Práctica 1

Espacios muestrales y eventos. Conteo - Solución

1. Espacios Muestrales, eventos y probabilidades

1.1. Ejercicio 1

i. Por principio de la multiplicación, Ω es un conjunto de cardinalidad finito con $\#\Omega = 6 \cdot 6 = 36$ ya que cada tirada de dado tiene 6 resultados. Sea n_i el resultado en la tirada i. Dado que todos los resultados son igual de probables, la probabilidad de cada resultado posible es $\frac{1}{36}$

		n_2					
		1	2	3	4	5	6
n_1	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ii.

$$A = \{\text{La suma de los dos números es por lo menos } 5\}$$

$$A = \left\{\begin{matrix} (1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5), \\ (3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix}\right\}$$

$$B = \{\text{El valor del dado 1 es mayor que el dado 2}\}$$

$$B = \left\{\begin{matrix} (2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) \end{matrix}\right\}$$

$$C = \{\text{El primer dado es un } 4\}$$

$$C = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$

iii.

$$A \cap C = C, \text{ porque } C \subseteq A$$

$$B \cup C = \left\{\begin{matrix} (2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) \end{matrix}\right\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \left\{\begin{matrix} (3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) \end{matrix}\right\}$$

iv. Los resultados posibles del espacio muestral Ω cuando los dados se arrojan **simultáneamente** (es decir que el orden no importa y no identificó los dados) son los siguientes (n_1 es el dado con mayor número en cada tirada):

		n_1					
		1	2	3	4	5	6
n_2	1	{1,1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
	2		{2,2}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
	3			{3,3}	{3,4}	{3,5}	{3,6}
	4				{4,4}	{4,5}	{4,6}
	5					{5,5}	{5,6}
	6						{6,6}

En este caso $P(\{i,j\}) = \frac{1}{18}$ si $i \neq j$ y $P(\{i,j\}) = \frac{1}{36}$ si $i = j$. Escrito de esta manera el espacio muestral no es equiprobable.

Para poder obtener las probabilidades podemos hacer uso del inciso i. En ese inciso cada resultado tenía la misma probabilidad ($\frac{1}{36}$), por lo cual podemos hacer un mapeo de los eventos en el inciso i con los eventos en este nuevo espacio muestral. De esta forma, obtenemos que:

$$\text{Resultado } (1,1) \longrightarrow \text{Resultado } (1,1) \text{ en el inciso i}$$
$$\text{Resultado } (2,1) \longrightarrow \text{Resultados } (1,2) \text{ y } (2,1) \text{ en el inciso i}$$
$$\text{Resultado } (3,1) \longrightarrow \text{Resultados } (1,3) \text{ y } (3,1) \text{ en el inciso i ...}$$

Continuando el patrón, observamos que los elementos de la diagonal en la tabla $\{(1,1)(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ tienen una probabilidad de ocurrencia de $\frac{1}{36}$ (dado que se necesita 1 valor exacto en cada dado). Por el contrario, los elementos fuera de la diagonal poseen una probabilidad de ocurrencia de $\frac{1}{18}$, dado que se necesitan 2 valores pero no importa en qué dado sale cada valor.

1.2. Ejercicio 2

Ana, Beatriz y Cecilia tiran una moneda secuencialmente y la primera en obtener una cara gana.

$$\Omega = \{c, \times c, \times\times c, \times\times\times c, \ldots\}$$

i. El elemento $\underbrace{\times\times\times\cdots\times}_{n \text{ veces}} c$ es el resultado donde en las primeras n tiradas sale cruz y en la tirada $n+1$-ésima sale cara.

Definimos los siguientes conjuntos:

donde $A_i = \{\text{sale cara en el } 3n+i-\text{ésimo tiro con } n \in \mathbb{N}_0\}$, donde $i = 1,2,3$.

donde $A_\infty = \{\text{no sale cara}\}$

Entonces, $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_\infty$

iii.

$$A = A_1$$
$$B = A_2$$
$$(A \cup B)^c = A_3 \cup A_\infty$$

1.3. Ejercicio 3

i. Escribimos que $\Omega = \dot{\bigcup}_{m\in\mathbb{N}} A_m \,\dot{\bigcup}\, B$, donde

$$A_m = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_m) \text{ donde } a_i \in \{2,3,4,5,6\} \text{ para } i \in \{1,\ldots,m-1\} \text{ y } a_m = 1\}$$

$$B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \cdots) \text{ donde } b_i \in \{2,3,4,5,6\} \text{ para } i \in \mathbb{N}\}$$

Los eventos A_m describen los casos donde el 1 sale en la tirada m, mientras que el evento B corresponde al caso donde nunca sale el dado 1. Es un espacio infinito numerable.

ii. Sea A_m el evento donde se necesitan m tiros hasta obtener por primera vez el número 1. Luego, por ejemplo,

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

En general,

$$A_m = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_m) \text{ donde } a_i \in \{2,3,4,5,6\} \text{ para } i \in \{1,\ldots,m-1\} \text{ y } a_m = 1\}$$

iii.

Notemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega - B$. Luego, $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = (\Omega - B)^c = \varnothing$

Es decir el evento $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ lista todos los posibles casos en donde salen resultados en cada una de las tiradas del dado en el conjunto $\{2,3,4,5,6\}$ y nunca sale el número 1.

1.4. Ejercicio 4

Hay dos categorías en el espacio de eventos:

- Niveles de estudio (e): Universitario completo (c) y Universitario incompleto (nc). Son disjuntos y exhaustivos.
- Partido Político (p): Justicialista (j), Radical (r) o Independiente (i).
  Las categorías de quienes votan son :

$$C = \{(e,p), \text{ donde } e \in \{c, nc\} \text{ y } p \in \{j,r,i\}\}$$

$\#(\Omega) = 6$.

i

Si hay $n = 10$ personas, para cada empleado observamos (e,p). Hay $2 \cdot 3 = 6$ resultados posibles para cada persona.

$$\Omega = \{\text{Posibles respuestas para cada uno de los 10 empleados}\}$$
$$\Omega = \{(e_1, p_1, e_2, p_2, \cdots, e_{10}, p_{10}) \text{ donde } (e_i, p_i) \in C \text{ para } i \in \{1,2,\cdots,10\}\}$$
$$\#\Omega = 6^{10} \text{es la cantidad de resultados en el espacio muestral}$$

ii

$$B = \{\text{Al menos un miembro tiene universitario incompleto}\}$$
$$B^c = \{\text{Ningún miembro tiene universitario incompleto}\}$$
$$B^c = \{(nc, p_1, nc, p_2, \cdots, nc, p_{10}) \text{ donde } p_i \in \{j,r,i\} \text{ para } i \in \{1,2,\cdots,10\}\}$$
$$\#B^c = 3^{10} \text{ ya que cada persona puede elegir solamente a qué partido vota.}$$
$$\#B = \#\Omega - \#B^c = 6^{10} - 3^{10} = 60407127$$

iii

$$C = \{\text{Ningún miembro vota a un Independiente}\}$$
$$\Omega = \{(e_1, p_1, e_2, p_2, \cdots, e_{10}, p_{10}) \text{ donde } e_i \in \{c, nc\} \text{ y además } p_i \in \{j,r\} \text{ para } i \in \{1,2,\cdots,10\}\}$$

$\#C = 4^{10}$ ya que cada persona puede tener dos distintos tipos de nivel de estudio y puede elegir votar a dos partidos.

1.5. Ejercicio 5

i. Usando leyes de De Morgan

$$[A \cup B \cup C \cup D]^c = A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c$$
$$\therefore \text{Verdadero}$$

ii. Usando leyes de De Morgan

$$[(A \cup B) \cap (C \cup D)]^c = (A \cup B)^c \cup (C \cup D)^c = (A^c \cap B^c) \cup (C^c \cap D^c) \therefore \text{Verdadero}$$

iii. Usando leyes de De Morgan

$$[A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c]^c = A \cup B \cup C \cup D$$
$$\therefore \text{Verdadero}$$

iv. La consigna dice, si $A \cap B = \varnothing$ entonces $A \uplus B = \Omega$.

No necesariamente es cierto, pueden existir que $A \cap B = \varnothing$ pero $A \cup B \neq \Omega$, es decir, que sean disjuntos pero no exhaustivos.

Por ejemplo, $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,3\}$ $B = \{2\}$, vale que $A \cap B = \varnothing$ pero $A \uplus B = \{1,2,3\} \subsetneq \Omega$

1.6. Ejercicio 6

Dado Ω, $P : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

(1) $P(\Omega) = 1$

(2) $A \subset \Omega \implies P(A) \geq 0$

(3) $A_1, \ldots, A_n$ mutuamente excluyentes $\implies P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

i

$$A^c = \Omega / A, \qquad A \cap A^c = \varnothing, \qquad A \cup A^c = \Omega$$
$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1 \implies P(A) = 1 - P(A^c)$$

ii

$$\varnothing = \Omega^c, \qquad P(\varnothing) = P(\Omega^c)$$
$$P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 0$$

iii

$A \subset B, B = A \cup (A^c \cap B)$ Como A y $(A^c \cap B)$ conjuntos son disjuntos se tiene que

$$P(B) = P(A \cup A^c \cap B) = P(A) + P(A^c \cap B) \qquad \therefore P(B) \geq P(A)$$

iv

$$A \cup B = (A^c \cap B) \uplus (A \cap B) \uplus (A \cap B^c)$$
$$P(A \cup B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$
$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) \implies P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B \cap A^c) + P(A \cap B) \implies P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Ejercicios de conteo y probabilidades

2.1. Ejercicio 1: Contando arreglos

2.1.1. Trabajadores y puestos

$$\text{Regla de Producto } 20! = \underline{20} \cdot \underline{19} \cdot \underline{18} \cdot \underline{17} \cdot \ldots \underline{1}$$

O equivalentemente consideramos que para el cada puesto de trabajo (desde el primero hasta el vigésimo) se elige una de las k personas disponibles que quedan.

Para el primer puesto de trabajo hay 20 personas disponibles y se elige una.

Para el segundo puesto de trabajo hay 19 personas disponibles y se elige una.

Para el tercer puesto de trabajo hay 18 personas disponibles y se elige una.

Por lo tanto,

$$\prod_{k=1}^{20} \binom{k}{1}$$

2.1.2. Beatles e instrumentos

4 integrantes y 4 instrumentos. Si los 4 integrantes pueden tocar los 4 instrumentos se pueden distribuir de 4! formas distintas.

Si hay 2 integrantes que tocan los 4 instrumentos y 2 que tocan sólo 2 instrumentos entonces se pueden distribuir de $2! \cdot 2!$ formas diferentes: entre Ringo y George se asignan la guitarra y la batería y entre John y Paul la voz y el piano.

2.1.3. Permutación de letras

Para contar la cantidad de arreglos de palabras usamos el coeficiente multinomial.

Sea n la cantidad total de letras, I categorías (agrupamos las mismas letras) y n_i la cantidad total de elementos en cada categoría con $\sum_{i=1}^{I} n_i = n$.

La cantidad total de formas de ordenar palabras de longitud n con I letras diferentes y donde donde cada grupo de letras tiene n_i, $i = 1, \cdots, I$ elementos es

$$\#Arreglos = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{I} n_i!}$$

i.

$$\text{MURCIELAGO} = 10 \text{ letras} \begin{cases} M \times 1 \\ U \times 1 \\ R \times 1 \\ C \times 1 \\ I \times 1 \\ E \times 1 \\ L \times 1 \\ A \times 1 \\ G \times 1 \\ O \times 1 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{10!}{1!1!1!1!1!1!1!1!1!1!} = 10!$$

ii.

$$\text{PARPADEO} = 8 \text{ letras} \begin{cases} P \times 2 \\ A \times 2 \\ R \times 1 \\ D \times 1 \\ E \times 1 \\ O \times 1 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{8!}{2!2!1!1!1!1!}$$

iii.

$$\text{PROBABILIDAD} = 12 \text{ letras} \begin{cases} P \times 1 \\ R \times 1 \\ O \times 1 \\ B \times 2 \\ A \times 2 \\ I \times 2 \\ L \times 1 \\ D \times 2 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{12!}{1!1!1!2!2!2!1!2!}$$

iv.

$$\text{MISSISSIPPI} = 11 \text{ letras} \begin{cases} M \times 1 \\ I \times 4 \\ S \times 4 \\ P \times 2 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{11!}{1!4!4!2!}$$

2.1.4. Pasantías en organismos internacionales

	Asia	América del Sur	Europa	América Central
Cupo	10	7	4	2
Candidatos	50	15	7	3

Por Regla del Producto $\#Pasant\acute{i}as = \#Asia \cdot \#Am\acute{e}rica\,del\,Sur \cdot \#Europa \cdot \#Am\acute{e}rica\,Central$

$$\#Pasant\acute{i}as = \binom{50}{10} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} = 45 * 6435 * 35 * 3 = 30405375$$

2.1.5. Sentando invitados

Según el enunciado hay 8 amigos ($n = 8$): 4 son hinchas de independiente ($n_I = 4$) y 4 son hinchas de Racing ($n_R = 4$).

i - No hay restricciones para sentarse

$$\#Formas\,diferentes = 8!$$

ii - Personas A y B deben sentarse juntas

$$\#Formas\,diferentes = 2! \cdot 7!$$

2! Formas de sentar a A y B (depende quién está sentado a la derecha de quién)

7! Formas de acomodarse de todos, A y B pasan a ser solo un individuo en el orden grupal iii- Si sólo un hincha de Independiente y un hincha de Racing pueden sentarse juntos, todos los de Racing se sientan juntos y todos los de Independientes se sientan juntos.

Hay dos maneras de sentar a los grupos: Racing a la izquierda o Racing a la derecha. Dentro de cada grupo hay 4! formas de ordenar a cada grupo.

$$\#Formas\, distintas = 2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$$

Otra forma de personarlo es: Elegís una de las 8 personas, después te quedan 3 opciones del mismo equipo para elegir a la seguna persona de la mesa, después quedan dos opciones y después 1. Después hay 4! opciones para elegir el orden en el que se sientan las personas del otro equipo.

$$\underline{8} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 8 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 1152$$

iv- 4 Parejas que deben sentarse juntas

Cada pareja tiene 2! formas de sentarse y hay 4! formas de ordenar las parejas entre sí.

$$\#Formas\, diferentes = (2!)^4 \cdot 4!$$

2.1.6. Patentamientos en Argentina

Patentamientos nuevos A-Q. En la actualidad esta la letra K. Quedan 6 letras (L,M,N,O,P,Q) para patentamientos nuevos

$$3 \text{ Letras} \longrightarrow \begin{cases} 1^o\ Letra = 6 \\ 2^o\ Letra = 26 \\ 3^o\ Letra = 26 \end{cases}$$

$$3 \text{ Números} \longrightarrow \begin{cases} 1^o = 10 \\ 2^o = 10 \\ 3^o = 10 \end{cases}$$

$$\#Patentamientos\, restantes = \underbrace{\underline{6} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26}}_{Letras} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}}_{Números} = 6 \cdot 26^2 \cdot 10^3$$

2.1.7. Mesa redonda

i. Sentar 8 personas alrededor de una mesa circular. Solo importa quien se sienta al lado de quien, no el asiento especifico.

$$\frac{8!}{8} = 7!$$

ii. Sentar a una pareja junta. Pensamos que la pareja conforma una sola persona, entonces tenemos "7 personas" que se sientan en una mesa redonda. Además consideramos que dependiendo de quién se siente a la derecha de su pareja; hay 2 maneras diferentes de hacerlo.

$$2 \cdot \frac{7!}{7} = 2 \cdot 6!$$

iii. Sentar a cuatro parejas juntas. Es similar al ejercicio de Racing e independiente pero en una mesa redonda.

$$2^4 \cdot \frac{4!}{4} = 2^4 \cdot 3!$$

iv. Sentar a tres parejas juntas.

$$2^3 \cdot \frac{5!}{5} = 2^3 \cdot 4!$$

v. Ringo-Lennon-McCartney

$$\frac{6!}{6} = 5!$$

vi. Ringo-Lennon-McCartney en cualquier orden

$$3!\frac{6!}{6} = 3! \cdot 5!$$

2.1.8. Bolitas indistinguibles y cajitas

i. $N \geq 2$ bolitas en $k \geq 4$ cajitas tal que hay una sola bolita en la 2da caja y una sola bolita en 4ta caja.

Lo que hacemos es poner una bolita cada una de las cajitas (2da y 4ta). Como las cajitas 2 y 4 tienen exactamente una bolita las separamos. Nos quedan para repartir $N-2$ bolitas indistinguibles en $k-2$ cajas distinguibles.

$$\binom{(N-2)+(k-2)-1}{(k-2)-1} = \binom{N+k-5}{k-3}$$

ii. $N \geq 2$ bolitas en $k \geq 4$ cajitas tal que hay una sola bolita en la 2da caja o al menos una bolita en 4ta caja.

Consideramos $A = \{$cantidad de casos donde hay exactamente una sola bolita en la 2da caja$\}$

$B = \{$cantidad de casos donde hay al menos una sola bolita en la 4ta caja$\}$

La consigna pregunta por $\#(A \cup B)$, donde A y B no son eventos disjuntos.

Para calcular $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Para poder calcular $\#(A)$, notemos lo siguiente. Para que en la segunda cajita haya exactamente una bolita, separamos 1 de las n bolitas, la ponemos en esa cajita y separamos la cajita del resto. Nos queda ordenar $N-1$ bolitas indistinguibles en $k-1$ cajas distinguibles.

$$\#(A) = \binom{(N-1)+(k-1)-1}{(k-1)-1} = \binom{N+k-3}{k-2}$$

Para poder calcular $\#(A)$, notemos lo siguiente. Tiene que haber al menos una bolita en la 4ta caja. Separamos 1 de las n bolitas, la ponemos en esa cajita y dejamos esa cajita Nos queda ordenar $N-1$ bolitas indistinguibles en k cajas distinguibles.

Luego,

$$\#(B) = \binom{N+k-2}{k-1}$$

Por último, el número de resultados donde hay una bolita en la 2da caja y al menos una bolita en la 4ta caja es

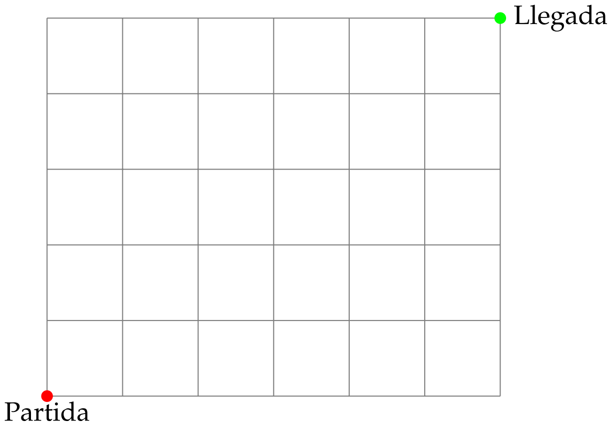
$$\#(A \cap B) = \binom{(N-2)+(k-1)-1}{(k-1)-1} = \binom{N+k-4}{k-2}$$

Por lo tanto,

$$\#(A \cup B) = \binom{N+k-3}{k-2} + \binom{N+k-2}{k-1} - \binom{N+k-4}{k-2}$$

2.1.9. Caminos Posibles

Para resolver este ejercicio, podemos pensar en el mapa de la ciudad como una grilla:



Para llegar a nuestro destino si o si deberemos caminar 11 cuadras, 6 cuadras hacia la derecha y 5 cuadras hacia arriba. Podemos representar cada cuadra hacia la derecha con la letra 'D' y cada cuadra hacia la arriba con la letra 'A'. Entonces, podemos reducir el problema a cuántas formas diferentes hay de crear una palabra de 11 letras con 6 letras 'D' y 5 letras 'A':

$$\text{11 letras}\begin{cases} D \times 6 \\ A \times 5 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{11!}{6!5!} = 462$$

2.2. Ejercicio 2: Calculando probabilidades

2.2.1. Urna con 3 bolillas

i. Muestra $m = 2$ con reposición.

$$\#\Omega = \underline{3} \cdot \underline{3} = 9$$

Ω	A	R	V
A	(A, A)	(A, R)	(A, V)
R	(R, A)	(R, R)	(R, V)
V	(V, A)	(V, R)	(V, V)

ii. Al menos una bolilla roja (R)

$$P(R \geq 1) = 1 - P(R = 0) = 1 - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9}$$

iii. Ninguna bolilla roja (R)

$$P(R = 0) = 1 - P(R \geq 1) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

iv. Muestra $m = 2$ sin reposición.

$$\#\Omega = \binom{3}{2} = 6$$

$$\Omega = \{(A, R), (A, V), (R, A), (R, V), (V, A), (V, R)\}$$

$$P(R \geq 1) = 1 - P(R = 0) = 1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

2.2.2. Cartas

Hay $n = 52$ cartas. Las cartas se clasifican en dos categorías, palos y número de cartas: hay 4 palos y 13 cartas.

Con $m = 5$ cartas, obtenidas sin reposición, **la probabilidad de obtener un par simple es**:

$$P\left(Par\right) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: Necesitamos elegir uno de los 13 posibles números, de $\binom{13}{1}$ maneras, para saber qué número será el que nos toque en el doble y hay $\binom{4}{2}$ formas de elegir 2 de los 4 palos para que formen el doble.

Además, queremos que las 3 restantes cartas sean de números distintos entre sí y al número elegido en el par, por lo que hay $\binom{12}{3}$ maneras de elegir 3 números de los 12 números disponibles.

Para cada uno de esos 3 números elegidos (para esas tres cartas que no forman el par) hay que elegir un palo para cada carta entonces hay $\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}$ formas de elegir los palos para cada una de las cartas restantes.

La probabilidad de tener un par doble sacando $m = 5$ **cartas:**

$$P\left(Par\ Doble\right) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: Necesitamos elegir dos de los 13 posibles números, de $\binom{13}{2}$ maneras, para saber qué números serán los que nos toquen en los dos dobles (y no queremos que sea póker) y hay $\binom{4}{2}$ formas de elegir 2 de los 4 palos para cada uno de los dobles. Es decir hay $\binom{4}{2}\binom{4}{2}$ maneras de elegir los palos de los dos dobles.

Además, queremos que la carta restante sea un número distinto a los números elegidos en los dos pares, por lo que hay $\binom{11}{1}$ maneras de elegir 1 número de los 11 números disponibles.

Para ese número elegido (para esa carta que no forma ninguno de los pares) hay que elegir un palo entonces hay $\binom{4}{1}$ formas de elegir los palos para esa carta restante.

La probabilidad de sacar full con $m = 5$ **cartas es:**

$$P\left(Full\right) = \frac{2!\binom{13}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: Necesitamos elegir dos de los 13 posibles números, de $\binom{13}{2}$ maneras, para saber qué números serán los que nos toquen en el full y hay $\binom{4}{2}$ formas de elegir 2 de los 4 palos para las dos cartas que sean el mismo número en el full y hay $\binom{4}{3}$ formas de elegir 3 de los 4 palos para las tres cartas que sean el mismo número en el full. Como no es lo mismo tener full con tres ases y dos reinas que tener un full con tres reinas y dos ases, hay que multiplicar por 2!.

La probabilidad de sacar poker con $m = 5$ cartas es:

$$P\,(Póker) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: Necesitamos elegir uno de los 13 posibles números, de $\binom{13}{1}$ maneras, para saber qué número será el que nos toque en el póker y hay $\binom{4}{4} = 1$ formas de elegir 4 de los 4 palos para cada uno de los dobles. elegir los palos de los dos dobles.

Además, queremos que la carta restante sea un número distinto al número elegido en el póker, por lo que hay $\binom{12}{1}$ maneras de elegir 1 número de los 11 números disponibles.

Para ese número elegido (para esa carta que no forma el póker) hay que elegir un palo entonces hay $\binom{4}{1}$ formas de elegir los palos para esa carta restante.

La probabilidad de obtener póker de ases con $m = 5$ cartas es:

$$P\,(Póker\ Ases) = \frac{\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: 4 de las 5 cartas tienen que ser los ases, hay una sola manera de que eso suceda.

Además, queremos que la carta restante sea un número distinto al número elegido en el póker, por lo que hay $\binom{12}{1}$ maneras de elegir 1 número de los 11 números disponibles.

Para ese número elegido (para esa carta que no forma el póker) hay que elegir un palo entonces hay $\binom{4}{1}$ formas de elegir los palos para esa carta restante.

2.2.3. Comités

$n = 14 \longrightarrow n_{AU} = 5, n_{AS} = 2, n_{AF} = 3, n_{AM} = 4.$

$$A = \{\text{Todos los continentes representados}\}$$

$$\text{Comités de 4 personas: } P\,(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{14}{4}}$$

$$\text{Comités de 5 personas: } P\,(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{14}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{14}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{14}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{14}{5}}$$

En el caso del comité de 4 personas es necesario un miembro de cada continente. En el caso de 5 personas es necesario al menos un miembro de cada continente, entonces hay cuatro casos posibles según el continente que tenga 2 miembros.

2.2.4. Llaves

Hay n llaves, sólo una abre la puerta.

i. Descarto cada llave que no abre

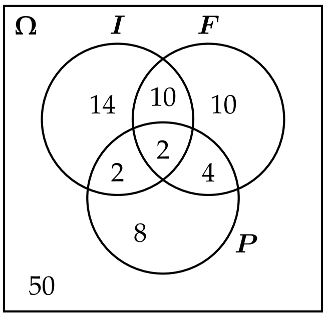
$$P\,(Acertar\ intento\ k) = \underbrace{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}}_{Fallar\ k-1\ veces}\cdot\underbrace{\frac{1}{n-(k-1)}}_{Acertar\ en\ k} = \frac{1}{n}$$

ii. No descarto ninguna llave

$$P\left(Acertar\,intento\,k\right) = \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}}_{k-1\,Fallos} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{Acierto}$$

2.2.5. Escuela

La situación descrita en un diagrama de Venn tiene la siguiente forma



$$A = \{\text{El alumno elegido no toma idiomas}\}$$

$$P\left(A\right) = 1 - P\left(A^c\right) = 1 - P\left(I \cup F \cup P\right) = 1 - \frac{50}{100} = 0{,}50$$

$$B = \{\text{El alumno elegido toma solo una clase de idioma}\}$$

$$P\left(B\right) = P\left(\left(I \cap F^c \cap P^c\right) \cup \left(F \cap I^c \cap P^c\right) \cup \left(P \cap I^c \cap F^c\right)\right) = \frac{14}{100} + \frac{10}{100} + \frac{8}{100} = 0{,}32$$

$$C = \{\text{Al menos un alumno elegido toma clases de idioma}\}$$

$$P\left(C\right) = 1 - P\left(C^c\right) = 1 - P\left(A_1^c\right) \cdot P\left(A_2^c / A_1^c\right) = 1 - \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = 1 - \frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}}$$

2.2.6. Dados

Arrojo dos dados. La ventaja de pensar a los resultados de manera secuencial es que nos permiten tener un espacio Ω equiprobable. Además para el primer inciso se sobrentiende que las tiradas son secuenciales.

Ω		n_2					
		1	2	3	4	5	6
	1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
	2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
	3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
n_1	4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
	5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
	6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

i.

$$A = \{\text{El primer dado es igual a } 6\}$$

$$B_i\,\{\text{La suma es igual a } i\}$$

Uso casos favorables/casos posibles para resolver. B_i me marca los casos posibles y busco los favorables dentro de ese conjunto. Alternativamente se puede usar la definición de probabilidad condicional.

B_i	$P(A\|B_i)$
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	1/6
8	1/5
9	1/4
10	1/3
11	1/2
12	1

ii.

$$C = \{\text{Al menos un dado es igual a } 6\}$$
$$D = \{\text{Los dados arrojan resultados diferentes}\}$$

Nuevamente calculemos la probabilidad de dicho evento calculando el cociente casos favorables/casos posibles. Los casos posibles son los dados por D (hay 30 posibles resultados), ahí busco los favorables. Alternativamente se podría trabajar con probabilidades condicionales.

$$P(C|D) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

2.2.7. Urna y Bolillas

$$Urna = 15\begin{cases} 6\,B \\ 9\,N \end{cases}$$

Muestra $m = 4$ sin reposición (notemos que los eventos mencionados en este ejercicio tienen un orden -las bolillas se sacan secuencialemente- y que por simplicidad notacional omitimos los paréntesis y las comas, es decir, escribimos BBNN=(B,B,N,N)).

$$P(BBNN) = P(B)\cdot P(B|B)\cdot P(N|BB)\cdot P(N|BBN) = \frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{9}{13}\frac{8}{12}$$

Muestra $m = 4$ con reposición. En este caso las condicionales son iguales a las individuales porque las extracciones son independientes.

$$P(BBNN) = P(B)\cdot P(B)\cdot P(N)\cdot P(N) = \frac{6^2\cdot 9^2}{15^4}$$

2.2.8. Default

Definamos los siguientes eventos:

$$D = \{\text{El país entra en Default}\}$$
$$A = \left\{\text{El país tiene un ratio deuda/PBI mayor que 1 (i.e. } \frac{ED}{GDP} > 1)\right\}$$
$$B = \left\{\text{El país tiene un ratio deuda/PBI menor que 1 (i.e. } \frac{ED}{GDP} < 1)\right\}$$
$$P(D\cap A) = 2P(D\cap B)$$
$$P(D\cap A) = 0{,}32 \implies P(D\cap B) = 0{,}16$$
$$P(D) = P(D\cap A) + P(D\cap B) = 0{,}32 + 0{,}16$$
$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(A\cap D)+P(B\cap D)} = \frac{0{,}32}{0{,}32+0{,}16} = \frac{2}{3}$$

2.2.9. Cumpleaños y estaciones del año

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Hay al menos una persona de las 7 que cumple años en cada una de las estaciones}\} \\ B_P &= \{\text{Ninguno de los 7 cumpleaños ocurre en Primavera}\} \\ B_I &= \{\text{Ninguno de los 7 cumpleaños ocurre en Invierno}\} \\ B_O &= \{\text{Ninguno de los 7 cumpleaños ocurre en Otoño}\} \\ B_V &= \{\text{Ninguno de los 7 cumpleaños ocurre en Verano}\} \end{aligned}$$

Para resolver este ejercicio podemos calcular la probabilidad del evento A directamente. También podemos calcular la unión de la probabilidad de los eventos B_i y restarsela a 1 ya que $A = (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)^c$. Esta probabilidad la podemos calcular a través del principio de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned} P(B_P \cup B_I \cup B_O \cup B_V) =& P(B_P) + P(B_I) + P(B_O) + P(B_V) - P(B_P \cap B_I) - P(B_P \cap B_V) \\ & - P(B_P \cap B_O) - P(B_O \cap B_V) - P(B_O \cap B_I) - P(B_I \cap B_V) \\ & + P(B_P \cap B_I \cap B_O) + P(B_P \cap B_I \cap B_V) + P(B_V \cap B_I \cap B_O) \\ & + P(B_P \cap B_V \cap B_O) - P(B_P \cap B_I \cap B_V \cap B_O) \end{aligned}$$

Dado que

- $(B_P) = P(B_I) = P(B_O) = P(B_V)$
- $P(B_P \cap B_I) = P(B_P \cap B_V) = P(B_P \cap B_O) = P(B_O \cap B_V) = P(B_O \cap B_I) = P(B_I \cap B_V)$
- $P(B_P \cap B_I \cap B_O) = P(B_P \cap B_I \cap B_V) = P(B_V \cap B_I \cap B_O) = P(B_P \cap B_V \cap B_O)$

podemos reescribir:

$$P(B_P \cup B_I \cup B_O \cup B_V) = 4P(B_P) - 6P(B_P \cap B_I) + 4P(B_P \cap B_I \cap B_V) - P(B_P \cap B_I \cap B_V \cap B_O)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que ningún cumpleaños ocurra en al menos alguna estación es:

$$P(B_P) = P(B_I) = P(B_O) = P(B_V) = \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

La probabilidad de que los cumpleaños no ocurran en al menos dos estaciones es:

$$P(B_P \cap B_I) = \left(\frac{2}{4}\right)^7$$

La probabilidad de que los cumpleaños no ocurran en al menos 3 estaciones es:

$$P(B_P \cap B_I \cap B_V) = \left(\frac{1}{4}\right)^7$$

Por último, la probabilidad de que los cumpleaños no ocurran en ninguna estación es 0:

$$P(B_P \cap B_I \cap B_V \cap B_O) = 0$$

Por lo tanto, la probabilidad de que haya una persona para cada estación que cumple años en esa estación entre los 7 cumpleaños es:

$$P(A) = 1 - P(B_P \cup B_I \cup B_O \cup B_V) = 1 - \left[4\left(\frac{3}{4}\right)^7 - 6\left(\frac{2}{4}\right)^7 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^7\right] = \frac{525}{1024} = 0{,}51$$

2.2.10. Un poco más del principio de inclusión exclusión

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right]^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) - \sum_{i \neq j} P\left(A_i^c \cap A_j^c\right) + \sum_{i \neq j \neq k} P\left(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c\right) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

$$\implies P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) \implies 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right)$$

$$\therefore P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right)$$

Soluciones Práctica 2[1]

Ejercicio 1

$$V = \{\text{El bebé nace con vida}\}$$
$$C = \{\text{El bebé nace por cesárea}\}$$
$$P(V) = 0{,}98$$
$$P(C) = 0{,}15$$
$$P(V|C) = 0{,}96$$
Por Ley de Probabilidad Total: $P(V) = P(C)\cdot P(V|C) + P(C^c)\cdot P(V|C^c) \implies P(V|C^c) = 0{,}9835$

Ejercicio 2

$$P(A) = 0{,}46$$
$$P(B) = 0{,}30$$
$$P(C) = 0{,}24$$
$$P(V|A) = 0{,}35$$
$$P(V|B) = 0{,}62$$
$$P(V|C) = 0{,}58$$

Por Ley de Probabilidad Total se puede obtener el porcentaje de votantes que participaron de la elección.

$$P(V) = P(A)\cdot P(V|A) + P(B)\cdot P(V|B) + P(C)\cdot P(V|C)$$

Uso Teorema de Bayes para obtener las probabilidades.

$$P(A|V) = \frac{P(A)\cdot P(V|A)}{P(A)\cdot P(V|A) + P(B)\cdot P(V|B) + P(C)\cdot P(V|C)}$$
$$P(B|V) = \frac{P(B)\cdot P(V|B)}{P(A)\cdot P(V|A) + P(B)\cdot P(V|B) + P(C)\cdot P(V|C)}$$
$$P(C|V) = \frac{P(C)\cdot P(V|C)}{P(A)\cdot P(V|A) + P(B)\cdot P(V|B) + P(C)\cdot P(V|C)}$$

Ejercicio 3

$$E_i = \{\text{Hay un as en } i\text{-ésima pila}\}$$
$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = \text{Probabilidad que haya un as en cada pila}$$

Usando la regla de la multiplicación, la probabilidad del evento se puede escribir como

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1)\cdot P(E_2|E_1)\cdot P(E_3|E_1 \cap E_2)\cdot P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$
$$P(E_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

[1] Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Pedro Martínez Bruera.

$$P\left(E_2|E_1\right) = \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}}$$

$$P\left(E_3|E_1 \cap E_2\right) = \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}}$$

$$P\left(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3\right) = \frac{\binom{1}{1}\binom{12}{12}}{\binom{13}{13}}$$

Explicación: Voy armando las pilas secuencialmente. Al principio para que haya un as en la pila 1 tengo 4 ases y 48 cartas que no son un as. Cuando armo la pila 2 tengo 3 ases y 36 cartas que no son un as. Cuando armo la pila 3 tengo 2 ases y 24 cartas que no son un as. Finalmente las cartas restantes para la cuarta pila son un as y 12 cartas, por lo que $P\left(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3\right) = 1$. Como son probabilidades condicionales, y el condicionante siempre es el evento anterior en la secuencia, para obtener la probabilidad conjunta basta con multiplicarlas.

$$\begin{aligned} & P\left(E_1\right) \cdot P\left(E_2|E_1\right) \cdot P\left(E_3|E_1 \cap E_2\right) \cdot P\left(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3\right) \\ = & P\left(E_1\right) \cdot \frac{P\left(E_1 \cap E_2\right)}{P\left(E_1\right)} \cdot \frac{P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right)}{P\left(E_1 \cap E_2\right)} \cdot \frac{P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\right)}{P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right)} \\ = & P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 4

$$15 \text{ Pelotas} \begin{cases} 9\, nuevas \\ 6\, viejas \end{cases}$$

$$E = \{\text{Las 3 pelotas del segundo grupo son nuevas}\}$$

$$N_i = \{\text{Hay } i \text{ pelotas nuevas en el primer grupo}\}$$

$$P\left(E\right) = P\left(N_0\right) \cdot P\left(E|N_0\right) + P\left(N_1\right) \cdot P\left(E|N_1\right) + P\left(N_2\right) \cdot P\left(E|N_2\right) + P\left(N_3\right) \cdot P\left(E|N_3\right)$$

$$P\left(E\right) = \frac{\binom{9}{0}\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{9}{1}\binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{9}{2}\binom{6}{1}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{7}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{9}{3}\binom{6}{0}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}}$$

Ejercicio 5

$$A_k = \{\text{Ganar el juego despues de dar vuelta } k \text{ cartas}\}$$

$$A_0 = \frac{1}{52}$$

$$A_1 = \frac{51}{52} \cdot \frac{1}{51} = \frac{1}{52}$$

$$\vdots$$

$$A_k = \frac{51}{52} \cdot \ldots \cdot \frac{52-k}{52-(k-1)} \frac{1}{52-k} = \frac{1}{52}$$

No hay ninguna estrategia que maximice la probabilidad de ganar, ya que es la probabilidad de ganar no depende del número de cartas que se saquen del mazo.

Ejercicio 6

Considere los eventos X_i ={el prisionero i es ejecutado} y G_i ={el guardia dice que i es liberado}.

Sabemos que $P(X_i) = \frac{1}{3}$ porque $P(X_i^c) = \frac{2}{3}$ para todo $i = A, B, C$.

Queremos ver si $P(X_A^c|G_B) \neq P(X_A^c)$ que es lo mismo que ver que $P(X_A|G_B) \neq P(X_A)$ (análogamente queremos ver si $P(X_A^c|G_C) \neq P(X_A^c)$ que es lo mismo que ver que $P(X_A|G_C) \neq P(X_A)$)

Notemos que en particular que, como el guardia sabe perfectamente quién va a ser ejecutado y quiénes liberados:

- $P(G_B|X_A) = 1/2$ porque si van a ejecutar a A el guardia puede decir que van a liberar a B o a C.
- $P(G_B|X_B) = 0$ porque el guardia no miente.
- $P(G_B|X_C) = 1$ porque si van a ejecutar a C el guardia solamente puede decir que van a liberar a B porque no quiere dar información sobre A y no quiere mentir sobre C.

Luego

$$P(X_A|G_B) = \frac{P(G_B|X_A)P(X_A)}{P(G_B|X_A)P(X_A) + P(G_B|X_B)P(X_B) + P(G_B|X_C)P(X_C)}$$

Es decir

$$P(X_A|G_B) = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3} = \frac{1}{3}$$

Luego

$$P(X_A) = P(X_A|G_B) = P(X_A|G_C) = \frac{1}{3}$$

Es decir, que el guardia diga a una de las personas que va a ser liberada no va a afectar la probabilidad de que A sea liberado porque la información del guardia depende de que él sabe quién va a ser ejecutado y quiénes van a ser liberados, no da una respuesta al azar.

Ejercicio 7

$$Urna = 15 \text{ Bolillas} \begin{cases} 5\, Blancas \\ 10\, Negras \end{cases}$$

$$N_i = \{\text{El número que sale en el dado es } i\}$$

$$B = \{\text{Todas las bolillas extraidas son blancas}\}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(N_i) \cdot P(B|N_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} P(B|N_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{5} \frac{\binom{5}{i}\binom{10}{0}}{\binom{15}{i}}$$

$$P(B) = 1/6 \cdot \left(\frac{\binom{5}{1}}{\binom{15}{1}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{5}{4}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{5}}{\binom{15}{5}} + 0 \right) = \frac{5}{66}$$

$$P(N_3|B) = \frac{P(B|N_3)P(N_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}}{\frac{5}{66}}$$

Ejercicio 8

$$C = \{\text{La persona tiene cáncer}\}$$
$$G = \{\text{El resultado es correcto}\}$$
$$P(G|C) = P(G|C^c) = 0{,}95 \implies P(G^c|C) = P(G^c|C^c) = 0{,}05$$
$$P(C) = 0{,}004 \implies P(C^c) = 0{,}996$$
$$P(C|G^c) = \frac{P(C \cap G^c)}{P(G^c)} = \frac{P(C \cap G^c)}{P(C \cap G^c) + P(C^c \cap G^c)} = \frac{P(C) \cdot P(G^c|C)}{P(C) \cdot P(G^c|C) + P(C^c) \cdot P(G^c|C^c)}$$

$$P(C|G^c) = \frac{0{,}004 \cdot 0{,}05}{0{,}004 \cdot 0{,}05 + 0{,}996 \cdot 0{,}05} = 0{,}004$$

Ejercicio 9

$$H = \{\text{El hombre tiene hemofilia}\}\ P(H) = 0{,}50$$
$$H_i = \{\text{El hijo i tiene hemofilia}\}\ P(H_i|H) = P(H_i^c|H) = 0{,}50$$
$$P(H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) = \frac{P(H \cap H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c)}{P(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c)} =$$
$$\frac{P(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c|H) \cdot P(H)}{P(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c|H) \cdot P(H) + P(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c|H^c) \cdot P(H^c)}$$

Suponiendo que, condicional a H, H_i son independientes:

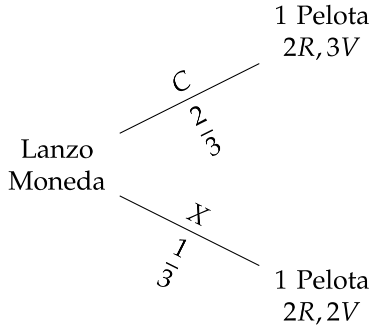
$$P(H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c|H) = P(H_1|H) \cdot P(H_2|H) \cdot P(H_3|H) = 0{,}50^3$$

$$P(H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) = \frac{0{,}50^3 \cdot 0{,}50}{0{,}50^3 \cdot 0{,}50 + 1 \cdot 0{,}50} = 1/9$$

$$P(H_4|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) = P(H_4 \cap H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) + P(H_4 \cap H^c|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c)$$
$$= P(H_4|H \cap H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) \cdot P(H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) + P(H_4|H^c \cap H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) \cdot P(H^c|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c)$$
$$= P(H_4|H) \cdot P(H|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) + P(H_4|H^c) \cdot P(H^c|H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c)$$
$$= 0{,}50 \cdot 1/9 + 0 \cdot 8/9 = 1/18$$

$P(H_4|H \cap H_1^c \cap H_2^c \cap H_3^c) = P(H_4|H)$ si y solo si asumo que la probabilidad condicional de la hemofilia entre los hijos es independiente.

Ejercicio 10



$$R = \{\text{Se extrae una pelota roja}\}$$
$$C = \{\text{Aparece una cara}\}$$
$$X = \{\text{Aprece una cruz}\}$$

Por Ley de Probabilidad Total: $P(R) = P(C \cap R) + P(X \cap R)$

$$P(R) = P(C) \cdot P(R|C) + P(X) \cdot P(R|X) = 2/3 \cdot 2/5 + 1/3 \cdot 1/2 = 13/30$$

Ejercicio 11

$$D = \{\text{Las unidades producidas son defectuosas}\}$$
$$C = \{\text{El proceso se encuentra bajo control}\}$$
$$P(C) = 0{,}92 \; P(D|C) = 0{,}05 \; P\left(D|C^c\right) = 0{,}30$$
$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D|C) \cdot P(C) + P(D|C^c) \cdot P(C^c)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}92}{0{,}05 \cdot 0{,}92 + 0{,}30 \cdot 0{,}08} = 23/35$$

Ejercicio 12

$$A = \{\text{El circuito proviene del Fabricante A}\}$$
$$B = \{\text{El circuito proviene del Fabricante B}\}$$
$$C = \{\text{El circuito proviene del Fabricante C}\}$$
$$P(A) = 0{,}50 \; P(B) = 0{,}25 \; P(C) = 0{,}25$$
$$D = \{\text{El circuito es defectuoso}\}$$
$$P(D|A) = 0{,}05 \; P(D|B) = 0{,}10 \; P(D|C) = 0{,}12$$

A

Por Ley de Probabilidad Total: $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0{,}05 \cdot 0{,}50 + 0{,}10 \cdot 0{,}25 + 0{,}12 \cdot 0{,}25 = 0{,}08$

B

$$P\left(B|D^c\right) = \frac{P\left(B \cap D^c\right)}{P(D^c)} = \frac{(1 - P(D|B)) \cdot P(B)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - 0{,}10) \cdot 0{,}25}{1 - 0{,}08} = 0{,}2446$$

Ejercicio 13

$$A = \{\text{El valor de las acciones aumenta}\}$$
$$PNB \uparrow = \{\text{El PNB aumenta}\}$$
$$PNB \downarrow = \{\text{El PNB cae}\}$$
$$PNB \rightarrow = \{\text{El PNB se mantiene constante}\}$$
$$P(A|PNB \uparrow) = 0{,}8 \; P(A|PNB \rightarrow) = 0{,}2 \; P(A|PNB \downarrow) = 0{,}1$$

$$P(PNB\uparrow) = 0{,}4 \quad (PNB\rightarrow) = 0{,}3 \quad P(PNB\downarrow) = 0{,}2$$

Por Ley de Probabilidad Total: $P(A) = P(A \cap PNB\uparrow) + P(A \cap PNB\rightarrow) + P(A \cap PNB\downarrow)$.

$$P(A) = P(A|PNB\uparrow) \cdot P(PNB\uparrow) + P(A|PNB\rightarrow) \cdot P(PNB\rightarrow) + P(A|PNB\downarrow) \cdot P(PNB\downarrow)$$

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$$

Ejercicio 14

$$I = \{\text{El pozo es una formación de tipo I}\}$$

$$II = \{\text{El pozo es una formación de tipo II}\}$$

$$III = \{\text{El pozo es una formación de tipo III}\}$$

$$P(I) = 0{,}35 \quad P(II) = 0{,}40 \quad P(III) = 0{,}25$$

$$P = \{\text{El pozo tiene petróleo}\}$$

$$P(P|I) = 0{,}40 \quad P(P|II) = 0{,}20 \quad P(P|III) = 0{,}30$$

$$\begin{aligned} P\left(II|P^c\right) &= \frac{P\left(II \cap P^c\right)}{P(I \cap P^c) + P(II \cap P^c) + P(III \cap P^c)} \\ &= \frac{P\left(P^c|II\right) \cdot P(II)}{P(P^c|I) \cdot P(I) + P(P^c|II) \cdot P(II) + P(P^c|III) \cdot P(III)} \\ &= \frac{0{,}80 \cdot 0{,}40}{0{,}60 \cdot 0{,}35 + 0{,}80 \cdot 0{,}40 + 0{,}70 \cdot 0{,}25} = 0{,}4539 \end{aligned}$$

Soluciones Práctica 3[1]

1. Ejercicio 1

$$X = \{\text{Posición más alta alcanzada por una mujer}\}$$
$$\#\Omega = 10!$$

Cualquiera de las 5 mujeres alcanza la posición X más alta. En las $X-1$ anteriores se distribuyen hombres y en las $10-X$ siguientes es indistinto. Una fórmula para los casos totales puede ser

$$\#X = 5 \cdot \frac{5!}{(5-(X-1))!}(10-X)!I(X \leq 6)$$
$$P(X) = \frac{\#X}{\#\Omega}$$

Nótese que nunca puede ocurrir que el puesto más alto por una mujer sea mayor a 6.

X	$\#X$	$P(X)$
1	$5 \cdot 9!$	$1/2$
2	$5 \cdot 5 \cdot 8!$	$5/18$
3	$5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7!$	$5/36$
4	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7!$	$5/84$
5	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6!$	$5/252$
6	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4!$	$1/252$
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

La función de probabilidad de masa verifica al condición de cierre. $\sum_{i=1}^{6} P(X_i) = 1$.

2. Ejercicio 2

$$X = \begin{cases} 0 & \text{Persona no vota a A} \\ 1 & \text{Persona vota a A} \end{cases} \implies X \sim Ber(p_i)$$
$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Suponiendo que la probabilidad p de votar al candidato A es igual para todos los votantes entonces y que la intención de voto es independiente entre ellos. $X_1, \ldots, X_{25} \overset{iid}{\sim} Ber(p)$. Entonces $T = \sum_{i=1}^{25} X_i \sim B(25, p)$ de manera tal que

$$P(T = t) = \binom{25}{t} p^t (1-p)^{1-t}$$

[1] Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Pedro Martínez Bruera, Tomás Rosé y Pablo Escobar.

3. Ejercicio 3

A

Ω	1	2	3	4	5
1		$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$
2			$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$
3				$(3,4)$	$(3,5)$
4					$(4,5)$

B

$$D = \{\text{La tarjeta es defectuosa}\}$$
$$ND = \{\text{La tarjeta no es defectuosa}\}$$
$$Lote: \underline{D}\,\underline{D}\,\underline{ND}\,\underline{ND}\,\underline{ND}$$
$$X = \{\text{Número de tarjetas defectuosas entre las inspeccionadas}\}\ X \sim H(n = 5, r = 2, m = 2)$$
$$P(X = x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{3}{2-x}}{\binom{5}{2}}$$

X	0	1	2
$P(X)$	$3/10$	$6/10$	$1/10$

C

$$F(X)\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3/10 & 0 \leq x < 1 \\ 9/10 & 1 \leq x < 1 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

4. Ejercicio 4

A

x	1	3	6	12
$P(x)$	0,3	0,1	0,2	0,4

B

$$A = [3,6]\ B = [4,\infty)$$

Usando la función de distribución

$$P(A) = P(x \in [3,6]) = F(6) - F(3) = F(6) - F(2) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$$

$$P(B) = P(x \geq 4) = 1 - F(4) = 1 - F(3) = 0{,}6$$

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(x \geq 6)}{1 - P(A)} = \frac{F(12) - F(6)}{0{,}7} = 4/7$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(4 \leq x \leq 6)}{P(B)} = \frac{F(6) - F(3)}{0{,}6} = 1/3$$

Usando la función de probabilidad puntual

$$P(A) = P(x = 3) + P(x = 6) = 0{,}3$$

$$P(B) = P(x = 6) + P(x = 12) = 0{,}6$$

$$P(B|A^c) = \frac{P(x = 12)}{1 - P(x = 3) - P(x = 6)} = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}3} = 4/7$$

$$P(A|B) = \frac{P(x = 6)}{P(x = 6) + P(x = 12)} = \frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}4} = 1/3$$

C

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in sop(X)} p(x)x = 0{,}3 * 1 + 0{,}1 * 3 + 0{,}3 * 6 + 0{,}4 * 12 = 7{,}2$$

D

$$Y \sim p(y)$$

$$F(\bar{y}) = \sum_{y=0}^{\bar{y}} p(y)$$

$$F(\bar{y} - 1) = \sum_{y=0}^{\bar{y}-1} p(y)$$

$$\therefore F(\bar{y}) - F(\bar{y} - 1) = p(\bar{y})$$

5. Ejercicio 5

Arrojo 2 dados

$$D_1 = \{\text{Número obtenido en el primer dado}\}$$

$$D_2 = \{\text{Número obtenido en el segundo dado}\}$$

$$Y = \{\text{Mínimo de los dos dados}\} = \text{mín}\{D_1, D_2\}$$

Y	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

A

Y	1	2	3	4	5	6
$P(Y)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

B

$$Z = \{\text{Pago al jugar}\}$$

$$Z(y) = \begin{cases} 0 & y = 1 \vee y = 2 \\ 90 & y = 3 \vee y = 4 \\ 300 & y = 5 \vee y = 6 \end{cases}$$

Z	0	90	300
$P(Z)$	$20/36$	$12/36$	$4/36$

$$\mathbf{E}[Z] = 20/36 \cdot 0 + 12/36 \cdot 90 + 4/36 \cdot 300 = 190/3$$

$$G = \{\text{Ganancia obtenida en el juego}\}$$

$$G = -90 + Z(Y) \implies \mathbf{E}[G] = -90 + \mathbf{E}[Z] = -80/3$$

C

$$P(X|D_1 = 6) \quad = \quad \frac{P(X = x \cap D_1 = 6)}{P(D_1 = 6)}$$

Para $x = 1$: P(X=1 $||D_1 = 6) = \frac{P(D_2 = 1 \cap D_1 = 6)}{P(D_1 = 6)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36}$

Para $x = 2$: P(X=2 $||D_1 = 6) = \frac{P(D_2 = 2 \cap D_1 = 6)}{P(D_1 = 6)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36}$

……

$$P(X = x|D_1 = 6) = \begin{cases} \frac{6}{36} & x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$P(X|D_1 = 6) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 6/36 & \text{si } x \leq 2 \\ 12/36 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 18/36 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 24/36 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 30/36 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 36/36 & \text{si } 6 \leq x \end{cases}$$

D

Esperanza de G:

$$\mathbf{E}[G|D_1 = 6] = 300 \underbrace{P(G = 300|D_1 = 6)}_{P(X=5|D_1=6)+P(X=6|D_1=6)} +90 \underbrace{P(G = 90|D_1 = 6)}_{P(X=3|D_1=6)+P(X=4|D_1=6)} +0 \underbrace{P(G = 0|D_1 = 6)}_{P(X=1|D_1=6)+P(X=2|D_1=6)} = 130$$

La ganancia restandole el costo de entrada:

$$\mathbf{E}[\mathbf{G}] - 90 = 40$$

E

En este caso:

$$P(X = x|D_1 = 6) = \begin{cases} 6/36 & x \in \{1,2,3,4\} \\ 12/36 & x = 5 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Y la esperanza de G es:

$$\mathbf{E}[G|D_1 = 6] = 300 \underbrace{P(G = 300|D_1 = 6)}_{P(X=5|D_1=6)+P(X=6|D_1=6)} + 90 \underbrace{P(G = 90|D_1 = 6)}_{P(X=3|D_1=6)+P(X=4|D_1=6)} + 0 \underbrace{P(G = 0|D_1 = 6)}_{P(X=1|D_1=6)+P(X=2|D_1=6)} - 90 = 40$$

F

En este caso:

$$P(X = x|D_1 = 6) = \begin{cases} 6/36 & x \in \{1,2,3\} \\ 18/36 & x = 4 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Y la esperanza de G es:

$$\mathbf{E}[G|D_1 = 6] = 90 \underbrace{P(G = 90|D_1 = 6)}_{P(X=3|D_1=6)+P(X=4|D_1=6)} + 0 \underbrace{P(G = 0|D_1 = 6)}_{P(X=1|D_1=6)+P(X=2|D_1=6)} - 90 = -30$$

6. Ejercicio 6

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}$$

Sabemos que $e^{tX} \in \{1, e^t, e^{2t}\}$ con probabilidades $1/3, 1/2, 1/6$ respectivamente. Luego

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \sum_{x \in \{0,1,2\}} p(x)e^{tx} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}$$

7. Ejercicio 7

A

Notemos que

x	-2	1	2
$y = -3x + 2$	8	-1	-4

Además

$$P(Y = y) = P(-3X + 2 = y) = P\left(X = \frac{2 - y}{3}\right)$$

De manera que

$$P(Y=y)=\begin{cases}0,3 & \text{si } y=2\\ 0,2 & \text{si } y=-1\\ 0,5 & \text{si } y=-4\\ 0 & \text{sino}\end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Y)=-1{,}6$$

$$Var(Y)=\sum_{y\in sop(Y)} p(y)y^2-(-1{,}6)^2=0{,}3\cdot 4+0{,}2\cdot 1+0{,}5\cdot 16-1{,}6^2$$

B

Notemos que

x	-2	1	2
$w=x^2-2$	2	-1	2

De manera que

$$P(W=w)=\begin{cases}0,8 & \text{si } w=2\\ 0,2 & \text{si } w=-1\\ 0 & \text{sino}\end{cases}$$

$$\mathbb{E}(W)=1{,}4$$

$$Var(W)=\sum_{w\in sop(W)} p(w)w^2-(1{,}4)^2=0{,}8\cdot 4+0{,}2\cdot 1-1{,}4^2$$

C

Notemos que

x	-2	1	2
$z=\ln(x+3)$	0	$\ln(4)$	$\ln(5)$

De manera que

$$P(Z=z)=\begin{cases}0,3 & \text{si } z=0\\ 0,2 & \text{si } z=\ln(4)\\ 0,5 & \text{si } z=\ln(5)\\ 0 & \text{sino}\end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Z)=0{,}2\cdot\ln 4+0{,}5\cdot\ln 5$$

$$Var(Z)=\sum_{z\in sop(Z)} p(z)z^2-[\mathbb{E}(Z)]^2=0{,}2\cdot\ln(4)^2+0{,}5\cdot\ln(5)^2-[0{,}2\cdot\ln 4+0{,}5\cdot\ln 5]^2$$

D

Notemos que

x	-2	1	2
$v=\lvert x\rvert$	2	1	2

De manera que

$$P(V=v)=\begin{cases}0,8 & \text{si } v=2\\ 0,2 & \text{si } v=1\\ 0 & \text{sino}\end{cases}$$

$$\mathbb{E}(V) = 1{,}8$$
$$Var(V) = \sum_{v \in sop(V)} p(v)v^2 - (1{,}8)^2 = 0{,}8 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 1 - 1{,}8^2$$

8. Ejercicio 8

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Número de pantallas defectuosas en una muestra elegida al azar de tamaño } n = 20\}$$

Sabemos que X sin $B\left(n = 20, p = 5\,\%\right)$. Luego

$$P\left(X < 3\right) = \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i} 0{,}05^i \left(1 - 0{,}05\right)^{20-i}$$

Inciso B

$$P\left(X \geq 5\right) = 1 - P\left(X \leq 4\right) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \binom{20}{i} 0{,}05^i \left(1 - 0{,}05\right)^{20-i}$$

Inciso C

$$P\left(X \leq 8\right) = \sum_{i=0}^{8} \binom{20}{i} 0{,}05^i \left(1 - 0{,}05\right)^{20-i}$$

Inciso D

$$P\left(X = 0\right) = \binom{20}{0} 0{,}05^0 \left(1 - 0{,}05\right)^{20-0} = \left(1 - 0{,}05\right)^{20}$$

9. Ejercicio 9

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Número de motores que fallan en un avión de 3 motores}\}$$
$$Y = \{\text{Número de motores que fallan en un avión de 5 motores}\}$$

Sin efectuar cálculos la decisión depende de p. A priori uno debería pensar que a mayor probabilidad de falla le convendrá poner menos motores.

Inciso B

Para que el avión funcione correctamente, necesita que al menos dos motores funcionen correctamente para el caso de un avión de tres motores, y al menos tres en un avión con cinco motores. Definamos

$$E_i = \{\text{Más de la mitad de los motores funcionan en un avión de } i \text{ motores}\}$$

Las probabilidades para distintos valores de p son

p	$P(E_3)$	$P(E_5)$
0.4	0.648	0.683
0.5	0.50	0.50
0.6	0.352	0.317

La conclusión a priori no cambia cuando se lo comprueba con los datos. Con probabilidad de falla baja es preferible muchos motores y cuando es alta es preferible pocos motores.

10. Ejercicio 10

A

Definamos

$$X = \{\text{Cantidad de alumnos de primer año}\}$$
$$Y = \{\text{Cantidad de alumnos de segundo año}\} = 3 - X$$

Inciso A

$$P(X = 1) = \frac{\binom{20}{1}\binom{30}{2}}{\binom{50}{3}}$$

Inciso B

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{20}{0}\binom{30}{3}}{\binom{50}{3}}$$

Inciso C

Sabemos que $X \sim H(n = 50, r = 20, m = 3)$. Por otra parte, $Y = m - X$ y entonces $Y \sim H(n = 50, r = n - r_x, m = 3)$, donde $r_x = 20$. Luego $\mathbb{E}[Y] = m - \mathbb{E}[X]$ y $Var(Y) = Var(X)$.

11. Ejercicio 11

Inciso A

Definamos

$$X = \left\{\text{Hijos hasta tener dos hijas mujeres}\right\}$$

Como la probabilidad de tener una hija mujer es $p = 0{,}5$ tenemos que $X \sim BN\left(r = 2, p = 0{,}5\right)$. Intuitivamente: la binomial negativa calcula la probabilidad de que hayan x ensayos Bernoulli hasta obtener los primeros r éxitos. En este caso el fracaso se interpreta como un hijo varón, mientras que el éxito como una hija mujer. Los padres dejan de tener hijos una vez que tuvieron dos mujeres. Luego

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^x$$

Inciso B

$$P\left(X = 4\right) = \binom{3}{1} 0{,}5^4$$

Inciso C

Teniendo en cuenta que el $Sop(X) = \{2, 3, 4, ...\}$, entonces:

$$P\left(X \leq 4\right) = P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) + P\left(X = 4\right) = \sum_{i=0}^{2} \binom{i+r-1}{r-1} 0{,}5^{r+i}$$

Inciso D

Como X tiene distribución binomial negativa, $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{r}{p} = 4$ y por lo tanto se esperaría que esta familia tenga 4 hijos, dos de ellos varones.

12. Ejercicio 12

Definamos

$$X = \left\{\text{Número de hijos de la familia}\right\}$$

Como la familia tendrá hijos hasta que tenga tres del mismo sexo, entonces $X \in \{3, 4, 5\}$. Que una familia tenga x hijos quiere decir que tuvo tres de un sexo y $x - 3$ del otro sexo. Teniendo en cuenta que la probabilidad de tener un hijo varón es la misma que una hija mujer.

$$P(X = x) = P\left(3 \text{ varones y } x - 3 \text{ mujeres}\right) + P\left(3 \text{ mujeres y } x - 3 \text{ varones}\right) = 2P\left(3 \text{ mujeres y x-3 varones}\right)$$

Podemos pensar a las probabilidades de tener 3 mujeres y x-3 varones como la probabilidad de tener x-3 hijos varones hasta la tercera mujer. Definamos $V = x - 3$. Luego, $V \sim BN\left(r = 3, p = 0{,}5\right)$ con $v + r = x$. Calculamos las probabilidades

$$P(X = x) = 2 * P(V = x - 3) = 2 * \binom{r+v-1}{2} 0{,}5^v 0{,}5^r = 2\binom{x-1}{2} 0{,}5^x$$

x	P(X=x)
3	0.25
4	0.375
5	0.375

La variable X no tiene distribución conocida, pero podemos expresarla como función de una variable que sí tiene distribución conocida.

13. Ejercicio 13

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Número de automóviles que (...) sufrirán una falla (...)}\}$$

Sabemos que $X \sim P\left(\lambda = 10\right)$. Luego

$$P\left(X \leq 10\right) = \sum_{i=0}^{10} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \sum_{i=1}^{10} \frac{10^i e^{-10}}{i!}$$

Inciso B

$$P\left(10 \leq X \leq 15\right) = \sum_{i=10}^{15} \frac{10^i e^{-10}}{i!}$$

14. Ejercicio 14

Dado $X \sim P\left(\lambda\right)$ queremos hallar el valor k tal que maximice $P(X = k)$. Consideremos la siguiente función:

$$g(x) = \frac{P(X = x)}{P(X = x - 1)} = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}} = \frac{\lambda}{x}$$

Analicemos la función: si $g(x) > 1$ entonces la probabilidad de ocurrencia de x es mayor a la de $x - 1$. Por otra parte, si $g(x) < 1$ entonces la probabilidad de ocurrencia de x es menor a la de $x - 1$. Luego, buscamos k tal que $g(k) > 1$ y $g(k + 1) < 1$. Vemos que $g(\lambda) = 1$, por lo que la moda de la distribución estará en la parte entera de λ.

¿Por qué no podemos tomar condiciones de primer orden sencillamente? porque el dominio de la distribución es discreto, razón por la cual no se puede diferenciar $P(X = x)$.

15. Ejercicio 15

Inciso A

Definamos

$$X_t = \{\text{Número de aviones que llegan al aeropuerto en } t \text{ horas}\}$$

Sabemos que como un proceso de Poisson no tiene memoria, $X \sim P(\lambda = t\alpha)$ con $\alpha = 8$. Luego

$$P(X_1 = 5) = \frac{(1 \cdot 8)^5 e^{-1 \cdot 8}}{5!}$$

$$P(X_1 \geq 10) = 1 - P(X_1 \leq 9) = 1 - \sum_{i=0}^{9} \frac{(1 \cdot 8)^i e^{-1 \cdot 8}}{i!}$$

Inciso B

$$P\left(X_{2,5} \geq 20\right) = 1 - P\left(X_{2,5} \leq 19\right) = 1 - \sum_{i=0}^{19} \frac{(2{,}5 \cdot 8)^i e^{-2{,}5 \cdot 8}}{i!}$$

$$P\left(X_{2,5} \leq 10\right) = \sum_{i=0}^{10} \frac{(2{,}5 \cdot 8)^i e^{-2{,}5 \cdot 8}}{i!}$$

16. Ejercicio 16

Inciso A

Sabemos que $p(0) = e^{-\lambda}$ ya que $0! = 1$.

$$\begin{aligned}
p(1) &= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} = \frac{\lambda}{1} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{1} p(0) \\
p(2) &= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} = \frac{\lambda}{1} p(1) \\
p(3) &= \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{\lambda}{3} \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda}{1} p(3) \\
&\vdots \\
p(k) &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{\lambda}{k} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{k} p(k-1)
\end{aligned}$$

Alternativamente, del Ejercicio 9 sabemos que $g(k) = \dfrac{p(k)}{p(k-1)} = \dfrac{\lambda}{k}$. Despejando llegamos a la misma conclusión.

Inciso B

Definamos

$$X_t = \{\text{Llamadas recibidas en } t \text{ horas}\}$$

Sabemos que $X_t \sim P(\lambda = t \cdot 2)$. Buscamos la probabilidad que no hayan llamadas durante los diez minutos de la ducha de manera tal que no pierda ningún llamado. Es decir $P(X_{1/6} = 0)$. Luego

$$P\left(X_{1/6} = 0\right) = e^{-2/6}$$

Ahora buscamos la duración máxima de la ducha tal que la probabilidad de no perder ninguna llamada sea mayor a 0.5. Es decir, buscamos t tal que $P(X_t = 0) = 1/2$.

$$P(X_t = 0) = e^{-2t} = \frac{1}{2} \implies t = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$

Luego, la duración máxima de la ducha es $t = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ horas.

17. Ejercicio 17

Inciso A

Las condicione sobre $p(x, \lambda, \mu)$ para que sea una pmf son $p(x, \lambda, \mu) \geq 0$ para todo x y $\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \lambda, \mu) = 1$. Demostrar la primera propiedad es trivial, ya que todos los términos son positivos. Para demostrar la segunda propiedad, veamos primero la condición de cierre de una variable aleatoria con distribución de Poisson con tasa de arribo λ. La serie de MacLaurin para $f(x) = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$ es

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Con esto se puede verificar la condición de cierre

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i}}_{=e^{\lambda}} = 1$$

Notemos que la condición de cierre de la Poisson implica que converge absolutamente. Luego, como $\sum_{x=0}^{\infty} p(x, \lambda, \mu)$ es la suma de dos series que convergen absolutamente también converge absolutamente. Esto verifica la condición de cierre.

Inciso B

Definamos

$$Y = \{\text{Número de errores en una página seleccionada al azar, tipeada por la mecanógrafa } A\}$$

Sabemos que $Y \sim Poi(\lambda)$

18. Ejercicio 18

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Cantidad de veces que se arroja un dado}\}$$

Si el dado extraído es blanco, entonces se lo arroja hasta obtener un número mayor que tres. Luego, la distribución de X condicional en extraer un dado blanco es geométrica, con $p = \frac{1}{2}$.

$$P\left(X = 5|\text{Dado blanco}\right) = (1-p)^4 p^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Inciso B

En este caso, la distribución condicional en extraer un dado negro es geométrica con $p = \frac{1}{6}$.

$$P\left(X = 5|\text{Dado negro}\right) = (1-p)^4 p^1 = \left(1-\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$$

Inciso C

Por Ley de Probabilidad Total

$$P\left(X = 5\right) = P\left(\text{Dado blanco}\right) P\left(X = 5|\text{Dado blanco}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{4} \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$$

19. Ejercicio 19

Sabemos que $X|Z = z \sim B\left(n = z, p = 0{,}6\right)$: tenemos una muestra de tamaño z donde sabemos que la probabilidad de éxito es $p = 0{,}6$. Para obtener la distribución no condicional, sabemos que por Ley de Probabilidad Total se cumple lo siguiente

$$P\left(X = x\right) = \sum_{z=x}^{\infty} P\left(Z = z\right) P\left(X = x|Z = z\right)$$

Intuición: para obtener la distribución no condicional tenemos que tener en cuenta que $X = x$ para muchos valores dados de Z. En particular Z puede ser tan pequeño como x. Trabajando esta expresión

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= \sum_{z=x}^{\infty} P(Z=z)\,P(X=x|Z=z) \\
&= \sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!}\binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x} \\
&= \sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!}\frac{z!}{x!(z-x)!} p^x (1-p)^{z-x} \\
&= \sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{x!(z-x)!} p^x (1-p)^{z-x} \\
&= \frac{p^x e^{-\lambda}}{x!}\sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^z (1-p)^{z-x}}{(z-x)!}\frac{\lambda^x}{\lambda^x} \\
&= \frac{(p\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}\sum_{z=x}^{\infty} \frac{\lambda^{z-x} (1-p)^{z-x}}{(z-x)!} \\
&= \frac{(p\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}\underbrace{\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^v}{v!}}_{(\text{MacLaurin})=e^{\lambda(1-p)}} \\
&= \frac{(p\lambda)^x e^{-p\lambda}}{x!}
\end{aligned}$$

Y por lo tanto $X \sim P(p\lambda)$.

20. Ejercicio 20

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Número de intentos que realiza hasta hallar el fusible adecuado}\}$$

Como cada vez que prueba si no es el adecuado lo vuelve a colocar en la caja, tenemos que $X \sim G\left(p = \frac{4}{7}\right)$. Luego, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} = \frac{7}{4}$ y $Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{21}{16}$. Finalmente

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(1-\frac{3}{7}\right)^0\left(\frac{4}{7}\right)^1 - \left(1-\frac{3}{7}\right)^1\left(\frac{4}{7}\right)^1$$

Inciso B

Definamos

$$Y = \{\text{Número de intentos que realiza hasta hallar el fusible adecuado}\}$$

En este caso si prueba y no es el adecuado no lo vuelve a colocar en la caja. Luego, la función de probabilidad puntual y los momentos serán

y	$P(Y=y)$	$y \cdot P(Y=y)$	$y^2 \cdot P(Y=y)$
1	$\frac{4}{7}$	0,57	0,57
2	$\frac{2}{7}$	0,57	1,14
3	$\frac{4}{35}$	0,34	0,11
4	$\frac{1}{35}$	0,11	0,46

Finalmente

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=1}^{4} y \cdot P(Y=y) = 1{,}60$$
$$Var(Y) = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}[Y]^2 = 0{,}64$$

21. Ejercicio 21

Inciso A

Definamos

$$Y_i = \{\text{Número de ventas en el día } i\}$$
$$X = \{\text{Número de ventas en dos días}\} = Y_1 + Y_2$$

Asumimos que Y_1 es independiente de Y_2. Calculamos la pmf utilizando Ley de Probabilidad Total

$$P(X=0) = P(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 0) \overset{indep}{=} P(Y_1=0) \cdot P(Y_2=0)$$
$$P(X=1) = P(Y_1 = 1 \cap Y_2 = 0) + P(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 1) \overset{indep}{=} P(Y_1=1) \cdot P(Y_2=0) + P(Y_1=0) \cdot P(Y_2=1)$$

$$P(X=2) = P(Y_1 = 2 \cap Y_2 = 0) + P(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 2) + P(Y_1 = 1 \cap Y_2 = 1) \overset{indep}{=} P(Y_1=1) \cdot P(Y_2=0) + P(Y_1=0) \cdot P(Y_2=1) + P(Y_1=1) \cdot P(Y_2=1)$$

$$P(X=3) = P(Y_1 = 2 \cap Y_2 = 1) + P(Y_1 = 1 \cap Y_2 = 2) \overset{indep}{=} P(Y_1=2) \cdot P(Y_2=1) + P(Y_1=1) \cdot P(Y_2=2)$$
$$P(X=4) = P(Y_1 = 2 \cap Y_2 = 2) \overset{indep}{=} P(Y_1=2) \cdot P(Y_2=2)$$

x	$P(X=x)$
0	0,49
1	0,28
2	0,18
3	0,04
4	0,01

Inciso B

$$P(X > 2 | X > 0) = \frac{P(X > 2 \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 0)}$$

Inciso C

Definamos

$$Z_t = \{\text{Cantidad de reparaciones en } t \text{ horas de uso}\}$$

Sabemos que $Z_t \sim P(\lambda = 0{,}025 \cdot t)$.

$$P(Z_{240} \leq 4) = \sum_{i=0}^{4} \frac{(0{,}025 \cdot 240)^i e^{-0{,}025 \cdot 240}}{i!}$$

Inciso D

Definamos

$$W = \{\text{Número de centros de entre cinco que necesitan a lo sumo 4 reparaciones}\}$$

Sabemos que $W \sim B\left(n = 5, p = P(Z \leq 4)\right)$.

$$P(W \geq 1) = 1 - P(W = 0) = 1 - \binom{5}{0} P(Z \leq 4)^0 (1 - P(Z \leq 4))^{5-0}$$

22. Ejercicio 22

Inciso A

Definamos

$$D_t = \{\text{Número de desperfectos en } t \text{ semanas}\}$$

Sabemos que $D \sim P(\lambda = 2 \cdot t)$. Asumo que quince días son dos semanas. Luego

$$P(D_2 > 3) = 1 - P(D_2 \leq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{(2 \cdot 2)^i e^{-2 \cdot 2}}{i!}$$

Inciso B

Definamos

$$Z = \{\text{Gasto en mantenimiento}\}$$

Z es la siguietne función de D

$$Z = \begin{cases} 20 \cdot D & D \leq 3 \\ 70 & D \geq 4 \end{cases}$$

Luego, la función de probabilidad de masa es

z	$P(Z=z)$
0	0,1353
20	,2707
40	0,2707
60	0,1804
70	0,1429

Definamos ahora

$$G = \{\text{Ganancia neta semanal}\} = 120 - Z$$

Luego, la función de probabilidad de masa es

g	$P(G=g)$
120	0,1353
100	,2707
80	0,2707
60	0,1804
50	0,1429

Adicionalmente $\mathbb{E}[G] = 120 - \mathbb{E}[Z]$

Inciso C

Definamos

$$S = \{\text{Número de semanas transcurridas hasta tener una ganancia mensual de 120}\}$$

Asumiendo que las probabilidades son independientes entre semanas, tenemos que $S \sim G\left(p = P(G=120)\right)$. Luego

$$P(S=5) = (1 - P(G=120))^4 P(G=120)^1$$

23. Ejercicios 23 y 27

Note que estos ejercicios ya estaban resueltos en el apunte de momentos para variables aleatorias discretas, subido al Campus Virtual anteriormente. De hecho, en dicho apunte podrá ver cómo calcular los momentos de otras variables aleatorias discretas con distribuciones conocidas.

23.1. Variable aleatoria Bernoulli

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF

$$E(X) = \sum_{x:p(x)>0} xp(x) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E(X^2) = \sum_{x:p(x)>0} x^2 p(x) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

Entonces,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

(b) Calculemos primero la función generadora de momentos si $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. La función de probabilidad puntual de X está dada por

$$\text{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

para $x = 0, 1$ por lo que la función generatriz de momentos es

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \text{E}\left[e^{tX}\right] \\
&= \sum_{x=0}^{1} e^{tx}\text{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{1} e^{tx}p^x(1-p)^{1-x} \\
&= (1-p) + e^t p \\
&= 1 - p + pe^t
\end{aligned}$$

En primer lugar, derivamos $M_X(t) = 1 - p + pe^t$ respecto de t una y dos veces. Luego, evaluamos dichas expresiones en $t = 0$ para obtener los momentos no centrados:

$$\begin{aligned}
M'_X(t) = pe^t &\Rightarrow M'_X(0) = E(X) = p \\
M''_X(t) = pe^t &\Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = p
\end{aligned}$$

Lo que conduce a que $\text{Var}(X) = p - p^2$

23.2. Variable aleatoria binomial

La función de probabilidad puntual de $X \sim B(n, p)$ es

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición de cierre:

$$p_X(1) + \cdots p_X(2) + \cdots + p_X(n) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} = (p + 1 - p)^n = 1$$

donde usamos que $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} = (a+b)^n$, con $a = p$, $b = 1 - p$.

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \underbrace{0 \cdot \frac{n!}{0!(n-0)!} p^0 (1-p)^{n-0}}_{0} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Reescribiendo el factorial $(n-x)!$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x-1+1)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Notemos que, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Sustituimos el índice x por el índice ℓ, de la siguiente manera $\ell = x-1$. Es decir, como x toma los valores $1, \ldots, n$; entonces ℓ toma los valores $0, \ldots, n-1$. Reescribiendo la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= np \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!((n-1)-\ell)!} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell}}_{=1,\text{ suma PMF de } L \sim Bin(n-1,p)} = np
\end{aligned}$$

Calculemos ahora $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \left(\left(x^2 - x\right) + x\right) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \left(x^2 - x\right) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Usando que:

- si $x = 0$ ó $x = 1$ entonces $x^2 - x = 0$, por lo que la primera sumatoria se puede empezar a sumar desde $x = 2$.
- si $x = 0$ entonces $x = 0$, por lo que la segunda sumatoria se puede empezar a sumar desde $x = 1$.

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$
- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $p^x = p \cdot p^{x-1}$
- $p^x = p^2 \cdot p^{x-2}$
- haciendo los cambios de índices $s = x-2$ en la primera sumatoria y $\ell = x-1$ en la segunda sumatoria

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] =& n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} p^{x-2}(1-p)^{n-x} + np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x} \\
=& n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{s=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-s)!s!} p^{s}(1-p)^{n-2-s}}_{=1,\text{ suma PMF de } S \sim Bin(n-2,p)} = np + np \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-\ell)!\ell!} p^{\ell}(1-p)^{n-1\ell}}_{=1,\text{ suma PMF de } L \sim Bin(n-1,p)} = np \\
=& n(n-1)p^2 + np.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$\mathrm{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

(b) En este caso mostramos cómo obtener la función generadora de momentos. No obstante, también podemosusar una propiedad que explica por qué la MGF de $X \sim Bin(n,p)$ tiene esta expresión:

$$M(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

Si $X \sim Bin(n,p)$, se puede escribir a $X = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, donde $A_i \sim_{iid} Be(p)$.

En ese caso vale que $M_X(x) = M_{A_1+\cdots+A_n(x)} \underbrace{=}_{A_i \text{ indep}} \prod_{i=1}^{n} M_{A_i}(x) = M_{A_1}(x)\cdots M_{A_n}(x) \underbrace{=}_{A_i\, id} (M_{A_1}(x))^n$

Por eso la MGF de una v.a. $X \sim Bin(n,p)$ es la MGF de una v.a. $Y \sim Be(p)$ elevada a la n.
Ahora sí, mostremos por definición cómo obtener la MGF de $X \sim Bin(n,p)$.

$$\begin{aligned}
M(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\
M(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}\left(pe^t\right)^x (1-p)^{n-x} \\
&= \left(pe^t + 1 - p\right)^n
\end{aligned}$$

donde en el último paso se usa la regla del binomio:

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x} = (a+b)^n$$

Por lo tanto, para obtener los primeros dos momentos, derivamos una y dos veces respecto de t y luego evaluamos en $t = 0$.

$$\begin{aligned}
M'_X(t) &= n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} \cdot pe^t \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = np \\
M''_X(t) &= n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} \cdot pe^t + n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2} \cdot p^2e^{2t} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = np + n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Var}(X) = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-p)$

23.3. Variable aleatoria geométrica

La función de probabilidad puntual de $X \sim Ge(p)$ es

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{si } x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición de cierre:

- Si $p = 1$ entonces $p_X(1) = 1$ porque el evento ocurre con certeza.
- Si $p < 1$, entonces:

$$p_X(1) + p_X(2) + \cdots = \sum_{x=1}^{+\infty} (1-p)^{x-1} p = p \sum_{x=0}^{+\infty} (1-p)^x = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

donde usamos que $a = 1 - p < 1$, que $\sum_{x=1}^{+\infty} a^{x-1} = \sum_{x=0}^{+\infty} a^x$, porque si x toma los valores naturales desde 1..., entonces $x - 1$ toma los valores desde 0 y $\sum_{x=0}^{+\infty} a^x = \frac{1}{1-a}$, ver apéndice, resultado 0 para ver la demostración.

(a) Calculemos la esperanza y varianza de X usando la PMF. Para poder demostrar cuánto vale su esperanza, usamos el resultado 1 del apéndice con $a = 1 - p$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p (1-p)^{x-1} \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\ &= p \frac{1}{[1-(1-p)]^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Para poder demostrar cuánto vale su varianza, usamos el resultado 2 del apéndice con $a = 1 - p$.

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p (1-p)^{x-1} \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-p)^{x-1} \\ &= p \frac{1+1-p}{[1-(1-p)]^3} \\ &= \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

(b) Consideramos la MGF de $X \sim Ge(p)$,

$$M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

Para obtener los primeros dos momentos, derivamos una y dos veces respecto de t y luego evaluamos en $t = 0$.

$$M_X'(t) = \frac{pe^t[1 - \cancel{(1-p)e^t} + \cancel{(1-p)e^t}]}{(1-(1-p)e^t)^2} \Rightarrow M_X'(0) = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$M_X''(t) = \frac{pe^t\left[\left(1-(1-p)e^t\right)^2 + 2(1-p)(1-(1-p)e^t)\right]}{\left(1-(1-p)e^t\right)^4} \Rightarrow M_X''(0) = E(X^2) = \frac{2-p}{p^2}$$

Por lo tanto,

$$\text{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

24. Ejercicio 24

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{x \in Sop(X)} (ax+b)p_X(x) \\ &= \sum_{x \in Sop(X)} ax \cdot p_X(x) + \sum_{x \in Sop(X)} b \cdot p_X(x) \\ &= a \underbrace{\sum_{x \in Sop(X)} x \cdot p_X(x)}_{=\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum_{x \in Sop(X)} \cdot p_X(x)}_{=1} \\ &= a\mathbb{E}(X) + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= \mathbb{E}\left((Y - E(Y))^2\right) \\ &= E\left((aX + b - (a\mathbb{E}(X) + b))^2\right) \\ &= E\left((aX - aE(X))^2\right) \\ &= E\left(a^2(X - E(X))^2\right) \\ &= a^2 E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= a^2 Var(X) \end{aligned}$$

25. Ejercicio 25

Hay seis números ganadores y 41 números no ganadores. Definamos

$$X = \{\text{Cantidad de números ganadores en una tarjeta elegida al azar}\}$$

Sabemos que $X \sim H(n = 47, r = 6, m = 6)$. Luego

$$P(\text{Ganar}) = P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{41}{0}}{\binom{47}{6}} = \frac{1}{10737573}$$

Definamos

$$G = \{\text{Ganancia neta del juego}\} = \begin{cases} 1500000 - 4 & P(\text{Ganar}) \\ -4 & 1 - P(\text{Ganar}) \end{cases}$$

De manera tal que la ganancia esperada del juego es

$$\mathbb{E}\left[G\right] = -2603$$

Definamos

$$Y = \{\text{Número de tarjetas compradas hasta ganar el primer premio}\}$$

Sabemos que $Y \sim G(p = P(\text{Ganar}))$ por lo que $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{P(\text{Ganar})} = 10737573$. Finalmente definamos

$$Z = \{\text{Gasto hasta ganar el primer premio}\} = 4 \cdot Y$$

Luego $\mathbb{E}[Z] = 4 \cdot \mathbb{E}[Y] = 42950292$.

26. Ejercicio 26

Definamos

$$X = \{\text{Número de individuos que entran a comprar la revista}\}$$

Sabemos que $X \sim P\left(\lambda = 4\right)$. Ahora definamos

$$Y = \{\text{Número de ejemplares vendidos}\}$$

Como sólo hay cinco revistas, $Y = \text{mín}\left\{X, 5\right\}$. Luego, Y tiene la siguiente función de probabilidad de masa

y	$P(Y = y)$
0	0,0183
1	0,0733
2	0,1465
3	0,1954
4	0,1954
5	0,3711

Notemos que la probabilidad de vender cinco ejemplares es la probabilidad que vengan cinco o más persons a comprar la revista. Finalmente, $\mathbb{E}[Y] = 3{,}5896$.

27. Ejercicio 27

Ver ejercicio 23

28. Ejercicio 28

Sea X la demanda anual de autos en la concesionaria. Luego $X \sim Po(\lambda = 4)$.

A

La concesionaria tiene un stock de 3 unidades. Luego, venderá todo su stock siempre que $X \geq 3$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \geq 2) \simeq 0{,}7619$$

B

Sea V la cantidad de autos vendidos por la concesionaria en un año. Luego, $sop(V) = \{0, 1, 2, 3\}$.

v	$P(V = v)$
0	$P(X = 0) = 0{,}0183$
1	$P(X = 1) = 0{,}0732$
2	$P(X = 2) = 0{,}1465$
3	$P(X \geq 3) = 0{,}7619$

C

Sea G la ganancia anual en pesos de la concesionaria. Notemos que $G = 700000 \cdot V - 300000$. Luego

g	$P(G = g)$
-300000	$P(V = 0) = 0{,}0183$
400000	$P(V = 1) = 0{,}0732$
1100000	$P(V = 2) = 0{,}1465$
1800000	$P(V = 3) = 0{,}7619$

29. Ejercicio 29

Sea X el número de partidos perdidos por Kasparov. Como hay $n = 100$ partidos y cada partido es un ensayo de Bernoulli con probabilidad $p = 1/100$ de éxito (notemos que éxito quiere decir *Kasparov pierde* porque X registra la cantidad de partidos perdidos),

$$X \sim Bin(100, 1/100)$$

. Entonces

$$P(X = 0) = p_X(0) = \binom{100}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^{100-0} = \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 0{,}366$$

Veamos qué ocurre si aproximamos la distribución binomial de X con la distribución de una v.a. $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ con

$$\lambda = np = 100 \times 1/100 = 1$$

$$P_Y(0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-1}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-1}\frac{1}{0!} = e^{-1} = 0{,}368$$

Asi que vemos que $p_X(0)$ y $P_Y(0)$ difieren recién en el tercer dígito decimal.

Soluciones Práctica 4[1]

1. Ejercicio 1

1.1. Variable aleatoria uniforme

(a) Si $X \sim U(a,b)$ entonces

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(a+b)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(a^2+ab+b^2)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Entonces $Var(X) = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} - \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{12} = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

(b) $M_X(t) = \dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

Buscamos la FGM: $M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_a^b e^{tx} f(x)dx = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}dx = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$$

Entonces

$$M'_X(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(be^{tb}-ae^{ta})t-(e^{tb}-e^{ta})}{t^2}$$

$$E(X) = \lim_{t\to 0} M'_X(t) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{\cancel{(be^{tb}-ae^{ta})}+t(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})-\cancel{(be^{tb}-ae^{ta})}}{2t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})}{2} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$M''_X(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^3-(be^{tb}-ae^{ta})2t^2+(e^{tb}-e^{ta})2t}{t^4}$$

$$M''_X(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^2-2t(be^{tb}-ae^{ta})+2(e^{tb}-e^{ta})}{t^3}$$

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} M''_X(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^2-2t(be^{tb}-ae^{ta})+2(e^{tb}-e^{ta})}{t^3}$$

$$E(X^2) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^3e^{tb}-a^3e^{ta})t^2+\cancel{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})2t}-\cancel{2(be^{tb}-ae^{ta})}-\cancel{2t(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})}+\cancel{2(be^{tb}-ae^{ta})}}{3t^2}$$

$$E(X^2) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^3e^{tb}-a^3e^{ta})\cancel{t^2}}{3\cancel{t^2}}$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Por lo tanto $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

[1] Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Pedro Martínez Bruera.

1.2. Variable aleatoria exponencial

(a) Recordemos que:

- $E(X) = \int_0^{\infty} x f_X(x)dx$
- $E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f_X(x)dx$
- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

En este caso particular, tenemos que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x > 0$. Entonces,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)dx = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

Nota: Para calcular estas integrales debemos usar el método de **integración por partes**.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

y recordamos que $h(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} h(x) - h(a)$.

Calculamos $E(X)$ y $Var(X)$:

$$E(X) = \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'(x)} dx \underbrace{=}_{\text{I.P.}} -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}dx^{2}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x}}_{=0} - \underbrace{0\cdot e^{-\lambda\cdot 0}}_{=0} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty}\right]$$
$$= -\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}$$

Calculamos $E\left(X^2\right)$:

$$E\left(X^2\right) = \int_0^{\infty} \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'(x)} dx \underbrace{=}_{\text{Int. por partes}} -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2xe^{-\lambda x}dx$$
$$=^{3} -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} -x^2e^{-\lambda x}}_{=0} - \underbrace{0^2\cdot e^{-\lambda\cdot 0}}_{=0} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$
$$= \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx}_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Por lo tanto,

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(b)

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^{+\infty}\lambda e^{(t-\lambda)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad \text{si } t < \lambda$$

[3] Notar que $f(x) = x^2$, $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, por lo tanto $f'(x) = 2x$ y $g(x) = -e^{\lambda x}$.

$$M'_X(t) = (-1)\cdot(-1)\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$
$$M''_X(t) = (-2)\cdot(-1)\frac{\lambda}{(\lambda-t)^3} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = 2\frac{\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Entonces $Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

1.3. Variable aleatoria Gamma

(a) $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}$, donde

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

En particular, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ si α es un número entero positivo y $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Veamos primero que $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$

Veamos ahora que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1-1}e^{-x}dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx \\
&= \underbrace{-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{=\Gamma(\alpha)} \\
&= \alpha\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

Entonces si α es un número entero positivo, vale que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

Calculemos $E(X)$ y $Var(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{+\infty} x\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha e^{-\lambda x}dx}_{=1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}
\end{aligned}$$

La última integral es igual a 1 porque es la integral de la función de densidad de una variable con distribución $\Gamma(\alpha+1,\lambda)$.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1} e^{-\lambda x}dx}_{=1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

La última integral es igual a 1 porque es la integral de la función de densidad de una variable con distribución $\Gamma(\alpha+2,\lambda)$.

Cabe notar que $\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha+1)\alpha$

Entonces $Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

(b) $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}, t < \lambda$

$$M'_X(t) = \lambda^{\alpha}(-\alpha)\cdot(-1)\frac{1}{(\lambda-t)^{\alpha+1}} \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$
$$M''_X(t) = \alpha\lambda^{\alpha}(-(\alpha+1))\cdot(-1)\frac{1}{(\lambda-t)^{\alpha+2}} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

Entonces $Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

1.4. Variable aleatoria con $f(x) = \frac{1+\theta x}{2}$ si $x \in [-1, 1]$

(a) Calculemos la esperanza y varianza usando la función de densidad

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^{1} x \cdot \left(\frac{1+\theta x}{2}\right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+\theta x^2}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x + \theta x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{\theta x^3}{3}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{\theta}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \left(\frac{1+\theta x}{2}\right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+\theta x^3}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 + \theta x^3 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{\theta x^4}{4}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

O sea que $Var(X) = \frac{3-\theta^2}{9}$.

(b) Calculemos la esperanza y varianza usando la FGM

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) = \int_{-1}^{1} e^{tx} \cdot \left(\frac{1+\theta x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{tx} dx + \frac{\theta}{2}\int_{-1}^{1} x \cdot e^{tx} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{tx} dx + \frac{\theta}{2}\left[\frac{e^{tx}x}{t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{t} e^{tx} dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{t} e^{tx}\Big|_{-1}^{1} + \frac{\theta}{2}\left[e^{t} + e^{-t} - \frac{1}{t^2} e^{tx}\Big|_{-1}^{1}\right] \\ &= \frac{1}{2t}\left(e^{t} - e^{-t}\right) + \frac{\theta}{2}\left[\frac{e^{t} + e^{-t}}{t} - \frac{\left(e^{t} - e^{-t}\right)}{t^2}\right] \end{aligned}$$

Notar que esta función no está definida en un entorno de $t = 0$.

1.5. Variable aleatoria Pareto

(a) Calculamos los momentos de la función X, $E(X^k)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Notemos que el k-ésimo momento de X estará definido si y sólo si $\alpha > k$.

Separamos los cálculos de los momentos en tres casos para ver que solamente se pueden calcular los momentos si $\alpha > k$. Recuerde que el k-ésimo momento se calcula de la siguiente manera:

$$E\left(X^k\right) = \int_{\lambda}^{\infty} x^k f_X(x)dx$$

a) Consideramos $\alpha > k$.

$$\begin{aligned} E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_{\lambda}^{\infty} x^{k-\alpha-1}dx \\ &= \alpha\lambda^\alpha \left.\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right|_{\lambda}^{\infty} \\ &= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{k-\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} x^{k-\alpha} - \lambda^{k-\alpha}\right) \\ &= \alpha\lambda^\alpha\left(0 - \frac{\lambda^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right) \\ &= \frac{\alpha\lambda^k}{\alpha-k} \end{aligned}$$

para $k-\alpha < 0, x^{k-\alpha} \to 0$ si $x \to \infty$

b) Consideramos $\alpha = k$.

$$\begin{aligned} E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_{\lambda}^{\infty} x^{\alpha-\alpha-1}dx \\ &= \alpha\lambda^\alpha \ln x\Big|_{\lambda}^{\infty} \\ &= \alpha\lambda^\alpha\left(\lim_{x\to\infty} \ln x - \ln\lambda\right) \\ &\to \infty \end{aligned}$$

c) Consideramos $\alpha < k$.

$$\begin{aligned} E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_{\lambda}^{\infty} x^{k-\alpha-1}dx \\ &= \alpha\lambda^\alpha \left.\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right|_{\lambda}^{\infty} \\ &= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{k-\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} x^{k-\alpha} - \lambda^{k-\alpha}\right) \to \infty \end{aligned}$$

para $k-\alpha > 0, x^{k-\alpha} \to +\infty$ si $x \to \infty$.

Por lo tanto $E(X) = \dfrac{\alpha\lambda}{\alpha-1}$ y $E(X^2) = \dfrac{\alpha\lambda^2}{\alpha-2}$.

Entonces, se tiene que $Var(X) = \dfrac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

(b) Las v.a. con distribución Pareto no tienen FGM.

2. Ejercicio 2

Tenemos $X \sim Exp(\lambda)$ donde

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$$

Queremos calcular $\mathbb{E}\left[X^k\right]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \int_0^\infty x^k f(x)dx = \int_0^\infty \lambda x^k e^{-\lambda x}dx = \int_0^\infty \lambda x^k \frac{\lambda^k}{\lambda^k}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)} e^{-\lambda x}dx = \frac{\overbrace{\Gamma(k+1)}^{=k!}}{\lambda^k} \underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)} x^k e^{-\lambda x}}^{G(k,\lambda)} dx}_{\text{(Cond. Cierre)=1}} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

3. Ejercicio 3

Inciso A

Tenemos X variable aleatoria con la siguiente densidad

$$f_X(x) = c^2 x - 0{,}5c I_{(0,1)}(x)$$

Para que sea una densidad, $f(x)$ debe verificar la condición de cierra y que $f(x) \geq 0$ para todo el soporte de X. Primero busquemos los valores de c tal que se verifique la condición de cierre:

$$\int_0^1 f_X(x) = 1 \implies \int_0^1 \left(c^2 x - 0{,}5c\right) dx = c^2 \frac{x^2}{2} - c\frac{x}{2}\bigg|_0^1 = \frac{c^2 - c}{2} = 1 \implies c_1 = 2 \; c_2 = -1$$

Ahora veamos para qué valores de x, $f_X(x)$ es positiva para c_1 y c_2

$$c_1 = 2 \implies f_X(x) = 4x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{4}$$
$$c_2 = -1 \implies f_X(x) = x + 0{,}5 \geq 0 \iff x \geq -0{,}5$$

Luego, c_1 no satisface la condición que la densidad debe ser positiva para todo el soporte. Finalmente, la densidad estará dada por

$$f_X(x) = x + 0{,}5 I_{(0,1)}(x)$$

Inciso B

Sea $\tilde{\mu}_X$ la mediana de X. Es el valor tal que $P\left(X \leq \tilde{\mu}_X\right) = 0{,}5$. Luego

$$0{,}5 = \int_0^{\tilde{\mu}_X} (x + 0{,}5)\, dx = \frac{x^2 + x}{2}\bigg|_0^{\tilde{\mu}_X} \implies \tilde{\mu}_X = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}}{2\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $X \in (0,1)$ entonces $\tilde{\mu}_X = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Inciso C

Definamos $Y = aX + b$, queremos computar la densidad de y.

$$F_Y(y) = P\left(Y \leq y\right) = P\left(aX + b \leq y\right) = P\left(aX \leq y - b\right)$$

Si $a > 0$ entonces $Y \in (b, b+a)$. Por lo tanto

$$F_Y(y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Luego

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq b \\ \frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right) & b < y < a+b \\ 1 & a+b < y \end{cases}$$

Finalmente, la densidad es

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a}) I_{(b,b+a)}(y)$$

Si $a < 0$ tenemos entonces $Y \in (a+b, b)$. Por lo tanto

$$F_Y(y) = P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Luego

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq a+b \\ 1 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right] & b < y < a+b \\ 1 & b < y \end{cases}$$

Finalmente, la densidad es

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right) = -\frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a}) I_{(a+b,b)}(y)$$

Inciso D

Sea $\tilde{\mu}_Y$ la mediana de Y. Es el valor tal que $P\left(Y \leq \tilde{\mu}_Y\right) = 0{,}5$. Supongamos que $a > 0$, luego

$$0{,}5 = F_Y\left(\tilde{\mu}_Y\right) = P\left(Y \leq \tilde{\mu}_Y\right) = P\left(aX + b \leq \tilde{\mu}_Y\right) = P\left(X \leq \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a}\right) \implies \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a} = \tilde{\mu}_X \implies \tilde{\mu}_Y = a\tilde{\mu}_X + b$$

Supongamos ahora que $a < 0$

$$0{,}5 = F_Y\left(\tilde{\mu}_Y\right) = P\left(Y \leq \tilde{\mu}_Y\right) = P\left(aX + b \leq \tilde{\mu}_Y\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a}\right) \implies P\left(X \leq \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a}\right) = 0{,}5 \implies \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a} = \tilde{\mu}_X$$
$$\implies \tilde{\mu}_Y = a\tilde{\mu}_X + b$$

Consideremos ahora cualquier otro percentil. Llamemos $\tilde{X}_p$ y $\tilde{Y}_p$ al percentil p de X e Y tal que $P\left(X \leq \tilde{X}_p\right) = P\left(Y \leq \tilde{Y}_p\right) = p$. Si $a > 0$ tenemos

$$p = F_Y\left(\tilde{Y}_p\right) = P\left(Y \leq \tilde{Y}_p\right) = P\left(X \leq \frac{\tilde{Y}_p - b}{a}\right) \implies \tilde{Y}_p = a\tilde{X}_p + b$$

Luego con $a > 0$ el percentil p de Y será $a\tilde{X}_p + b$. Con $a < 0$ tenemos

$$p = F_Y\left(\tilde{Y}_p\right) = P\left(Y \leq \tilde{Y}_p\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{\tilde{Y}_p - b}{a}\right) \implies 1 - p = P\left(X \leq \frac{\tilde{Y}_p - b}{a}\right) \implies \tilde{Y}_p = aX_{1-p} + b$$

Luego con $a < 0$ esto no será cierto.

4. Ejercicio 4

Inciso A

Tenemos X tal que $\ln X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Sea $\tilde{X}_{95}$ el percentil 95. Es decir $P\left(X \leq \tilde{X}_{95}\right) = 0{,}95$. Luego

$$0{,}95 = F_X\left(\tilde{X}_{95}\right) = P\left(X \leq \tilde{X}_{95}\right) = P\left(\ln X \leq \ln \tilde{X}_{95}\right) = P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{\ln \tilde{X}_{95} - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln \tilde{X}_{95} - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$$
$$\implies \tilde{X}_{95} = e^{\mu + \sqrt{\sigma^2}\Phi^{-1}(0{,}95)}$$

Donde $\Phi(z)$ es la distribución acumulada de una variable aleatoria que se distribuye normal estándar, $N(0,1)$.

Inciso B

Buscamos la densidad de X

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\ln X \leq \ln x) = F_{\ln X}(\ln x)$$

Luego

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(f_{\ln X}(\ln x)\right) = \frac{1}{x} f_{\ln X}(\ln x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)^2}$$

5. Ejercicio 5

Notemos que 15 minutos son un cuarto de hora y que 45 minutos son tres cuartos de hora.

Queremos calcular:

$$P\left(\{X \leq \tfrac{1}{4}\} \cup \{X \geq \tfrac{3}{4}\}\right) = P\left(\{X \leq \tfrac{1}{4}\}\right) + P\left(\{X \geq \tfrac{3}{4}\}\right) = P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) + P\left(\frac{3}{4} \leq X \leq 1\right)$$
$$= 1 - P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{0{,}25}^{0{,}75} (\theta + 1)x^\theta \, dx = x^{\theta+1}\Big|_{0{,}25}^{0{,}75} = 0{,}75^{\theta+1} - 0{,}25^{\theta+1}$$

6. Ejercicio 6

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Duración de un componente}\}$$
$$Y = \{\text{Costo de operación por unidad de tiempo}\} = cX$$

Sabemos que $X \sim Exp(\lambda)$. Como la esperanza es un operador lineal, tenemos que $\mathbb{E}[Y] = c\mathbb{E}[X] = \frac{c}{\lambda}$.

Inciso B

Definamos

$$Z = \{\text{Costo de operación por unidad de tiempo}\} = c\left(1 - 0{,}5e^{aX}\right)$$

con $a < 0$. Luego $\mathbb{E}[Z] = c\left(1 - 0{,}5\mathbb{E}\left[e^{aX}\right]\right)$. Utilizando la función generatriz de momentos de X sabemos que $\mathbb{E}\left[e^{aX}\right] = \frac{\lambda}{\lambda - a}$ y dicha función está bien definida ya que $a < 0$. Finalmente $\mathbb{E}[Z] = c\left(1 - 0{,}5\frac{\lambda}{\lambda - a}\right)$.

7. Ejercicio 7

Vamos a resolver este ejericio "a mano", pero no es necesario. Sabemos que si $U \sim U[0,1]$ y sea $X = F^{-1}(U)$, entonces la distribución de X es F.

Inciso A

Tenemos $X = aU + b$ con $a > 0$. El soporte de X es $[b, a+b]$. Calculamos la distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(aU + b \leq x) = P\left(U \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_U\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_U\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} f_U\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

Finalmente

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < b \\ \frac{x-b}{a} & b < x < a+b \\ 1 & a+b < x \end{cases}$$

Vemos entonces que $X \sim U[b, b+a]$. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = aU + b$ por lo que $F(x) = \frac{x-b}{a}$.

Inciso B

Tenemos $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. El soporte de X será $(0,\infty)$. Calculamos la distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right) = P\left(U \leq 1 - e^{-\lambda x}\right) = F_U\left(1-e^{-\lambda x}\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_U\left(1-e^{-\lambda x}\right)\right) = \lambda e^{-\lambda x} f_U\left(1-e^{-\lambda x}\right) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Finalmente

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & 0 < x \end{cases}$$

Vemos entonces que $X \sim Exp(\lambda)$. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ por lo que $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Inciso C

Tenemos $Y = U^5$. El soporte de Y será $[0,1]$. Calculamos la distribución

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(U^5 \leq y\right) = P\left(U \leq y^{\frac{1}{5}}\right) = F_U\left(y^{\frac{1}{5}}\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_Y(y) = \frac{d}{dx}\left(F_U\left(y^{\frac{1}{5}}\right)\right) = \frac{1}{5}y^{-\frac{4}{5}} f_U\left(y^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}y^{-\frac{4}{5}}$$

Finalmente

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^{\frac{1}{5}} & 0 < y < 1 \\ 1 & 1 < y \end{cases}$$

En este caso Y no tiene distribución conocida. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = U^5$ por lo que $F(y) = y^{\frac{1}{5}}$.

Inciso D

Tenemos $X = \ln U$. El sopote de X será $(-\infty, 0)$. Calculamos la distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\ln U \leq x) = P\left(U \leq e^x\right) = F_U\left(e^x\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_U\left(e^x\right)\right) = e^x f_U\left(e^x\right) = e^x$$

Finalmente

$$F_X(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

En este caso X no tiene distribución conocida. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = \ln U$ por lo que $F(x) = e^x$.

Inciso E

Tenemos $W = \frac{U}{U+1}$. El soporte de W será $[0, \frac{1}{2}]$. Calculamos la distribución

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P\left(\frac{U}{U+1} \leq w\right) = P\left(U \leq \frac{w}{1-w}\right) = F_U\left(\frac{w}{1-w}\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_W(w) = \frac{d}{dw}\left(F_U\left(\frac{w}{1-w}\right)\right) = \frac{1}{(1-w)^2} f_U\left(\frac{w}{1-w}\right) = \frac{1}{(1-w)^2}$$

Finalmente

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \frac{w}{1-w} & 0 < w < \frac{1}{2} \\ 1 & w > \frac{1}{2} \end{cases}$$

En este caso X no tiene distribución conocida. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = \frac{U}{U+1}$ por lo que $F(w) = \frac{w}{1-w}$.

8. Ejercicio 8

Tenemos $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Queremos obtener la distribución de $Y = e^x$. En este caso el soporte de Y es $(0, \infty)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(e^X \leq y\right) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y)$$

Calculamos la densidad

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(\ln y)) = \frac{1}{y} f_X(\ln y) = \frac{1}{y\sqrt{s\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)^2}$$

9. Ejercicio 9

Tenemos X con la siguiente función de distribución

$$f_X(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2} I_{(0,\infty)}(x)$$

Queremos obtener la distribución de $Y = X^2$. En este caso el soporte de Y es $(0, \infty$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = P\left(X \leq \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right)$$

Calculamos la densidad

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(F_X\left(\sqrt{y}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(\sqrt{y}\right) = \lambda e^{-\lambda y}$$

De esta forma $Y \sim Exp(\lambda)$.

10. Ejercicio 10

Inciso A

El evento $\left\{X^2 < y\right\}$ equivale a que $\{|X| < \sqrt{y}\} = \{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\}$.

Inciso B

Tenemos $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Queremos obtener la distribución de $Y = X^2$. En este caso el soporte de Y es $(0, \infty)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = 1 - 2F_X(-\sqrt{y})$$

Calculamos la densidad

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - 2F_X(-\sqrt{y})\right) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}}$$

donde utilizamos que $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ y por lo tanto $Y \sim G\left(\alpha = \frac{1}{2}, \theta = \frac{1}{2}\right)$. Una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con q grados de libertad se distribuye como una gamma con $\alpha = \frac{q}{2}$ y $\theta = \frac{1}{2}$. Luego, $Y \sim \chi^2_1$.

11. Ejercicio 11

Tenemos $X = -2\ln U$ con $U \sim U[0,1]$. El soporte de X será $(0, \infty)$. Calculamos la distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(-2\ln U \leq x) = 1 - P\left(U \leq e^{-\frac{x}{2}}\right) = 1 - e^{\frac{x}{2}}$$

de esta forma vemos que $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ o bien $X \sim G\left(\alpha = \frac{2}{2}, \theta = \frac{1}{2}\right)$, por lo que $X \sim \chi^2_2$.

Soluciones Práctica 4 Bis

1. Ejercicio 1

a

Para que $f_X(x) = c \cdot (1 - x^2) \cdot 1_{(0;1)}(x)$ resulte una densidad se tiene que verificar que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c \cdot (1 - x^2) \cdot 1_{(0;1)}(x)\, dx = \int\limits_{0}^{1} c \cdot (1 - x^2)\, dx = c \int\limits_{0}^{1} 1 - x^2\, dx = c \cdot \left(x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 \right)$$
$$= c \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3\right) - \left(0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) \right] = c \cdot \frac{2}{3} = 1,$$

vemos entonces que $c = 3/2$.

b

Calculemos la distribución acumulada de X para $x \in (0;1)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{3}{2} \cdot (1 - t^2)\, dt = \frac{3}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^x \right)$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \left[\left(x - \frac{1}{3} \cdot x^3\right) - \left(0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) \right] = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot x^3 + x \right) = -\frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x.$$

Queda que la distribución acumulada será:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

c

Si llamamos N a el número de botellas (entre las 10) que tienen un porcentaje de alcohol menor al 50 %, se tiene entonces que $N \sim Bi(10; p)$ con

$$p = P(X \leq 0{,}5) = F_X(0{,}5) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}6875,$$

luego se concluye $N \sim Bi(10; 0{,}6875)$

2. Ejercicio 2

$$X = \text{“}\textit{Precio promedio semanal (en dólares)}\text{”} \sim N(30; 8{,}2^2)$$

a

$$P(40 \leq X) = P\left(\frac{40-30}{8{,}2} \leq \frac{X-30}{8{,}2}\right) = P(1{,}219512 \leq Z)$$
$$= 1 - F_Z(1{,}219512) = 1 - 0{,}888675 = 0{,}111325$$

b

$$P(X \leq 20) = P\left(\frac{X-30}{8{,}2} \leq \frac{20-30}{8{,}2}\right) = P(Z \leq -1{,}219512)$$
$$= F_Z(-1{,}219512) = 0{,}111325$$

c

$$\begin{aligned}
& P(x \leq X) = 0{,}1 \\
\iff & P\left(\frac{x-30}{8{,}2} \leq Z\right) = 0{,}1 \\
\iff & 1 - P\left(Z \leq \frac{x-30}{8{,}2}\right) = 0{,}1 \\
\iff & F_Z\left(\frac{x-30}{8{,}2}\right) = 0{,}9 \\
\iff & \frac{x-30}{8{,}2} = 1{,}281552 \\
\iff & x = 1{,}281552 \cdot 8{,}2 + 30 = 40{,}50872
\end{aligned}$$

d

El supuesto de normalidad es relativamente complejo de asumir. Pero si nos focalizamos en el aspecto específico de la simetría, en este caso vemos que no hay mayores problemas pues, en base al inciso anterior, el máximo precio entre el 10 % de las acciones más baratas sería $30 - (40{,}50872 - 30) = 30 - 10{,}50872$ y da como resultado un numero positivo.

e

En este caso suponer normalidad en los precios de las acciones sería inapropiado pues $10 - 10{,}50872 < 0$.

3. Ejercicio 3

Tenemos que $ln(X) \sim (9{,}8; 0{,}4^2)$ con

$$X = \text{“}\mathit{Ingreso\ en\ Argentina\ durante\ el}\ 2017\text{”}$$

a

Los deciles serán 9 ingresos que llamaremos $d_1, \ldots, d_9$ los cuales funcionan como valores de corte para dividir a los ingresos del 2017, ordenados de manera ascendente, en 10 grupos de aproximadamente igual tamaño. Por

ejemplo, d_1 debe ser un ingreso tal que aproximadamente el 10 % de los ingresos más bajos se encuentren por debajo de este valor, es decir $P(X \leq d_1) = 0{,}1$.
Aplicando logaritmo y teniendo en cuenta que es una función monótona creciente:

$$
\begin{aligned}
& P(X \leq d_1) = 0{,}1 \\
\iff & P(ln(X) \leq ln(d_1)) = 0{,}1 \\
\iff & P\left(Z \leq \frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = 0{,}1 \\
\iff & F_Z\left(\frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = 0{,}1 \\
\iff & \frac{ln(d_1) - 9{,}8}{0{,}4} = -1{,}281552 \\
\iff & ln(d_1) = -1{,}281552 \cdot 0{,}4 + 9{,}8 \\
\iff & d_1 = e^{9{,}287379} = 10800{,}84
\end{aligned}
$$

Repitiendo estos pasos para calcular $P(X \leq d_i) = 0{,}1 \cdot i$ con $2 \leq i \leq 9$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= 12878{,}98 \\
d_3 &= 14621{,}38 \\
d_4 &= 16295{,}78 \\
d_5 &= 18033{,}74 \\
d_6 &= 19957{,}07 \\
d_7 &= 22242{,}5 \\
d_8 &= 25251{,}69 \\
d_9 &= 30110{,}24
\end{aligned}
$$

b

Decil 4 en adelante.

c

Decil 1 a 4.

d

Por debajo del decil 1.

e

$$
\begin{aligned}
P(15000 \leq X) &= P(ln(15000) \leq ln(X)) \\
&= P\left(\frac{9{,}615805 - 9{,}8}{0{,}4} \leq \frac{ln(X) - 9{,}8}{0{,}4}\right) = P(-0{,}4604875 \leq Z) \\
&= 1 - F_Z(-0{,}4604875) = 1 - 0{,}3225832 = 0{,}6774168
\end{aligned}
$$

f

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 6000) &= P(ln(X) \leq ln(6000)) \\
&= P\left(\frac{ln(X) - 9{,}8}{0{,}4} \leq \frac{8{,}699515 - 9{,}8}{0{,}4}\right) = P(Z \leq -2{,}751213) \\
&= F_Z(-2{,}751213) = 0{,}002968751
\end{aligned}
$$

4. Ejercicio 4

Consideramos las variables:

$$
X = \begin{cases} 1 & \text{Si la proyección 1 es precisa.} \\ 2 & \text{Si la proyección 2 es precisa.} \end{cases}
$$
$$
Y = \text{“}Ventas\ durante\ el\ próximo\ trimestre\ (en\ millones\ USD)\text{”}
$$

Entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
X &\sim Bernoulli(0{,}5) \\
Y \mid X = 1 &\sim N(325; 60^2) \\
Y \mid X = 2 &\sim N(300; 50^2)
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
P(350 \leq Y \mid X = 1) &= P\left(\frac{350 - 325}{60} \leq Z\right) \\
&= 1 - P(Z \leq 0{,}4166667) \\
&= 1 - 0{,}6615389 = 0{,}3384611
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
P(350 \leq Y \mid X = 2) &= P\left(\frac{350 - 300}{50} \leq Z\right) \\
&= 1 - P(Z \leq 1) \\
&= 1 - 0{,}8413447 = 0{,}1586553
\end{aligned}
$$

c

Usando Bayes y Ley de probabilidad total

$$
\begin{aligned}
P(X = 1 \mid 350 \leq Y) &= \frac{P(350 \leq Y \mid X = 1) \cdot P(X = 1)}{P(350 \leq Y \mid X = 1) \cdot P(X = 1) + P(350 \leq Y \mid X = 2) \cdot P(X = 2)} \\
&= \frac{0{,}3384611 \cdot 0{,}5}{0{,}3384611 \cdot 0{,}5 + 0{,}1586553 \cdot 0{,}5} \\
&= 0{,}6808488
\end{aligned}
$$

d

Usando Bayes y Ley de probabilidad total

$$\begin{aligned} P(X=2 \mid 350 \leq Y) &= \frac{P(350 \leq Y \mid X=2)\cdot P(X=2)}{P(350 \leq Y \mid X=1)\cdot P(X=1) + P(350 \leq Y \mid X=2)\cdot P(X=2)} \\ &= \frac{0{,}1586553 \cdot 0{,}5}{0{,}3384611 \cdot 0{,}5 + 0{,}1586553 \cdot 0{,}5} \\ &= 0{,}3191512 \end{aligned}$$

5. Ejercicio 5

Definimos

$$X = \text{“}Oferta\ de\ mi\ competidor\text{”} \sim U(10000; 15000)$$

a

Para que mi oferta de \$12000 sea aceptada, mi competidor debe ofertar menos que esa cantidad:

$$P(X \leq 12000) = \int_{10000}^{12000} \frac{1}{15000-10000} dt = \int_{10000}^{12000} \frac{1}{5000} = 0{,}4$$

b

Para que mi oferta de \$14000 sea aceptada, mi competidor debe ofertar menos que esa cantidad:

$$P(X \leq 14000) = \int_{10000}^{14000} \frac{1}{5000} = 0{,}8$$

c

Teniendo en cuenta que mi competidor ofrece como máximo \$15000, cualquier suma superior a esa cantidad me aseguraría apoderarme de la parcela. Entonces hacer una oferta de \$15000 me aseguraría con probabilidad 1 no perderla.

d

Notemos que ofertar una cantidad mayor a \$15000 sería resignar beneficio, pues mi competidor no ofertará más de esa cantidad, por lo que no hay necesidad de que yo lo haga. Luego, en vistas de optimizar el beneficio, la cantidad c ofertada deberá estar entre \$10000 y \$15000.
Si llamamos c a la cantidad ofertada, la ganancia será:

$$G = \begin{cases} 16000 - c & \text{Si } X \leq c \\ 0 & \text{Si } c < X \end{cases}$$

entonces

$$E(G) = \sum_{k \in R_G} k \cdot P(G=k) = 0 \cdot P(c \leq X) + (16000 - c)\cdot P(c \geq X) = (16000-c)\cdot \frac{c - 10000}{5000}.$$

Se puede ver que la esperanza de la ganancia se maximiza cuando $c = 13000$. Entonces, si bien ofrecer 15000 me aseguraría obtener la parcela y posteriormente obtener una diferencia de 1000 al venderla por 16000, dependiendo del riesgo que uno esté dispuesto a tomar, se podría considerar ofrecer una cantidad de dinero entre 13000 y 15000. En ese espectro de posibilidades, cuanto menor sea la oferta, mayor será el riesgo de no obtener la parcela, pero a su vez sería mayor la ganancia obtenida. Lo relevante es notar que si a uno se le presentará esta situación en reiteradas ocasiones y uno contara con un capital abundante, entonces lo ideal sería ofrecer 13000 sistematicamente.

6. Ejercicio 6

Calculemos primero la función de distribución acumulada de $Y = X_{\text{máx}}$

$$P\left(X_{\text{máx}} \leq x\right) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x)$$
$$\underbrace{=}_{X_i \text{ indep}} P(X_1 \leq x) \ldots P(X_n \leq x) \underbrace{=}_{X_i \text{ id}} P(X \leq x)^n.$$

Ahora

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$$

Luego

$$P\left(X_{\text{máx}} \leq x\right) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & x \geq \theta. \end{cases}$$

$$f_{X_{\text{máx}}}(x) = nx^{n-1}\frac{1}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(x).$$

Entonces

$$E(X_{\text{máx}}) = \int_0^\theta nx^n \frac{1}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta,$$
$$E(X_{\text{máx}}^2) = \int_0^\theta nx^{n+1} \frac{1}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

y

$$Var(X_{\text{máx}}) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

Calculemos $P(X_{\text{máx}} > a\theta)$ con $a < 1$.

$$P(X_{\text{máx}} > a\theta) = \int_{a\theta}^\theta \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{x^n}{\theta^n}\Big|_{a\theta}^\theta = 1 - \frac{(a\theta)^n}{\theta^n} = 1 - a^n.$$

7. Ejercicio 7

$$\begin{aligned}
F_{\hat{\theta}_n}(u) &= P\left(\hat{\theta_n} \leq u\right) \\
&= 1 - P\left(\hat{\theta_n} \geq u\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n P\left(X_i \geq u\right) \\
&= 1 - P\left(X_1 \geq u\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - P\left(X_1 \leq u\right)\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \frac{u-\theta}{1-\theta}\right)^n \\
&= 1 - \left(\frac{1-u}{1-\theta}\right)^n
\end{aligned}$$

Para calcular la esperanza y la varianza, calculamos primero la densidad.

$$f_{\hat{\theta}_n}(u) = n\frac{(1-u)^{n-1}}{(1-\theta)^n}$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\theta}_n\right) &= \int_\theta^1 un\frac{(1-u)^{n-1}}{(1-\theta)^n}du \\
&= \left[\frac{-u(1-u)^n}{(1-\theta)^n}\right]_\theta^1 + \int_\theta^1 \frac{(1-u)^n}{(1-\theta)^n}du \\
&= 0 + \frac{\theta(1-\theta)^n}{(1-\theta)^n} - \left[\frac{(1-u)^{n+1}}{(1-\theta)^n(n+1)}\right]_\theta^1 \\
&= \theta + \frac{(1-\theta)}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\theta_n^2}\right) &= \int_\theta^1 u^2 n\frac{(1-u)^{n-1}}{(1-\theta)^n}du \\
&= \left[\frac{-u^2(1-u)^n}{(1-\theta)^n}\right]_\theta^1 + 2\int_\theta^1 \frac{u(1-u)^n}{(1-\theta)^n}du \\
&= \theta^2 + 2\left[\left[\frac{-u(1-u)^{n+1}}{(1-\theta)^n(n+1)}\right]_\theta^1 + \int_\theta^1 \frac{(1-u)^{n+1}}{(1-\theta)^n(n+1)}du\right] \\
&= \theta^2 + \frac{2\theta(1-\theta)}{n+1} + \frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\theta}_n\right) &= \theta^2 + \frac{2\theta(1-\theta)}{n+1} + \frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\theta + \frac{(1-\theta)}{n+1}\right)^2 \\
&= \theta^2 + \frac{2\theta(1-\theta)}{n+1} + \frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\theta^2 + \frac{2\theta(1-\theta)}{(n+1)} + \frac{(1-\theta)^2}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{(1-\theta)^2}{(n+1)}\left[\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{(1-\theta)^2 n}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}
$$

8. Ejercicio 8

Tenemos $X_i \overset{indep}{\sim} Exp(\lambda_i)$ con $i = 1,\dots,n$. Buscamos la distribución de $X_{\text{mín}}$. En este caso el soporte de $X_{\text{mín}}$ será $(0,\infty)$. Calculamos la distribución

$$
\begin{aligned}
1 - F_{X_{\text{mín}}}(x) =& P\left(\text{mín}\left\{X_1,\dots,X_n\right\} \geq x\right) = P\left(X_1 \geq x,\dots,X_n \geq x\right) \\
&\overset{X_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^n P\left(X_i \geq x\right) = \prod_{i=1}^n \left(1 - F_i(x)\right) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i x} = e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)x} \\
&\Longrightarrow F_{X_{\text{mín}}} = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)x}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto vemos que $X_{\text{mín}} \sim Exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$. Finalmente, como $X_{\text{mín}}$ tiene distribución exponencial

$$
\mathbb{E}\left[X_{\text{mín}}\right] = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \qquad Var\left(X_{\text{mín}}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2}
$$

9. Ejercicio 9

Consideremos $X_i, Y_i \overset{iid}{\sim} Be(p)$

A

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W) &= \alpha E\left(\overline{X_n}\right) + \beta E\left(\overline{Y_n}\right)\\ &= \alpha p + \beta p\\ &= p \cdot (\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Entonces se tiene que cumplir que $\alpha + \beta = 1$.

B

Ahora resolvemos el siguiente problema de minimización sujeta a la restricción hallada en el punto a)

$$\min_{\alpha,\beta} Var(W) \text{ s.a } \alpha + \beta = 1$$

Lo que es equivalente a

$$\min_{\alpha,\beta} Var\left(\alpha\overline{X_n} + \beta\overline{Y_n}\right) \text{ s.a } \alpha + \beta = 1$$

Como las muestras son independientes, podemos escribir

$$\min_{\alpha,\beta} \alpha^2 Var\left(\overline{X_n}\right) + \beta^2 Var\left(\overline{Y_n}\right) \text{ s.a } \alpha + \beta = 1$$

Usando que $\beta = 1 - \alpha$

$$\min_{\alpha} \alpha^2 Var\left(\overline{X_n}\right) + (1-\alpha)^2 Var\left(\overline{Y_n}\right)$$

De donde podemos derivar respecto de α e igualar a cero

$$2\alpha Var\left(\overline{X_n}\right) - 2(1-\alpha) Var\left(\overline{Y_n}\right) = 0$$

Despejando α de la condición de primer orden queda que

$$\alpha = \frac{Var\left(\overline{Y_n}\right)}{Var\left(\overline{X_n}\right) + Var\left(\overline{Y_n}\right)}$$

Notando que las variables X_i e Y_i provienen de la misma población, se tiene que $Var(X_i) = Var(Y_j) = p(1-p)$ por lo tanto $Var(\bar{X}_n) = Var(\bar{Y}_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ y por lo tanto, $\alpha = \dfrac{\frac{p(1-p)}{n}}{\frac{p(1-p)}{n} + \frac{p(1-p)}{n}} = \dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto, reemplazando en la restricción para encontrar β obtenemos que $\beta = \dfrac{1}{2}$.

10. Ejercicio 10

- $P \sim Po(2)$
- $R \sim Po(120)$

- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = e^{-2}$
- $P(X > 39|X \geq 38) = \dfrac{P(X > 39)}{P(X \geq 38)} = \dfrac{e^{-2\cdot 39}}{e^{-2\cdot 38}} = e^{-2\cdot 1} = e^{-2} = P(X > 1)$ Recordar la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial!
- $P(X > 2340|X \geq 2280) = \dfrac{P(X > 2340)}{P(X \geq 2280)} = \dfrac{e^{-2\cdot 2340}}{e^{-2\cdot 2280}} = e^{-2\cdot 60} = P(X > 60)$ Recordar la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial!

Por otro lado, sea $X \sim Po(\lambda)$ y definamos $Y = \dfrac{X}{a}$ con $a > 0$. Luego

$$P(Y \leq y) = P(X \leq ya) = F_X(ya) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ 1 - e^{\lambda a\cdot y} \text{ si } y \geq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$f_Y(y) = \lambda a e^{-\lambda a\cdot y}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y)$$

Lo que implica que $Y \sim Exp(\lambda a)$.

Soluciones Práctica 5[1]

1. Ejercicio 1

(a) Tenemos que

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el aspirante es adecuado} \\ 0 & \text{si no es adecuado} \end{cases}$$

luego $X \sim Bernoulli(0{,}6)$. Además

$$Y \mid X = 0 \sim Bi(5; 0{,}5)$$
$$Y \mid X = 1 \sim Bi(5; 0{,}8)$$

Nos interesa calcular

$$p_{XY}(k,l) \;\; \forall \;\; 0 \leq k \leq 1;\; 0 \leq l \leq 5$$

Empecemos por el caso $k = 0$ y $l = 0$, usando la regla de multiplicación

$$p_{XY}(0,0) = P(Y = 0 \mid X = 0) \cdot P(X = 0) = \left[\binom{5}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^5\right] \cdot 0{,}4 = 0,0125$$

Para el caso $k = 1$ y $l = 0$, repitiendo los pasos

$$p_{XY}(1,0) = P(Y = 0 \mid X = 1) \cdot P(X = 1) = \left[\binom{5}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5\right] \cdot 0{,}6 = 0,000192$$

Esto completaría la primer columna de la siguiente tabla (todas las demás se calculan de manera análoga):

		Y					
		0	1	2	3	4	5
X	0	0.0125	0.0625	0.125	0.125	0.0625	0.0125
	1	0.000192	0.00384	0.03072	0.12288	0.24576	0.196608

(b) Para calcular la distribución marginal de Y sumamos por columnas

$$p_Y(l) = \begin{cases} 0{,}012692 & \text{si } l = 0 \\ 0{,}06634 & \text{si } l = 1 \\ 0{,}15572 & \text{si } l = 2 \\ 0{,}24788 & \text{si } l = 3 \\ 0{,}30826 & \text{si } l = 4 \\ 0{,}209108 & \text{si } l = 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(c) Calculemos el caso la función de probabilidad de masa de X cuando $Y = 0$:

$$p_{X|Y=0}(k) = \begin{cases} \dfrac{p_{XY}(0,0)}{p_Y(0)} & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{p_{XY}(1,0)}{p_Y(0)} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} = \begin{cases} 0{,}98487236 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}01512764 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

[1] Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Lara Sánchez Peña y Pedro Martínez Bruera.

Repitiendo los pasos calculamos los casos para $1 \leq Y \leq 5$

$$p_{X|Y=1}(k) = \begin{cases} 0{,}94211637 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}05788363 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_{X|Y=2}(k) = \begin{cases} 0{,}8027228 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}1972772 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_{X|Y=3}(k) = \begin{cases} 0{,}5042763 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}4957237 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_{X|Y=4}(k) = \begin{cases} 0{,}2027509 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}7972491 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$p_{X|Y=5}(k) = \begin{cases} 0{,}05977772 & \text{si } k = 0 \\ 0{,}94022228 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(d) A partir del inciso anterior se puede afirmar que aproximadamente el 79.72 % de los aspirantes que responden correctamente 4 preguntas, resultan adecuados. Mientras que aproximadamente solo el 19.73 % de los que responden correctamente 2 preguntas lo serán.
En base a esto, sería sensato ofrecerle el cargo al aspirante si fueran 4 sus preguntas contestadas correctamente. Pero si en cambio fueran solo 2, estaríamos enfrentando un riesgo alto al ofrecercelo.

2. Ejercicio 2

Contamos con los siguientes datos

$$P(X = 1) = 0{,}1$$
$$P(X = 1 \mid Y = 1) = 0{,}1$$
$$P(Y = 1) = 0{,}3$$

a partir de los cuales podemos deducir

- $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 0{,}9$
- $P(X = 1; Y = 1) = P(X = 1 \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) = 0,03$
- $P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = 0,7$

Volcando estos datos en una tabla

		Y		
		0	1	p_X
X	0	a	b	0,9
	1	c	0.03	0,1
	p_Y	0,7	0,3	

donde a, b y c deberán cumplir con la condición de sumar por filas y columnas los valores de las probabilidades marginales. Quedando entonces que

		Y		
		0	1	p_X
X	0	0, 63	0, 27	0,9
	1	0, 07	0.03	0,1
	p_Y	0,7	0,3	

Vemos entonces que las variables son independientes porque se cumple

$$p_{XY}(k,l) = p_X(k) \cdot p_Y(l) \ \ \forall \ \ k \in \{0;1\}, \ l \in \{0;1\}$$

Calculemos ahora la probabilidad de que el libro sea exhibido

$$P(Z = 1) = 1 - P(X = 0; Y = 0) = 1 - 0,63 = 0,37$$

Para que X e Y sean independientes dado $Z = 1$ debería ocurrir que

$$P(X = k; Y = l \mid Z = 1) = P(X = k \mid Z = 1) \cdot P(Y = l \mid Z = 1) \ \ \forall \ \ k \in \{0;1\}, \ l \in \{0;1\}$$

sin embargo tomando $k = 0$ y $l = 0$ se tiene

$$0 \neq P(X = 0 \mid Z = 1) \cdot P(Y = 0 \mid Z = 1)$$

por lo que no hay independencia.

3. Ejercicio 3

Consideramos la variable $X \sim Bernoulli(0,1)$ definida como

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el alumno es propenso a sufrir emergencias médicas} \\ 0 & \text{si no es propenso} \end{cases}$$

Sabemos que la cantidad de emergencias médicas depende del tipo de alumno de la siguiente manera

$$Y \mid X = 0 \sim Poi(0{,}2)$$
$$Y \mid X = 1 \sim Poi(2)$$

y que el gasto en pesos durante un período lectivo por alumno será $G = 2000 \cdot Y$.
Nos interesa calcular $E(G) = 2000 \cdot E(Y)$ y para calcular $E(Y)$ usaremos que

$$E(Y) = E(E(Y \mid X)) = E(g(X))$$

con $g(x) = E(Y \mid X = x)$ para $x \in R_X$.
Luego como $Y \mid X = x$ es en ambos casos una Poisson

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

y la función de probabilidad de $g(X)$ es

$$p_{g(X)}(k) = P(g(X) = k) = \begin{cases} P(X = 0) & \text{si } k = 0{,}2 \\ P(X = 1) & \text{si } k = 2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0{,}9 & \text{si } k = 0{,}2 \\ 0{,}1 & \text{si } k = 2 \end{cases}$$

se tiene entonces

$$E(Y) = E(g(X)) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}38$$

y por lo tanto

$$E(G) = 2000 \cdot 0{,}38 = 760$$

Para el cálculo del desvío nos ocupamos primero de la varianza

$$Var(G) = Var(2000 \cdot Y) = 2000^2 \cdot Var(Y)$$

para lo cual usaremos la fórmula

$$Var(Y) = Var(E(Y \mid X)) + E(Var(Y \mid X))$$

El primer sumando es

$$Var(g(X)) = E(g^2(X)) - E^2(g(X)) = (0{,}9 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}1 \cdot 2^2) - 0{,}38^2 = 0{,}2916$$

y para el segundo sumando debemos tener en cuenta que $Var(Y \mid X) = h(X)$ con $h(x) = Var(Y \mid X = x)$ para $x \in R_X$. Pero como $Y \mid X = x$ es en ambos casos una Poisson resulta que entonces $h(x) = g(x)$ y por lo tanto

$$E(Var(Y \mid X)) = E(g(X)) = 0{,}38$$

Obtenemos entonces

$$Var(Y) = 0{,}2916 + 0{,}38 = 0{,}6716$$

y el desvío del gasto queda

$$\sigma_G = \sqrt{2000^2 \cdot Var(Y)} = 2000 \cdot \sqrt{0{,}6716} = 1639{,}024$$

Para que un estudiante no ocasione gastos debe ocurrir que $Y = 0$, usando probabilidad total

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(Y=0 \mid X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=0 \mid X=1) \cdot P(X=1) \\ &= \frac{e^{-0{,}2} \cdot 0{,}2^0}{0!} \cdot 0{,}9 + \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}7503912 \end{aligned}$$

Para que un estudiante genere gastos por 4000 pesos debe ocurrir que $Y = 2$, usando probabilidad total

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= P(Y=2 \mid X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=2 \mid X=1) \cdot P(X=1) \\ &= \frac{e^{-0{,}2} \cdot 0{,}2^2}{2!} \cdot 0{,}9 + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}04180421 \end{aligned}$$

4. Ejercicio 4

Los datos que tenemos del enunciado son:

$$\begin{aligned} N &= \text{“}\mathit{Cantidad\ de\ clientes\ que\ entran\ al\ negocio}\text{”} \sim Poiss(30) \\ X_i &= \text{“}\mathit{Cantidad\ de\ prendas\ que\ compra\ el\ i-ésimo\ cliente}\text{”} \sim Poiss(2) \end{aligned}$$

con todas las variables independientes entre sí.

(a) Definimos

$$Y = \text{“}\mathit{Número\ de\ prendas\ vendidas}\text{”} = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Para calcular su esperanza vamos a condicionar Y de la siguiente forma:

$$Y \mid (N = n) = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

y de esta manera:

$$E(Y \mid N = n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2 \cdot n$$

Ahora bien, por la ley de esperanza total es sabido que $E(Y) = E\big(E(Y \mid N)\big)$, donde:

$$E(Y \mid N) = g(N) \ \ con \ \ g(n) = E(Y \mid N = n) = 2 \cdot n.$$

Entonces ya habiendo calculado $E(Y \mid N) = g(N) = 2 \cdot N$ se concluye que:

$$E(Y) = E\big(E(Y \mid N)\big) = E(2 \cdot N) = 2 \cdot E(N) = 2 \cdot 30 = 60.$$

Para el cálculo del desvío, calculamos la varianza utilizando la fórmula:

$$Var(Y) = E\big(Var(Y \mid N)\big) + Var\big(E(Y \mid N)\big)$$

El segundo sumando de la fórmula es:

$$Var\big(E(Y \mid N)\big) = Var\big(2 \cdot N\big) = 2^2 \cdot Var(N) = 4 \cdot 30 = 120.$$

Para el primer sumando necesitamos calcular $Var(Y \mid N)$ que se define como:

$$Var(Y \mid N) = h(N) \;\; con \;\; h(n) = Var(Y \mid N = n),$$

luego por la independencia entre la cantidad de prendas compradas por cliente, se tiene que:

$$Var(Y \mid N = n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2 \cdot n,$$

entonces $Var(Y \mid N) = h(N) = 2 \cdot N$ y el primer sumando queda:

$$E\big(Var(Y \mid N)\big) = E(2 \cdot N) = 2 \cdot E(N) = 2 \cdot 30 = 60.$$

Finalmente concluimos que:

$$Var(Y) = E\big(Var(Y \mid N)\big) + Var\big(E(Y \mid N)\big) = 60 + 120 = 180,$$

y por lo tanto

$$\sigma_Y = \sqrt{180} = 13{,}41641$$

(b) Sea $Z =$ "*Ganancia neta por compra*", definimos

$$G = \text{“}Ganancia\ neta\ diaria\text{”} = \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

luego

$$(G \mid N = n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

por linealidad e independencia:

$$g(n) = E(G \mid N = n) = n \cdot E(Z_i) = 100 \cdot n$$
$$h(n) = Var(G \mid N = n) = n \cdot Var(Z_i) = 20^2 \cdot n = 400 \cdot n$$

Luego la esperanza será

$$E(G) = E(g(N)) = E(100 \cdot N) = 100 \cdot E(N) = 100 \cdot 30 = 3000$$

Y la varianza

$$\begin{aligned} Var(G) &= E\left(Var(G \mid N)\right) + Var\left(E(G \mid N)\right) \\ &= E(h(N)) + Var(g(N)) \\ &= E(400 \cdot N) + Var(100 \cdot N) \\ &= 400 \cdot E(N) + 100^2 \cdot Var(N) \\ &= 400 \cdot 30 + 100^2 \cdot 30 = 312000 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\sigma_G = \sqrt{312000} = 558{,}5696$$

5. Ejercicio 5

(a) Como no sabemos nada sobre cada X_i, las asumimos $U\,(0;100)$, luego

$$E\,(V) = n \cdot E\,(X_1) = 50 \cdot n.$$

(b) Ahora sabemos que $X_i = x_i$

$$\begin{aligned} E\,(V \mid X_i = x_i) &= E\,(X_1 + \ldots + X_i + \ldots + X_n \mid X_i = x_i) \\ &= E\,(X_1 + \ldots + x_i + \ldots + X_n \mid X_i = x_i) \\ &= x_i + \sum_{j \neq i} E\left(X_j \mid X_i = x_i\right) \end{aligned}$$

como las X_i son independientes se tiene que $E\left(X_j \mid X_i = x_i\right) = E(X_j)$ si $j \neq i$, entonces

$$E\,(V \mid X_i = x_i) = x_i + \sum_{j \neq i} E(X_j) = x_i + (n-1) \cdot 50$$

(c) Nos interesa calcular

$$E\left(V \mid X_1 = x_1, \text{máx}\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(X_j \mid X_1 = x_1, \text{máx}\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right)$$
$$= E\left(X_1 \mid X_1 = x_1, \text{máx}\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) + \sum_{j=2}^{n} E\left(X_j \mid X_1 = x_1, \text{máx}\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right)$$

por independencia entre las X_i

$$E\left(V \mid X_1 = x_1, \text{máx}\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) = E\left(X_1 \mid X_1 = x_1\right) + \sum_{j=2}^{n} E\left(X_j \mid X_j \leq x_1\right)$$
$$= E\left(x_1 \mid X_1 = x_1\right) + (n-1) \cdot E\left(X_2 \mid X_2 \leq x_1\right)$$

por el ejercicio 16 del TP 8 sabemos que $X_2 \mid X_2 \leq x_1 \sim U(0; x_i)$, entonces

$$E\left(V \mid X_1 = x_1, \text{máx}\left(X_2, ..., X_n\right) \leq x_1\right) = x_1 + (n-1) \cdot \frac{x_1}{2}$$

Es razonable que la esperanza sea menor que la calculada en (b) porque en en este caso estamos condicionando a información que acota el valor de cada una de las X_j por x_1 mientras que en (b), para $j \neq 1$, solamente sabemos que $X_j < 100$.

6. Ejercicio 6

(a) Usando linealidad de la esperanza

$$E(Z) = a_1 \cdot E(X_1) + a_2 \cdot E(X_2) + a_3 \cdot E(X_3) = 0{,}08 \cdot a_1 + 0{,}12 \cdot a_2 + 0{,}1 \cdot a_3$$

(b) Se puede ver que la varianza de una combinación lineal de 3 variables aleatorias es

$$\begin{aligned} Var(Z) = &\, {a_1}^2 \cdot Var(X_1) + {a_2}^2 \cdot Var(X_2) + {a_3}^2 \cdot Var(X_3) \\ &+ 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot Cov(X_1; X_2) + 2 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot Cov(X_1; X_3) + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot Cov(X_2; X_3) \end{aligned}$$

Reemplazando, teniendo en cuenta que $\rho_{X_i X_j} = \dfrac{Cov(X_i; X_j)}{\sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j}}$ queda que

$$\begin{aligned} Var(Z) = &\, 0{,}0004 \cdot {a_1}^2 + 0{,}0025 \cdot {a_2}^2 + 0{,}009 \cdot {a_3}^2 \\ &- 0{,}0008 \cdot a_1 \cdot a_2 - 0{,}00024 \cdot a_1 \cdot a_3 + 0{,}0018 \cdot a_2 \cdot a_3 \end{aligned}$$

(c) Sí es posible, por ejemplo diversificando

$$\begin{aligned} a_1 &= 9000 \\ a_2 &= 1000 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d) Habría que resolver el problema de extremos restringidos que consiste en maximizar la función $g(a_1, a_2, a_3) = 0{,}08 \cdot a_1 + 0{,}12 \cdot a_2 + 0{,}1 \cdot a_3$ sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 & \leq 10000 \\ h(a_1, a_2, a_3) & \leq 200^2 \\ 0 & \leq a_1 \\ 0 & \leq a_2 \\ 0 & \leq a_3 \end{cases}$$

Se puede demostrar que la región en cuestión es acotada y sumado a que la función g es continua, entonces necesariamente alcanzará un valor máximo dentro de la región.

7. Ejercicio 7

Dado que

$$X = 0 \Rightarrow Y = 1$$
$$X = -1 \Rightarrow Y = 0$$
$$X = 1 \Rightarrow Y = 0$$

entonces

$$P(Y = 0 \mid X = 0) = P(Y = 1 \mid X = -1) = P(Y = 1 \mid X = 1) = 0$$

y consecuentemente

$$P(Y = 0 \mid X = 0) \Rightarrow p_{XY}(0;0) = 0$$
$$P(Y = 1 \mid X = -1) \Rightarrow p_{XY}(-1;1) = 0$$
$$P(Y = 1 \mid X = 1) \Rightarrow p_{XY}(1;1) = 0$$

Esta información, junto con que X es una variable uniforme, nos dice que

		Y		
		0	1	P_X
	-1	-	0	$1/3$
X	0	0	-	$1/3$
	1	-	0	$1/3$
	P_Y	-	-	

y luego el resto de las posiciones son fácilmente calculables

		Y		
		0	1	P_X
	-1	$1/3$	0	$1/3$
X	0	0	$1/3$	$1/3$
	1	$1/3$	0	$1/3$
	P_Y	$2/3$	$1/3$	

(a)

$$E(X) = (-1)\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0$$
$$E(Y) = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$E(X\cdot Y) = \sum_{k\in R_X}\sum_{l\in R_Y} k\cdot l\cdot p_{XY}(k;l) = 0$$

(notar que $E(X\cdot Y) = 0$ pues cada sumando de la doble sumatoria es nulo, ya que en la tabla se evidencia que para cualquier posición siempre ocurre que alguna de las variables o la conjunta toman valor cero). Finalmente

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{0 - 0\cdot 2/3}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = 0$$

(b) No hay independencia, pues:

$$p_{XY}(0,0) \neq p_X(0)\cdot p_Y(0)$$

ya que $0 \neq 1/3\cdot 2/3$.
Es importante reconocer que se trata de variables aleatorias no correlacionadas pero que sin embargo resultan ser dependientes. Lo cual muestra que, si bien independencia implica correlación nula (propiedad vista en clase), la vuelta es falsa y por lo tanto no se puede hablar de una equivalencia entre dichas características.

8. Ejercicio 8

$$X_1 = \{\text{Cantidad de encuestados que eligen la marca 1}\}$$
$$X_2 = \{\text{Cantidad de encuestados que eligen la marca 2}\}$$
$$X_3 = \{\text{Cantidad de encuestados que eligen la marca 3}\}$$
$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = X_2, X_3 = X_3\right) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = n \; p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

En estas distribuciones hay solamente dos grados de libertad, entonces

$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\right) = P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right) = \frac{n!}{x_1!x_2!(n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \left(1 - p_1 - p_2\right)^{n-x_1-x_2}$$

Para obtener la distribución marginal de X_1 debo sumar en todo el soporte de X_2 dado x_1. Notar que dado un valor x_1, X_2 se mueve entre 0 y $n - x_1$ ya que $x_1 + x_2 + x_3 = n$.

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 = x_1\right) &= \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!}{x_1!x_2!(n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \left(1 - p_1 - p_2\right)^{n-x_1-x_2} \\
&= \frac{n!}{x_1!} p_1^{x_1} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n - x_1)!}{(n - x_1)!} \frac{1}{x_2!(n - x_1 - x_2)!} p_2^{x_2} \left(1 - p_1 - p_2\right)^{n-x_1-x_2} \\
&= \overbrace{\frac{n!}{x_1!(n - x_1)!}}^{\binom{n}{x_1}} p_1^{x_1} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{n-x_1} \overbrace{\frac{(n - x_1)!}{x_2!(n - x_1 - x_2)!}}^{\binom{n-x_1}{x_2}} p_2^{x_2} \left(1 - p_1 - p_2\right)^{n-x_1-x_2}}_{\text{Binomio de Newton}\rightarrow\text{ver abajo}} \\
&= \binom{n}{x_1} p_1^{x_1} \left(1 - p_1\right)^{n-x_1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $X_1 \sim B\left(n, p_1\right)$.

¿Qué es el binomio de Newton? Consideremos el polinomio $(x + y)^N$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$. Para el caso $N = 1$, dicho polinomio no es más que $x + y$. Para el caso $N = 2$, todos sabemos que

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Para el caso $N = 3$, algunos conocerán la fórmula

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

En general, podemos escribir

$$(x + y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^k$$

Notemos que en el penúltimo paso más arriba, si denominamos $x \equiv p_2$, $y \equiv 1 - p_1 - p_2$, $N \equiv n - x_1$ y $k \equiv x_2$ no tenemos más que la expresión para el binomio de Newton $(x + y)^N$ que reemplazar y escribir como

$$\left(p_2 + 1 - p_1 - p_2\right)^{n-x_1} = \left(1 - p_1\right)^{n-x_1}$$

9. Ejercicio 9

$$Z = \{\text{Proporción diaria de pantallas de 16 pulgadas defectuosas}\}$$
$$Y = \{\text{Proporción diaria de pantallas de 20 pulgadas defectuosas}\}$$
$$f(y, z) = \left[\theta z + (2 - \theta) y\right] I_{(0,1)}(z) I_{(0,1)}(y)$$

A

$$f(z) = \int_0^1 \theta z + (2-\theta) y dy = \theta z y + \frac{2-\theta}{2} y|_0^1 = \theta z + \frac{2-\theta}{2} I_{(0,1)}$$

$$\mathbf{E}[Z] = \int_0^1 z\left(\theta z + \frac{2-\theta}{2}\right) dz = \int_0^1 \theta z^2 + \frac{2-\theta}{2} z dz = \frac{\theta}{3} z^3 + \frac{2-\theta}{4} z^2|_0^1 = \frac{\theta}{3} + \frac{2-\theta}{4}$$

B

$$f(y) = \int_0^1 \theta z + (2-\theta) y dz = \frac{\theta}{2} z^2 + (2-\theta) y z|_0^1 = \frac{\theta}{2} + (2-\theta) y I_{(0,1)}(y)$$

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^1 y\left(\frac{\theta}{2} + (2-\theta) y\right) dy = \int_0^1 \frac{\theta}{2} y + (2-\theta) y^2 dy = \frac{\theta}{4} y^2 + \frac{2-\theta}{3} y^3|_0^1 = \frac{\theta}{4} + \frac{2-\theta}{3}$$

10. Ejercicio 10

$$f(x,y) = \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,1)}(y)$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(XY)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

$$Cov(XY) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

$$Var(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2$$

$$Var(Y) = \mathbf{E}\left[Y^2\right] - \mathbf{E}[Y]^2$$

$$\mathbf{E}[XY] = \int_0^\infty \int_0^1 xy \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x} \int_0^1 \left(xy + y^2\right) dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3|_0^1\right)$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx + \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{xe^{-x}}^{G(\alpha=2,\lambda=1)} dx}_{(Cond.\,Cierre)=1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x} dx + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\Gamma(3)}{2}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(3) x^2 e^{-x}}}^{G(\alpha=3,\lambda=1)} dx}_{(Cond.\,Cierre)=1} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\Gamma(3)}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty \int_0^1 x \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\int_0^1 (x+y) dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\left(xy + \frac{1}{2}y^2|_0^1\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{xe^{-x}}^{G(\alpha=2,\lambda=1)} dx}_{(Cond.\,Cierre)=1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x} dx + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\Gamma(3)\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x}}^{G(\alpha=3,\lambda=1)} dx}_{(Cond.\,Cierre)=1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\Gamma(3) + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}$$

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_0^\infty \int_0^1 x^2 \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty x^2 e^{-x}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4)} x^3 e^{-x} dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x} dx\right) = \frac{2}{3}\left(\Gamma(4)\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(4)} x^3 e^{-x}}^{G(\alpha=4,\lambda=1)} dx}_{(Cond.\,Cierre)=1} + \frac{\Gamma(3)}{2}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x}}^{G(\alpha=3,\lambda=1)} dx}_{(Cond.\,Cierre)=1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\Gamma(4) + \frac{\Gamma(3)}{2}\right) = \frac{14}{3}$$

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^\infty \int_0^1 y\frac{2}{3}(x+y)e^{-x} dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\int_0^1 \left(xy+y^2\right) dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3|_0^1\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{xe^{-x}}^{G(\alpha=1,\lambda=1)} dx}_{(Cond.\,Cierre)=1} + \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-x}dx\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$$

$$\mathbf{E}\left[Y^2\right] = \int_0^\infty \int_0^1 y^2\frac{2}{3}(x+y)e^{-x} dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\int_0^1 \left(xy^2+y^3\right) dy\, dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{4}y^4|_0^1\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{xe^{-x}}^{G(\alpha=1,\lambda=1)} dx}_{(Cond.\,Cierre)=1} + \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-x}dx\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{18}$$

$$Cov(XY) = \frac{8}{9} - \frac{5}{3}\frac{5}{9} = -\frac{1}{27}$$

$$Var(X) = \frac{14}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{17}{9}$$

$$Var(Y) = \frac{7}{18} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{13}{162}$$

$$\rho_{XY} = \frac{-1/27}{\sqrt{17/9}\sqrt{13/162}} = -0{,}0951$$

11. Ejercicio 11

$$X = \{\text{Personas que entran en una farmacia}\}$$

$$M = \{\text{Mujeres que entran en una farmacia}\}$$

$$X \sim P(\lambda)\ \ M|X \sim B(n = X, p)$$

Necesito el supuesto de independencia entre las distintas personas.

$$\text{Por Ley de Expectativas Iteradas } \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[M|X]]$$

$$\mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[M|X]] = \mathbf{E}[Xp] = \lambda p$$

$$\text{Por Ley de Expectativas Iteradas } Var(M) = Var(\mathbf{E}[M|X]) + \mathbf{E}[Var(M|X)]$$

$$Var(M) = Var(Xp) + \mathbf{E}[Xp(1-p)] = p^2\lambda + \lambda p(1-p) = \lambda p$$

$$M_M(t) = \mathbf{E}\left[e^{tm}\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[e^{tm}|X\right]\right] \overset{M|X\sim B(X,p)}{=} \mathbf{E}\left[\left(pe^t + 1 - p\right)^X\right] = \sum_{x=0}^\infty \left(pe^t+1-p\right)^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{x=0}^\infty \frac{\left(\lambda\left(pe^t+1-p\right)\right)^x}{x!}}_{=e^{\lambda\left(pe^t+1-p\right)}} = e^{-\lambda+\lambda pe^t+\lambda-\lambda p} = e^{\lambda p\left(e^t-1\right)} \therefore M \sim P(\lambda p)$$

12. Ejercicio 12

$$f(x|y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} \quad Y \sim G(p) \implies X|Y \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{Y}\right)$$

Notar que esto implica que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ y que $Var(X|Y) = Y^2$.

A

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|Y]] = \mathbf{E}[Y] = \frac{1}{p}$$

B

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(\mathbb{E}[X|Y]) + \mathbb{E}[Var(X|Y)] \\ &= Var(Y) + \mathbb{E}(Y^2) \text{ ya que } \mathbb{E}[X|Y] = Y \text{ y } Var(X|Y) = Y^2 \\ &= 2Var(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 \text{ ya que } \mathbb{E}[Y^2] = Var(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{3-2p}{p^2} \end{aligned}$$

13. Ejercicio 13

$$\begin{aligned} N &= \{\text{Número de clientes que entran}\} \\ X_i &= \{\text{Gasto del i-ésimo cliente}\} \\ T &= \{\text{Ingreso total del negocio}\} \\ \mathbf{E}[X_i] &= \mu \ \forall i \\ Var(X_i) &= \sigma^2 \ \forall i \\ T &= \sum_{i=1}^{N} X_i \end{aligned}$$

A

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[T|N]] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]\right] \overset{indep}{=} \mathbf{E}[N\mu] = \mu\mathbf{E}[N]$$

Nótese que $\mathbf{E}[T]$ queda expresado en función del valor esperado de N, que es desconocido.

B

$$Var(T) = Var(\mathbf{E}[T|N]) + \mathbf{E}[Var(T|N)] = Var(N\mu) + \mathbf{E}\left[Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right]$$
$$\overset{indep}{=} \mu^2 Var(N) + \mathbf{E}\left[N\sigma^2\right] = \mu^2 Var(N) + \sigma^2\mathbf{E}[N]$$

14. Ejercicio 14

$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$. El estimador de Máxima Verosimilitud es $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

A

$$\mathbf{E}[\bar{X}] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \overset{indep}{=} \frac{1}{n} n\mathbf{E}[X] = \theta$$

B

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{iid}{=} \frac{1}{n^2} n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$$

15. Ejercicio 15

A

$$f(x,y) = [2x + 2y - 4xy]\, I_{(0,1)}(x) I_{(0,1)}(y)$$
$$f_x = \int_0^1 (2x + 2y - 4xy)\, dy = 2xy + y^2 - 2xy^2|_0^1 = 1 \therefore X \sim U[0,1]$$
$$f_y = \int_0^1 (2x + 2y - 4xy)\, dx = x^2 + 2xy - 2xy^2|_0^1 = 1 \therefore Y \sim U[0,1]$$

B

$$f(x,y) = [2 - 2x - 2y + 4xy]\, I_{(0,1)}(x) I_{(0,1)}(y)$$
$$f_x = \int_0^1 (2 - 2x - 2y + 4xy)\, dy = 2y - 2xy - y^2 + 2xy^2|_0^1 = 1 \therefore X \sim U[0,1]$$
$$f_y = \int_0^1 (2 - 2x - 2y + 4xy)\, dx = 2x - x^2 - 2xy + 2x^2y|_0^1 = 1 \therefore Y \sim U[0,1]$$

16. Ejercicio 16

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) I_{(0,1)}(x) I_{(0,2)}(y)$$

A

Para que sea una función de densidad debe verificar la condición de cierre, es decir:

$$\int_0^1\int_0^2 f(x,y)dy\,dx = 1$$

$$\int_0^1\int_0^2 \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy\,dx = \frac{6}{7}\int_0^1\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy\,dx = \frac{6}{7}\int_0^1\left(x^2y+\frac{xy^2}{4}|_0^2\right)dx = \frac{6}{7}\int_0^1\left(2x^2+x\right)dx$$
$$= \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2|_0^1\right) = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = 1$$

B

$$f_x = \int_0^2 \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy\,I_{(0,1)}(x) = \frac{6}{7}\left(x^2y+\frac{xy^2}{4}|_0^2\right)I_{(0,1)}(x) = \frac{6}{7}\left(2x^2+x\right)I_{(0,1)}(x)$$

C

$$P(X>Y) = \int_0^1\int_0^x \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy\,dx = \frac{6}{7}\int_0^1\left(x^2y+\frac{xy^2}{4}|_0^x\right)dx = \frac{6}{7}\int_0^1\frac{5}{4}x^3dx = \frac{15}{56}$$

17. Ejercicio 17

$$X,Y \text{ Independientes} \Leftrightarrow f(x,y) = f(x)f(y)$$

A

$$f(x,y) = xe^{-(x+y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$$
$$f_x = \int_0^\infty xe^{-(x+y)}dy\,I_{(0,\infty)}(x) = xe^{-x}\int_0^\infty e^{-y}dy = xe^{-x}\,I_{(0,\infty)}(x) \therefore X\sim G(\alpha=2,\lambda=1)$$
$$f_y = \int_0^\infty xe^{-(x+y)}dx\,I_{(0,\infty)}(y) = e^{-y}\underbrace{\int_0^\infty xe^{-x}dx}_{\mathbf{E}[X]=1}\,I_{(0,\infty)}(y) = e^{-y}\,I_{(0,\infty)}(y) \therefore Y\sim Exp(\lambda=1)$$
$$f_xf_y = xe^{-x}e^{-y} = xe^{-(x+y)} = f(x,y) \therefore X,Y \text{ independientes}$$

B

$$f(x,y) = 2I_{(0,y)}(x)\,I_{(0,1)}(y)$$
$$f_x = \int_x^1 2dy\,I_{(0,y)}(x) = 2(1-x)\ I_{(0,1)}(x)$$

En este caso como $x<y$ siempre, el límite inferior de la integración para obtener la marignal de X debe ser x, puesto que nunca puede ser menor. Como $y\in(0,1)$ entonces $x\in(0,1)$.

$$f_y = \int_0^y 2dx\,I_{(0,1)}(y) = 2y\,I_{(0,1)}(y)$$
$$f_xf_y = 4(1-x)y \neq f(x,y) \therefore X,Y \text{ no son independientes}$$

18. Ejercicio 18

$$X \sim U[0,1] \qquad Y \sim Exp\,(\lambda = 1)$$
$$X,Y \text{ independientes} \iff f(x,y) = f(x)f(y) = e^{-y} I_{(0,1)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$$

A

$$Z = X + Y$$
$$F_Z(z) = P\,(Z \leq z) = P\,(X + Y \leq z) = P\,(Y \leq z - X)$$

$\underline{z \leq 1}$ $\implies y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq z$

$$F_Z(z) = P\,(Y \leq z - X) = \int_0^z \int_0^{z-x} e^{-y} dy\, dx = \int_0^z \left(-e^{-(z-x)} + 1\right) dx = x - e^{-(z-x)}|_0^z = z - 1 + e^{-z}$$

$\underline{z > 1}$ $\implies y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq z \implies x \in [0,1]$

$$F_Z(z) = P\,(Y \leq z - X) = \int_0^1 \int_0^{z-x} e^{-y} dy\, dx = \int_0^1 \left(-e^{-(z-x)} + 1\right) dx = x + e^{-(z-x)}|_0^1 = 1 - e^{-z}\,(e-1)$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z - 1 + e^{-z} & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - e^{-z}\,(e-1) & z > 1 \end{cases}$$

$$f_z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 + e^{-z} & 0 \leq z \leq 1 \\ -e^{-z}(e-1) & z > 1 \end{cases}$$

B

$$Z = \frac{X}{Y}$$

$$P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = 1 - P\left(Y \leq \frac{X}{z}\right) = 1 - \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{z}} e^{-y} dy\, dx = 1 - \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{x}{z}}\right) dx = x + ze^{-\frac{x}{z}}|_0^1 = z\left(1 + e^{-\frac{1}{z}}\right)$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z\left(1 - e^{-\frac{1}{z}}\right) & z \geq 0 \end{cases}$$

19. Ejercicio 19

$$f(x,y) = e^{-y} I_{(0,y)}(x)$$

A

$$Cov(XY) = \mathbf{E}\,[XY] - \mathbf{E}\,[X]\,\mathbf{E}\,[Y]$$

$$\mathbf{E}[XY] = \int_0^\infty \int_0^y xye^{-y}dx\,dy = \int_0^\infty ye^{-y} \int_0^y x\,dx\,dy = \int_0^\infty \frac{1}{2}y^3e^{-y}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4)}y^3e^{-y}dy$$

$$= \frac{\Gamma(4)}{2} \underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(4)}y^3e^{-y}}^{G(\alpha=4,\lambda=1)} dy}_{(Cond.Cierre)=1} = 3$$

$$f_x = \int_x^\infty e^{-y}dy = e^{-x}I_{(0,\infty)}(x) \therefore X \sim Exp(\lambda = 1) \implies \mathbf{E}[X] = 1$$

$$f_y = \int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}I_{(0,\infty)}(y) \therefore Y \sim G(\alpha = 2, \lambda = 1) \implies \mathbf{E}[Y] = 2$$

$$Cov(XY) = 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

B

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}I_{(0,y)}(x) \therefore X|Y \sim U[0,y]$$

$$\mathbf{E}[X|Y] = \frac{y}{2}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{x-y}I_{(x,\infty)}(x)$$

$$\mathbf{E}[Y|X] = \int_x^\infty ye^{x-y}dy = e^x \int_x^\infty ye^{-y}dy = e^x\left(-ye^{-y} - e^{-y}|_x^\infty\right) = e^x\left(xe^{-x} + e^{-x}\right) = x + 1$$

20. Ejercicio 20

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)\left(1 - e^{-\lambda y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1 - e^{-\lambda x}\right)\left(\lambda e^{-\lambda y}\right)\right) = \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}$$

21. Ejercicio 21

	$P(X=x, Y=y)$	$Y=y$: 0	1	2	3
$X = x$	0	1/8	1/8	0	0
	1	0	2/8	2/8	0
	2	0	0	1/8	1/8

22. Ejercicio 22

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) = \int_0^x f_X\left(x'\right)dx' \int_0^y f_Y\left(y'\right)dy'$$

$$= \int_0^x 1dx' \int_0^y 1dy' = xy$$

23. Ejercicio 23

Hay que usar partes un par de veces

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{y} xy\lambda^2 e^{-\lambda y} dxdy$$
$$\int_0^{+\infty} y\lambda^2 e^{-\lambda y}\frac{x^2}{2}|_0^y dy$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^3\lambda^2 e^{-\lambda y} dy$$
$$-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda y}(\lambda^3 x^3+3\lambda^2 y^2+6\lambda x+6)\Big|_0^{+\infty}=\frac{6}{\lambda^2}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^{\infty}\lambda^2 e^{-\lambda y} dy \\ &= \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

de forma tal que $X \sim Exp(\lambda)$.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^{y}\lambda^2 e^{-\lambda y} dx \\ &= \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

de forma tal que la distribución de $X \sim \Gamma(2,\lambda)$.

24. Ejercicio 24

$$P(X>Y)=\frac{12}{7}\int_0^1\int_0^x\left(x^2+xy\right)dydx=\frac{9}{14}$$

La función de densidad marginal de X,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{12}{7}\int_0^1\left(x^2+xy\right)dy \\ &= \frac{12}{7}\left(x^2+\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

La función de densidad marginal de Y

$$f_Y(y)=\frac{12}{7}\int_0^1\left(x^2+xy\right)dx=\frac{12}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{2}\right)$$

y las distribuciones condicionales.

Soluciones Práctica 6[1]

1. Ejercicio 1

(a)

$$X \sim N(50;16)$$
$$\bar{X}_{10} \sim N\left(50;\frac{16}{10}\right)$$
$$\bar{X}_{100} \sim N\left(50;\frac{16}{100}\right)$$
$$\bar{X}_{1000} \sim N\left(50;\frac{16}{1000}\right)$$

(b) En caso que no conociéramos la distribución de cada X_i, pero pudiésemos suponer que son todas independientes e idénticamente distribuidas, estaríamos bajo las hipótesis del Teorema Central del Límite y por lo tanto para los casos donde n es grande (100 y 1000) podríamos afirmar que las distribuciones son aproximadamente Normales (con los mismos parámetros obtenidos en el primer inciso)

(c)

$$P(45 \leq X \leq 55) = 0{,}7887$$
$$P(45 \leq \bar{X}_{10} \leq 55) = 0{,}9999$$
$$P(45 \leq \bar{X}_{100} \leq 55) \approx 1$$
$$P(45 \leq \bar{X}_{1000} \leq 55) \approx 1$$

(d) Si bien las probablidades calculadas para n valiendo 10, 100 y 1000 en este caso resultan muy similares, en verdad ocurre que

$$P(45 \leq X \leq 55) \leq P(45 \leq \bar{X}_{10} \leq 55) \leq P(45 \leq \bar{X}_{100} \leq 55) \leq P(45 \leq \bar{X}_{1000} \leq 55)$$

lo cual es consistente con la Ley de los Grandes Números. Pues a medida que n aumenta, la LGN nos dice que la distribución de $\bar{X}_n$ se irá concentrando cada vez mas cerca alrededor de $E(X_i) = 50$.

2. Ejercicio 2

Sabemos que $X \sim N(0;1)$ y $\bar{X}_{10} \sim N(0;1/10)$

(a) $P(X \leq 0) = P(\bar{X}_{10} \leq 0)$ No importa cuanto valga n.

(b) $P(|X-0| \geq 1) \geq P(|\bar{X}_{10}-0| \geq 1)$, y la diferencia se amplía a medida que crece n.

(c) $P(|X-0| \leq 1) \leq P(|\bar{X}_{10}-0| \leq 1)$ y la diferencia se amplía a medida que crece n.

(d) A medida que crece n la distribución de $\bar{X}_n$ se concentra más y más en torno a μ, resultado que se conoce como LGN. Intuitivamente, al tener más información en la muestra aleatoria simple, podemos aproximar de manera más certera el verdadero valor del parámetro poblacional μ (que en este caso vale cero).

3. Ejercicio 3

(a) Consideramos la variable N = "*Cantidad de contribuyentes que consideran importante...*" Basándonos en todo lo que fue ocurriendo en las anteriores resoluciones, es sabido que $N \sim Bi(8;0{,}82)$ y por lo tanto $P(6 \leq N) = 0{,}83918$.
Si quisiéramos usar el TCL, deberíamos calcular $P(0{,}75 \leq X)$ con $X \sim N(0{,}82;0{,}01845)$. Dicha probabilidad vale aproximadamente $P(0{,}75 \leq X) \approx 0{,}6968448$.
Vemos que existe una diferencia notable entre ambas probabilidades, el motivo es que el tamaño de muestra no es lo suficientemente grande.

[1] Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Lara Sánchez Peña y Pedro Martínez Bruera.

(b) En este caso $N \sim Bi(80;0{,}82)$ y $P(60 \leq N) = 0{,}9573982$.
Aplicando el TCL, tenemos $X \sim N(0{,}82;0{,}001845)$ y $P(0{,}75 \leq X) \approx 0{,}9484144$.
Vemos que en este caso los valores son considerablemente similares.

4. Ejercicio 4

Sean $T_i \sim U(1;7)$ independienetes para $1 \leq i \leq 192$ definidas como

$$T = \text{“}\textit{Cantidad de horas diarias que el usuario } i - \textit{ésimo utiliza la app}\text{”}$$

(a) Sea $N = X_1 + \ldots + X_{192}$, se nos pide aproximar el valor de $P(N \geq 800)$.
Utilizando el TCL, tendremos que

$$\frac{N}{192} = \frac{X_1 + \ldots + X_{192}}{192} = \bar{X}_{192} \sim N\left(\frac{1+7}{2}; \frac{(7-1)^2/12}{192}\right)$$

Luego

$$P(N \geq 800) = P\left(\bar{X}_{192} \geq \frac{800}{192}\right) = P\left(\bar{X}_{192} \geq 4{,}17\right) \approx 0{,}0869$$

(b) Sea a la tarifa horaria que le permitiría ganar un mínimo de 2000 USD diarios con una confianza del 95 %. Entonces

$$\begin{aligned} & P\left(\textit{Ganancia diaria} \geq 2000\right) = 0{,}95 \\ \Longleftrightarrow\ & P\left(a \cdot N \geq 2000\right) = 0{,}95 \\ \Longleftrightarrow\ & P\left(X_1 + \ldots + X_{192} \geq \frac{2000}{a}\right) = 0{,}95 \\ \Longleftrightarrow\ & P\left(\bar{X}_{192} \geq \frac{2000}{192 \cdot a}\right) = 0{,}95 \end{aligned}$$

Luego por el TCL y utilizando la app

$$\frac{2000}{192 \cdot a} = 3{,}794 \Longleftrightarrow a = \frac{2000}{192 \cdot 3{,}794} \Longleftrightarrow a = 2{,}75$$

5. Ejercicio 5

Defininimos la variable $X \sim N(500;\sigma^2)$ como

$$X = \text{“}\textit{Peso de un paquete (en gramos)}\text{”}$$

Tenemos $X_1, \ldots, X_{25}$ independientes y sabemos, sin necesidad de hacer uso del TCL, que

$$\bar{X}_{25} \sim N\left(500; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Queremos un valor de σ tal que $P(490 \leq \bar{X}_{25} \leq 520) = 0{,}99$:

$$\begin{aligned} & P(490 \leq \bar{X}_{25} \leq 510) = 0{,}99 \\ \Longleftrightarrow\ & P\left(\frac{490-500}{\sigma/5} \leq Z \leq \frac{510-500}{\sigma/5}\right) = 0{,}99 \\ \Longleftrightarrow\ & P\left((-10) \cdot \frac{5}{\sigma} \leq Z \leq 10 \cdot \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}99 \end{aligned}$$

Para despejar σ vamos a usar una propiedad que se desprende de la simetría de la Normal. Sea $a > 0$, entonces

$$P(-a \leq Z \leq a) = p \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - 2 \cdot F_Z(-a) = p$$

Aplicando este resultado al ejercicio:

$$\begin{aligned}
& P\left(\frac{-50}{\sigma} \leq Z \leq \frac{50}{\sigma}\right) = 0{,}99 \\
\iff & 1 - 2 \cdot F_Z\left(\frac{-50}{\sigma}\right) = 0{,}99 \\
\iff & F_Z\left(\frac{-50}{\sigma}\right) = 0{,}005 \\
\iff & \frac{-50}{\sigma} = -2{,}575829 \\
\iff & \sigma = \frac{-50}{-2{,}575829} = 19{,}41123
\end{aligned}$$

6. Ejercicio 6

Si n es la cantidad de reservas aceptadas, consideramos las variables $X_i \sim Bernoulli(0{,}1)$ independientes con $1 \leq i \leq n$ definidas como

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el pasajero cancela su vuelo.} \\ 0 & \text{Si el pasajero no cancela su vuelo.} \end{cases}$$

Sea

$$N = \text{“}Cantidad\ de\ clientes\ que\ cancelan\ su\ vuelo\text{”} = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

luego el evento “hay clientes con reserva que quedan indigndos” es equivalente a $100 < n - N$ y nos interesa encontrar un n apropiado para que $P(100 < n - N) = P(N < n - 100) < 0{,}01$.
Por el TCL

$$\frac{N}{n} = \bar{X}_n \sim N\left(0{,}1; \frac{0{,}1 \cdot (1 - 0{,}1)}{n}\right)$$

y el problema se reduce a encontrar n de manera que

$$P(N < n - 100) = P\left(\hat{X}_n < 1 - \frac{100}{n}\right) < 0{,}01$$

Estandarizando

$$\begin{aligned}
& P\left(\hat{X}_n < \frac{n - 100}{n}\right) < 0{,}01 \\
\iff & P\left(Z < \left(\frac{n - 100}{n} - 0{,}1\right) \cdot \frac{\sqrt{n}}{0{,}3}\right) < 0{,}01 \\
\iff & P\left(Z < \left(\frac{0{,}9 \cdot n - 100}{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n}}{0{,}3}\right) < 0{,}01 \\
\iff & F_Z\left(\frac{3 \cdot n - 1000/3}{\sqrt{n}}\right) < 0{,}01 \\
\iff & \frac{3 \cdot n - 1000/3}{\sqrt{n}} \leq -2{,}326348
\end{aligned}$$

Realizando la sustitución $\sqrt{n} = z$ y planteando habrá que resolver

$$3 \cdot z^2 + 2{,}37 \cdot z - \frac{1000}{3} = 0,$$

aplicando la fórmula resolvente se obtiene $z = 10{,}15$ (la otra raíz se descarta porque es negativa) y consecuentemente $n = 103{,}0225$.
Teniendo en cuenta que el n que buscamos debe ser un número entero y que lo que pretendemos no es que necesariamente valga la igualdad, sino la desigualdad, tomaremos $n = 103$ como respuesta ($n = 104$ no verifica la desigualdad).

7. Ejercicio 7

$$T = \{\text{Galletitas de salvado recibidas}\}$$

$$T = X + Y + Z \; X, Y, Z, \text{ independientes}$$

$$X \sim N(100, 20) \;\; Y = 97 + W \; W \sim Exp(\lambda = 1/3) \;\; Z \sim U[80, 90]$$

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[X + Y + Z] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[Z] = 100 + \mathbf{E}[97 + W] + \frac{90 + 80}{2} = 100 + 100 + 85 = 285$$

$$Var(T) = Var(X + Y + Z) \overset{indep}{=} Var(X) + Var(Y) + Var(Z) =$$

$$20 + Var(W) + \frac{(90 - 80)^2}{12} = 20 + 9 + \frac{25}{3} = \frac{112}{3}$$

$$P(275 < T < 295) = P(-10 < T - \mathbf{E}[T] < 10) = P(|T - \mathbf{E}[T]| < 10)$$

Por la desigualdad de Chebyshev

$$P(|T - \mathbf{E}[T]| > 10) \leq \frac{Var(T)}{10^2} = \frac{28}{75}$$

Entonces

$$1 - P(|T - \mathbf{E}[T]| < 10) \leq \frac{28}{75} \implies P(|T - \mathbf{E}[T]| < 10) \geq \frac{47}{75}$$

8. Ejercicio 8

A

X variable aleatoria con distribución desconocida tal que $\mathbf{E}[X] = 5$ y $Var(X) = 0{,}1$. Utilizando la desigualdad de Chebyshev

$$P(4{,}5 \leq X \leq 5{,}5) = P(|X - \mathbf{E}[X]| < 0{,}5) = 1 - P(|X - \mathbf{E}[X]| > 0{,}5) \geq 1 - \frac{Var(X)}{0{,}5^2} = 0{,}60$$

$$\therefore P(|X - \mathbf{E}[X]| < 0{,}5) \geq 0{,}60$$

B

$X_1, \ldots, X_{10} \overset{iid}{\sim} \mathbf{E}(X) = 5, Var(X) = 0{,}1$. Sea $\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$.

$$\mathbf{E}[\bar{X}] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \frac{1}{1}\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{1}\right] \overset{iid}{=} \frac{1}{10}\mathbf{E}[X]\sum_{i=1}^{10} 1 = \mathbf{E}[X]$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \frac{1}{100} Var\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) \overset{iid}{=} \frac{1}{10} Var(X)$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev para acotar la probabilidad

$$P(4{,}5 \leq \bar{X} \leq 5{,}5) = 1 - P(|\bar{X} - \mathbf{E}[\bar{X}]| > 0{,}5) \geq 1 - \frac{\frac{Var(X)}{10}}{0{,}5^2} = 0{,}96$$

$$\therefore P(|\bar{X} - \mathbf{E}[\bar{X}]| < 0{,}5) \geq 0{,}96$$

C

$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} \mathbf{E}(X)=5, Var(X)=0{,}1$. Sea $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Utilizando la desigualdad de Chebyshev

$$P\left(|\bar{X}-\mathbf{E}[\,\bar{X}\,]|<0{,}5\right)\geq 1-\frac{\frac{Var(X)}{n}}{0{,}5^2}$$

$$n\to\infty \implies Var\left(\bar{X}\right)\to 0 \implies P\left(|\bar{X}-\mathbf{E}[X]|<0{,}5\right)\to 1$$

Funciona no sólo para acotar la probabilidad de $|\bar{X}-\mathbf{E}[\,\bar{X}\,]|<0{,}5$ sino para cualquier $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. Se verifica que $\bar{X}$ converge en probabilidad a $\mathbf{E}\left[\bar{X}\right]$.

D

$X_1,\dots X_n$ independientes tal que $\mathbf{E}\left[X\right]=4$ y $Var\left(X\right)=9+\frac{2^i+1}{2^i}=10+\frac{1}{2^i}$ $\forall i\in\mathbb{N}$. Sea $Y_n=\bar{X}_n+e^{5-\frac{1}{n}}$ Si $\bar{X}_n\xrightarrow{p}a$ entonces $Y_n\xrightarrow{p}a+e^5$. Sin embargo como $X_1,\dots,X_n$ no son idénticamente distribuidas no se puede aplicar la ley débil de los grandes números.

$$\mathbf{E}\left[\bar{X}\right]=\mathbf{E}\left[X\right]$$

$$Var\left(\bar{X}\right)=Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\overset{indep}{=}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(10+\frac{1}{2^i}\right)=\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2}\frac{1-0{,}5^{n+1}}{1-0{,}5}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

$$P\left(|\bar{X}-\mathbf{E}\left[\bar{X}\right]|>\varepsilon\right)\leq\frac{Var\left(\bar{X}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2}\frac{1-0{,}5^{n+1}}{1-0{,}5}}{\varepsilon^2}$$

$$Var\left(\bar{X}\right)\xrightarrow{p}0 \implies \lim_{n\to\infty}P\left(|\bar{X}-\mathbf{E}\left[\bar{X}\right]|>\varepsilon\right)=0 \implies \bar{X}\xrightarrow{p}\mathbf{E}\left[X\right]$$

$$\therefore Y_n\xrightarrow{p}\mathbf{E}\left[X\right]+e^5=4+e^5$$

9. Ejercicio 9

$X_1,\dots X_n\overset{iid}{\sim}U[0,\theta]\ \theta_{MV}=X_{\text{máx}}$. Para encontrar la densidad de $X_{\text{máx}}$

$$F_{X_{\text{máx}}}=P\left(\text{máx}\left\{X_1,\dots,X_n\right\}\leq x\right)=P\left(X_1\leq x,\dots,X_n\leq x\right)\overset{indep}{=}\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i\leq x\right)$$
$$\overset{id}{=}P\left(X_i\leq x\right)^n=\left(F\left(X\leq x\right)\right)^n$$

$$f_{X_{\text{máx}}}(x)=\frac{d}{dx}\left(F\left(X\leq x\right)\right)^n=n\left(F\left(X\leq x\right)\right)^{n-1}f_x(x)I_{[0,\theta]}(x)=n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}I_{[0,\theta]}(x)$$

A

$$\mathbf{E}\left[X_{\text{máx}}\right]=\int_0^\theta xn\frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx=\frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+1}}{n+1}=\frac{n}{n+1}\theta$$

$$\mathbf{E}\left[X_{\text{máx}}^2\right]=\int_0^\theta x^2n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}dx=\frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+2}}{n+2}=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$Var\left(X\right)=\frac{n}{n+2}\theta^2-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2=\theta^2\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

B

$$\mathbf{E}\left[X_{\text{máx}}\right) \neq \theta \therefore X_{\text{máx}} \text{ sesgado}$$

Un estimador de θ es consistente si y solo si el error cuadrático medio tiende a cero

$$ECM\left[X_{\text{máx}}\right] = sesgo^2 + Var\left(X_{\text{máx}}\right) = \left(-\frac{1}{n+1}\theta\right)^2 + \theta^2 \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$ECM \to 0 \implies X_{\text{máx}} \xrightarrow{p} \theta \therefore X_{\text{máx}} \text{ consistente}$$

C

$$Z = n\left(\theta - X_{\text{máx}}\right)$$

$$P\left(Z \leq z\right) = P\left(n\left(\theta - X_{max}\right) \leq z\right) = P\left(X \geq \theta - \frac{z}{n}\right) = 1 - F_{X_{\text{máx}}} = 1 - \left(\frac{\theta - \frac{z}{n}}{\theta}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} F_Z(z) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{z}{n}}{\theta}\right)^n = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}z} \therefore Z \xrightarrow{d} Exp\left(\lambda = \frac{1}{\theta}\right) \therefore Z \xrightarrow{d} Exp\left(\lambda = \frac{1}{\theta}\right)$$

10. Ejercicio 10

$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} P\left(\lambda = 1\right)$.

A

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{20} X\right]}{15} = \frac{4}{3}$$

La desigualdad de Markov no aporta información relevante para acotar la probabilidad en este caso.

B

Por el Teorema Central del Límite sabemos que

$$\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mathbf{E}[X]\right) \xrightarrow{d} N\left(0, Var(X)\right) \implies \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N\left(n\mathbf{E}\left[X\right], nVar(X)\right)$$

$$n = 60 \implies \sum_{i=1}^{60} X_i \xrightarrow{d} N\left(60, 60\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{60} X_i > 15\right) = P\left(Z \geq \frac{15 - \mathbf{E}[X]}{\sqrt{nVar(X)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{15-60}{\sqrt{60}}\right) = 1$$

11. Ejercicio 11

$Z_1, \ldots, Z_n \overset{iid}{\sim} U(-20, 10)$. Por el Teorema Central del Límite sabemos que

$$\sqrt{n}\left(\bar{Z} - \mathbf{E}[Z]\right) \xrightarrow{d} N\left(0, Var(Z)\right) \implies \sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{d} N\left(n\mathbf{E}[Z], nVar(X)\right)$$

$$\mathbf{E}[Z] = -5 \; Var(Z) = 75$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{900} Z \geq -4470\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-4470 + 900 * 5}{\sqrt{75 * 900}}\right) = 0{,}4562$$

12. Ejercicio 12

$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x)$ $\mathbf{E}[X] = \mu$ $Var(X) = \sigma^2$. $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Por el Teorema Central del Límite sabemos que

$$\sqrt{n}\frac{(\bar{X} - \mathbf{E}[X])}{Var(X)} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Como s^2 es un estimador consitente de la varianza también sabemos que

$$s^2 \xrightarrow{p} Var(X) \implies \frac{Var(X)}{s^2} \xrightarrow{p} 1$$

Esto implica que

$$\sqrt{n}\frac{(\bar{X} - \mathbf{E}[X])}{Var(X)}\frac{Var(X)}{s^2} \xrightarrow{d} N(0,1) \therefore \sqrt{n}\frac{(\bar{X} - \mathbf{E}[X])}{s^2} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

13. Ejercicio 13

Recordemos que por la desigualdad de Tchebyshev sabemos que

$$P\left(|X - E(X)| \geq k\sqrt{Var(X)}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Es importante recordar para poder utilizar la desigualdad de Tchebyshev solamente se necesita saber de una v.a. X: 2

- su media (valor esperado)
- su varianza y que sea finita

¿Podría mejorarse la cota de Tchebyshev utilizando más información sobre la distribución de X? Es decir si usáramos que $X \sim Exp(\lambda)$, además de que ya sabemos que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y que $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Veamos:

Si usamos la desigualdad de Tchebyshev sólo ultilizamos que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y que $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$:

$$P\left(|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \frac{k}{\lambda}\right) = 1 - P\left(|X - \frac{1}{\lambda}| < \frac{k}{\lambda}\right) = 1 - P\left(-\frac{k}{\lambda} < X - \frac{1}{\lambda} < \frac{k}{\lambda}\right).$$

Mientras que si usamos que $X \sim Exp(\lambda)$ (notar que esto implica que sabemos que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y que $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$)

$$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{k}{\lambda}\right) = 1 - P\left(\underbrace{\frac{1-k}{\lambda}}_{<0} < X < \frac{1+k}{\lambda}\right) = 1 - P\left(0 \leq X < \frac{1+k}{\lambda}\right)$$

Donde la última igualdad vale porque la variable X tiene **soporte** (**toma valores**) en $[0, +\infty)$.

$$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{k}{\lambda}\right) = 1 - \int_0^{\frac{1+k}{\lambda}} f_X(x)\,dx = 1 - \left(-e^{-\lambda x}\Big|_0^{\frac{1+k}{\lambda}}\right)$$
$$= 1 - \left(-e^{-(k+1)} + 1\right) = e^{-(k+1)}$$

Notamos que esta cota es mucho más "fina" ("mejor") en el sentido que a medida que k es cada vez mayor, la probabilidad calculada de esta última manera será mucho menor que en el caso de Tchebyshev.Por ejemplo,

si $k = 5$ con Tchebyshev (conociendo la media y varianza de X)

$$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{k}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{25} = 0{,}04$$

Usando el hecho de que conocemos toda la distribución de la variable aleatoria$X$:

$$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{k}{\lambda}\right) = e^{-(5+1)} \approx 0{,}002478$$

si $k = 22$ con Tchebyshev (conociendo la media y varianza de X)

$$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{k}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{484} \approx 0{,}002066115702479$$

Usando el hecho de que conocemos toda la distribución de la variable aleatoria X:

$$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{k}{\lambda}\right) = e^{-(22+1)} \approx 0{,}000000000102619$$

14. Ejercicio 14

Recordamos que si una variable aleatoria $X \sim P(\lambda)$, se tiene que:

- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- El soporte (los posibles valores que toma la v.a.) de X es $\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

Por lo tanto, no sabemos (por ahora) cómo probar la desigualdad que nos da el enunciado, pero sí sabemos por la desigualdad de Tchebyshev que para todo $k > 0$ vale que

$$P\left(|X - \lambda| \geq k\sqrt{\lambda}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

En particular, tomando $k = \sqrt{\lambda}$ vale que

$$P\left(|X - \lambda| \geq \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}^2}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} P\left(|X - \lambda| \geq \lambda\right) &\leq \frac{1}{\lambda} \\ 1 - P\left(|X - \lambda| < \lambda\right) &\leq \frac{1}{\lambda} \\ 1 - P\left(0 < X < 2\lambda\right) &\leq \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Notando que $P\left(0 < X < 2\lambda\right) \leq P\left(0 \leq X < 2\lambda\right) = P(X < 2\lambda)$, tenemos que[2]

$$P(X \geq 2\lambda) = 1 - P(X < 2\lambda) \leq 1 - P\left(0 < X < 2\lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}$$

Como queríamos ver.[3]

[2] La última igualdad vale si recordamos que la variable $X \sim P(\lambda)$ tiene soporte en $\{0, 1, 2, \cdots\}$.

[3] Recordar que si $a \leq b$, entonces vale que $-b \leq -a$ y, por lo tanto $1 - b \leq 1 - a$.

15. Ejercicio 15

Recordamos que si una variable aleatoria $X \sim U([a,b])$, se tiene que:

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- El soporte (los posibles valores que toma la v.a.) de X está compuesto por todos los números entre a y b, $[a,b]$

Recordamos que si una variable aleatoria $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, se tiene que:

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- El soporte (los posibles valores que toma la v.a.) de X está compuesto por todos los números reales, es decir $\mathbb{R}$.

Sea $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Por la linealidad de la esperanza,

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 + 3 + 4 + 3 = 14 \end{aligned}$$

Usando también la independencia de las variables X_i,

$$Var(Y) = Var(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \underbrace{=}_{X_i \text{ indep.}} Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + Var(X_4)$$

$$= \frac{(5-3)^2}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{7}{6}$$

Para el inciso b) nos piden que acotemos

$$P\left(|Y-14| \geq 2\right) \underbrace{\leq}_{\text{Tcheb.}} \frac{7/6}{2^2} = 0{,}292\,.$$

16. Ejercicio 16

Teniendo en cuenta que $X \sim P(30)$ (y que por lo tanto $E(X) = Var(X) = 30$), en este ejercicio se nos pide que acotemos inferiormente $P(20 \leq X \leq 40)$, para eso reescribimos esta expresión de manera que podamos usar la desigualdad de Tchebyshev.

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 40) &= P(-10 \leq X - 30 \leq 10) = P(|X-30| \leq 10) \\ &= 1 - P(|X-30| > 10) \underbrace{=}_{X \text{ es discreta}} 1 - P(|X-30| \geq 11) \\ &= 1 - P\left(|X-30| \geq \frac{11}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{30}\right) \underbrace{\geq}_{\text{por Tcheby.}} 1 - \frac{1}{\left(\frac{11}{\sqrt{30}}\right)^2} \\ &= 1 - \frac{30}{121} = \frac{91}{121} \geq \frac{91}{121}\,. \end{aligned}$$

17. Ejercicio 17

a) Recordamos que si una variable aleatoria $X_i \sim Be(p)$, se tiene que:

- $E(X_i) = p$.
- $Var(X_i) = p(1-p)$.
- El soporte (los posibles valores que toma la v.a.) de X es $\{0,1\}$.
- Si $X_1, \cdots, X_n \sim Be(p)$ y son **independientes** entonces $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n,p)$, es decir que $E(S_n) = np$, $Var(E_n) = np(1-p)$.
- En las mismas condiciones del punto anterior si definimos $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, vale que $E(\overline{X}_n) = p$ y que $Var(\overline{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.[4] En este ejercicio tenemos que acotar

$$P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geq 0{,}1\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geq \underbrace{\frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{k} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2} = \frac{\frac{p(1-p)}{n}}{0{,}1^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{0{,}01^2 n} = \frac{100p(1-p)}{n} \underbrace{\leq}_{p(1-p) \leq \frac{1}{4}} \frac{100 \cdot 0{,}25}{n} = \frac{25}{n}$$

b) Para poder garantizar que

$$P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geq 0{,}1\right) \leq 0{,}1$$

pedimos que

$$\frac{25}{n} \leq 0{,}1 \iff 250 \leq n\,.$$

Es decir que debemos entrevistar al menos 250 personas para poder garantizar que (independientemente del valor verdadero de p) que $P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geq 0{,}1\right) \leq 0{,}1$.

18. Ejercicio 18

Próximamente

19. Ejercicio 19

Recordamos que si una variable aleatoria $X \sim U([a,b])$, se tiene que:

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- El soporte (los posibles valores que toma la v.a.) de X está compuesto por todos los números entre a y b, $[a,b]$

Recordamos que si una variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se tiene que:

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- El soporte (los posibles valores que toma la v.a.) de X está compuesto por todos los números reales, es decir $\mathbb{R}$.

[4]Notar que la independencia de las X_i sólo se utiliza para calcular la varianza y en el punto anterior también para calcular la distribución de la variable. No obstante, para calcular los valores esperado de S_n y de $\overline{X}_n$ no es necesario utilizar el supuesto de independencia de las variables X_i.

Sea $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Por la linealidad de la esperanza,

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 + 3 + 4 + 3 = 14 \end{aligned}$$

Usando también la independencia de las variables X_i,

$$\begin{aligned} Var(Y) = Var(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) &\underbrace{=}_{X_i \text{ indep.}} Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + Var(X_4) \\ &= \frac{(5-3)^2}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Para el inciso b) nos piden que acotemos

$$P(|Y - 14| \geq 2) \underbrace{\leq}_{\text{Tcheb.}} \frac{7/6}{2^2} = 0{,}292\,.$$

20. Ejercicio 20

Dadas observaciones independientes $X_1, \ldots, X_n$ tales que $E(X_i) = 0$ y $a_i \leq X_i \leq b_i$, la desigualdad de Hoeffding dice que dado $\varepsilon > 0$ fijo se cumple la siguiente desigualdad

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-2\,\frac{\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right). \tag{1}$$

a) Si $X_1, \ldots, X_n \sim Be(p)$ pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$P(|\overline{X}_n - p| > \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2} \tag{2}$$

donde $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) Muestre que para valores grandes de n la cota de Hoeffding es mejor que la de Tchebyshev.

Solution

a) **Observación**: más adelante esta desigualdad nos será útil para acotar la longitud de intervalos de confianza asintóticos.

Para probar que vale (2) vamos a mostrar que:

- $P(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$
- $P(p - \overline{X}_n \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$

Por lo tanto, eso implicará que vale (1) ya que

$$P(|\overline{X}_n - p| > \varepsilon) = P(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) + P(p - \overline{X}_n \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2} + e^{-2n\varepsilon^2} = 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

Para aplicar la desigualdad de Hoeffding necesitamos variables con esperanza igual a cero. Definimos $Y_i = \frac{X_i - p}{n}$, tenemos que:

- Las variables Y_i son independientes porque las X_i lo son.
- $E(Y_i) = 0$ porque $E(X_i) = p$ pues $X_i \sim Be(p)$.
- Además, como $0 \leq X_i \leq 1$ tenemos que $\underbrace{-p/n}_{a_i} \leq Y_i \leq \underbrace{(1-p)/n}_{b_i}$.

Entonces $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2 = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Se verifican todas las hipótesis para aplicar la desigualdad de Hoeffding:

$$P\left(\overline{X}_n - p > \varepsilon\right) \leq P\left(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \varepsilon\right) \leq e^{-2n\varepsilon^2} \tag{3}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} P\left(\overline{X}_n - p < -\varepsilon\right) \leq P\left(\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon\right) &= P\left(p - \overline{X}_n \geq \varepsilon\right) \\ &= P\left(-\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \varepsilon\right) \leq e^{-2n\varepsilon^2} \quad [5] \end{aligned} \tag{4}$$

Luego, como valen (3) y (4), se tiene que $P\left(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$, como queríamos ver.

■

b) Las cotas son:

- Hoeffding (es una cota uniforme porque no depende del valor del parámetro p): $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - np\right| \geq n \cdot \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$
- Tchebyshev (es una cota puntual porque depende del valor del parámetro p): $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - np\right| \geq n \cdot \varepsilon\right) \leq \frac{\left(\sqrt{np(1-p)}\right)^2}{(n\varepsilon)^2} = \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2}$[6]

Comparamos las cotas para ε y p fijos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^{-2n\varepsilon^2}}{\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\varepsilon^2}{e^{2n\varepsilon^2} p(1-p)} \to 0$$

Como el límite es cero, a partir de cierto valor de n la cota de Hoeffding es mejor.

Para el inciso b) nos piden ver que para valores de n grandes, la cota de Hoeffding es 'mejor' que la cota de Tchebyshev. Esta diferencia será más notoria en la medida que p no sea 'demasiado' cercano a 0 ni a 1.

Notar que si $p(1-p) \approx 0$ (es decir que si p fuera 'cercano' a 0 o 1, entonces la cota de Tchebyshev (ya que depende del valor de p) podría llegar a tener una no tan mala performance respecto de la cota de Hoeffding (que no depende de p, es una cota que vale independientemente del valor de p, se conoce como una cota uniforme, justamente porque no depende del valor de p). No obstante, si por ejemplo p representase la población de individuos desempleados sabemos que p no es (lamentablemente) 'cercano' a cero ni (por suerte) similar a uno. Por lo tanto, en un caso así que la cota de Hoeffding será más 'precisa'.

Recordamos que las cotas son:

- Para Hoeffding (es una cota uniforme porque no depende del valor del parámetro p): $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - np\right| \geq n \cdot \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$

[5] Notar que $P\left(-\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \varepsilon\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} -Y_i \geq \varepsilon\right)$, donde $E(-Y_i) = 0$, $-b_i \leq -Y_i \leq -a_i$. Entonces es cierto que $\sum_{i=1}^{n}(-a_i+b_i)^2 = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$.

[6] Notar que $p(1-p)$ puede acotarse por $\frac{1}{4}$ y tendríamos una cota uniforme

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - np\right| \geq n \cdot \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}.$$

- Para Tchebyshev (es una cota puntual porque depende del valor del parámetro p): $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - np\right| \geq n \cdot \varepsilon\right) \leq \frac{\left(\sqrt{np(1-p)}\right)^2}{(n\varepsilon)^2} = \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2}$[7]

Veamos cuatro casos (tomando como referencia $\varepsilon = 1$):

- $n = 5$ y $p = 0{,}4$
  - Para Hoeffing: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{5} X_i - 2\right| \geq 5\right) \leq 2e^{-10} \approx 0{,}000090799859525$
  - Para Tchebyshev: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{5} X_i - 2\right| \geq 5\right) \leq= \frac{0{,}24}{125} = 0{,}00192$
- $n = 50$ y $p = 0{,}4$
  - Para Hoeffing: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{50} X_i - 20\right| \geq 50\right) \leq 2e^{-100} \approx 3{,}720075976 \times 10^{-44}$
  - Para Tchebyshev: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{50} X_i - 20\right| \geq 50\right) \leq= \frac{0{,}24}{125000} = 0{,}00000192$
- $n = 5$ y $p = 0{,}001$
  - Para Hoeffing: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{5} X_i - 0{,}005\right| \geq 5\right) \leq 2e^{-10} \approx 0{,}000090799859525$
  - Para Tchebyshev: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{5} X_i - 0{,}005\right| \geq 5\right) \leq= \frac{0{,}000999}{125} = 0{,}00007992$
- $n = 50$ y $p = 0{,}001$
  - Para Hoeffing: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{50} X_i - 0{,}05\right| \geq 50\right) \leq 2e^{-100} \approx 3{,}720075976 \times 10^{-44}$
  - Para Tchebyshev: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{50} X_i - 0{,}05\right| \geq 50\right) \leq= \frac{0{,}000999}{125000} \approx 0{,}000000007992 = 7{,}992 \times 10^{-9}$

■

21. Ejercicio 21

Basándonos en los datos del problema, aproximamos las probabilidades utilizando el TCL. Para eso, primero necesitamos calcular la media y la varianza de X_i para cada $i = 1, \cdots, 50$. $E(X_i) = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Para poder calcular $Var(X_i)$, como $Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2$, queda calcular $E(X^2)$.

$E(X_i^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $Var(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.

[7] Notar que $p(1-p)$ puede acotarse por $\frac{1}{4}$ y tendríamos una cota uniforme $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - np\right| \geq n \cdot \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$.

Como X_i tiene media $\mu = \frac{2}{3}$ y varianza $\sigma^2 = \frac{1}{18} < \infty$ para todo i por el Teorema Central del Límite podemos afirmar que $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{2}{3}\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{1}{18}\right)$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(S_{50} \leq 30\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 30\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{50} \leq \frac{30}{50}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{50} - \frac{2}{3} \leq \frac{30}{50} - \frac{2}{3}\right) \\
&= P\left(\sqrt{50}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{50} - \frac{2}{3}\right) \leq \sqrt{50}\left(\frac{30}{50} - \frac{2}{3}\right)\right) \\
&= P\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{18}}}\sqrt{50}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{50} - \frac{2}{3}\right) \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{18}}}\sqrt{50}\left(\frac{30}{50} - \frac{2}{3}\right)}_{=-2}\right) \\
&= P\left(\frac{\sqrt{50}\left(\overline{X}_{50} - \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{18}}} \leq -2\right) \\
&\approx P(Z \leq -2) = \Phi(-2) \approx 0{,}02275
\end{aligned}
$$

Donde $Z \sim N(0, 1)$, Φ es su función de distribución acumulada. Por TCL tenemos que $\frac{\sqrt{50}\left(\overline{X}_{50} - \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{18}}}$ tiene distribución aproximadamente $N(0, 1)$.

Ahora bien, para calcular

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{X}_{50} \geq 0{,}7\right) & \\
&= P\left(\overline{X}_{50} - \frac{2}{3} \geq \underbrace{\frac{1}{30}}_{0{,}7 - \frac{2}{3}}\right) \\
&= P\left(\sqrt{50}\left(\overline{X}_{50} - \frac{2}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{50}}{30}\right) \\
&= P\left(\frac{\sqrt{50}\left(\overline{X}_{50} - \frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{\sqrt{18}}} \geq \frac{\sqrt{50}}{30} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{18}}}\right) \\
&= P\left(\frac{\sqrt{50}\left(\overline{X}_{50} - \frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{\sqrt{18}}} \geq 1\right) \\
&\approx P(Z \geq 1) = 1 - \Phi(1) \approx 0{,}1586
\end{aligned}
$$

Finalmente, para el inciso 2), hallemos a de manera que $P(S_{50} \geq a) \approx 0{,}86$

$$
\begin{aligned}
0{,}86 \approx P(S_{50} \geq a) \\
&= P\left(\frac{S_{50}}{50} \geq \frac{a}{50}\right) \\
&= P\left(\frac{\sqrt{50}\left(\overline{X}_{50} - \frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{\sqrt{18}}} \geq \left(\frac{a}{50} - \frac{2}{3}\right)\frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{\sqrt{18}}}\right) \\
&\approx P\left(Z \geq \left(\frac{a}{50} - \frac{2}{3}\right)\frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{\sqrt{18}}}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, tenemos que

$$1 - \Phi\left(\left(\frac{a}{50} - \frac{2}{3}\right)\frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{\sqrt{18}}}\right) \approx 0{,}86$$

$$\Phi\left(\left(\frac{a}{50} - \frac{2}{3}\right)\frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{\sqrt{18}}}\right) \approx 0{,}14$$

Utilizando la función inversa de la función de distribución acumulada se tiene que:

$$\left(\frac{a}{50} - \frac{2}{3}\right)\frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{\sqrt{18}}} \approx -1{,}080$$

Despejando a se obtiene que $a = \dfrac{473}{15} \approx 31{,}53$

■

22. Ejercicio 22

a)

$$P\left(\left|\overline{X}_{64} - \mu\right| < 1\right) = P\left(-1 < \overline{X}_{64} - \mu < 1\right) = P\left(-\frac{8}{5} < \frac{8}{5}\left(\overline{X}_{64} - \mu\right) < \frac{8}{5}\right)$$

Por el Teorema Central del Límite,

$$P\left(\left|\overline{X}_{64} - \mu\right| < 1\right) \approx \Phi\left(\frac{8}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{8}{5}\right) = 0{,}89$$

b)

$$P\left(\left|\overline{X}_{n} - \mu\right| < 1\right) = 1 - P\left(\left|\overline{X}_{n} - \mu\right| \geq 1\right) \geq 1 - Var(\overline{X}_n) = 1 - \frac{25}{n} \geq 0{,}95$$

Despejando n se tiene que $n \geq 500$.

c)

$$P\left(\left|\overline{X}_{n} - \mu\right| < 1\right) = P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{5} < \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

Por el Teorema Central del Límite,

$$P\left(\left|\overline{X}_{n} - \mu\right| < 1\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) - 1 = 0{,}95$$

Despejamos,

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0{,}975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{5} \approx 1{,}96 \Rightarrow \sqrt{n} \approx 9{,}8 \Rightarrow n \approx 96{,}04$$

Por lo tanto, para asegurarnos que la probabilidad $P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < 1\right)$ sea aproximadamente 0,95 (o un poco más) n debe ser mayor o igual a 96, notar que con $n = 96$ podemos decir que la probabilidad $P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < 1\right) \approx 0{,}95$ pero no podemos garantizar que sea mayor o igual a 0,95. Notar que en el item 3 utilizamos la distribución asintótica de $\overline{X}_n$, con lo cual es razonable que obtengamos un valor de n mucho más pequeño al hallado en 2, donde solamente se utiliza el valor de la media y de la varianza de $\overline{X}_n$.

23. Ejercicio 23

Como la función $\ln(\cdot)$ es estrictamente creciente en el intevalo $[1, +\infty)$ podemos afirmar que

$$P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\right) = P\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{100} X_i\right) > 55\right)$$

Luego, utilizando propiedades del logaritmo

$$P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\right) = P\left(\sum_{i=1}^{100} \ln(X_i) > 55\right)$$

Para poder usar el Teorema Central del Límite calculamos $E[\ln(X_i)]$ y $Var[\ln(X_i)]$

$$E(\ln(X_i)) = \int_1^{+\infty} \ln(x)\frac{3}{X_i{}^4}dx$$

Aplicando integración por partes, donde consideramos $f(x) = \ln(x)$ y $g'(x) = \dfrac{1}{x^4}$

$$E(\ln(X_i)) = -\frac{\ln(x)}{x^3}\bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx = \frac{1}{3}$$

Para calcular la varianza, necesitamos conocer:

$$E\left(\ln^2(X_i)\right) = \int_1^{+\infty} \ln^2(x)\frac{3}{x^4}dx$$

De vuelta, integración por partes, donde $f(x) = \ln^2(x)$ y $g'(x) = \dfrac{1}{x^4}$ tenemos que

$$E\left(\ln^2(X_i)\right) = -\frac{\ln^2(x)}{x^3}\bigg|_1^{+\infty} + \frac{2}{3}\int_1^{+\infty} \ln(x)\frac{3}{x^4}dx = 0 + \frac{2}{3}E(\ln(x)) = \frac{2}{9}$$

Con esto ya podemos calcular la $Var\left(\ln(X_i)\right)$

$$Var\left(\ln(X_i)\right) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Por el Teorema Central del Límite, sabemos que

$$P\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{100}\ln(x)}{100} - \frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{\frac{1}{9}}} > \left(\frac{55}{100} - \frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{\frac{1}{9}}}\right) \approx 1 - \Phi(6{,}5) \approx 0$$

■

24. Ejercicio 24

Siendo Y el número total de errores tenemos que

$$P(Y < 90) = P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 90\right)$$

Como $E[X] = 1$ y $Var[X] = 1$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} < \frac{90}{100}\right) = P\left(\sqrt{100}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} - 1\right) < \sqrt{100}\left(\frac{90}{100} - 1\right)\right)$$

Usando el TCL, podemos decir que

$$P\left(\sqrt{100}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} - 1\right) < \sqrt{100}\left(\frac{90}{100} - 1\right)\right) \approx \Phi(-1) = 0{,}1586$$

■

25. Ejercicio 25

Tomando el ln de Y_n queda que

$$\ln(Y_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)}{n}$$

Luego, como las X_i son iid, al aplicar la LGN tenemos que

$$\ln(Y_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)}{n} \xrightarrow{P} E[\ln(X)]$$

Entonces, calculamos $E[\ln(X)]$

$$\begin{aligned} E[\ln(X)] &= \int_0^1 \ln(x)2x dx \\ &= 2\int_0^1 \ln(x) x dx \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes, donde $u = \ln(x)$ y $dv = x$, tenemos que

$$\begin{aligned} E[\ln(X)] &= 2\int_0^1 \ln(x) x dx \\ &= 2\left(\left[\ln(x)\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2x} dx\right) \\ &= 2\left(\left[\ln(x)\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Entonces decimos que $\ln(Y_n) \xrightarrow{P} -\frac{1}{2}$, por lo tanto $Y_n \xrightarrow{P} e^{-\frac{1}{2}}$.

■

26. Ejercicio 26

Al tratarse de una muestra aleatoria, las X_i son i.i.d. Por la ley de grandes números, se tiene que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E(X_1) = 0$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} E\left(X_1^2\right) = 2$$

Por el teorema central del límite

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{2}\frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{D} \sqrt{2}Z \sim \mathcal{N}(0,2)$$

Donde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. Tenemos que

$$V_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow{P} \frac{0}{2} = 0$$

Como la convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución, concluimos que $V_n \xrightarrow{D} 0$

2. Tenemos:

$$W_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow{D} \frac{\sqrt{2}Z}{2} = \frac{Z}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0,1/2)$$

El numerador en la segunda igualdad, $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{D} \sqrt{2}Z$, donde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, es decir $\sqrt{2}Z \sim N(0,2)$. Por otro lado, el denominador converge en probabilidad a 2: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} 2$, por lo que $\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, usando el lema de Slutsky probamos el resultado que queríamos mostrar.

3. Tenemos:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow{D} \frac{\sqrt{2}Z}{\sqrt{2}} = Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

El numerador en la segunda igualdad, $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{D} \sqrt{2}Z$, donde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, es decir $\sqrt{2}Z \sim N(0,2)$. Por otro lado, el denominador converge en probabilidad a $\sqrt{2}$: usando que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} 2$ y que $t(x) = \sqrt{x}$ es una función continua, se tiene que $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow{P} \sqrt{2}$ por lo que $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, usando el lema de Slutsky probamos el resultado que queríamos mostrar.

4. Como la función exponencial $r(x) = e^x$ es una función continua y como $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{D} \sqrt{2}Z$ por el teorema central del límite, vale que:

$$Z_n = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \xrightarrow{D} \exp\left(\sqrt{2}Z\right)$$

Como $\sqrt{2}Z \sim \mathcal{N}(0,2)$, y vale que, como $d(x) = \ln(x)$ es una función continua $\ln(Z_n) \xrightarrow{D} \sqrt{2}Z \sim N(0,2)$ concluimos que $Z_n \xrightarrow{D} \exp\left(\sqrt{2}Z\right) \sim \text{lognormal}(0,2)$.

5. Utilizando el inciso anterior y que por la ley de los grandes números vale que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E(X_1) = 0$, podemos usar la propiedad 2) del tema de Slutsky, que dice que si $R_n \xrightarrow{D} R$ y $X_n \xrightarrow{P} c$ entonces $R_n + X_n \xrightarrow{D} R + c$.

$$R_n = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{D} \exp\left(\sqrt{2}Z\right) + 0 = \exp\left(\sqrt{2}Z\right) \sim \text{lognormal}(0,2)$$

6. Usando que por la ley de los grandes números vale que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} E\left(X_1^2\right) = 2$, que por el teorema central del límite vale que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{2}\frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{D} \sqrt{2}Z \sim \mathcal{N}(0,2),$$

y que por la propiedad 1) del lema de Slutsky vale que $D_n \xrightarrow{D} D$ y $U_n \xrightarrow{P} c$ entonces $D_n \cdot U_n \xrightarrow{D} c \cdot D$

$$S_n = \frac{1}{n^{3/2}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \xrightarrow{D} \left(\sqrt{2}Z\right)2 \sim \mathcal{N}(0,8)$$

■

27. Ejercicio 27

Usamos la notación $X_n \xrightarrow{m.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ para la convergencia en media cuadrática.

Para el inciso a) queremos ver que $X_n \xrightarrow{m.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$, es decir, que si vale que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X|^2\right) = 0$$

Como las variables aleatorias $|X_n - X|^2$ y $|X_n - X|$ son no negativas, la única manera de que el límite del valor esperado de dichas variables aleatorias tienda a 0 es que la probabilidad de que tanto $|X_n - X|^2$ como $|X_n - X|$ sean positivas, -en particular, mayores que cualquier valor $\varepsilon > 0$ o $\varepsilon^2 > 0$- tiene que valer tender a 0.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Para mostrar la implicación, usamos que

$$0 \leq P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = P\left(|X_n - X|^2 \geq \varepsilon^2\right) \underbrace{\leq}_{\text{Markov}} \frac{E\left(|X_n - X|^2\right)}{\varepsilon^2}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$0 \leq P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(|X_n - X|^2\right)}{\varepsilon^2}$$

Tomando límite $\lim_{n\to\infty}$ se tiene que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E\left(|X_n - X|^2\right)}{\varepsilon^2} = 0$$

Por lo que $\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$ para cualquier valor de $\varepsilon > 0$ como queríamos ver.

∎

Para el inciso b), para ver que $X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{m.c.} X$ tomamos las siguientes variables aleatorias dicotómicas (*di*=dos)

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{n} \\ \sqrt{n} & \text{con probabilidad } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Notamos que $E(X_n) = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, o sea que $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = 0$.

Además, $E\left(|X_n - 0|^2\right) = 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sqrt{n}^2 \cdot \frac{1}{n} = 1$ para cualquier n.

Veamos que $X_n \xrightarrow{P} 0$ pero que sin embargo $X_n \overset{m.c.}{\not\to} 0$. [8]

Veamos primero que $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 de manera que $\sqrt{n_0} > \varepsilon$. Por lo tanto, **para todo** $n \geq n_0$ **se cumple que**:

$$\begin{aligned} P(|X_n| \geq \varepsilon) &= P(|X_n| \geq \sqrt{n}) \\ &= P(X_n \neq 0) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Por lo tanto vale que

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por lo tanto $X_n \xrightarrow{P} 0$. Ahora bien $E\left(|X_n - 0|^2\right) = 1$ para cualquier n, por lo que $\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - 0|^2\right) = 1 \neq 0$

Por lo tanto, se tiene que $X_n \overset{m.c.}{\not\to} X$.

∎

[8] Estamos considerando que X es una v.a. degenerada, es decir que $P(X = 0) = 1$.