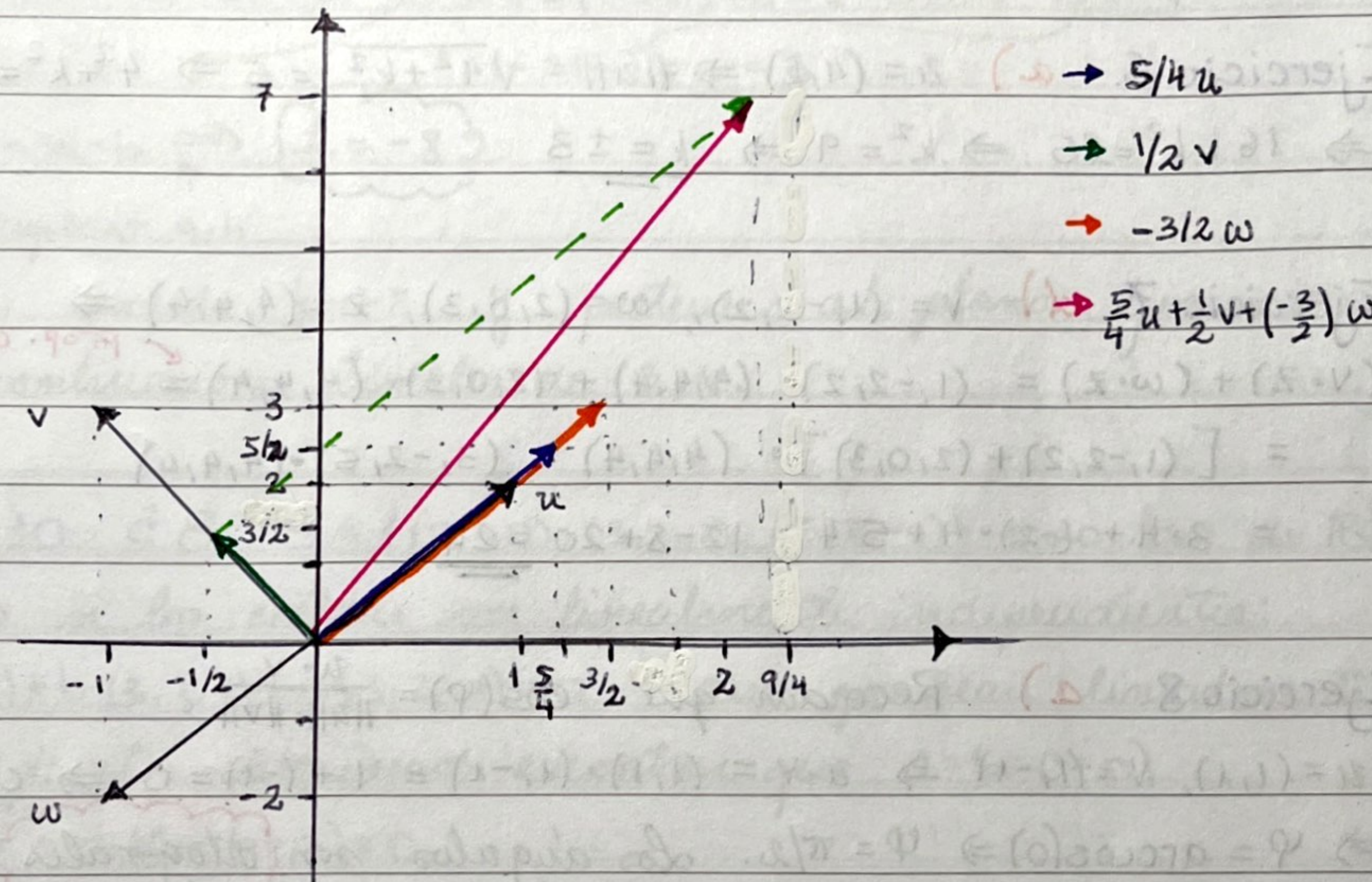
## Prácticas de matemática I - Maestría en econometría

### Trabajo Práctico 1

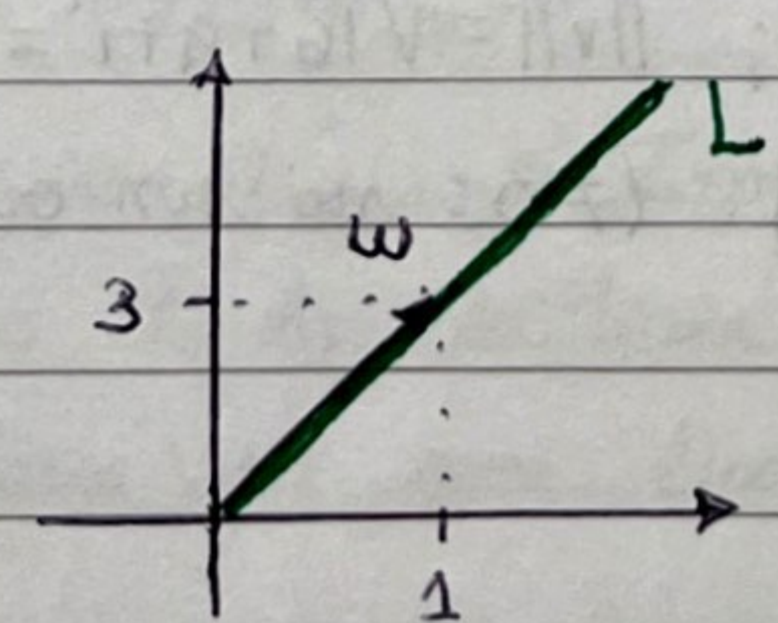
**Ejercicio 1.** i) $u=(1,2)$, $v=(-1,3)$, $\omega=(-1,-2)$

$$\tfrac{5}{4}u+\tfrac{1}{2}v+\left(-\tfrac{3}{2}\right)\omega = \tfrac{5}{4}(1,2)+\tfrac{1}{2}(-1,3)+\left(-\tfrac{3}{2}\right)(-1,-2) \overset{df}{=}$$

$$\left(\tfrac{5}{4},\tfrac{5}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right)+\left(\tfrac{3}{2},3\right) \underset{\text{asociatividad}}{=} \left(\tfrac{5}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2},\ \tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}+3\right)=\left(\tfrac{9}{4},7\right)$$




**Ejercicio 2.** b) $L=\{t\omega : t\in\mathbb{R}_{\geq 0}\}$; $\omega=(1,3)$




**Ejercicio 4.** a) $v=(x,3)$; $\omega=(2,x+y)$. $v=\omega \Rightarrow (x,3)=(2,x+y)$

$x=2$, $3=x+y \Rightarrow 3=2+y \Rightarrow y=1$. Luego, $(x,y)=(2,1)$

d) $v=x(2,y)=(2x,yx)$; $w=y(1,-2)=(y,-2y)$. $w=v \Rightarrow (2x,yx)=(y,-2y)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x=y \\ yx=-2y \end{cases} \longrightarrow (\cancel{2}x)\,x=-2(\cancel{2}x) \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x(2+x)=0$

dos casos

CASO 1: $x=0 \Rightarrow y=0$; CASO 2: $x=-2 \Rightarrow y=-4$

Luego, $(x,y)\in\{(0,0),(-2,-4)\}$

Ejercicio 5. a) $u=(-3,1,-2,4,-5) \Rightarrow \|u\|=\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2+4^2+(-5)^2}=$
$=\sqrt{9+1+4+16+25}=\sqrt{55} \Rightarrow u'=\dfrac{u}{\|u\|}=\left(\dfrac{-3}{\sqrt{55}},\dfrac{1}{\sqrt{55}},\dfrac{-2}{\sqrt{55}},\dfrac{4}{\sqrt{55}},\dfrac{-5}{\sqrt{55}}\right)$

Ejercicio 6. a) $u=(4,k) \Rightarrow \|u\|=\sqrt{4^2+k^2}=5 \Rightarrow 4^2+k^2=5^2=25$
$\Rightarrow 16+k^2=25 \Rightarrow k^2=9 \Rightarrow \underline{k=\pm 3}$

Ejercicio 7. d) $v=(1,-2,2)$, $w=(2,0,3)$, $z=(4,4,4) \Rightarrow$
$(v\cdot z)+(w\cdot z)=(1,-2,2)\cdot(4,4,4)+(2,0,3)\cdot(4,4,4)=$ prop. distributiva
$=[(1,-2,2)+(2,0,3)]\cdot(4,4,4)=(3,-2,5)\cdot(4,4,4)$
$=3\cdot 4+(-2)\cdot 4+5\cdot 4=12-8+20=\underline{24}$

Ejercicio 8. a) Recordar que $\cos(\varphi)=\dfrac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$.
$u=(1,1)$, $v=(1,-1) \Rightarrow u\cdot v=(1,1)\cdot(1,-1)=1+(-1)=0 \Rightarrow \cos(\varphi)=0$
$\Rightarrow \varphi=\arccos(0) \Rightarrow \varphi=\pi/2$. Los ángulos son ortogonales

b) $u=(3,-1,2)$, $v=(4,3,-1) \Rightarrow u\cdot v=(3,-1,2)\cdot(4,3,-1)=$
$=12-3-2=7$; $\|u\|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$; $\|v\|=\sqrt{16+9+1}=\sqrt{26}$
$\Rightarrow \cos(\varphi)=\dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} \Rightarrow \varphi=\arccos\left(\dfrac{7}{\sqrt{390}}\right)$. ($\neq 0$: no son ortogonales).

Ejercicio 9. $u=(1,-3,2)$, $v=(2,-1,1)$

a) $w=(1,7,-4)=au+bv=(a,-3a,2a)+(2b,-b,b)=(a+2b,-3a-b,2a+b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a+2b \Rightarrow 1-2b = a \Rightarrow -4 = 2(1-2b)+b = 2-3b \Rightarrow \boxed{b=2} \\ 7 = -3a-b \qquad\qquad 1-2(2) = \boxed{a=-3} \\ -4 = 2a+b \end{cases}$$

Por último, chequeamos que a,b sea una solución viendo si satisface la segunda ecuación (la que aún no usamos):

$7 = -3a-b \Rightarrow 7 = 9-2$ ✓

c) $y = (1,k,5) = au+bv = (a+2b, -3a-b, 2a+b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a+2b \Rightarrow 1-2b = a \Rightarrow 5 = 2(1-2b)+b = 2-3b \Rightarrow \underline{b=-1} \\ 5 = 2a+b \qquad\qquad 1-2(-1) = \underline{a=3} \\ k = -3a-b \Rightarrow \boxed{k=-8} \end{cases}$$

reemplazo a,b

Es decir, cuando $k=-8$, y pertenece al plano generado por las combinaciones lineales de u, v.

Ejercicio 10. ¿Es $S = \{(2,1,0),(3,1,1),(3,2,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

Chequeamos si los vectores son linealmente independientes:

$a(2,1,0)+b(3,1,1)+c(3,2,-1) = 0$ (para que sean linealmente independientes deberíamos encontrar que $a=b=c=0$).

$\Rightarrow (2a+3b+3c, a+b+2c, b-c) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+3b+3c=0 \rightarrow 2a+6c=0 \Rightarrow a=-3c \rightarrow \text{Metiendo esto} \\ a+b+2c=0 \qquad \text{en la segunda ecuación:} \\ b-c=0 \Rightarrow b=c \qquad a+b+2c = 0 = -3c+c+2c \checkmark \end{cases}$$

Encontramos que, si tomamos $c=1, b=1, a=-3$ se cumple que la suma de los vectores es cero; luego S no es base porque los vectores no son linealmente independientes.

Ejercicio 11. Sea $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2z-3t+2y = 0\}$

Si $(x,y,z,t) \in T \Rightarrow x = -2z+3t-2y$. Entonces,

$(x,y,z,t) = (-2y-2z+3t, y, z, t) = y(-2,1,0,0)+z(-2,0,1,0)+t(3,0,0,1)$

Luego, $T = \langle (-2,1,0,0), (-2,0,1,0), (3,0,0,1) \rangle$

Ejercicio 12 b) $\{(1,0,1), (1,1,0)\}$ ← no es base: falta 1 dimensión
d) $\{(1,2,1), (1,3,1), (1,4,1), (1,5,1)\}$ ← no es base: no son linealmente independientes (sobra una dimensión)
e) $\{(1,1,1), (-2,1,0), (-1,0,1)\}$ ← es base: se puede chequear que son linealmente independientes.

Ejercicio 13 $B = \{(2,1,1), (1,-1,3), v\}$; $[(1,-2,5)]_B = (2,-1,3)$

$\Rightarrow (1,-2,5) = 2(2,1,1) + (-1)(1,-1,3) + 3v$

$(1,-2,5) = (4,2,2) + (-1,1,-3) + 3v$ } asociatividad

$(1,-2,5) = (3,3,-1) + 3v$ } $\exists$ inversa

$(-3,-3,1) + (1,-2,5) = 3v$

$(-2,-5,6) = 3v \Rightarrow v = (-2/3, -5/3, 2)$

Ejercicio 14. $B = \{(-1,4,2), v, (0,0,-1)\}$; $B' = \{w, (1,-1,1), (-1,0,2)\}$

$[v]_{B'} = (1,2,3)$; $[w]_B = (1,2,3)$

$\begin{cases} v = 1\cdot w + 2\cdot(1,-1,1) + 3\cdot(-1,0,2) \Rightarrow v = w + (-1,-2,8) \quad (A) \\ w = 1\cdot(-1,4,2) + 2v + 3\cdot(0,0,-1) \end{cases}$ } conmutatividad

$w = (-1,4,2) + (0,0,-3) + 2v$

$w = (-1,4,-1) + 2v$ → meto esto en (A):

$v = (-1,4,-1) + 2v + (-1,-2,8)$ } conmutatividad

$v = (-2,2,7) + 2v$ } $\exists -v$

$0 = (-2,2,7) + \underbrace{2v - v}_{=v}$

$\Rightarrow v = (2,-2,-7)$ → $w = (3,0,-15)$

Ejercicio 15. Recordar: $W \subset V$ es subespacio de $V$ si y sólo si
- $\forall k \in \mathbb{R}, \forall w \in W \Rightarrow kw \in W$; 
- $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$
- $(x,y,z) \in W \Rightarrow x = y = z \Rightarrow \forall k, kx = ky = kz \Rightarrow (kx, ky, kz) \in W \Rightarrow k(x,y,z) \in W$

• $(x_1,y_1,z_1)\in W,\ (x_2,y_2,z_2)\in W \Rightarrow x_1=y_1=z_1,\ x_2=y_2=z_2 \Rightarrow$
$x_1+x_2=y_1+y_2=z_1+z_2 \Rightarrow (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)\in W \Rightarrow (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\in W$ □

c) $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ 2y+3z=0\}$

• $(x,y,z,t)\in W \Rightarrow 2y+3z=0 \Rightarrow \forall k\in\mathbb{R},\ (2y+3z)k=0 \Rightarrow 2(yk)+3(kz)=0$
$\Rightarrow (kx,ky,kz,kt)\in W \Rightarrow k(x,y,z,t)\in W.$

• $(x_1,y_1,z_1,t_1),\ (x_2,y_2,z_2,t_2)\in W \Rightarrow 2y_1+3z_1=0,\ 2y_2+3z_2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)=0 \Rightarrow (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2,\ t_1+t_2)\in W \Rightarrow$
$(x_1,y_1,z_1,t_1)+(x_2,y_2,z_2,t_2)\in W$ □

Ejercicio 16. Notemos que los vectores que se pueden producir son: $(1-\alpha)(2,2,4)+\alpha(5,0,3) = (2(1-\alpha)+5\alpha,\ 2(1-\alpha),\ 4(1-\alpha)+3\alpha)=$
$=(2+3\alpha,\ 2-2\alpha,\ 4-\alpha)$

a) Supongamos que el vector se puede producir. Entonces, $\exists\ \alpha\in[0,1]$ tal que $(5/2,\ 1,\ 7/2)=(2+3\alpha,\ 2-2\alpha,\ 4-\alpha)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-\alpha=7/2 \Rightarrow \alpha=1/2 \\ 5/2=2+3\alpha \Rightarrow \alpha=1/6 \\ 1=2-2\alpha \end{cases}$$

¡Absurdo! Luego el vector no se puede producir.

b) Si el vector puede producirse: $(9/2,\ 1/3,\ 19/6)=(2+3\alpha,\ 2-2\alpha,\ 4-\alpha)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+3\alpha=9/2 \Rightarrow \alpha=5/6 \\ 2-2\alpha=1/3 \Rightarrow \alpha=5/6 \\ 4-\alpha=19/6 \Rightarrow \alpha=5/6 \end{cases}$$

Luego el vector puede producirse eligiendo $\alpha=5/6$.

## Trabajo práctico 2

Ejercicio 1. a) $S_1=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:\ A^t=A\}$

• $A\in S_1 \Rightarrow (kA)^t = k\,A^t = kA,\ \forall k\in\mathbb{R} \Rightarrow kA\in S_1$

• $A_1, A_2\in S_1 \Rightarrow (A_1+A_2)^t = A_1^t+A_2^t = A_1+A_2 \Rightarrow A_1+A_2\in S_1$ □