# Econometría

## Maestría en Economía - Maestría en Econometría

Lecture 4

# Agenda

# Agenda

# Testing the CAPM

- El Capital Asset Pricing Model (CAPM) o modelo de determinación del precio de los activos desarrollado por Sharpe (1964) y Litner (1965) es ampliamente utilizado en finanzas para estimar el costo de capital para las firmas y evaluar el desempeño de portafolios de acciones en el mercado.
- El CAPM se construye sobre el modelo de elección de portafolios desarrollado por Harry Markowitz (1959). En el modelo de Markowitz, un inversor selecciona un portafolio en el período $t-1$ que produce un retorno estocástico en el período $t$.
- El modelo asume que los inversores son adversos al riesgo y cuando eligen su portafolio están interesados solamente en la media y la varianza del rendimiento de su inversión de un período.
- Como resultado, los inversores eligen portafolios eficientes en media y varianza en el sentido que (i) minimizan la varianza del rendimiento del portafolio, dado el retorno esperado y (ii) maximizan el rendimiento esperado, dada la varianza.

# Testing the CAPM

- El modelo CAPM establece que el retorno esperado de cualquier activo es lineal en su covarianza con el retorno esperado del portafolio que representa el mercado. Esto es,

$$E[R_i] = r_f + \beta_i(E[R_M] - r_f), \quad i = 1, \ldots, n$$

donde $E[R_i]$ y $E[R_M]$ son los retornos esperados del activo $i$ y del portafolio que representa al mercado, respectivamente. $r_f$ es la tasa libre de riesgo y $\beta_i$ es la covarianza entre el retorno del activo $i$ y el retorno del mercado, dividido por la varianza del retorno del mercado. En finanzas este último término se denomina el beta del activo.

# Testing the CAPM

- El CAPM tiene tres implicancias directas:
  - Los retornos esperados de todos los activos están linealmente relacionados con sus betas y no hay ninguna otra variable que tenga poder explicativo adicional.
  - La prima de riesgo de mercado es positiva.
  - En términos de un modelo de regresión de la prima de riesgo de cada activo sobre la prima de riesgo del mercado, la constante del modelo debe ser cero.
- Los tests de "primera generación" consistían en regresiones de corte transversal de los retornos promedio sobre los beta de cada activo (que eran estimados previamente con regresiones de series temporales) y otras variables de control para chequear la primera implicancia mencionada arriba.
- Estos tests tenian un problema principal, los errores en las variables estimadas en el primer paso (los betas).

# Testing the CAPM

- Los tests de "segunda generación" consisten en regresiones multivariantes. Por ejemplo, para $m$ activos y $n$ períodos temporales tenemos,

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{M,t} + u_{i,t}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad t = 1, \ldots, n$$

  donde $r_{i,t}$ es la prima de riesgo real del activo $i$ en el período $t$ y $r_{M,t}$ es la prima de riesgo real del mercado en el período $t$.

- En términos vectoriales,

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_M + u_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

  Estas $m$ ecuaciones aparentemente no están relacionadas. En realidad la relación entre ellas viene dada por la relación entre los errores de las mismas.

# Testing the CAPM

- Si el CAPM se cumple entonces todos los $\alpha_i = 0$ esto significa que no existen otros factores, aparte de la prima de riesgo del mercado, que expliquen las primas de riesgo de los activos.
- El estadístico de contraste para esta hipótesis es un estadístico de Wald estándar,

$$W = \hat{\alpha}'[\widehat{Var(\hat{\alpha})}]^{-1}\hat{\alpha} \sim \chi^2(m)$$

Si este estadístico se desvía significativamente de cero, entonces concluímos que el CAPM no explica completamente las variaciones en los retornos de los activos.

# Ecuaciones aparentemente no relacionadas

- El modelo de ecuaciones aparentemente no relacionadas (SURE) o modelo de Zellner (1962) general, consiste de $m$ ecuaciones de regresión que individualmente satisfacen todos los supuestos del modelo de regresión lineal múltiple.
-

$$\underset{(n\times 1)}{y_i} = \underset{(n\times k_i)}{X_i}\,\underset{(k_i\times 1)}{\beta_i} + \underset{(n\times 1)}{u_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1}$$

- Si $u_{it}$ es el t-ésimo elemento de $u_i$, asumimos que $(u_{1t}, u_{2t}, \ldots, u_{mt})$ es $i.i.d$ con
  - $E(u_{it}) = 0$
  - $E(u_{it}u_{js}) = \begin{cases} \sigma_{ij} \text{ if } t = s \\ 0 \text{ if } t \neq s \end{cases}$

# Ecuaciones aparentemente no relacionadas

- *Stacking* las $m$ ecuaciones tenemos:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}_{(nm\times 1)} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m \end{bmatrix}_{(nm\times\sum_{i=1}^m k_i)} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}_{(\sum_{i=1}^m k_i\times 1)} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{(nm\times 1)}$$

- Esto es,

# Ecuaciones aparentemente no relacionadas

- $$y = X\beta + u \tag{2}$$
  - $E(u) = 0$
  - $E(uu') = V = \Sigma \otimes I_n = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I_n & \sigma_{12} I_n & \cdots & \sigma_{1m} I_n \\ \sigma_{21} I_n & \sigma_{22} I_n & \cdots & \sigma_{2m} I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m1} I_n & \sigma_{m2} I_n & \cdots & \sigma_{mm} I_n \end{bmatrix}$
- El estimador de MCG (GLS) de $\beta$ es,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GLS} &= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \\ &= [X'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)X]^{-1}X'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)y \end{aligned}$$

- Y su matriz de varianzas y covarianzas

$$Var(\hat{\beta}_{GLS}) = (X'V^{-1}X)^{-1} = [X'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)X]^{-1} \tag{3}$$

# Agenda

# GLS $\equiv$ MCC

- Si los errores de las ecuaciones no están correlacionados ($\sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j$)

$$\hat{\beta}_{GLS} = [X'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)X]^{-1} X'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)y =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} X_1' X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} X_2' X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{mm} X_m' X_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{11} X_1' y_1 \\ \sigma_{22} X_2' y_2 \\ \vdots \\ \sigma_{mm} X_m' y_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} (X_1' X_1)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^{-1} (X_2' X_2)^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{mm}^{-1} (X_m' X_m)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{11} X_1' y_1 \\ \sigma_{22} X_2' y_2 \\ \vdots \\ \sigma_{mm} X_m' y_m \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{GLS} = \begin{bmatrix} (X_1' X_1)^{-1} X_1' y_1 \\ (X_2' X_2)^{-1} X_2' y_2 \\ \vdots \\ (X_m' X_m)^{-1} X_m' y_m \end{bmatrix}$$

# GLS $\equiv$ MCC

- Si $X_1 = X_2 = \cdots = X_m$.
- Definamos $X_1 = X_2 = \cdots = X_m = X_0$.
-

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{GLS} &= [X'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)X]^{-1}X'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)y \\
&= [(I_n \otimes X_0)'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)(I_n \otimes X_0)]^{-1}(I_n \otimes X_0)'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)y \\
&\qquad\qquad \text{por } X = X_0 \\
&= [(\Sigma^{-1} \otimes X_0')(I_n \otimes X_0)]^{-1}(\Sigma^{-1} \otimes X_0')y \\
&\qquad\qquad \text{por } (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD) \\
&= (\Sigma^{-1} \otimes X_0'X_0)^{-1}(\Sigma^{-1} \otimes X_0')y \\
&\qquad\qquad \text{por } (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD) \\
&= [\Sigma \otimes (X_0'X_0)^{-1}](\Sigma^{-1} \otimes X_0')y \\
&\qquad\qquad \text{por } (A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1}) \\
&= [I_n \otimes (X_0'X_0)^{-1}X_0']y = (X'X)^{-1}X'y = \hat{\beta}
\end{aligned}
$$

# Agenda

1. Ecuaciones Aparentemente no Relacionadas (SURE)
   - Motivación
   - Casos Especiales
   - Estimación por FGLS
2. Ecuaciones Simultáneas
   - Motivación
   - Estimación
   - Propiedades
   - Inferencia
   - Identificación

# Ecuaciones aparentemente no relacionadas

- MCGE (FGLS) de dos Etapas
- Primer paso: construya los residuos de MCC (OLS) de la ecuación $i$,

$$\hat{u}_i = y_i - X_i \hat{\beta}$$

- Segundo Paso: estime consistentemente los elementos de $\Sigma$ con,

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n} \hat{u}_i' \hat{u}_j$$

- Tercer Paso: el estimador de MCGE es,

$$\hat{\beta}_{FGLS} = [X'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_n)X]^{-1} X'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_n)y$$

# Ecuaciones aparentemente no relacionadas

- Como hemos visto bajo condiciones generales MCG y MCGE tienen la misma distribución asintótica.

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{FGLS} - \beta) \xrightarrow{d} N[0, \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} X' V^{-1} X)^{-1}], \text{ cuando } n \to \infty$$

- La inferencia estadística se hace como siempre. $H_0 : R\beta = r$,

$$W = (R\hat{\beta}_{FGLS} - r)'[R\widehat{Var(\hat{\beta}_{FGLS})}R']^{-1}(R\hat{\beta}_{FGLS} - r) \xrightarrow{d} \chi^2(q)$$

# Agenda

# Modelo de Oferta de Trabajo

- Considere el siguiente modelo de oferta de trabajo:

$$
\begin{aligned}
h &= \gamma_1 w + z_1\delta_1 + u_1 \qquad (4)\\
w &= \gamma_2 h + z_2\delta_2 + u_2 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

  donde $(h, w)$ denotan los valores de equilibrio de horas trabajadas y salario ofrecido en el mercado.
- Es poco probable que podamos asumir que a un individuo le hacen una oferta salarial exógena y luego él decide cuanto trabajar usando (4).
- En general tanto las horas trabajadas como el salario se determinan conjuntamente.
- Esto es, en la mayoría de los casos $u_1$ estará correlacionado con $w$ y $u_2$ con $h$. En otras palabras, $w$ probablemente sea una variable endógena en (4) y $h$ sea endógena en (5).

# Modelo de Oferta de Trabajo

- Note que este ejemplo puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_1 &= X_1\beta_1 + u_1 \qquad (6) \\ y_2 &= X_2\beta_2 + u_2 \qquad (7) \end{aligned}$$

  que luce como un sistema SURE de dos ecuaciones.
- La única diferencia es que tanto $X_1$ como $X_2$ contienen variables endógenas y exógenas.
- Como no se cumple el supuesto de exogeneidad (estricta o contemporanea) la estimación de estas ecuaciones por MCC o MCGE producirá estimadores inconsistentes.

# Agenda

# Ecuaciones Simultáneas: Estimación

- Pasemos a discutir el modelo general

$$y_i = X_i\beta + u_i$$

  donde $y_i$ es un vector de dimensión $G \times 1$, $X_i$ es una matriz $G \times K$ y $u_i$ es un vector $G \times 1$ de errores.
- Las siguientes condiciones de ortogonalidad, más el supuesto de rango estándar, son la base para estimar consistentemente los parámetros del modelo.
- Supuesto SIV.1: $E(Z_i'u_i) = 0$, donde $Z_i$ es una matriz $G \times L$ de variables instrumentales conocidas.
  Supuesto SIV.2: rango$E(Z_i'X_i) = K$.
  Para el supuesto de rango es necesaria la condición de orden $L \geq K$.

# Ecuaciones Simultáneas: Estimación

- Reescribamos el modelo en forma matricial,

$$
y_i \equiv \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iG} \end{bmatrix}
X_i \equiv \begin{bmatrix} x_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{iG} \end{bmatrix}
u_i \equiv \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iG} \end{bmatrix}
\beta \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_G \end{bmatrix}
$$

- Asumamos que para cada ecuación tenemos un conjunto de variables instrumentales $z_j$ $(1 \times L_j)$ que son exógenas en el sentido que,

$$
E(z_j' u_j) = 0, \;\; j = 1, \ldots, G
$$

- Entonces la matriz de instrumentos $(Z_i)$ $(G \times L)$ tendrá la forma,

$$
Z_i = \begin{bmatrix} z_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_{iG} \end{bmatrix}
$$

# Ecuaciones Simultáneas: Estimación

- Para cada $i$, $Z_i' u_i = (z_{i1} u_{i1}, z_{i2} u_{i2}, \ldots, z_{iG} u_{iG})$ y por lo tanto $E(Z_i' u_i) = 0$. También tenemos,
$$E(Z_i' X_i) = \begin{bmatrix} E(z_{i1}' x_{i1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E(z_{i2}' x_{i2}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E(z_{iG}' x_{iG}) \end{bmatrix}$$
donde $E(z_{ij}' x_{ij})$ es de dimensión $L_j \times K_j$
- El supuesto SIV.2 requiere que esta matriz tenga rango completo. Esto es, el supuesto se satisface si *Rango* $E(z_{ij}' x_{ij}) = K_j$, $j = 1, 2, \ldots, G$.
- Las condiciones de ortogonalidad dadas por SIV.1 sugieren que una estrategia de estimación puede ser resolver el siguiente conjunto de condiciones poblacionales,
$$E[Z_i'(y_i - X_i \beta)] = 0$$

# Ecuaciones Simultáneas: Estimación

- Que $\beta$ es una solución para la ecuación anterior surge de SIV.1 y que es la única solución sigue de SIV.2.
- Por lo tanto aplicando el principio de analogía el estimador de $\beta$ es el que soluciona,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Z_i'(y_i - X_i\hat{\beta})] = 0 \tag{8}$$

- La expresión (8) es un conjunto de $L$ ecuaciones lineales en las $K$ incógnitas $\hat{\beta}$.
- Caso 1: $L = K$ (tenemos exactamente el mismo número de instrumentos que de variables explicativas).
- Entonces si $\sum_{i=1}^{N} Z_i' X_i$ no es singular, El estimador de $\beta$ es,

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i' X_i\right)^{-1} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i' y_i = (Z'X)^{-1}Z'Y$$

# Ecuaciones Simultáneas: Estimación

- En la ecuación anterior $Z$ es la matriz $NG \times L$ obtenida "stacking" $Z_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$, $X$ es la matriz $NG \times K$ obtenida "stacking" $X_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$, e $Y$ es el vector $NG \times 1$ obtenido "stacking" $y_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$.
- Este estimador se conoce como estimador de variables instrumentales en sistemas (SIV).
- Aplicando la WLLN se puede demostrar que si se cumplen los supuestos SIV.1 y SIV.2 el estimador es consistente.
- Caso 2: L > K. Esto significa que hay más instrumentos que variables explicativas y solo en casos especiales la ecuación (SIV) puede resolverse. En su lugar lo que se hace en la práctica es elegir de forma de hacer el vector en (SIV) lo "más chico" posible.

# Ecuaciones Simultáneas: Estimación

- Una primera idea es minimizar el largo Euclídeo cuadrado eligiendo $\hat{\beta}$ de forma de minimizar,

$$\left[\sum_{i=1}^{N} Z_i'(y_i - X_i\hat{\beta})\right]' \left[\sum_{i=1}^{N} Z_i'(y_i - X_i\hat{\beta})\right]$$

- Este método produce estimadores consistentes bajo los supuestos SIV.1 y SIV.2 pero no los más eficientes.
- Una clase más general de estimadores se obtiene usando una matriz ponderadora. Definamos la matriz $\hat{W}$ simétrica y de dimensión $L \times L$.
- Un estimador del método generalizado de momentos (GMM) de $\beta$ es un vector que resuelve,

$$\min_{\hat{\beta}} \left[\sum_{i=1}^{N} Z_i'(y_i - X_i\hat{\beta})\right]' \hat{W} \left[\sum_{i=1}^{N} Z_i'(y_i - X_i\hat{\beta})\right] \tag{9}$$

# Ecuaciones Simultáneas: Estimación

- Como la expresión (9) es una función cuadrática de $\hat{\beta}$ tiene una solución cerrada. Por lo tanto, el estimador de GMM es,

$$\hat{\beta} = (X'Z\hat{W}Z'X)^{-1}X'Z\hat{W}Z'Y \tag{10}$$

- Asumiendo que $X'Z\hat{W}Z'X$ no es singular para mostrar la consistencia de este estimador necesitamos el siguiente supuesto,
  Supuesto SIV.3: $\hat{W} \xrightarrow{p} W$, donde $W$ es una matriz de dimensión $L \times L$, no aleatoria, simétrica y positiva definida.
- En las aplicaciones este último supuesto se va a seguir de la aplicación de la WLLN.
- Bajo los supuestos SIV.1-SIV.3 el estimador de GMM es consistente.

# Agenda

- Escribamos (10) como,

$$\hat{\beta} = \left[ (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i' Z_i)\hat{W}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i' X_i) \right]^{-1} (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i' Z_i)\hat{W}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i' y_i)$$

- y reemplazando $y_i$ por el modelo se obtiene,

$$\hat{\beta} - \beta = \left[ (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i' Z_i)\hat{W}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i' X_i) \right]^{-1} (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i' Z_i)\hat{W}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i' u_i)$$

- Usando SIV.2 $C \equiv E(Z_i' X_i)$ tiene rango $K$ y por el supuesto SIV.3 $C'WC$ tiene rango $K$ y por lo tanto no es singular.
- Aplicando la WLLN,

$$\begin{aligned} plim\hat{\beta} &= \beta + (C'WC)^{-1} C'W\, plim(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i' u_i) \\ &= \beta + (C'WC)^{-1} C'W0 = \beta \end{aligned}$$

# Ecuaciones Simultáneas: Propiedades

- Bajo estos mismos supuestos, el estimador de GMM es asintóticamente normal.
- De (10) tenemos,

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}-\beta)=\left[(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i'Z_i)\hat{W}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z_i'X_i)\right]^{-1}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i'Z_i)\hat{W}(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}Z_i'u_i)$$

- Usando $N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}Z_i'u_i \xrightarrow{d} N(0,\Lambda)$, la distribución asintótica del estimador GMM es normal con matriz de varianzas y covarianzas asintótica,

$$AVar[\sqrt{N}(\hat{\beta}-\beta)]=(C'WC)^{-1}C'W\Lambda WC(C'WC)^{-1} \tag{11}$$

donde $\Lambda \equiv E(Z_i'u_iu_i'Z_i)=Var(Z_i'u_i)$.

# Ecuaciones Simultáneas: Propiedades

- Si $\hat{\Lambda}$ es un estimador consistente de $\Lambda$ entonces la varianza asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\beta}-\beta)$ se puede estimar consistentemente con,

$$\left(\frac{X'Z}{N}\hat{W}\frac{Z'X}{N}\right)^{-1}\frac{X'Z}{N}\hat{W}\hat{\Lambda}\hat{W}\frac{Z'X}{N}\left(\frac{X'Z}{N}\hat{W}\frac{Z'X}{N}\right)^{-1}$$

- La fórmula anterior puede simplificarse eligiendo $\hat{W}$ apropiadamente.
- Una de las alternativas es elegir $\hat{W}$ como,

$$\hat{W}=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z_i'Z_i\right)^{-1}=\left(\frac{Z'Z}{N}\right)^{-1}$$

  que es un estimador consistente de $[E(Z_i'Z_i)]^{-1}$.
- El supuesto SIV.3 solo requiere que $E(Z_i'Z_i)$ exista y no sea singular.

# Ecuaciones Simultáneas: Propiedades

- Reemplazando la expresión elegida para $\hat{W}$ en (10) tenemos,

$$\hat{\hat{\beta}} = [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y \tag{12}$$

- Que es el estimador de mínimos cuadrados en dos etapas para sistemas de ecuaciones (S2SLS).
- El estimador de S2SLS no es necesariamente el estimador asintóticamente más eficiente.
- Para ver esto intuitivamente considere (11) que es la ecuación que queremos que sea mínima.
- Supuesto SIV.4: $\hat{W} = \Lambda^{-1}$.

- Bajo los supuestos SIV.1-SIV.4, el estimador de GMM es el más eficiente entre todos los estimadores de GMM y su varianza asintótica se reduce a,

$$AVar[\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta)] = (C'\Lambda^{-1}C)^{-1}$$

- Cualquier estimador consistente de $\Lambda$ nos da un estimador GMM eficiente. Un procedimiento común es el siguiente.
- 1. Sea $\hat{\hat{\beta}}$ el estimador de S2SLS.
  2. Obtenga el vector de residuos, $(G \times 1)$, $\hat{\hat{u}}_i = y_i - X_i\hat{\hat{\beta}}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.
  3. Un estimador consistente de $\Lambda$ es $\hat{\Lambda} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i'\hat{\hat{u}}_i\hat{\hat{u}}_i'Z_i$.
  4. Elija $\hat{W} = \hat{\Lambda}^{-1} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i'\hat{\hat{u}}_i\hat{\hat{u}}_i'Z_i\right)^{-1}$ y use esta matriz para obtener el estimador GMM.

# Ecuaciones Simultáneas: Propiedades

- La varianza asintótica del estimador de GMM se estima consistentemente con,

$$\left[(X'Z)\left(\sum_{i=1}^{N} Z_i'\hat{\hat{u}}_i\hat{\hat{u}}_i'Z_i\right)(Z'X)\right]^{-1}$$

  donde $\hat{\hat{u}}_i = y_i - X_i\hat{\hat{\beta}}$

- Note que este estimador no pone ninguna restricción sobre la matriz de varianzas y covarianzas de los errores. Usualmente el estimador recibe el nombre de Estimador Chi-Cuadrado Mínimo.
- En el enfoque tradicional de ecuaciones simultáneas, se asume que $Var(u_i|Z_i)$ es constante.
- Este supuesto nos da un estimador que estará en el medio entre el de S2SLS y el estimador más eficiente.
- El estimador se conoce como mínimos cuadrados en tres etapas y es un estimador GMM que usa una matriz de ponderación particular.

# Ecuaciones Simultáneas: Propiedades

- Definamos $\hat{\hat{u}}_i = y_i - X_i \hat{\hat{\beta}}$ como los residuos de la estimación por S2SLS y la matriz de dimensión $G \times G$,

$$\hat{\Omega} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\hat{u}}_i' \hat{\hat{u}}_i$$

- Note que este último estimador es un estimador consistente de $\Omega$ usando argumentos similares a los que utilizamos para MCG.
- La matriz de ponderación utilizada por 3SLS es,

$$\hat{W} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_i' \hat{\Omega} Z_i \right)^{-1} = \left( \frac{Z'(I_N \otimes \hat{\Omega})Z}{N} \right)^{-1} \tag{13}$$

- El estimador de 3SLS es,

$$\hat{\hat{\hat{\beta}}} = [X'Z(Z'(I_N \otimes \hat{\Omega})Z)^{-1} Z'X]^{-1} X'Z(Z'(I_N \otimes \hat{\Omega})Z)^{-1} Z'Y \tag{14}$$

# Ecuaciones Simultáneas: Propiedades

- Si se cumple el Supuesto SIV.5:

$$E(Z_i' u_i u_i' Z_i) = E(Z_i' \Omega Z_i), \quad \text{con } \Omega = E(u_i u_i')$$

  el estimador de 3SLS (14) es eficiente.
- Una condición suficiente para que SIV.5 se satisfaga es que $E(u_i u_i' | Z_i) = E(u_i u_i)$.
- El supuesto SIV.5 implica que el supuesto SIV.4 se cumple porque (13) estima consistentemente $\Lambda^{-1}$.
- Bajo los supuestos SIV.1-SIV.3 y SIV.5 el estimador 3SLS es un estimador de GMM óptimo.
- El estimador de la matriz de varianzas y covarianzas asintóticas del estimador de 3SLS es,

$$\left[ (X'Z) \left( \sum_{i=1}^{N} Z_i' \hat{\Omega} Z_i \right)^{-1} (Z'X) \right]^{-1} = [X'Z\{Z'(I_N \otimes \hat{\Omega})Z\}^{-1} Z'X]$$

# Ecuaciones Simultáneas: Propiedades

- Remark 1: sin el supuesto SIV.5 el estimador 3SLS es generalmente menos eficiente asintóticamente que el estimador chi-cuadrado mínimo y el estimador de la varianza asintótica para 3SLS no es apropiado.
- Remark 2: Aún con el supuesto SIV.5, el estimador de 3SLS NO es más eficiente asintóticamente que el estimador chi-cuadrado mínimo. Ambos estimadores son asintóticamente equivalentes.
- Remark 3: Si el estimador chi-cuadrado mínimo nunca es peor asintóticamente que el estimador de 3SLS, por qué se usa 3SLS?
  - Históricamente uno de los primeros estimadores. GMM a partir de la década de los 80.
  - 3SLS puede tener mejores propiedades en muestra chica.

# Agenda

# Ecuaciones Simultáneas: Inferencia

- Los estadísticos estándar se construyen utilizando el estimador de GMM y la estimación de su matriz de varianzas y covarianzas apropiada.
- Una forma alternativa de contrastar restricciones lineales se basa en la diferencia en la función objetivo de GMM con y sin las restricciones impuestas.
- Para aplicar este estadístico se debe utilizar el estimador de GMM óptimo, de forma tal que estime consistentemente $[Var(Z_i' u_i)]^{-1}$.
- Usando resultados de teoría asintótica anteriores, como $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} Z_i' u_i \xrightarrow{d} N(0, \Lambda)$,

$$\left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} Z_i' u_i \right)' \hat{W} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} Z_i' u_i \right) \xrightarrow{d} \chi_L^2$$

# Ecuaciones Simultáneas: Inferencia

- Definamos a $\hat{\beta}$ como el estimador GMM usando la matriz de ponderación óptima $\hat{W}$ obtenida sin imponer las restricciones y a $\tilde{\beta}$ como el estimador GMM usando la misma matriz ponderadora $\hat{W}$ pero obtenida con las restricciones impuestas.
- Bajo la hipótesis nula el estadístico de distancia GMM tiene la siguiente distribución,

$$\left[ (\sum_{i=1}^{N} Z_i' \tilde{u}_i)' \hat{W} (\sum_{i=1}^{N} Z_i' \tilde{u}_i) - (\sum_{i=1}^{N} Z_i' \hat{u}_i)' \hat{W} (\sum_{i=1}^{N} Z_i' \hat{u}_i) \right] / N \xrightarrow{d} \chi^2_Q$$

  Donde $\hat{u}_i = y_i - X_i\hat{\beta}$ son los residuos del modelo no restringido y $\tilde{u}_i = y_i - X_i\tilde{\beta}$ son los residuos del modelo restringido.
- Si hay más instrumentos que variables explicativas endógenas, entonces se pueden contrastar las restriciones de sobreidentificación.

# Ecuaciones Simultáneas: Inferencia

- En nuestro modelo si $X_i$ es $G \times K$ y $Z_i$ es $G \times L$, entonces hay $L > K$ restricciones de sobreidentificación.
- Para contrastar la hipótesis nula $H_0 : E(Z_i' u_i) = 0$ se utiliza el siguiente estadístico,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} Z_i'\hat{u}_i\right)' \hat{W} \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} Z_i'\hat{u}_i\right) \xrightarrow{d} \chi^2_{L-K}$$

# Agenda

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Para motivar el análisis consideremos un modelo de oferta y demanda de trabajo,

$$
\begin{aligned}
h^s(w) &= \gamma_1 \log(w) + z_{(1)}\delta_{(1)} + u_1 && (15)\\
h^d(w) &= \gamma_2 \log(w) + z_{(2)}\delta_{(2)} + u_2 && (16)
\end{aligned}
$$

- Asumiendo que las horas observadas, $h$, y los salarios observados, $w$ igualan la oferta y la demanda: $h = h^s(w) = h^d(w)$.
- Definiendo $y_1 = h$ e $y_2 = log(w)$ tenemos:,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \gamma_1 y_2 + z_{(1)}\delta_{(1)} + u_1 && (17)\\
y_1 &= \gamma_2 y_2 + z_{(2)}\delta_{(2)} + u_2 && (18)
\end{aligned}
$$

- Que necesitamos para identificar los parámetros de la curva de oferta?

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Intuitivamente no podemos identificar la función de oferta de la de demanda si $z_{(1)}$ y $z_{(2)}$ contienen exactamente los mismos elementos.
- Formalmente, supongamos que las curvas tienen pendientes diferentes. Restando la ecuación (18) de la (17) y dividiendo ambos miembros por $(\gamma_2 - \gamma_1)$ tenemos,

$$y_2 = z_{(1)}\pi_{21} + z_{(2)}\pi_{22} + v_2 \tag{19}$$

  donde $\pi_{21} \equiv \delta_{(1)}/(\gamma_2 - \gamma_1)$, $\pi_{22} \equiv -\delta_{(2)}/(\gamma_2 - \gamma_1)$ y $v_2 \equiv (u_1 - u_2)/(\gamma_2 - \gamma_1)$.
- La ecuación (19) es la forma reducida de $y_2$ porque lo expresa como función de variables exógenas y un error, $v_2$, que es ortogonal a todas esas variables.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Dada la ecuación (17) y la forma reducida (19) podemos usar la condición de identificación presentada para el caso de una sola ecuación.
- Esa condición decía que para poder identificar los parámetros de la curva de oferta (17) necesitamos que la ecuación de la forma reducida contenga al menos una variable exógena que no esté en (17).
- El último punto significa que al menos un elemento de $z_{(2)}$ que no está en $z_{(1)}$ debe tener un coeficiente diferente de cero en (19).
- Podemos establecer la misma condición de identificación pero utilizando las ecuaciones estructurales. Como $\pi_{22}$ es proporcional a $\delta_{(2)}$, entonces en la ecuación (18) al menos un elemento de $z_{(2)}$ que no está en $z_{(1)}$ debe tener un coeficiente diferente de cero.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- En palabras, para identificar la curva de oferta de trabajo se necesita que en la función de demanda haya una variable exógena que no aparezca en la de oferta.
- La identificación de la curva de demanda es similar, esto es, se necesita que la curva de oferta contenga una variable exógena que no esté presente en la de demanda.
- Ahora extenderemos el análisis a un sistema general.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Considere el siguiente sistema de ecuaciones,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_{(1)}\gamma_{(1)} + z_{(1)}\delta_{(1)} + u_1 \\
&\vdots \\
y_G &= y_{(G)}\gamma_{(G)} + z_{(G)}\delta_{(G)} + u_G
\end{aligned}
$$

  Donde $y_{(h)}$ es $1 \times G_h$, $\gamma_{(h)}$ es $G_h \times 1$, $z_{(h)}$ es $1 \times M_h$ y $\delta_{(h)}$ es $M_h \times 1$, $h = 1, 2, \ldots, G$.
- El vector $y_{(h)}$ denota las variables endógenas que aparecen en el lado derecho de la ecuación $h$. Por convención $y_{(h)}$ puede contener cualquier variable endógena excepto $y_h$.
- Las variables en $z_{(h)}$ son las variables exógenas que aparecen en la ecuación $h$.
- El vector de dimensión $1 \times M$ de todas las variables exógenas $z$ se asume que satisface $E(z'u_g) = 0$, $g = 1, 2, \ldots, G$.
- Además, sin pérdida de generalidad asumimos que $E(z'z)$ no es singular.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Ahora extendemos la identificación al sistema presentado. Comencemos identificando la primera ecuación del sistema,

$$y_1 = y_{(1)}\gamma_{(1)} + z_{(1)}\delta_{(1)} + u_1 = x_{(1)}\beta_{(1)} + u_1$$

- Asumiendo que existe, escribamos la forma reducida para $y_{(1)}$ como,

$$y_{(1)} = z\Pi_{(1)} + v_{(1)}$$

  donde $E(z'v_{(1)}) = 0$.
- Definamos la matriz $S_{(1)}$ de dimensión $M \times M_1$ que contiene solo unos y ceros de forma tal que $z_{(1)} = zS_{(1)}$.
- La condición de rango que vimos puede establecerse como: Rango $E(z'x_{(1)}) = K_1$, donde $K_1 = G_1 + M_1$.
- $E(z'x_{(1)}) = E[z'(z\Pi_{(1)}, zS_{(1)})] = E(zz)[\Pi_{(1)}|S_{(1)}]$
  Como $E(z'z)$ tiene rango completo $M$, la condición de rango puede reescribirse como: Rango $[\Pi_{(1)}|S_{(1)}] = G_1 + M_1$.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- En palabras, la matriz $[\Pi_{(1)}|S_{(1)}]$ tiene que tener rango completo.
- Note que $[\Pi_{(1)}|S_{(1)}]$ es de dimensión $M \times (G_1 + M_1)$, por lo tanto, una condición necesaria para tener rango completo es que $M \geq G_1 + M_1$ ó $M - M_1 \geq G_1$.
- Esta última es la condición que ya habíamos encontrado antes, el número de variables exógenas que no aparecen en la primera ecuación, $M - M_1$, debe ser al menos tan grande como el número de variables endógenas que aparecen en el lado derecho de la primera ecuación, $G_1$.
- La condición de orden es una condición necesaria para la identificación pero no es suficiente. Es decir, si no se cumple la ecuación no estará identificada y si se cumple, podría estar identificada.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Como hicimos para el caso de las curvas de oferta y demanda de trabajo, podemos expresar la condición de rango en lugar de utilizar los coeficientes de la forma reducida, utilizando los coeficientes de las ecuaciones estructurales.
- Escribamos el sistema sin ninguna restricción,

$$\begin{aligned} y\gamma_1 + z\delta_1 + u_1 &= 0 \\ &\vdots \\ y\gamma_G + z\delta_G + u_G &= 0 \end{aligned}$$

donde $y = (y_1, y_2, \ldots, y_G)$ es el vector $1 \times G$ de todas las variables endógenas y $z = (z_1, z_2, \ldots, z_M)$ es el vector $1 \times M$ de todas las variables exógenas; $\gamma_g$ es $G \times 1$ y $\delta_g$ es $M \times 1$ para todo $g = 1, 2, \ldots, G$.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Reescribiendo el sistema en forma matricial tenemos,

$$y\Gamma + z\Delta + u = 0$$

donde $u = (u_1, \ldots, u_G)$, $\Gamma$ es $G \times G$ con columna $g$ dada por $\gamma_g$ y $\Delta$ es $M \times G$ con columna $g$ dada por $\delta_g$.

- Asumamos que $\Gamma$ no es singular de forma tal de que exista forma reducida y sea $\Sigma = E(u'u)$ la matriz, $G \times G$, de varianzas y covarianzas de $u$.
- El sistema en forma reducida queda,

$$y = z(-\Delta\Gamma^{-1}) + u(-\Gamma^{-1}) \equiv z\Pi + v$$

- Definamos $\Lambda = E(v'v) = \Gamma^{-1'}\Sigma\Gamma^{-1}$ como la matriz de varianzas y covarianzas de la forma reducida.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- La pregunta relevante es, bajo que condiciones podemos recuperar los parámetros estructurales desde la forma reducida?.
- La respuesta es que sin algunas restricciones sobre los parámetros no podremos identificar la forma estructural.
- Para ver esto más claramente definamos la matriz $F$ no singular de dimensión $G \times G$ y post-multipliquemos el sistema de ecuaciones estructurales,

$$y\Gamma F + z\Delta F + uF = 0, \text{ ó } y\Gamma^* + z\Delta^* + u^* = 0$$

- Es fácil comprobar que esta última ecuación tiene exactamente la misma forma reducida que el sistema original.
- Este resultado significa que sin restricciones en los parámetros estructurales existen muchas estructuras equivalentes, en el sentido de que llevan a la misma forma reducida. De hecho existen tantas estructuras equivalentes como matrices no singulares $F$.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Si $B \equiv \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Delta \end{pmatrix}$ es la matriz $(G \times M) \times G$ de parámetros estructurales, definimos a $F$ como una transformación lineal admisible si se cumple que,
  1. $BF$ satisface todas las restricciones de $B$
  2. $F'\Sigma F$ satisface todas las restricciones de $\Sigma$.
- Para identificar el sistema necesitamos suficiente información sobre los parámetros estructurales de forma tal que $F = I_G$ sea la única transformación lineal admisible.
- Como antes, consideremos la identificación de la primera ecuación del sistema,

$$y\gamma_1 + z\delta_1 + u_1 = 0 \quad \text{ó}$$

$$\gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2 + \cdots + \gamma_{1G}y_G + \delta_{11}z_1 + \delta_{12}z_2 + \cdots + \delta_{1M}y_M + u_1 = 0$$

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- La primera restricción que vamos a imponer es la restricción de normalización haciendo uno de los coeficientes de $\gamma_1$ igual a $-1$.
- Sea $\beta_1 \equiv (\gamma_1', \delta_1')'$ el vector, $(G + M) \times 1$, de parámetros estructurales de la primera ecuación con la restricción de normalización impuesta. Esto es, hay $(G + M) - 1$ parámetros desconocidos en $\beta_1$.
- Asumamos que las restricciones sobre $\beta_1$ pueden expresarse como: $R_1\beta_1 = 0$. Donde $R_1$ es una matriz $J_1 \times (G + M)$ de constantes conocidas.
- Es decir que $J_1$ es el número de restricciones sobre $\beta_1$ (además de la normalización). Asumiendo que el *Rango* $R_1 = J_1$ no tenemos restricciones redundantes.
- Lo que queremos averiguar es cuando son estas restricciones suficientes como para identificar los parámetros de $\beta_1$.
- Nuevamente definamos $F$ como una matriz de dimensión $G \times G$ escrita en términos de sus columnas: $F = (f_1, f_2, \dots, f_G)$.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Considere la siguiente transformación lineal de $B$, $B^* = BF$, tal que la primera columna de $B^*$ es $\beta_1^* = Bf_1$.
- Necesitamos determinar una condición tal que la ecuación $R_1\beta_1 = 0$ nos permita distinguir a $\beta_1$ de cualquier otro $\beta_1^*$.
- El vector $\beta_1^*$ satisface las restricciones lineales de $R_1$ si y solo si, $R_1\beta_1^* = R_1(Bf_1) = (R_1 B)f_1 = 0$ que se satisface naturalmente cuando $f_1 = e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)'$ que implica $\beta_1^* = \beta_1$.
- Decir que la condición anterior se satisface para $f_1 = e_1$ significa que el espacio nulo de $R_1 B$ tiene dimensión uno.
- En términos del rango de la matriz esto es lo mismo que decir que:
  $Rango\ R_1 B = G - 1$
  Esta es la condición de rango para la identificación de $\beta_1$ en la primera ecuación estructural.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Note que la matriz $R_1 B$ puede escribirse como,
  $R_1 B = [R_1 \beta_1, R_1 \beta_2, \ldots, R_1 \beta_G]$
  donde $\beta_g$ es el vector $(G + M) \times 1$ de parámetros estructurales en la ecuación $g$.
- Ahora, por nuestros supuestos sabemos que $R_1 \beta_1 = 0$, por lo que la primera columna de $R_1 B$ es de ceros y la matriz $R_1 B$ no puede tener rango mayor a $G - 1$.
- También sabemos que $\Gamma$ tiene rango completo (i.e. no es singular) de forma tal que $B$ necesariamente tiene rango $G$. Por lo tanto, para que la condición de rango se cumpla necesitamos que *Rango* $R_1 \geq G - 1$.
- Nosotros asumimos que *Rango* $R_1 = J_1$ por lo que una condición necesaria para que la primera ecuación esté identificada es: $J_1 \geq G - 1$.
- $J_1 \geq G - 1$ es la condición de orden general en un sistema.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Note que cuando las restricciones sobre $\beta_1$ son la de normalización y restricciones de exclusión la matriz $R_1$ consiste de ceros y unos de forma tal que el número de filas en $R_1$ iguala el número de variables endógenas excluidas, $G - G_1 - 1$, más el número de variables exógenas excluidas, $M - M_1$.
- En otras palabras: $J_1 = (G - G_1 - 1) + (M - M_1)$, entonces la condición de orden es,
  $(G - G_1 - 1) + (M - M_1) \geq G - 1 \longrightarrow$
  $(M - M_1) \geq G - 1 - (G - G_1 - 1) \longrightarrow$
  $(M - M_1) \geq G_1$.
  Es decir, el número de variables exógenas excluidas debe ser igual o mayor al número de variables endógenas incluidas en la ecuación.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Resumen de los pasos necesarios para chequear la identificación de la primera ecuación del sistema:
  1. Normalice uno de los elementos de $\gamma_1$ igual a $-1$.
  2. Defina la matriz $R_1$ de dimensión $J_1 \times (G + M)$ tal que $R_1\beta_1 = 0$.
  3. Si $J_1 < G - 1$ la ecuación no está identificada.
  4. Si $J_1 \geq G - 1$ la ecuación podría estar identificada.
  5. Sea $B$ la matriz de todos los parámetros estructurales con la condición de normalización impuesta. Si *Rango* $R_1 B = G - 1$, entonces la ecuación está identificada.
- Cuando la condición de rango se satisface, es útil refinar el significado de identificación. En este sentido cuando $J_1 = G - 1$ decimos que la ecuación está exactamente identificada.
- Si $J_1 > G - 1$ decimos que la ecuación está sobreidentificada. En este caso tenemos $J_1 - (G - 1)$ restricciones de sobreidentificación.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Lo visto hasta ahora es el caso más importante de identificación en ecuaciones simultáneas: identificar la ecuación usando solo restricciones de exclusión.
- No obstante, hay ejemplos en la literatura donde la endogenidad está causada por variables omitidas o errores de medición y donde la teoría económica impone restricciones entre ecuaciones.
- Un ejemplo es la estimación de un sistema de oferta y demanda utilizando una encuesta de ingresos y gastos.
- Tipicamente la característica de estas encuestas es que no se pregunta el precio del artículo comprado sino que se reporta el valor unitario del mismo.
- Usar el valor unitario en lugar del precio produce un error de medición en la variable.
- En estos casos las restricciones entre ecuaciones se pueden utilizar para identificar las ecuaciones.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Considere el siguiente sistema de ecuaciones,

$$y_1 = \gamma_{12} y_2 + \delta_{11} z_1 + \delta_{12} z_2 + \delta_{13} z_3 + u_1 \quad (20)$$

$$y_2 = \gamma_{21} y_1 + \delta_{21} z_1 + \delta_{22} z_2 + u_2 \quad (21)$$

donde cada $z_j$ no está correlacionada con $u_1$ y $u_2$.

- Sin información adicional, la ecuación (20) no está identificada y la ecuación (21) está identificada si $\delta_{13} \neq 0$.
- Ahora supongamos que $\delta_{12} = \delta_{22}$. Como $\delta_{22}$ está identificado en (21) podemos tratarlo como un parámetro conocido en la identificación de (20). Esto es, se puede escribir (20) como

$$y_1 - \delta_{12} z_2 = \gamma_{12} y_2 + \delta_{11} z_1 + \delta_{13} z_3 + u_1 \quad (22)$$

donde ahora $y_1 - \delta_{12} z_2$ se conoce.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- Ahora, el lado derecho de (22) tiene una variable endógena, $y_2$, y dos exógenas $z_1$ y $z_3$.
- Como $z_2$ ahora está excluida del lado derecho, se puede utilizar como instrumento para $y_2$, si aparece en la forma reducida de $y_2$.
- Este es el caso si $\delta_{12} = \delta_{22} \neq 0$
- Este procedimiento sugiere una forma de estimar el sistema:
- Primero: estime la ecuación (21) por 2SLS usando $(z_1, z_2, z_3)$ como instrumentos y denote por $\hat{\delta}_{22}$ al estimador de $\delta_{22}$.
- Segundo: estime
$$y_1 - \hat{\delta}_{12} z_2 = \gamma_{12} y_2 + \delta_{11} z_1 + \delta_{13} z_3 + \text{error}$$
por 2SLS usando $(z_1, z_2, z_3)$ como instrumentos.
- Como $\hat{\delta}_{22} \longrightarrow \delta_{22}$, cuando $\delta_{12} = \delta_{22} \neq 0$, este último procedimiento produce estimadores consistentes de $\gamma_{12}$, $\delta_{11}$ y $\delta_{13}$.

# Ecuaciones Simultáneas: Identificación

- También es posible estimar el sistema imponiendo la restricción:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{13} \\ \gamma_{21} \\ \delta_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

  y usando GMM o 3SLS.
- El parámetro $\delta_{22}$ no aparece porque se impuso la restricción $\delta_{12} = \delta_{22}$.
- La matriz de instrumentos es $I_2 \otimes z$ y contiene solo las variables exógenas como instrumentos en cada ecuación.
- Como $I_2 \otimes z$ tiene 6 columnas (hay seis elementos en el vector de parámetros) la condición de orden se satisface.