Juan Menduiña

Maestría en Econometría - UTDT
Examen Final - Matemática

Ejercicio 1.

Clasificar las siguientes formas cuadráticas, según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q (x, y, z)= $x^2 + 9y^2 + z^2 + 2\alpha xy + xz + yz$.

En primer lugar, para clasificar la forma cuadrática Q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para los distintos valores de α, es necesario encontrar la matriz asociada a Q (matriz A). En términos generales, la forma cuadrática Q puede ser escrita en términos de esta matriz A como:

Q (x, y, z)= $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

En particular, se tiene:

Q (x, y, z)= $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \alpha & 9 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Luego, es necesario encontrar los menores principales dominantes de la matriz A:

Δ_1= 1.

Δ_2= 1 * 9 - $\alpha\alpha$
Δ_2= 9 - α^2.

Δ_3= 1 (9 * 1 - $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$) - α (α * 1 - $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$) + $\frac{1}{2}$ (α * $\frac{1}{2}$ - 9 * $\frac{1}{2}$)
Δ_3= 1 (9 - $\frac{1}{4}$) - α (α - $\frac{1}{4}$) + $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}\alpha$ - $\frac{9}{2}$)
Δ_3= 1 * $\frac{35}{4}$ - α^2 + $\frac{1}{4}\alpha$ + $\frac{1}{4}\alpha$ - $\frac{9}{4}$
Δ_3= -α^2 + $\frac{1}{2}\alpha$ + $\frac{13}{2}$.

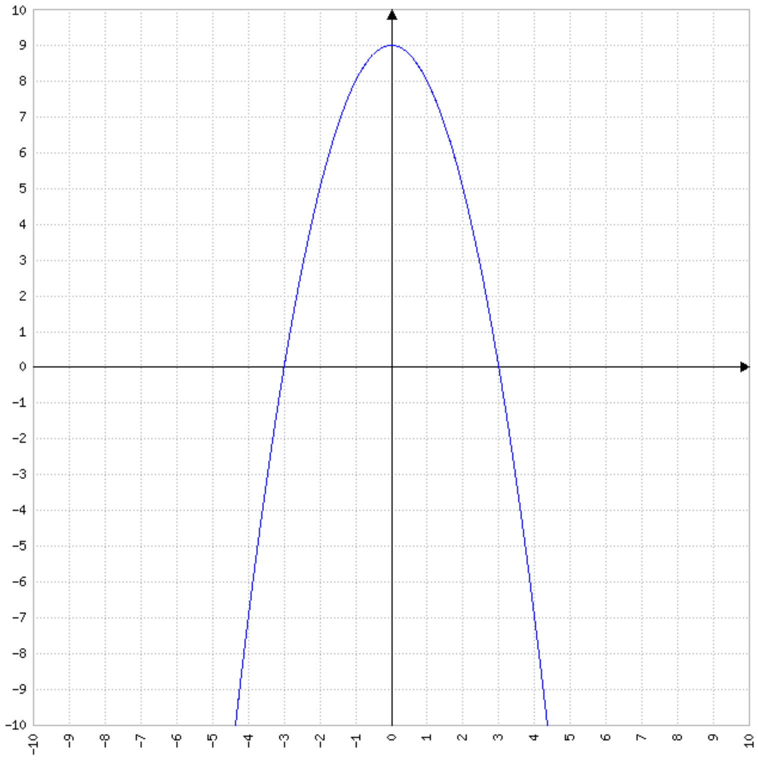
Se analiza cuándo es Δ_1= 0:

Δ_1= 1 $>$ 0.

Se analiza cuándo es Δ_2= 0:

Δ_2= 0
9 - α^2= 0
α^2= 9
$\sqrt{\alpha^2}$= $\sqrt{9}$

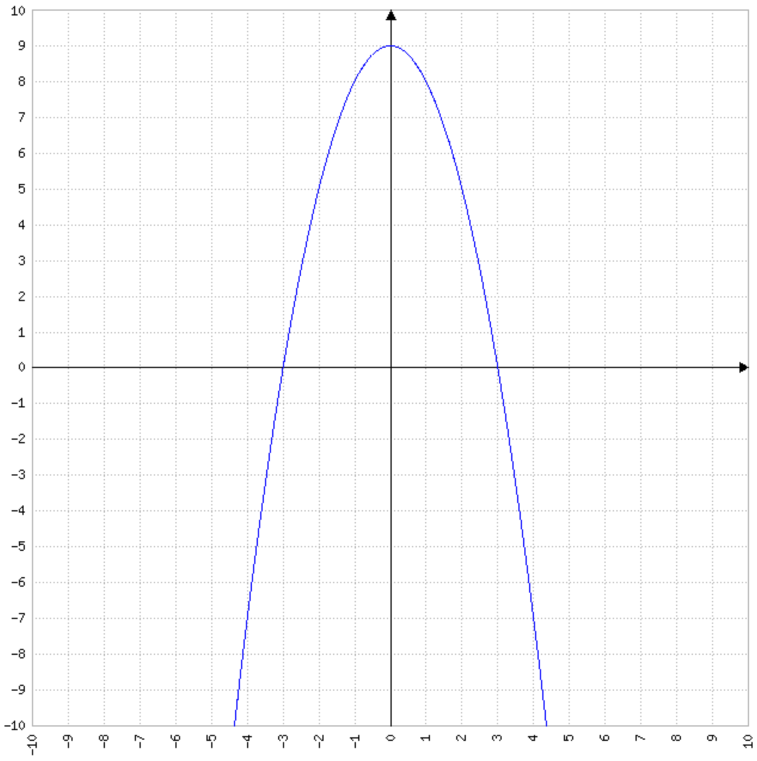
$|\alpha|= 3$
$\alpha= \pm 3.$



Se analiza cuándo es $\Delta_3= 0$:

$\Delta_3= 0$
$-\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{13}{2}= 0$
$(-1)\ (\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{13}{2})= 0$
$\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{13}{2}= \frac{0}{-1}$
$\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{13}{2}= 0.$

$\alpha_1, \alpha_2= \frac{-(\frac{-1}{2})\pm\sqrt{(\frac{-1}{2})^2-4*1(\frac{-13}{2})}}{2*1}$
$\alpha_1, \alpha_2= \frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+26}}{2}$
$\alpha_1, \alpha_2= \frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{105}{4}}}{2}$
$\alpha_1, \alpha_2= \frac{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{105}}{2}}{2}$
$\alpha_1= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{105}}{2}}{2}= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4}= 2{,}8117.$
$\alpha_2= \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{105}}{2}}{2}= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{105}}{4}= -2{,}3117.$



Para analizar si la forma cuadrática Q es definida positiva, definida negativa o indefinida, se analizan, en primer lugar, los casos donde $\Delta_3 \neq 0$ (es decir, cuando $\alpha \neq$ 2,8117 y $\alpha \neq$ -2,3117):

- Si $\alpha <$ -3, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si α= -3, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si -3 $< \alpha <$ -2,3117, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si -2,3117 $< \alpha <$ 2,8117, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 > 0$.
- Si 2,8117 $< \alpha <$ 3, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si α= 3, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$ y $\Delta_3 < 0$.
- Si $\alpha >$ 3, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ y $\Delta_3 < 0$.

Para analizar si la forma cuadrática Q es semidefinida positiva, semidefinida negativa o indefinida, se analizan, en segundo lugar, los casos donde $\Delta_3 = 0$ (es decir, cuando α= 2,8117 y α= -2,3117):

- Si α= -2,3117, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$.
- Si α= 2,8117, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$.

Por lo tanto, la forma cuadrática Q: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

- definida positiva si -2,3117 $< \alpha <$ 2,8117, ya que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 > 0$.
- semidefinida positiva si α= -2,3117 o α= 2,8117, ya que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 = 0$.
- indefinida si $\alpha <$ -2,3117 o $\alpha >$ 2,8117.

Ejercicio 2.

Considerar la siguiente ecuación en diferencias:

y_{t+2} - $5y_{t+1}$ + $4y_t$= e^t + *1.*

(a) *Hallar todas las soluciones.*

Se parte de saber que la solución general de una ecuación en diferencias son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a ésta más la solución particular:

y_t= y_t^h + y_t^p.

Siendo así, en primer lugar, se buscan las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación en diferencias:

y_{t+2} - $5y_{t+1}$ + $4y_t$= 0.

Sea y_t= r^t, se tiene:

r^{t+2} - $5r^{t+1}$ + $4r^t$= 0
r^t (r^2 - 5r + 4)= 0.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan las soluciones de la ecuación homogénea:

$r_1, r_2 = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4*1*4}}{2*1}$
$r_1, r_2 = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$
$r_1, r_2 = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2}$
$r_1, r_2 = \frac{5\pm3}{2}$
$r_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4.$
$r_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

Entonces, la solución homogénea es la siguiente:

y_t^h= C_1 4^t + C_2 1^t
y_t^h= C_1 4^t + C_2 * 1
y_t^h= C_1 4^t + C_2.

En segundo lugar, dado que 1 es raíz (simple) de la ecuación r^2 - 5r + 4= 0, se propone la siguiente solución particular:

y_t^p= $k_1 e^t$ + k_2t.

Resolviendo en la ecuación en diferencias, se tiene:

$[k_1 e^{t+2}$ + k_2 (t + 2)] - 5 [$k_1 e^{t+1}$ + k_2 (t + 1)] + 4 ($k_1 e^t$ + k_2t)= e^t + 1
($k_1 e^{t+2}$ + k_2t + 2k_2) - 5 ($k_1 e^{t+1}$ + k_2t + k_2) + 4$k_1 e^t$ + 4k_2t= e^t + 1
$k_1 e^{t+2}$ + k_2t + 2k_2 - 5$k_1 e^{t+1}$ - 5k_2t - 5k_2 + 4$k_1 e^t$ + 4k_2t= e^t + 1
$k_1 e^{t+2}$ - 3k_2 - 5$k_1 e^{t+1}$ + 4$k_1 e^t$= e^t + 1
(e^2 - 5e + 4) $k_1 e^t$ - 3k_2= e^t + 1.

Luego, se tiene que las constantes k_1 y k_2, respectivamente, son iguales a:

(e^2 - 5e + 4) $k_1 e^t$= e^t
$k_1= \frac{e^t}{(e^2-5e+4)e^t}$
$k_1= \frac{1}{e^2-5e+4}$.

-3k_2= 1
$k_2= \frac{1}{-3}$
$k_2= \frac{-1}{3}$.

Entonces, la solución particular es la siguiente:

$y_t^p= \frac{e^t}{e^2-5e+4} - \frac{t}{3}$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$y_t= C_1\ 4^t + C_2 + \frac{e^t}{e^2-5e+4} - \frac{t}{3}$.

(b) *Hallar la única solución de la ecuación homogénea asociada que cumple con los datos iniciales y_0= 1 e y_1= 10000.*

En primer lugar, se utilizan los datos iniciales y_0= 1 e y_1= 10000 en la solución general de ecuación en diferencias:

y_0= 1
$C_1\ 4^0 + C_2 + \frac{e^0}{e^2-5e+4} - \frac{0}{3}$= 1
$C_1 * 1 + C_2 + \frac{1}{e^2-5e+4}$ - 0= 1
$C_1 + C_2 + \frac{1}{e^2-5e+4}$= 1
$C_1 + C_2$= 1 - $\frac{1}{e^2-5e+4}$
C_2= 1 - $\frac{1}{e^2-5e+4}$ - C_1. (1)

y_1= 10000
$C_1\ 4^1 + C_2 + \frac{e^1}{e^2-5e+4} - \frac{1}{3}$= 10000
4$C_1 + C_2 + \frac{e}{e^2-5e+4} - \frac{1}{3}$= 10000

$4C_1 + C_2 = 10000 - \frac{e}{e^2-5e+4} + \frac{1}{3}$
$4C_1 + C_2 = \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4}$. (2)

Luego, reemplazando (1) en (2), se tiene:

$4C_1 + 1 - \frac{1}{e^2-5e+4} - C_1 = \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4}$
$3C_1 = \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4} - 1 + \frac{1}{e^2-5e+4}$
$3C_1 = \frac{29998}{3} + \frac{1-e}{e^2-5e+4}$
$C_1 = \frac{\frac{29998}{3} + \frac{1-e}{e^2-5e+4}}{3}$
$C_1 = \frac{29998}{9} + \frac{1-e}{3(e^2-5e+4)} \cong 3333.$ (3)

Y, por último, reemplazando (3) en (1) o en (2), se tiene:

$C_2 = 1 - \frac{1}{e^2-5e+4} - \frac{29998}{9} - \frac{1-e}{3(e^2-5e+4)}$
$C_2 = \frac{-29989}{9} + \frac{e-4}{3(e^2-5e+4)} \cong -3332.$ (4')

$4\,[\frac{29998}{9} + \frac{1-e}{3(e^2-5e+4)}] + C_2 = \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4}$
$\frac{11992}{9} + \frac{4-4e}{3(e^2-5e+4)} + C_2 = \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4}$
$C_2 = \frac{30001}{3} - \frac{e}{e^2-5e+4} - \frac{119992}{9} - \frac{4-4e}{3(e^2-5e+4)}$
$C_2 = \frac{-29989}{9} + \frac{e-4}{3(e^2-5e+4)} \cong -3332.$ (4'')

Por lo tanto, la única solución de la ecuación homogénea asociada que cumple con los datos iniciales $y_0 = 1$ e $y_1 = 10000$ es:

$y_t^h = 3333 * 4^t - 3332.$

Ejercicio 3.

Sean A, B ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ *las siguientes matrices:*

$$A=\begin{pmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar, si existen, todos los valores de k ∈ ℝ *para los cuales el sistema:*

$$(A^{2023}B^{2022} - A^{2022}B^{2023})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admite infinitas soluciones.

Se sabe que, si det ($A^{2023}B^{2022}$ - $A^{2022}B^{2023}$)= 0, el sistema (homogéneo) dado admite infinitas soluciones.

En primer lugar, el sistema (homogéneo) dado se puede reexpresar de la siguiente manera:

$$A^{2022}\ (\mathrm{AI - IB})\ B^{2022}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{2022}\ (\mathrm{A - B})\ B^{2022}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{2022}\left[\begin{pmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] B^{2022}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{2022}\begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1-k \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} B^{2022}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, se buscan los valores de k ∈ ℝ para los cuales se anula el determinante de esta matriz:

det (A^{2022} (A - B) B^{2022})= 0

[det $(A)]^{2022}$ det (A - B) [det (B)$]^{2022}$= 0 por (*)

$$\left[\begin{vmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right]^{2022}\begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1-k \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right]^{2022}= 0.$$

(*) siendo A, B C ∈ $\mathbb{R}^{nxn}$, det (ABC)= det (A) det (B) det (C).

Entonces, este determinante se anula cuando [det $(A)]^{2022}$= 0 o det (A - B)= 0 o [det $(B)]^{2022}$= 0, lo cual sucede cuando:

[det $(A)]^{2022}$= 0

det (A)= $\sqrt[2022]{0}$

det (A)= 0

$\begin{vmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$= 0

-{-[(k + 1) - k]} + [(k + 1) k - 1]= 0

-[-(k + 1 - k)] + k^2 + k - 1= 0

-(-1) + k^2 + k - 1= 0

1 + k^2 + k - 1= 0

k^2 + k= 0

k (k + 1)= 0

k_1= 0.

k_2= -1.

det (A - B)= 0

$\begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1-k \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$= 0

-(1 - k) (-k - 1)= 0

-(-k - 1 + k^2 + k)= 0

-(-1 + k^2)= 0

1 - k^2= 0

k^2= 1

$\sqrt{k^2}$= $\sqrt{1}$

$|k|$= 1

k_3= 1.

k_4= -1.

$[\det{(B)}]^{2022}$= 0

det (B)= $\sqrt[2022]{0}$

det (B)= 0

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$= 0

(2k - k) + [1 - 2 (-1)]= 0

k + 1 + 2= 0

k + 3= 0

k_5.= -3.

Por lo tanto, los valores de k ∈ ℝ para los cuales el sistema dado admite infinitas soluciones son 0, -1, 1 y -3.

Ejercicio 4.

Sea A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x3}$, *tal que (3, 3, 0) es autovector de A.*

(a) *¿Cuál es el valor de a?*

Como se sabe que (3, 3, 0) es autovector de A, se debe cumplir que:

(A - λI_{3x3}) v_{3x1}= 0_{3x3}

[$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - λ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$] $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$] $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3(3-\lambda)+3 \\ -6+3(a-\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 9-3\lambda+3 \\ -6+3a-3\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 12-3\lambda \\ -6+3a-3\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Luego, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} 12-3\lambda=0 \\ -6+3a-3\lambda=0 \end{cases}$.

Resolviendo, se tiene:

12 - 3λ= 0
3λ= 12
λ= $\frac{12}{3}$
λ= 4.

-6 + 3a - 3λ= 0
-6 + 3a - 3 * 4= 0
-6 + 3a - 12= 0
3a - 18= 0
3a= 18
a= $\frac{18}{3}$
a= 6.

Por lo tanto, el valor de a es 6.

(b) *¿Cuáles son todos los autovalores de A?*

det (A - λI)= 0

det ($\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - λ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)= 0

det ($\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$)= 0

det ($\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$)= 0

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$= 0

(1 - λ) [(3 - λ) (6 - λ) - 1 (-2)]= 0

(1 - λ) (18 - 3λ - 6λ + λ^2 + 2)= 0

(1 - λ) (λ^2 - 9λ + 20)= 0.

Entonces, los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico de A:

1 - λ= 0

λ_1= 1.

λ^2 - 9λ + 26= 0.

λ_2, λ_3= $\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4*1*20}}{2*1}$

λ_2, λ_3= $\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}$

λ_2, λ_3= $\frac{9\pm\sqrt{1}}{2}$

λ_2, λ_3= $\frac{9\pm1}{2}$

λ_2= $\frac{9+1}{2}$= $\frac{10}{2}$= 5.

λ_3= $\frac{9-1}{2}$= $\frac{8}{2}$= 4.

Por lo tanto, los autovalores de A son λ_1= 1, λ_2= 5 y λ_3= 4.

(c) *¿Es A inversible?*

A es inversible, ya que det (A)= $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$= 1 * 5 * 4= 20$\neq$ 0, porque $\lambda_i \neq 0$, para i= 1, 2, 3.

(d) *¿Es A diagonalizable?*

A es diagonalizable, ya que tiene n (3) autovalores distintos y, por lo tanto, los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable).

Ejercicio 5.

Sea A una matriz en $\mathbb{R}^{3x3}$, de la que se sabe que la traza es igual a 11, el det(A)= 36 y el rg(A - 2I_3)= 2. En base a la información suministrada, hallar todos los números reales α, β, γ y δ tales que:

$$\alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A + \delta I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que tr (A)= 11, det (A)= 36 y rg (A - 2I_3)= 2.

En primer lugar, por teorema de la dimensión, se tiene:

dim (Ker (A - 2I_3)) + dim (Img (A - 2I_3))= dim (A - 2I_3)
dim (Ker (A - 2I_3)) + rg (A - 2I_3)= dim (A - 2I_3)
dim (Ker (A - 2I_3)) + 2= 3
dim (Ker (A - 2I_3))= 3 - 2
dim (Ker (A - 2I_3))= 1.

Luego, existe un vector v tal que (A - 2I_3) v= 0, por lo que 2 es autovalor de A.

En segundo lugar, se tiene:

tr (A)= λ_1+ λ_2 + λ_3
11= 2 + λ_2 + λ_3
λ_2 + λ_3= 11 - 2
λ_2 + λ_3= 9
λ_3= 9 - λ_2. (1)

En tercer lugar, se tiene:

det (A)= $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$
36= 2$\lambda_2\lambda_3$
$\lambda_2\lambda_3 = \frac{36}{2}$
$\lambda_2\lambda_3$= 18. (2)

Luego, reemplazando (1) en (2), se tiene:

λ_2 (9 - λ_2)= 18
9λ_2 - λ_2^2= 18
λ_2^2 - 9λ_2 + 18= 0.

$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4*1*18}}{2*1}$
$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9\pm\sqrt{81-72}}{2}$
$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9\pm\sqrt{9}}{2}$

$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{9 \pm 3}{2}$
$\lambda_2 = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6.$
$\lambda_3 = \frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

Entonces, A es diagonalizable, ya que tiene n (3) autovalores distintos ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 3$) y, por lo tanto, los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable).

Siendo así, la igualdad dada se puede expresar de la siguiente manera:

$\alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma \text{A} + \delta I_{3x3} = 0_{3x3}$
$\alpha\ (PDP^{-1})^3 + \beta\ (PDP^{-1})^2 + \gamma PDP^{-1} + \delta \text{P}P^{-1} = 0_{3x3}$ por (*)
$\alpha \text{PD}^3 P^{-1} + \beta \text{PD}^2 P^{-1} + \gamma \text{PD}P^{-1} + \delta \text{P}P^{-1} = 0_{3x3}$ por (**)
$\text{P}\ (\alpha D^3 + \beta D^2 + \gamma \text{D} + \delta I_{3x3})\ P^{-1} = 0_{3x3}$
$P^{-1}\text{P}\ (\alpha D^3 + \beta D^2 + \gamma \text{D} + \delta I_{3x3})\ P^{-1}\text{P} = P^{-1} 0_{3x3}\text{P}$ por (***)
$I_{3x3}\ (\alpha D^3 + \beta D^2 + \gamma \text{D} + \delta I_{3x3})\ I_{3x3} = 0_{3x3}$
$\alpha D^3 + \beta D^2 + \gamma \text{D} + \delta I_{3x3} = 0_{3x3}.$

(*) $I_{3x3} = \text{P}P^{-1}$.
(**) $(PDP^{-1})^n = \text{P}D^n P^{-1}$.
(***) pre-multiplicando por P^{-1} y pos-multiplicando por P, a ambos lados de la igualdad.

Reemplazando D por la matriz diagonal correspondiente, se tiene:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 6^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\alpha \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 216 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 8\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 216\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 27\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 36\beta & 0 \\ 0 & 0 & 9\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 6\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 3\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta & 0 & 0 \\ 0 & 216\alpha + 36\beta + 6\gamma + \delta & 0 \\ 0 & 0 & 27\alpha + 9\beta + 3\gamma + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ 216\alpha + 36\beta + 6\gamma + \delta = 0. \\ 27\alpha + 9\beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

Resolviendo (se utiliza Symbolab), se tiene:

$\alpha = \frac{\gamma}{36}.$
$\beta = \frac{-11\gamma}{36}.$

δ= -γ.

Por lo tanto, los números reales α, β, γ y δ que cumplen con la igualdad dada son $\frac{\gamma}{36}$, $\frac{-11\gamma}{36}$, γ y -γ, respectivamente.