UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA
MAESTRÍA EN ECONOMÍA — MAESTRÍA EN ECONOMETRÍA
2022

Econometría
Problem Set 0
Repaso de Matemática

---

1. Un breve repaso...

Sea A una matriz de $n \times K$.

- Si $n = K$, A es una matriz **cuadrada**. Algunos tipos de matrices cuadradas son:
  - Matriz **simétrica**: Es aquella en la cual $a_{ik} = a_{ki}$ para todo i y k. Una matriz es simétrica si y sólo si $A = A'$.
  - Matriz **diagonal**: Los únicos elementos distintos de 0 aparecen en la diagonal principal.
  - Matriz **escalar**: Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal valen lo mismo.
  - Matriz **ortogonal:** $A'A = AA' = I$. Una matriz es ortogonal si y s'olo si $A' = A^{-1}$.
- Matriz **idempotente**: Una matriz M es idempotente si $M^2 = MM = M$.
- Si M es una matriz idempoténte y simétrica, entonces $M'M = M$.
- Matriz **no singular**: Una matriz es **no singular** si y s'olo si tiene inversa. Es decir, A es no singular si existe M^{-1}.

Algunos resultados a tener en cuenta:
Dada una matriz A cuadrada...

- $(AB)' = B'A'$
- $(ABC)' = C'B'A'$
- Para que sea no singular, $|A| \neq 0$.
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
- Si A es simétrica, entonces A^{-1} es simétrica.
- Si ambas inversas existen: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
- Sea B otra matriz cuadrada. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.
- $\det(A') = \det(A)$

Dada una matriz A cuadrada, considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Ac = \lambda c$$

Los vectores c que resuelven este sistema se llaman “vectores característicos” o “autovectores”, y están asociados a “raíces características” o “autovalores” λ.

¿Cómo resolver el sistema para encontrar c y λ?

$$\begin{aligned} Ac &= \lambda Ic \\ (A - \lambda I)c &= 0 \end{aligned}$$

Para que este sistema homogéneo tenga una solución distinta de cero, se requiere que la matriz $(A-\lambda I)$ sea singular (no inversible), i.e., que su determinante sea 0 :

$$|A-\lambda I|=0$$

Este es un polinomio en λ que se denomina "ecuación carateristíca" de A.

A tener en cuenta: las raíces características de una matriz simétrica (por ejemplo, una matriz $X'X$) son reales.

Para encontrar c, retomamos:

$$(A-\lambda I)c=0$$

Una matriz simétrica A de KxK tiene K autovectores distintos $c_1, c_2, ..., c_K$ que son ortogonales entre sí, con los correspondientes autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ (que no necesariamente son iguales entre sí). Sea C una matriz KxK formada a partir de dichos autovectores, i.e:

$$C=[c_1 \;\; c_2 \; ... \;\; c_K]$$

Por su parte, sea Λ una matriz diagonal de KxK formada a partir de los autovalores:

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_K \end{bmatrix}$$

Todas las ecuaciones $Ac_i=\lambda_i c_i$ están contenidas en:

$$AC=C\Lambda$$

Como los autovectores son ortogonales y $c_i'c_i=1$ para todo $i=1,...,K$[1], resulta que $C'C=I$ (i.e., es ortogonal). Esto implica que $C'=C^{-1}$.

Dada una matriz A de KxK, notar que:

$$C'AC=C'C\Lambda=I\Lambda=\Lambda$$

De modo que:

$$\begin{aligned} C'AC &= \Lambda \\ C^{-1}AC &= \Lambda \\ AC &= C\Lambda \\ A &= C\Lambda C^{-1} \\ \text{Y si } A \text{ es simétrica} &: \\ A &= C\Lambda C' \end{aligned}$$

Como C es ortogonal, se dice que A es "diagonalizable ortogonalmente".[2]

Dada una matriz A simétrica:

- Si $x'Ax>0$ para todo vector x distinto de 0, entonces A es **definida positiva.**
- Si $x'Ax<0$ para todo vector x distinto de 0, entonces A es **definida negativa.**
- Si $x'Ax \geqslant 0$ para todo vector x, entonces A es **semidefinida positiva.**
- Si $x'Ax \leqslant 0$ para todo vector x, entonces A es **semidefinida negativa.**

A tener en cuenta:

- Si todos los autovalores de A son positivos, A es definida positiva.

[1]Esto es una convención: dado un autovector c asociado a un autovalor λ, cualquier vector kc es también un autovector asociado a λ. Entonces, se suele normalizar al autovector c tal que $c'c=1$. ¿Cómo? Simplemente dividir a todos los elementos del vector c por $\sqrt{c_1^2+...+c_K^2}$.

[2]Diagonalizar una matriz cuadrada A quiere decir descomponerla como $A=P^{-1}DP$, donde P es una matriz invertible cuyos vectores columna son autovectores de A, y D es una matriz diagonal formada por los autovalores de A.

Si P es una matriz ortogonal, entonces se dice que A es diagonalizable ortogonalmente, y se puede escribir como: $A=PDP'$. Cualquier matriz cuadrada simétrica (con coeficientes reales) es diagonalizable ortogonalmente.

- Si todos los autovalores de A son negativos, A es definida negativa.
- Si algunos autovalores son 0 y los restantes positivos, A es semidefinida positiva.
- Si algunos autovalores son 0 y los restantes negativos, A es semidefinida negativa.

Sea x un vector aleatorio con $E(x) = \mu$ y $Var(x) = E[(x-\mu)(x-\mu)'] = \Sigma$ (“matriz de varianzas y covarianzas”), entonces, dada una matriz $A : E[Ax] = A\mu$ y $Var[Ax] = A\Sigma A'$.

Método Delta:

- **Escalar o univariado:**
  Sea Z_n una secuencia de variables aleatorias tal que converge a una normal: $\sqrt{n}(Z_n - w) \to N(0, \sigma^2)$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciable y con derivada primera continua en w. Entonces vale que:

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(w)) \to N(0, g'(w)^2\sigma^2)$$

- **Vectorial o multivariado:**
  Sea $Z_n = \begin{bmatrix} Z_{n,1} \\ \vdots \\ Z_{n,p} \end{bmatrix}$ una secuencia de vectores aleatorios en $\mathbb{R}^p$ tal que converge a una normal p-variada: $\sqrt{n}(Z_n - w) \to N_p(0, \Sigma)$. Sea $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ diferenciable y con derivadas parciales continuas en w. Entonces vale que:

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(w)) \to N_q(0, [\nabla g(w)]' \, \Sigma \nabla g(w))$$

  Donde:

$$g(u_1, ..., u_p) = \begin{bmatrix} g_1(u_1, ..., u_p) \\ \vdots \\ g_q(u_1, ..., u_p) \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{pxq}{\nabla g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}$$

Cambio de variable:
Sea $f_X(x)$ la función de densidad de una variable aleatoria X. Sea $Y = g(X)$, donde g es monótona y sea g^{-1} su función inversa. Entonces la función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) \right|$$

Sea $f_X(x)$ la función de densidad de un vector aleatorio X. Sea $Y = H(X)$, donde H es biyectiva y diferenciable. Entonces la función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \left| \det \nabla (H^{-1}(y)) \right|$$

2. Problemas

Ejercicio 1 *Si A es una matriz simétrica y definida positiva, mostrar que puede hallarse una matriz P no singular tal que se verifica que $A = PP'$.*

Ejercicio 2 *Sea x un vector aleatorio de $n \times 1$ tal que $x \sim N(\mu, \Sigma)$, donde Σ es una matriz simétrica y definida positiva. Mostrar que*

$$(x-\mu)' \, \Sigma^{-1} \, (x-\mu) \sim \chi^2 \, (n) \, .$$

Ejercicio 3 *Sea x un vector aleatorio de $n \times 1$, siendo $x \sim N(0_n, I_n)$, y A y B son matrices de $n \times n$ simétricas e idempotentes. Mostrar que las formas cuadráticas $x'Ax$ y $x'Bx$ son independientes si y sólo si $AB = 0$.*

Ejercicio 4 *Sean x e y variables aleatorias con función de densidad conjunta*

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{C}{2(1-\rho^2)}\right], \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

donde

$$C = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right),$$

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad \sigma_x^2 = var(X), \qquad \sigma_y^2 = var(Y).$$

Mostrar que las variables aleatorias u y v,

$$u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} + \frac{y-\mu_y}{\sigma_y},$$
$$v = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sigma_y},$$

son independientes y tienen distribución normal con media cero y varianza $2(1+\rho)$ y $2(1-\rho)$, respectivamente.

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA
MAESTRÍA EN ECONOMÍA — MAESTRÍA EN ECONOMETRÍA
2022

Econometría
Problem Set 1
Mínimos Cuadrados Clásicos

- **Ejercicio 1.** Considere el siguiente modelo de regresión lineal:

$$y = X\beta + u$$

donde y es un vector de $n \times 1$, X es una matriz de $n \times k$ de observaciones de variables con rango$(X) = k < n$ (con probabilidad 1), β es un vector de $k \times 1$ de parámetros desconocidos, y u es el vector de perturbación estocástica de $n \times 1$ con $\mathbb{E}(u/X) = 0$ y $\mathbb{E}(uu'/X) = \sigma^2 I_n$.

(a) Pruebe que el estimador OLS es el estimador MELI (Mejor Estimador Lineal Insesgado) −o *BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)*− de β. Indique el rol de cada supuesto de Gauss-Markov en la prueba.

(b) Sea c un vector $k \times 1$ de constantes. Muestre que $c'\widehat{\beta}$ es el estimador BLUE de $c'\beta$.

- **Ejercicio 2.** Verificar la condición de segundo orden del problema de minimización de residuos al cuadrado.

- **Ejercicio 3.** Evalúe las consecuencias sobre el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos de un modelo lineal de un cambio de escala en todas las variables, por un lado, y de una traslación en los regresores, por otro lado.

- **Ejercicio 4.** Sea $\widetilde{\beta}$ un elemento genérico del espacio de estimadores de β. Considere al coeficiente de determinación como función de este espacio al intervalo $[0, 1]$, es decir:

$$R^2 = R^2(\widetilde{\beta}) = 1 - \frac{\left(y - X\widetilde{\beta}\right)' \left(y - X\widetilde{\beta}\right)}{y'y - n\overline{y}^2}$$

Probar que, siendo $\widehat{\beta}$ el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos,

$$\hat{\beta} \in \arg\max_{\widetilde{\beta}} \left\{ R^2(\widetilde{\beta}) \right\}.$$

- **Ejercicio 5.** Considere el siguiente modelo de regresión lineal

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + u_t, \qquad (t = 1, \ldots, n)$$

y los siguientes datos elaborados a partir de una muestra de tamaño: $n = 33$

$$\begin{array}{llll} \sum x_{1t}^2 = 2, & \sum x_{2t}^2 = 10, & \sum x_{3t}^2 = 1, & \sum y_t^2 = 35, \\ \sum x_{1t}x_{2t} = 1, & \sum x_{2t}x_{3t} = 0, & \sum x_{1t}x_{3t} = 1, & \\ \sum x_{1t}y_t = 5, & \sum x_{2t}y_t = 10, & \sum x_{3t}y_t = 4, & \end{array}$$

Calcular la estimación OLS de β y de σ_u^2 y la matriz de varianzas y covarianzas de $\widehat{\beta}$.

Econometría
Modelos Lineales - Mínimos Cuadrados Clásicos

Ejercicios adicionales

Sea un modelo de regresión lineal simple:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

(1-a) Plantee la minimización de la suma de residuos al cuadrado y obtenga una expresión para el estimador de la pendiente (use la notación con sumatorias). Interprete conceptualmente el resultado.

(1-b) Muestre que la recta de regresión estimada necesariamente pasa por el punto $(\overline{x}, overline y)$ y encuentre una expresión para el estimador de la constante (use la notación con sumatorias).

(1-c) Muestre la equivalencia entre la expresión matricial $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ y las expresiones obtenidas anteriormente.

(1-d) Plantee la minimización de la suma de residuos al cuadrado de un modelo sin constante (es decir, al modelo de regresión lineal simple que estamos considerando se le impone la restricción de que $\beta_0 = 0$). Obtenga el estimador de la pendiente.

(1-e) Plantee la versión centrada de este modelo. Concluya que de este modelo centrado se obtiene el mismo estimador para la pendiente que el modelo original, y que el estimador de la ordenada al origen puede recuperarse en un cálculo posterior.

(2) Sea el modelo lineal

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i$$

donde D_i es una variable binaria que vale 1 si se cumple alguna condición y 0 si no se cumple. ¿Cuál es el estimador de MCC de β? ¿Cuál es la varianza del estimador? Interprete los resultados.

(3) Sea el modelo lineal

$$y_i = \beta_1 A_i + \beta_2 B_i + u_i$$

donde A_i es una variable binaria que vale 1 si la observación i es de nacionalidad argentina y 0 si no lo es, mientras que B_i es una variable binaria que vale 1 si la observación i *no* es de nacionalidad argentina y 0 si sí lo es. ¿Cuál es el estimador de MCC de β? ¿Cuál es la varianza del estimador? Interprete los resultados.

Econometría
Problem Set 2
Tópicos en el Modelo Lineal

- **Ejercicio 1.** Bajo el supuesto de normalidad, obtener las distribuciones (condicionales a los regresores, en muestras finitas) de $y, \widehat{\beta}, \widehat{u}$ y $\frac{\widehat{\sigma_u^2}}{\sigma_u^2}(n-k)$. Mostrar que las distribuciones de $\widehat{\beta}$ y $\frac{\widehat{\sigma_u^2}}{\sigma_u^2}(n-k)$ son independientes.

- **Ejercicio 2.** Construir una región de confianza para β y un intervalo de confianza para $c'\beta$ a partir de lo hallado en el Ejercicio 1.

- **Ejercicio 3.** Para el modelo y la muestra presentada en el Ejercicio 5 del Problem Set 1, testear la hipótesis $\mathsf{H}_0 : \beta_2 = 0$ contra $\mathsf{H}_1 : \beta_2 > 0$ y la hipótesis $\mathsf{H}_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ contra $\mathsf{H}_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 2$.

- **Ejercicio 4.** A partir de la partición de la regresión, probar el teorema de Frisch-Waugh. ¿Bajo qué condición no es necesaria la parcialización de la regresión?

- **Ejercicio 5.** Utilice los resultados de regresión particionada para probar que los estimadores de Mínimos Cuadrados Clásicos de los coeficientes pendientes muestran el signo de la correlación parcial entre el regresando y el regresor asociado al coeficiente en cuestión.

- **Ejercicio 6.** Utilice los resultados de regresión particionada para probar que en un modelo con intercepto los estimadores de Mínimos Cuadrados Clásicos de los coeficientes de pendiente son los mismos trabajando con (todas) las variables en nivel y en desviación respecto de la media muestral (i.e., centradas). Los estimadores de Mínimos Cuadrados Clásicos de los coeficientes de pendiente muestran el signo de la correlación parcial entre el regresando y el regresor asociado al coeficiente en cuestión.

- **Ejercicio 7.** Obtenga la distribución del estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos del parámetro β.

- **Ejercicio 8.** Muestre que, siendo $\widehat{u}_R$ el residuo del estimador de mínimos cuadrados restringido, se verifica que

$$\left(R\widehat{\beta} - r\right)' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\widehat{\beta} - r\right) = \widehat{u}_R'\widehat{u}_R - \widehat{u}'\widehat{u}$$

  Utilize esta igualdad para concluir que

$$\widehat{u}_R'\widehat{u}_R - \widehat{u}'\widehat{u} \geq 0$$

  Interpretar.

- **Ejercicio 9.** Muestre que el coeficiente de determinación (R^2) es una función (débilmente) creciente del número de regresores incluidos. Para ello, utilize la desigualdad $\widehat{u}_R'\widehat{u}_R - \widehat{u}'\widehat{u} \geq 0$.

- **Ejercicio 10.** Pruebe que el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos de σ_u^2 es consistente.

- **Ejercicio 11.** (*Classical error in variables*). Considere el siguiente modelo simple

$$y_i = \alpha + \beta x_i^* + u_i$$

  bajo los supuestos de Gauss-Markov. Supóngase que el regresor se mide con error, por lo que el investigador observa

$$x_i = x_i^* + \varepsilon_i$$

  con

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_i\}_{i=1}^n &\sim IID\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \\ E\left(u_i v_i | X\right) &= 0 \end{aligned}$$

  Muestre que el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos de β es inconsistente. ¿Qué supuesto se viola en el modelo expresado en términos de x_i?

- **Ejercicio 12.** *(Ridge Regression)*. Suponga que la matriz $(X'X)$ es no singular. Muestre que el estimador cresta, a pesar de ser innecesario y ser sesgado, es mas preciso que el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos.

- **Ejercicio 13.** *(Cambio estructural.)* Considere el siguiente modelo simple:

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

bajo los supuestos de Gauss-Markov. Suponga que en la muestra el modelo sufre un quiebre:

$$\beta = \begin{cases} \beta_1 & t \in \{1, ..., s\} \\ \beta_2 & t \in \{s+1, ..., T\} \end{cases}$$

(a) Suponga que el investigador ignora el cambio estructural. Pruebe que el estimadorde Mínimos Cuadrados Clásicos de β es sesgado. Obtenga la expresión del sesgo.

(b) Suponga que $s = T - 1$. En este caso, no hay grados de libertad suficientes para estimar el modelo en submuestras. Compare los estimadoresde Mínimos Cuadrados Clásicos del parámetro que surgen de:

- Descartar la última observación (en este caso, el modelo es de parámetro constante con $\beta = \beta_1$).
- Incluir en la regresión, de forma aditiva, la siguiente variable binaria

$$d_t = \mathbb{I}(t = T)$$

con $\mathbb{I}$ la función indicadora, que vale 1 cuando su argumento es una proposición verdadera y 0 cuando es falsa.

- **Ejercicio 14.** (*Missing data*). Considere el siguiente modelo simple:

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

Supónga que la muestra puede particionarse en 2 submuestras (A y B) tales que en la segunda submuestra no hay observaciones del regresor. Compare los estimadoresde Mínimos Cuadrados Clásicos de β que resultan de los siguientes procedimientos:

(a) Descartar la segunda submuestra y estimar sólo con la muestra A.

(b) Completar la muestra con la media muestral de la primer submuestra del regresor.

(c) Completar la muestra con ceros (censurar la muestra) y agregar una variable binaria que tome el valor de 1 para toda unidad muestral correspondiente a la segunda submuestra.

(d) Completar la muestra B con la predicción del modelo estimado con la muestra A.

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA
MAESTRÍA EN ECONOMÍA — MAESTRÍA EN ECONOMETRÍA
2021

Econometría
Problem Set 3
Heterocedasticidad y Autocorrelación

- **Ejercicio 1.** Pruebe que la hipótesis de muestreo aleatorio es consistente con la hipótesis de errores esféricos pero inconsistente con la violación de esta hipótesis.

- **Ejercicio 2.** Muestre que el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados es el estimador que resuelve el siguiente problema de minimización de residuos ponderados:

$$\widehat{\beta}_{\text{MCG}} \in \arg\min_{\widetilde{\beta}} \left\{ \left(y - X\widetilde{\beta}\right)' \Omega^{-1} \left(y - X\widetilde{\beta}\right) \right\}$$

- **Ejercicio 3.** Considere el siguiente modelo generalizado,

$$y_t = \beta x_t + u_t; \; E\left(u_t^2|X\right) = \sigma_u^2 x_t^2$$

Obtenga el modelo transformado para obtener una matriz de varianzas y covarianzas de errores escalar y compare con el modelo original. Muestre que el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados es un estimador que "pondera" las observaciones del regresando. Interprete este resultado a la luz del Ejercicio 4.

- **Ejercicio 4.** Considere el siguiente modelo de regresión:

$$y_t = \alpha x_t + u_t, \qquad t = 1, 2, ..., n$$

donde $\{u_t\}$ son variables aleatorias independientes con función de densidad

$$f\left(u_t|x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta x_t^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_t}{\sqrt{\beta} x_t}\right)^2\right], \qquad \beta > 0.$$

Es decir, los errores se distribuyen condicionalmente normal con media 0 y varianza βx_t^2. Hallar el estimador lineal insesgado de mínima varianza y verificar que coincide con el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados.

- **Ejercicio 5.** Sea el modelo

$$\begin{aligned} y_i &= \beta' x_i + u_i \\ \{u_i\} &\sim^{i.i.d.} N\left(0, \sigma_u^2\right) \\ i &\in \{1, 2, ..., n\} \end{aligned}$$

Suponga que los datos se observan de maner agregada por grupos:

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{i=1}^{n_j} y_i, x_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_i \\ j &\in \{1, 2, ..., J\} \\ \sum_{j=1}^{J} n_j &= n \end{aligned}$$

de forma tal que el modelo estimado es:

$$y_j = \beta' x_j + u_j$$

¿Qué propiedades tiene el error del modelo agregado por grupos? ¿Se corrige este problema si se toman los promedios de cada grupo?

- **Ejercicio 6.** Sea el modelo

$$\begin{aligned} y_t &= \beta y_{t-1} + u_t, \qquad &|\beta| < 1 \\ u_t &= \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \qquad &|\theta| < 1 \end{aligned}$$

donde $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{T} \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$.

  (a) Pruebe que el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos de β es inconsistente en la medida en que $\theta \neq 0$.
  (b) ¿Cómo testearía la hipótesis de ausencia de autocorrelación en este modelo?

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA
MAESTRÍA EN ECONOMÍA — MAESTRÍA EN ECONOMETRÍA
2021

Econometría
Problem Set 4
Máxima Verosimilitud

- **Ejercicio 1.** Obtenga la condición de segundo orden del problema de Máxima Verosimilitud en el modelo lineal normal, asumiendo que los regresores son no aleatorios.

- **Ejercicio 2.** Obtenga el estimador de Máxima Verosímilitud y la distribución asintótica de los siguientes parámetros:
$$\theta = (\beta, \sigma), \gamma = (\beta, \sigma^2), \tau = \frac{\beta}{\sigma}$$
para el modelo lineal normal con regresores no aleatorios.

- **Ejercicio 3.** Pruebe que, asintóticamente, para estimar β con la máxima eficiencia posible no se requiere conocer el verdadero valor de σ_u^2.

- **Ejercicio 4.** Considere a los regresores como aleatorios. Bajo el supuesto de normalidad condicional de los errores, obtenga el estimador de Máxima Verosimilitud condicional y muestre que coincide con el estimador de Máxima Verosimilitud con regresores no estocásticos.

- **Ejercicio 5.** Muestre que considerando a los regresores como aleatorios, la muestra de los regresores X es un estadístico ancillar del parámetro $\theta = \left(\beta, \sigma_u^2\right)$ si su distribución (marginal) no depende de θ. ¿Qué le sugiere entonces el Principio de Condicionalidad? ¿Cumple en este caso el estimador de Máxima Verosimilitud lo que dicho principio sugiere? Comente el resultado hallado en el Ejercicio 4 a la luz de su respuesta al Ejercicio 5.

- **Ejercicio 6.** Considere el sistema de hipótesis
$$R\beta = r$$
Muestre que el estimador de Máxima Verosimilitud restringido coincide con el estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos.

- **Ejercicio 7.** Muestre que los estadísticos de Wald, Lagrange Multiplier y Likelihood Ratio para hipótesis lineales se reducen en el contexto del modelo lineal a:
$$\begin{aligned} W &= n\frac{\widehat{\sigma}_R^2 - \widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2} \\ LM &= n\frac{\widehat{\sigma}_R^2 - \widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_R^2} \\ LR &= n \ln\left(\frac{\widehat{\sigma}_R^2}{\widehat{\sigma}^2}\right) \end{aligned}$$
donde $\widehat{\sigma}^2$ es el estimador de Máxima Verosimilitud de σ_u^2 y $\widehat{\sigma}_R^2$ es su estimador de Máxima Verosimilitud restringido. Pruebe además que:
$$W > LR > LM$$

- **Ejercicio 8.** Pruebe que el estadístico de Wald es invariante ante reparametrizaciones lineales. Muestre con un ejemplo cualquiera que no lo es en general para reparametrizaciones no lineales.

- **Ejercicio 9.** Sea y una variable binaria. Considere el modelo
$$\Pr(y_i = 1/x_i) = F(\beta_0 + \beta_1 x_i)$$
donde $F(.)$ es una función de distribución continua.

  (a) Escriba la función de verosimilitud y formule el problema de maximización. Obtenga las condiciones de primer orden.

  (b) Considere el caso en que x también es una variable binaria. Llame n_1 a la cantidad de individuos de la muestra que verifican $x = 1$. Muestre que
  $$F(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1) = \sum_{x_i=1} \frac{y_i}{n_1}, \qquad F(\widehat{\beta}_0) = \sum_{x_i=0} \frac{y_i}{n_0}$$
  donde $n = n_0 + n_1$.

  (c) Escriba los estimadores de β_0 y β_1 de Máxima Versomilitud.

Econometría
Problem Set 5
Modelos Multiecuacionales

- **Ejercicio 1.** Muestre que las formas estructurales de un modelo multiecuacional y de una transformación no singular de dicho modelo comparten la misma forma reducida. Interprete desde el punto de vista del problema de la identificación.

- **Ejercicio 2.** Muestre que en un modelo "stacked" de la forma:

$$y = X\beta + u$$

con y de dimensión $nG \times 1$ y X de dimensión $n.G \times k$ el estimador de mínimos cuadrados en dos etapas de β es el estimador de variables instrumentales que usa como matriz de instrumentos a la predicción de X a partir de la matriz de instrumentos Z.

- **Ejercicio 3.** Muestre que en un modelo general de la forma del presentado en (2) si el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de los errores del modelo para cada unidad observacional, $\widehat{\Sigma}$, es diagonal, los estimadores en 2 y en 3 etapas de β son equivalentes.

- **Ejercicio 4.** Considere el siguiente modelo de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \gamma_{10} + \beta_{12} y_{2t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= \gamma_{20} + \beta_{21} y_{1t} + \gamma_{21} x_t + u_{2t} \end{aligned}$$

donde y_{1t}, y_{2t} son las variables endógenas, x_t es la variable exógena y los errores son homoscedásticos y serialmente incorrelacionados con media cero.

(a) Analice la cualificación de las ecuaciones en términos de identificación.

(b) Derive la forma reducida del modelo.

(c) Muestre que el estimador de Mínimos Cuadrados Indirectos y el estimador de Mínimos Cuadrados en Dos Etapas de β_{12} son equivalentes.