Práctica 1

Espacios muestrales y eventos. Conteo - Solución

1. Espacios Muestrales, eventos y probabilidades

1.1. Ejercicio 1

i. Por principio de la multiplicación, Ω es un conjunto de cardinalidad finito con $\#\Omega = 6 \cdot 6 = 36$ ya que cada tirada de dado tiene 6 resultados. Sea n_i el resultado en la tirada i. Dado que todos los resultados son igual de probables, la probabilidad de cada resultado posible es $\frac{1}{36}$

		n_2					
		1	2	3	4	5	6
n_1	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ii.

$$A = \{\text{La suma de los dos números es por lo menos } 5\}$$

$$A = \left\{ \begin{matrix} (1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5), \\ (3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix} \right\}$$

$$B = \{\text{El valor del dado 1 es mayor que el dado 2}\}$$

$$B = \left\{ \begin{matrix} (2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) \end{matrix} \right\}$$

$$C = \{\text{El primer dado es un } 4\}$$

$$C = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$

iii.

$$A \cap C = C, \text{ porque } C \subseteq A$$

$$B \cup C = \left\{ \begin{matrix} (2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) \end{matrix} \right\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \left\{ \begin{matrix} (3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) \end{matrix} \right\}$$

iv. Los resultados posibles del espacio muestral Ω cuando los dados se arrojan **simultáneamente** (es decir que el orden no importa y no identificó los dados) son los siguientes (n_1 es el dado con mayor número en cada tirada):

		n_1					
		1	2	3	4	5	6
n_2	1	{1,1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
	2		{2,2}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
	3			{3,3}	{3,4}	{3,5}	{3,6}
	4				{4,4}	{4,5}	{4,6}
	5					{5,5}	{5,6}
	6						{6,6}

En este caso $P(\{i,j\}) = \frac{1}{18}$ si $i \neq j$ y $P(\{i,j\}) = \frac{1}{36}$ si $i = j$. Escrito de esta manera el espacio muestral no es equiprobable.

Para poder obtener las probabilidades podemos hacer uso del inciso i. En ese inciso cada resultado tenía la misma probabilidad ($\frac{1}{36}$), por lo cual podemos hacer un mapeo de los eventos en el inciso i con los eventos en este nuevo espacio muestral. De esta forma, obtenemos que:

$$\begin{gathered}\text{Resultado } (1,1) \longrightarrow \text{Resultado } (1,1) \text{ en el inciso i}\\ \text{Resultado } (2,1) \longrightarrow \text{Resultados } (1,2) \text{ y } (2,1) \text{ en el inciso i}\\ \text{Resultado } (3,1) \longrightarrow \text{Resultados } (1,3) \text{ y } (3,1) \text{ en el inciso i ...}\end{gathered}$$

Continuando el patrón, observamos que los elementos de la diagonal en la tabla $\{(1,1)(2,2),(3,3),(4,4)$ $,(5,5),(6,6)\}$ tienen una probabilidad de ocurrencia de $\frac{1}{36}$ (dado que se necesita 1 valor exacto en cada dado). Por el contrario, los elementos fuera de la diagonal poseen una probabilidad de ocurrencia de $\frac{1}{18}$, dado que se necesitan 2 valores pero no importa en qué dado sale cada valor.

1.2. Ejercicio 2

Ana, Beatriz y Cecilia tiran una moneda secuencialmente y la primera en obtener una cara gana.

$$\Omega = \{c, \times c, \times\times c, \times\times\times c, \ldots\}$$

i. El elemento $\underbrace{\times\times\times\cdots\times}_{n \text{ veces}} c$ es el resultado donde en las primeras n tiradas sale cruz y en la tirada $n+1$-ésima sale cara.

Definimos los siguientes conjuntos:

donde $A_i = \{\text{sale cara en el } 3n+i-\text{ésimo tiro con } n \in \mathbb{N}_0\}$, donde $i = 1,2,3$.

donde $A_\infty = \{\text{no sale cara}\}$

Entonces, $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_\infty$

iii.

$$\begin{aligned} A &= A_1\\ B &= A_2\\ (A\cup B)^c &= A_3 \cup A_\infty \end{aligned}$$

1.3. Ejercicio 3

i. Escribimos que $\Omega = \dot{\bigcup}_{m\in\mathbb{N}} A_m \dot{\bigcup} B$, donde

$$A_m = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_m) \text{ donde } a_i \in \{2,3,4,5,6\} \text{ para } i \in \{1,\ldots,m-1\} \text{ y } a_m = 1\}$$

$$B = \{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,\cdots) \text{ donde } b_i \in \{2,3,4,5,6\} \text{ para } i \in \mathbb{N}\}$$

Los eventos A_m describen los casos donde el 1 sale en la tirada m, mientras que el evento B corresponde al caso donde nunca sale el dado 1. Es un espacio infinito numerable.

ii. Sea A_m el evento donde se necesitan m tiros hasta obtener por primera vez el número 1. Luego, por ejemplo,

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

En general,

$$A_m = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_m) \text{ donde } a_i \in \{2,3,4,5,6\} \text{ para } i \in \{1,\ldots,m-1\} \text{ y } a_m = 1\}$$

iii.

Notemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega - B$. Luego, $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = (\Omega - B)^c = \varnothing$

Es decir el evento $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ lista todos los posibles casos en donde salen resultados en cada una de las tiradas del dado en el conjunto $\{2,3,4,5,6\}$ y nunca sale el número 1.

1.4. Ejercicio 4

Hay dos categorías en el espacio de eventos:

- Niveles de estudio (e): Universitario completo (c) y Universitario incompleto (nc). Son disjuntos y exhaustivos.
- Partido Político (p): Justicialista (j), Radical (r) o Independiente (i).
  Las categorías de quienes votan son :

$$C = \{(e,p), \text{ donde } e \in \{c, nc\} \text{ y } p \in \{j, r, i\}\}$$

$\#(\Omega) = 6$.

i

Si hay $n = 10$ personas, para cada empleado observamos (e,p). Hay $2 \cdot 3 = 6$ resultados posibles para cada persona.

$$\Omega = \{\text{Posibles respuestas para cada uno de los 10 empleados}\}$$
$$\Omega = \{(e_1, p_1, e_2, p_2, \cdots, e_{10}, p_{10}) \text{ donde } (e_i, p_i) \in C \text{ para } i \in \{1,2,\cdots,10\}\}$$
$$\#\Omega = 6^{10} \text{es la cantidad de resultados en el espacio muestral}$$

ii

$$B = \{\text{Al menos un miembro tiene universitario incompleto}\}$$
$$B^c = \{\text{Ningún miembro tiene universitario incompleto}\}$$
$$B^c = \{(nc, p_1, nc, p_2, \cdots, nc, p_{10}) \text{ donde } p_i \in \{j, r, i\} \text{ para } i \in \{1,2,\cdots,10\}\}$$
$$\#B^c = 3^{10} \text{ ya que cada persona puede elegir solamente a qué partido vota.}$$
$$\#B = \#\Omega - \#B^c = 6^{10} - 3^{10} = 60407127$$

iii

$$C = \{\text{Ningún miembro vota a un Independiente}\}$$
$$\Omega = \{(e_1, p_1, e_2, p_2, \cdots, e_{10}, p_{10}) \text{ donde } e_i \in \{c, nc\} \text{ y además } p_i \in \{j, r\} \text{ para } i \in \{1,2,\cdots,10\}\}$$

$\#C = 4^{10}$ ya que cada persona puede tener dos distintos tipos de nivel de estudio y puede elegir votar a dos partidos.

1.5. Ejercicio 5

i. Usando leyes de De Morgan

$$[A \cup B \cup C \cup D]^c = A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c$$
$$\therefore \text{ Verdadero}$$

ii. Usando leyes de De Morgan

$$[(A \cup B) \cap (C \cup D)]^c = (A \cup B)^c \cup (C \cup D)^c = (A^c \cap B^c) \cup (C^c \cap D^c) \therefore \text{ Verdadero}$$

iii. Usando leyes de De Morgan

$$[A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c]^c = A \cup B \cup C \cup D$$
$$\therefore \text{ Verdadero}$$

iv. La consigna dice, si $A \cap B = \varnothing$ entonces $A \uplus B = \Omega$.

No necesariamente es cierto, pueden existir que $A \cap B = \varnothing$ pero $A \cup B \neq \Omega$, es decir, que sean disjuntos pero no exhaustivos.

Por ejemplo, $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$ $B = \{2\}$, vale que $A \cap B = \varnothing$ pero $A \uplus B = \{1, 2, 3\} \subsetneq \Omega$

1.6. Ejercicio 6

Dado Ω, $P : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

(1) $P(\Omega) = 1$

(2) $A \subset \Omega \implies P(A) \geq 0$

(3) $A_1, \ldots, A_n$ mutuamente excluyentes $\implies P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

i

$$A^c = \Omega / A, \qquad A \cap A^c = \varnothing, \qquad A \cup A^c = \Omega$$
$$P\left(A \cup A^c\right) = P(A) + P\left(A^c\right) = 1 \implies P(A) = 1 - P\left(A^c\right)$$

ii

$$\varnothing = \Omega^c, \qquad P(\varnothing) = P\left(\Omega^c\right)$$
$$P\left(\Omega^c\right) = 1 - P(\Omega) = 0$$

iii

$$A \subset B, B = A \cup (A^c \cap B) \text{ Como } A \text{ y } (A^c \cap B) \text{ conjuntos son disjuntos se tiene que}$$
$$P(B) = P\left(A \cup A^c \cap B\right) = P(A) + P\left(A^c \cap B\right) \qquad \therefore P(B) \geq P(A)$$

iv

$$A \cup B = \left(A^c \cap B\right) \uplus (A \cap B) \uplus \left(A \cap B^c\right)$$
$$P(A \cup B) = P\left(A^c \cap B\right) + P(A \cap B) + P\left(A \cap B^c\right)$$
$$P(A) = P\left(A \cap B^c\right) + P(A \cap B) \implies P\left(A \cap B^c\right) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(B) = P\left(B \cap A^c\right) + P(A \cap B) \implies P\left(B \cap A^c\right) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Ejercicios de conteo y probabilidades

2.1. Ejercicio 1: Contando arreglos

2.1.1. Trabajadores y puestos

$$\text{Regla de Producto } 20! = \underline{20} \cdot \underline{19} \cdot \underline{18} \cdot \underline{17} \cdot \ldots \underline{1}$$

O equivalentemente consideramos que para el cada puesto de trabajo (desde el primero hasta el vigésimo) se elige una de las k personas disponibles que quedan.

Para el primer puesto de trabajo hay 20 personas disponibles y se elige una.

Para el segundo puesto de trabajo hay 19 personas disponibles y se elige una.

Para el tercer puesto de trabajo hay 18 personas disponibles y se elige una.

Por lo tanto,

$$\prod_{k=1}^{20} \binom{k}{1}$$

2.1.2. Beatles e instrumentos

4 integrantes y 4 instrumentos. Si los 4 integrantes pueden tocar los 4 instrumentos se pueden distribuir de 4! formas distintas.

Si hay 2 integrantes que tocan los 4 instrumentos y 2 que tocan sólo 2 instrumentos entonces se pueden distribuir de $2! \cdot 2!$ formas diferentes: entre Ringo y George se asignan la guitarra y la batería y entre John y Paul la voz y el piano.

2.1.3. Permutación de letras

Para contar la cantidad de arreglos de palabras usamos el coeficiente multinomial.

Sea n la cantidad total de letras, I categorías (agrupamos las mismas letras) y n_i la cantidad total de elementos en cada categoría con $\sum_{i=1}^{I} n_i = n$.

La cantidad total de formas de ordenar palabras de longitud n con I letras diferentes y donde donde cada grupo de letras tiene n_i, $i = 1, \cdots, I$ elementos es

$$\#Arreglos = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{I} n_i!}$$

i.

$$\text{MURCIELAGO} = 10 \text{ letras} \begin{cases} M \times 1 \\ U \times 1 \\ R \times 1 \\ C \times 1 \\ I \times 1 \\ E \times 1 \\ L \times 1 \\ A \times 1 \\ G \times 1 \\ O \times 1 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{10!}{1!1!1!1!1!1!1!1!1!1!} = 10!$$

ii.

$$\text{PARPADEO} = 8 \text{ letras} \begin{cases} P \times 2 \\ A \times 2 \\ R \times 1 \\ D \times 1 \\ E \times 1 \\ O \times 1 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{8!}{2!2!1!1!1!1!}$$

iii.

$$\text{PROBABILIDAD} = 12 \text{ letras} \begin{cases} P \times 1 \\ R \times 1 \\ O \times 1 \\ B \times 2 \\ A \times 2 \\ I \times 2 \\ L \times 1 \\ D \times 2 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{12!}{1!1!1!2!2!2!1!2!}$$

iv.

$$\text{MISSISSIPPI} = 11 \text{ letras} \begin{cases} M \times 1 \\ I \times 4 \\ S \times 4 \\ P \times 2 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{11!}{1!4!4!2!}$$

2.1.4. Pasantías en organismos internacionales

	Asia	América del Sur	Europa	América Central
Cupo	10	7	4	2
Candidatos	50	15	7	3

Por Regla del Producto $\#Pasant\acute{\imath}as = \#Asia \cdot \#Am\acute{e}rica\, del\, Sur \cdot \#Europa \cdot \#Am\acute{e}rica\, Central$

$$\#Pasant\acute{\imath}as = \binom{50}{10} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} = 45 * 6435 * 35 * 3 = 30405375$$

2.1.5. Sentando invitados

Según el enunciado hay 8 amigos ($n = 8$): 4 son hinchas de independiente ($n_I = 4$) y 4 son hinchas de Racing ($n_R = 4$).

i - No hay restricciones para sentarse

$$\#Formas\, diferentes = 8!$$

ii - Personas A y B deben sentarse juntas

$$\#Formas\, diferentes = 2! \cdot 7!$$

2! Formas de sentar a A y B (depende quién está sentado a la derecha de quién)

7! Formas de acomodarse de todos, A y B pasan a ser solo un individuo en el orden grupal iii- Si sólo un hincha de Independiente y un hincha de Racing pueden sentarse juntos, todos los de Racing se sientan juntos y todos los de Independientes se sientan juntos.

Hay dos maneras de sentar a los grupos: Racing a la izquierda o Racing a la derecha. Dentro de cada grupo hay 4! formas de ordenar a cada grupo.

$$\#Formas\,distintas = 2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$$

Otra forma de personarlo es: Elegís una de las 8 personas, después te quedan 3 opciones del mismo equipo para elegir a la seguna persona de la mesa, después quedan dos opciones y después 1. Después hay 4! opciones para elegir el orden en el que se sientan las personas del otro equipo.

$$\underline{8} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 8 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 1152$$

iv- 4 Parejas que deben sentarse juntas

Cada pareja tiene 2! formas de sentarse y hay 4! formas de ordenar las parejas entre sí.

$$\#Formas\,diferentes = (2!)^4 \cdot 4!$$

2.1.6. Patentamientos en Argentina

Patentamientos nuevos A-Q. En la actualidad esta la letra K. Quedan 6 letras (L,M,N,O,P,Q) para patentamientos nuevos

$$3 \text{ Letras} \longrightarrow \begin{cases} 1^o\ Letra = 6 \\ 2^o\ Letra = 26 \\ 3^o\ Letra = 26 \end{cases}$$

$$3 \text{ Números} \longrightarrow \begin{cases} 1^o = 10 \\ 2^o = 10 \\ 3^o = 10 \end{cases}$$

$$\#Patentamientos\,restantes = \underbrace{\underline{6} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26}}_{Letras} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}}_{Números} = 6 \cdot 26^2 \cdot 10^3$$

2.1.7. Mesa redonda

i. Sentar 8 personas alrededor de una mesa circular. Solo importa quien se sienta al lado de quien, no el asiento especifico.

$$\frac{8!}{8} = 7!$$

ii. Sentar a una pareja junta. Pensamos que la pareja conforma una sola persona, entonces tenemos "7 personas" que se sientan en una mesa redonda. Además consideramos que dependiendo de quién se siente a la derecha de su pareja; hay 2 maneras diferentes de hacerlo.

$$2 \cdot \frac{7!}{7} = 2 \cdot 6!$$

iii. Sentar a cuatro parejas juntas. Es similar al ejercicio de Racing e independiente pero en una mesa redonda.

$$2^4 \cdot \frac{4!}{4} = 2^4 \cdot 3!$$

iv. Sentar a tres parejas juntas.

$$2^3 \cdot \frac{5!}{5} = 2^3 \cdot 4!$$

v. Ringo-Lennon-McCartney

$$\frac{6!}{6} = 5!$$

vi. Ringo-Lennon-McCartney en cualquier orden

$$3!\frac{6!}{6} = 3! \cdot 5!$$

2.1.8. Bolitas indistinguibles y cajitas

i. $N \geq 2$ bolitas en $k \geq 4$ cajitas tal que hay una sola bolita en la 2da caja y una sola bolita en 4ta caja.

Lo que hacemos es poner una bolita cada una de las cajitas (2da y 4ta). Como las cajitas 2 y 4 tienen exactamente una bolita las separamos. Nos quedan para repartir $N-2$ bolitas indistinguibles en $k-2$ cajas distinguibles.

$$\binom{(N-2)+(k-2)-1}{(k-2)-1} = \binom{N+k-5}{k-3}$$

ii. $N \geq 2$ bolitas en $k \geq 4$ cajitas tal que hay una sola bolita en la 2da caja o al menos una bolita en 4ta caja.

Consideramos $A = \{$cantidad de casos donde hay exactamente una sola bolita en la 2da caja$\}$

$B = \{$cantidad de casos donde hay al menos una sola bolita en la 4ta caja$\}$

La consigna pregunta por $\#(A \cup B)$, donde A y B no son eventos disjuntos.

Para calcular $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Para poder calcular $\#(A)$, notemos lo siguiente. Para que en la segunda cajita haya exactamente una bolita, separamos 1 de las n bolitas, la ponemos en esa cajita y separamos la cajita del resto. Nos queda ordenar $N-1$ bolitas indistinguibles en $k-1$ cajas distinguibles.

$$\#(A) = \binom{(N-1)+(k-1)-1}{(k-1)-1} = \binom{N+k-3}{k-2}$$

Para poder calcular $\#(A)$, notemos lo siguiente. Tiene que haber al menos una bolita en la 4ta caja. Separamos 1 de las n bolitas, la ponemos en esa cajita y dejamos esa cajita Nos queda ordenar $N-1$ bolitas indistinguibles en k cajas distinguibles.

Luego,

$$\#(B) = \binom{N+k-2}{k-1}$$

Por último, el número de resultados donde hay una bolita en la 2da caja y al menos una bolita en la 4ta caja es

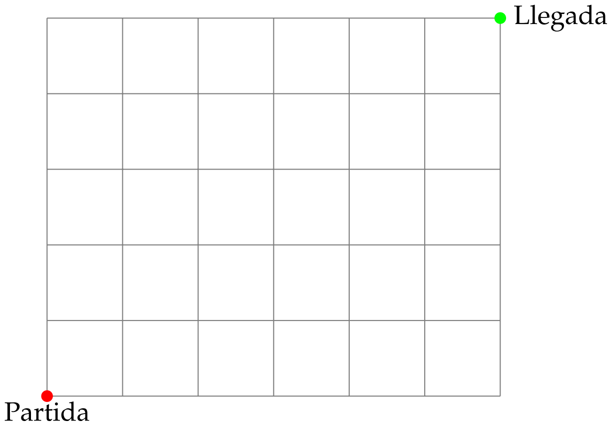
$$\#(A \cap B) = \binom{(N-2)+(k-1)-1}{(k-1)-1} = \binom{N+k-4}{k-2}$$

Por lo tanto,

$$\#(A \cup B) = \binom{N+k-3}{k-2} + \binom{N+k-2}{k-1} - \binom{N+k-4}{k-2}$$

2.1.9. Caminos Posibles

Para resolver este ejercicio, podemos pensar en el mapa de la ciudad como una grilla:



Para llegar a nuestro destino si o si deberemos caminar 11 cuadras, 6 cuadras hacia la derecha y 5 cuadras hacia arriba. Podemos representar cada cuadra hacia la derecha con la letra 'D' y cada cuadra hacia la arriba con la letra 'A'. Entonces, podemos reducir el problema a cuántas formas diferentes hay de crear una palabra de 11 letras con 6 letras 'D' y 5 letras 'A':

$$\text{11 letras}\begin{cases} D \times 6 \\ A \times 5 \end{cases} \implies \#Arreglos = \frac{11!}{6!5!} = 462$$

2.2. Ejercicio 2: Calculando probabilidades

2.2.1. Urna con 3 bolillas

i. Muestra $m = 2$ con reposición.

$$\#\Omega = \underline{3} \cdot \underline{3} = 9$$

Ω	A	R	V
A	(A, A)	(A, R)	(A, V)
R	(R, A)	(R, R)	(R, V)
V	(V, A)	(V, R)	(V, V)

ii. Al menos una bolilla roja (R)

$$P(R \geq 1) = 1 - P(R = 0) = 1 - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9}$$

iii. Ninguna bolilla roja (R)

$$P(R = 0) = 1 - P(R \geq 1) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

iv. Muestra $m = 2$ sin reposición.

$$\#\Omega = \binom{3}{2} = 6$$

$$\Omega = \{(A, R), (A, V), (R, A), (R, V), (V, A), (V, R)\}$$

$$P(R \geq 1) = 1 - P(R = 0) = 1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

2.2.2. Cartas

Hay $n = 52$ cartas. Las cartas se clasifican en dos categorías, palos y número de cartas: hay 4 palos y 13 cartas.

Con $m = 5$ cartas, obtenidas sin reposición, **la probabilidad de obtener un par simple es**:

$$P\left(Par\right) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: Necesitamos elegir uno de los 13 posibles números, de $\binom{13}{1}$ maneras, para saber qué número será el que nos toque en el doble y hay $\binom{4}{2}$ formas de elegir 2 de los 4 palos para que formen el doble.

Además, queremos que las 3 restantes cartas sean de números distintos entre sí y al número elegido en el par, por lo que hay $\binom{12}{3}$ maneras de elegir 3 números de los 12 números disponibles.

Para cada uno de esos 3 números elegidos (para esas tres cartas que no forman el par) hay que elegir un palo para cada carta entonces hay $\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}$ formas de elegir los palos para cada una de las cartas restantes.

La probabilidad de tener un par doble sacando $m = 5$ cartas:

$$P\left(Par\ Doble\right) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: Necesitamos elegir dos de los 13 posibles números, de $\binom{13}{2}$ maneras, para saber qué números serán los que nos toquen en los dos dobles (y no queremos que sea póker) y hay $\binom{4}{2}$ formas de elegir 2 de los 4 palos para cada uno de los dobles. Es decir hay $\binom{4}{2}\binom{4}{2}$ maneras de elegir los palos de los dos dobles.

Además, queremos que la carta restante sea un número distinto a los números elegidos en los dos pares, por lo que hay $\binom{11}{1}$ maneras de elegir 1 número de los 11 números disponibles.

Para ese número elegido (para esa carta que no forma ninguno de los pares) hay que elegir un palo entonces hay $\binom{4}{1}$ formas de elegir los palos para esa carta restante.

La probabilidad de sacar full con $m = 5$ cartas es:

$$P\left(Full\right) = \frac{2!\binom{13}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: Necesitamos elegir dos de los 13 posibles números, de $\binom{13}{2}$ maneras, para saber qué números serán los que nos toquen en el full y hay $\binom{4}{2}$ formas de elegir 2 de los 4 palos para las dos cartas que sean el mismo número en el full y hay $\binom{4}{3}$ formas de elegir 3 de los 4 palos para las tres cartas que sean el mismo número en el full. Como no es lo mismo tener full con tres ases y dos reinas que tener un full con tres reinas y dos ases, hay que multiplicar por 2!.

La probabilidad de sacar poker con $m = 5$ cartas es:

$$P\left(Póker\right) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: Necesitamos elegir uno de los 13 posibles números, de $\binom{13}{1}$ maneras, para saber qué número será el que nos toque en el póker y hay $\binom{4}{4} = 1$ formas de elegir 4 de los 4 palos para cada uno de los dobles. elegir los palos de los dos dobles.

Además, queremos que la carta restante sea un número distinto al número elegido en el póker, por lo que hay $\binom{12}{1}$ maneras de elegir 1 número de los 11 números disponibles.

Para ese número elegido (para esa carta que no forma el póker) hay que elegir un palo entonces hay $\binom{4}{1}$ formas de elegir los palos para esa carta restante.

La probabilidad de obtener póker de ases con $m = 5$ cartas es:

$$P\left(Póker\ Ases\right) = \frac{\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Explicación: 4 de las 5 cartas tienen que ser los ases, hay una sola manera de que eso suceda.

Además, queremos que la carta restante sea un número distinto al número elegido en el póker, por lo que hay $\binom{12}{1}$ maneras de elegir 1 número de los 11 números disponibles.

Para ese número elegido (para esa carta que no forma el póker) hay que elegir un palo entonces hay $\binom{4}{1}$ formas de elegir los palos para esa carta restante.

2.2.3. Comités

$n = 14 \longrightarrow n_{AU} = 5, n_{AS} = 2, n_{AF} = 3, n_{AM} = 4.$

$$A = \{\text{Todos los continentes representados}\}$$

$$\text{Comités de 4 personas: } P\left(A\right) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{14}{4}}$$

$$\text{Comités de 5 personas: } P\left(A\right) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{14}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{14}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{14}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{14}{5}}$$

En el caso del comité de 4 personas es necesario un miembro de cada continente. En el caso de 5 personas es necesario al menos un miembro de cada continente, entonces hay cuatro casos posibles según el continente que tenga 2 miembros.

2.2.4. Llaves

Hay n llaves, sólo una abre la puerta.

i. Descarto cada llave que no abre

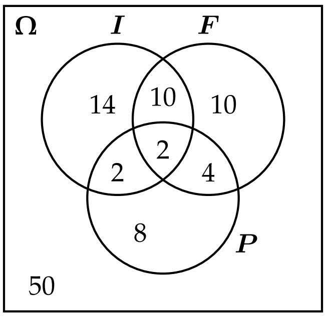
$$P\left(Acertar\ intento\ k\right) = \underbrace{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}}_{Fallar\ k-1\ veces} \cdot \underbrace{\frac{1}{n-(k-1)}}_{Acertar\ en\ k} = \frac{1}{n}$$

ii. No descarto ninguna llave

$$P\left(Acertar\,intento\,k\right)=\underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}}_{k-1\,Fallos}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{Acierto}$$

2.2.5. Escuela

La situación descrita en un diagrama de Venn tiene la siguiente forma



$$A=\{\text{El alumno elegido no toma idiomas}\}$$

$$P\left(A\right)=1-P\left(A^{c}\right)=1-P\left(I\cup F\cup P\right)=1-\frac{50}{100}=0{,}50$$

$$B=\{\text{El alumno elegido toma solo una clase de idioma}\}$$

$$P\left(B\right)=P\left(\left(I\cap F^{c}\cap P^{c}\right)\cup\left(F\cap I^{c}\cap P^{c}\right)\cup\left(P\cap I^{c}\cap F^{c}\right)\right)=\frac{14}{100}+\frac{10}{100}+\frac{8}{100}=0{,}32$$

$$C=\{\text{Al menos un alumno elegido toma clases de idioma}\}$$

$$P\left(C\right)=1-P\left(C^{c}\right)=1-P\left(A_1^{c}\right)\cdot P\left(A_2^{c}/A_1^{c}\right)=1-\frac{50}{100}\cdot\frac{49}{99}=1-\frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}}$$

2.2.6. Dados

Arrojo dos dados. La ventaja de pensar a los resultados de manera secuencial es que nos permiten tener un espacio Ω equiprobable. Además para el primer inciso se sobrentiende que las tiradas son secuenciales.

Ω	n_2						
n_1		1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

i.

$$A=\{\text{El primer dado es igual a }6\}$$

$$B_i\,\{\text{La suma es igual a }i\}$$

Uso casos favorables/casos posibles para resolver. B_i me marca los casos posibles y busco los favorables dentro de ese conjunto. Alternativamente se puede usar la definición de probabilidad condicional.

B_i	$P(A\|B_i)$
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	1/6
8	1/5
9	1/4
10	1/3
11	1/2
12	1

ii.

$$C = \{\text{Al menos un dado es igual a 6}\}$$
$$D = \{\text{Los dados arrojan resultados diferentes}\}$$

Nuevamente calculemos la probabilidad de dicho evento calculando el cociente casos favorables/casos posibles. Los casos posibles son los dados por D (hay 30 posibles resultados), ahí busco los favorables. Alternativamente se podría trabajar con probabilidades condicionales.

$$P(C|D) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

2.2.7. Urna y Bolillas

$$Urna = 15\begin{cases} 6\,B \\ 9\,N \end{cases}$$

Muestra $m = 4$ sin reposición (notemos que los eventos mencionados en este ejercicio tienen un orden -las bolillas se sacan secuencialemente- y que por simplicidad notacional omitimos los paréntesis y las comas, es decir, escribimos BBNN=(B,B,N,N)).

$$P(BBNN) = P(B)\cdot P(B|B)\cdot P(N|BB)\cdot P(N|BBN) = \frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{9}{13}\frac{8}{12}$$

Muestra $m = 4$ con reposición. En este caso las condicionales son iguales a las individuales porque las extracciones son independientes.

$$P(BBNN) = P(B)\cdot P(B)\cdot P(N)\cdot P(N) = \frac{6^2\cdot 9^2}{15^4}$$

2.2.8. Default

Definamos los siguientes eventos:

$$D = \{\text{El país entra en Default}\}$$

$$A = \left\{\text{El país tiene un ratio deuda/PBI mayor que 1 (i.e. } \frac{ED}{GDP} > 1)\right\}$$

$$B = \left\{\text{El país tiene un ratio deuda/PBI menor que 1 (i.e. } \frac{ED}{GDP} < 1)\right\}$$

$$P(D\cap A) = 2P(D\cap B)$$
$$P(D\cap A) = 0{,}32 \implies P(D\cap B) = 0{,}16$$
$$P(D) = P(D\cap A) + P(D\cap B) = 0{,}32 + 0{,}16$$
$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(A\cap D) + P(B\cap D)} = \frac{0{,}32}{0{,}32+0{,}16} = \frac{2}{3}$$

2.2.9. Cumpleaños y estaciones del año

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{Hay al menos una persona de las 7 que cumple años en cada una de las estaciones}\}\\
B_P &= \{\text{Ninguno de los 7 cumpleaños ocurre en Primavera}\}\\
B_I &= \{\text{Ninguno de los 7 cumpleaños ocurre en Invierno}\}\\
B_O &= \{\text{Ninguno de los 7 cumpleaños ocurre en Otoño}\}\\
B_V &= \{\text{Ninguno de los 7 cumpleaños ocurre en Verano}\}
\end{aligned}$$

Para resolver este ejercicio podemos calcular la probabilidad del evento A directamente. También podemos calcular la unión de la probabilidad de los eventos B_i y restarsela a 1 ya que $A = (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)^c$. Esta probabilidad la podemos calcular a través del principio de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned}
P(B_P \cup B_I \cup B_O \cup B_V) =& P(B_P) + P(B_I) + P(B_O) + P(B_V) - P(B_P \cap B_I) - P(B_P \cap B_V)\\
&- P(B_P \cap B_O) - P(B_O \cap B_V) - P(B_O \cap B_I) - P(B_I \cap B_V)\\
&+ P(B_P \cap B_I \cap B_O) + P(B_P \cap B_I \cap B_V) + P(B_V \cap B_I \cap B_O)\\
&+ P(B_P \cap B_V \cap B_O) - P(B_P \cap B_I \cap B_V \cap B_O)
\end{aligned}$$

Dado que

- $(B_P) = P(B_I) = P(B_O) = P(B_V)$
- $P(B_P \cap B_I) = P(B_P \cap B_V) = P(B_P \cap B_O) = P(B_O \cap B_V) = P(B_O \cap B_I) = P(B_I \cap B_V)$
- $P(B_P \cap B_I \cap B_O) = P(B_P \cap B_I \cap B_V) = P(B_V \cap B_I \cap B_O) = P(B_P \cap B_V \cap B_O)$

podemos reescribir:

$$P(B_P \cup B_I \cup B_O \cup B_V) = 4P(B_P) - 6P(B_P \cap B_I) + 4P(B_P \cap B_I \cap B_V) - P(B_P \cap B_I \cap B_V \cap B_O)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que ningún cumpleaños ocurra en al menos alguna estación es:

$$P(B_P) = P(B_I) = P(B_O) = P(B_V) = \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

La probabilidad de que los cumpleaños no ocurran en al menos dos estaciones es:

$$P(B_P \cap B_I) = \left(\frac{2}{4}\right)^7$$

La probabilidad de que los cumpleaños no ocurran en al menos 3 estaciones es:

$$P(B_P \cap B_I \cap B_V) = \left(\frac{1}{4}\right)^7$$

Por último, la probabilidad de que los cumpleaños no ocurran en ninguna estación es 0:

$$P(B_P \cap B_I \cap B_V \cap B_O) = 0$$

Por lo tanto, la probabilidad de que haya una persona para cada estación que cumple años en esa estación entre los 7 cumpleaños es:

$$P(A) = 1 - P(B_P \cup B_I \cup B_O \cup B_V) = 1 - \left[4\left(\frac{3}{4}\right)^7 - 6\left(\frac{2}{4}\right)^7 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^7\right] = \frac{525}{1024} = 0{,}51$$

2.2.10. Un poco más del principio de inclusión exclusión

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right]^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) - \sum_{i\neq j} P\left(A_i^c \cap A_j^c\right) + \sum_{i\neq j\neq k} P\left(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c\right) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

$$\implies P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) \implies 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right)$$

$$\therefore P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right)$$