Soluciones Práctica 4[1]

1. Ejercicio 1

1.1. Variable aleatoria uniforme

(a) Si $X \sim U(a,b)$ entonces

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(a+b)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(a^2+ab+b^2)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Entonces $Var(X) = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} - \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{12} = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

(b) $M_X(t) = \dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

Buscamos la FGM: $M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_a^b e^{tx}f(x)dx = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}dx = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$$

Entonces

$$M'_X(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(be^{tb}-ae^{ta})t-(e^{tb}-e^{ta})}{t^2}$$

$$E(X) = \lim_{t\to 0} M'_X(t) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{\cancel{(be^{tb}-ae^{ta})}+t(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})-\cancel{(be^{tb}-ae^{ta})}}{2t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})}{2} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$M''_X(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^3-(be^{tb}-ae^{ta})2t^2+(e^{tb}-e^{ta})2t}{t^4}$$

$$M''_X(t) = \frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^2-2t(be^{tb}-ae^{ta})+2(e^{tb}-e^{ta})}{t^3}$$

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} M''_X(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})t^2-2t(be^{tb}-ae^{ta})+2(e^{tb}-e^{ta})}{t^3}$$

$$E(X^2) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^3e^{tb}-a^3e^{ta})t^2+\cancel{(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})2t}-\cancel{2(be^{tb}-ae^{ta})}-\cancel{2t(b^2e^{tb}-a^2e^{ta})}+\cancel{2(be^{tb}-ae^{ta})}}{3t^2}$$

$$E(X^2) \underbrace{=}_{\text{L'Hôpital}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\frac{(b^3e^{tb}-a^3e^{ta})\cancel{t^2}}{3\cancel{t^2}}$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Por lo tanto $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

[1] Algunas soluciones están basadas en soluciones anteriores hechas por Pedro Martínez Bruera.

1.2. Variable aleatoria exponencial

(a) Recordemos que:

- $E(X) = \int_0^{\infty} x f_X(x)dx$
- $E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f_X(x)dx$
- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

En este caso particular, tenemos que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x > 0$. Entonces,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)dx = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

Nota: Para calcular estas integrales debemos usar el método de **integración por partes**.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

y recordamos que $h(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} h(x) - h(a)$.

Calculamos $E(X)$ y $Var(X)$:

$$E(X) = \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'(x)} dx \underbrace{=}_{\text{I.P.}} -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}dx^{2}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x}}_{=0} - \underbrace{0\cdot e^{-\lambda\cdot 0}}_{=0} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty}\right]$$
$$= -\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}$$

Calculamos $E\left(X^2\right)$:

$$E\left(X^2\right) = \int_0^{\infty} \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'(x)} dx \underbrace{=}_{\text{Int. por partes}} -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2xe^{-\lambda x}dx$$
$$=^{3} - x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} -x^2e^{-\lambda x}}_{=0} - \underbrace{0^2\cdot e^{-\lambda\cdot 0}}_{=0} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$
$$= \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx}_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Por lo tanto,

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(b)

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad \text{si } t < \lambda$$

[3] Notar que $f(x) = x^2$, $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, por lo tanto $f'(x) = 2x$ y $g(x) = -e^{\lambda x}$.

$$M'_X(t) = (-1)\cdot(-1)\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$
$$M''_X(t) = (-2)\cdot(-1)\frac{\lambda}{(\lambda-t)^3} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = 2\frac{\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Entonces $Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

1.3. Variable aleatoria Gamma

(a) $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{(0,+\infty)}$, donde

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

En particular, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ si α es un número entero positivo y $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Veamos primero que $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$

Veamos ahora que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1-1}e^{-x}dx\\ &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx\\ &= \underbrace{-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{=\Gamma(\alpha)}\\ &=\alpha\Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

Entonces si α es un número entero positivo, vale que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

Calculemos $E(X)$ y $Var(X)$:

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^{+\infty} x\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx}_{=1}\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}\end{aligned}$$

La última integral es igual a 1 porque es la integral de la función de densidad de una variable con distribución $\Gamma(\alpha+1,\lambda)$.

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx}_{=1}\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\end{aligned}$$

La última integral es igual a 1 porque es la integral de la función de densidad de una variable con distribución $\Gamma(\alpha+2,\lambda)$.

Cabe notar que $\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha+1)\alpha$

Entonces $Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

(b) $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}, t < \lambda$

$$M'_X(t) = \lambda^{\alpha}(-\alpha)\cdot(-1)\frac{1}{(\lambda-t)^{\alpha+1}} \Rightarrow M'_X(0) = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$
$$M''_X(t) = \alpha\lambda^{\alpha}(-(\alpha+1))\cdot(-1)\frac{1}{(\lambda-t)^{\alpha+2}} \Rightarrow M''_X(0) = E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

Entonces $Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

1.4. Variable aleatoria con $f(x) = \frac{1+\theta x}{2}$ si $x \in [-1,1]$

(a) Calculemos la esperanza y varianza usando la función de densidad

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^{1} x\cdot\left(\frac{1+\theta x}{2}\right)dx = \int_{-1}^{1}\frac{x+\theta x^2}{2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x+\theta x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{\theta x^3}{3}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{\theta}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^{1} x^2\cdot\left(\frac{1+\theta x}{2}\right)dx = \int_{-1}^{1}\frac{x^2+\theta x^3}{2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2+\theta x^3 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{\theta x^4}{4}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

O sea que $Var(X) = \frac{3-\theta^2}{9}$.

(b) Calculemos la esperanza y varianza usando la FGM

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) = \int_{-1}^{1} e^{tx}\cdot\left(\frac{1+\theta x}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{tx}dx + \frac{\theta}{2}\int_{-1}^{1} x\cdot e^{tx}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{tx}dx + \frac{\theta}{2}\left[\frac{e^{tx}x}{t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{t}e^{tx}dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{t}e^{tx}\Big|_{-1}^{1} + \frac{\theta}{2}\left[e^{t}+e^{-t} - \frac{1}{t^2}e^{tx}\Big|_{-1}^{1}\right] \\ &= \frac{1}{2t}\left(e^{t}-e^{-t}\right) + \frac{\theta}{2}\left[\frac{e^{t}+e^{-t}}{t} - \frac{\left(e^{t}-e^{-t}\right)}{t^2}\right] \end{aligned}$$

Notar que esta función no está definida en un entorno de $t = 0$.

1.5. Variable aleatoria Pareto

(a) Calculamos los momentos de la función X, $E(X^k)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Notemos que el k-ésimo momento de X estará definido si y sólo si $\alpha > k$.

Separamos los cálculos de los momentos en tres casos para ver que solamente se pueden calcular los momentos si $\alpha > k$. Recuerde que el k-ésimo momento se calcula de la siguiente manera:

$$E\left(X^k\right) = \int_\lambda^\infty x^k f_X(x)dx$$

a) Consideramos $\alpha > k$.

$$\begin{aligned} E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{k-\alpha-1}dx \\ &= \alpha\lambda^\alpha \frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\Big|_\lambda^\infty \\ &= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{k-\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} x^{k-\alpha} - \lambda^{k-\alpha}\right) \\ &= \alpha\lambda^\alpha\left(0 - \frac{\lambda^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right) \\ &= \frac{\alpha\lambda^k}{\alpha-k} \end{aligned}$$

para $k-\alpha < 0, x^{k-\alpha} \to 0$ si $x \to \infty$

b) Consideramos $\alpha = k$.

$$\begin{aligned} E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{\alpha-\alpha-1}dx \\ &= \alpha\lambda^\alpha \ln x\Big|_\lambda^\infty \\ &= \alpha\lambda^\alpha\left(\lim_{x\to\infty} \ln x - \ln\lambda\right) \\ &\to \infty \end{aligned}$$

c) Consideramos $\alpha < k$.

$$\begin{aligned} E\left(X^k\right) &= \alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{k-\alpha-1}dx \\ &= \alpha\lambda^\alpha \frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\Big|_\lambda^\infty \\ &= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{k-\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} x^{k-\alpha} - \lambda^{k-\alpha}\right) \to \infty \end{aligned}$$

para $k-\alpha > 0, x^{k-\alpha} \to +\infty$ si $x \to \infty$.

Por lo tanto $E(X) = \dfrac{\alpha\lambda}{\alpha-1}$ y $E(X^2) = \dfrac{\alpha\lambda^2}{\alpha-2}$.

Entonces, se tiene que $Var(X) = \dfrac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

(b) Las v.a. con distribución Pareto no tienen FGM.

2. Ejercicio 2

Tenemos $X \sim Exp(\lambda)$ donde

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$$

Queremos calcular $\mathbb{E}\left[X^k\right]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \int_0^\infty x^k f(x)dx = \int_0^\infty \lambda x^k e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda x^k \frac{\lambda^k}{\lambda^k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\overbrace{\Gamma(k+1)}^{=k!}}{\lambda^k} \underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)} x^k e^{-\lambda x}}^{G(k,\lambda)} dx}_{\text{(Cond. Cierre)=1}} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

3. Ejercicio 3

Inciso A

Tenemos X variable aleatoria con la siguiente densidad

$$f_X(x) = c^2 x - 0{,}5 c I_{(0,1)}(x)$$

Para que sea una densidad, $f(x)$ debe verificar la condición de cierra y que $f(x) \geq 0$ para todo el soporte de X. Primero busquemos los valores de c tal que se verifique la condición de cierre:

$$\int_0^1 f_X(x) = 1 \implies \int_0^1 \left(c^2 x - 0{,}5c\right) dx = c^2 \frac{x^2}{2} - c\frac{x}{2}\bigg|_0^1 = \frac{c^2 - c}{2} = 1 \implies c_1 = 2\; c_2 = -1$$

Ahora veamos para qué valores de x, $f_X(x)$ es positiva para c_1 y c_2

$$c_1 = 2 \implies f_X(x) = 4x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{4}$$
$$c_2 = -1 \implies f_X(x) = x + 0{,}5 \geq 0 \iff x \geq -0{,}5$$

Luego, c_1 no satisface la condición que la densidad debe ser positiva para todo el soporte. Finalmente, la densidad estará dada por

$$f_X(x) = x + 0{,}5 I_{(0,1)}(x)$$

Inciso B

Sea $\tilde{\mu}_X$ la mediana de X. Es el valor tal que $P\left(X \leq \tilde{\mu}_X\right) = 0{,}5$. Luego

$$0{,}5 = \int_0^{\tilde{\mu}_X} (x + 0{,}5)\, dx = \frac{x^2 + x}{2}\bigg|_0^{\tilde{\mu}_X} \implies \tilde{\mu}_X = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}}{2\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $X \in (0,1)$ entonces $\tilde{\mu}_X = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Inciso C

Definamos $Y = aX + b$, queremos computar la densidad de y.

$$F_Y(y) = P\left(Y \leq y\right) = P\left(aX + b \leq y\right) = P\left(aX \leq y - b\right)$$

Si $a > 0$ entonces $Y \in (b, b+a)$. Por lo tanto

$$F_Y(y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Luego

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq b \\ \frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right) & b < y < a+b \\ 1 & a+b < y \end{cases}$$

Finalmente, la densidad es

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right) = \frac{1}{a}f_X(\frac{y-b}{a})I_{(b,b+a)}(y)$$

Si $a < 0$ tenemos entonces $Y \in (a+b, b)$. Por lo tanto

$$F_Y(y) = P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Luego

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq a+b \\ 1 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right] & b < y < a+b \\ 1 & b < y \end{cases}$$

Finalmente, la densidad es

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right) = -\frac{1}{a}f_X(\frac{y-b}{a})I_{(a+b,b)}(y)$$

Inciso D

Sea $\tilde{\mu}_Y$ la mediana de Y. Es el valor tal que $P\left(Y \leq \tilde{\mu}_Y\right) = 0{,}5$. Supongamos que $a > 0$, luego

$$0{,}5 = F_Y\left(\tilde{\mu}_Y\right) = P\left(Y \leq \tilde{\mu}_Y\right) = P\left(aX + b \leq \tilde{\mu}_Y\right) = P\left(X \leq \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a}\right) \implies \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a} = \tilde{\mu}_X \implies \tilde{\mu}_Y = a\tilde{\mu}_X + b$$

Supongamos ahora que $a < 0$

$$0{,}5 = F_Y\left(\tilde{\mu}_Y\right) = P\left(Y \leq \tilde{\mu}_Y\right) = P\left(aX + b \leq \tilde{\mu}_Y\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a}\right) \implies P\left(X \leq \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a}\right) = 0{,}5 \implies \frac{\tilde{\mu}_Y - b}{a} = \tilde{\mu}_X$$
$$\implies \tilde{\mu}_Y = a\tilde{\mu}_X + b$$

Consideremos ahora cualquier otro percentil. Llamemos $\tilde{X}_p$ y $\tilde{Y}_p$ al percentil p de X e Y tal que $P\left(X \leq \tilde{X}_p\right) = P\left(Y \leq \tilde{Y}_p\right) = p$. Si $a > 0$ tenemos

$$p = F_Y\left(\tilde{Y}_p\right) = P\left(Y \leq \tilde{Y}_p\right) = P\left(X \leq \frac{\tilde{Y}_p - b}{a}\right) \implies \tilde{Y}_p = a\tilde{X}_p + b$$

Luego con $a > 0$ el percentil p de Y será $a\tilde{X}_p + b$. Con $a < 0$ tenemos

$$p = F_Y\left(\tilde{Y}_p\right) = P\left(Y \leq \tilde{Y}_p\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{\tilde{Y}_p - b}{a}\right) \implies 1 - p = P\left(X \leq \frac{\tilde{Y}_p - b}{a}\right) \implies \tilde{Y}_p = aX_{1-p} + b$$

Luego con $a < 0$ esto no será cierto.

4. Ejercicio 4

Inciso A

Tenemos X tal que $\ln X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Sea $\tilde{X}_{95}$ el percentil 95. Es decir $P\left(X \leq \tilde{X}_{95}\right) = 0{,}95$. Luego

$$0{,}95 = F_X\left(\tilde{X}_{95}\right) = P\left(X \leq \tilde{X}_{95}\right) = P\left(\ln X \leq \ln \tilde{X}_{95}\right) = P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{\ln \tilde{X}_{95} - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln \tilde{X}_{95} - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$$
$$\implies \tilde{X}_{95} = e^{\mu + \sqrt{\sigma^2}\Phi^{-1}(0{,}95)}$$

Donde $\Phi(z)$ es la distribución acumulada de una variable aleatoria que se distribuye normal estándar, $N(0,1)$.

Inciso B

Buscamos la densidad de X

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\ln X \leq \ln x) = F_{\ln X}(\ln x)$$

Luego

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(f_{\ln X}(\ln x)\right) = \frac{1}{x} f_{\ln X}(\ln x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)^2}$$

5. Ejercicio 5

Notemos que 15 minutos son un cuarto de hora y que 45 minutos son tres cuartos de hora.

Queremos calcular:

$$P\left(\{X \leq \tfrac{1}{4}\} \cup \{X \geq \tfrac{3}{4}\}\right) = P\left(\{X \leq \tfrac{1}{4}\}\right) + P\left(\{X \geq \tfrac{3}{4}\}\right) = P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) + P\left(\frac{3}{4} \leq X \leq 1\right)$$
$$= 1 - P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{0{,}25}^{0{,}75} (\theta + 1)x^\theta \, dx = x^{\theta+1}\Big|_{0{,}25}^{0{,}75} = 0{,}75^{\theta+1} - 0{,}25^{\theta+1}$$

6. Ejercicio 6

Inciso A

Definamos

$$X = \{\text{Duración de un componente}\}$$
$$Y = \{\text{Costo de operación por unidad de tiempo}\} = cX$$

Sabemos que $X \sim Exp(\lambda)$. Como la esperanza es un operador lineal, tenemos que $\mathbb{E}[Y] = c\mathbb{E}[X] = \frac{c}{\lambda}$.

Inciso B

Definamos

$$Z = \{\text{Costo de operación por unidad de tiempo}\} = c\left(1 - 0{,}5e^{aX}\right)$$

con $a < 0$. Luego $\mathbb{E}[Z] = c\left(1 - 0{,}5\mathbb{E}\left[e^{aX}\right]\right)$. Utilizando la función generatriz de momentos de X sabemos que $\mathbb{E}\left[e^{aX}\right] = \frac{\lambda}{\lambda - a}$ y dicha función está bien definida ya que $a < 0$. Finalmente $\mathbb{E}[Z] = c\left(1 - 0{,}5\frac{\lambda}{\lambda - a}\right)$.

7. Ejercicio 7

Vamos a resolver este ejericio "a mano", pero no es necesario. Sabemos que si $U \sim U[0,1]$ y sea $X = F^{-1}(U)$, entonces la distribución de X es F.

Inciso A

Tenemos $X = aU + b$ con $a > 0$. El soporte de X es $[b, a+b]$. Calculamos la distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(aU + b \leq x) = P\left(U \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_U\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_U\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} f_U\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

Finalmente

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < b \\ \frac{x-b}{a} & b < x < a+b \\ 1 & a+b < x \end{cases}$$

Vemos entonces que $X \sim U[b, b+a]$. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = aU + b$ por lo que $F(x) = \frac{x-b}{a}$.

Inciso B

Tenemos $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. El soporte de X será $(0,\infty)$. Calculamos la distribución

$$F_X(x) = P\left(X \le x\right) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \le x\right) = P\left(U \le 1-e^{-\lambda x}\right) = F_U\left(1-e^{-\lambda x}\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_U\left(1-e^{-\lambda x}\right)\right) = \lambda e^{-\lambda x} f_U\left(1-e^{-\lambda x}\right) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Finalmente

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & 0 < x \end{cases}$$

Vemos entonces que $X \sim Exp(\lambda)$. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ por lo que $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$.

Inciso C

Tenemos $Y = U^5$. El soporte de Y será $[0,1]$. Calculamos la distribución

$$F_Y(y) = P\left(Y \le y\right) = P\left(U^5 \le y\right) = P\left(U \le y^{\frac{1}{5}}\right) = F_U\left(y^{\frac{1}{5}}\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_Y(y) = \frac{d}{dx}\left(F_U\left(y^{\frac{1}{5}}\right)\right) = \frac{1}{5}y^{-\frac{4}{5}} f_U\left(y^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}y^{-\frac{4}{5}}$$

Finalmente

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^{\frac{1}{5}} & 0 < y < 1 \\ 1 & 1 < y \end{cases}$$

En este caso Y no tiene distribución conocida. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = U^5$ por lo que $F(y) = y^{\frac{1}{5}}$.

Inciso D

Tenemos $X = \ln U$. El sopote de X será $(-\infty, 0)$. Calculamos la distribución

$$F_X(x) = P\left(X \le x\right) = P\left(\ln U \le x\right) = P\left(U \le e^x\right) = F_U\left(e^x\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_U\left(e^x\right)\right) = e^x f_U\left(e^x\right) = e^x$$

Finalmente

$$F_X(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

En este caso X no tiene distribución conocida. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = \ln U$ por lo que $F(x) = e^x$.

Inciso E

Tenemos $W = \dfrac{U}{U+1}$. El soporte de W será $[0, \frac{1}{2}]$. Calculamos la distribución

$$F_W(w) = P\left(W \leq w\right) = P\left(\frac{U}{U+1} \leq w\right) = P\left(U \leq \frac{w}{1-w}\right) = F_U\left(\frac{w}{1-w}\right)$$

Luego, la densidad es

$$f_W(w) = \frac{d}{dw}\left(F_U\left(\frac{w}{1-w}\right)\right) = \frac{1}{(1-w)^2} f_U\left(\frac{w}{1-w}\right) = \frac{1}{(1-w)^2}$$

Finalmente

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \dfrac{w}{1-w} & 0 < w < \dfrac{1}{2} \\ 1 & w > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

En este caso X no tiene distribución conocida. Sin hacer toda la derivación, sabemos que $F^{-1}(U) = \dfrac{U}{U+1}$ por lo que $F(w) = \dfrac{w}{1-w}$.

8. Ejercicio 8

Tenemos $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Queremos obtener la distribución de $Y = e^x$. En este caso el soporte de Y es $(0, \infty)$.

$$F_Y(y) = P\left(Y \leq y\right) = P\left(e^X \leq y\right) = P\left(X \leq \ln y\right) = F_X\left(\ln y\right)$$

Calculamos la densidad

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(F_X(\ln y)\right) = \frac{1}{y} f_X(\ln y) = \frac{1}{y\sqrt{s\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)^2}$$

9. Ejercicio 9

Tenemos X con la siguiente función de distribución

$$f_X(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2} I_{(0,\infty)}(x)$$

Queremos obtener la distribución de $Y = X^2$. En este caso el soporte de Y es $(0, \infty$.

$$F_Y(y) = P\left(Y \leq y\right) = P\left(X^2 \leq y\right) = P\left(X \leq \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right)$$

Calculamos la densidad

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(F_X\left(\sqrt{y}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(\sqrt{y}\right) = \lambda e^{-\lambda y}$$

De esta forma $Y \sim Exp(\lambda)$.

10. Ejercicio 10

Inciso A

El evento $\left\{X^2 < y\right\}$ equivale a que $\{|X| < \sqrt{y}\} = \{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\}$.

Inciso B

Tenemos $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Queremos obtener la distribución de $Y = X^2$. En este caso el soporte de Y es $(0, \infty)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = 1 - 2F_X(-\sqrt{y})$$

Calculamos la densidad

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - 2F_X(-\sqrt{y})\right) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}}$$

donde utilizamos que $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ y por lo tanto $Y \sim G\left(\alpha = \frac{1}{2}, \theta = \frac{1}{2}\right)$. Una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con q grados de libertad se distribuye como una gamma con $\alpha = \frac{q}{2}$ y $\theta = \frac{1}{2}$. Luego, $Y \sim \chi^2_1$.

11. Ejercicio 11

Tenemos $X = -2 \ln U$ con $U \sim U[0,1]$. El soporte de X será $(0, \infty)$. Calculamos la distribución

$$F_X(x) = P\left(X \leq x\right) = P\left(-2 \ln U \leq x\right) = 1 - P\left(U \leq e^{-\frac{x}{2}}\right) = 1 - e^{\frac{x}{2}}$$

de esta forma vemos que $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ o bien $X \sim G\left(\alpha = \frac{2}{2}, \theta = \frac{1}{2}\right)$, por lo que $X \sim \chi^2_2$.