Econometría de Datos de Panel

Maestrías en Economía y Econometría

Lecture 2

Agenda

1. Modelos Dinámicos
   - Introducción a Modelos de Datos de Panel Dinámicos
   - El Modelo AR(1) de Efectos No Observados y el sesgo de Nickell
   - Estimación de ρ Consistente: Arellano-Bond y Blundell-Bond
   - El Estimador de Arellano-Bond
   - El Estimador de Blundell-Bond
   - Extensión: Regresores Exógenos
   - Contrastes de Validez de los Instrumentos
   - Datos con Persistencia

Agenda

1. Modelos Dinámicos
   - Introducción a Modelos de Datos de Panel Dinámicos
   - El Modelo AR(1) de Efectos No Observados y el sesgo de Nickell
   - Estimación de ρ Consistente: Arellano-Bond y Blundell-Bond
   - El Estimador de Arellano-Bond
   - El Estimador de Blundell-Bond
   - Extensión: Regresores Exógenos
   - Contrastes de Validez de los Instrumentos
   - Datos con Persistencia

Modelos Dinámicos

- En los modelos que hemos visto hasta ahora se asumió que las variables explicativas eran estríctamente exógenas (en el caso de FE condicional al efecto no observable).
- En general, FE y RE son inconsistentes si existe correlación entre el error idiosincrático y alguna variable explicativa en algún período.
- Necesitamos una forma de estimación consistente, con $N \longrightarrow \infty$ y T fijo, cuando las variables explicativas no son estríctamente exógenas.
- Esto es lo que ocurre cuando tenemos modelos dinámicos (i.e. la variable dependiente aparece como regresor rezagada).
- El modelo que vamos a analizar es el mismo que en FE:

$$y_{it} = x_{it}\beta + c_i + u_{it}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{1}$$

Modelos Dinámicos

- Pero además de permitir que c_i y x_{it} estén arbitrariamente correlacionadas, ahora también permitimos que u_{it} esté correlacionada con valores futuros de las variables explicativas, $(x_{it+1}, x_{it+2}, \ldots, x_{it+T})$.
- Ejemplo: $AR(1)$

$$y_{it} = y_{it-1}\beta + c_i + u_{it}, \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

- En este ejemplo $x_{it} = y_{it-1}$ por lo tanto u_{it} va a estar correlacionado con $x_{it+1} = y_{it}$.
- Para resolver este problema necesitamos una nueva condición de exogeneidad: exogeneidad secuencial (Chamberlain, 1992)
- Decimos que las variables explicativas son secuencialmente exógenas condicionadas en el efecto no observable cuando se cumple que:

$$E(u_{it}|x_{it}, x_{it-1}, \ldots, x_{i1}, c_i) = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{2}$$

Modelos Dinámicos

- Usando el modelo (1) esta última condición es equivalente a:

$$E(y_{it}|x_{it}, x_{it-1}, \ldots, x_{i1}, c_i) = E(y_{it}|x_{it}, c_i) = x_{it}\beta + c_i.$$

- La primera igualdad es la que le da el sentido a la condición: exogeneidad secuencial implica que después de haber controlado por x_{it} y c_i, ningún valor pasado de x_{it} afecta el valor esperado de y_{it}.
- Si estimamos por FE cuando el supuesto de exogeneidad estricta no se cumple obtendremos estimadores inconsistentes.
- Considere un modelo de panel para variables observadas a través de un corte transversal y en el tiempo, siendo β el parámetro que estamos interesados en estimar y con c_i siendo la heterogeneidad no observada:

$$y_{it} = x_{it}\beta + c_i + u_{it}, \quad i = 1, \ldots, N \;\; t = 1, \ldots, T$$

Introducción a los Modelos de Panel Dinámicos

- Este modelo se puede re-escribir *stacking* las observaciones de series temporales como:

$$y_i = X_i\beta + c_i + u_i$$

- Los métodos de panel tradicionales para estimar β, como los modelos de fixed-effect o random-effect, transforman el modelo de forma tal de erradicar los problemas que causan la presencia de c_i. Esto lo hacen poniendo a c_i como parte del error y estimando β por FGLS o eliminándolo a través de primeras diferencias o con la *within transformation*.
- Estos métodos descansan en algún supuesto de exogeneidad para alcanzar la consistencia en términos de una teoría asintótica con T fijo. Considere, por ejemplo, el estimador de efectos fijos de β. Haciendo que las variables expresadas como desviaciones de sus medias temporales se denoten por $\ddot{}$, el estimador de efectos fijos de β, $\widehat{\beta}^{FE}$ es:

Introducción a los Modelos de Panel Dinámicos

- $$\begin{aligned}\widehat{\beta}^{FE} &= \beta + \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i' \ddot{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i' \ddot{u}_i\right) \\ &= \beta + \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i' \ddot{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i' u_i\right) \\ &= \beta + \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i' \ddot{X}_i\right)^{-1} \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i' u_i\right)\end{aligned}$$

- Para chequear las propiedades asintóticas (con T fijo) de $\widehat{\beta}^{FE}$, asumamos que tenemos una muestra aleatoria de las observaciones de corte transversal. Bajo la muestra aleatoria,

$$p\lim\left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i' u_i\right) = E\left(\ddot{X}_i' u_i\right)$$

Introducción a los Modelos de Panel Dinámicos

- La consistencia requiere que,

$$\forall i \in \mathcal{N} : E\left(\ddot{X}_i' u_i\right) = 0_k$$

- Esta condición puede asegurarse claramente por el supuesto usual de exogeneidad estricta:

$$\forall i \in \mathcal{N},\ \forall t \in \mathcal{T} : E\left(u_{it} \middle| c_i, X_i\right) = E\left(u_{it} \middle| c_i, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iT}\right) = 0$$

- Nosotros vamos a considerar un modelo de datos de panel dinámico cuando se cumpla la siguiente condición, más debil, de exogeneidad, exogeneidad secuencial:

$$\forall i \in \mathcal{N} : E\left(u_{it} \middle| c_i, x_{i1}, \ldots, x_{it-1}, x_{it}\right) = 0$$

Introducción a los Modelos de Panel Dinámicos

- Bajo exogeneidad secuencial, la condición de consistencia para el estimador de efectos fijos no puede garantizarse que se cumpla. Para ver porqué, calculemos $E\left(\ddot{x}_{it} u_{it}\right)$:

$$\begin{aligned} E\left(\ddot{x}_{it} u_{it}\right) &= E\left[\left(x_{it} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{it}\right) u_{it}\right] \\ &= E\left[x_{it} u_{it}\right] - \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} E\left[x_{ij} u_{it}\right] \end{aligned}$$

- Por la ley de expectativas iteradas y la condición de exogeneidad secuencial, tenemos

$$\begin{aligned} E\left[x_{it} u_{it}\right] &= E\left[x_{it} E\left[u_{it} \middle| c_i, x_{i1}, \ldots, x_{it-1}, x_{it}\right]\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Introducción a los Modelos de Panel Dinámicos

- $$\begin{aligned} E\left[x_{ij}u_{it}\right] &= 0 \ \ \forall j \leq t \\ \Rightarrow \ \ E\left(\ddot{x}_{it}u_{it}\right) &= -\frac{1}{T}\sum_{j=t+1}^{T} E\left[x_{ij}u_{it}\right] \end{aligned}$$

  que no puede asumirse igual a cero. Por lo tanto, $\widehat{\beta}^{FE}$ no es consistente en el contexto de modelos de panel dinámicos. La estimación consistente de β requiere de un nuevo método.

Agenda

1. Modelos Dinámicos
   - Introducción a Modelos de Datos de Panel Dinámicos
   - El Modelo AR(1) de Efectos No Observados y el sesgo de Nickell
   - Estimación de ρ Consistente: Arellano-Bond y Blundell-Bond
   - El Estimador de Arellano-Bond
   - El Estimador de Blundell-Bond
   - Extensión: Regresores Exógenos
   - Contrastes de Validez de los Instrumentos
   - Datos con Persistencia

Sesgo de Nickell

- El modelo típico de datos de panel macro incluye valores rezagados de la variable y_{it} entre los regresores. En tales modelos es claro que solo la condición de exogeneidad secuencial puede asumirse. Considere, por ejemplo, $x_{it} = y_{it-1}$:

$$E\left(u_{it} \middle| c_i, y_{i1}, \dots, y_{it-2}, y_{it-1}\right) \text{ podría ser igual a } 0$$
$$\text{pero } E\left(u_{it} y_{it}\right) \text{ no porque } y_{it} \text{ depende de } u_{it}$$

- El ejemplo de arriba es conocido como el modelo AR(1) de efectos no observados, el modelo de panel dinámico por excelencia:

$$\boxed{y_{it} = c_i + \rho y_{it-1} + u_{it}}$$

Sesgo de Nickell

- Aquí el parámetro de interés es ρ. La expresión analítica del sesgo asintótico de ρ en este modelo fue derivada por Nickell (1981) y se conoce como el sesgo de Nickell. Puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\nu(\rho, T) &= p\lim \widehat{\rho}^{FE} - \rho \\ &= \left\{ \frac{2\rho}{1-\rho^2} - \left[\frac{1+\rho}{T-1} \left(1 - \frac{1}{T} \left(\frac{1-\rho^T}{1-\rho} \right) \right) \right]^{-1} \right\}^{-1}\end{aligned}$$

- Nickell mostró que este sesgo es siempre negativo si $\rho > 0$ y que nunca converge a cero aún si $\rho = 0$. Más aún, el sesgo se vuelve más grande si se adicionan regresores exógenos a la ecuación. Y los estimadores de los coeficientes que acompañan a los regresores exógenos también son inconsistentes.

Sesgo de Nickell

- No obstante, este problema ha sido considerado como un problema de T fijo. Con una condición de estabilidad, $|\rho| < 1$, se puede mostrar que:

$$\lim_{T \to \infty} \nu(\rho, T) = 0$$

Sin embargo, el sesgo persiste aún cuando $T \to \infty$ si ρ se acerca a uno.

Agenda

1. Modelos Dinámicos
   - Introducción a Modelos de Datos de Panel Dinámicos
   - El Modelo AR(1) de Efectos No Observados y el sesgo de Nickell
   - Estimación de ρ Consistente: Arellano-Bond y Blundell-Bond
   - El Estimador de Arellano-Bond
   - El Estimador de Blundell-Bond
   - Extensión: Regresores Exógenos
   - Contrastes de Validez de los Instrumentos
   - Datos con Persistencia

Arellano-Bond y Blundell-Bond

- Para estimar ρ en forma consistente, necesitamos asumir lo siguiente. Sea:

$$y_i^{t-1} = \begin{bmatrix} y_{it-1} \\ \vdots \\ y_{i1} \end{bmatrix}$$

el vector de la historia de las observaciones de y_i hasta el período $t-1$.

- Además del supuesto típico:

$$|\rho| < 1$$

vamos a asumir (y esto es lo máximo que podemos requerir) exogeneidad secuencial:

$$\forall i \in \mathcal{N},\ \forall t \in \mathcal{T} : E\left(u_{it} | c_i, y_i^{t-1}\right) = 0$$

Arellano-Bond and Blundell-Bond

- La exogeneidad secuencial implica la ausencia de correlación serial:

$$
\begin{aligned}
\forall s &> 0 : \\
E\left(u_{it}u_{it-s}\right) &= E\left[E\left(u_{it}u_{it-s}|c_i, y_i^{t-1}\right)\right] \\
&= E\left[E\left(u_{it}\left(y_{it-s} - c_i + \rho y_{it-s-1}\right)|c_i, y_i^{t-1}\right)\right] \\
&= E\left[\left(y_{it-s} - c_i + \rho y_{it-s-1}\right) E\left(u_{it}|c_i, y_i^{t-1}\right)\right] \\
&= E\left[\left(y_{it-s} - c_i + \rho y_{it-s-1}\right) 0\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Arellano-Bond and Blundell-Bond

- Volviendo a la condición de estacionariedad, en el contexto de series temporales, usualmente se asume que el proceso estocástico comienza arbitrariamente muy lejos en el tiempo. Esto implica que $|\rho| < 1$ asegura la estacionariedad. Sin embargo, la condición de estabilidad no asegura la estacionariedad si el proceso *comienza* en algún período finito t, por ejemplo $t = 1$. Para ver esto, escribamos el proceso en términos de esta condición inicial:

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= c_i + \rho y_{it-1} + u_{it} \\
&= c_i + \rho\left(c_i + \rho y_{it-2} + u_{it-1}\right) + u_{it} \\
&= \left(1+\rho\right) c_i + \rho^2 y_{it-2} + u_{it} + \rho u_{it-1} \\
&\vdots \\
y_{it} &= c_i \left(\sum_{s=0}^{t-2} \rho^s\right) + \rho^{t-1} y_{i1} + \sum_{s=0}^{t-2} \rho^s u_{it-s}
\end{aligned}
$$

Arellano-Bond and Blundell-Bond

- Como no podemos seguir con este proceso recursivo hasta llegar a $-\infty$ para eliminar el término $\rho^{t-1}y_{i1}$, encontramos que la distribución de y_{it} depende de la distribución de la observación inicial, y_{i1}. por lo tanto, los momentos de y_{it} dependen de los momentos de y_{i1}.
- Tomemos primero la esperanza de y_{it} condicional en c_i, que es:

$$
\begin{aligned}
E\left(y_{it}|c_i\right) &= E\left[E\left(y_{it}|y_i^{t-1},c_i\right)|c_i\right] = \\
E\left[E\left(c_i\left(\sum_{s=0}^{t-2}\rho^s\right)+\rho^{t-1}y_{i1}+\sum_{s=0}^{t-2}\rho^s u_{it-s}|y_i^{t-1},c_i\right)|c_i\right] &= \\
c_i\left(\sum_{s=0}^{t-2}\rho^s\right)+\rho^{t-1}E\left[y_{i1}|c_i\right] &= \\
c_i\frac{1-\rho^{t-1}}{1-\rho}+\rho^{t-1}E\left[y_{i1}|c_i\right]
\end{aligned}
$$

Arellano-Bond and Blundell-Bond

- Este momento depende de la misma esperanza pero de y_{i1}. Para un proceso AR(1) estacionario, condicional en c_i, la esperanza hubiera sido:

$$\mu_i = \frac{c_i}{1-\rho}$$

- Para que esta esperanza sea la esperanza de nuestro proceso de panel, necesitamos asumir además de $|\rho| < 1$ que:

$$E\left[y_{i1}|c_i\right] = \mu_i = \frac{c_i}{1-\rho}$$

Arellano-Bond and Blundell-Bond

- Bajo este supuesto adicional, se verifica que μ_i es de hecho la esperanza de y_{it} para cada t:

$$\begin{aligned} E\left(y_{it}|c_i\right) &= c_i\frac{1-\rho^{t-1}}{1-\rho}+\rho^{t-1}E\left[y_{i1}|c_i\right] \\ &= c_i\frac{1-\rho^{t-1}}{1-\rho}+\rho^{t-1}\frac{c_i}{1-\rho} \\ &= \frac{c_i}{1-\rho}\left(1-\rho^{t-1}+\rho^{t-1}\right) \\ &= \frac{c_i}{1-\rho}=\mu_i \end{aligned}$$

- Lo mismo ocurre con las autocovarianzas del proceso de panel. Asumamos que:

$$\forall i\in\mathcal{N},\ \forall t\in\mathcal{T}: E\left(u_{it}^2|c_i,y_i^{t-1}\right)=\sigma^2$$

Arellano-Bond and Blundell-Bond

- y que:

$$var\left(y_{i1}|c_i\right) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

- Ahora, bajo los supuestos hechos hasta ahora, el modelo AR(1) de panel puede escribirse en términos de las desviaciones con respecto a su media como sigue:

$$\begin{aligned} y_{it}-\mu_i &= \rho\left(y_{it-1}-\mu_i\right)+u_{it} \\ &= \rho^{t-1}\left(y_{i1}-\mu_i\right)+\sum_{s=0}^{t-2}\rho^s u_{it-s} \\ y_{it-k}-\mu_i &= \rho\left(y_{it-k-1}-\mu_i\right)+u_{it-k} \\ &= \rho^{t-k-1}\left(y_{i1}-\mu_i\right)+\sum_{s=0}^{t-k-2}\rho^s u_{it-k-s} \end{aligned}$$

Arellano-Bond and Blundell-Bond

- Entonces, las autocovarianzas pueden escribirse como:

$$
\begin{aligned}
cov(y_{it}, y_{it-k}|c_i) &= E\left[\left(y_{it}-\mu_i\right)\left(y_{it-k}-\mu_i\right)|c_i\right] \\
&= \rho^{2t-k-2} var\left(y_{i1}|c_i\right) + \rho^k \sum_{s=0}^{t-k-2} \rho^{2s}\sigma^2 \\
&= \rho^{2t-k-2}\frac{\sigma^2}{1-\rho^2} + \rho^k \frac{1-\rho^{2t-2k-2}}{1-\rho^2}\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\left(\rho^{2t-k-2}+\rho^k-\rho^{2t-k-2}\right) \\
&= \rho^k \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} = \gamma_k
\end{aligned}
$$

Arellano-Bond and Blundell-Bond

- Por lo tanto, para cada t tenemos:

$$
\begin{aligned}
var\left(y_{it}|c_i\right) &= \gamma_0 \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \\
&= var\left(y_{i1}|c_i\right)
\end{aligned}
$$

- Para concluir, si los momentos de la primera observación del proceso son los momentos en estado estacionario, el proceso entero es estacionario y comparte esos mismos momentos.

Agenda

Estimador de Arellano-Bond

- Volviendo al problema de la estimación, las transformaciones usuales para eliminar c_i generan estimadores inconsistentes en el contexto de paneles dinámicos. El problema recae en el hecho de que, bajo exogeneidad secuencial, tomar primeras diferencias (o transformar por efectos fijos) elimina c_i pero provoca que la condición de exogeneidad se viole:

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= c_i + \rho y_{it-1} + u_{it} \\
\Delta y_{it} &= \rho \Delta y_{it-1} + \Delta u_{it} \\
E\left(\Delta y_{it-1} \Delta u_{it}\right) &= E\left(y_{it-1} u_{it} - y_{it-1} u_{it-1} - y_{it-2} u_{it} - y_{it-2} u_{it-1}\right) \\
&= -E\left(y_{it-1} u_{it-1}\right) \neq 0
\end{aligned}
$$

- Entonces, para estimar ρ en forma consistente, necesitamos instrumentos para Δy_{it-1}. Tomemos y_{it-2} en niveles como instrumento de Δy_{it-1}:

$$
E\left(y_{it-2} \Delta u_{it}\right) = E\left(y_{it-2} u_{it} - y_{it-2} u_{it-1}\right)
$$

Estimador de Arellano-Bond

- En general,

$$E\left(y_i^{t-2}\Delta u_{it}\right) = 0_{t-2}$$

- Esto significa que el instrumento es válido. El estimador de Arellano-Bond es el estimador de GMM con matriz de instrumentos:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}$$

$$Z_i = \begin{bmatrix} y_{i1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{i1} & y_{i2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & y_{i1} & \cdots & y_{iT-2} \end{bmatrix}$$

Estimador de Arellano-Bond

- Tomando primeras diferencias e instrumentando con valores rezagados, las primeras dos observaciones no pueden usarse en la estimación. Definamos los vectores de observaciones usables como:

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \Delta y_{13} \\ \vdots \\ \Delta y_{NT} \end{bmatrix} \quad ; \quad \Delta y_{-1} = \begin{bmatrix} \Delta y_{12} \\ \vdots \\ \Delta y_{N(T-1)} \end{bmatrix}$$

y matriz ponderadora W.

- Entonces, el estimador de Arellano-Bond de ρ es:

$$\widehat{\rho}^{AB}(W) = \left[\Delta' y_{-1} \left(ZWZ' \right) \Delta y_{-1} \right]^{-1} \Delta' y_{-1} \left(ZWZ' \right) \Delta y$$

Estimador de Arellano-Bond

- Hay dos elecciones disponibles para W: W_1, una matriz ponderadora de un solo paso, y W_2, una matriz ponderadora de dos pasos que usa los residuos del estimador que usa W_1, $\widehat{u}_i^{(1)}$:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta Z_i' \Delta Z_i \right)^{-1} \\
W_2 &= \left(\sum_{i=1}^{N} Z_i' \Delta \widehat{u}_i^{(1)} \Delta \widehat{u}_i^{(1)'} Z_i \right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Estimador de Arellano-Bond

- Cada matriz ponderadora da un estimador de Arellano-Bond diferente:

$$\boxed{\widehat{\rho}_1^{AB} = \left[\ \Delta' y_{-1} \left(Z W_1 Z'\right)\ \Delta y_{-1}\right]^{-1} \Delta' y_{-1} \left(Z W_1 Z'\right)\ \Delta y}$$

$$\boxed{\widehat{\rho}_2^{AB} = \left[\ \Delta' y_{-1} \left(Z W_2 Z'\right)\ \Delta y_{-1}\right]^{-1} \Delta' y_{-1} \left(Z W_2 Z'\right)\ \Delta y}$$

- La estimación de las varianzas de estos estimadores es:

$$\begin{aligned} \widehat{var}\left(\widehat{\rho}_1^{AB}\right) &= \hat{\sigma}^2 \left[\ \Delta' y_{-1} \left(Z W_1 Z'\right)\ \Delta y_{-1}\right]^{-1} \\ \widehat{var}\left(\widehat{\rho}_2^{AB}\right) &= \hat{\sigma}^2 \left[\ \Delta' y_{-1} \left(Z W_2 Z'\right)\ \Delta y_{-1}\right]^{-1} \end{aligned}$$

donde $\hat{\sigma}^2$ es la estimación de la varianza de u_{it}.

Estimador de Arellano-Bond

- Una estimación consistente de σ^2 viene dada por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(N(T-2)-K)} \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Delta u}_i' \widehat{\Delta u}_i$$

  donde K es la dimensión de $X_i \equiv y_{it-1} = 1$ y $\widehat{\Delta u}_i$ es la estimación de los errores del modelo transformado. Note que el número de observaciones en la ecuación estimada es $N(T-2)$ porque perdemos las primeras dos observaciones debido a la variable dependiente rezagada y a la transformación de diferencias finitas.

- $$\widehat{\Delta u}_i = \Delta y_i - \Delta y_{it-1} \hat{\rho}_1^{AB}$$

Agenda

1. Modelos Dinámicos
   - Introducción a Modelos de Datos de Panel Dinámicos
   - El Modelo AR(1) de Efectos No Observados y el sesgo de Nickell
   - Estimación de ρ Consistente: Arellano-Bond y Blundell-Bond
   - El Estimador de Arellano-Bond
   - El Estimador de Blundell-Bond
   - Extensión: Regresores Exógenos
   - Contrastes de Validez de los Instrumentos
   - Datos con Persistencia

Estimador de Blundell-Bond

- Un buen estimador de variables instrumentales es aquel en el que el instrumento y la variable instrumentada están altamente correlacionadas. Esta correlación, en el caso del estimador de Arellano-Bond, está dada por:

$$\begin{aligned} E\left(y_{it-2}\Delta y_{it-1}\right) &= E\left[y_{it-2}\left(c_i + (\rho - 1)\, y_{it-2} + u_{it}\right)\right] \\ &= E\left[y_{it-2}c_i\right] + (\rho - 1)\, E\left[y_{it-2}^2\right] \end{aligned}$$

- Como asumiremos más adelante, $E\left[y_{it-2}c_i\right] = 0$. Entonces,

$$E\left(y_{it-2}\Delta y_{it-1}\right) = (\rho - 1)\, E\left[y_{it-2}^2\right]$$

- Cuando el proceso de panel es un modelo de panel con raiz unitaria, esto es, cuando $\rho = 1$, esta correlación alcanza su menor valor (en valor absoluto). Lo que sucede es que, bajo $\rho = 1$, el proceso es un paseo aleatorio (random walk) de panel y sus incrementos, Δy_{it} son ruido blanco.

Estimador de Blundell-Bond

- Entonces, cuando ρ se aproxima a uno, los instrumentos utilizados por Arellano-Bond se vuelven instrumentos débiles.
- Por lo tanto, Blundell-Bond proponen agregar nuevos instrumentos.
- Para esto, note que los valores rezagados de la diferencia Δy_{it} son ortogonales a los niveles de u_{it}:

$$\forall i \in \mathcal{N}, \ \forall s > 0 : E\left(\Delta y_{it-s} u_{it}\right) = 0$$

- Entonces, podemos estimar el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \Delta y_{it} = \rho \Delta y_{it-1} + \Delta u_{it} \\ y_{it} = \rho y_{it-1} + v_{it} \end{cases}$$

con $v_{it} = c_i + u_{it}$.

Estimador de Blundell-Bond

- Usando los instrumentos de Arellano-Bond para la ecuación en diferencias y las diferencias rezagadas como instrumento para la ecuación en niveles.
- Para obtener estimadores consistentes, el nuevo conjunto de instrumentos no tiene que estar correlacionado con el nuevo término de error, v_{it}. Esto está asegurado por el supuesto:

$$\forall i \in \mathcal{N}, \ \forall s > 0 : E\left(\Delta y_{it-s} c_i\right) = 0$$

- Note que esto implica la condición, ya establecida, que:

$$E\left[y_{it-2} c_i\right] = 0$$

- Para obtener una única expresión para el modelo y el estimador, note que $\Delta u_{it} = \Delta v_{it}$.

Estimador de Blundell-Bond

- Además, definamos D como la matriz $(T-2)\times(T-1)$ que representa la operación de tomar primeras diferencias. También, definamos Z^+ como la matriz de instrumentos aumentada:

$$
Z_i^+ = \begin{bmatrix}
Z_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \Delta y_{i2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \Delta y_{i3} & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Delta y_{i(T-1)}
\end{bmatrix}
$$

$$
Z^+ = \begin{bmatrix} Z_1^+ \\ \vdots \\ Z_N^+ \end{bmatrix}
$$

Estimador de Blundell-Bond

- y H como la matriz, en bloques, de transformación:

$$H = \begin{bmatrix} D \\ I_{T-1} \end{bmatrix}$$

- El modelo en

$$\begin{cases} \Delta y_{it} = \rho \Delta y_{it-1} + \Delta u_{it} \\ y_{it} = \rho y_{it-1} + v_{it} \end{cases}$$

- puede ser escrito como:

$$(I_N \otimes H)\, y = \rho\, (I_N \otimes H)\, y_{-1} + (I_N \otimes H)\, v$$

Estimador de Blundell-Bond

- con:

$$
\begin{aligned}
y_i &= \begin{bmatrix} y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix} \;;\; y_{i-1} = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{i(T-1)} \end{bmatrix} \;;\; v_i = \begin{bmatrix} v_{i2} \\ \vdots \\ v_{iT} \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \;;\; y_{-1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{N(T-1)} \end{bmatrix} \;;\; v = \begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Entonces, queremos estimar ρ por GMM con la matriz de instrumentos aumentada. Nuevamente, necesitamos la condición de ortogonalidad:

$$
E\left[Z^{+'}\left(I_N \otimes H\right) v\right] = 0_{2N(T-2)}
$$

Estimador de Blundell-Bond

- El estimador de Blundell-Bond es el siguiente estimador de dos pasos.
- En el primer paso calculamos el siguiente estimador de GMM:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\rho}^{(1)} &= \left\{ \left[y_{-1}^{'} \left(I_N \otimes H^{'} \right) Z^{+} \right]^{-1} W^{(1)} \left[Z^{+'} \; (I_N \otimes H)\, y_{-1} \right] \right\}^{-1} \\
&\times \left\{ \left[y_{-1}^{'} \left(I_N \otimes H^{'} \right) Z^{+} \right]^{-1} W^{(1)} \left[Z^{+'} \; (I_N \otimes H)\, y \right] \right\}
\end{aligned}
$$

- con:

$$
W^{(1)} = \left[\sum_{i=1}^{N} Z_i^{+'} H H^{'} Z_i^{+} \right]^{-1}
$$

Estimador de Blundell-Bond

- Este estimador $\widehat{\rho}^{(1)}$ se conoce como el estimador de Blundell-Bond de un paso.
- La varianza del estimador de Blundell-Bond de un paso es:

$$\widehat{var}\left(\widehat{\rho}^{(1)}\right) = \hat{\sigma}^2 \left\{ \left[y_{-1}^{'} \left(I_N \otimes H^{'} \right) Z^{+} \right]^{-1} W^{(1)} \left[Z^{+^{'}} \ \left(I_N \otimes H \right) y_{-1} \right] \right\}^{-1}$$

- Una estimación consistente de σ^2 viene dada por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(N(T-2)-K)} \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Delta u}_i^{'} \widehat{\Delta u}_i$$

- Con

$$\widehat{\Delta u}_i = \Delta y_i - \Delta y_{it-1} \widehat{\rho}^{(1)}$$

Estimador de Blundell-Bond

- Tome los residuos de este primer paso, $\widehat{v}_i^{(1)}$. El estimador propuesto por Blundell-Bond es el estimador de GMM con una matriz ponderadora óptima que puede obtenerse en el segundo paso:

$$\boxed{\widehat{\rho}^{BB} = \left\{ \left[y_{-1}^{\prime} \left(I_N \otimes H^{\prime} \right) Z^{+} \right]^{-1} W_{BB} \left[Z^{+^{\prime}} \ \left(I_N \otimes H \right) y_{-1} \right] \right\}^{-1}}$$

$$\boxed{\times \quad \left\{ \left[y_{-1}^{\prime} \left(I_N \otimes H^{\prime} \right) Z^{+} \right]^{-1} W_{BB} \left[Z^{+^{\prime}} \ \left(I_N \otimes H \right) y \right] \right\}}$$

- con:

$$W_{BB} = \left[\sum_{i=1}^{N} Z_i^{+^{\prime}} H \widehat{v}_i \widehat{v}_i^{\prime} H^{\prime} Z_i^{+} \right]^{-1}$$

Estimador de Blundell-Bond

- La varianza del estimador de Blundell-Bond es:

$$\widehat{var}\left(\widehat{\rho}^{BB}\right) = \hat{\sigma}^2 \left\{ \left[y_{-1}^{'} \left(I_N \otimes H^{'} \right) Z^{+} \right]^{-1} W_{BB} \left[Z^{+^{'}} \left(I_N \otimes H \right) y_{-1} \right] \right\}^{-1}$$

- Una estimación consistente de σ^2 viene dada por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(N(T-2)-K)} \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Delta u}_i^{'} \widehat{\Delta u}_i$$

  donde K es la dimensión de $X_i \equiv y_{it-1} = 1$ y $\widehat{\Delta u}_i$ es la estimación de los errores del modelo transformado. Note que el número de observaciones en la ecuación estimada es $N(T-2)$ porque perdemos las primeras dos observaciones debido a la variable dependiente rezagada y a la transformación de diferencias finitas.

- $$\widehat{\Delta u}_i = \Delta y_i - \Delta y_{it-1} \widehat{\rho}^{BB}$$

Agenda

AB y BB con Regresores Exógenos

- Los estimadores de Arellano-Bond y de Blundell-Bond pueden extenderse en forma directa a modelos que incluyan regresores estríctamente exógenos, agrupados en el vector k-dimensional x_{it}. tales modelos se denominan AR(1)-X modelos de efectos no observados:

$$\boxed{y_{it} = c_i + \rho y_{it-1} + \gamma^{'} x_{it} + u_{it}}$$

where:

$$\forall i \in \mathcal{N},\ \forall t \in \mathcal{T} : E\left(u_{it} | c_i, x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iT}\right) = 0$$

- La extensión es directa ya que los regresores estrictamente exógenos, x_{it} pueden ser usados como sus propios instrumentos. Por lo tanto, aumentando adecuadamente las matrices Z, Z^{+}, las mismas fórmulas de arriba pueden ser usadas para estimar consistentemente ρ y γ.

AB y BB con Regresores Exógenos

- Si los regresores x_{it} son secuencialmente exógenos, esto es $E(x_{it}u_{is}) = 0, \quad \forall\, t \neq s$, entonces solo $(x_{i1}, \ldots, x_{is-1})$ son instrumentos válidos para la ecuación en primeras diferencias del período s.
- Entonces, el estimador de Arellano-Bond utiliza como matriz de instrumentos:

$$Z_i = \begin{bmatrix} y_{i1}\, x_{i2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{i1}\, y_{i2} & x_{i2}\, x_{i3} & \vdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{i1} \ldots y_{iT-2}\, x_{i2} \ldots x_{iT-1} \end{bmatrix}$$

- En la ecuación $\Delta y_{it} = \Delta x_{it}^{\ddagger}\delta + \Delta u_{it}, \quad t = 3, 4, ..., T$. Con $x_{it}^{\ddagger} = [y_{it-1}\ x_{it}]$.

AB y BB con Regresores Exógenos

- Claramente, las x_{it} pueden tener elementos estríctamente exógenos o secuencialmente exógenos en cuyo caso la matriz de instrumentos se puede definir de forma apropiada.
- Sin embargo, el número de columnas de Z_i en cualquiera de los casos anteriores puede llegar a ser muy grande produciéndose una pérdida de eficiencia.
- Para corregir esto, en general, los programas que resuelven estos modelos utilizan solo algunas de esas columnas.

AB y BB con Regresores Exógenos: ejemplo

- Considere el siguiente modelo,

$$y_{it} = \rho y_{it-1} + x_{it}\beta + c_i + u_{it}, \quad T = 5.$$

- Donde x_{it} es 1×1, y es una variable estríctamente exógena.
- Primero aplicamos diferencias finitas.

$$\Delta y_{it} = \rho \Delta y_{it-1} + \Delta x_{it}\beta + \Delta u_{it},$$

- Ahora instrumentemos la ecuación utilizando solo dos rezagos. Entonces Z_i queda,

$$Z_i = \begin{bmatrix} y_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_{i3} \\ 0 & y_{i1} & y_{i2} & 0 & 0 & \Delta x_{i4} \\ 0 & 0 & 0 & y_{i2} & y_{i3} & \Delta x_{i5} \end{bmatrix}$$

- En este caso como las x's son estríctamente exógenas utilizamos la propia variable como instrumento de si misma.

AB y BB con Regresores Exógenos: ejemplo

- Note que debido al rezago de la variable dependiente se pierde una observación y debido a las diferencias finitas se pierde otra observación de forma que $t = 3, 4, 5$.
- Escribiendo el modelo *stacking* sobre t, tenemos:

$$Dy_i = Dy_i^{(-1)}\rho + DX_i\beta + Du_i$$

- Reagrupando:

$$Dy_i = [Dy_i^{(-1)}|DX_i](\rho\ \beta)' + Du_i$$

- Llamando $V_i = D[y_i^{(-1)}|X_i]$, obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} &= \left[\left(\sum_{i=1}^{N} V_i' DZ_i\right) W \left(\sum_{i=1}^{N} Z_i' DV_i\right)\right]^{-1} \\ &\times \left(\sum_{i=1}^{N} V_i' DZ_i\right) W \left(\sum_{i=1}^{N} Z_i' Dy_i\right) \end{aligned}$$

AB y BB con Regresores Exógenos: ejemplo

- Igual que antes, el estimador de un paso, usa

$$W = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (DZ_i)' DZ_i \right)^{-1}$$

- Si queremos estimar usando el estimador de Blundell-Bond, entonces hay que agregar a las ecuaciones en primeras diferencias, las ecuaciones en niveles,

$$\begin{aligned} Dy_i &= Dy_i^{(-1)} \rho + DX_i \beta + Du_i \\ y_i &= y_i^{(-1)} \rho + X_i \beta + c_i J_T + u_i \end{aligned}$$

- Y estimar usando la matriz de instrumentos,

$$Z_i^+ = \begin{bmatrix} Z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_{i2} & 0 & 0 & x_{i3} & 1 \\ 0 & 0 & \Delta y_{i3} & 0 & x_{i4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta y_{i4} & x_{i5} & 1 \end{bmatrix}$$

Agenda

1. Modelos Dinámicos
   - Introducción a Modelos de Datos de Panel Dinámicos
   - El Modelo AR(1) de Efectos No Observados y el sesgo de Nickell
   - Estimación de ρ Consistente: Arellano-Bond y Blundell-Bond
   - El Estimador de Arellano-Bond
   - El Estimador de Blundell-Bond
   - Extensión: Regresores Exógenos
   - Contrastes de Validez de los Instrumentos
   - Datos con Persistencia

Contrastes de Validez de los Instrumentos

- Como ambos estimadores, el de Arellano-Bond y el de Blundell-Bond son estimadores de GMM, es usual contrastar por la validez de sus instrumentos. Para el contexto de datos de panel hay dos contrastes disponibles.
- El primer test es el test-J de Sargan típico. Este es el test estándar de validez de los instrumentos. Tome una matriz de instrumentos J y los errores en primeras diferencias, Δu_i. Las hipótesis son:

$$\begin{cases} H_0 : E\left(J_i \Delta u_i\right) = 0_{T-2} \\ H_1 : E\left(J_i \Delta u_i\right) \neq 0_{T-2} \end{cases}$$

- El estadístico de contraste, $s\left(J\right)$, es:

$$s\left(J\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta \widehat{u}_i^{(J)\prime} J_i\right) \left(\sum_{i=1}^{N} J_i^{\prime} \Delta \widehat{u}_i^{(J)} \Delta \widehat{u}_i^{(J)\prime} J_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} J_i^{\prime} \Delta \widehat{u}_i^{(J)}\right)$$

Contrastes de Validez de los Instrumentos

- Se puede mostrar que, para $J = Z$, $J = Z^{+}$:

$$\boxed{s^{AB} = s(Z) \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2_{\text{col}(Z)-k}}$$

$$\boxed{s^{BB} = s(Z^{+}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2_{\text{col}(Z^{+})-k}}$$

with $\text{col}(Z^{+}) = T - 2 + \text{col}(Z)$.

- Rechazar la hipótesis nula en el test-J significa que los instrumentos no son válidos. Esto implica que el DGP no es el modelo AR(1) de efectos no observables ya que para este modelo los instrumentos de Arellano-Bond y Blundell-Bond son válidos. Entonces, el test-J puede ser pensado como un test de especificación del modelo.

Contrastes de Validez de los Instrumentos

- El segundo test es el test-M. A diferencia del test anterior, este contraste es un test de especificación directamente.
- Tome el modelo en primeras diferencias. Si los errores en niveles son ruido blanco, los errores en primeras diferencias tendrán una estructura de autocovarianzas determinada.
- Más precisamente, la autocovarianza de primer orden de los errores en primeras diferencias es negativa y la autocovarianza de segundo orden es cero:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\Delta u}(1) &= E\left(\Delta u_{it}\Delta u_{it-1}\right) \\
&= E\left[\left(u_{it}-u_{it-1}\right)\left(u_{it-1}-u_{it-2}\right)\right] \\
&= E\left[u_{it}u_{it-1}-u_{it-1}u_{it-1}-u_{it}u_{it-2}+u_{it-1}u_{it-2}\right] \\
&= -\gamma_u(0) < 0 \\
\gamma_{\Delta u}(2) &= E\left(\Delta u_{it}\Delta u_{it-2}\right) \\
&= E\left[\left(u_{it}-u_{it-1}\right)\left(u_{it-2}-u_{it-3}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Contrastes de Validez de los Instrumentos

- Entonces, tenemos los siguentes dos conjuntos de hipótesis:

$$(1)\begin{cases} H_0^{(1)} : \gamma_{\Delta u}(1) = 0 \\ H_1^{(1)} : \gamma_{\Delta u}(1) < 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} H_0^{(2)} : \gamma_{\Delta u}(2) = 0 \\ H_1^{(2)} : \gamma_{\Delta u}(2) \neq 0 \end{cases}$$

y debemos rechazar $H_0^{(1)}$ y aceptar $H_0^{(2)}$. Los estadísticos de contratse, m_1 y m_2, son asintóticamente normales bajo cada hip
otesis nula (y son provistos por Stata después de la estimación):

$$m_1 \overset{\mathcal{D}H_0^{(1)}}{\rightarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

$$m_2 \overset{\mathcal{D}H_0^{(2)}}{\rightarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

Agenda

Estimación LSDV Corregida (Kiviet)

- Considere el siguiente modelo de componentes no observados,

$$y_{it} = \gamma y_{it-1} + x_{it}\beta + c_i + u_{it}, \;\; i = 1, 2, \ldots, N; \; t = 1, 2, \ldots, T \qquad (3)$$

con,

  - $c_i \sim N(0, \sigma_c^2)$, $\sigma_c^2 > 0$; $u_{it} \sim N(0, \sigma_u^2)$, $\sigma_u^2 > 0$
  - (i) $E(u_{it}u_{js}) = 0 \; j \neq i$ o $t \neq s$; $(ii) E(c_i c_j) = 0 \; j \neq i$
  - (iii) $E(c_i u_{jt}) = 0 \; \forall j, i, t$; $(iv) E(x'_{it} u_{js}) = 0 \; \forall j, i, t, s$
  - (v) $E(x'_{jt} c_i) =$ desconocida $\forall j, i, t$
  - y_{i0} es una variable aleatoria con (vi) $E(y_{i0} u_{jt}) = 0 \; \forall j, i, t$; (vii) $E(y_{i0} c_j) =$ desconocida $\forall j, i$.
  - (viii) $E(w_{i0} u_{jt}) = 0, \; \forall j, i, t$, donde $w_{it} = y_{it} - \frac{1}{1-\gamma} c_i$.
- Kiviet muestra que el sesgo del estimador de FE puede aproximarse con un error de tamaño $O_p(N^{-1} T^{-3/2})$.
- Asuma que los supuestos (i) a (viii) y $|\gamma| < 1$ se cumplen. Entonces,

Estimación LSDV Corregida (Kiviet)

- Teorema 1 (Kiviet, 1995 pp 64)

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\delta}_{FE}-\delta) &= -\sigma_u^2\bar{D}^{-1}\left(\frac{N}{T}(J_T'CJ_T)[2q-\bar{W}'Q_{NT}\bar{W}\bar{D}^{-1}q]\right. \\
&+ tr\{\bar{W}'(I_N\otimes Q_TCQ_T)\bar{W}\bar{D}^{-1}\}q \\
&+ \bar{W}'(I_N\otimes Q_TCQ_T)\bar{W}\bar{D}^{-1}q+\sigma_u^2Nq'\bar{W}'\bar{D}^{-1}q \\
&\times \left.\left[\frac{N}{T}(J_T'CJ_T)tr\{C'Q_TC\}+2tr\{C'Q_TCQ_TC\}\right]\right) \\
&+ O_p(N^{-1}T^{-3/2}) \\
&= \text{Sesgo}_{\text{Kiviet}}+O_p(N^{-1}T^{-3/2})
\end{aligned}
$$

donde $\bar{D}=\bar{W}'Q_{NT}\bar{W}+\sigma_u^2Ntr\{C'Q_TC\}qq'$; $Q_{NT}\bar{W}=E(Q_{NT}W)$;
$q=(1\,0\,\ldots\,0)'$; $\delta'=(\gamma\;\beta')$ y,

Estimación LSDV Corregida (Kiviet)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma^{T-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- El único parámetro desconocido en C es γ.
- Kiviet sugiere reeemplazarlo con la estimación de IV de Anderson-Hsiao.
- Para el modelo $AR(1)$ Anderson y Hsiao (1982) aplican diferencias finitas para eliminar c_i.
- $\Delta y_{it} = \rho \Delta y_{it-1} + \Delta u_{it}, \ \ t > 2.$

Estimación LSDV Corregida (Kiviet)

- Luego, usan POLS IV con instrumentos dados por y_{it-2} o Δy_{it-2}.
- Note que en el período t, todos los elementos de $(y_{it-2}, y_{it-3}, \ldots, y_{i0})$ son instrumentos válidos porque Δu_{it}, no está correlacionada con y_{it-h}, $h \geq 2$.
- Como el estimador de Anderson y Hsiao no usa todos los instrumentos disponibles no es completamente eficiente.
- El estimador propuesto por Kiviet es entonces:
  1. Estimar el modelo por el método de LSDV y obtener la estimación no consistente de δ, $\hat{\delta}_{FE}$.
  2. Calcular la estimación consistente como: $\hat{\delta}_{LSDVC} = \hat{\delta}_{FE} - \text{Sesgo}_{\text{Kiviet}}$.

Estimación LSDV Corregida (Kiviet)

- Para estimar la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes de Kiviet siga los siguientes pasos:
  1. Calcular $\hat{u}_i^{LSDVC} = \ddot{y}_i - \ddot{Z}_i\hat{\delta}_{LSDVC}$ donde $\ddot{Z}_i$ incluye $\ddot{y}_{it-1}$ y $\ddot{x}_{i,t}$.
  2. Estime
  $$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{NT - N - T - K + 1}\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^{LSDVC'}\,\hat{u}_i^{LSDVC}$$
  3. $Var(\hat{\delta}_{LSDVC}) = \hat{\sigma}_u^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{Z}_i'\ddot{Z}_i\right)^{-1}$