

# MODELO DE CICLOS REALES: UNA APLICACIÓN A LA ECONOMÍA COLOMBIANA \*

Andrés Eduardo Rangel Jiménez\*\*

## Resumen

En este artículo se aplica un modelo RBC (*Real Business Cycles*) básico para Colombia, cuya pertinencia radica en el comportamiento estándar de una economía pequeña y abierta (inversión como productividad volátil) en contraposición a un consumo suave (consumo, inversión procíclicas y balanza comercial contracíclica). Para este propósito, se sigue de cerca el trabajo de S. Schmitt-Grohe, M. Uribe (2004), el cual muestra cómo la inversión reacciona muy diferente a los *shocks* de productividad en los ciclos de negocios de economías abiertas respecto a economías cerradas. La calibración de un modelo de equilibrio general estocástico reproduce los hechos estilizados para Colombia en el periodo 2001-2011, identificando la respuesta de las principales variables económicas a *shocks* tecnológicos.

## Palabras clave

Modelos RBC, calibración, modelos DSGE.

## Abstract

This paper applies a basic RBC model (Real Business Cycles) for Colombia whose relevance lies in the standard behavior of a small open economy (volatile investment and productivity) as opposed to smooth consumption (procyclical consumption, investment and countercyclical trade balance). For this purpose, it follows closely the work of S. Schmitt-Grohe, M. Uribe (2004), which shows how investment reacts very differently to productivity shocks in business cycles open economies compared to closed economies. The calibration of a stochastic general equilibrium model reproduces the stylized facts for Colombia in the period 2001-2011, identifying the response of the main economic variables to technology shocks.

## Key words

RBC Models, calibration, DSGE models.

**Clasificación J.E.L:** E27, C61, C68.

---

\* Este artículo fue recibido el 06-11-12 y aprobado el 27-05-13.

\*\* Economista Universidad del Valle. Estudios de Maestría en Econometría de la Universidad Torcuato di Tella. Docente de planta de la Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Autónoma de Occidente, Cali. Correo-e: aerangel@uao.edu.co.

## Introducción

La teoría de los ciclos económicos, caracterizada por expansiones de la producción seguidas de una reducción o recesión generalizada, tiene como objeto explicar las fluctuaciones que se presentan en la actividad económica agregada. Su origen se remonta a los trabajos seminales de Kydland & Prescott (1982) y Long & Plosser (1983). De dicha teoría son resultado los modelos de ciclos reales (en adelante, RBC)<sup>1</sup> que son, de alguna manera, descendientes directos de la Nueva Macroeconomía Clásica (NMC) y, para la cual, los conceptos de expectativas racionales, el equilibrio walrasiano y los fundamentos microeconómicos de Lucas (1972) y Sargent & Wallace (1975), como principales exponentes, son sus pilares fundamentales.

La principal diferencia de los modelos RBC con respecto a los modelos NMC se refiere a la naturaleza de las perturbaciones a la que está expuesta la economía. Mientras que para los primeros las perturbaciones son de tipo real (principalmente tecnológicas), los segundos evidencian *shocks* de naturaleza nominal.

En tal sentido, el presente trabajo utiliza el modelo de ciclos reales estándar para replicar el comportamiento de las variables macroeconómicas *Producto, Consumo, Inversión y Balanza Comercial* para Colombia<sup>2</sup>. Con el fin de

disminuir la volatilidad de la inversión, se introducen los costos de ajuste del capital, permitiendo así replicar la mayoría de hechos estilizados de la economía colombiana.

La metodología en los modelos RBC asume el supuesto estándar que las principales variables macroeconómicas se rigen por un proceso generador de datos (PGD) estocástico, cuyas realizaciones son las series disponibles. Al analizar el comportamiento de las principales variables macroeconómicas, lo primero por hacer es discriminar entre la tendencia y el ciclo de la serie. El primer componente estaría asociado al largo plazo, en tanto que el componente cíclico, explicado por variables nominales o perturbaciones externas, se constituye como la fluctuación alrededor de la tendencia.

El uso de esta metodología se justifica esencialmente por la no incorporación de dinámicas en los modelos macroeconómicos estáticos, condición que los hace no adecuados para la representación de los ciclos económicos.

Así pues, el artículo sigue la siguiente estructura. En un primer apartado se describen los principales hechos estilizados para las variables macroeconómicas en el periodo 2001-2011. Seguidamente, se brinda una explicación del modelo teórico, para luego abordar aspectos de programación dinámica y

<sup>1</sup> Sigla en inglés de *Real Business Cycles*.

<sup>2</sup> Se trabajan con series reales de la economía y no nominales. Para ello se deflactan utilizando como año 1975.

su posterior solución. Y, cierran el artículo, la calibración del modelo y una comparación de los momentos de las variables simuladas con las estadísticas de las variables observadas para la economía colombiana.

### Hechos estilizados

Colombia presenta un común denominador con los demás países, al evidenciar en su economía un ciclo real con periodos de pronunciado crecimiento previos a periodos de relativa desaceleración, fluctuaciones acompañadas por fuertes comovimientos de la inversión, el consumo y el empleo.

A continuación se analiza la economía colombiana de acuerdo con las propiedades estadísticas básicas de las principales variables macroeconómicas (PIB, Consumo Total, Inversión y Balanza Comercial) para el período 2001:1-2011:2. Se ha definido una variable procíclica como aquella cuya correlación contemporánea con el PIB es positiva y contracíclica, cuando esa misma relación es negativa. Bajo estos conceptos, se procede a observar la naturaleza procíclica o anticíclica de las series. Uno de los tres procedimientos estadísticos para caracterizar empíricamente las fluctuaciones de las variables macroeconómicas, es asumir

que las variables macroeconómicas fluctúan alrededor de una tendencia determinística.

En este caso, el ciclo se construye como la diferencia entre la serie observada y la tendencia. La otra posibilidad consiste en asumir una tendencia estocástica y tomar la primera diferencia del logaritmo para remover dicha tendencia que, en tal caso, el ciclo es la serie diferenciada (Hamman & Riascos, 1998). La tercera alternativa, utilizada de manera muy frecuente en la literatura, es aislar la tendencia de largo plazo de las variables a precios constantes, aplicando el filtro de Hodrick-Prescott sobre el logaritmo de la serie (con el fin de disminuir su variabilidad). Justamente es se trata de la técnica que se utiliza en el presente trabajo.

### El Filtro de Hodrick-Prescott

Esta metodología desarrollada por Hodrick & Prescott (1997) es una minimización restringida de la variabilidad del componente cíclico de la serie, sujeto a una condición de suavizamiento del componente de tendencia. El método que extrae un componente estocástico que está no correlacionada con el componente cíclico, asume que la estructura de la serie está dada por una tendencia y un ciclo:

$$y_t = x_t + c_t \quad (1)$$

$$\min \sum_{t=1}^T (y_t - x_t)^2 + \lambda \sum_{t=1}^{T-1} [(x_{t+1} - x_t) - (x_t - x_{t-1})]^2 \quad (2)$$

El componente de tendencia es fruto de la resolución del problema de minimización, en donde  $T$  es el tamaño de la muestra y  $\lambda$  es un parámetro que penaliza la volatilidad de la tendencia. Se obtiene, así, una nueva serie del componente de tendencia lo más suave posible (penalizándose con  $\lambda$  la volatilidad de la nueva serie), al minimizar las diferencias cuadráticas respecto a la serie original.

Para el caso de periodicidad de la serie, el parámetro  $\lambda$ , en cuanto más próxima a cero sea la tendencia, más coincidirá con la serie original. Entretanto, cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  la tendencia se aproxima a una forma lineal  $x_t = x_0 + \delta t$  con  $\delta > 0$ .

El Filtro de Hodrick-Prescott permite lograr una buena aproximación al componente tendencial de la serie, al entenderse no como un componente estrictamente lineal, sino como una tendencia polinómica determinística. Resolviendo las condiciones de primer orden y realizando algunas operaciones algebraicas (que incluyen la utilización del operador de rezagos), el componente tendencial toma la siguiente forma:

$$x_t = \frac{y_t}{[1 + \lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2]} \quad (3)$$

Luego, y por medio de la utilización del filtro de Hodrick-Prescott, se obtiene el componente tendencial aplicando

el anterior polinomio de rezagos a la serie original.

Otras metodologías de extracción de ciclos económicos utilizadas con frecuencia son el filtro de bandas de Baxter & King, el método de PAT o el ajuste de Loess<sup>3</sup>.

La primera metodología consiste en diseñar tres tipos de filtros: de baja, media y alta frecuencia. El primero retiene los componentes de movimiento suave o lento en los datos, mientras que la aplicación del filtro de alta retiene únicamente componentes cuya frecuencia es menor o igual a la periodicidad  $p$  (Mills, 2002). El filtro toma la siguiente representación general<sup>4</sup>:

$$b(h) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_h L^h \quad (4)$$

Por su parte, los modelos de suavizamiento de Loess (1970) asumen un modelo local y no global para la tendencia, condición que restringe la utilización de parámetros fijos de la forma  $x_t = \beta_0 + \beta_1 t$ . Así, estos parámetros asumen la condición de variabilidad en el tiempo, alcanzando una mayor flexibilidad. Esta metodología parte de realizar una regresión Loess, inicialmente llamada Lowess (*Locally Weighted Scatterplot Smoothing*), y se constituye como modelo de regresión no paramétrico de que  $g(x)$  del tipo:

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon_i \quad (5)$$

<sup>3</sup> Baxter & King (1999) desarrollan la teoría del filtro de paso de banda (*Band-Pass Filter*), los cuales extraen frecuencias más bajas proponiendo una alternativa al filtro H-P.

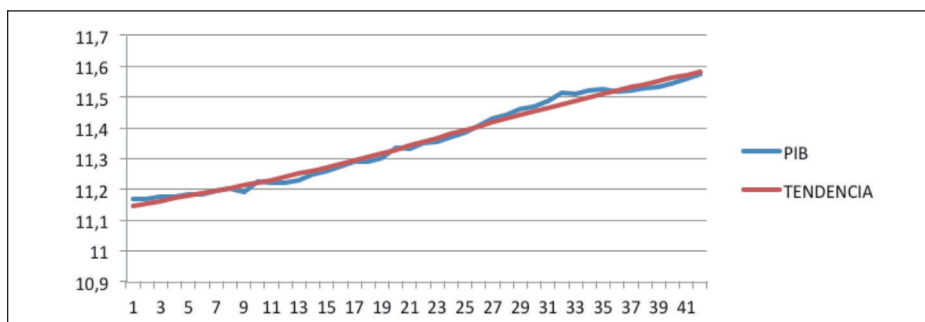
<sup>4</sup> Donde  $L$  es el operador de rezagos y  $b_h$  es el operador de promedios móviles infinitos.

El anterior procedimiento permite que los parámetros presenten variaciones a través de ventanas móviles que contienen un número limitado de datos. Calculando el ciclo como la diferencia entre el logaritmo de la serie y la tendencia aislada por medio del filtro H-P, su interpretación consiste en desviaciones porcentuales de la serie respecto a la tendencia. El ciclo estaría regido por factores nominales y *shocks* externos, mientras que la tendencia estaría influenciada por variables

como la productividad, dotaciones de factores y tecnología, entre otros.

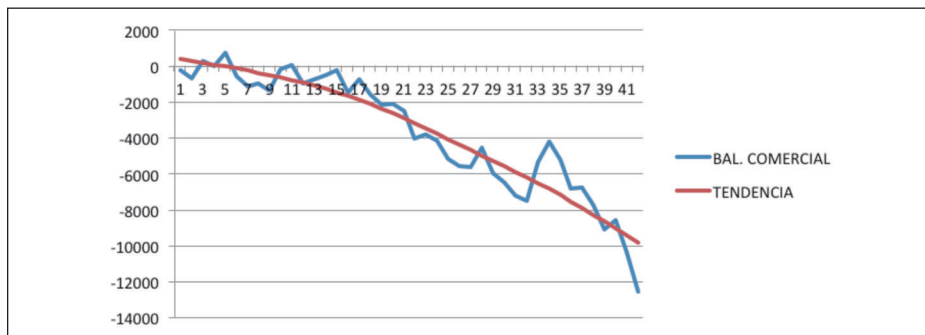
La Figura 1 muestra el PIB de Colombia junto con su tendencia y en las figuras siguientes se muestran las variables de Balanza Comercial, Consumo e Ingreso. Esta representación gráfica de las series para el caso colombiano permiten visualizar la naturaleza procíclica o anticíclica de las series macroeconómicas<sup>5</sup>. En la Figura 2 se observa el carácter contracíclico de la balanza comercial.

**Figura 1.** PIB a precios constantes 2001:1 2011:2 y tendencia (H-P)



Fuente: Elaborado por el autor.

**Figura 2.** Balanza comercial de Colombia a precios constantes 2001:1 2011:2 y tendencia (H-P)

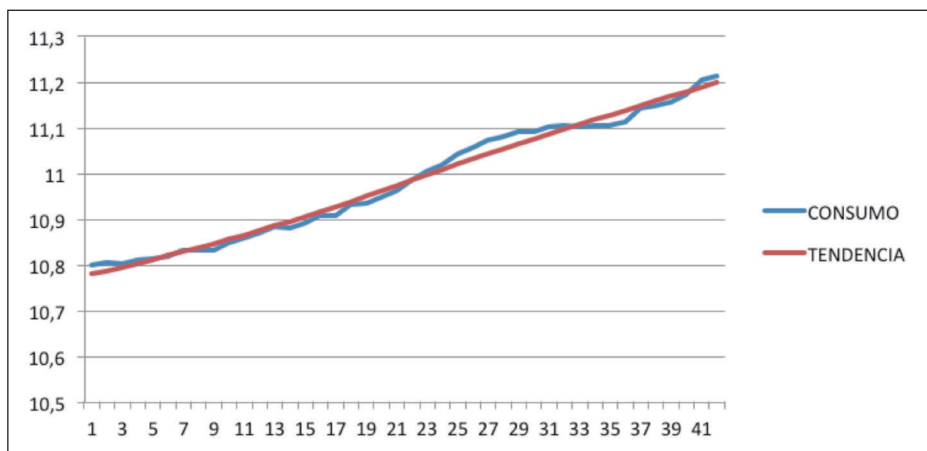


Fuente: Elaborado por el autor.

<sup>5</sup> Las variables son tomadas en logaritmos.

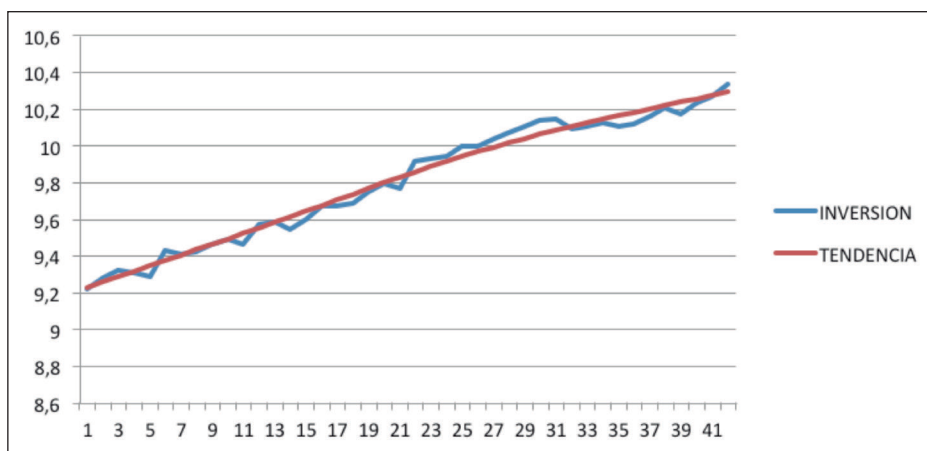
De otro lado, el consumo y la inversión son procíclicos tal como se muestra en las Figuras 3 y 4.

**Figura 3.** Consumo en Colombia a precios constantes 2001:1 2011:2 y tendencia (H-P)



Fuente: Elaborado por el autor.

**Figura 4.** Inversión en Colombia a precios constantes 2001:1 2011:2 y tendencia (H-P)

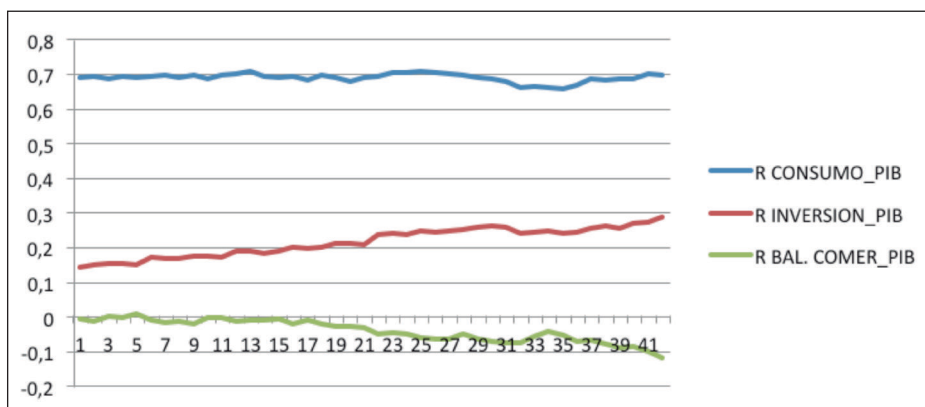


Fuente: Elaborado por el autor.

Otra de las condiciones regulares de una economía pequeña y abierta como la colombiana es la relativa estabilidad de los ratios de las variables respecto

al PIB. La Figura 5 permite apreciar esta condición empírica, propia de economías emergentes.

**Figura 5.** Ratios de los componentes respecto al PIB



Fuente: Elaborado por el autor.

El análisis de los ratios de la economía, permite observar una gran estabilidad así como una clara tendencia en las series macroeconómicas, un fenómeno usual en una economía pequeña y abierta como la colombiana. En todas las variables se observa una alta persistencia del ciclo. Otra evidencia de una economía pequeña y abierta que permite la aplicación del modelo RBC se obtiene al calcular las razones macroeconómicas básicas.

Con el fin de caracterizar empíricamente las regularidades de la economía colombiana, se presentan estadísticas descriptivas de las principales variables macroeconómicas

en términos de sus razones respecto al PIB y correlaciones. Se muestra la participación de cada variable en el total del producto; de igual forma se reporta la variabilidad absoluta de cada una de las variables, entendida ésta como la desviación de la tendencia extraída con el filtro de Hodrick-Prescott.

Adicionalmente, se analizan las correlaciones, determinando cuáles de las variables son procíclicas (correlaciones positivas) y cuáles contracíclicas (correlaciones negativas). Por último, las autocorrelaciones de primer orden dan cuenta de la persistencia de las series.

**Cuadro 1.** Estadísticas de las variables y ratios macroeconómicas para Colombia 2001:1 2011:2

Razón	Valor
Consumo Total/PIB	0,69
Inversión/PIB	0,21
Balanza Comercial/PIB	0,002
<b>Desviación de la Tendencia - (Filtro Hodrick-Prescott)</b>	
PIB	0,0142
Consumo Total	0,0140
Inversión	0,0418
Balanza Comercial	0,7663
<b>Correlaciones (respecto al PIB)</b>	
PIB	1
Consumo Total	0,992
Inversión	0,889
Balanza Comercial	-0,778
<b>Autocorrelaciones de Orden 1</b>	
PIB	0,925
Consumo Total	0,881
Inversión	0,793
Balanza Comercial	0,776

Fuente: Cálculos del autor.

Empezando con las participaciones del consumo, inversión y la balanza comercial en el PIB, se encuentra que la del consumo constituye casi tres cuartas partes del producto (0,70), seguida de la inversión (0,21).

De otro lado el producto fluctúa alrededor de un 1,42% alrededor de su tendencia (aislada con el filtro H-P),

presentando el consumo una variación relativamente semejante alrededor de su tendencia (1,40%). Se observa entonces, una inversión mucho más volátil que el PIB (4,18%) y una mayor variabilidad relativa del producto respecto al consumo; esta última regularidad empírica es encontrada en la mayoría de los países, lo cual concuerda con la teoría del ciclo vital del consumo. Una regularidad encontrada en el trabajo Hamman & Riascos (1998) se confirma en este artículo, dado que la variabilidad de la balanza comercial es tres veces la variabilidad del consumo.

Analizando las correlaciones, se observa que la variable de mayor correlación con el PIB es el consumo (0,992), siendo procíclico junto con la inversión (0,882). Entretanto, la balanza comercial es contracíclica, lo cual se deriva de su correlación negativa con el producto (-0,778). Cabe anotar que dichas regularidades son encontradas en otras economías del mundo<sup>6</sup>.

Por último, los coeficientes de autocorrelación de primer orden confirman la alta persistencia de las series, encabezada por el producto (0,925). Seguida por el coeficiente de autocorrelación del consumo (0,881), estos resultados confirman la evidencia empírica de raíz unitaria en tales series.

Además, el ciclo del PIB muestra alta persistencia con un coeficiente de au-

<sup>6</sup> Backus et al. (1994) encontraron que la balanza comercial es contracíclica en once economías desarrolladas.



tocorrelación cercano a la unidad, lo cual significa que el PIB sobrepasa su tendencia, durante algunos trimestres y, en otros semestres, se halla por debajo de ella. Estos hechos estilizados son muy similares a los encontrados por Rodríguez & Tiscordio (2010) para Uruguay en el periodo 1988-2010, y por Prada (2005) para la economía colombiana en el periodo 1994-2005.

En efecto, los autores confirman una inversión volátil, elevada persistencia del consumo y el PIB y balanza comercial contracíclica. En consecuencia, las razones Consumo/PIB, Inversión/PIB y Balanza comercial/PIB tienden a ser constantes, confirmando lo hallado por Prada (2010). Una vez más, todos estos hechos estilizados caracterizan a una economía pequeña y abierta como la colombiana, cuyo comportamiento, utilizando estas cuatro principales variables macroeconómicas, se espera sea explicado de manera satisfactoria por el modelo teórico.

### Estructura del Modelo

Esta economía modelo, cuyo desarrollo se encuentra en Mendoza (1991), incorpora una oferta laboral indivisible, una variable de capital en un sector y una pequeña economía abierta con un ciclo de negocios que está impulsado solamente por unos *shocks* de productividad<sup>7</sup>. No obstante, se complementa con la metodología de Schmitt-Grohé & Uribe (2004) para

superar los problemas asociados a las raíces unitarias relacionadas al problema de acumulación.

La estructura de la “economía modelo” se basa sobre una serie de supuestos simplificadores. Se trabaja con una economía pequeña y abierta para la cual existen dos tipos de agentes económicos: hogares y empresas. Se asumen millones de hogares idénticos, para introducir el concepto de “hogar” representativo, supuesto que también se aplica del lado de las empresas. Se introducen, así mismo, los conceptos de horizontes de vida infinitos para ambos tipos de agentes que de su interacción se obtiene un equilibrio general competitivo.

Los consumidores son los dueños de los factores de producción capital y de trabajo que son adquiridos por las empresas, para producir un único bien. Los hogares tienen una estructura de preferencias sobre la canasta de bienes y sobre el ocio, así como la posibilidad de intercambiar recursos con el resto del mundo, mediante activos externos.

### Preferencias

Los hogares perciben utilidad del consumo del bien final y del tiempo no dedicado al trabajo (ocio). Se asume que el tiempo disponible puede ser repartido entre ocio y trabajo. Con el objetivo de ingresar el ahorro como variable

<sup>7</sup> La aplicación de trabajo indivisible a los modelos de ciclos reales se debe a Hansen (1985).

endógena al modelo, se introduce el supuesto de que los agentes tienen un horizonte de vida infinito y planean sus gastos tomando en cuenta esta corriente de ingresos. Cuando la expectativa de vida es suficientemente larga y el consumo futuro es descontado (en este caso se asume que  $0 < \beta < 1$ ), el peso del consumo futuro con un horizonte infinito de vida dentro de la función de utilidad puede ser tan pequeño, que no altere las decisiones actuales.

Lo anterior es particularmente importante dado que las funciones de utilidad se asumen como invariables en el tiempo, permitiendo el uso de métodos recursivos para resolver estados estacionarios. Los individuos asignan entonces el consumo y el trabajo de manera intertemporal, maximizando así la función de utilidad cuya estructura de preferencias se rige por lo indicado en Uzawa (1968). Bajo este esquema, el factor de descuento de los hogares es una función de nivel del consumo per cápita y de las horas trabajadas del hogar, más que una función de carácter individual.

La economía se compone de un número de hogares idénticos cuyo horizonte de vida es infinito y están dotados cada uno de una unidad de tiempo, maximizando su utilidad esperada en el horizonte de vida. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \theta_t U(c_t, h_t, h_{t-1}) \quad (6)$$

En donde  $E$  es el operador de valor esperado, y  $c_t$  y  $h_t$  son respectivamente el consumo de bienes y de horas trabajadas. Los individuos asignan entonces el consumo y el trabajo de forma intertemporal y su función de utilidad se maximiza de acuerdo con la especificación propuesta por Mendoza (1991) y con una estructura de preferencias de tipo Greenwood–Hercowitz–Huffman (GHH). La primera derivada respecto al consumo es positiva, lo que no sucede con la segunda derivada, siendo esta negativa, pues a medida que aumenta el consumo, el nivel de utilidad aumenta, pero cada vez en menor proporción. A continuación se encuentra la función que lo expresa:

$$U(c_t, h_t, h_{t-1}) = \frac{[c_t - \frac{A}{\omega}(h_t + \alpha h_{t-1})]^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (7)$$

Siendo  $\gamma$  el coeficiente de aversión al riesgo y  $\alpha$  un factor que se incluye a la persistencia de la oferta laboral dentro de función de utilidad de los hogares. Posteriormente, Schmitt-Grohé & Uribe (2004) utilizan el mismo tipo de función con la diferencia que  $\alpha=0$ , en donde los hogares sólo derivan la no desutilidad de las horas trabajadas contemporáneamente.

Denotando por  $\beta_t$  el factor de descuento endógeno:

$$\beta_t(c_t, h_t, h) = \left[1 + c_t - \frac{A}{\omega}(h_t + \alpha h_{t-1})^\omega\right]^{-\psi} \quad (8)$$

Dado que  $\psi > 0$ , la función  $\beta_t(\cdot)$  es decreciente con el consumo y se

incrementa con la oferta laboral corriente. Esta estructura de preferencias caracteriza una tasa endógena de preferencias en el tiempo que se incrementa con el nivel de consumo en periodos pasados.

En dicho escenario, los individuos desean reasignar su consumo intertemporal enfrentando no sólo el efecto de un cambio instantáneo en la utilidad marginal, sino el efecto derivado de incrementar el consumo corriente reduciendo el peso asignado al consumo futuro. Dada la estructura de (2), la tasa marginal de sustitución entre C y L depende únicamente de esta última, convirtiéndose en el empleo independiente de las dinámicas de consumo.

En resumen, el agente está resolviendo el mismo problema de optimización que no es otro que la maximización de la función de utilidad descontada en un horizonte infinito, sujeta a las mismas restricciones presupuestales. Tanto las variables estado, como los resultados de las decisiones en periodos previos y las condiciones iniciales que determinan los valores de algunas variables en el periodo actual, pueden ser distintos en cada periodo.

En tal caso, la condición de transversalidad no requiere de verificación, dada la concavidad de la función de utilidad, la cual es continuamente diferenciable, donde las posibles asigna-

ciones en cada periodo son convexas y no vacías (Stokey et al., 1989).

### Tecnología de Producción

Las firmas disponen de una tecnología de producción del único de un bien compuesto transable internacionalmente.

$$y_t = A_t f(k_t, l_t)$$

$$f(k_t, l_t) = \exp(e_t) k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} \quad (9)$$

$$0 < \alpha < 1$$

Donde  $l_t$  es la mano de obra y  $k_t$  el stock de capital. El producto doméstico de esta pequeña economía se rige por una función de producción Cobb-Douglas que cumple con las condiciones neoclásicas estándar, siendo  $e_t$  un *shock* tecnológico de naturaleza estocástica. El término  $A_t$  es un parámetro de escala que se interpreta como la productividad general de la economía dominada por un proceso estocástico exógeno autorregresivo.

Para el caso de la tecnología, se asume que sigue un proceso AR(1) con el fin de capturar la correlación serial entre los *shocks* de productividad, donde se asume que estos *shocks* son i.i.d siendo  $\rho$  el parámetro de persistencia. Los *shocks* de productividad fueron diseñados dentro del modelo para tener un efecto temporal y un efecto permanente, reproduciendo así la requerida persistencia y amplificación de los *shocks*.

$$e_{t+1} = \rho e_t + \varepsilon_{t+1} \quad (10)$$

No obstante, el modelo ignora la existencia de bienes no transables y, por lo tanto, se enfoca en el canal de transmisión de riqueza generado por las fluctuaciones en los precios internacionales, descartando efectos sustitución.

### Movimientos de Capital

La ley de movimiento de capital doméstico está dada por:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t - \left(\frac{\phi}{2}\right)(k_{t+1} - k_t) \quad (11)$$

Donde  $i_t$  es la tasa de inversión y  $\delta$  es una tasa constante de depreciación. Los hogares son los únicos agentes con acceso a mercados externos o internacionales perfectamente competitivos, en los cuales las deudas extranjeras  $d_t$ , pueden pagarse a la tasa de interés real  $r_t$ , e intercambiada con el resto del mundo.

De otro lado, el término  $\left(\frac{\phi}{2}\right)(k_{t+1} - k_t)$  representa el costo de ajuste de la inversión neta, que es igual a cero en el estado estacionario no estocástico (Guo & Janko, 2007). El comportamiento de la deuda se expresa en la siguiente ecuación como:

$$d_{t+1} = TB_t + d_t[1 + r_t \exp(n_t)] \quad (12)$$

Donde  $TB_t$  es la balanza comercial y  $n_t$  es una perturbación aleatoria capaz de afectar la tasa de interés internacional. Se asume entonces que los agentes tienen limitaciones con respecto a su habilidad de asegurarse contra riesgos domésticos, a pesar de que algunos instrumentos extranjeros pueden ofrecer alguna protección. Así, se asume que, a través de la acumulación y desacumulación de activos externos, los hogares pueden suavizar el consumo ante choques de la tasa de interés internacional.

En este contexto las limitaciones pueden resultar potencialmente en grandes fluctuaciones del consumo. Sin embargo, Obstfeld (1989) sugiere que la no completitud de los mercados financieros no tiene efectos drásticos sobre las economías domésticas. La estructura financiera del modelo se integra con el supuesto que los extranjeros no poseen capital doméstico, aunque es posible para los agentes domésticos obtener préstamos de capital de los mercados internacionales<sup>8</sup>.

La restricción agregada de la economía establece que la suma del consumo, la inversión y el balance comercial no puede exceder el producto doméstico:

<sup>8</sup> Esto es consistente con tasas de interés domésticas mayores que la tasa de interés mundial, situación típica de países en desarrollo como Colombia.

$$c_t + i_t + TB_t \leq \exp(e_t) k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} - \left(\frac{\phi}{2}\right) (k_{t+1} - k_t)^2 \quad (13)$$

### Programación dinámica y solución técnica

Las decisiones intertemporales involucran la selección de  $k_{t+1}$ ,  $d_{t+1}$ ,  $c_t$  y  $h_t$ . Dado el estado de la economía descrito por  $k_t$ ,  $d_t$  y  $\lambda_t$ ; ésta concreta la realización del estado “natural” con respecto a las perturbaciones  $e_t$

y  $n_t$ . Las restricciones usuales de no negatividad del consumo, el capital y el trabajo complementan el modelo<sup>9</sup>. La regla de decisión que caracteriza el proceso de equilibrio estocástico puede ser obtenida resolviendo la siguiente ecuación:

$$\text{Max} \left\{ \frac{\left[ c_t - \frac{A}{\omega} (h_t + \alpha h_{t-1}) \right]^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \exp \left[ -\psi \ln \left( 1 + c_t - \frac{\tilde{h}_t \omega}{\omega} \right) \times \left[ \sum_{r=1}^4 \pi_{s,r} V(K_{t+1}, A_{t+1}, \lambda_{t+1}^r) \right] \right] \right\} \quad (14)$$

Respecto a  $c_t$ ,  $k_{t+1}$ , y  $A_{t+1}$ , sujeto a la restricción:

$$c_t = \exp(e_t) k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} - \left(\frac{\phi}{2}\right) (k_{t+1} - k_t)^2 - k_{t+1} + k_t(1 - \delta) + [1 + r^* \exp(n_t)] A_t - A_{t+1} \quad (15)$$

La estructura estocástica del problema es simplificada asumiendo que las perturbaciones siguen una cadena de Markov (Mendoza, 1991). Las tasas de

interés y los *shocks* de productividad presentan dos posibles realizaciones, cada una de manera que en cada periodo:

$$\lambda_t \in \Lambda = \{(e^1, n^1), (e^1, n^2), (e^2, n^1), (e^2, n^2), \} \quad (16)$$

La estructura estocástica del modelo permite caracterizar los momentos estadísticos de los *shocks*. Particularmente, las desviaciones estándar de los *shocks* del producto doméstico y de las tasa de interés están dadas por  $\sigma_e = e$  y  $\sigma_n = n$  con una correlación serial de primer orden.

Dado que la función de valor no puede ser resuelta analíticamente, se utiliza

un procedimiento numérico para estudiar el proceso de equilibrio estocástico dinámico, siguiendo la metodología propuesta por Dejong (2010). Se parte de un vector que constituye la solución al problema planteado (para brevedad en la notación se reemplaza el periodo  $t+1$  de las variables por el superíndice “prima”).

$$X' = [C', L', A', Y', K', I', \xi' \lambda', n', r'] \quad (17)$$

<sup>9</sup> Además de estas restricciones, se asume que la inversión es reversible.

Para aproximarse de manera dinámica al equilibrio, la separación de las variables de estado y coestado  $y_t$  (no predeterminadas) se considera útil, siendo las primeras aquellas que en el periodo  $t$  pueden ser determinadas por las acciones del pasado o por un proceso natural.

Se define entonces un vector con las variables estado, junto a  $A$ , el capital ( $K$ ) que puede heredarse del pasado y los *shocks* de productividad que los individuos toman como exógenos ( $K$ ,  $A$ ,  $\xi$ ). Las siete variables restantes se consideran de coestado, siendo escogidas de manera explícita para un periodo y con el propósito de maximizar la función objetivo.

Reescribiendo el sistema, se obtiene:

$$E[\Gamma(X', X)] = 0 \quad (18)$$

Siendo un modelo estocástico no lineal, es posible encontrar una aproximación lineal para la expresión (10) junto con una expansión de Taylor. El procedimiento consiste en una Log-linealización del modelo alrededor de un estado estacionario, lo que permite obtener las dinámicas del sistema<sup>10</sup>. Este procedimiento hace uso de las condiciones de primer orden, las restricciones presupuestales, los procesos estocásticos y las condiciones de equilibrio que fueron encontradas

al ser calculado el estado estacionario. La condición necesaria para que el sistema converja a dicho estado estacionario, estableciendo las condiciones iniciales de las covariables, se expresa como:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |E(\hat{X}_{t+j})| = 0 \quad (19)$$

La condición que debe cumplirse si el estado es estacionario se encuentra dada por:

$$\Gamma(\bar{X}, \bar{X}) = 0 \quad (20)$$

Siendo  $\bar{X}$ , las variables en estado estacionario. Una manera de “log-linealizar” es definir las diferencias de logaritmos de una variable:

$$\hat{X}_t = \ln X_t - \ln \bar{X} \quad (21)$$

La anterior transformación es posible para aquellas variables que no toman valores negativos, condición para la aplicación de logaritmos. No obstante, y ante la posibilidad de las variables de tomar valores negativos, se hace necesario un tratamiento por niveles, utilizando la siguiente transformación:

$$\hat{X}_t = X_t - \bar{X} \quad (22)$$

El proceso de Log-Linealización de las condiciones que establecen el equilibrio del modelo se rige por:

<sup>10</sup> Se define estado estacionario como aquella situación en la que las variables son invariantes en el tiempo, esto es para una variable  $x_t$ , en estado estacionario,  $x_{t+j} = x_t = x$ .

$$\begin{aligned}\frac{\overline{TB}}{\overline{Y}} \hat{A}' &= \frac{\overline{TB}}{\overline{Y}} \frac{\bar{r}}{1+\bar{r}} + \frac{\overline{TB}}{\overline{Y}} (1+\bar{r}) \hat{A} - \bar{r} \left[ \hat{Y}' - \frac{\bar{c}}{\overline{Y}} \hat{C}' - \frac{\bar{l}}{\overline{Y}} \hat{L}' \right] \quad (23) \\ \hat{Y} &= \hat{\xi} + \hat{K} + (1-\alpha)\hat{L} \\ \hat{K}' &= (1-\alpha)\hat{K} + \delta\hat{I} \\ \hat{\lambda} &= \frac{\bar{r}}{1+\bar{r}} \bar{r} + \frac{\bar{C}\beta_c}{\beta} \hat{C} + \frac{\bar{L}\beta_l}{\beta} \hat{L} + E(\hat{\lambda}') \\ \hat{\lambda}' &= \frac{(1-\beta)\frac{\bar{C}U_c}{U}}{(1-\beta)\frac{\bar{C}U_c}{U} - \frac{\bar{C}\beta_c}{\beta}} \left[ \frac{\bar{C}U_{cc}}{U} \hat{C} + \frac{\bar{L}\beta_{cl}}{\beta} \hat{L} \right] - \frac{\beta\frac{\bar{C}U_c}{U}}{(1-\beta)\frac{\bar{C}U_c}{U} - \frac{\bar{C}\beta_c}{\beta}} \left[ \hat{\eta}' + \frac{\bar{C}\beta_{cc}}{\beta_c} \hat{C} + \frac{\bar{L}\beta_{cl}}{\beta_c} \hat{L} \right] \\ \hat{\eta} &= (1-\beta) \left[ \frac{\bar{C}U_c}{U} \bar{E}\hat{C}' + \frac{\bar{L}U_l}{U} \bar{E}\hat{L}' \right] + \beta \left[ E\hat{\eta}' + \frac{\bar{C}\beta_{cc}}{\beta_c} \hat{C} + \frac{\bar{L}\beta_{cl}}{\beta_c} \hat{L} \right] \frac{(1-\beta)\frac{\bar{C}U_l}{U}}{(1-\beta)\frac{\bar{C}U_c}{U} + \beta\frac{\bar{L}\beta_l}{\beta}} \left[ \frac{\bar{C}U_{cl}}{U_c} \hat{C} + \frac{\bar{L}U_{ll}}{U_l} \hat{L} \right] + \frac{(1-\beta)\frac{\bar{L}\beta_l}{U}}{(1-\beta)\frac{\bar{C}U_c}{U} + \beta\frac{\bar{L}\beta_l}{\beta}} \left[ \hat{\eta}' + \frac{\bar{C}\beta_{lc}}{\beta_c} \hat{C} + \frac{\bar{L}\beta_{ll}}{\beta_l} \hat{L} \right]\end{aligned}$$

Con  $\hat{r}=0$

Utilizando notación matricial para expresar la versión lineal del modelo se tiene:

$$HX' = QX' \quad (24)$$

En tal caso, las matrices H y Q contienen los coeficientes que son funciones de los parámetros estructurales del modelo. Hasta este punto, el modelo no puede ser resuelto analíticamente, haciendo necesaria una asignación de valores para los parámetros, cuyo procedimiento de escogencia es conocido como calibración. Lo usual en este tipo de procedimientos es tomar valores de otros estudios, calculando los valores restantes por medio de simulaciones, lo cual se muestra en un apartado del presente artículo.

### Encontrando la solución al sistema

Con el propósito de encontrar la solución al sistema, se utiliza una aproximación de segundo orden de

un modelo de expectativas racionales bajo tiempo discreto<sup>11</sup>. El esquema de una función de valor no es utilizado en dicho caso, permitiendo así su aplicación a una amplia variedad de modelos que no se circunscriben a este tipo de función.

En la aproximación de segundo orden se utiliza un método de perturbación que incorpora un parámetro de escala de las desviaciones estándar de los *shocks* exógenos. Específicamente, se toma una expansión de segundo orden de Taylor respecto a las variables de estado y al parámetro mencionado (Schmitt-Grohé & Uribe, 2004).

El conjunto de condiciones para un modelo de equilibrio general dinámico puede escribirse como:

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t) \quad (25)$$

<sup>11</sup> Al utilizar el supuesto de expectativas racionales se tiene que en equilibrio la probabilidad subjetiva de los agentes coincide con la probabilidad arrojada por el modelo (Hammán & Riascos, 1998).

La solución a este modelo tiene la forma:

$$y_t = g(x_t, \sigma) \quad (26)$$

$$x_{t+1} = h(x_t, \sigma) + \eta \sigma \varepsilon_{t+1} \quad (27)$$

Donde  $\sigma$  es un parámetro conocido que refleja el grado de incertidumbre.

### Hallando las condiciones de primer orden

Se utiliza una aproximación de primer orden para las funciones  $g$  y  $h$

$$g(x, \sigma) = g(\bar{x}, \bar{\sigma}) + g_x(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x}) + g_\sigma(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma}) + \frac{1}{2}g_{xx}(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x})^2 + \frac{1}{2}g_{\sigma\sigma}(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma})^2 + g_{x\sigma}(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma}) \dots \quad (28)$$

$$h(x, \sigma) = h(\bar{x}, \bar{\sigma}) + h_x(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x}) + h_\sigma(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma}) + \frac{1}{2}h_{xx}(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x})^2 + \frac{1}{2}h_{\sigma\sigma}(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma})^2 + h_{x\sigma}(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma}) + \dots \quad (29)$$

Sustituyendo las expresiones (21) y (22) en (20):

$$F(x, \sigma) = E_t f(g(h(x, \sigma)) + \eta \sigma \varepsilon', \sigma), g(x, \sigma)h(x, \sigma) + \eta \sigma \varepsilon', x) = 0 \quad (30)$$

Dado que  $F(x, \sigma)$  debe ser igual a cero para todos los posibles valores de  $x$  y  $\sigma$ , luego todas las derivadas de cualquier orden de  $F$  deben también ser iguales a cero:

$$F_{x^k \sigma^j}(x, \sigma) = 0 \quad \forall x, \sigma, j, k \quad (31)$$

Denotando la derivada de  $F$  respecto a  $x$  tomando  $k$  veces y con respecto a  $\sigma$  tomada  $j$  veces.

Rescribiendo (23) y (24):

$$g(x, \sigma) = g(\bar{x}, \bar{\sigma}) + g_x(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x}) + g_\sigma(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma}) \quad (32)$$

$$h(x, \sigma) = h(\bar{x}, \bar{\sigma}) + h_x(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x}) + h_\sigma(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma}) \quad (33)$$

Siguiendo la metodología de Dejong (2010), se desea encontrar una aproximación de segundo orden de las funciones  $g$  y  $h$  alrededor de un estado estacionario no estocástico,  $x_t = \bar{x}$  y  $\sigma = 0$ . En este caso  $\bar{y} = g(\bar{x}, 0)$  y  $\bar{x} = h(\bar{x}, 0)$ .

Dado que  $\bar{y} = g(\bar{x}, 0)$  y  $\bar{x} = h(\bar{x}, 0)$ , los demás coeficientes de los coeficientes desconocidos de la aproximación de primer orden a  $g$  y  $h$  pueden ser identificados utilizando resultados derivados de la ecuación (25)

$$F_\sigma(\bar{x}, 0) = 0 \quad (34)$$

$$F_x(\bar{x}, 0) = 0 \quad (35)$$

Usando la segunda de estas dos expresiones [30], pueden hallarse  $g_\sigma$  y  $h_\sigma$ , encontrando la solución al siguiente sistema:



$$F_{\sigma}(\bar{x}, 0) = f_{y'}g_x h_{\sigma} + f_{x'}h_{\sigma} + f_{y'}g_{\sigma} + f_{y'}g_{\sigma} = 0 \quad (36)$$

Utilizando notación matricial:

$$[f_{y'}g_x + f_{x'}f_{y'} + f_y] \begin{bmatrix} h_{\sigma} \\ g_{\sigma} \end{bmatrix} = 0 \quad (37)$$

Derivando la expresión (20) respecto a  $x$ :

$$[f_{x'}f_{y'}] \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} h_x = [f_{x'}f_{y'}] \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} \hat{x} \quad (38)$$

Al asumir equilibrio y realizando un artificio algebraico, se tiene que:

$$[f_{x'}f_{y'}] \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} h_x \hat{x}' = -[f_{x'}f_{y'}] \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} \hat{x} \quad (39)$$

Manteniendo el supuesto de  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x| < \infty$  y denotando  $A = [f_{x'} \ f_{y'}]$  y  $B = -[f_{x'} \ f_{y'}]$ , se utiliza el método de descomposición de Schur, seguido por Schmitt-Grohé & Uribe (2004). También denominada como descomposición espectral, este método parte de dos matrices A y B cuadradas, unitariamente equivalentes a una matriz triangular. Utilizando matrices triangulares superiores a y b y matrices ortogonales q y z, se satisface que:

$$qAz = a \text{ y } qBz \quad (40)$$

Estableciendo  $s_t = z' [I \ g_x] \hat{x}$ , de manera que se cumpla:

$$as' = b\hat{x} \quad (41)$$

Especificando las matrices:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ 0 & z_{22} \end{bmatrix}$$

$$s = \begin{bmatrix} s^1 \\ s^2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las matrices requeridas para su estimación son:

$$\begin{aligned} g_x &= -z_{22}^{-1} z_{12} \\ h_x &= -z_{11} a_{11}^{-1} b_{11} z_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

Para el cálculo de estas matrices se utilizan los códigos originales de Schmitt-Grohé et al. (2004). Los de los m-files utilizados se detallan.

### Solución al modelo

Para obtener las anteriores soluciones se cuenta con la metodología detallada por Dejong (2010); no obstante, se sigue la de Schmitt-Grohé et al. (2004), toda vez que se disponga de los códigos para el cálculo de las condiciones de primer y segundo orden, así como de los segundos momentos de las series junto con las funciones impulso respuesta.

Los códigos de Matlab elaborados por Schmitt-Grohé & Uribe (2004) requieren de un conjunto de condiciones de equilibrio y de las primeras derivadas de  $f$  evaluadas en el estado estacionario (no estocástico) esto es, dados  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ . El programa auxiliar que utiliza estas derivadas como inputs se denomina *gx\_hx.m*. Se utilizan como programas complementarios, aquellos desarrollados por Mendoza (1991) introduciendo pequeñas modificaciones.

La solución del modelo se encuentra utilizando la técnica de Log-linearización explicada por Dejong (2010). Siguiendo los programas de Mendoza (1991) y Schmitt-Grohé et al. (2004), se obtienen los segundos momentos de las variables de la economía modelo, así como las funciones impulso respuesta ante un *shock* de productividad de una desviación estándar.

### Estrategia de Alineación

Con el propósito de evaluar el desempeño empírico del modelo, se utilizan las variables Consumo, Producto, Balanza Comercial e Inversión. En el modelo RBC, el consumo se define como una adquisición de bienes y servicios para su utilización instantánea (Hamman, 2010). Esta observación es especialmente importante, dado que en la serie de consumo se encuentran incluidos los bienes durables. Aquí debe anotarse que el concepto de consumo no corresponde al utilizado

en las preferencias del modelo, toda vez que no se encontraron series completas de consumo no durable para todo el periodo.

Aunque el modelo contempla las rutinas necesarias para analizar el comportamiento de la variable empleo, se opta por su no inclusión en el análisis, debido a cuestiones metodológicas. La metodología del modelo seguida por Dejong (2010) genera una alta correlación entre empleo (horas trabajadas) y el consumo, lo que sucede al existir una persistencia en las horas de trabajo, afectando el costo de trabajar una unidad adicional de tiempo, pues el modelo asume que el empleo es independiente de las dinámicas de consumo. Para evitar esa contradicción, se decide por no utilizar dicha variable dentro del proceso de alineación.

### Calibrando el modelo

Este procedimiento consiste en la asignación de valores a los parámetros asociados con las formas funcionales escogidas, entre otras, de la función de utilidad y de producción. Vale recordar que existen relaciones que mantienen una relativa estabilidad en el tiempo. En particular, Hamman (2010) toma como ejemplo la participación del consumo de los hogares en el PIB, el porcentaje de horas trabajadas respecto al total de horas, así como la participación de la remuneración al factor trabajo dentro del PIB, por enumerar unas cuantas. Son tales relaciones constantes en el tiempo, lo que se

denomina como hechos estilizados, los cuales junto con la definición de estado estacionario, permiten realizar el procedimiento en cuestión<sup>12</sup>.

En ese orden de ideas, el valor que debe tomar el parámetro  $\alpha$  que representa la remuneración del capital en el producto dentro de una función de producción Cobb-Douglas es  $\frac{wh}{y} = 1 - \alpha$

La teoría económica y diversos estudios afirman que la participación promedio del factor trabajo con respecto al total de la producción obtenida de las Cuentas Nacionales, es cercana a dos terceras partes, alcanzando un  $\alpha = 0,33$  (Prada, et al., 2005).

El parámetro de depreciación del capital puede ser calibrado al hallar la razón inversión/capital. Para el stock de capital se utilizan los datos del Banco de la República. Se tiene entonces que para la economía colombiana, el parámetro  $\delta = 0,0133$  con datos trimestrales, luego para anuales se tiene un  $\delta = 5,32$  (Hamman & Riascos, 1998). Tanto este parámetro como la ecuación (6) determinan el comportamiento de la inversión<sup>13</sup>.

Por otra parte el factor de descuento se calibra para reproducir en el estado estacionario dos relaciones:  $\frac{k}{y}$  o  $\frac{x}{y}$ . El factor de descuento que reproduce  $\frac{x}{y}$  está dado por: sensible

$$\beta_{k/y} = \frac{\frac{k}{y}}{(1-\delta)\frac{k}{y} + \alpha} \quad (44)$$

Mientras que el factor que reproduce  $\frac{x}{y}$  es:

$$\beta_{x/y} = \frac{\frac{x}{y}}{(1-\delta)\frac{x}{y} + \delta\alpha} \quad (45)$$

Se opta por utilizar  $\beta_{x/y}$  debido a que los datos de las Cuentas Nacionales son más confiables que los datos de capital. En este caso, se utiliza un  $\beta_{x/y} = 0,988$  (Prada, et al., 2005).

Como se mencionó anteriormente, la productividad total sigue un proceso autorregresivo de orden 1 representado en la ecuación (1a) cuyo parámetro  $\rho$  se calibra a partir de una estimación de la productividad total de los factores (PTF), obtenida de la función de producción Cobb-Douglas<sup>14</sup> (Prada, et al., 2005).

<sup>12</sup>La calibración fue realizada en Matlab 10.0

<sup>13</sup>Sobre este parámetro se realizó un ejercicio de sensibilidad, encontrando que la variabilidad de la inversión es sensible a su escogencia.

<sup>14</sup>Para el cálculo de la PTF se siguió la metodología de Levinson y Petrin, cuyo cálculo se basa en el residual de la función de producción Cobb-Douglas doble logarítmica y que incluye además del capital ( $k_t$ ) y el trabajo ( $L_t$ ), el consumo de energía eléctrica ( $e_t$ ) y el consumo de materias primas intermedias ( $m_t$ ). El modelo queda especificado como:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 k_t + \beta_2 L_t + \beta_3 e_t + \beta_4 m_t + u_t$$

En este caso el término de error es compuesto. Un primer componente de la productividad que afecta las decisiones del establecimiento y que no es observable  $w_t$ , y un segundo componente que es un término de error que no está correlacionado con los insumos  $\varepsilon_t$ . Dado que  $w_t$  puede estar correlacionado con los insumos generando sesgo en las estimaciones por presencia de endogeneidad, Levinson y Petrin utilizan la demanda por insumos intermedios como variable proxy de la productividad resolviendo los problemas de simultaneidad.

$$\log e_t = \log y_t - \alpha \log k_t - (1 - \alpha) \log l_t \quad (46)$$

Siguiendo a Hamman et al. (2010), el proceso autorregresivo de la productividad total estimada para Colombia es de  $\rho = 0,811$ .

Respecto al parámetro de aversión al riesgo, y debe anotarse que el modelo es sensible a su calibración, especialmente las volatilidades simuladas de la razón de la balanza comercial respecto al PIB, y la volatilidad de la inversión y el PIB (Prada, et al., 2005).

Aunque Schmitt-Grohé et al. (2004), utilizan un  $\gamma = 0,000742$ , este valor genera una excesiva volatilidad del producto, de la inversión y de la balanza comercial con respecto a los hechos estilizados, razón por la cual el parámetro es ajustado a  $\gamma = 0,316$  (Prada, et al., 2005; Hamman, et al., 1998).

El valor del parámetro  $\phi$  que representa el costo de ajuste del capital, debe ser positivo para reducir la volatilidad excesiva del capital y la inversión. En este caso, se adopta el valor utilizado por Mendoza et al. (1991) con un  $\phi = 0,028$ . A pesar de que la inclusión de dicho costo de ajuste no reduce significativamente

estas volatilidades, se incluye en el modelo, teniendo en cuenta su capacidad de reducir las volatilidades de la razón de la balanza comercial respecto al PIB.

Finalmente, se calibra la tasa de interés, que para el estado estacionario es calculada de la forma:

$$r^* = \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (47)$$

A partir de la calibración del parámetro de factor de descuento  $\beta = 0,988$ , el cálculo de la tasa de interés se efectúa de manera directa:

$$r^* = \frac{1 - 0,988}{0,988} = 0,0121$$

Se tiene entonces una tasa de 1,21% trimestral y 4,85% anual. Otra manera de calcular la tasa de interés libre de riesgo es utilizar la tasa de interés de los bonos del tesoro de Estados Unidos, la cual está alrededor del 1,3% trimestral, valor que confirma un adecuado procedimiento de calibración. El parámetro  $\bar{A}$  al ser un parámetro de escala, se asume igual a la unidad al normalizarse. El Cuadro 2 muestra los valores sujetos a calibración.

**Cuadro 2.** Calibración del Modelo RBC

Descripción	Parámetros: Calibración trimestral
Parámetro de la función de producción	$\alpha = 0,33$
Costo de ajuste del capital	$\phi = 0,028$
Tasa de depreciación	$\delta = 0,00133$
Parámetro del proceso AR(1) del <i>shock</i> tecnológico	$\rho = 0,811$
Coefficiente de aversión al riesgo	$\gamma = 0,316$
Factor de descuento	$\beta = 0,988$
Tasa de interés	$r = 0,0121$
Elasticidad oferta de trabajo	$\omega = 1,70$
Hamman et al. (2010); Prada et al. (2005)	

Fuente: Cálculos del autor.

### Análisis cuantitativo

Una manera de evaluar si el modelo propuesto puede describir adecuadamente las fluctuaciones macroeconómicas, consiste en efectuar una comparación entre los momentos y propiedades estadísticas de las variables simuladas con el modelo y las variables de la economía real (Hamman, 2010). El procedimiento de calibración pretende entonces que los datos de la economía real guarden consistencia con los datos de la “economía modelo”. Los resultados del modelo muestran que se reproducen de forma razonable las características del ciclo de la economía colombiana; sin embargo, la

longitud de las series puede afectar su desempeño.

Es así como, para lograr una caracterización de los ciclos de esta economía, se utilizan las desviaciones estándar de cada variable, las respectivas correlaciones con el PIB y el grado de persistencia de las series (usando modelos autorregresivos de orden 1).

### Desviaciones estándar

El Cuadro 3 muestra la comparación de las desviaciones estándar para las variables simuladas con las de la economía colombiana<sup>15</sup>.

<sup>15</sup>Para calcular las desviaciones estándar de las variables simuladas que aparecen en la tabla llamada *table* en el Matlab, se toman los valores de la tabla denominada en el *software* *var\_y*, luego se multiplican por 100, tomando después la raíz cuadrada. De otro lado, para calcular las razones de desviaciones estándar, se utiliza adicionalmente la tabla denominada en Matlab *var\_y1*.

**Cuadro 3.** Comparaciones de las desviaciones estándar: Economía modelo vs. Economía colombiana

Variable	Economía Modelo		Economía Colombiana	
	Valor $\sigma_x$	Valor $\sigma_x/\sigma_y$	Valor $\sigma_x$	Valor $\sigma_x/\sigma_y$
PIB	4,89	1,000	4,081	1,000
Consumo	4,24	0,867	2,604	0,573
Inversión	18,13	6,870	9,235	2,263
Balanza Comercial (%) del PIB.	2,87	0,586	1,653	0,405

Fuente: Cálculos del autor.

La calibración del modelo logra reproducir razonablemente el comportamiento de las volatilidades, así como el comportamiento del PIB con respecto a su variabilidad. En la “economía modelo”, se observa una variabilidad en el consumo superior a la identificada en la economía colombiana. En el modelo, la inversión es cuatro veces mayor que la variabilidad del PIB, mientras que en la economía real apenas es el doble. Una explicación para ello es la marcada sensibilidad a la elección de los parámetros de coste de ajuste y aversión al riesgo que muestran las volatilidades simuladas de la balanza comercial y la inversión. Esto obliga al excesivo cuidado durante el proceso de calibración, si se quiere reproducir lo más cercanamente los comportamientos de las principales variables macroeconómicas. Tales resultados se originan específicamente en la calibración del coeficiente de aversión al riesgo, la cual se toma de

los estudios de Prada et al., (2005) y Hamman et al., (2010).

Para una economía pequeña y abierta como la colombiana, se mantiene el orden de las variabilidades esperadas. Es así como la inversión muestra el doble de volatilidad que el PIB y éste, a su vez, evidencia mayor varianza que el consumo, reproduciendo muy bien el modelo. La variabilidad de la balanza comercial no es muy cercana al valor de la economía modelo (simulada), indicando la necesidad de un ajuste de la calibración del parámetro de aversión al riesgo y el cual podría ser ajustado al alza.

### Correlaciones

El orden de prociclicidad de las series simuladas es muy parecido al de las series reales. El Cuadro 4 presenta las distintas correlaciones respecto al PIB para ambas economías.

**Cuadro 4.** Comparaciones de las desviaciones estándar: Economía modelo vs. Economía colombiana

Variable	Economía Modelo	Economía Colombiana
PIB	1	1
Consumo	0,997	0,992
Inversión	0,601	0,889
Balanza Comercial (%) del PIB.	-0,744	-0,778

Fuente: Cálculos del autor utilizando Matlab 10.0.

La variable que presenta más alta correlación con el PIB es el consumo. El modelo muestra resultados consistentes al confirmar que el consumo y la inversión son procíclicos con estimaciones muy semejantes a la economía colombiana. Tanto en el modelo como en la economía real, la participación de la balanza comercial en el PIB es contracíclica, una regularidad empírica presente en economías pequeñas y abiertas. No obstante, el modelo subestima

un poco la relación entre la balanza comercial y el PIB.

### Persistencia de las series

La persistencia de las series se representa por sus coeficientes de autocorrelación de primer orden, el cual recoge el grado de inercia o persistencia de las series. El Cuadro 5 registra estos coeficientes para las cuatro variables de ambas economías.

**Cuadro 5.** Autocorrelaciones de orden 1: Economía modelo vs. Economía colombiana

Variables	Economía modelo	Economía colombiana
PIB	0,887	0,925
Consumo	0,841	0,881
Inversión	0,733	0,793
Balanza Comercial (%) del PIB	0,601	0,776

Fuente: Cálculos del autor.

Como se observa en el cuadro 5, el modelo subestima levemente la persistencia hallada en las series. Sorprenden la capacidad y la potencia del modelo para reproducir, con un

grado razonable, el comportamiento de la economía colombiana, toda vez que los parámetros del modelo no han sido estimados econométricamente sino calibrados.

### Funciones impulso-respuesta

Una de las maneras de estudiar las dinámicas de la economía usando el modelo RBC, es a través de las funciones impulso respuesta. Como punto de partida se toma el estado estacionario de una economía, el cual recibe un shock exógeno en el periodo inicial. Se utiliza un shock de productividad de una desviación estándar sobre las variables aleatorias exógenas, generando senderos temporales para las variables de capital, producto, consumo y balanza comercial.

Debe anotarse que las funciones impulso-respuesta no se basan en modelos de vectores autoregresivos (VAR). Aproximarse a la solución requiere de un proceso de “log-linealización”, de forma que los impulsos-respuesta muestran las desviaciones porcentuales de las variables respecto a su estado estacionario, ocasionadas por un shock exógeno (Prada, et al., 2005).

Un *shock* positivo en la productividad genera un aumento en la demanda de factores productivos por parte de las empresas, cuyas demandas derivadas de factores incrementan los salarios y las tasas de retorno al capital. Esto, a su vez, genera un

incremento indirecto sobre el producto. Dado que los retornos al capital aumentan como respuesta a la mayor demanda causada, la inversión crece como respuesta al shock de productividad.

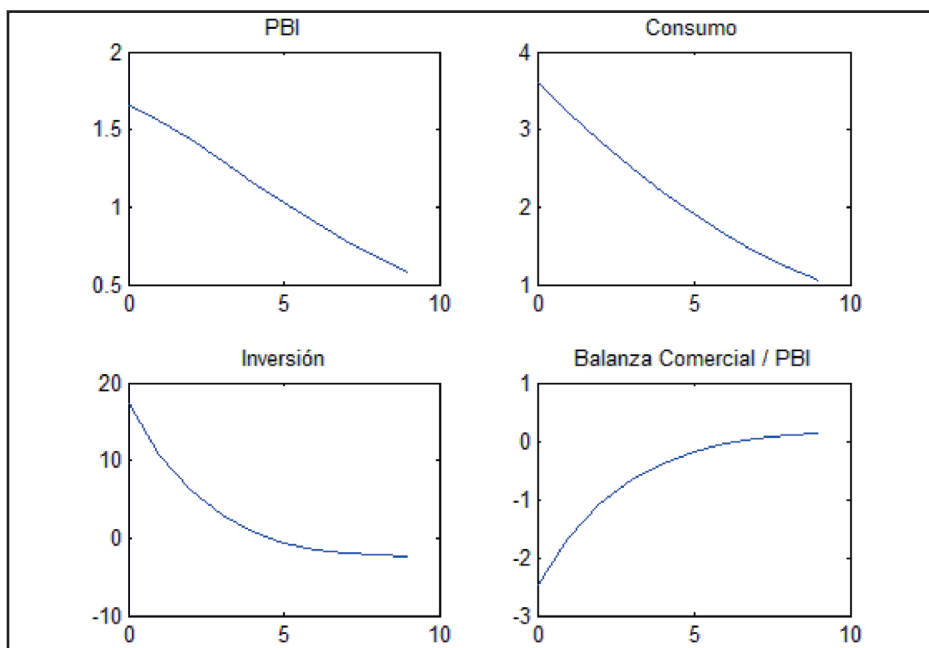
Entre tanto, el hogar representativo ante un aumento de los salarios, multiplica su consumo aunque de manera suave, toda vez que la utilidad del consumo es decreciente. En los periodos siguientes, los agentes se endeudan en montos más altos para financiar sus mayores gastos de consumo e inversión.

Otro argumento a favor de un aumento “suavizado” del consumo, podría ser el que una parte de los recursos serían invertidos por parte de las familias. La figura 6 muestra las funciones concernientes de impulso-respuesta ante un shock de productividad.

La balanza comercial tiende, inicialmente, al incremento; pero luego muestra un comportamiento estable, debido a que las deudas contraídas con el exterior dan inicio a un flujo de pagos, reduciendo el monto de la deuda externa y retornándola, gradualmente, a su estado estacionario (Hamann & Riascos, 1998).



**Figura 6.** Comportamiento de los impactos ante shocks de productividad de una desviación estándar en las variables PIB, Consumo, Inversión y Balanza Comercial



Fuente: Cálculos del autor.

## Conclusiones

El desarrollo de un Modelo de Ciclos Reales (RBC) y su calibración para la economía colombiana, logra replicar los hechos estilizados de manera razonable. Se confirma para Colombia, un comportamiento de pequeña economía abierta y emergente, caracterizada esencialmente por un consumo menos variable que el PIB, la inversión volátil respecto al ciclo del PIB, el consumo y la inversión procíclicos, así como la balanza comercial contracíclica.

A pesar de que el modelo utilizado fue relativamente sencillo, las volatilidades relativas halladas son muy cercanas a

las exhibidas por la economía real. Así mismo, el modelo alcanza una buena aproximación de las correlaciones de las distintas variables con el ciclo. En la misma vía, aunque ligeramente subestimadas por el modelo, las autocorrelaciones replican los hechos estilizados.

No obstante, el modelo propuesto no logra la reproducción de algunos hechos estilizados, entre estos, una sobrestimación de la volatilidad de la balanza comercial respecto al PIB. Otra falencia encontrada en su aplicación, es la subestimación de la persistencia de la balanza comercial, falla asociada a la elección del parámetro de riesgo.

A su vez, se presenta una diferencia en la variabilidad del consumo del modelo frente a la observada en la economía real, cuya explicación puede darse debido a la naturaleza de los datos utilizados. Dado que la función de utilidad empleada en el modelo asume un consumo instantáneo, lo adecuado habría sido utilizar solo el consumo de bienes no durables (esto habría aumentado la volatilidad de la serie consumo); sin embargo, se utiliza la serie de consumo total, pues para el periodo de referencia, no se disponía de estos datos.

Cuando se somete el modelo a un shock de productividad, se identifica un aumento en la demanda de factores productivos, lo que presiona al alza los salarios y la tasa de retorno del capital. Las consecuencias inmediatas son una mayor oferta de trabajo, como consecuencia de los mayores salarios, así como una mayor inversión, debido al aumento en la tasa de interés. Es en este punto donde se reproduce el hecho estilizado de elevada volatilidad de la inversión, en contraposición a un consumo suave.

Se concluye entonces que un modelo RBC simplificado se constituye como una herramienta de considerable potencia para la reproducción de los hechos estilizados, con un posibilidad de contar con funciones impulso-respuesta.

## Bibliografía

ATTANASIO, O., BLOW, L., HAMILTON, R., & LEICESTER, A. (2005). Consumption, House Prices and Expectations. *Bank of England Working Paper* 271, 53-83.

BERNANKE, B., GERTLER, M., & GILCHRIST, S. (1998). The financial accelerator in a quantitative business cycle framework. *NBER Working Paper*, (6455), 1-52.

DIB, A., & CHRISTENSEN, I. (2005). Monetary Policy in an Estimated DSGE Model with a Financial Accelerator *Society for Computational Economics*, (314), 316-335.

DEJONG D AND CHETAN D (2007). *Structural Macroeconometrics*. London: Princeton University Press.

FAMA, E. F. (1990). Stock returns, expected returns, and real activity. *The Journal of Finance*, 45(4), 1089-1108.

FILARDO, A. (2004). Monetary policy and asset price bubbles: calibrating the monetary policy trade-offs. *Bank for International Settlements Working Paper*, (155), 56-89.

HAMANN, F., & RIASCOS, A. (1998). Ciclos económicos en una economía pequeña y abierta-una aplicación para Colombia. *Borradores Semanales de Economía*, (89). Recuperado de <http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra089.pdf>

- KLEIN, P. (2000). Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24(10), 1405-1423.
- McCALLUM, B. T. (1998). Solutions to linear rational expectations models: a compact exposition. *Economics Letters*, 61(2), pp. 143-147.
- MENDOZA E. G. (1991). Real business cycles in a small open economy. *The American Economic Review*, 81(4), 797-818.
- MILLS, T. (2003). *Modelling Trends and Cycles in Economic Time Series*. London: Palgrave MacMillan.
- MORGAN, S. L., & WINSHIP, C. (2007). *Counterfactuals and causal inference: Methods and principles for social research*. London: Cambridge University Press.
- PRADA, S. J (2005). Modelo de ciclos reales para Colombia. MPRA Paper (16286). Recuperado de [http://mpra.ub.uni-muenchen.de/16286/2/MPRA\\_paper\\_16286.pdf](http://mpra.ub.uni-muenchen.de/16286/2/MPRA_paper_16286.pdf)
- SCHMITT-GROHÉ, S., & URIBE, M. (2003). Closing small open economy models. *Journal of International Economics*, 61(1), 163-185.
- SCHMITT-GROHE, S., & URIBE, M. (2004). Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(4), 755-775.
- URIBE, M. & YUE, V.Z. (2006). Country Spreads and Emerging Countries: Who Drives Whom? *Journal of International Economics*, (118), 123-165.

## Anexos

### Anexo 1. Segundos momentos de las variables de la economía modelo o simulada<sup>16</sup>

4,89211041444839	0,899796491686766	1,000000000000000
9,67443963903809	0,877529552555950	0,997917150755802
29,1351662106108	0,619702153383483	0,558038819539739
2,87771200849904	0,899796491686766	1
4,24734837454215	0,653874262722914	-0,744211214881937
2,81647327259335	0,609370306729578	-0,456096485275071

Fuente: Matlab R2010a.

### Anexo 2. Var\_y

0,0024	0,0047	0,0080	0,0014	-0,0015	-0,0006	-0,0014	-0,0158	-0,0223	0,0014
0,0047	0,0094	0,0172	0,0028	-0,0032	-0,0014	-0,0033	-0,0314	-0,0444	0,0027
0,0080	0,0172	0,0849	0,0047	-0,0120	-0,0081	-0,0285	-0,0620	-0,0876	0,0019
0,0014	0,0028	0,0047	0,0008	-0,0009	-0,0004	-0,0008	-0,0093	-0,0131	0,0008
-0,0015	-0,0032	-0,0120	-0,0009	0,0018	0,0011	0,0037	0,0113	0,0160	-0,0006
-0,0006	-0,0014	-0,0081	-0,0004	0,0011	0,0008	0,0028	0,0051	0,0073	-0,0001
-0,0014	-0,0033	-0,0285	-0,0008	0,0037	0,0028	0,0106	0,0129	0,0182	0,0003
-0,0158	-0,0314	-0,0620	-0,0093	0,0113	0,0051	0,0129	0,1058	0,1494	-0,0087
-0,0223	-0,0444	-0,0876	-0,0131	0,0160	0,0073	0,0182	0,1494	0,2110	-0,0123
0,0014	0,0027	0,0019	0,0008	-0,0006	-0,0001	0,0003	-0,0087	-0,0123	0,0009

Fuente: Matlab R2010a.

### Anexo 3. Var\_y1

0,0022	0,0041	0,0032	0,0013	-0,0009	-0,0002	0,0004	-0,0135	-0,0191	0,0014
0,0043	0,0082	0,0074	0,0025	-0,0020	-0,0004	0,0004	-0,0268	-0,0379	0,0028
0,0075	0,0154	0,0526	0,0044	-0,0080	-0,0048	-0,0153	-0,0530	-0,0749	0,0031
0,0013	0,0024	0,0019	0,0007	-0,0005	-0,0001	0,0002	-0,0079	-0,0112	0,0008
-0,0014	-0,0029	-0,0070	-0,0008	0,0012	0,0006	0,0017	0,0097	0,0137	-0,0007
-0,0006	-0,0013	-0,0052	-0,0004	0,0008	0,0005	0,0016	0,0044	0,0062	-0,0002
-0,0014	-0,0030	-0,0190	-0,0008	0,0026	0,0018	0,0066	0,0110	0,0155	-0,0001
-0,0143	-0,0276	-0,0282	-0,0084	0,0069	0,0017	0,0000	0,0904	0,1277	-0,0092
-0,0201	-0,0390	-0,0398	-0,0119	0,0098	0,0024	0,0001	0,1277	0,1803	-0,0130
0,0012	0,0023	-0,0001	0,0007	-0,0003	0,0001	0,0010	-0,0075	-0,0106	0,0009

Fuente: Matlab R2010a.

<sup>16</sup>Esta tabla tiene como insumo, entre otras, las tablas denominadas "var\_y1" y "var\_y", con las cuales se computan las razones de desviaciones estándar.