

Maestría en Econometría - UTDT

Examen Final - Matemática

Ejercicio 1.

Clasificar las siguientes formas cuadráticas, según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$Q(x, y, z) = x^2 + 9y^2 + z^2 + 2\alpha xy + xz + yz.$$

En primer lugar, para clasificar la forma cuadrática $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ para los distintos valores de α , es necesario encontrar la matriz asociada a Q (matriz A). En términos generales, la forma cuadrática Q puede ser escrita en términos de esta matriz A como:

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En particular, se tiene:

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \alpha & 9 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Luego, es necesario encontrar los menores principales dominantes de la matriz A :

$$\Delta_1 = 1.$$

$$\Delta_2 = 1 * 9 - \alpha\alpha$$

$$\Delta_2 = 9 - \alpha^2.$$

$$\Delta_3 = 1 \left(9 * 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) - \alpha \left(\alpha * 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\alpha * \frac{1}{2} - 9 * \frac{1}{2} \right)$$

$$\Delta_3 = 1 \left(9 - \frac{1}{4} \right) - \alpha \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \alpha - \frac{9}{2} \right)$$

$$\Delta_3 = 1 * \frac{35}{4} - \alpha^2 + \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{4} \alpha - \frac{9}{4}$$

$$\Delta_3 = -\alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha + \frac{13}{4}.$$

Se analiza cuándo es $\Delta_1 = 0$:

$$\Delta_1 = 1 > 0.$$

Se analiza cuándo es $\Delta_2 = 0$:

$$\Delta_2 = 0$$

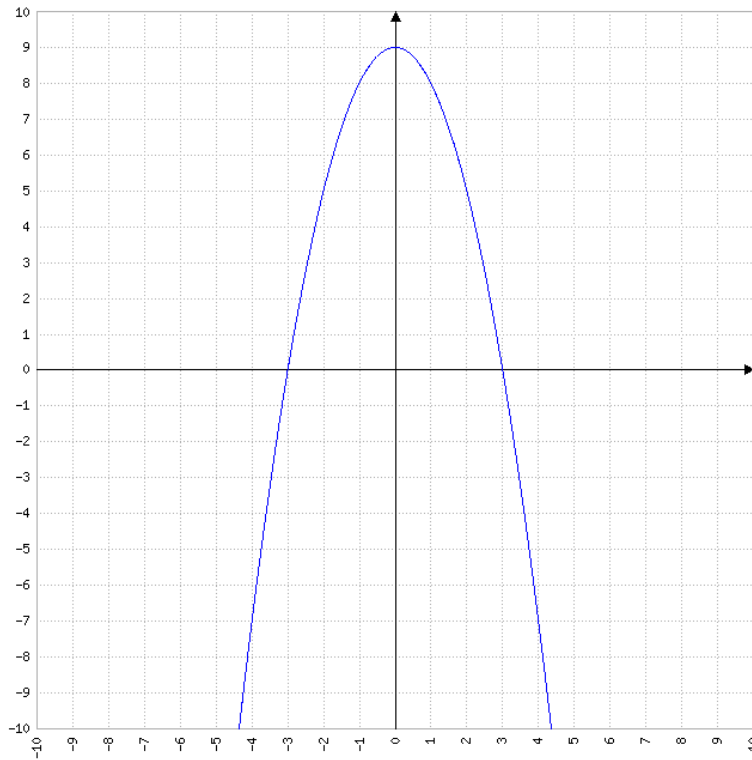
$$9 - \alpha^2 = 0$$

$$\alpha^2 = 9$$

$$\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{9}$$

$$|\alpha| = 3$$

$$\alpha = \pm 3.$$



Se analiza cuándo es $\Delta_3 = 0$:

$$\Delta_3 = 0$$

$$-\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{13}{2} = 0$$

$$(-1)\left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{13}{2}\right) = 0$$

$$\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{13}{2} = 0$$

$$\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{13}{2} = 0.$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{13}{2}\right)}}{2 \cdot 1}$$

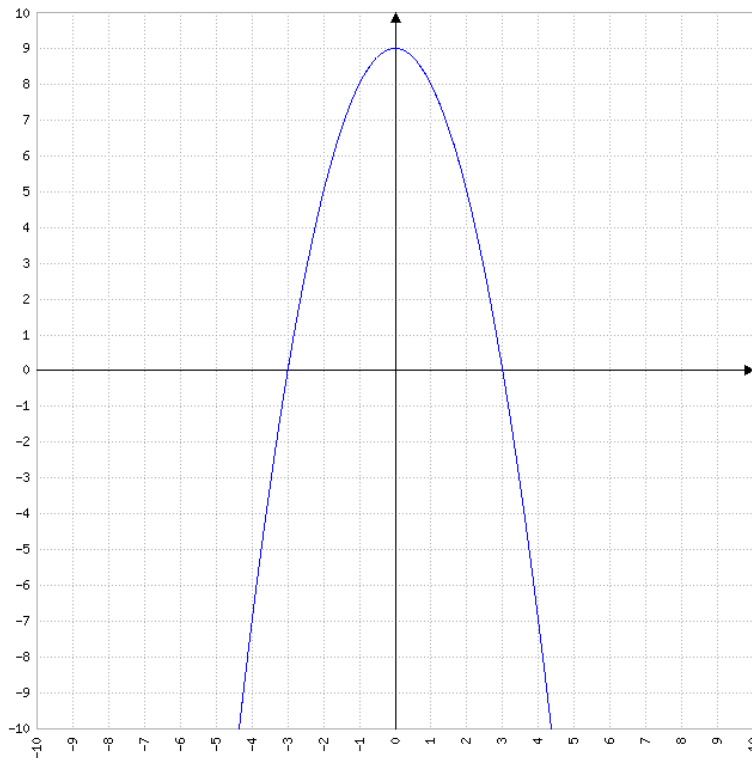
$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 26}}{2}$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{105}{4}}}{2}$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{105}}{2}}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{105}}{2}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4} = 2,8117.$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{105}}{2}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{105}}{4} = -2,3117.$$



Para analizar si la forma cuadrática Q es definida positiva, definida negativa o indefinida, se analizan, en primer lugar, los casos donde $\Delta_3 \neq 0$ (es decir, cuando $\alpha \neq 2,8117$ y $\alpha \neq -2,3117$):

- Si $\alpha < -3$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si $\alpha = -3$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si $-3 < \alpha < -2,3117$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si $-2,3117 < \alpha < 2,8117$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 > 0$.
- Si $2,8117 < \alpha < 3$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si $\alpha = 3$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si $\alpha > 3$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ y $\Delta_3 < 0$.

Para analizar si la forma cuadrática Q es semidefinida positiva, semidefinida negativa o indefinida, se analizan, en segundo lugar, los casos donde $\Delta_3 = 0$ (es decir, cuando $\alpha = 2,8117$ y $\alpha = -2,3117$):

- Si $\alpha = -2,3117$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$.
- Si $\alpha = 2,8117$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$.

Por lo tanto, la forma cuadrática $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es:

- definida positiva si $-2,3117 < \alpha < 2,8117$, ya que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 > 0$.
- semidefinida positiva si $\alpha = -2,3117$ o $\alpha = 2,8117$, ya que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 = 0$.
- indefinida si $\alpha < -2,3117$ o $\alpha > 2,8117$.

Ejercicio 2.

Considerar la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 4y_t = e^t + 1.$$

(a) Hallar todas las soluciones.

Se parte de saber que la solución general de una ecuación en diferencias son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a ésta más la solución particular:

$$y_t = y_t^h + y_t^p.$$

Siendo así, en primer lugar, se buscan las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 4y_t = 0.$$

Sea $y_t = r^t$, se tiene:

$$\begin{aligned} r^{t+2} - 5r^{t+1} + 4r^t &= 0 \\ r^t (r^2 - 5r + 4) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} r_1, r_2 &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ r_1, r_2 &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \\ r_1, r_2 &= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ r_1, r_2 &= \frac{5 \pm 3}{2} \\ r_1 &= \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4. \\ r_2 &= \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Entonces, la solución homogénea es la siguiente:

$$\begin{aligned} y_t^h &= C_1 4^t + C_2 1^t \\ y_t^h &= C_1 4^t + C_2 \cdot 1 \\ y_t^h &= C_1 4^t + C_2. \end{aligned}$$

En segundo lugar, dado que 1 es raíz (simple) de la ecuación $r^2 - 5r + 4 = 0$, se propone la siguiente solución particular:

$$y_t^p = k_1 e^t + k_2 t.$$

Resolviendo en la ecuación en diferencias, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & [k_1 e^{t+2} + k_2 (t+2)] - 5 [k_1 e^{t+1} + k_2 (t+1)] + 4 (k_1 e^t + k_2 t) = e^t + 1 \\
 & (k_1 e^{t+2} + k_2 t + 2k_2) - 5 (k_1 e^{t+1} + k_2 t + k_2) + 4k_1 e^t + 4k_2 t = e^t + 1 \\
 & k_1 e^{t+2} + k_2 t + 2k_2 - 5k_1 e^{t+1} - 5k_2 t - 5k_2 + 4k_1 e^t + 4k_2 t = e^t + 1 \\
 & k_1 e^{t+2} - 5k_1 e^{t+1} + 4k_1 e^t - 3k_2 t - 3k_2 = e^t + 1 \\
 & (e^2 - 5e + 4) k_1 e^t - 3k_2 = e^t + 1.
 \end{aligned}$$

Luego, se tiene que las constantes k_1 y k_2 , respectivamente, son iguales a:

$$\begin{aligned}
 & (e^2 - 5e + 4) k_1 e^t = e^t + 1 \\
 & k_1 = \frac{e^t}{(e^2 - 5e + 4)e^t} \\
 & k_1 = \frac{1}{e^2 - 5e + 4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3k_2 = 1 \\
 & k_2 = \frac{1}{-3} \\
 & k_2 = -\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Entonces, la solución particular es la siguiente:

$$y_t^p = \frac{e^t}{e^2 - 5e + 4} - \frac{t}{3}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y_t = C_1 4^t + C_2 + \frac{e^t}{e^2 - 5e + 4} - \frac{t}{3}.$$

(b) Hallar la única solución de la ecuación homogénea asociada que cumple con los datos iniciales $y_0 = 1$ e $y_1 = 10000$.

En primer lugar, se utilizan los datos iniciales $y_0 = 1$ e $y_1 = 10000$ en la solución general de ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
 & y_0 = 1 \\
 & C_1 4^0 + C_2 + \frac{e^0}{e^2 - 5e + 4} - \frac{0}{3} = 1 \\
 & C_1 * 1 + C_2 + \frac{1}{e^2 - 5e + 4} - 0 = 1 \\
 & C_1 + C_2 + \frac{1}{e^2 - 5e + 4} = 1 \\
 & C_1 + C_2 = 1 - \frac{1}{e^2 - 5e + 4} \\
 & C_2 = 1 - \frac{1}{e^2 - 5e + 4} - C_1.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & y_1 = 10000 \\
 & C_1 4^1 + C_2 + \frac{e^1}{e^2 - 5e + 4} - \frac{1}{3} = 10000 \\
 & 4C_1 + C_2 + \frac{e}{e^2 - 5e + 4} - \frac{1}{3} = 10000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4C_1 + C_2 &= 10000 - \frac{e}{e^2-5e+4} + \frac{1}{3} \\
4C_1 + C_2 &= \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Luego, reemplazando (1) en (2), se tiene:

$$\begin{aligned}
4C_1 + 1 - \frac{1}{e^2-5e+4} - C_1 &= \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4} \\
3C_1 &= \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4} - 1 + \frac{1}{e^2-5e+4} \\
3C_1 &= \frac{29998}{3} + \frac{1-e}{e^2-5e+4} \\
C_1 &= \frac{\frac{29998}{3} + \frac{1-e}{e^2-5e+4}}{3} \\
C_1 &= \frac{29998}{9} + \frac{1-e}{3(e^2-5e+4)} \cong 3333.
\end{aligned} \tag{3}$$

Y, por último, reemplazando (3) en (1) o en (2), se tiene:

$$\begin{aligned}
C_2 &= 1 - \frac{1}{e^2-5e+4} - \frac{29998}{9} - \frac{1-e}{3(e^2-5e+4)} \\
C_2 &= \frac{-29989}{9} + \frac{e-4}{3(e^2-5e+4)} \cong -3332.
\end{aligned} \tag{4'}$$

$$\begin{aligned}
4 \left[\frac{29998}{9} + \frac{1-e}{3(e^2-5e+4)} \right] + C_2 &= \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4} \\
\frac{11992}{9} + \frac{4-4e}{3(e^2-5e+4)} + C_2 &= \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4} \\
C_2 &= \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4} - \frac{11992}{9} - \frac{4-4e}{3(e^2-5e+4)} \\
C_2 &= \frac{-29989}{9} + \frac{e-4}{3(e^2-5e+4)} \cong -3332.
\end{aligned} \tag{4''}$$

Por lo tanto, la única solución de la ecuación homogénea asociada que cumple con los datos iniciales $y_0=1$ e $y_1=10000$ es:

$$y_t^h = 3333 * 4^t - 3332.$$

Ejercicio 3.

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar, si existen, todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema:

$$(A^{2023} B^{2022} - A^{2022} B^{2023}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admite infinitas soluciones.

Se sabe que, si $\det(A^{2023} B^{2022} - A^{2022} B^{2023}) = 0$, el sistema (homogéneo) dado admite infinitas soluciones.

En primer lugar, el sistema (homogéneo) dado se puede reexpresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A^{2022} (AI - IB) B^{2022} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A^{2022} (A - B) B^{2022} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A^{2022} \left[\begin{pmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] B^{2022} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A^{2022} \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1-k \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} B^{2022} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, se buscan los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se anula el determinante de esta matriz:

$$\begin{aligned} \det(A^{2022} (A - B) B^{2022}) &= 0 \\ [\det(A)]^{2022} \det(A - B) [\det(B)]^{2022} &= 0 \quad \text{por (*)} \\ \left[\begin{vmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right]^{2022} \begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1-k \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right]^{2022} &= 0. \end{aligned}$$

(*) siendo $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(ABC) = \det(A) \det(B) \det(C)$.

Entonces, este determinante se anula cuando $[\det(A)]^{2022} = 0$ o $\det(A - B) = 0$ o $[\det(B)]^{2022} = 0$, lo cual sucede cuando:

$$\begin{aligned} [\det(A)]^{2022} &= 0 \\ \det(A) &= \sqrt[2022]{0} \end{aligned}$$

$$\det(A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\{-(k+1) - k\} + [(k+1)k - 1] = 0$$

$$-[-(k+1 - k)] + k^2 + k - 1 = 0$$

$$-(-1) + k^2 + k - 1 = 0$$

$$1 + k^2 + k - 1 = 0$$

$$k^2 + k = 0$$

$$k(k+1) = 0$$

$$k_1 = 0.$$

$$k_2 = -1.$$

$$\det(A - B) = 0$$

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1-k \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1-k)(-k-1) = 0$$

$$-(-k-1 + k^2 + k) = 0$$

$$-(-1 + k^2) = 0$$

$$1 - k^2 = 0$$

$$k^2 = 1$$

$$\sqrt{k^2} = \sqrt{1}$$

$$|k| = 1$$

$$k_3 = 1.$$

$$k_4 = -1.$$

$$[\det(B)]^{2022} = 0$$

$$\det(B) = \sqrt[2022]{0}$$

$$\det(B) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2k - k) + [1 - 2(-1)] = 0$$

$$k + 1 + 2 = 0$$

$$k + 3 = 0$$

$$k_5 = -3.$$

Por lo tanto, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema dado admite infinitas soluciones son 0, -1, 1 y -3.

Ejercicio 4.

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, tal que $(3, 3, 0)$ es autovector de A .

(a) ¿Cuál es el valor de a ?

Como se sabe que $(3, 3, 0)$ es autovector de A , se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda I_{3 \times 3}) v_{3 \times 1} &= 0_{3 \times 1} \\
 \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3(3-\lambda) + 3 \\ -6 + 3(a-\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 9 - 3\lambda + 3 \\ -6 + 3a - 3\lambda \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 12 - 3\lambda \\ -6 + 3a - 3\lambda \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Luego, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 12 - 3\lambda = 0 \\ -6 + 3a - 3\lambda = 0 \end{cases}$$

Resolviendo, se tiene:

$$12 - 3\lambda = 0$$

$$3\lambda = 12$$

$$\lambda = \frac{12}{3}$$

$$\lambda = 4.$$

$$-6 + 3a - 3\lambda = 0$$

$$-6 + 3a - 3 \cdot 4 = 0$$

$$-6 + 3a - 12 = 0$$

$$3a - 18 = 0$$

$$3a = 18$$

$$a = \frac{18}{3}$$

$$a = 6.$$

Por lo tanto, el valor de a es 6.

(b) ¿Cuáles son todos los autovalores de A ?

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)[(3-\lambda)(6-\lambda) - 1(-2)] = 0$$

$$(1-\lambda)(18 - 3\lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 2) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 20) = 0.$$

Entonces, los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico de A :

$$1 - \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 1.$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0.$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

$$\lambda_3 = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Por lo tanto, los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = 4$.

(c) ¿Es A inversible?

A es inversible, ya que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20 \neq 0$, porque $\lambda_i \neq 0$, para $i = 1, 2, 3$.

(d) ¿Es A diagonalizable?

A es diagonalizable, ya que tiene n (3) autovalores distintos y, por lo tanto, los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable).

Ejercicio 5.

Sea A una matriz en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, de la que se sabe que la traza es igual a 11, el $\det(A) = 36$ y el $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$. En base a la información suministrada, hallar todos los números reales α , β , γ y δ tales que:

$$\alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A + \delta I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que $\text{tr}(A) = 11$, $\det(A) = 36$ y $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$.

En primer lugar, por teorema de la dimensión, se tiene:

$$\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) + \dim(\text{Img}(A - 2I_3)) = \dim(A - 2I_3)$$

$$\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) + \text{rg}(A - 2I_3) = \dim(A - 2I_3)$$

$$\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) + 2 = 3$$

$$\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 3 - 2$$

$$\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 1.$$

Luego, existe un vector v tal que $(A - 2I_3)v = 0$, por lo que 2 es autovalor de A .

En segundo lugar, se tiene:

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$11 = 2 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 11 - 2$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 9$$

$$\lambda_3 = 9 - \lambda_2.$$

(1)

En tercer lugar, se tiene:

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$36 = 2 \lambda_2 \lambda_3$$

$$\lambda_2 \lambda_3 = \frac{36}{2}$$

$$\lambda_2 \lambda_3 = 18.$$

(2)

Luego, reemplazando (1) en (2), se tiene:

$$\lambda_2 (9 - \lambda_2) = 18$$

$$9\lambda_2 - \lambda_2^2 = 18$$

$$\lambda_2^2 - 9\lambda_2 + 18 = 0.$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

$$\lambda_3 = \frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Entonces, A es diagonalizable, ya que tiene n (3) autovalores distintos ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 3$) y, por lo tanto, los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable).

Siendo así, la igualdad dada se puede expresar de la siguiente manera:

$$\alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A + \delta I_{3 \times 3} = 0_{3 \times 3}$$

$$\alpha (PDP^{-1})^3 + \beta (PDP^{-1})^2 + \gamma PDP^{-1} + \delta PP^{-1} = 0_{3 \times 3} \quad \text{por (*)}$$

$$\alpha PD^3 P^{-1} + \beta PD^2 P^{-1} + \gamma PDP^{-1} + \delta PP^{-1} = 0_{3 \times 3} \quad \text{por (**)}$$

$$P(\alpha D^3 + \beta D^2 + \gamma D + \delta I_{3 \times 3})P^{-1} = 0_{3 \times 3}$$

$$P^{-1}P(\alpha D^3 + \beta D^2 + \gamma D + \delta I_{3 \times 3})P^{-1}P = P^{-1}0_{3 \times 3}P \quad \text{por (***)}$$

$$I_{3 \times 3}(\alpha D^3 + \beta D^2 + \gamma D + \delta I_{3 \times 3})I_{3 \times 3} = 0_{3 \times 3}$$

$$\alpha D^3 + \beta D^2 + \gamma D + \delta I_{3 \times 3} = 0_{3 \times 3}.$$

$$(*) I_{3 \times 3} = PP^{-1}.$$

$$(**) (PDP^{-1})^n = PD^n P^{-1}.$$

$$(***) \text{ pre-multiplicando por } P^{-1} \text{ y pos-multiplicando por } P, \text{ a ambos lados de la igualdad.}$$

Reemplazando D por la matriz diagonal correspondiente, se tiene:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 6^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 216 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 216\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 27\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 36\beta & 0 \\ 0 & 0 & 9\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 6\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 3\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta & 0 & 0 \\ 0 & 216\alpha + 36\beta + 6\gamma + \delta & 0 \\ 0 & 0 & 27\alpha + 9\beta + 3\gamma + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ 216\alpha + 36\beta + 6\gamma + \delta = 0. \\ 27\alpha + 9\beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

Resolviendo (se utiliza [Symbolab](#)), se tiene:

$$\alpha = \frac{\gamma}{36},$$

$$\beta = \frac{-11\gamma}{36}.$$

$$\delta = -\gamma.$$

Por lo tanto, los números reales α , β , γ y δ que cumplen con la igualdad dada son $\frac{\gamma}{36}$, $\frac{-11\gamma}{36}$, γ y $-\gamma$, respectivamente.