NOCIONES BASICAS DE PROBABILIDAD

- *Leyes de Morgan* **I:** $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ **II:** $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$
- *Principio Inclusión Exclusión* $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$
- *Definición axiomática probabilidad* **I:** $P(\Omega) = 1$ **II:** $P(A) \geq 0$ **III:** $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ **IV:** $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
- *Permutaciones y combinaciones* **I:** $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ **II:** $k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}$
- *Distribución multinomial* $(x_1 + \cdots x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1 \cdots n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$, donde la suma es sobre los n_i de manera que $\sum_{i=1}^r n_i = n$
- *Condicional* $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega,\ B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall_{i\neq j}$ **LPT:** $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i)P(B_i)$ **Bayes:** $P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i)P(B_i)}$ **dato:** $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$
- *Independencia* $P(A/B) = P(A) \longrightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)$

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

- *Binomial* $X \sim B(n,p)$ **PMF:** $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ **FGM:** $M(t) = (pe^t + 1 - p)^n$ **E(X)** $= np$ **V(X)** $= np(1-p)$
- *Geométrica* $X \sim G(p)$ **PMF:** $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p,\ k \geq 1$ **FGM:** $M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ **E(X)** $= \frac{1}{p}$ **V(X)** $= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$
- *BinomNeg* $X \sim BN(r,p)$ **PMF:** $P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r},\ k \geq r$ **FGM:** $M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$ **E(X):** $\frac{r}{p}$ **V(X):** $\frac{r(1-p)}{p^2}$
- *Poisson* $X \sim P(\lambda)$ **PMF:** $P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k \geq 0$ **FGM:** $M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$**E(X)** $= \lambda$ **V(X)** $= \lambda$ (recordar reescalar λ)
- *Hipergeométrica* $X \sim H(n,r,m)$ **PMF:** $P(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$ **FGM:** $E(X) = \frac{mr}{n}$ $Var(X) = \frac{mr}{n^2(n-1)}(m-n)(r-n)$,
- *datos* $X \sim B(n,p), E(X^s) = npE((Y+1)^{s-1}), Y \sim B(n-1,p),\ X \sim BN(r,p) E(X^s) = \frac{r}{p} E((Y-1)^{s-1}), Y \sim BN(r+1,p),$ $X \sim H(n,r,m), E(X^s) = \frac{mr}{n} E((Y+1)^{s-1}), Y \sim H(n-1, r-1, m-1)$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

- *Definición* **I:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $P(X \in B) = \int_B f(x)dx$ **II:** $P(X \in (-\infty,\infty)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ **III:** $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- *Distribución Uniforme* $X \sim U(a,b)$ **PDF:** $a \leq x \leq b \to f(x) = 1$ **FGM:** $M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
- *Exponencial* $X \sim Exp(\lambda)$ **PDF:** $x \geq 0 \to f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ **FGM:** $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, **prop olvido**: $P(T > t+s | T > s) = P(T > t)$
- *Gamma* $X \sim G(\alpha,\lambda)$ **PDF:** $x \geq 0 \to f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$ $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$ **FGM:** $M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$
- *Notas de Color sobre la Gamma* $\Gamma(n) = (n-1)!$ si n entero $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, $\Gamma(\frac{n}{2}) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-1}{2}}}$
- *Normal* $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ **PDF:** $-\infty \leq x \leq \infty \to f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ **FGM:** $M(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
- *Funciones de variables aleatorias I* $Y = g(X)$ $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = F_x(g^{-1}(y)) \to f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$
- *Funciones de v.a. II* X con dist F, si $Z = F(X) \Rightarrow Z \sim U[0,1]$ $P(Z \leq z) = P(F(X) \leq z) = P(X \leq F^{-1}(z)) = F(F^{-1}(z)) = z$
- *Funciones de v.a. III* $U \sim U[0,1]$ $X = F^{-1}(U) \Rightarrow X \sim F(U)$. $P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = p(U \leq F(x)) = F(x)$
- $Exp(\lambda) \equiv G(1,\lambda), {\chi^2}_g \equiv G(\frac{g}{2}, \frac{1}{2})$ $X_i \sim P(\lambda_i)$ indep $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$, $X_i \sim Exp(\lambda)$ indep $\Rightarrow \sum X_i \sim G(n,\lambda)$, $Z \sim P(\lambda)$, $X|_{Z=z} \sim Bi(z,p) \Rightarrow X \sim P(p\lambda)$, si $n \to \infty, p \to 0, np \to \lambda \Rightarrow B(n,p) \approx P(\lambda)$
- $X \sim U[a,b], E(X) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $X \sim Exp(\lambda), E(X) = \frac{1}{\lambda}, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$,$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda) E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, V(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

DISTRIBUCION CONJUNTA

- $P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$
- *Variables continuas* $F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v)dudv$ $f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$
- $(X,Y) \sim f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\dfrac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2 + (\dfrac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2 - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}}$ $\Rightarrow Y|_{X=x} \sim N(\mu_y - \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x-\mu_x), {\sigma_y}^2(1-\rho^2))$
- *Incrementos* $P(x \leq X \leq X + \delta_x, y \leq Y \leq y + \delta_y) \approx f(x,y)\delta_x\delta_y$
- *Distribuciones marginales* $f_x(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ (Si quiero $P(X \geq Y)$ hago $\int_{-\infty}^x f(x,y)dy$)
- *Independencia* $\vec{X} \to F(\vec{X}) = \prod F_{x_i}$ *Estadístico k-ésimo de orden* $X_{(k)}$ con $f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k}$

- *Estadísticos de orden y extremos* $\vec{X}$ iid F,f. $U = max\{X_i\}$ $V = min\{X_i\}$. $F_U(u) = [F(u)]^n$ $F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

- *Caso Discreto:* $P(X = x_i/Y = y_j) = \frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$
- *Independencia Discreto:* X e Y independientes, $P(X = x_i/Y = y_j) = p_x(x : i)$
- *Caso Continuo:* $f_{x/y}(x/y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y_j)}$ $f_{xy}(x, y) = f_{x/y}(x/y)f_y(y_j) = f_{y/x}(y/x)f_x$
- *Independencia Continuo:* X e Y independientes, $P(X = x_i/Y = y_j) = f_x(x_i)$

FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

- *Suma* X e Y $Z = X + Y$ $F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_{xy}(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f_{xy}(x, v - x)dvdx$
- *Convolución:* $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, z - x)dx$. Si X e Y independientes $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)f_y(z - x)dx$.
- *Cocientes:* $Z = Y/X$. $x > 0 \rightarrow y \leq xz$ $x < 0 \rightarrow y \geq xz$ $F_z(z) = \int_{-\infty}^{0}\int_{xz}^{\infty} f_{xy}(x, y)dydx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{xz} f_{xy}(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{xy}(x, xv)dxdv$, Z con dist. de Cauchy $f_Z(z) = \frac{1}{\pi(z^2+1)}$
- *densidad del cociente* $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{xy}(x, xz)dx$ Si X e Y son indep $\Rightarrow f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)f_Y(xz)dx$
- *Función Invertible:* X e Y con $f_{xy}(x, y)$ $u = g_1(x, y)$ $v = g_2(x, y)$ invertibles $x = h_1(u, v)$ $y = h_2(u, v)$. $f_{uv}(u, v) = f_{xy}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot |J(h_1(u, v), h_2(u, v))|$

ESPERANZA MATEMATICA

- $E(g(X)) = \sum_{i:p(x_i)>0} g(x_i)p(x_i)$, en part: $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x:p(x)>0} e^{tx}p(x)$, $E(X^n) = \sum_{x:p(x)>0} x^n p(x)$, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- *FGM:* **I:** Si $0 \in X \Rightarrow \exists! F(x)$ **II:** $M^{(r)}(0) = E(X^r)$ **III:** $Y = aX + b, M_Y(t) = e^{bt}M_x(at)$ **IV:** X, Y ind $Z = X + Y$ $M_Z(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = M_x(t)M_y(t)$.
- *Funciones de Variables:* $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ $E(Y) = \int\cdots\int_{x_1,\ldots,x_n} g(x_1, \ldots, x_n)p(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$
- *Independencia:* X, Y independientes. $E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$
- *Suma:* $Y = a + \sum_{i=1}^{n} b_iX_i$ $E(Y) = a + \sum_{i=1}^{n} b_iE(X_i)$
- *Desigualdad Jensen:* X y ϕ convexa. $\phi(E(X)) \leq E(\phi(X))$, *Desigualdad Markov:* X no negativa. $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$
- *Desigualdad Chebyshev:* $X \sim (\mu, \sigma^2)$ $P(|X - \mu| > t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$ $P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
- *Covariancia:* $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ $Cov(aX, bY) = a \cdot b \cdot Cov(X, Y)$ $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$ $Var\left(a + \sum_{i=1}^{n} b_iX_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_ib_jCov(X_i, X_j)$, *Coeficiente de Correlación:* $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$ $-1 \leq \rho \leq 1$
- *Esperanza Condicional:* $E(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_{y/x}(y/x)dy$, $E(h(Y)/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_{y/x}dy$
- *L.E.I.:* **I:** $E(Y) = E(E(Y/X))$ **II:** $Var(Y) = Var(E(Y/x)) + E(Var(Y/X))$, $V(Y|X) = E[(Y - E(Y|X))^2|X]$

NOCIONES DE CONVERGENCIA

- *Convergencia en probabilidad:* $lim_{x\to\infty} Prob(|x_n - c| > \epsilon) = 0$ $\forall\epsilon > 0 \longrightarrow plim\, x_n = c$
- *Convergencia en media cuadrática:* $x_n \sim (\mu_n, \sigma_n^2)$ $\lim_{n\to\infty} \mu_n = c$ $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0 \Rightarrow plim\, x_n = c$
- *Ley débil GN:* $X_1, \ldots, X_n$i.i.d. $E(X_i) = \mu$ $Var(X_i) = \sigma^2$ $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow plim\, \bar{X} = \mu$
- *Convergencia A.S.:* $\lim_{n\to\infty}$ $Prob(|x_i - c| > \epsilon, \exists i \geq n) = 0 \longrightarrow x \overset{a.s.}{\to} c$
- *Ley fuerte GN:* $X_1, \ldots, X_n$ iid $E(X_i) = \mu_i < \infty$ $Var(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2/i^2 < \infty \longrightarrow \bar{x}_n - \mu_n \overset{a.s.}{\to} 0$
- *Teorema Slutsky:* $plim\, g(x_n) = g(plim\, x_n)$ $g(x_n)$ es continua y no es función de n
- *Reglas plim:* $plim\,(x_n, y_n) = (c, d)$ **I:**$plim\,(x_n + y_n) = c + d$ **II:**$plim\,(x_n \cdot y_n) = c \cdot d$ **III:**$plim\,(x_n/y_n) = c/d$
- *Convergencia en distribución:* $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$ $(M_n(t) \to M(t)) \longrightarrow (F(x_n) \to F(x))$ si contiene a 0
- *Reglas distribuciones límite I:* $x_n \overset{d}{\to} x$ $plim\, y_n = c$ **I:** $x_n \cdot y_n \overset{d}{\to} c \cdot x$ **II:** $x_n + y_n \overset{d}{\to} x + c$ **III:** $x_n/y_n \overset{d}{\to} x/c$
- *Reglas distribuciones límite II:* $x_n \overset{d}{\to} x$ $g(x_n)$ continua $\Rightarrow g(x_n) \overset{d}{\to} g(x)$
- *TCL Lindberg-Levy:* $X_1, \ldots, X_n$ $\mu < \infty, \sigma^2 < \infty$ $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu) \overset{d}{\to} N(0, \sigma^2)$
- *Método Delta* Si $\sqrt{n}(Z_n - \mu) \overset{d}{\to} N(0, \sigma^2)$ y $g(Z_n)$ derivable y que no depende de $n \Rightarrow \sqrt{n}(g(Z_n) - g(\mu)) \overset{d}{\to} N(0, (g'(\mu))^2\sigma^2)$