

Trabajo Práctico N° 4:
Forma de Jordan y Formas Cuadráticas.

Ejercicio 1.

Ejercicio 8 (*).

Dada la forma cuadrática $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$q(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es fijo, clasificar q para los distintos valores de a .

En primer lugar, para clasificar la forma cuadrática $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ para los distintos valores de a , es necesario encontrar la matriz asociada a q (matriz A). En términos generales, la forma cuadrática q puede ser escrita en términos de esta matriz A como:

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En particular, se tiene:

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Luego, es necesario encontrar los autovalores de la matriz asociada A :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-1-\lambda)[(a-\lambda)(a-\lambda)-1] = 0$$

$$(a-1-\lambda)[(a-\lambda)^2-1] = 0.$$

Entonces, los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico de A :

$$a-1-\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = a-1.$$

$$(a-\lambda)^2-1 = 0$$

$$(a-\lambda)^2 = 1$$

$$\sqrt{(a-\lambda)^2} = \sqrt{1}$$

$$|a-\lambda| = 1$$

$$a - \lambda = \pm 1$$

$$\lambda = a \mp 1$$

$$\lambda_2 = a - 1.$$

$$\lambda_3 = a + 1.$$

Se tiene que los autovalores de la matriz asociada A son: $\lambda_1 = a - 1$, $\lambda_2 = a - 1$ y $\lambda_3 = a + 1$.

Por lo tanto, la forma cuadrática $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es:

- definida positiva si $a > 1$, ya que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$.
- semidefinida positiva si $a = 1$, ya que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$.
- definida negativa si $a < -1$, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$.
- semidefinida negativa si $a = -1$, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 = 0$.
- indefinida si $-1 < a < 1$, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 > 0$.