Microeconomía

Ingreso MECAP

Teoría del consumidor

Ecuación de Slutsky

Tomás Bustos
tomasmbustos@gmail.com

Verano 2023

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

Introducción

Ya hicimos el ejercicio de estática comparada con las funciones de demanda marshallianas. Podemos hacerlo también con las funciones de demanda compensada de lo cual surgen dos propiedades interesantes.

- La demanda compensada de un bien es una función no creciente de su precio:

$$\frac{\partial x_i^c(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} \leq 0$$

- Los efectos precio cruzados son simétricos:

$$\frac{\partial x_i^c(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^c(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i}$$

Introducción

- Estas propiedades son ciertas para la función de demanda compensada pero no para la función de demanda marshalliana.
- Queremos entender cuál es la diferencia fundamental entre las demandas marshallianas y las hicksianas.
- Intuitivamente, la demanda compensada es caracteriza la elección óptima del consumidor sin ningún límite presupuestario.
- Vamos a ver que la diferencia fundamental es que la función de demanda marshalliana tiene efecto ingreso, mientras que la función de demanda compensada no lo tiene.

Table of Contents

Definiciones

Una pregunta importante para la teoría del consumidor refiere a la respuesta que deberíamos esperar de la cantidad demandada, x_1, cuando el precio de un bien cambia.

$$\uparrow p_1 \quad \Rightarrow \quad \uparrow\downarrow x_1^M$$ ¿Por qué sube o baja?

¿Cuáles son las causas que motivan un cambio de x_1^M?

Definiciones

En nuestro modelo hay dos razones conceptualmente separadas por las esperaríamos cambios de x_1 cuando p_1 sube:

- Por cambio de precios relativos
- Por pérdida de poder adquisitivo

El primer economista en analizar esta descomposición fue John Hicks, que se sirvió del concepto teórico de la demanda compensada para ello.

Efecto sustitución

Efecto Sustitución (ES)

El efecto sobre x_i^M debido al cambio de precios relativos (ese bien se vuelve relativamente más caro/barato en comparación con otros bienes).

Incluso si el poder adquisitivo del consumidor no cambiara, esperaríamos que sustituyera el bien relativamente más caro por el ahora relativamente más barato.

$$\uparrow p_1 \quad \Rightarrow \quad ES: \downarrow x_1^M \ \uparrow x_2^M$$

Algo bueno:

- El ES siempre tiene la misma dirección
- Solo en caso de Complementarios Perfectos el ES es siempre 0 en ambos bienes
- Con Sustitutos Perfectos el ES puede ser 0 en algunos casos

Efecto sustitución

- La descomposición hicksiana del efecto total de un cambio de precio comienza con la observación de que el consumidor alcanza cierto nivel de utilidad a los precios originales antes de que se produzca cualquier cambio.
- Formalmente, el ES es el cambio (hipotético) en el consumo que se produciría si los precios relativos cambiaran a sus nuevos niveles pero la utilidad máxima que el consumidor puede lograr se mantuviera igual que antes del cambio de precio.

Definiciones

Efecto Ingreso (EI)

El efecto sobre x_i^M de una disminución generalizada del poder adquisitivo.

Cuando el precio de cualquier bien aumenta, el poder adquisitivo del consumidor disminuye si decide consumir una cantidad positiva del bien cuyo precio aumentó.

$$\begin{array}{llll}
\uparrow p_1 & \Rightarrow & EI: \downarrow x_1^M \ \downarrow x_2^M & \text{Si ambos normales} \\
\uparrow p_1 & \Rightarrow & EI: \downarrow x_1^M \ \uparrow x_2^M & x_1 \text{ normal, } x_2 \text{ inferior} \\
\uparrow p_1 & \Rightarrow & EI: \uparrow x_1^M \ \downarrow x_2^M & x_1 \text{ inferior, } x_2 \text{ normal}
\end{array}$$

El efecto ingreso lo vamos a calcular como un residuo: es lo que queda del efecto total después del efecto de sustitución.

Definiciones

Efecto Total (ET)

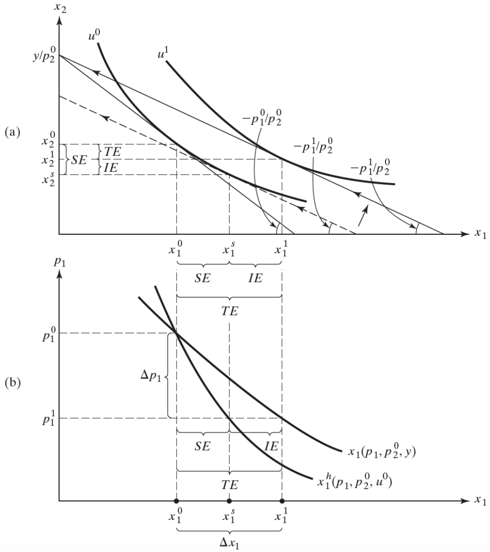
El efecto sobre X^* observado.

$$ET = ES + EI$$

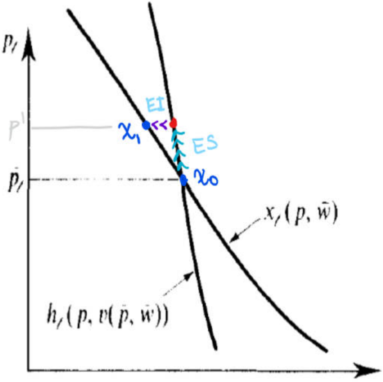
Esto quiere decir que la dirección del ET observado va a depender de la dirección y magnitud del ES y EI.

	X^*	Y^*
ES		
EI		
ET		

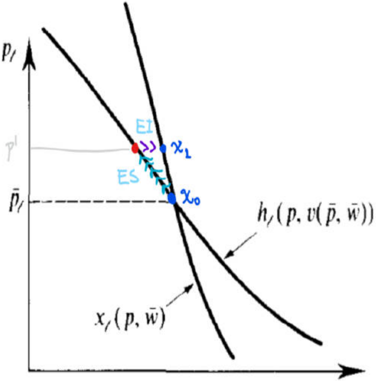
Efecto Sustitución y Efecto Ingreso



Efecto Sustitución y Efecto Ingreso



(a) Bien normal



(b) Bien inferior

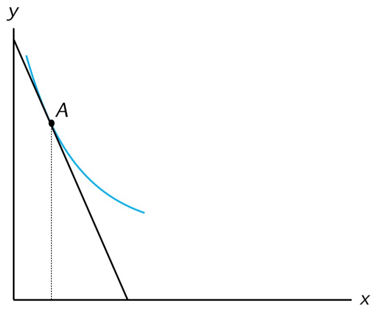
Efecto Sustitución y Efecto Ingreso

- La curva de demanda hicksiana captura el ES ante un cambio de precio propio
- La curva de demanda marshalliana captura el ET ante un cambio en el precio propio
- Las relaciones entre el efecto total, el efecto sustitución y el efecto ingreso ante un cambio marginal en un precio, se resumen en la **ecuación de Slutsky**
- Para cambios discretos en las precios –″saltos grandes″– podemos computar el efecto ingreso y efecto sustitución como el cambio en dichas demandas:

$$ES = x_1^c(\mathbf{p}', \bar{u}) - x_1^c(\mathbf{p}, \bar{u})$$
$$ET = x_1^M(\mathbf{p}', m) - x_1^M(\mathbf{p}, m)$$
$$EI = ET - ES$$

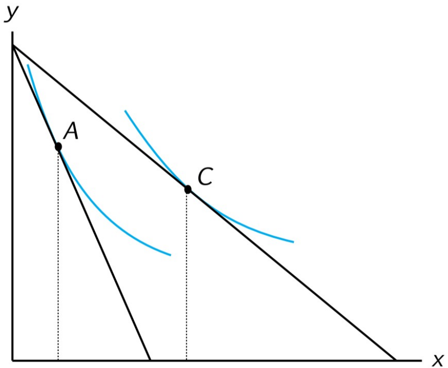
Identificación gráfica

Vamos a identificar gráficamente la parte del cambio en x_1 y x_2 que se debe a los precios relativos y la parte que se debe a la pérdida/ganancia de poder adquisitivo.



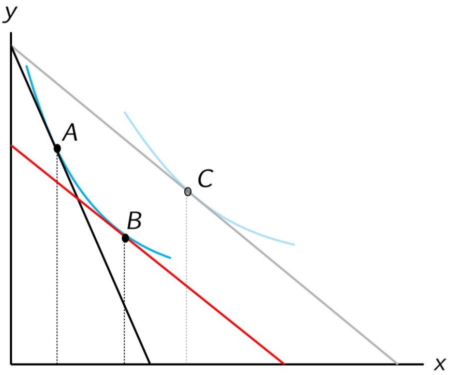
- Dados p_1, p_2 y m, el consumidor elige óptimamente la canasta A. Esa es la canasta que prefiere entre todas las canastas asequibles.

Identificación gráfica



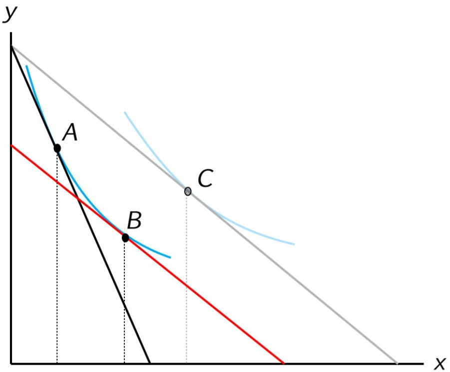
- Ante una reducción de p_1, las posibilidades de consumo cambian y ahora la canasta óptima la C
- El poder adquisitivo del consumidor creció y que los precios relativos cambiaron
- El **ET se identifica fácilmente**

Identificación gráfica



- Queremos descomponer ET en ES y EI
- El ES es el cambio (hipotético) que ocurriría si los precios relativos cambiaran a sus nuevos niveles, pero la utilidad que el consumidor puede lograr se mantuviera igual que antes del cambio de precio

Identificación gráfica



- Queremos descomponer ET en ES y EI
- El EI es lo que queda.

$$ET = ES + EI$$

Notar que el paso de B a C se ve como una expansión del ingreso

Identificación gráfica

Logramos descompener gráficamente la parte del cambio en X e Y que se debe a los precios relativos y la parte que se debe a la pérdida/ganancia de poder adquisitivo.

- **A-B**: Efecto Sustitución
- **B-C**: Efecto Ingreso
- **A-C**: Efecto Total

El punto **B** es una **herramienta teórica** que nos permite descomponer el ET en ES y EI.

Table of Contents

Ecuación de Slutsky

- Por dualidad:

$$x_i^c(\mathbf{p}, u) = x_i^M(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))$$

- Derivando ambos miembros de la ecuación con respecto a algún precio p_j:

$$\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) + \frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))\frac{\partial e}{\partial p_j}(\mathbf{p}, u)$$

- Utilizando el Lema de Shephard y dualidad:

$$\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) + \frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))x_j^c(\mathbf{p}, u)$$

$$= \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) + \frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))x_j^M(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))$$

Ecuación de Slutsky

- Lo anterior es válido para cualquier nivel u de utilidad.
- En particular, podemos utilizar la otra identidad de dualidad, $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m$, y obtenemos:

$$\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}(\mathbf{p}, m) + \frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, m) x_j^M(\mathbf{p}, m)$$

- Reordenando los términos obtenemos la **ecuación de Slutsky:**

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) - \frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, m) x_j^M(\mathbf{p}, m)$$

Ecuación de Slutsky

Ecuación de Slutsky

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) - \frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, m) \cdot x_j^M(\mathbf{p}, m)$$

Podemos ver que el efecto total de una variación en el precio consta de dos términos:

- **Efecto Sustitución:** $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m))$
- **Efecto Ingreso:** $-\frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, m) x_j^M(\mathbf{p}, m)$

Ecuación de Slutsky

- **Efecto ingreso:** La tasa a la cual el agente desea incrementar el consumo del bien i cuando cambia el ingreso se encuentra dada por $\frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, m)$. Por lo tanto, el efecto total que proviene del incremento del ingreso es: $-x_j^M(\mathbf{p}, m)\frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, m)$ (con el signo menos pues el cambio en el precio fue positivo).
- **Efecto sustitución:** cuando disminuye el precio del bien j el mismo se abarata con respecto al bien i, por lo tanto, el agente tiene incentivos a disminuir el consumo del bien que se encareció de manera relativa. Este cambio se encuentra dado por $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m))$.

Ecuación de Slutsky

- Ahora pensemos en el efecto del cambio en un precio de un bien sobre ese mismo bien.

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i}(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial x_i^c}{\partial p_i}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) - \frac{\partial x_i^M}{\partial m}(\mathbf{p}, m) x_i^M(\mathbf{p}, m)$$

- Sabemos que el efecto sustitución es siempre negativo (propiedad de la demanda hicksiana que ya estudiamos). Por lo tanto, si el bien i es normal, el efecto ingreso refuerza el efecto sustitución y necesariamente el bien i es un bien ordinario.

Ecuación de Slutsky

Corolario

- Los bienes normales necesariamente son ordinarios
- Los bienes Giffen necesariamente son inferiores

- Notar que la única forma de un bien sea Giffen es porque el bien es tan inferior que el efecto ingreso supera el efecto sustitución (en valor absoluto).
- Por otra parte, los bienes inferiores también pueden ser ordinarios. Esto puede pasar si el efecto ingreso es pequeño comparado con el efecto sustitución.

Table of Contents

Elasticidades

- Recordemos que la elasticidad de una variable y respecto a otra variable x nos dice que efecto porcentual tiene x sobre y. La fórmula de la elasticidad es:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}$$

- Cuando la variación en x tiende a cero, sabemos que podemos reexpresar a la elasticidad como:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$$

- Dado que sabemos que la demanda Marshalliana depende de p_1, p_2 y m, podemos computar 3 elasticidades.

Elasticidades

- **Elasticidad precio**: nos indica cómo afecta un cambio porcentual en p_i a x_i:

$$\varepsilon_{x_i,p_i} = \frac{\partial x_i^M(\cdot)}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}$$

- Cuando $|\varepsilon_{x_i,p_i}| < 1$, decimos que la demanda del bien es **inelástica**, es decir, que la demanda reacciona menos que proporcionalmente frente a cambios en los precios.
- Cuando $|\varepsilon_{x_i,p_i}| = 1$, decimos que la demanda del bien tiene **elasticidad unitaria**, es decir, que la demanda reacciona proporcionalmente frente a cambios en los precios.
- Cuando $|\varepsilon_{x_i,p_i}| > 1$, decimos que la demanda del bien es **elástica**, es decir, que la demanda reacciona más que proporcionalmente frente a cambios en los precios.

Elasticidades

- **Elasticidad ingreso**: nos indica cómo afecta un cambio porcentual en m a x_i:

$$\varepsilon_{x_i,m} = \frac{\partial x_i^M(\cdot)}{\partial m}\frac{m}{x_i}$$

- Como el signo de $\varepsilon_{x_i,m}$ queda determinado por $\frac{\partial x_i^M(\cdot)}{\partial m}$, se sigue que cuando $\varepsilon_{x_i,m} > 0$, el bien es normal, cuando $\varepsilon_{x_i,m} < 0$, el bien es inferior y cuando $\varepsilon_{x_i,m} = 0$, el bien es independiente de la renta.
- **Elasticidad precio cruzada**: nos indica cómo afecta un cambio porcentual en p_j a x_i:

$$\varepsilon_{x_i,p_j} = \frac{\partial x_i^M(\cdot)}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}$$

- Como el signo de ε_{x_i,p_j} queda determinado por $\frac{\partial x_i^M(\cdot)}{\partial p_j}$, se sigue que cuando $\varepsilon_{x_i,p_j} > 0$, el bien es sustituto, cuando $\varepsilon_{x_i,p_j} < 0$, el bien es complementario y cuando $\varepsilon_{x_i,p_j} = 0$, el bien es independiente de j.

Ecuación de Slutsky

La ecuación de Slutsky puede expresarse en función de elasticidades

$$\varepsilon^{M}_{xi,p_i} = \varepsilon^{c}_{xi,p_i} - \varepsilon^{M}_{xi,m} * \frac{p_i \cdot x_i^M}{m}$$

Por lo tanto, encontramos que la elasticidad de un bien con respecto a su precio se puede descomponer en la elasticidad del efecto sustitución más la elasticidad del efecto ingreso proporcional a la fracción del gasto en el bien cuyo precio cambió.