Test de Hipótesis: Casos Particulares

Introducción a la Estadística

Fiona Franco Churruarín
fionafch96@gmail.com

UTDT

Febrero 2022

Prueba de hipótesis para la μ con σ^2 conocida

Caso 1: (Z)

Suponemos que observamos una variable aleatoria que proviene de una población normal con **varianza conocida,** σ^2. Para cualquiera de los siguientes conjuntos de hipótesis:

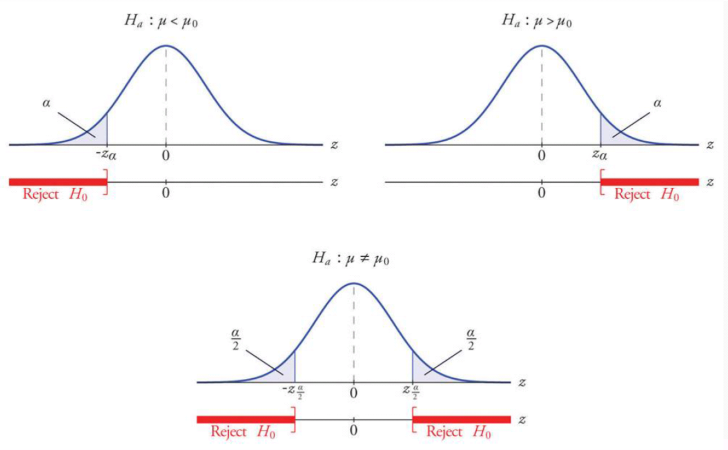
$$
\begin{array}{lll}
H_0\colon\ \mu = \mu_0 & \qquad H_0\colon\ \mu \geq \mu_0 & \qquad H_0\colon\ \mu \leq \mu_0 \\
H_1\colon\ \mu \neq \mu_0 & \qquad H_1\colon\ \mu < \mu_0 & \qquad H_1\colon\ \mu > \mu_0
\end{array}
$$

El estadístico que usamos es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Prueba de hipótesis para la μ con σ^2 conocida

Si $\alpha = 0.05$ es el nivel de significatividad considerado, las regiones de rechazo en cada caso estarán dadas por:



Prueba de Hipótesis para la Media (μ)

Reglas de decisión:

(1) Calcular el valor del estadístico de contraste (Z) en base al valor obtenido de la media muestral y compararlo contra el valor crítico (de tabla de la normal estándar).

(2) Calcular el p-valor (o p-value) asociado a la muestra y comprarlo contra el α (1%, 5% o 10%).

p-valor o p-value

El p-**valor** es el nivel de significatividad más pequeño a partir del cual la hipótesis nula puede ser rechazada. En otras palabras, es la zona crítica que correspondería al valor del estadístico.

- Prueba bilateral: $P(|Z| \geq z|H_0) = p-$value
- Prueba unilateral (derecha): $P(Z \geq z|H_0) = p-$value
- Prueba unilateral (izquierda): $P(Z \leq z|H_0) = p-$value

Evaluando la potencia de un test

Consideren un test tal que:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Vamos a **rechazar** H_0 **si**:

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$$

Es decir, si:

$$\overline{X} > \overline{X_c} = \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$$

Evaluando la potencia de un test

Ahora, imaginemos que lo que se está planteando en H_0 es **falso** y entonces queremos calcular la probabilidad de error de tipo II y la potencia para una media particular.

Si la verdadera media fuera $\mu = \mu_1 \in H_1$ entonces,

$$P(\text{Error tipo II}|\mu = \mu_1) = P(\overline{X} < \overline{X}_c|\mu = \mu_1) = P\left(Z < \frac{\overline{X}_c - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Y la potencia en $\mu = \mu_1$ será $1 - P(\text{Error tipo II}|\mu = \mu_1)$.

Prueba de hipótesis para la μ con σ^2 desconocida

Caso 2: (T)

Cuando σ^2 es **desconocida**, es razonable reemplazarla por la varianza muestral S^2. Entonces,

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Una vez mas, como en el caso con varianza conocida, podemos usar como estadístico a la media muestral ya estandarizada.

Para resolver

A fin de decidir si comprar o no un comercio, se desea verificar si el nivel promedio de ventas es de por lo menos \$580 diarios. Con tal propósito se observaron las ventas de 50 días obteniendo un promedio de \$565 y una dispersión de \$23,8. Considere la hipótesis nula $H_0 : \mu \geq 580$ y evalue si hay evidencia suficiente para descartarla con un nivel de significación α del 10%. Resuelva calculando el p-valor de la muestra.

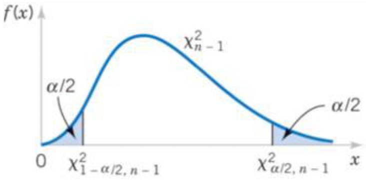
Prueba de Hipótesis para la Varianza (σ^2)

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Estadístico:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Si α es el nivel de significación considerado, la región de rechazo será (alternativa bilateral):

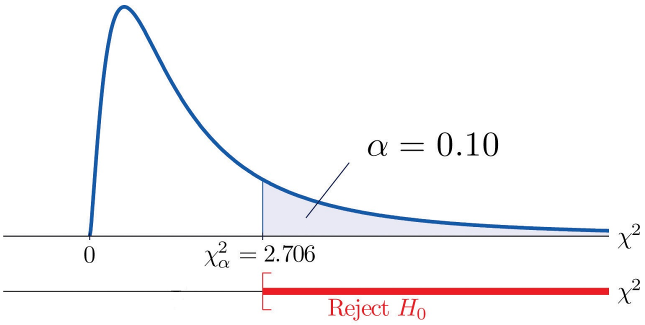


Prueba de Hipótesis para la Varianza (σ^2)

Para una hipótesis alternativa unilateral:

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Con un nivel de significación de 0.10 la región de rechazo será:



Ejemplo

Una empresa fabrica dispositivos eléctricos operados por un control termostático. El desvío estándar de la temperatura a la que estos controles operan no debe exceder los 2 grados. Dada una muestra aleatoria de 20 de estos controles, el desvío estándar de la muestra de la temperatura de funcionamiento es 2.36 grados. Testear, a un nivel de significación del 5%, la hipótesis nula de que el desvío estándar de la población es 2.0 grados o menos frente a la alternativa de que sea más grande. Considere $\alpha = 0.05$.

$$
\begin{aligned}
H_0 :&\sigma^2 \leq 4 \\
H_1 :&\sigma^2 > 4
\end{aligned}
$$

$$
\chi^2_{obs} = \frac{(19)(2.36)}{4} = 26.456 \qquad \chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{19,0.05} = 30.14
$$

Con un nivel de significación del 5% no se descarta H_0. No hay evidencia suficiente para descartar la hipótesis de que la varianza poblacional no cumple con los estándares establecidos.

Prueba de hipótesis para p

Bajo las mismas condiciones que en el IC para la proporción:

$$H_0\colon\ p = p_0$$
$$H_1\colon\ p \neq p_0$$

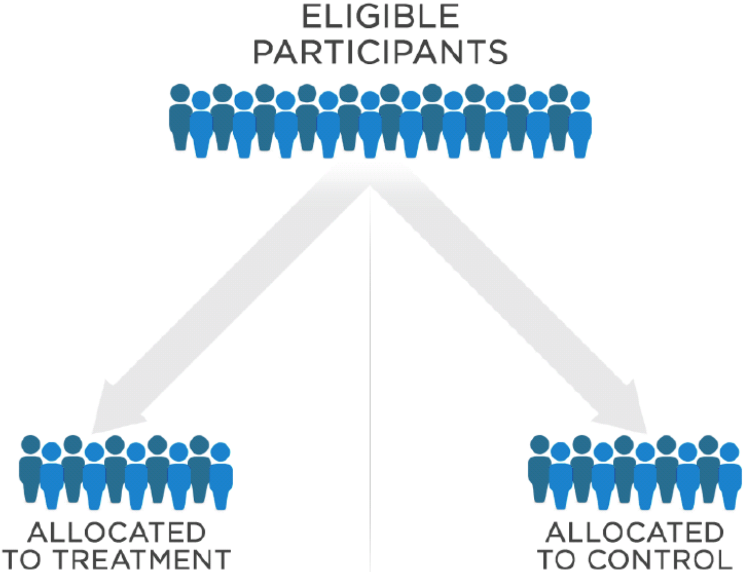
El estadístico que usamos es:

$$Z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \overset{aprox}{\sim} N(0,1)$$

Para resolver

En una encuesta realizada sobre 871 adultos, el 53% de los entrevistados estuvieron a favor de la despenalización del aborto. Con un nivel de significación del 10%, se podría asegurar que la mayoría de los adultos está a favor de la despenalización del aborto?

Grupo de Tratamiento vs. Grupo de Control



Grupo de Tratamiento vs. Grupo de Control

Las pruebas de comparación de medias son MUY utilizadas y son la base sobre la cual se realizan los estudios en los que se quiere evaluar el efecto de un "tratamiento" a partir de dividir a la población en dos grupos:

- **Grupo de Tratamiento**: es el grupo experimental al cual se aplica el tratamiento (ej: participan en un proyecto de conexión a la red de gas natural)
- **Grupo de Control**: es el grupo que no participa del tratamiento, pero tiene características similares al grupo de tratamiento

Grupo de Tratamiento vs. Grupo de Control

La idea básica cuando se evalúa un programa es medir el efecto causal de una intervención (ej. un subsidio). Idealmente quisiéramos comparar como se comporta un grupo con ese tratamiento comparado a otro grupo de características idénticas en todos los aspectos, pero que no recibieron el tratamiento.

Los experimentos controlados que son comunes dentro de un laboratorio, son más limitados en economía y negocios.

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

Primero veremos distintas pruebas de diferencia de medias entre dos poblaciones, pero para dos posibles casos:

- **muestras dependientes o pareadas**
- **muestras independientes**.

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

Dos Medias, Muestras Pareadas:

La principal característica de las muestras pareadas es que para cada observación del primer grupo (las X), hay una observación relacionada en el segundo grupo (las Y).

Las **muestras pareadas** se obtienen cuando se realizan comparaciones sobre una misma unidad experimental. Es decir, se estudia un mismo individuo antes y después de un tratamiento.

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

Dos Medias, Muestras Pareadas:

Llamemos d a la diferencia entre las medias de x e y (p.ej., el rendimiento académico de los alumnos antes y después de un curso):

$$d = \mu_X - \mu_Y$$

Entonces, la diferencia de las medias muestrales es:

$$\overline{d} = \overline{x} - \overline{y}$$

La varianza muestral de d es:

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2}{n-1}$$

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

Dos Medias, Muestras Pareadas:

$$H_0: \ d = 0 \Leftrightarrow \mu_X - \mu_Y = 0$$
$$H_1: \ d \neq 0 \Leftrightarrow \mu_X - \mu_Y \neq 0$$

O bien:

$$H_0: \ d \geq 0 \Leftrightarrow \mu_X - \mu_Y \geq 0$$
$$H_1: \ d < 0 \Leftrightarrow \mu_X - \mu_Y < 0$$

Estadístico:

$$T = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Para resolver

Antes de lanzar una promoción muy agresiva de cierto producto en los grandes hipermercados, la directora de marketing de la empresa quiere realizar una prueba piloto. Para ello selecciona al azar 50 hipermercados sobre los cuales lleva a cabo la promoción y recoge los datos de ventas (expresadas en millones de pesos) **antes y después** de la promoción:

	n	Promedio	Desvío Estándar
Antes	50	15.4	3.8
Después	50	17.2	4.5

Se sabe que el coeficiente de correlación entre las ventas antes y después de la promoción es de 0.8.

- Con un α de 5%, ¿considera que la promoción es efectiva para incrementar el nivel de ventas de la empresa?

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

Ahora veremos los casos donde hay muestras aleatorias para dos poblaciones **independientes** entre sí y lo que queremos evaluar es la diferencia entre las medias de ambas poblaciones. Esto es,

$$\begin{array}{lllll} H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0 & o & H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq 0 & o & H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq 0 \\ H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0 & o & H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0 & o & H_1 : \mu_X - \mu_Y < 0 \end{array}$$

El estadístico dependerá de si conocemos o no la varianza poblacional, podemos encontrarnos en alguno de los estos casos:

- **Caso 1**: las varianzas poblacionales, σ_X^2 y σ_Y^2, son conocidas.
- **Caso 2**: las varianzas poblacionales, σ_X^2 y σ_Y^2, son desconocidas, pero iguales.
- **Caso 3**: las varianzas poblacionales, σ_X^2 y σ_Y^2, son desconocidas y distintas.

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

Caso 1: cuando las varianzas poblaciones, σ_X^2 y σ_Y^2, son conocidas. Es el caso normal, en el cual el estadístico de contraste es:

$$Z = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - (\mu_X - \mu_Y)_0}{\sqrt{\sigma_X^2/n_X + \sigma_Y^2/n_Y}} \sim N(0,1)$$

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

Caso 2: cuando las varianzas poblacionales, σ_X^2 y σ_Y^2, son desconocidas, pero iguales usamos la t de Student y el estadístico es:

$$T = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - (\mu_X - \mu_Y)_0}{s_p\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}} \sim t_{n_X+n_Y-2}$$

donde $s_p^2 = \frac{(n_X-1)s_X^2+(n_Y-1)s_Y^2}{n_X+n_Y-2}$, $s_p = \sqrt{s_p^2}$

Ejemplo

Realizando un estudio sobre índices de rendimiento físico en ex-fumadores, se tomó una muestra aleatoria de 34 no fumadores y se observó una calificación media de 2,2 con un desvío estándar de 1. Asimismo, se tomó una muestra aleatoria independiente de 86 ex-fumadores se observó un puntaje promedio igual a 1,6 con un desvío estándar igual a 1,4.

Postule una hipótesis nula que establezca que la media del rendimiento de los ex-fumadores es al menos tan alta como la de los no fumadores (es decir, bajo H_0 fumar no afecta el rendimiento medio en estas pruebas) y decida si hay suficiente evidencia para descartarla, con un nivel de significación de 0.05. Puede suponer que la dispersión del rendimiento de ex-fumadores y no fumadores es la misma.

Se sabe que $t_{118,0.05} = 1.658$

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

Caso 3: σ_X^2 y σ_Y^2 son desconocidas y distintas:

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)_0}{\sqrt{S_X^2/n_X + S_Y^2/n_Y}} \sim t_{\eta_0}$$

donde

$$\eta_0 = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{S_X^4}{n_X^2(n_X-1)} + \frac{S_Y^4}{n_Y^2(n_Y-1)}}$$

Este test también es conocido como el **Test de Welch**. Puede demostrarse que:

$$\min(n_X - 1, n_Y - 1) \leq \eta_0 \leq n_X + n_Y - 2$$

Ejemplo

Para el caso de rendimiento de ex-fumadores, puede calcularse que $\eta_0 \approx 89$, y así el valor de contraste para el estadístico t observado, con un nivel de significación de 0.05 sería $t_{89,0.05} = 1.662$.

Notar que lo único que cambia es el supuesto sobre las varianzas poblacionales, que en el ejemplo original se suponían iguales. Si no puede suponerse que son iguales, el estadístico observado es $t = -2.626$.

Este test es mas robusto, ya que hace menos supuestos sobre los parámetros poblacionales desconocidos.

Prueba de hipótesis para la diferencia de varianzas o Test F

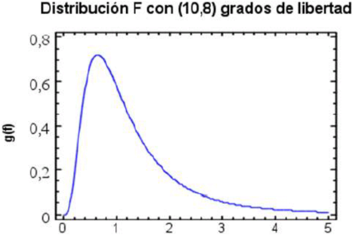
Si queremos contrastar dos varianzas:

$$H_0 : \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2 \Longrightarrow H_0 : \sigma_X^2 / \sigma_Y^2 \geq 1$$
$$H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \Longrightarrow H_1 : \sigma_X^2 / \sigma_Y^2 < 1$$

El estadístico de contraste es:

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n_X - 1, n_Y - 1)$$

sigue una **distribución F** con $(n_X - 1, n_Y - 1)$ grados de libertad, la cual es asimétrica y adopta valores no negativos:



Ejemplo

Electronics S.A. desea evaluar la varianza de la duración de las pilas AAA y la de las pilas AA que produce. Para ello tomó una muestra aleatoria de 17 pilas AAA que arrojó un desvío muestral de 4.85 horas, y se tomó una muestra aleatoria independiente de 11 pilas AA que arrojó una varianza muestral de 2.83 horas.

¿Existe evidencia suficiente para concluir que la varianza de la duración de las pilas AAA es mayor que la de las pilas AA? Considere un nivel de significación del 5%.

Se sabe que $F_{(16,10),0.05} = 2.828$ y $P(F_{16,10} \geq 2.937) = 0.044$

Prueba de hipótesis para la diferencia de proporciones

Nuevamente, para muestras lo suficientemente grandes ($np_0(1-p_0) > 5$):

$$H_0 : p_x - p_y \geq 0$$
$$H_1 : p_x - p_y < 0$$

$$Z = \frac{(\hat{p}_x - \hat{p}_y)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_x} + \frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_y}}}$$

donde:

$$\hat{p}_0 = \frac{n_x \hat{p}_x + n_y \hat{p}_y}{n_x + n_y}$$

Ejemplo

Dos muestras aleatorias de 900 personas, una en los Estados Unidos y otra en Reino Unido, indican que el 60% de las personas encuestadas en los Estados Unidos son optimistas sobre el futuro de la economía, mientras que el 66% de las personas encuestadas en Reino Unidos son optimistas sobre el futuro de la economía.

¿Son estos resultados evidencia suficiente como para afirmar que las personas en Reino Unido son más optimistas sobre la economía? Considere un nivel de significación de 0.10.

Links y recursos útiles

Bibliografía:

- Newbold et al. (2013) - Cap. 9 y 10