Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 4:
Forma de Jordan y Formas Cuadráticas.

Ejercicio 1.

Ejercicio 8 (*).

Dada la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

q (x, y, z)= $ax^2 + ay^2 + (a - 1)\, z^2 + 2xy$*,*

donde a $\in \mathbb{R}$ *es fijo, clasificar q para los distintos valores de a.*

En primer lugar, para clasificar la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para los distintos valores de a, es necesario encontrar la matriz asociada a q (matriz A). En términos generales, la forma cuadrática q puede ser escrita en términos de esta matriz A como:

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En particular, se tiene:

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Luego, es necesario encontrar los autovalores de la matriz asociada A:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(a - 1 - \lambda)\, [(a - \lambda)(a - \lambda) - 1] = 0$$
$$(a - 1 - \lambda)\, [(a-\lambda)^2 - 1] = 0.$$

Entonces, los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico de A:

$$a - 1 - \lambda = 0$$
$$\lambda_1 = a - 1.$$

$$(a-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$(a-\lambda)^2 = 1$$
$$\sqrt{(a-\lambda)^2} = \sqrt{1}$$
$$|a-\lambda| = 1$$

a - λ= $\pm$1
λ= a $\mp$ 1
λ_2= a - 1.
λ_3= a + 1.

Se tiene que los autovalores de la matriz asociada A son: λ_1= a - 1, λ_2= a - 1 y λ_3= a + 1.

Por lo tanto, la forma cuadrática q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

- definida positiva si a $>$ 1, ya que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$.
- semidefinida positiva si a= 1, ya que λ_1= 0, λ_2= 0 y $\lambda_3 > 0$.
- definida negativa si a $<$ -1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$.
- semidefinida negativa si a= -1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y λ_2= 0.
- indefinida si -1 $<$ a $<$ 1, ya que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 > 0$.