Trabajo Práctico N° 5:
Ecuaciones en Diferencias.

Ejercicio 1.

Ejercicio 2.

Ejercicio 3.

Ejercicio 4.

Ejercicio 5.

Ejercicio 6.

Ejercicio 7 (*).

Resolver la siguiente ecuación en diferencia de orden 2:

y_{t+2} - $3y_{t+1}$ - $4y_t = 2^t + t^3$.

Se parte de saber que la solución general de una ecuación en diferencias son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a ésta más la solución particular:

$y_t = y_t^h + y_t^p$.

Siendo así, en primer lugar, se buscan las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación en diferencias:

y_{t+2} - $3y_{t+1}$ - $4y_t = 0$.

Sea $y_t = r^t$, se tiene:

$r^{t+2} - 3r^{t+1} - 4r^t = 0$
$r^t\ (r^2 - 3r - 4) = 0$.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan las soluciones de la ecuación homogénea:

$r_1, r_2 = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1(-4)}}{2*1}$
$r_1, r_2 = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$
$r_1, r_2 = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$
$r_1, r_2 = \frac{3\pm5}{2}$
$r_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$.
$r_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.

Entonces, la solución homogénea es la siguiente:

$y_t^h = C_1\ 4^t + C_2\ (-1)^t$.

En segundo lugar, dado que 1 no es raíz de la ecuación $r^2 - 3r - 4 = 0$, se propone la siguiente solución particular:

$y_t^p = k_1 2^t + k_2 t^3 + k_3 t^2 + k_4 t + k_5$.

Resolviendo en la ecuación en diferencias, se tiene:

$[k_1 2^{t+2} + k_2\ (t+2)^3 + k_3\ (t+2)^2 + k_4\ (t+2) + k_5]$ -
$3\ [k_1 2^{t+1} + k_2\ (t+1)^3 + k_3\ (t+1)^2 + k_4\ (t+1) + k_5]$ -
$4\ (k_1 2^t + k_2 t^3 + k_3 t^2 + k_4 t + k_5) =$

$[k_1 2^{t+2} + k_2\,(t^3 + 6t^2 + 12\text{t} + 8) + k_3\,(t^2 + 4\text{t} + 4) + k_4\text{t} + 2k_4 + k_5]$ -
3 $[k_1 2^{t+1} + k_2\,(t^3 + 3t^2 + 3\text{t} + 1) + k_3\,(t^2 + 2\text{t} + 1) + k_4\text{t} + k_4 + k_5]$ -
$(4k_1 2^t + 4k_2 t^3 + 4k_3 t^2 + 4k_4\text{t} + 4k_5)$=

$k_1 2^{t+2} + k_2 t^3 + 6k_2 t^2 + 12k_2\text{t} + 8k_2 + k_3 t^2 + 4k_3\text{t} + 4k_3 + k_4\text{t} + 2k_4 + k_5$ -
3 $[k_1 2^{t+1} + k_2 t^3 + 3k_2 t^2 + 3k_2\text{t} + k_2 + k_3 t^2 + 2k_3\text{t} + k_3 + k_4\text{t} + k_4 + k_5]$ -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4\text{t}$ - $4k_5$=

$k_1 2^{t+2} + k_2 t^3 + 6k_2 t^2 + 12k_2\text{t} + 8k_2 + k_3 t^2 + 4k_3\text{t} + 4k_3 + k_4\text{t} + 2k_4 + k_5$ -
$(3k_1 2^{t+1} + 3k_2 t^3 + 9k_2 t^2 + 9k_2\text{t} + 3k_2 + 3k_3 t^2 + 6k_3\text{t} + 3k_3 + 3k_4\text{t} + 3k_4 + 3k_5)$ -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4\text{t}$ - $4k_5$= $2^t + t^3$

$k_1 2^{t+2} + k_2 t^3 + 6k_2 t^2 + 12k_2\text{t} + 8k_2 + k_3 t^2 + 4k_3\text{t} + 4k_3 + k_4\text{t} + 2k_4 + k_5$ -
$3k_1 2^{t+1}$ - $3k_2 t^3$ - $9k_2 t^2$ - $9k_2\text{t}$ - $3k_2$ - $3k_3 t^2$ - $6k_3\text{t}$ - $3k_3$ - $3k_4\text{t}$ - $3k_4$ - $3k_5$ -
$4k_1 2^t$ - $4k_2 t^3$ - $4k_3 t^2$ - $4k_4\text{t}$ - $4k_5$= $2^t + t^3$

-$6k_1 2^t$ - $6k_2 t^3$ - $(3k_2 + 6k_3)\,t^2 + (3k_2 - 2k_3 - 6k_4)\,\text{t} + (5k_2 + k_3 - k_4 - 6k_5)$= $2^t + t^3$

Luego, se tiene que las constantes k_1, k_2, k_3, k_4 y k_5, respectivamente, son iguales a:

-$6k_1 2^t$= 2^t
$k_1 = \frac{2^t}{-6*2^t}$
$k_1 = \frac{-1}{6}$.

-$6k_2 t^3$= t^3
$k_2 = \frac{t^3}{-6t^3}$
$k_2 = \frac{-1}{6}$.

-$(3k_2 + 6k_3)\,t^2$= 0
$3k_2 + 6k_3 = \frac{0}{-t^2}$
$3k_2 + 6k_3$= 0
$6k_3$= -$3k_2$
$k_3 = \frac{-3k_2}{6}$
$k_3 = \frac{-1}{2}\,k_2$
$k_3 = \frac{-1}{2}\,(\frac{-1}{6})$
$k_3 = \frac{1}{12}$.

$(3k_2 - 2k_3 - 6k_4)$ t= 0
$3k_2 - 2k_3 - 6k_4 = \frac{0}{t}$
$3k_2 - 2k_3 - 6k_4$= 0
$6k_4 = 3k_2 - 2k_3$
$k_4 = \frac{3k_2 - 2k_3}{6}$
$k_4 = \frac{1}{2}\,k_2 - \frac{1}{3}\,k_3$
$k_4 = \frac{1}{2}\,(\frac{-1}{6}) - \frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$
$k_4 = \frac{-1}{12} - \frac{1}{36}$

$k_4 = \frac{-1}{9}$.

$5k_2 + k_3 - k_4 - 6k_5 = 0$
$6k_5 = 5k_2 + k_3 - k_4$
$k_5 = \frac{5k_2 + k_3 - k_4}{6}$
$k_5 = \frac{5}{6}\,k_2 + \frac{1}{6}\,k_3 - \frac{1}{6}\,k_4$
$k_5 = \frac{5}{6}\,(\frac{-1}{6}) + \frac{1}{6}\,\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\,(\frac{-1}{9})$
$k_5 = \frac{-5}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{54}$
$k_5 = \frac{-1863}{17496}$.

Entonces, la solución particular es la siguiente:

$y_t^p = \frac{-1}{6}\,2^t - \frac{1}{6}\,t^3 + \frac{1}{12}\,t^2 - \frac{1}{9}\,\text{t} - \frac{1863}{17496}$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias de orden 2 es:

$y_t = C_1\,4^t + C_2\,(-1)^t - \frac{1}{6}\,2^t - \frac{1}{6}\,t^3 + \frac{1}{12}\,t^2 - \frac{1}{9}\,\text{t} - \frac{1863}{17496}$.