1-p)^{x-1} \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\ &= p \frac{1}{[1-(1-p)]^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Para poder demostrar cuánto vale su varianza, usamos el resultado 2 del apéndice con $a = 1 - p$.

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p (1-p)^{x-1} \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-p)^{x-1} \\ &= p \frac{1+1-p}{[1-(1-p)]^3} \\ &= \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

(b) Consideramos la MGF de $X \sim Ge(p)$,

$$M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

Para obtener los primeros dos momentos, derivamos una y dos veces respecto de t y luego evaluamos en $t = 0$.

$$M_X'(t) = \frac{pe^t[1 - \cancel{(1-p)e^t} + \cancel{(1-p)e^t}]}{(1-(1-p)e^t)^2} \Rightarrow M_X'(0) = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$M_X''(t) = \frac{pe^t\left[\left(1-(1-p)e^t\right)^2 + 2(1-p)(1-(1-p)e^t)\right]}{\left(1-(1-p)e^t\right)^4} \Rightarrow M_X''(0) = E(X^2) = \frac{2-p}{p^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

24. Ejercicio 24

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{x \in Sop(X)} (ax+b)p_X(x) \\
&= \sum_{x \in Sop(X)} ax \cdot p_X(x) + \sum_{x \in Sop(X)} b \cdot p_X(x) \\
&= a \underbrace{\sum_{x \in Sop(X)} x \cdot p_X(x)}_{=\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum_{x \in Sop(X)} \cdot p_X(x)}_{=1} \\
&= a\mathbb{E}(X) + b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= \mathbb{E}\left((Y - E(Y))^2\right) \\
&= E\left((aX + b - (a\mathbb{E}(X) + b))^2\right) \\
&= E\left((aX - aE(X))^2\right) \\
&= E\left(a^2(X - E(X))^2\right) \\
&= a^2 E\left((X - E(X))^2\right) \\
&= a^2 Var(X)
\end{aligned}$$

25. Ejercicio 25

Hay seis números ganadores y 41 números no ganadores. Definamos

$$X = \{\text{Cantidad de números ganadores en una tarjeta elegida al azar}\}$$

Sabemos que $X \sim H\left(n = 47, r = 6, m = 6\right)$. Luego

$$P\left(\text{Ganar}\right) = P\left(X = 6\right) = \frac{\binom{6}{6}\binom{41}{0}}{\binom{47}{6}} = \frac{1}{10737573}$$

Definamos

$$G = \{\text{Ganancia neta del juego}\} = \begin{cases} 1500000 - 4 & P(\text{Ganar}) \\ -4 & 1 - P(\text{Ganar}) \end{cases}$$

De manera tal que la ganancia esperada del juego es

$$\mathbb{E}\left[G\right] = -2603$$

Definamos

$$Y = \{\text{Número de tarjetas compradas hasta ganar el primer premio}\}$$

Sabemos que $Y \sim G(p = P(\text{Ganar}))$ por lo que $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{P(\text{Ganar})} = 10737573$. Finalmente definamos

$$Z = \{\text{Gasto hasta ganar el primer premio}\} = 4 \cdot Y$$

Luego $\mathbb{E}[Z] = 4 \cdot \mathbb{E}[Y] = 42950292$.

26. Ejercicio 26

Definamos

$$X = \{\text{Número de individuos que entran a comprar la revista}\}$$

Sabemos que $X \sim P\left(\lambda = 4\right)$. Ahora definamos

$$Y = \{\text{Número de ejemplares vendidos}\}$$

Como sólo hay cinco revistas, $Y = \min\{X, 5\}$. Luego, Y tiene la siguiente función de probabilidad de masa

y	$P(Y = y)$
0	0,0183
1	0,0733
2	0,1465
3	0,1954
4	0,1954
5	0,3711

Notemos que la probabilidad de vender cinco ejemplares es la probabilidad que vengan cinco o más persons a comprar la revista. Finalmente, $\mathbb{E}[Y] = 3{,}5896$.

27. Ejercicio 27

Ver ejercicio 23

28. Ejercicio 28

Sea X la demanda anual de autos en la concesionaria. Luego $X \sim Po(\lambda = 4)$.

A

La concesionaria tiene un stock de 3 unidades. Luego, venderá todo su stock siempre que $X \geq 3$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \geq 2) \simeq 0{,}7619$$

B

Sea V la cantidad de autos vendidos por la concesionaria en un año. Luego, $sop(V) = \{0, 1, 2, 3\}$.

v	$P(V = v)$
0	$P(X = 0) = 0{,}0183$
1	$P(X = 1) = 0{,}0732$
2	$P(X = 2) = 0{,}1465$
3	$P(X \geq 3) = 0{,}7619$

C

Sea G la ganancia anual en pesos de la concesionaria. Notemos que $G = 700000 \cdot V - 300000$. Luego

g	$P(G = g)$
-300000	$P(V = 0) = 0{,}0183$
400000	$P(V = 1) = 0{,}0732$
1100000	$P(V = 2) = 0{,}1465$
1800000	$P(V = 3) = 0{,}7619$

29. Ejercicio 29

Sea X el número de partidos perdidos por Kasparov. Como hay $n = 100$ partidos y cada partido es un ensayo de Bernoulli con probabilidad $p = 1/100$ de éxito (notemos que éxito quiere decir *Kasparov pierde* porque X registra la cantidad de partidos perdidos),

$$X \sim Bin(100, 1/100)$$

. Entonces

$$P(X = 0) = p_X(0) = \binom{100}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^{100-0} = \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 0{,}366$$

Veamos qué ocurre si aproximamos la distribución binomial de X con la distribución de una v.a. $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ con

$$\lambda = np = 100 \times 1/100 = 1$$

$$P_Y(0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-1}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-1}\frac{1}{0!} = e^{-1} = 0{,}368$$

Asi que vemos que $p_X(0)$ y $P_Y(0)$ difieren recién en el tercer dígito decimal.