Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 3:
Autovalores y Autovectores.

Ejercicio 1.

Ejercicio 21 (*).

Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz tal que λ= 1 es autovalor de A, tr(A)= 2 y det(A)= -2.

(a) *Hallar todos los autovalores de A.*

En primer lugar, se sabe que 1 es autovalor de la matriz A $\in \mathbb{R}^{3x3}$.

Luego, sabiendo que la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores y que tr(A)= 2, se tiene:

$2= 1 + \lambda_2 + \lambda_3$
$2 - 1= \lambda_2 + \lambda_3$
$1= \lambda_2 + \lambda_3$.

También, sabiendo que el determinante de la matriz A es igual al producto de todos los autovalores y que det(A)= -2, se tiene:

$-2= \lambda_2 \lambda_3$.

Entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ -2 = \lambda_2 \lambda_3 \end{cases}.$$

Despejando λ_3 de la segunda ecuación, se tiene:

$\lambda_3= \frac{-2}{\lambda_2}, \lambda_2 \neq 0$.

Luego, reemplazando en la primera ecuación, se obtiene:

$1= \lambda_2 + \frac{-2}{\lambda_2}$
$1= \frac{\lambda_2^2 - 2}{\lambda_2}$
$\lambda_2= \lambda_2^2 - 2$
$\lambda_2^2 - \lambda_2 - 2= 0, \lambda_2 \neq 0$.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan los autovalores faltantes:

$\lambda_2, \lambda_3= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1(-2)}}{2*1}$
$\lambda_2, \lambda_3= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$
$\lambda_2, \lambda_3= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$
$\lambda_2, \lambda_3= \frac{1 \pm 3}{2}$
$\lambda_2= \frac{1-3}{2}= \frac{-2}{2}= -1$.
$\lambda_3= \frac{1+3}{2}= \frac{4}{2}= 2$.

Por lo tanto, los autovalores de A son: λ_1= 1, λ_2= -1 y λ_3= 2.

(b) *Decidir si A^T es o no diagonalizable.*

Se sabe que la matriz A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ tiene n (3) autovalores distintos (inciso anterior) y que los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (teorema).

También, dado que la matriz A tiene n (3) autovectores linealmente independientes, se sabe que la matriz A es diagonalizable (teorema).

Entonces, esta matriz A ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$ se puede expresar de la siguiente manera:

A= PDP^{-1},

donde D, P ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$, tal que D es diagonal y P es inversible.

Si se aplica transpuesta a ambos lados de la igualdad, se tiene:

A^T= $(PDP^{-1})^T$
A^T= $(P^{-1})^T D^T P^T$.

Sabiendo que toda matriz diagonal es simétrica (D= D^T) y que la transpuesta de la inversa de una matriz es igual a la inversa de la transpuesta de esa matriz, se tiene:

A^T= $(P^T)^{-1} D P^T$.

Por último, sabiendo que la inversa de la inversa de una matriz es la propia matriz, esta última igualdad se puede reexpresar de la siguiente manera:

A^T= $(P^T)^{-1} D((P^T)^{-1})^{-1}$.

Por lo tanto, A^T es diagonalizable, ya que es A^T es semejante a una matriz diagonal, es decir, existen D, $(P^T)^{-1}$ ∈ $\mathbb{R}^{3x3}$, tal que D es diagonal y $(P^T)^{-1}$ es inversible.