Universidad Torcuato Di Tella
Master en Economía y Econometría
2019

Econometría
Problem Set 4: Heteroscedasticidad y autocorrelación

1. Sea el modelo:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha x_t + u_t, \qquad t = 1, 2, ..., n \\ y &= \alpha x + u \\ E(u/x) &= 0_n \\ E\left[uu^T/x\right] &= \beta.diag(xx^T) \end{aligned}$$

donde $\{u_t\}$ son variables aleatorias independientes condicionalmente Normales con media 0 y varianza βx_t^2. Nótese que para que efectivamente sean normales los errores se esta asumiendo que todas las observaciones del regresor son distintas de 0. Se desea estimar α con un estimador lineal insesgado. Sea un miembro de la clase de estimadores lineales en y, identificados por un vector real c :

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha} &= c^T y \\ &= \alpha c^T x + c^T u \end{aligned}$$

Para restringir la clase de estimadores lineales a los lineales insesgados:

$$\begin{aligned} E(\widetilde{\alpha}/x) &= \alpha c^T x + c^T E(u/x) \\ &= \alpha c^T x \\ &= \alpha \Leftrightarrow c^T x = 1 \end{aligned}$$

La varianza de este estimador es:

$$\begin{aligned} var(\widetilde{\alpha}/x) &= E\left[(\widetilde{\alpha} - E(\widetilde{\alpha}/x))\left(\widetilde{\alpha} - E(\widetilde{\alpha}/x)\right)^T/x\right] \\ &= E\left[\left(c^T u\right)\left(c^T u\right)^T/x\right] \\ &= c^T E\left[uu^T/x\right] c \\ &= \beta.c^T diag(xx^T)c \end{aligned}$$

El problema a resolver es hallar:

$$c^* \in \arg\min_c \left\{\beta.c^T diag(xx^T)c \;\; s.a: c^T x = 1\right\}$$

$$\mathcal{L} = \beta . c^T diag(xx^T)c - 2\lambda\left(c^T x - 1\right)$$

Las C.P.O. son

$$\begin{aligned}
\nabla_c \mathcal{L} &= \beta 2 diag(xx^T)c - 2\lambda x \\
D_\lambda \mathcal{L} &= -2\left(c^T x - 1\right) \\
& \left\{ \begin{array}{c} \beta 2 diag(xx^T)c^* - 2\lambda^* x = 0 \\ -2\left(c^{*T} x - 1\right) = 0 \end{array} \right. \\
& \left\{ \begin{array}{c} \beta diag(xx^T)c^* = \lambda^* x \\ c^{*T} x = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

La matriz diagonal es no singular. Luego, de la primer condición se obtiene:

$$c^* = \lambda^* \left(\beta diag(xx^T)\right)^{-1} x$$

De acuerdo a la segunda condición:

$$\begin{aligned}
c^{*T} x &= 1 \\
\left[\lambda^* \left(\beta diag(xx^T)\right)^{-1} x\right]^T x &= 1 \\
\lambda^* x^T \left(\beta diag(xx^T)\right)^{-1} x &= 1 \\
\lambda^* &= \left[x^T \left(\beta diag(xx^T)\right)^{-1} x\right]^{-1}
\end{aligned}$$

siempre y cuando este último escalar sea no nulo. Volviendo a la anterior ecuación,

$$\begin{aligned}
c^* &= \left[x^T \left(\beta diag(xx^T)\right)^{-1} x\right]^{-1} \left(\beta diag(xx^T)\right)^{-1} x \\
&= \left[x^T diag(xx^T)^{-1} x\right]^{-1} diag(xx^T)^{-1} x
\end{aligned}$$

Esta expresión se reduce a:

$$\begin{aligned}
diag(xx^T)^{-1} x &= \begin{bmatrix} \frac{1}{x_l^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_n^2} \end{bmatrix} x \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{x_l} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} \\
x^T diag(xx^T)^{-1} x &= x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{x_l} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} \\
&= n
\end{aligned}$$

$$c^* = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_l} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$$

Volviendo al problema,

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha} &= \widetilde{\alpha}^* = c^{*T}y \\
\widehat{\alpha} &= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_l} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}^T y \\
& \boxed{\widehat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{x_i}\right)}
\end{aligned}$$

Se puede ver claramente que el estimador hallado es el estimador gls. La transformación relevante consiste en dividir todas las unidades muestrales por la observación correspondiente del regresor. El modelo transformado es un modelo con sólo constante y variable dependiente

$$\frac{y_i}{x_i}$$

El estimador ols del nuevo modelo, que es el estimador gls, es para este modelo constante la media muestral de la variable dependiente, el resultado indicado.

2. Sea el modelo en los datos observados:

$$y_j = \beta^T x_j + u_j$$

Las propiedades del error en este modelo son:

$$\begin{aligned}
E(u_j/x) &= E\left(\sum_{i=1}^{n_j} u_i/x\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_j} E(u_i/x) \\
&= 0 \\
var(u_j/x) &= var\left(\sum_{i=1}^{n_j} u_i/x\right) \\
&= n_j\sigma_u^2 \\
&\Rightarrow \quad E(u.u^T/x) = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n_J \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La agregación ha generado heteroscedasticidad.

Si se toman promedios:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_j &= \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} u_i \\
E(\overline{u}_j/x) &= 0 \\
E(\overline{u}.\overline{u}^T/x) &= \sigma_u^2 \begin{bmatrix} n_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n_J^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

cambia el patrón pero persiste la heteroscedasticidad.

3. Se tiene el modelo

$$\begin{aligned}
y_t &= \beta y_{t-1} + u_t, & |\beta| < 1 \\
u_t &= \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, & |\theta| < 1
\end{aligned}$$

(a) El estimador ols de β es:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2} \\
&= \frac{\sum (\beta y_{t-1} + u_t)\, y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2} \\
&= \frac{\sum \beta y_{t-1}^2 + \sum u_t y_{t-1}}{\sum {y_{t-1}}^2} \\
&= \beta + \frac{\sum u_t y_{t-1}}{\sum {y_{t-1}}^2} \\
&= \beta + \frac{\left(\frac{\sum u_t y_{t-1}}{n}\right)}{\left(\frac{\sum {y_{t-1}}^2}{n}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p\lim \widehat{\beta} &= \beta + \frac{p\lim\left(\frac{\sum u_t y_{t-1}}{n}\right)}{p\lim\left(\frac{\sum {y_{t-1}}^2}{n}\right)} \\
&= \beta + \frac{Cov\,(y_{t-1}, u_t)}{Var\,(y_{t-1})}
\end{aligned}$$

Los momentos poblacionales son:

$$\begin{aligned}
Cov\left(y_{t-1}, u_t\right) &= E\left(y_{t-1} u_t\right) \\
&= E\left[y_{t-1}\left(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right)\right] \\
&= E\left[y_{t-1}\varepsilon_t\right] + \theta E\left[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}\right] \\
&= 0 + \theta E\left[\left(\beta y_{t-2} + u_{t-1}\right)\varepsilon_{t-1}\right] \\
&= \theta E\left[\beta y_{t-2}\varepsilon_{t-1}\right] + \theta E\left[u_{t-1}\varepsilon_{t-1}\right] \\
&= \theta E\left[\beta y_{t-2}\varepsilon_{t-1}\right] + \theta E\left[\left(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}\right)\varepsilon_{t-1}\right] \\
&= 0 + \theta E\left[\varepsilon_{t-1}^2\right] + \theta^2 E\left[\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}\right] \\
&= 0 + \theta E\left[\varepsilon_{t-1}^2\right] + 0 \\
&= \theta\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Dado que $|\beta| < 1$, se puede probar que la varianza de y_{t-1} es constante e igual a:

$$Var\left(y_{t-1}\right) = \gamma_0 = \frac{1 + 2\beta\theta + \theta^2}{1 - \beta^2}.\sigma_\varepsilon^2$$

Luego,

$$\begin{aligned}
p\lim\widehat{\beta} &= \beta + \frac{\theta\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \\
&= \beta + \frac{\theta}{\left(\frac{1+2\beta\theta+\theta}{1-\beta^2}\right)}
\end{aligned}$$

Como se ve,

$$p\lim\widehat{\beta} \neq \beta, \text{ cuando } \theta \neq 0$$