Econometría
Problem Set 2
Tópicos en el Modelo Lineal

- **Ejercicio 1.** Bajo el supuesto de normalidad, obtener las distribuciones (condicionales a los regresores, en muestras finitas) de $y, \widehat{\beta}, \widehat{u}$ y $\frac{\widehat{\sigma_u^2}}{\sigma_u^2}(n-k)$. Mostrar que las distribuciones de $\widehat{\beta}$ y $\frac{\widehat{\sigma_u^2}}{\sigma_u^2}(n-k)$ son independientes.

- **Ejercicio 2.** Construir una región de confianza para β y un intervalo de confianza para $c'\beta$ a partir de lo hallado en el Ejercicio 1.

- **Ejercicio 3.** Para el modelo y la muestra presentada en el Ejercicio 5 del Problem Set 1, testear la hipótesis $\mathsf{H}_0 : \beta_2 = 0$ contra $\mathsf{H}_1 : \beta_2 > 0$ y la hipótesis $\mathsf{H}_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ contra $\mathsf{H}_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 2$.

- **Ejercicio 4.** A partir de la partición de la regresión, probar el teorema de Frisch-Waugh. ¿Bajo qué condición no es necesaria la parcialización de la regresión?

- **Ejercicio 5.** Utilice los resultados de regresión particionada para probar que los estimadores de Mínimos Cuadrados Clásicos de los coeficientes pendientes muestran el signo de la correlación parcial entre el regresando y el regresor asociado al coeficiente en cuestión.

- **Ejercicio 6.** Utilice los resultados de regresión particionada para probar que en un modelo con intercepto los estimadores de Mínimos Cuadrados Clásicos de los coeficientes de pendiente son los mismos trabajando con (todas) las variables en nivel y en desviación respecto de la media muestral (i.e., centradas). Los estimadores de Mínimos Cuadrados Clásicos de los coeficientes de pendiente muestran el signo de la correlación parcial entre el regresando y el regresor asociado al coeficiente en cuestión.

- **Ejercicio 7.** Obtenga la distribución del estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos del parámetro β.

- **Ejercicio 8.** Muestre que, siendo $\widehat{u}_R$ el residuo del estimador de mínimos cuadrados restringido, se verifica que

$$\left(R\widehat{\beta} - r\right)' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\widehat{\beta} - r\right) = \widehat{u}_R'\widehat{u}_R - \widehat{u}'\widehat{u}$$

  Utilize esta igualdad para concluir que

$$\widehat{u}_R'\widehat{u}_R - \widehat{u}'\widehat{u} \geq 0$$

  Interpretar.

- **Ejercicio 9.** Muestre que el coeficiente de determinación (R^2) es una función (débilmente) creciente del número de regresores incluidos. Para ello, utilize la desigualdad $\widehat{u}_R'\widehat{u}_R - \widehat{u}'\widehat{u} \geq 0$.

- **Ejercicio 10.** Pruebe que el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos de σ_u^2 es consistente.

- **Ejercicio 11.** (*Classical error in variables*). Considere el siguiente modelo simple

$$y_i = \alpha + \beta x_i^* + u_i$$

  bajo los supuestos de Gauss-Markov. Supóngase que el regresor se mide con error, por lo que el investigador observa

$$x_i = x_i^* + \varepsilon_i$$

  con

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_i\}_{i=1}^n &\sim IID\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \\ E\left(u_i v_i | X\right) &= 0 \end{aligned}$$

  Muestre que el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos de β es inconsistente. ¿Qué supuesto se viola en el modelo expresado en términos de x_i?

- **Ejercicio 12.** *(Ridge Regression)*. Suponga que la matriz $(X'X)$ es no singular. Muestre que el estimador cresta, a pesar de ser innecesario y ser sesgado, es mas preciso que el estimador de Mínimos Cuadrados Clásicos.

- **Ejercicio 13.** *(Cambio estructural.)* Considere el siguiente modelo simple:

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

bajo los supuestos de Gauss-Markov. Suponga que en la muestra el modelo sufre un quiebre:

$$\beta = \begin{cases} \beta_1 & t \in \{1, ..., s\} \\ \beta_2 & t \in \{s+1, ..., T\} \end{cases}$$

(a) Suponga que el investigador ignora el cambio estructural. Pruebe que el estimadorde Mínimos Cuadrados Clásicos de β es sesgado. Obtenga la expresión del sesgo.

(b) Suponga que $s = T - 1$. En este caso, no hay grados de libertad suficientes para estimar el modelo en submuestras. Compare los estimadoresde Mínimos Cuadrados Clásicos del parámetro que surgen de:

  - Descartar la última observación (en este caso, el modelo es de parámetro constante con $\beta = \beta_1$).
  - Incluir en la regresión, de forma aditiva, la siguiente variable binaria

$$d_t = \mathbb{I}\,(t = T)$$

  con $\mathbb{I}$ la función indicadora, que vale 1 cuando su argumento es una proposición verdadera y 0 cuando es falsa.

- **Ejercicio 14.** (*Missing data*). Considere el siguiente modelo simple:

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

Supónga que la muestra puede particionarse en 2 submuestras (A y B) tales que en la segunda submuestra no hay observaciones del regresor. Compare los estimadoresde Mínimos Cuadrados Clásicos de β que resultan de los siguientes procedimientos:

(a) Descartar la segunda submuestra y estimar sólo con la muestra A.

(b) Completar la muestra con la media muestral de la primer submuestra del regresor.

(c) Completar la muestra con ceros (censurar la muestra) y agregar una variable binaria que tome el valor de 1 para toda unidad muestral correspondiente a la segunda submuestra.

(d) Completar la muestra B con la predicción del modelo estimado con la muestra A.