Inferencia Estadística - Guia 4

Nicolas Ferrer
e-mail: nicolas.ferrer.747@gmail.com

Agosto 2020

1 Ejercicio 1

1.1 Inciso a

Falso. El nivel de significación (α) es igual a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula dado que esta sea cierta, es decir, la probabilidad de cometer un error de tipo I.

1.2 Inciso b

Falso. No podemos cuantificar la probabilidad de que H_0 sea cierta, sólo la probabilidad de alcanzar conclusiones erróneas condicional en que esta sea cierta o no.

1.3 Inciso c

Falso. Ya definimos anteriormente a α como la probabilidad de cometer un error de tipo I. La potencia de un test es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando la alternativa es cierta, es decir, el complemento de la probabilidad de cometer un error de tipo II.

1.4 Inciso d

Verdadero (a medias). Un error de tipo I ocurre cuando se rechaza *erróneamente* la hipótesis nula, es decir, condicional en que ésta sea cierta.

1.5 Inciso e

Verdadero. Si elijo un nivel de significancia mas pequeño, lo cual hará más probable aceptar la hipótesis nula, debo enfrentar una probabilidad mas alta de estár comentiendo un error de tipo II.

2 Ejercicio 2

2.1 Inciso a

Para $Q = 0$, la probabilidad de cometer un error de tipo I es igual a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula si esta es cierta, es decir:

$$\alpha(\theta) = P_{\theta \leq 0}(\delta = 1) = P_{\theta \leq 0}(\bar{X} > 0)$$

Sabemos que $\frac{\bar{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, por lo tanto:

$$\alpha(\theta) = P_{\theta \leq 0}(\bar{X} > 0) = P_{\theta \leq 0}\left(\frac{\bar{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{0-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - P_{\theta \leq 0}\left(Z \leq -\theta\sqrt{n}\right) = 1 - \Phi_{\theta \leq 0}(-\theta\sqrt{n})$$

Donde Z es una variable normal estándar y Φ su CDF. Dado que $\alpha(\theta)$ es creciente en θ, podemos afirmar que la cota superior de $\alpha(\theta)$ es:

$$\sup_{\theta \leq 0} \alpha(\theta) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

2.2 Inciso b

Para hallar la potencia del test, primero estimamos la probabilidad de error de tipo II:

$$\beta(\theta) = P_{\theta>0}(\delta = 0) = P_{\theta>0}(\bar{X} < Q)$$

Utilizando una vez más la normalidad de la media muestral de variables normales:

$$\beta(\theta) = P_{\theta>0}\left(\frac{\bar{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{Q-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P_{\theta>0}\left(Z \leq \frac{Q-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi_{\theta>0}\left(\frac{Q-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

La potencia estará dada por $1 - \beta(\theta)$.

2.3 Inciso c

De los incisos anteriores, tenemos:

$$\alpha(\theta) = 1 - \Phi_{\theta\leq 0}\left(\frac{Q-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$1 - \beta(\theta) = 1 - \Phi_{\theta>0}\left(\frac{Q-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Dado que el término que resta en ambas expresiones es creciente en Q, podemos afirmar que incrementar Q eleva tanto la probabilidad de cometer un ET I como la potencia del test. Esto

2.4 Inciso d

Queremos encontrar el valor de Q tal que:

$$\alpha(\theta) = 1 - \Phi_{\theta\leq 0}\left((Q-\theta)\sqrt{n}\right) = 0.05$$

Sabemos que el máximo de $\alpha(\theta)$ se alcanza en $\theta = 0$, por lo tanto, el valor de Q que nos otorgue una significancia de 5% será aquel tal que:

$$Q_{\alpha=5\%} = \{Q : \Phi(Q\sqrt{n}) = 0.95\}$$

Dado que sabemos que el cuantil 0.95 de una distribución normal estándar es aproximadamente 1.645:

$$Q_{\alpha=5\%} \approx \frac{1.645}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

Ahora supon que observamos $\bar{x} = 0.5$ para una muestra de tamaño $n = 10$. Queremos calcular el p-valor, es decir, la probabilidad de observar un valor de $\bar{x}$ al menos tan grande como el observado bajo el supuesto de que se cumple H_0. En términos formales:

$$\sup_{\theta\leq 0} P(\bar{X} > 0.5)$$

Entonces, utilizando la normalidad de la media muestral:

$$P(\bar{X} > 0.5) = P\left(\frac{\bar{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{0.5-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{0.5-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Reemplazando $\sigma = 1$ y $n = 10$:

$$P(\bar{X} > 0.5) = P(Z > (0.5-\theta)\sqrt{10}) = 1 - \Phi((0.5-\theta)\sqrt{10})$$

Dado que esta expresión es creciente en θ, tenemos:

$$\sup_{\theta\leq 0} P(\bar{X} > 0.5) = 1 - \Phi(0.5\sqrt{10}) \approx 0.0569$$

Dado que el p-valor es mayor a 5%, no recharazíamos $H_0 : \theta \leq 0$. Notar que un mayor tamaño de muestra u observar un valor más grande de $\bar{x}$ resultaría en un p-valor más bajo y por lo tanto, nos llevaría a rechazar la hipótesis nula.

3 Ejercicio 3

3.1 Inciso a

Siguiendo lo visto en clase para contrastes de localización aproximados[1], podemos utilizar el siguiente estadístico para determinar la región de rechazo en este test bilateral:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{D}{\sim} N(0,1)$$

Dada la distribución de este estadístico, sabemos que:

$$P\left(\frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \geq z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$$

Por lo tanto, para $\alpha = 0.05$ y $p_0 = 1/2$, la región de rechazo estará dada por:

$$R = \left\{\hat{p} : |\hat{p} - 1/2| \geq z_{0.025}\sqrt{\frac{0.25}{n}}\right\}$$

3.2 Inciso b

Para calcular la potencia, primero calculamos la probabilidad de cometer error de tipo II como:

$$\beta(p) = P_{p\neq 1/2}(\hat{p} \notin R)$$

Entonces, de lo visto en el inciso anterior:

$$\beta(p) = P_{p\neq 1/2}\left(|\hat{p} - 1/2| \leq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

Y la potencia estará dada por $1 - \beta(p)$. Por lo tanto, si n crece, la región de no rechazo se hace más pequeña, $\beta(p)$ decrece y aumenta la potencia del test. A medida de que p se acerca a $1/2$, la varianza de $\hat{p}$ crece, con lo cual aumenta $\beta(p)$ y disminuye la potencia.

3.3 Inciso c

Para los datos provistos, calculamos el p-valor como:

$$\begin{aligned}
P_{p=1/2}(|\hat{p} - p| \geq 0.04) &= 2 * P_{p=1/2}\left(Z \geq \frac{0.04}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \\
&= 2 * P\left(Z \geq \frac{0.04 * 10}{\sqrt{0.25}}\right) \\
&= 2 * [1 - \Phi(0.8)] \approx 0.423
\end{aligned}$$

Con lo cual no rechazaríamos la hipótesis nula de $p = 1/2$ para $\alpha = 0.5$.

[1] Página 33 de Slide 7.

4 Ejercicio 4

Para obtener una expresión de la probabilidad de error de tipo I, tenemos que encontrar la distribución del estadístico $T = X_1X_2$ bajo $H_0 : \theta = 1$. Para ello:

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= P(X_1X_2 \leq t) = P\left(X_2 \leq \frac{t}{X_1}\right) \\
&= \int_0^1 P\left(X_2 \leq \frac{t}{X_1}\right) \underbrace{f_{X_1}(x)}_{=1} dx \\
&= \int_0^1 F(t/x)dx
\end{aligned}$$

Donde $f_{X_1}(x) = 1$ bajo $H_0 : X_1, X_2 \sim U(0, 1)$. Notar que:

$$F(t/x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t/x \geq 1 \text{ (dado que } F_{X_2}(x) = 1 \text{ si } x \geq 1) \\ t/x & \text{si } t/x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \int_0^1 F(t/x)dx \\
&= \int_0^t 1 \; dx + \int_t^1 t/x \; dx \\
&= t + [t\ln(x)]_{x=t}^1 \\
&= t - t\ln(t)
\end{aligned}$$

Entonces, podemos calcular la probabilidad de error de tipo I como:

$$\begin{aligned}
P(T \geq 3/4|\theta = 1) &= 1 - P(T \leq 3/4|\theta = 1) \\
&= 1 - F_T\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= 1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.034
\end{aligned}$$

Para calcular la probabilidad de error de tipo II, tenemos que calcular la función de distribución bajo $H_1 : \theta = 2$. En este caso $f(x) = 2x$, con lo cual, aplicando el mismo razonamiento que antes:

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \int_0^1 \underbrace{P\left(X_2 \leq \frac{t}{X_1}\right)}_{F_{X_2}(x)} \underbrace{f_{X_1}(x)}_{=2x} dx \\
&= \int_0^1 F(t/x)2x \; dx
\end{aligned}$$

En este caso:

$$F(t/x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t/x \geq 1 \text{ (dado que } F_{X_2}(x) = 1 \text{ si } x \geq 1) \\ (t/x)^2 & \text{si } t/x \leq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \int_0^1 F(t/x) 2x dx \\
&= \int_0^t 2x\ dx + \int_t^1 \left(\frac{t}{x}\right)^2 2x\ dx \\
&= t^2 + \left[2t^2 \ln(x)\right]_{x=t}^1 \\
&= t^2 - 2t^2 \ln(t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de error de tipo II será:

$$P(T \leq 3/4|\theta = 2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.886$$

5 Ejercicio 5

5.1 Inciso a

Dado que sabemos que $T \sim Pois(8\theta)$, queremos calcular la probabilidad asociada a un error de tipo I, es decir:

$$\alpha(\theta) = P_{\theta \leq 0.5}(T \geq 8) = 1 - P_{\theta \leq 0.5}(T \leq 7)$$

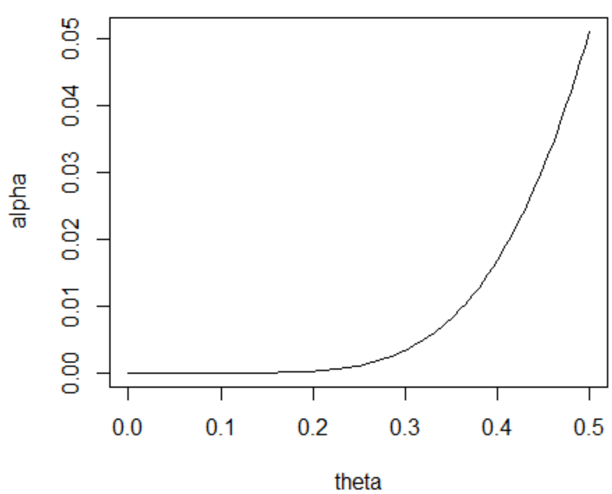
Para $T \sim Pois(8\theta)$, la CDF está dada por:

$$F_T(t) = e^{-8\theta} \sum_{i=1}^{t} \frac{(8\theta)^i}{i!}$$

Por lo tanto, la expresión que buscamos para $\alpha(\theta)$ es:

$$\alpha(\theta) = \left[1 - e^{-8\theta} \sum_{i=1}^{7} \frac{(8\theta)^i}{i!} |\ \theta \leq 0.5\right]$$

Si graficamos esta expresión en R^2, vemos que el máximo valor de α se alcanza para $\theta = 0.5$, con $\alpha \approx 0.05$.



[2]Puede utilizar el siguiente comando: `curve(1-ppois(7, 8*x), from = 0, to = 0.5, xlab = 'theta', ylab = 'alpha')`

Entonces, evaluando la expresión anterior en $\theta = 0.5 \Rightarrow \alpha(\theta) \approx 0.0511$.

5.2 Inciso b

Para la potencia del test, tenemos:

$$1 - \beta(\theta) = 1 - P_{\theta > 0.5}(T \leq 7)$$

Con lo cual encontramos la misma expresión que la correspondiente a la probabilidad de error tipo I pero con $\alpha > 0.5$:

$$1 - \beta(\theta) = \left[1 - e^{-8\theta} \sum_{i=1}^{7} \frac{(8\theta)^i}{i!} | \ \theta > 0.5 \right]$$

6 Ejercicio 6

Sea la función de riesgo para este test:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } T(\mathbf{X}) \geq Q, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para el error de tipo I, queremos calcular la probabilidad de que $\delta = 1$ condicional en $\theta \leq 0.5$, es decir:

$$\alpha(\theta) = P_{\theta \leq 0.5}(T(\mathbf{X}) \geq Q) = 1 - P_{\theta \leq 0.5}(T(\mathbf{X}) \leq Q - 1)$$

Dado que sabemos que $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{5} X_i \sim Bi(5, \theta)$:

$$\alpha(\theta) = 1 - \left[\sum_{i=1}^{Q-1} \binom{5}{i} \theta^i (1-\theta)^{5-i} \ \Big| \ \theta \leq 0.5 \right]$$

Para la función de potencia, tendremos:

$$1 - \beta(\theta) = 1 - P_{\theta > 0.5}(T(\mathbf{X}) \leq Q - 1)$$

Que será la misma expresión que la de $\alpha(\theta)$ pero evaluada en valores de θ mayores a 0.5.

7 Ejercicio 7

7.1 Inciso a

Para poder construir los tests de Wald y ratio de verosimiltudes, debemos encontrar expresiones para la verosimilitud, estimador máximo verosímil e Información de Fisher asociadas al modelo Exponencial. Dado que se especifica que $E(X) = \lambda^{-1}$, sabemos que estamos trabajando con el modelo especificado por la función de densidad:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Por lo tanto, para este modelo tenemos:

$$L(\lambda|\mathbf{x}) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

$$\ell(\lambda|\mathbf{x}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$i(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Test de Wald

Para construir un test de Wald, utilizamos nuestro conocimiento de la distribución asintótica del estimador máximo verosímil, el cual nos indica que:

$$Z = \sqrt{ni(\hat{\lambda})}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{F} N(0,1)$$

Por lo tanto, la región de rechazo para un test de tamaño α de dos colas estará dada por[3]:

$$R_\alpha = \left\{ \hat{\lambda} : Z = \sqrt{ni(\hat{\lambda})}|\hat{\lambda} - \lambda_0| \geq z_{\alpha/2} \right\}$$

Reemplazando $\hat{\lambda}$ e $i(\hat{\lambda})$:

$$R_\alpha = \left\{ \hat{\lambda} : Z = \frac{|(\bar{x}^{-1} - \lambda_0)|}{\bar{x}/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2} \right\}$$

Likelihood-ratio test

De lo visto en clase[4], sabemos que para familias exponenciales se cumple:

$$-2\log\Lambda(\mathbf{X}) = -2\left(\ell(\lambda_0|\mathbf{X}) - \ell(\hat{\lambda}|\mathbf{X})\right) \xrightarrow{F} \chi_1^2$$

Por lo cual la región de rechazo será:

$$R_\alpha = \left\{ \mathbf{X} : -2\left(\ell(\lambda_0|\mathbf{X}) - \ell(\hat{\lambda}|\mathbf{X})\right) \geq q_\alpha \right\}$$

Donde q_α es el cuantil α de una distribución χ_1^2. Reemplazando la función de log-verosimilitud y operando, obtenemos:

$$R_\alpha = \{\mathbf{X} : -2\left[n(\ln(\lambda_0\bar{x}) - \lambda_0\bar{x} + 1)\right] \geq q_\alpha\}$$

7.2 Inciso b

Supon que observamos:

$$n = 50$$
$$\bar{x} = 3$$
$$\lambda_0 = 0.4$$

Para estos valores, el estadístico del **test de Wald** es igual a:

$$Z = \frac{|1/3 - 0.4|}{3/\sqrt{50}} \approx 0.157$$

Si $\alpha = 0.05$ tal que $z_{0.975} \approx 1.96$, no rechazamos la hipótesis nula.

Por otro lado, el estadístico del **LRT** será:

$$-2[50(\ln(0.4 * 3) - 0.4 * 3 + 1)] \approx 1.767$$

Si $\alpha = 0.05$ tal que $q_{0.95} \approx 3.84$, no rechazamos la hipótesis nula.

[3]Notar que en este caso, $z_{\alpha/2}$ indica el cuantil tal que $\alpha/2\%$ de los valores de una distribución normal yacen a la derecha.

[4]Página 50 de Slide 7.

8 Ejercicio 8

Sea μ_A el puntaje de la encuesta en la población de empresarios argentinos. Planteamos como hipótesis nula que $\mu_A \leq 4$. De esta manera, rechazar la hipótesis nula es un argumento a favor de que los empresarios argentinos se preocupan más que los chilenos por la justicia social. Entonces, planteamos el test:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_A \leq 4 \\ H_1: & \mu_A > 4 \end{cases}$$

Sea $\bar{X}$ la media muestral del resultado de las encuestas realizadas. Entonces, utilizando la normalidad asintótica de la media muestral $\bar{X}$, planteamos el estadístico:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{F} N(0,1)$$

Dado que desconocemos el verdadero valor de σ, utilizamos el siguiente estadístico T para realizar el test:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \xrightarrow{F} t_{n-1}$$

Para los valores provistos, tenemos:

$$T = \frac{4.27 - 4}{1.32/\sqrt{200}} \approx 2.89$$

Sea $q_{0.95}$ el cuantil 0.95 de una distribución t_{199}, tenemos $q_{0.95} \approx 1.65$. Dado que $T > q_{0.95}$, rechazamos H_0.

9 Ejercicio 9

Antes de empezar, repasemos los conceptos de *sensibilidad* y *especificidad*.
Sensibilidad: Probabilidad de que sujeto enfermo tenga un resultado positivo en la prueba. Es decir,

$$Sensibilidad = \frac{VP}{VP + FN}$$

Especificidad: Probabilidad de que sujeto sano tenga un resultado negativo en la prueba. Es decir,

$$Especificidad = \frac{VN}{VN + FP}$$

9.1 Inciso a

Utilizando la ayuda provista, definimos las variables aleatorias:

- $\{X_i\}_{i=1}^n \overset{iid}{\sim} Bin(\theta_X)$: secuencia de variables aleatorias que representa el resultado del test de COVID-19 de la población de contagiados. Entonces, θ_X es la proporción de resultados positivos en la población de contagiados, es decir, la *sensibilidad*.

- $\{Y_i\}_{i=1}^m \overset{iid}{\sim} Bin(\theta_Y)$: secuencia de variables aleatorias que representa el resultado del test de COVID-19 de la población de sanos. Entonces, θ_Y es la proporción de resultados positivos en la población de sanos, es decir, el complemento de la *especificidad*.

9.2 Inciso b

Si tuviésemos un medio alternativo de confirmación que nos permitiese identificar una muestra "certera" de contagiados y sanos, simplemente podríamos utilizar el estimador máximo verosímil de θ, es decir, la proporción de resultados positivos en cada muestra.

Por otro lado, para realizar estimación por intervalos podemos utilizar pivotes aproximados de Wald o estimación por método máximo verosímil. No obstante, necesitaríamos que la muestra sea considerablemente grande, dado que idealmente esperaríamos que los valores de θ se acerquen a los extremos 0 o 1 si el test tiene un comportamiento deseable.

9.3 Inciso c

Si queremos encontrar un test que nos asegure una sensibilidad mayor a 990 por cada mil testeados, propondríamos el test:

$$\begin{cases} H_0: & \theta_X \leq 0.99 \\ H_1: & \theta_X > 0.99 \end{cases}$$

De esta manera, rechazar la hipótesis nula es un argumento a favor de que la *sensibilidad* es mayor a 990 por mil.

Si queremos encontrar un test que nos asegure una especificidad mayor a 950 por cada mil testeados, propondríamos el test:

$$\begin{cases} H_0: & (1-\theta_Y) \leq 0.95 \\ H_1: & (1-\theta_Y) > 0.95 \end{cases}$$

De esta manera, rechazar la hipótesis nula es un argumento a favor de que la *especificidad* es mayor a 950 por mil.

9.4 Inciso d

Para resolver este ejercicio utilizamos un test de Wald. Recordemos que para un test de Wald de 1 cola de tamaño α, la región de rechazo será:

$$R_\alpha = \left\{ \hat{\theta} : Z = \sqrt{ni(\hat{\theta})}(\hat{\theta} - \theta_0) \geq z_\alpha \right\}$$

Recordemos que para el modelo binomial, el EMV y la Información de Fisher son iguales a:

$$\hat{\theta} = \bar{X}$$
$$i(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

<u>Test de Sensibilidad</u>
Para $n = 500$ y $\bar{X} = 0.995$, el estadístico de Wald será igual a:

$$Z = \sqrt{\frac{500}{0.995(0.005)}}(0.995 - 0.99) \approx 1.58$$

De acuerdo al valor de este estadístico, no deberíamos rechazar la hipótesis nula para un test de tamaño $\alpha = 0.05$, dado que $z_{0.95} \approx 1.64$.

<u>Test de Especificidad</u>
Para $n = 300$ y $(1 - \bar{Y}) = 0.998$, el estadístico de Wald será igual a:

$$Z = \sqrt{\frac{300}{0.998(0.002)}}(0.998 - 0.95) \approx 18.6$$

De acuerdo al valor de este estadístico, deberíamos rechazara la hipótesis nula incluso para un test de tamaño $\alpha = 0.01$, dado que $z_{0.99} \approx 2.32$.

De acuerdo a nuestro análisis, el test satisface los requerimientos de ANMAT en términos de *especificidad*, pero no así en términos de *sensibilidad*. No obstante, nuestras conclusiones dependen del tamaño de los tests utilizados y el supuesto de que la población es lo suficientemente grande como para justificar que las contrapartes muestrales de los parámetros se distribuyen normalmente. Este último supuesto es cuestionable, particularmente en el caso del análisis de especificidad.

10 Ejercicio 10

Sean μ_C y μ_{SC} la probabilidad de fraude estimada por las poblaciones de auditores que tienen y no tienen acceso a información sobre flujos de caja de empresas fraudulentas respectivamente. Dado que nos interesa analizar si tener acceso a información de flujos de caja de mejora la capacidad de reconocimiento de fraude, podemos plantear el test de hipótesis como:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_C - \mu_{SC} \leq 0 \\ H_1: & \mu_C - \mu_{SC} > 0 \end{cases}$$

Es decir, nuestra hipótesis nula es que observar flujos de caja no incrementa el reconocimiento de fraude. Dado que los 36 auditores que observaron flujos de caja son distintos de los 36 auditores que no lo hicieron, podemos asumir que las muestras son independientes y utilizar el estadístico provisto en la página 37 del Slide 7:

$$Z = \frac{\bar{X}_C - \bar{X}_{SC}}{\sqrt{\frac{S_C^2}{n} + \frac{S_{SC}^2}{m}}}$$

En nuestro caso:

$$\begin{gathered} \bar{X}_C = 66.21,\ S_C = 22.93 \\ \bar{X}_{SC} = 47.56,\ S_{SC} = 27.56 \\ n = 36,\ m = 36 \end{gathered}$$

Reemplazando:

$$Z \approx 3.12$$

Por lo tanto, para un test de tamaño $\alpha = 0.05$ ($z_{0.95} \approx 1.645$), rechazaríamos la hipótesis nula de que observar flujos de caja no aporta a la capacidad de reconocer fraude.

11 Ejercicio 11

11.1 Inciso a

Sea $\{X_i\} \sim N(\mu, \sigma^2)$ la secuencia de variables aleatorias que representan la generación diaria de energía del nuevo molino de viento. Dado que asumimos que se considera una mayor generación de poder como algo positivo, tiene sentido realizar un test unilateral de la forma:

$$\begin{cases} H_0: & \mu < 800 \\ H_1: & \mu \geq 800 \end{cases}$$

De esta manera, rechazar la hipótesis nula es un argumento a favor de la capacidad de generación del nuevo molino. Dado que se trata de una población normal con varianza desconocida, podemos utilizar el estadístico:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Por lo tanto, definimos la región de rechazo de tamaño α como:

$$R_\alpha = \left\{ \bar{X} : \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > q_\alpha \right\}$$

Donde $q_\alpha : P(t_{n-1} > q_\alpha) = \alpha$. Reemplazando $\mu_0 = 800$, $S = 120$, $n = 100$ y $t_{99}(0.05) \approx 1.66$:

$$R_{\alpha=5\%} = \left\{ \bar{X} : \frac{\bar{X} - 800}{120/10} > 1.66 \right\}$$

Por lo tanto, el valor mínimo observado de $\bar{X}$ tal que se rechaza H_0 para este test es:

$$\bar{X}^* = 1.66 * 12 + 800 \approx 820$$

11.2 Inciso b

Para este test, la probabilidad de cometer error de tipo II si la media poblacional fuese $\mu = 820$ es igual a:

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= P_{\mu=820}\left(\bar{X} \leq 820\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 820}{120/10} \leq \frac{820 - 820}{120/10}\right) \\ &= P(T \leq 0) \end{aligned}$$

Dado que $T \sim t_{99}$, $P(T \leq 0) = F_T(0) = 0.5$.

11.3 Inciso c

A diferencia del accionista de la empresa, podríamos imaginar que el veedor externo quiere decidir si dejar entrar a la empresa o no a la licitación. En este sentido, está interesado en verificar si la capacidad de generación promedio del molino se encuentra por debajo de los 800 kilovatios diarios, en cuyo caso declinaría la participación de la empresa. Por lo tanto, plantearía el test unilateral:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \geq 800 \\ H_1 : & \mu < 800 \end{cases}$$

La región de rechazo para un test de tamaño $\alpha = 0.05$ será:

$$R_{\alpha=5\%} = \left\{ \bar{X} : \frac{\bar{X} - 800}{120/10} < 1.66 \right\}$$

El límite superior por debajo del cual se afirma que la empresa no es apta para participar de la licitación será:

$$\bar{X}^* \approx 820$$

11.4 Inciso d

Para este escenario, la probabilidad de error de tipo II asumiendo que $\mu = 770$ será[5]:

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= P_{\mu=770}\left(\bar{X} \geq 820\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 770}{120/10} \leq \frac{820 - 770}{120/10}\right) \\ &= 1 - P(T \leq 4.16) = 1 - F_T(4.16) \approx 0.00003 \end{aligned}$$

[5] Dado que trabajamos con una distribución continua, aproximamos la desigualdad estricta por desigualdad débil.

12 Ejercicio 12

Sea $\{X_i\} \sim N(\mu = 1.6, \sigma^2 = 0.05^2)$ la secuencia de variables aleatorias que representa el diámetro de los cables producidos. Tenemos una muestra de tamaño $n = 16$ para la cual $\bar{X} = 1.615$ y $S = 0.086$.

12.1 Inciso a

Nos interesa testear:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 1.6 \\ H_1: & \mu \neq 1.6 \end{cases}$$

Dado que partimos del supuesto de normalidad y varianza conocida, podemos utilizar el estadístico:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Por lo tanto, construimos la región de rechazo de tamaño α para este test de dos colas:

$$R_\alpha = \left\{ \bar{X} : \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2} \right\}$$

Donde $z_\alpha : P(Z > z_\alpha) = \alpha$. Reemplazando $\mu_0 = 1.6$, $\sigma = 0.05$, $n = 16$ y $z_{0.05} \approx 1.645$:

$$R_{\alpha=10\%} = \left\{ \bar{X} : \frac{|\bar{X} - 1.6|}{0.0125} \geq 1.645 \right\}$$

Para $\bar{X} = 1.615$, tenemos:

$$\frac{|1.615 - 1.6|}{0.0125} = 1.2 \leq 1.645$$

Con lo cual no rechazamos H_0 para un test de significancia $\alpha = 10\%$. Para encontrar el menor nivel de significación tal que se rechace la hipótesis nula, sólo debemos buscar el valor de α tal que $z_{\alpha/2} = 1.2$, es decir:

$$1 - \Phi(1.2) = \alpha/2$$
$$1 - 0.885 = \alpha/2 \Rightarrow \alpha^* \approx 0.23$$

Notar que este valor de α es equivalente al p-valor asociado a $\bar{X} = 1.615$.

12.2 Inciso b

Queremos testear:

$$\begin{cases} H_0: & \sigma \leq 0.05 \\ H_1: & \sigma > 0.05 \end{cases}$$

Siguiendo lo visto en clase para contrastes sobre σ^2 en poblaciones normales[6], proponemos el estadístico:

$$\chi = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Con lo cual definimos la región de rechazo de tamaño α como:

$$R_\alpha = \left\{ S^2 : \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > q_\alpha \right\}$$

Donde q_α es tal que $P(\chi^2_{n-1} > q_\alpha) = \alpha$. Reemplazando $S = 0.086$, $\sigma_0 = 0.05$, $n = 16$:

$$\chi = \frac{15 * (0.086^2)}{0.05^2} \approx 44.3$$

Con lo cual, para $q_{0.1} = 22.3$, rechazamos la hipótesis nula.

[6] Ver página 30 de Slide 7.

13 Ejercicio 13

Sea $\{X_i\} \sim Ber(p)$ la secuencia de variables aleatorias que representa la capacidad de los clientes de distinguir vino de jugo de uva congelado. Nos interesa testear:

$$\begin{cases} H_0: & p \leq 0.09 \\ H_1: & p > 0.09 \end{cases}$$

La regla de decisión propuesta se puede expresar como la región de rechazo: $R = \{\hat{p} : \hat{p} > 0.14\}$. Para resolver este ejercicio, proponemos utilizar el siguiente estadístico de contraste:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

13.1 Inciso a

Para una muestra de tamaño $n = 100$ queremos calcular:

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= P_{p \leq 0.09}(\hat{p} > 0.14) \\ &= P_{p \leq 0.09}\left(Z > \frac{0.14 - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \\ &= 1 - P_{p \leq 0.09}\left(Z \leq \frac{0.14 - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{0.14 - 0.09}{\sqrt{0.09(0.91)/100}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(1.747) \approx 0.04 \end{aligned}$$

Entonces, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando esta es verdadera para esta regla de decisión es de aproximadamente el 4%.

13.2 Inciso b

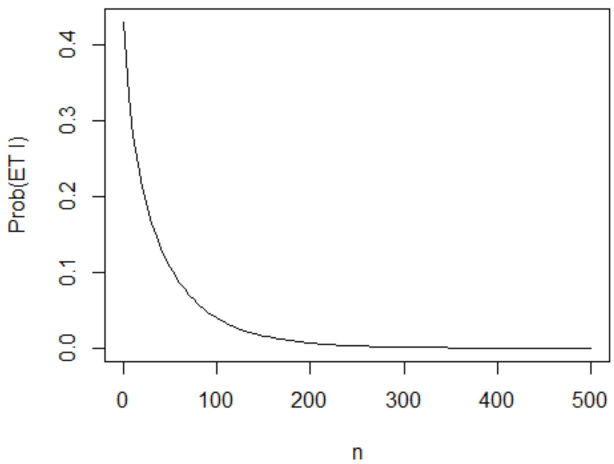
Para una muestra de $n = 400$, tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= 1 - P\left(Z \leq \frac{0.14 - 0.09}{\sqrt{0.09(0.91)/400}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(3.494) \approx 0.0002 \end{aligned}$$

A medida que aumenta n, la varianza de la proporción muestral utilizada para realizar el contraste decrece, haciendo más concluyente cualquier inferencia realizada en base al mismo. El hecho de que $n >> 0$ nos permite intuir que el haber observado un valor de $\hat{p}$ que nos lleve a rechazar la hipótesis nula se relaciona con el hecho de que la verdadera proporción en la población es mayor a 0.09, y no meramente a la varianza del estadístico.

Para verlo en términos gráficos, graficamos $\alpha(p)$ como función de n[7]:

[7] En R: `curve(1-pnorm(0.05/sqrt(0.09*0.91/x)), from = 1, to = 500, xlab = 'n', ylab = 'Prob(ET I)')`



13.3 Inciso c

Queremos calcular:

$$\begin{aligned}\beta(p) &= P_{p=0.2}(\hat{p} \leq 0.14) \\ &= P_{p=0.2}\left(Z \leq \frac{0.14 - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{0.14 - 0.2}{\sqrt{0.2(0.8)/100}}\right) \approx 0.066\end{aligned}$$

13.4 Inciso d

Ahora se propone la siguiente región de rechazo: $R = \{\hat{p} : \hat{p} > 0.16\}$.

13.4.1 Parte i

Al elevar el umbral a partir del cual rechazamos la hipótesis nula, la probabilidad de rechazar H_0 condicional en que H_0 sea cierta será menor que en el inciso a).

13.4.2 Parte ii

Al elevar el umbral a partir del cual rechazamos la hipótesis nula, la probabilidad de no rechazar H_0 cuando H_1 es cierta será mayor que en el inciso c).

14 Ejercicio 14

Sea $\{X_i\} \sim N(\mu, \sigma)$ la secuencia de variables aleatorias que representa las mediciones de resistencia a la compresión de las mezclas de ceniza pulverizadas producidas por esta empresa.

14.1 Inciso a

El ente regulador plantea el siguiente test de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0: & \mu \leq 1300 \\ H_1: & \mu > 1300 \end{cases}$$

Nuestra valoración sobre el test propuesto puede variar según consideremos la decisión del ente regulador como una de *aprobación* o una de *rechazo*. En el primer caso, el test propuesto sería correcto, dado que el ente supondría que una muestra no es apta a menos que se pruebe lo contrario. En cambio, si la decisión del ente fuese una de *rechazo*, el test opuesto sería más apto, ya que buscaríamos descartar aquellas muestras que no cumplen con los estándares propuestos.

Para el test propuesto, las consecuencias de los errores de tipo I y II serían las siguientes:

- **Error Tipo I**: Significaría afirmar que la mezcla cumple con la normativa especificada cuando en realidad no lo hace. Este debería ser el principal tipo de error que queremos evitar, dado que es el que podría resultar en la utilización de un producto no apto para uso.

- **Error Tipo II**: Significaría no aprobar una mezcla que resulta apta para uso. En este caso, el costo sería de carácter económico, pero no estaríamos generando una situación de inseguridad por el uso de un producto de baja calidad.

14.2 Inciso b

Se propone la región de rechazo: $R = \{\bar{X} : \bar{X} > 1331.26\}$. Dado que sabemos que la población de mediciones de resistencia a la compresión se distribuye Normal con desvío $\sigma = 60$, proponemos el estadístico:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Queremos encontrar el nivel de este test, es decir, la probabilidad de cometer error de tipo I:

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &= P_{\mu \leq 1300}(\bar{X} > 1331.26) \\ &= P_{\mu \leq 1300}\left(Z > \frac{1331.26 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - P_{\mu \leq 1300}\left(Z \leq \frac{1331.26 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Reemplazando $\sigma = 60$, $n = 20$, y utilizando que $\alpha(\mu)$ es creciente en μ:

$$\sup_{\mu \leq 1300} \alpha(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{1331.26 - 1300}{60/\sqrt{20}}\right) \approx 0.01$$

14.3 Inciso c

Para este inciso, nos interesa calcular la *potencia* del test propuesto, es decir, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula condicional en que H_1 cierta ($\mu = 1350$ cae dentro del espacio de parámetros correspondiente a H_1). Ello es lo mismo que calcular el complemento de la probabilidad de error de tipo II, es decir:

$$\begin{aligned} 1 - \beta(\mu) &= 1 - P_{\mu = 1350}(\bar{X} \leq 1331.26) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1331.26 - 1350}{60/\sqrt{20}}\right) \approx 0.92 \end{aligned}$$

Intuitivamente, explicaríamos a los empresarios que a pesar de que el proceso productivo utilizado es tal que el requisito del ente regulador se supera con cierto margen (dado $\mu = 1350$), existe aproximadamente un 8% de chances que, dada la varianza presente en el proceso productivo, la muestra de 20 paquetes represente una tirada mala para la cual no se supere la prueba impuesta por el regulador.

14.4 Inciso d

Como ya anticipásemos en el inciso c), calculamos la *potencia* del test para $\mu = 1350$.

14.5 Inciso e

Dado que tomamos $\mu_0 = 1300$, $\mu = 1350$ y $\sigma = 60$ como valores fijos, sólo podemos hacer variar Q (el valor que determina la región de rechazo) y n (el tamaño de la muestra utilizada para el test). Entonces, queremos encontrar un par $\{Q, n\}$ tal que:

$$\sup_{\mu \leq 1300} \alpha(\mu) = 0.01$$
$$1 - \beta(\mu) = 0.95$$

Para las cuentas obtenidas en los incisos b) y c), ello implica encontrar valores de $\{Q, n\}$ tal que:

$$1 - \Phi\left(\frac{Q - 1300}{60/\sqrt{n}}\right) = 0.01$$
$$1 - \Phi\left(\frac{Q - 1350}{60/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Entonces, queremos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\frac{Q - 1300}{60/\sqrt{n}} = z_{0.99}$$
$$\frac{Q - 1350}{60/\sqrt{n}} = z_{0.05}$$

Donde $z_\alpha : \Phi(z_\alpha) = \alpha$. Utilizando $z_{0.99} = 2.326$ y $z_{0.05} \approx 1.645$, obtenemos:

$$n = \left(\frac{6}{5}(z_{0.99} - z_{0.05})\right)^2 \approx 23$$
$$Q = 1300 + \frac{z_{0.99}}{\sqrt{n}/60} \approx 1329$$

Por lo tanto, elevando la muestra y reduciendo levemente el límite de rechazo podemos obtener los valores de significatividad y potencia deseados.

15 Ejercicio 15

En este ejercicio, nos interesa testear la hipótesis nula de que la proporción de mujeres a favor de la ILE es mayor que la de hombres:

$$\begin{cases} H_0 : & p_M \geq p_H \\ H_1 : & p_M < p_H \end{cases}$$

De esta manera, rechazar la hipótesis nula es equivalente a verificar si lo observado en los datos es estadísticamente significativo. Entonces, utilizamos el siguiente estadístico propuesto en clase:

$$Z = \frac{(\widehat{p}_M - \widehat{p}_H) - c}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_H \times (1 - \hat{p}_H)}{n} + \frac{\widehat{p}_M \times (1 - \hat{p}_M)}{m}}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Dado que desconocemos los valores exactos de n y m, asumimos que $n = 727$ y $m = 758$ tal que las mujeres representan poco más de un 51% de la muestra (aproximadamente su participación en la población de Argentina).

Entonces, la región de rechazo de nivel α estará dada por $R_\alpha = \{(\hat{p}_H, \hat{p}_M) : Z < z_\alpha\}$ donde z_α es el cuantil α de la distribución normal estándar. En este caso, al calcular Z para los valores obtenidos en la muestra y $c = 0$, obtenemos:

$$Z = \frac{(0.516 - 0.556)}{\sqrt{\frac{0.556 \times 0.444}{727} + \frac{0.516 \times 0.484}{758}}} \approx -1.546 > z_{0.05}$$

Por lo tanto, no rechazamos la hipótesis nula de que la proporción de mujeres a favor de la ILE es al menos tan grande como la de hombres.