Inferencia Estadística

G4: Contrastes de Hipótesis

Gabriel Martos Email: gmartos@utdt.edu
Nicolás Ferrer Email: nicolas.ferrer.747@gmail.com

Enunciados

1. ¿Verdadero o falso? Justifique cada una de sus respuestas convenientemente.

   (a) El nivel de significación de un test es igual a la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta.

   (b) Si un test con nivel de significación α rechaza la hipótesis nula, entonces la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta es igual a α.

   (c) La probabilidad de que un test rechace la hipótesis nula incorrectamente (es decir, cuando es cierta) es igual a la potencia del test.

   (d) Un error de tipo I ocurre cuando el test rechaza la hipótesis nula.

   (e) Si no logramos rechazar la hipótesis nula no podríamos aceptar la misma porque no estaríamos controlando la probabilidad de equivocarnos con esta decisión.

2. Considera $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim} N(\theta, \sigma^2 = 1)$. Queremos testear $H_0 : \theta \leq 0$ vs $H_1 : \theta > 0$ utilizando el estadístico $T(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}$ y la función de test:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } T(X_1, \ldots, X_n) \geq Q, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad .$$

   (a) Si $Q = 0$ calcula la probabilidad de cometer el error tipo I de este test.

   (b) Hallar probabilidad de cometer el error tipo II y su complemento (la potencia) (notar que estas cantidades dependerán de n, σ^2 y $\theta \in \Theta_1$)

   (c) ¿Cómo cambia la probabilidad de cometer el ET I y la potencia del test a medida que incrementamos Q?.

   (d) Determina el valor de Q (la región de rechazo) para que el test tenga un tamaño $\alpha = 0.05$. Para este test, imagina que tomas una muestra de tamaño $n = 10$ y observas que $\bar{x} = 0.5$, ¿cuál es el p-valor asociado a esta muestra particular? ¿Rechazamos H_0 a un nivel del 5%? ¿Cómo interpretas el p-valor?

3. Siendo $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim} \text{Bern}(\theta)$, queremos testear $H_0 : \theta = 1/2$ vs $H_1 : \theta \neq 1/2$ utilizando el estadístico $T(X_1, \ldots, X_n) = \widehat{p}$ (proporción muestral) y la función de test:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } |T(X_1, \ldots, X_n) - 1/2| \geq Q, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad .$$

   (a) Determinar la región de rechazo para que, con n grande, la probabilidad de cometer el error tipo I del test sea de aproximadamente $\alpha = 0.05$.

(b) Hallar probabilidad (aproximada) de cometer el error tipo II y su complemento (la potencia). ¿Cómo dependen ambas cantidades respecto de n y p?

(c) Imagina que tomas una muestra de tamaño $n = 100$ y observas que $\widehat{p} = 0.54$, ¿cuál es el p-valor asociado a esta muestra particular? ¿Rechazamos H_0 a un nivel del 5%? ¿Cómo interpretas el p-valor?

4. Sea X una v.a. con función de densidad:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, \text{ si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Donde $\theta \in \Theta = \{1, 2\}$. Considere el problema de testear $H_0 : \theta = 1$ vs. $H_1 : \theta = 2$ utilizando una muestra aleatoria $\{X_1, X_2\} \overset{iid}{\sim} f(x;\theta)$ y una región crítica para el test definida como: $R = \{(X_1, X_2) : X_1X_2 \geq 3/4\}$. Hallar la probabilidad de cometer los errores tipo I y II del test (Ayuda: Notar que bajo H_0 $X \sim U(0, 1)$).

5. Sea $\{X_1, \ldots, X_8\} \overset{iid}{\sim}$ Poiss(θ). Se quiere testear $H_0 : \theta \leq 0.5$ vs $H_1 : \theta > 0.5$. La zona de rechazo se define como $R = \{(X_1, \ldots, X_8) : T = \sum_{i=1}^{8} X_i \geq 8\}$ (Ayuda: $T \sim Pois(8\theta)$).

(a) Computar la probabilidad de cometer el error tipo I.

(b) Dejar indicada la función de potencia del test.

6. $\mathbf{X} \equiv \{X_1, \ldots, X_5\} \overset{iid}{\sim}$ Bern(θ) y considerando $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{5} X_i$ como el estadístico de contraste. Para el test:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \frac{1}{2}, \\ H_1 : \theta > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Compute la probabilidad de cometer el error tipo I y deje indicada la función de potencia del test.

7. Con $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim}$ Exp(λ) (donde $E(X_1) = \lambda^{-1}$); considere testear: $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. Asumiendo que $n \gg 0$, se pide que:

(a) Determine la región de rechazo asociado al LRT y al test asintótico de Wald.

(b) Dada una muestra de tamaño $n = 50$, de donde surge que $\sum_{i=1}^{50} = 150$; para $\lambda_0 = 2.5$ indique si rechazamos o no H_0 en cada uno de los casos anteriores.

8. En una encuesta a 200 directivos de empresas Argentinas sobre la ética de la gestión empresarial se les pidió responder utilizando una escala de 1 (muy en desacuerdo) a 7 (muy de acuerdo), sobre la opinión respecto de la siguiente afirmación: *Los directivos de las empresas Argentinas están interesados en la justicia social.* El promedio de los puntajes de las respuestas fue de 4,27, y el desvío estándar para la muestra fue de 1,32. Considerando que la misma encuesta, pero con empresarios Chilenos, arrojó que la media de las respuestas en ese país es de 4 puntos y queriendo argumentar que los empresarios Argentinos se preocupan más que los Chilenos por la justicia social, que test deberíamos plantear? Que conclusiones obtiene al llevar adelante el test plateado? (considere $\alpha = 0.05$ y asuma que independencia en las respuestas de los empresarios).

9. Un grupo de científicos del CONICET desarrolló un test de diagnóstico de coronavirus ultrarápido (se conocen los resultados 10 minutos después del hisopado). La ANMAT, organismo del estado que se encarga de validar la eficacia de estos test, lo contrata a ud para que diseñe un ensayo clínico con el que puedan validar la eficacia del método. Antes de comenzar a resolver el ejercicio se recomienda repase los conceptos epidemiológicos de Sensibilidad y Especificidad (los puedes encontrar en wikipedia).

(a) Ponga el problema en términos estadísticos indicando el/los modelo(s) de probabilidad involucrado(s) y sus parámetros.

   - Ayuda: Un camino a seguir es pensar que la población objetivo (los argentinos) estamos divididos en dos grupos disjuntos: infectados y sanos. Si consideramos una muestra aleatoria de m pacientes contagiados $\{X_1, \ldots, X_m\} \sim \text{Bin}(\theta_X)$ y n sanos $\{Y_1, \ldots, Y_n\} \sim \text{Bin}(\theta_Y)$, los parámetros θ_X y θ_Y indicarían la sensibilidad y el complemento de la especificidad del test ($X = 1$ e $Y = 1$ indican test positivo sobre paciente contagiado y sano respectivamente) .

(b) ¿Cómo estimaría (puntualmente y haciendo estimaciones por intervalos) estas cantidades? ¿Que supuestos probabilísticos necesita hacer?

(c) Si la ANMAT se quiere asegurar que la sensibilidad del test es mayor a 990 por cada mil testeados enfermos; y una especificidad mayor al 950 por mil ¿Cómo plantearía esto en términos de un test estadístico?

(d) De un estudio sobre 500 pacientes enfermos y 300 sanos, se estimó puntualmente una sensibilidad del 0.995 y una especificidad del 0.998. Indique si le parece que este test cumple con los requerimientos del organismo.

10. Debido a las crecientes quiebras de grandes corporaciones, los auditores están cada vez más preocupados por los posibles casos de fraude y quieren evaluar si medir cuidadosamente los flujos de dinero en efectivo puede ayudar a descubrir potenciales casos. Para evaluar esta metodología, se tomaron los flujos de caja de una firma que había realizado fraude y se le pidió a 36 auditores que indicaran a partir del material la probabilidad de fraude utilizando una escala de 0 a 100. La evaluación media de estos 36 auditores fue de 66.21 y el desvío estándar de la muestra fue 22.93. Asimismo, se tomó una muestra de otros 36 auditores y se les solicitó que evaluaran la posibilidad de fraude de la firma, sin poder observar los flujos de caja. En este caso la media y el desvío estándar de la muestra fueron, respectivamente, 47.56 y 27.56. Utilice de manera conveniente alguno de los métodos de test vistos en clase para responder a la pregunta arriba planteada.

11. Una firma de energía eólica asegura que su nuevo molino de viento puede generar un promedio de 800 kilovatios de potencia por día (asuma que esto no depende de las condiciones meteorológicas ni externas al molino). Sabiendo que se puede suponer que la generación diaria de energía del molino de viento tiene distribución normal.

(a) Si ud fuera accionista de la compañía que produce los molinos; ¿con qué test apoyaría la afirmación de la firma? De una muestra de 100 días de generación en un molino, se estimó el desvío estándar en 120 kilovatios; cual es el valor más bajo de generación promedio que permite confirmar la afirmación de la firma con un nivel de confianza (aproximado) del 95%.

(b) Utilizando el valor crítico que obtuviste en el punto anterior, ¿cuál es la probabilidad de cometer el Error Tipo II si la media poblacional fuera de 820Kv/día?

(c) Si por el contrario, ud fuera un veedor externo contratado por el estado nacional (que va a comprar cientos de estos molinos en una licitación); ¿con qué test apoyaría su dictamen? De una muestra de 100 días de generación en un molino, se estimó el desvío estándar en 120 kilovatios; cual es el valor más alto de generación promedio que permite confirmar su afirmación al estado con un nivel de confianza (aproximado) del 95%.

(d) Utilizando el valor crítico que obtuviste en el punto anterior, ¿cuál es la probabilidad de cometer el Error de Tipo II si la media poblacional fuera de 770Kv/día?

12. Una PyME local produce cables para una compañía telefónica multinacional que opera en el país. Cuando su proceso de producción está bajo control (funcionando correctamente), el diámetro de los cables fabricados sigue una distribución normal con media 1.6 centímetros y una desviación estándar de 0.05 centímetros. Dada una muestra de 16 piezas de cable, se estimó una media de 1.615 centímetros de diámetro y un desvío estándar de 0.086 centímetros.

    (a) Asumiendo que el desvío estándar de la población es de 0.05 centímetros, pruebe, con un nivel de 10%, la hipótesis nula de que la media poblacional es de 1.6 centímetros. Encuentre también el menor nivel de significación al que esta hipótesis nula puede ser rechazada a favor de la hipótesis alternativa bilateral.

    (b) Pruebe, a un nivel de 10%, la hipótesis nula de que el desvío estándar poblacional es menor o igual a 0.05 centímetros.

13. Un productor de vino afirma que la proporción de sus clientes que no pueden distinguir su producto de un jugo de uva congelado es, como máximo, 0,09. El productor decide poner a prueba esta hipótesis nula frente a la alternativa de que la verdadera proporción es de más de 0,09. La regla de decisión elegida es rechazar la hipótesis nula si la proporción de la muestra de las personas que no pueden distinguir entre estos dos sabores excede 0,14.

    (a) Si se elige una muestra aleatoria de 100 clientes y se usa esta regla de decisión ¿Cuál es la probabilidad de realizar un Error de Tipo I?

    (b) Si se selecciona una muestra de 400 clientes y se usa la misma regla de decisión ¿Cuál es la probabilidad de realizar un Error de Tipo I? Explicar, con palabras y gráficamente, ¿Por qué su respuesta difiere de la respuesta de la parte a)?

    (c) Supongamos que la verdadera proporción de clientes que no pueden distinguir entre estos sabores es 0.20. Si se selecciona una muestra aleatoria de 100 clientes, ¿cuál es la probabilidad de realizar un Error de Tipo II?

    (d) Supongamos que, en lugar de utilizar la regla de decisión anterior, se decide rechazar la hipótesis nula si en la muestra la proporción de clientes que no pueden distinguir entre los dos sabores excede 0,16. Dada una muestra de 100 clientes:

        (i) Sin hacer cálculos, ¿la probabilidad de realizar un Error de Tipo I será mayor, menor, o igual que la misma probabilidad calculada en la parte a)?.

        (ii) Si la proporción real es 0.20, ¿la probabilidad de realizar un Error Tipo II ser mayor, menor, o igual que la misma probabilidad calculada en la parte c)?

14. Una empresa intenta comercializar paquetes con una mezcla de ceniza pulverizada de combustible y cemento. Esta mezcla, que se usa en la construcción, para poder ser comercializada debe ser sometida primero a un proceso de evaluación realizado por el ente regulador estatal para constatar que cumple con ciertas condiciones que aseguran que el material es confiable. En particular, el ente regulador requiere que la resistencia a la compresión de la mezcla comercializada en cada paquete sea mayor que 1300 KN/m. En el proceso de evaluación, el ente regulador toma una muestra aleatoria de 20 paquetes de la mezcla y mide la resistencia a la compresión de cada paquete. Teniendo en cuenta que las mediciones de la mezcla no son perfectas y que en el proceso de fabricación de la mezcla existen pequeñas variaciones en el mezclado, el ente regulador plantea un modelo que establece que la resistencia a la compresión para mediciones de paquetes elegidos al azar está distribuida normalmente. A su vez, dadas las características físicas del proceso de fabricación de la mezcla y del proceso de medición de la resistencia a la compresión, se sabe fehacientemente que el desvío estándar de las mediciones de resistencia a la

compresión de paquetes elegidos al azar es $\sigma = 60$ KN/m. Denotemos con μ la media de la verdadera resistencia de la mezcla en la población de paquetes fabricados por una empresa que presenta su producto para ser evaluado por el regulador.

(a) Para decidir si un producto cumple con las especificaciones el ente regulador plantea como hipótesis nula $H_0 : \mu \leq 1300$ y como hipótesis alternativa $H_1 : \mu > 1300$. ¿Considera usted que es correcta la elección de hipótesis nula y alternativa? Comente sobre las consecuencias de cometer errores de tipo I y II.

(b) Denote con $\overline{X}$ al promedio de la resistencia a la compresión de la muestra de 20 paquetes seleccionados al azar. Suponga que el ente regulador permite la comercialización de la mezcla evaluada sólo si $\overline{X} > 1331.26$. De acuerdo a las hipótesis nula y alternativa planteadas en el inciso anterior, ¿cuál es el nivel del test de esta regla de decisión?

(c) Suponga que una empresa que presenta su nuevo producto para su evaluación en realidad cumple con los requerimientos porque para su mezcla, $\mu = 1350$ (esto, por supuesto, es desconocido para el ente regulador). ¿Cuál es la probabilidad de que, con la regla usada por el ente regulador, la empresa pueda obtener el permiso para comercializar su producto? Si debiera explicar el sentido de esta probabilidad en una reunión de empresarios de la construcción que no saben nada sobre Estadística, ¿cómo lo explicaría con palabras sencillas?

(d) Dadas las hipótesis planteadas en el inciso (a), indique si la probabilidad calculada en el inciso (c) coincide con

- La probabilidad de error de tipo I del test.
- El nivel del test.
- La potencia del test en el valor $\mu = 1350$.
- La probabilidad de error de tipo II del test en $\mu = 1350$.

(e) Suponga que habiendo quedado insatisfecha porque el cálculo de la probabilidad del inciso (c) arrojó un valor muy bajo, la empresa presenta una queja formal ante el ente regulador solicitándole que reconsidere el procedimiento de evaluación para que el 95% de las mezclas que tengan un $\mu = 1350$ pasen satisfactoriamente la prueba del ente regulador. Suponga que el ente regulador desea mantener el nivel del test arrojado por el cálculo del inciso (b). ¿Qué cambios en el proceso de evaluación debe hacer el ente regulador para satisfacer del pedido de la empresa?

15. Durante la discusión parlamentaria por la promulgación de la ILE (2018), surgió la controversia de que la proporción de mujeres en favor de esta ley era menor a la de los hombres. Indique el modelo estadístico que utilizaría para reflejar las opiniones de hombres y mujeres al respecto (establezca los supuestos que considere necesarios); y justifique como plantearía un test para dirimir la cuestión de manera estadística. En una encuesta llevada a cabo por la consultora Synopsis (ver nota de prensa), se cuantifica este argumento utilizando la estimación puntual de las diferencias de proporciones:

> *... entre los 1485 casos el apoyo es levemente mayor entre los varones que entre las mujeres: el 55,6% por ciento de los hombres avaló la sanción del proyecto (el 28,3% estuvo en contra), mientras que hizo lo mismo el 51,6% de las mujeres (el 36,7% estuvo en contra).*

Utilice el test apropiado para dirimir si estas diferencias son significativas a un nivel del 5%, mencionando los supuestos que hace para poder correr el test (en la nota de prensa no se menciona como se compone la encuesta).

Test de Hipótesis

Definición: procedimiento estadístico (o regla de decisión cuyo riesgo es cuantificable) con el que para c/ realización $\underline{X} = \underline{x}$ (datos) decido si la evidencia empírica avala $\theta \in \Theta_0$ o $\theta \in \Theta_0^c$.

Setup

- Muestra Aleatoria $\underline{X} = \underline{x}$ procedente de un modelo (conjetura) $f_{\underline{X}}(\underline{x} | \theta)$
- Espacio de hipótesis
  - $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$
  - $H_1 : \theta \in \Theta_0^c \subset \Theta$

  $\Theta_0 \cap \Theta_0^c = \emptyset \wedge \Theta_0 \cup \Theta_0^c = \Theta$
- Tipo de Test
  - Unilateral
  - Bilateral

  estadístico de contraste $T(\underline{X}) = t \longrightarrow$ su distribución en el muestreo es conocida (al menos asintóticamente)

1. ¿Verdadero o falso? Justifique cada una de sus respuestas convenientemente.

   (a) El nivel de significación $\alpha(\theta)$ de un test es igual a la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta. Falso. Es la probabilidad de cometer error tipo I

   (b) Si un test con nivel de significación α rechaza la hipótesis nula, entonces la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta es igual a α. Falso

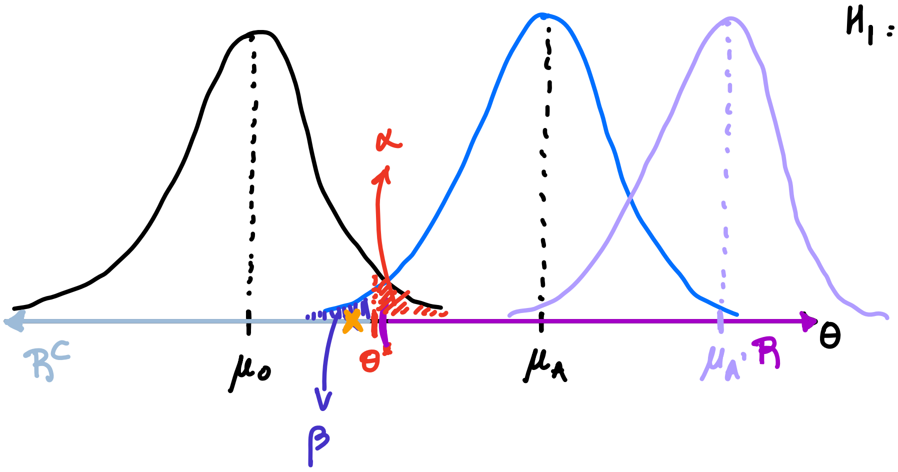
   (c) La probabilidad de que un test rechace la hipótesis nula incorrectamente (es decir, cuando es cierta) es igual a la potencia del test. Falso. $\to 1-\beta(\theta)$, donde $\beta(\theta)$ es la proba. de cometer error tipo II

   (d) Un error de tipo I ocurre cuando el test rechaza la hipótesis nula. incorrectamente
   ↳ Verdadero (parcialmente)

   (e) Si no logramos rechazar la hipótesis nula no podríamos aceptar la misma porque no estaríamos controlando la probabilidad de equivocarnos con esta decisión. Verdadero

$H_0 : \mu \leq \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$



$\Theta = \mathbb{R}$

$\Theta_0 = \{\theta : \theta \leq Q\}$

$\hookrightarrow \Theta_0^c = \{\theta : \theta > 0\}$

2. Considera $\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{iid}{\sim} N(\theta, \sigma^2 = 1)$. Queremos testear $H_0 : \theta \leq 0$ vs $H_1 : \theta > 0$ utilizando el estadístico $T(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}$ y la función de test:

$\mapsto T : \mathbb{R}^n \to \Theta$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } T(X_1, \ldots, X_n) \geq Q, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

(a) Si $Q = 0$ calcula la probabilidad de cometer el error tipo I de este test.

(b) Hallar probabilidad de cometer el error tipo II y su complemento (la potencia) (notar que estas cantidades dependerán de n, σ^2 y $\theta \in \Theta_1$)

(c) ¿Cómo cambia la probabilidad de cometer el ET I y la potencia del test a medida que incrementamos Q?.

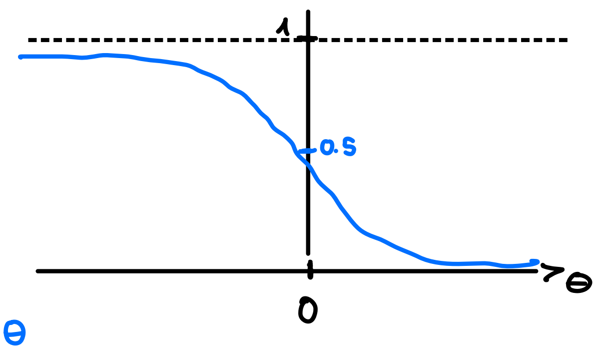
(d) Determina el valor de Q (la región de rechazo) para que el test tenga un tamaño $\alpha = 0.05$. Para este test, imagina que tomas una muestra de tamaño $n = 10$ y observas que $\bar{x} = 0.5$, ¿cuál es el p-valor asociado a esta muestra particular? ¿Rechazamos H_0 a un nivel del 5%? ¿Cómo interpretas el p-valor?

a). Voy a considerar cierta $H_0 \Rightarrow \theta \leq 0$

. Mi región de rechazo es $\{\theta : \theta > 0\}$

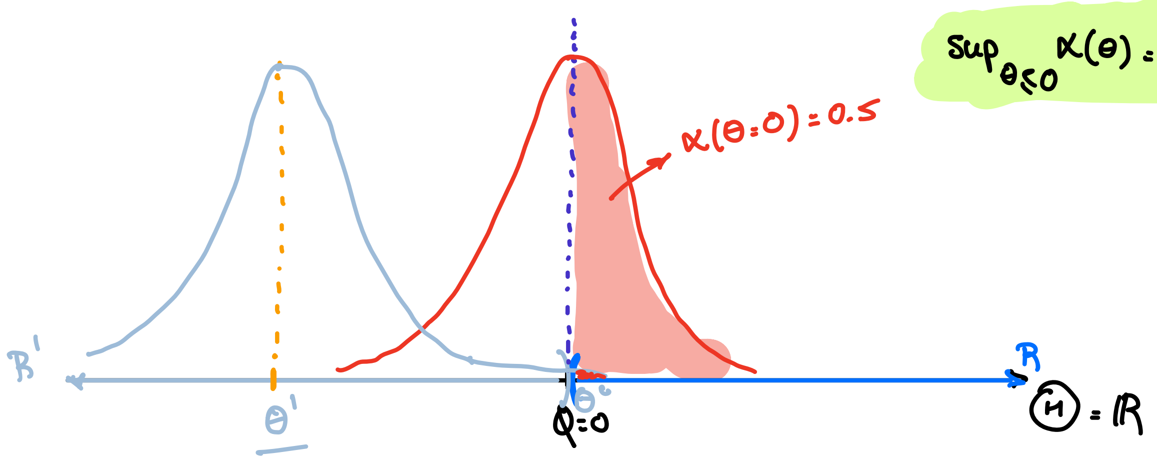
. $\alpha(\theta)$: probabilidad de cometer error tipo I

$$\alpha(\theta) = P_{\theta\leq 0}\left[T(\underline{X}) = \bar{X} \geq Q\right] = 1 - P_{\theta \leq 0}\left[T(\underline{X}) < Q\right]$$
$$= 1 - P_{\theta\leq 0}\left[\bar{X}_n < 0\right] \quad \bar{X}_n \sim N(\theta, \sigma^2/n)$$
$$= 1 - P_{\theta \leq 0}\left[\frac{\bar{X} - \theta}{1/\sqrt{n}} \leq \frac{-\theta}{1/\sqrt{n}}\right]$$
$$= 1 - P_{\theta \leq 0}\left[Z \leq -\theta\sqrt{n}\right]$$
$$= 1 - \underbrace{\Phi(-\theta\sqrt{n})}_{\text{es una función decreciente en } \theta}$$



El nivel de significación es creciente en θ, entonces podemos afirmar que la cota superior de $\alpha(\theta)$ es:

$$\sup_{\theta \leq 0} \alpha(\theta) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$



b) . Nos paremos en la premisa que H_A es correcta

$$\beta(\theta) = P_{\theta>0}\left[T(\underset{\sim}{x}) < Q\right] = P_{\theta>0}\left[\bar{X}_n < 0\right]$$

$$= P_{\theta>0}\left[\frac{\bar{X}_n - \theta}{1/\sqrt{n}} < \frac{-\theta}{1/\sqrt{n}}\right]$$

$$= P_{\theta>0}\left[Z < -\sqrt{n}\theta\right]$$

$$= \Phi\left(-\sqrt{n}\theta\right) \longrightarrow \text{es una función decreciente en } \theta$$

$$\Rightarrow 1-\beta(\theta) = 1-\Phi\left(-\theta\sqrt{n}\right) \longrightarrow \text{la potencia del test es una función creciente en } \theta$$

c)

$$\cdot\ \frac{\partial}{\partial Q}\alpha(\theta) = \frac{\partial}{\partial Q}\left[1-\Phi\left(\sqrt{n}(Q-\theta)\right)\right] = \frac{\partial}{\partial Q}\left[-\Phi\left(\sqrt{n}(Q-\theta)\right)\right]$$

$$= -\underbrace{f\left(\sqrt{n}(Q-\theta)\right)}_{>0} \cdot \underbrace{\sqrt{n}}_{>0} < 0$$

$\therefore$ A mayor $Q \Rightarrow\ < \alpha(\theta)$

$$\cdot\ \frac{\partial}{\partial Q}\left[1-\beta(\theta)\right] = \frac{\partial}{\partial Q}\left[1-\Phi\left(\frac{Q-\theta}{1/\sqrt{n}}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial Q}\left[-\Phi\left(\frac{Q-\theta}{1/\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= -\sqrt{n}\, f\left(\frac{Q-\theta}{1/\sqrt{n}}\right) < 0$$

$\therefore$ A mayor $Q \Rightarrow\ < 1-\beta(\theta)$

d) Donde selco el valor crítico Q para que el test tenga un tamaño $\alpha = 0.05$?

$$\alpha(\theta) = 1-\Phi_{\theta\leq 0}\left(\frac{Q-\theta}{1/\sqrt{n}}\right) = 0.05$$

$$-\Phi_{\theta\leq 0}\left(\frac{Q-\theta}{1/\sqrt{n}}\right) = -0.95$$

$$\Phi_{\theta\leq 0}\left(\frac{Q-\theta}{1/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$\frac{Q-\theta}{1/\sqrt{n}} = \Phi_{\theta\leq 0}(0.95) = 1.645$$

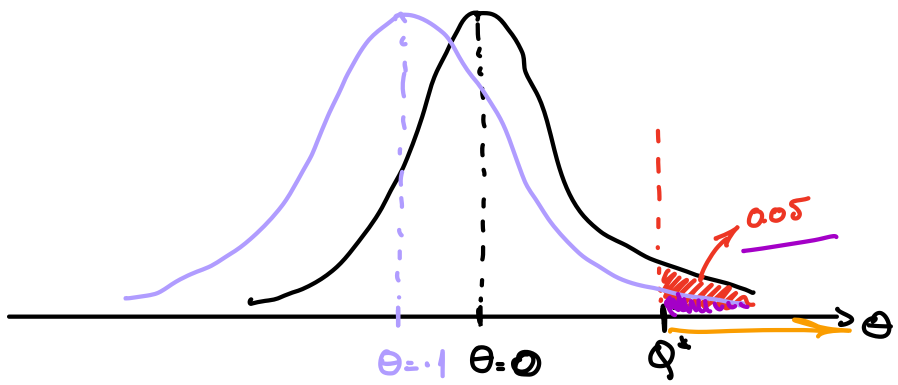
$$Q-\theta = \frac{1.645}{\sqrt{n}}$$

$$Q^* = \theta + \frac{1.645}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Si } \theta = 0 \Rightarrow Q^* = \frac{1.645}{\sqrt{n}} \Rightarrow \alpha(\theta) = 1 - \Phi_{\theta \leq 0}\left(\frac{\left(\frac{1.645}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi_{\theta \leq 0}(1.645)$$

$$= 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\text{Si } \theta = -1 \Rightarrow Q^* = -1 + \frac{1.645}{\sqrt{n}} \Rightarrow \alpha(\theta) = 1 - \Phi_{\theta \leq 0}\left(\frac{\left(-1 + \frac{1.645}{\sqrt{n}}\right) + 1}{\sqrt{n}}\right) = 0.05$$



$$\left.\begin{array}{l} n = 10 \\ \bar{x} = 0.5 \end{array}\right\} \text{p-value} = P_{\theta \leq 0}\left[Z \geq \frac{\bar{x} - \theta}{1/\sqrt{n}}\right] = 1 - P_{\theta \leq 0}\left[Z < \frac{\bar{x} - \theta}{1/\sqrt{n}}\right]$$

$$\leq 1 - P_{\theta \leq 0}\left[Z < \frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{n}}\right]$$

$$= 1 - P_{\theta \leq 0}\left[Z \leq \sqrt{n}\,\bar{x}\right]$$

$$= 1 - P_{\theta \leq 0}\left[Z \leq \underbrace{0.5 \times \sqrt{10}}_{1.5811}\right]$$

$$\approx 0.0569 \geq \alpha(\theta) = 0.05 \Rightarrow \text{no rechazo } H_0$$

- A mayor n $\Rightarrow$ p-value es c/vez menor caeteris paribus $\Rightarrow$ más fácil rechazar H_0

5. Sea $\{X_1, \ldots, X_8\} \overset{iid}{\sim} \text{Poiss}(\theta)$. Se quiere testear $H_0 : \theta \leq 0.5$ vs $H_1 : \theta > 0.5$. La zona de rechazo se define como $R = \{(X_1, \ldots, X_8) : T = \sum_{i=1}^{8} X_i \geq 8\}$ (Ayuda: $T \sim Pois(8\theta)$).

$$p(T = t) = \frac{(8\theta)^t e^{-8\theta}}{t!}$$

   (a) Computar la probabilidad de cometer el error tipo I.

   (b) Dejar indicada la función de potencia del test.

$$\alpha(\theta) = P_{\theta \leq 0.5}\left[T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{8} X_i \geq 8\right] = 1 - P_{\theta \leq 0.5}\left[T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{8} X_i < 8\right]$$

$$= 1 - P_{\theta \leq 0.5}\left[T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{8} X_i \leq 7\right]$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{7} \frac{(8\theta)^j e^{-(8\theta)}}{j!}$$

$$= 1 - e^{-8\theta} \sum_{j=0}^{7} \frac{(8\theta)^j}{j!}, \quad \text{para } \theta \leq 0.5$$

$$\text{Si } \theta = 0.5 \Rightarrow \alpha(\theta) = 1 - 0.949 = 0.051$$

(b) $\beta(\theta) = P_{\theta>0.5}\left[T(\underline{X})<8\right] = P_{\theta>0.5}\left[T(\underline{X})\leq 7\right]$

$$= \sum_{j=0}^{7} \frac{(8\theta)^j e^{-8\theta}}{j!}$$

$$\Rightarrow 1-\beta(\theta) = 1 - \sum_{j=0}^{7} \frac{(8\theta)^j e^{-8\theta}}{j!} \Bigg|_{\theta>0.5}$$