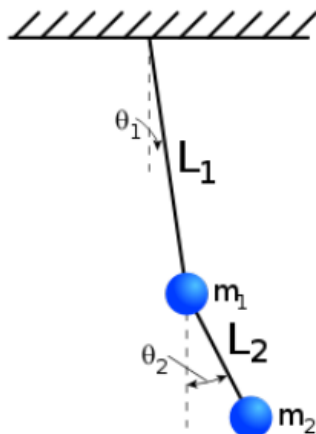


Problema 3. Péndulo doble

El péndulo doble consiste en un péndulo simple cuyo extremo pende un segundo péndulo, tal como se muestra en la siguiente ilustración



Las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble se derivan en forma directa del *Lagrangiano* del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)}{2}(L_1)^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(L_2)^2(\dot{\theta}_2)^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dots \\ \dots + (m_1 + m_2)gL_1 \cos(\theta_1) + m_2 g L_2 \cos(\theta_2)$$

Las ecuaciones acopladas resultantes para θ_1 y θ_2 son las siguientes:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)L_1\ddot{\theta}_1 + m_2L_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2L_2(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2)\sin(\theta_1) = 0 \\ m_2L_2\ddot{\theta}_2 + m_2L_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2L_2(\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + gm_2 \sin(\theta_1) = 0 \end{cases}$$

De las cuales se puede despejar

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{\left\{ -(1 + \alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \alpha \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[(\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] \right\}}{1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{\left\{ (1 + \alpha) \left[(\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] + \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[(1 + \alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \right\}}{\beta[1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \end{cases}$$

donde hemos introducido los parámetros adimensionales $\alpha = m_1/m_2$, $\beta = L_2/L_1$ y la cantidad $\gamma = g/L_1$ que tiene unidades de inversa de tiempo al cuadrado. Lleve este sistema de dos ecuaciones de segundo orden a uno de cuatro ecuaciones de primer orden, e implemente un código que lo resuelva (dado un set de condiciones iniciales) utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

a) Experimente con distintas condiciones iniciales y grafique

- las trayectorias de las dos masas del péndulo
- ángulos y velocidades angulares en función del tiempo

Presente los resultados correspondientes a un péndulo doble con $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/2$ y $\alpha = 1/2$ [s^{-2}], con las siguientes condiciones iniciales: $(\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = 0.332, \dot{\theta}_2(0) = 0.845)$. Considere un intervalo de 150 segundos. Note que estos casos corresponden a energía $E = -0.6m_1(L_1)^2[s^{-2}]$ y $E = 0$, respectivamente (la energía mínima de este péndulo doble es $E = -3/4m_1(L_1)^2[s^{-2}]$).

c) Calcule el espectro de potencias de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ para una órbita con energía $E = -0.745m_1(L_1)^2[s^{-2}]$ y para una órbita con $E = 0$.

d) Una forma numérica bella y convincente de demostrar que el movimiento del péndulo doble

puede ser complicado y caótico fue propuesta por Heyl. Consiste en calcular para un dado conjunto de condiciones iniciales el tiempo requerido para que alguna de las dos masas de una media vuelta (tiempo de *flip*), es decir, que θ_1 o θ_2 excedan el valor de π . Este cálculo se hace luego para un conjunto de condiciones iniciales para las cuales $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$, y los valores iniciales de θ_1 y θ_2 de ambos en el rango entre 0 y 2π . Finalmente, se grafica con un mapa de colores el valor de tiempo de flip sobre el espacio de las condiciones iniciales (θ_1, θ_2) .

Construya el mapa de color correspondiente para los tiempos de flip para el caso particular $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 1[s^{-2}]$. Para ello, elija condiciones iniciales (θ_1, θ_2) en una grilla de 600×300 en la región $[-3, 3] \times [0, 3]$, y evolucione el sistema a partir del reposo, y hasta que alguna de las masas haga un flip o se alcance el tiempo máximo de $10000[s]$, y escriba para cada condición inicial el tiempo de flip o nada, en caso de no registrarse un flip en el tiempo máximo. Finalmente, grafique el mapa de colores en gnuplot, asignando el color verde para el rango $[0, 10]$ seg, rojo para $[10, 100]$ seg., púrpura para $[100, 1000]$ seg y azul para $[1000, 10000]$ seg. Para los puntos donde no se registró un flip use el color blanco.

Introducción

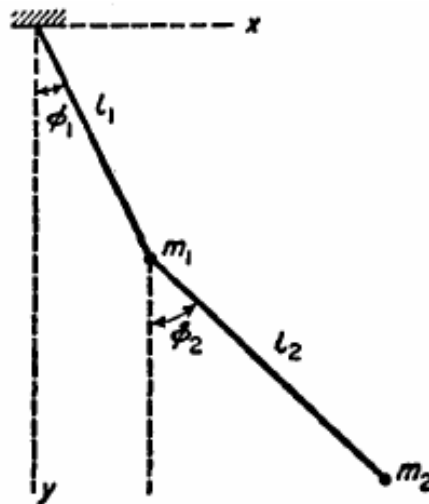


Figure 1: Péndulo doble plano

Tenemos péndulos unidos por un vínculo sin rozamiento, cada uno en cuyo extremo se encuentra una masa puntual m_1 y m_2 las ecuaciones de movimiento resultan (derivándolas considerando la función lagrangiana $\mathcal{L} = (T - U)$)

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{\left\{ -(1+\alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \alpha \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[(\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] \right\}}{1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{\left\{ (1+\alpha) \left[(\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] + \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[(1+\alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \right\}}{\beta[1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \end{cases} \quad (1)$$

donde $\alpha = m_1/m_2$, $\beta = L_2/L_1$ y $\gamma = g/L_1$.

Como vemos las dos coordenadas generalizadas son los dos ángulos θ_1 y θ_2 y la evolución del sistema está gobernado por (1) que es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Para poder resolver el sistema con el método de integración de Runge-Kutta de 4to orden planteamos las siguientes 4 ecuaciones diferenciales lineales acopladas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\left\{ -(1+\alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \alpha \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[(\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] \right\}}{1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\left\{ (1+\alpha) \left[(\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] + \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[(1+\alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \right\}}{\beta \left[1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \right]} \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \end{array} \right.$$

La subrutina "lagrangian_dble_pendulum" dentro del módulo "module_double_pendulum" se encarga de realizar este cálculo.

Resultados y discusiones

Inciso a)

Calculamos las soluciones para el caso en que $\alpha = 1/3$, $\beta = \gamma = 1/2$ y para las siguientes condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0; \dot{\theta}_1(0) = 0.332; \dot{\theta}_2(0) = 0.845 & \rightarrow \text{configuración 01} \\ \theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0; \dot{\theta}_1(0) = \sqrt{1.125} & \rightarrow \text{configuración 02} \end{array} \right. \quad (2)$$

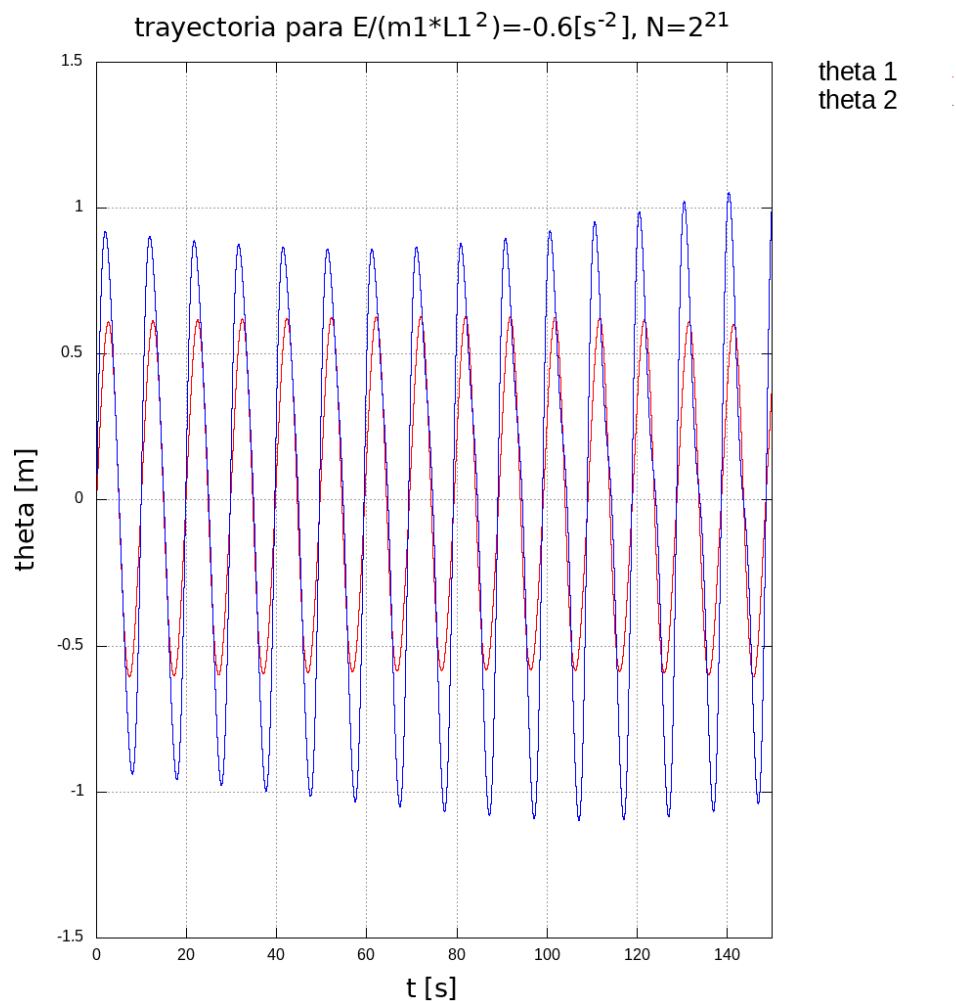
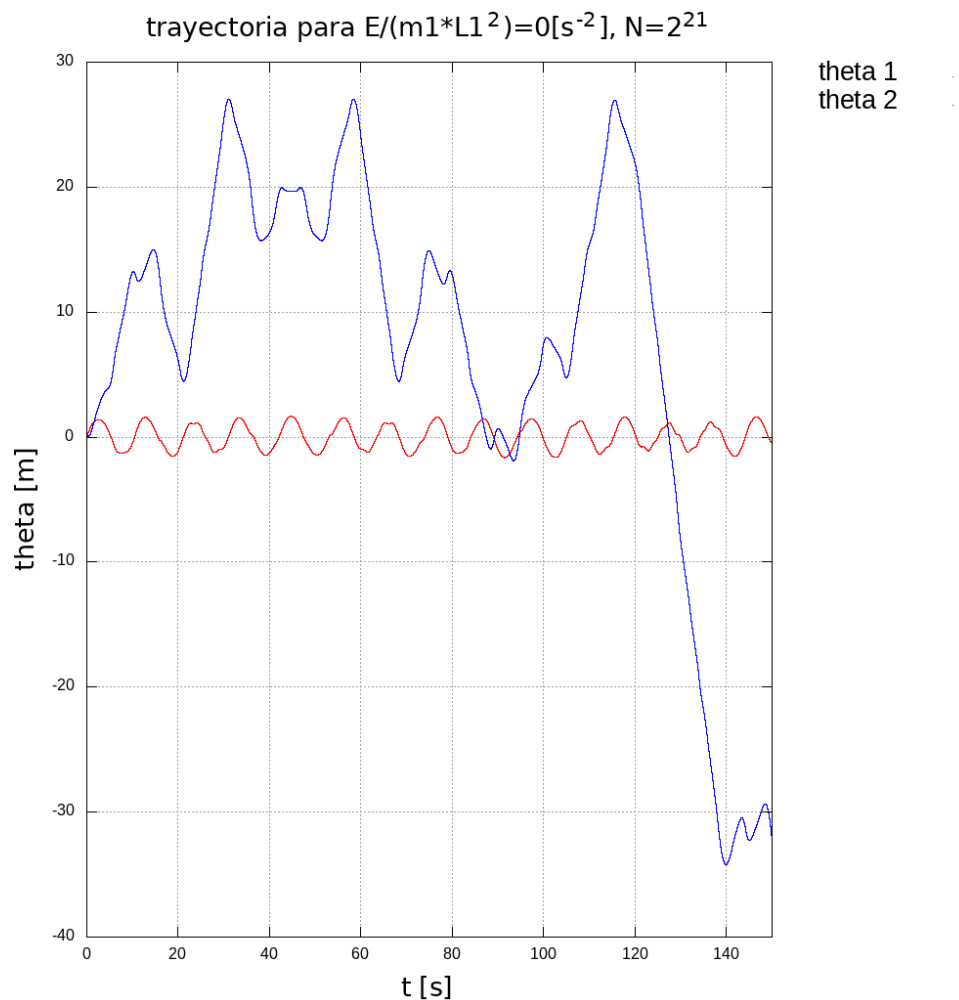
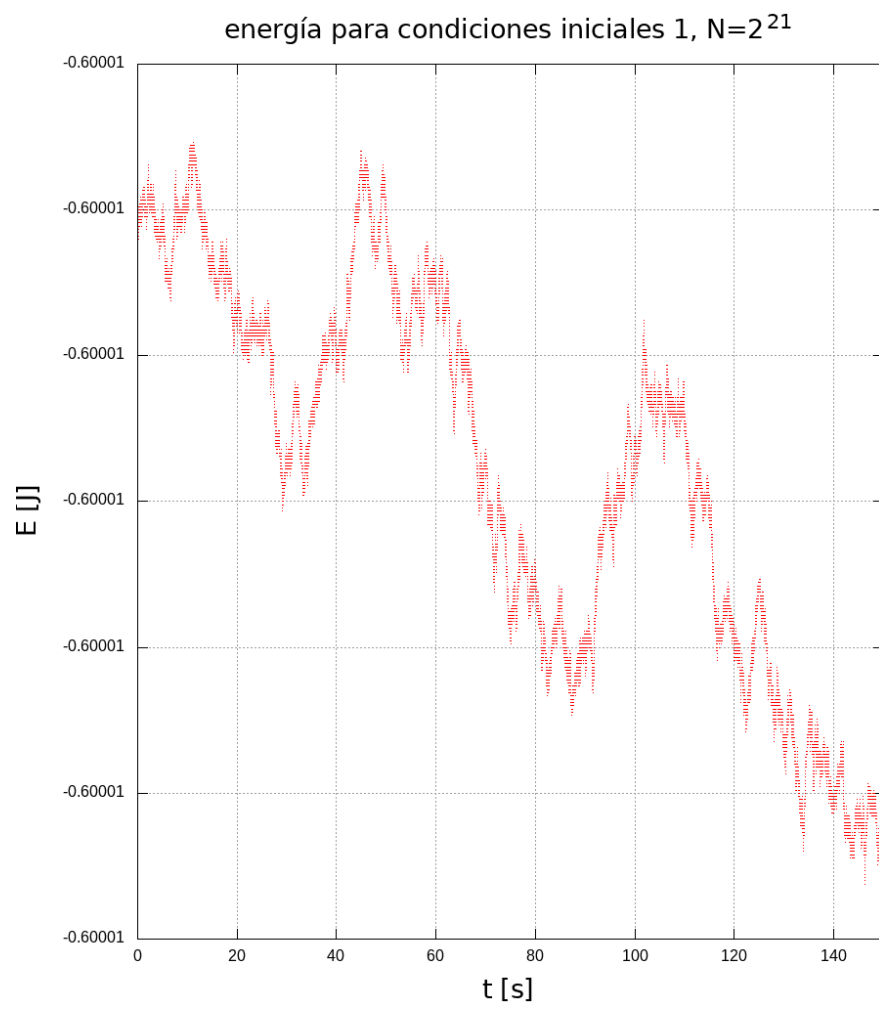


Figure 2:

**Figure 3:**

Al graficar las trayectorias vemos que al obtener las soluciones con condiciones iniciales tales que la energía $E/m_1(L_1)^2 = -0.6[s^{-2}]$ el comportamiento de ambas coordenadas generalizadas es acotado y periódico, sin embargo, al obtener las soluciones con condiciones iniciales tales que la energía $E/m_1(L_1)^2 = 0[s^{-2}]$ el comportamiento de θ_1 es acotado y periódico, pero para θ_2 vemos que crece indefinidamente, presentando un comportamiento caótico.

Para verificar que efectivamente cada configuración de condiciones iniciales tiene la energía antes mencionada, se graficó esta punto a punto, y se obtuvieron ligeras variaciones que están en el orden del error de la máquina

**Figure 4:**

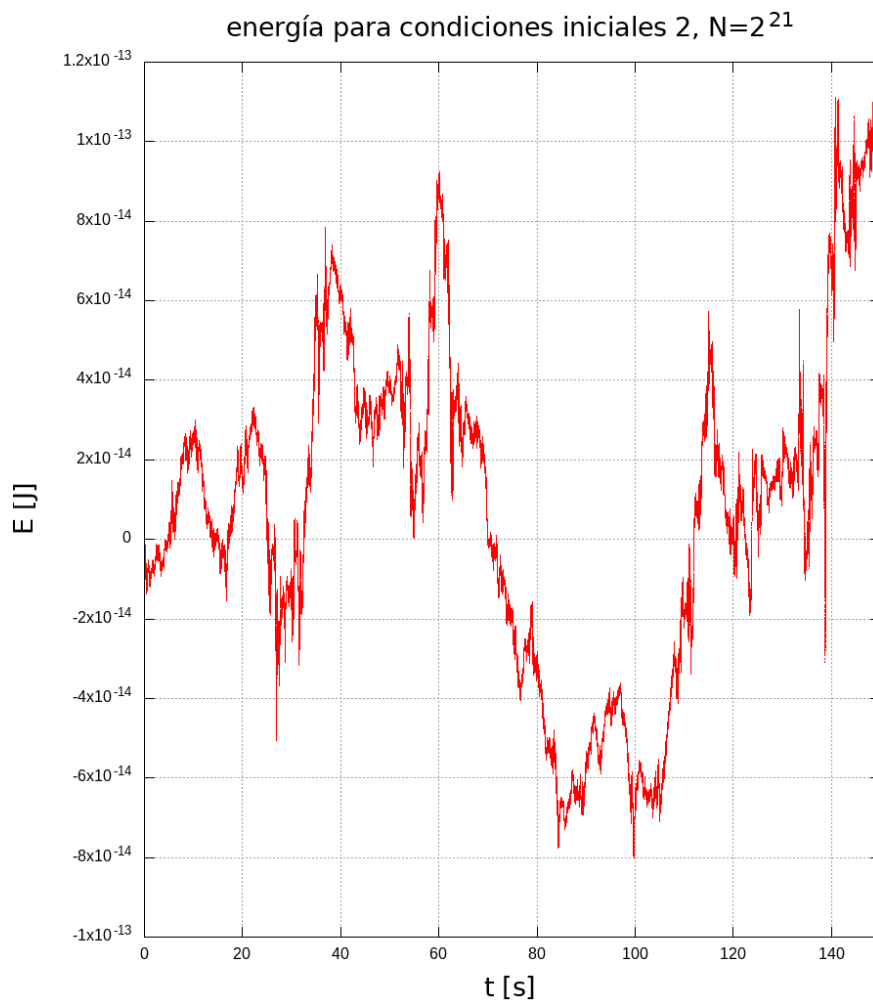


Figure 5:

Además, esto nos permite corroborar que como el sistema físico es conservativo, el método de RK4 conserva la energía, lo cual es punto fuerte a tener en cuenta para aplicar en casos donde esto sea relevante.

Inciso c)

Calculamos el espectro de potencia para las órbitas con energías $E/m_1(L_1)^2 = -0.745[s^{-2}]$ y $E/m_1(L_1)^2 = 0[s^{-2}]$ para encontrar las condiciones iniciales del primer caso (pues para el segundo con energía nula usamos las condiciones del inciso anterior), se implementó un loop calculando la energía del sistema, que como tenemos un sistema conservativo la calculamos en el instante inicial y fijando algunas condiciones iniciales, podemos calcular otras imponiendo la condición de energía. Los resultados fueron,

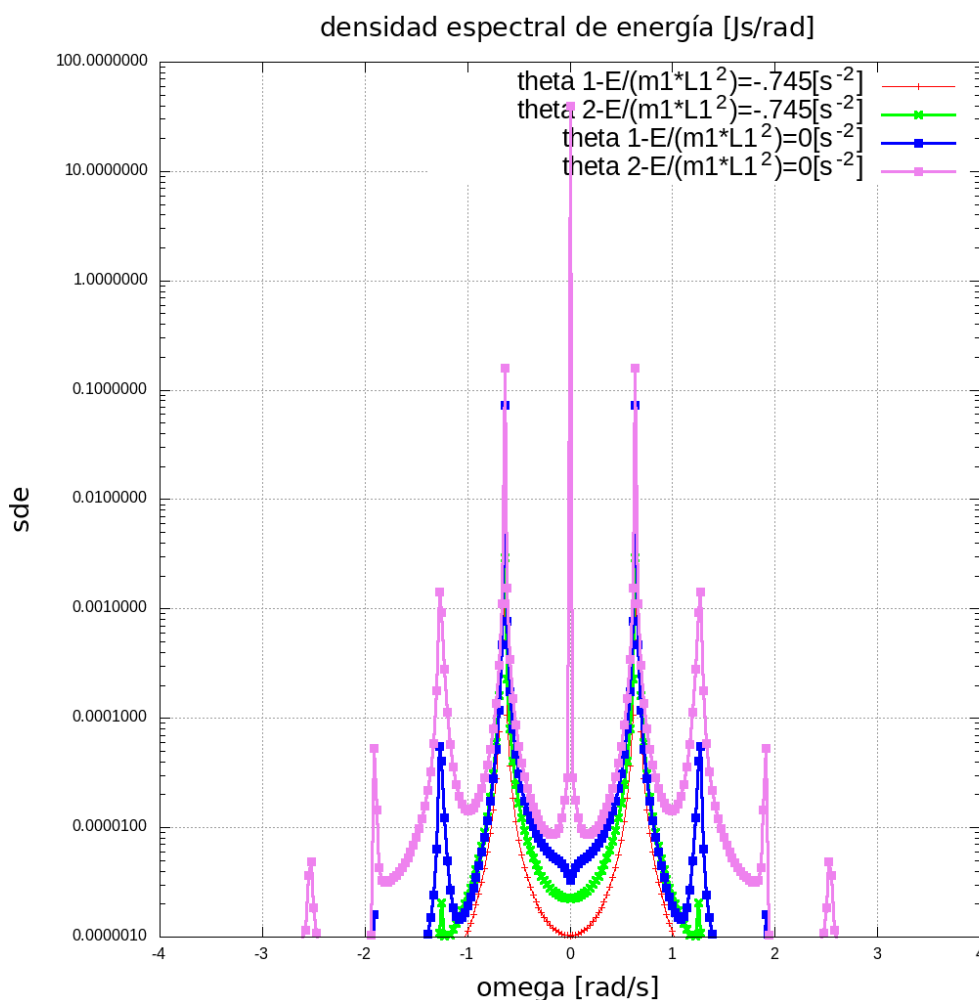


Figure 6:

En este gráfico se puede observar el espectro de frecuencias para los dos regímenes, para el caso de energía no nula se observan picos bien definidos asociados a comportamientos oscilatorios con frecuencias definidas y para el caso de energía nula, el cual se trata de un comportamiento caótico se observan muchos picos, sin embargo, debería haberse evidenciado muchos más picos pequeños, lo que caracterizan a un movimiento aperiódico, estas diferencias obtenidas podrían deberse a errores en la elección del tiempo de muestreo o elecciones en número de puntos utilizados en los integradores de RK4, cuyas soluciones dependen fuertemente de ellos.

Inciso d)

Aquí se estudio el comportamiento caótico del péndulo doble utilizando el método de Heyl, contando la cantidad de flips (tiempos en los cuales θ_1 o θ_2 exceden el valor de π). Para ello se tuvieron en cuenta lo siguiente

```

detector = .false. ! no-detected flip
pepito_bucle: do i = 2, n, 1
  #integración de RK4
  if (escribir .eqv. .false. ) then
    if (abs(y1_RK4(i)) >= pi .or. abs(y2_RK4(i)) >= pi) then
      detector = .true. ! detected flip
      exit pepito_bucle
    else if (2._dp*cos(y1_RK4(i))+cos(y2_RK4(i)) > 1._dp) then
      ! no-detected flip
      exit pepito_bucle
    
```

```
end if
end if
```

es decir, el detector comienza con un valor falso pues las condiciones iniciales son tales que el flip nunca ocurre (se encuentra acotadas por los valor 3 y -3) y entonces se procede a integrar las soluciones. Luego, se pregunta si las soluciones en determinado instante superan o igualan el valor de π y en caso de ser afirmativo detectan un flip y se registra el tiempo de flipeo. Además, si la energía no es suficiente para que las soluciones flipeen también se sale del loop y se registra un no-flipeo. Caso contrario a las condiciones anteriores, se sigue integrando hasta que se detecte un flip o se alcance el tiempo final de integración.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes,

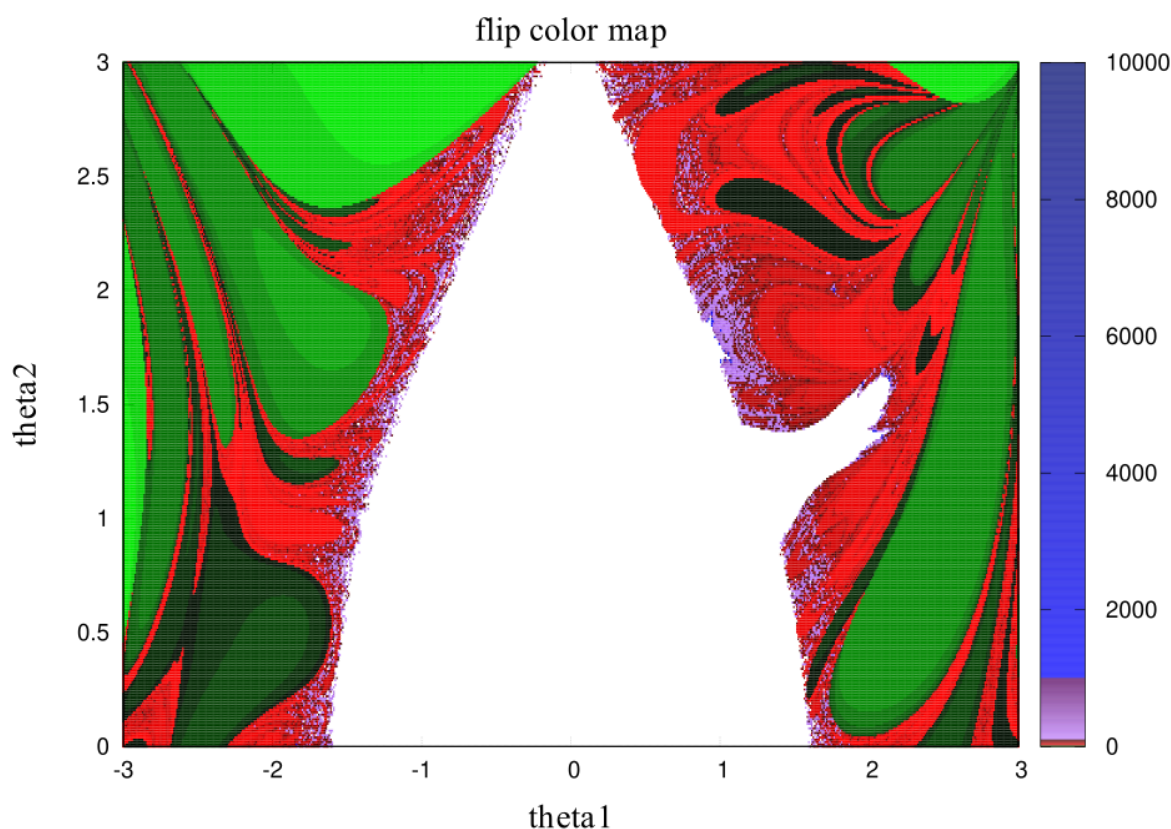


Figure 7:

El código se corrió sin tener en cuenta la condición de energía ($2 \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) > 1$) debido a un error en el código. Esto evidentemente, incrementó notablemente el costo computacional del algoritmo, sin embargo, no se logró encontrar el error lógico, evidentemente los resultados obtenidos no eran correctos, al considerar el condicional de energía ocurría que no se detectaban flips en absoluto o si, se detectaban, estaban acotados por un valor menor a diez, resultados, ilógicos comparando con las gráficas esperadas. Se agregaron algunas variables de control para verificar si los integradores RK4 estaban integrando bien y se obtuvieron resultados favorables, lo cual acotó la región de error, pero aún sin descubrirlo.

Códigos

Repositorio GitHub

<https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022.git>

Repositorio GitHub del problema

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/tree/main/lab01/lab01_b/prob03

Programas principales

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob03/ODE_second_order.f90

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob03/double_pendulum.f90

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob03/double_pendulum_spectrum.f90

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob03/hey1_double_pendulum.f90

Bash script para correr los códigos

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob03/script_run.sh

Referencias

Chapman, S. (2007). *Fortran 95/2003 for Scientists & Engineers*. McGraw-Hill Education. https://books.google.com/books/about/Fortran_95_2003_for_Scientists_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ

Landau, R. H., Mejía, M. J. P., Páñez, M. J., Kowallik, H., & Jansen, H. (1997). *Computational Physics*. Wiley-VCH. https://books.google.com/books/about/Computational_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ

Wikipedia contributors. (2022). *Row- and column-major order* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. <https://web.mit.edu/jorloff/www/chaosTalk/double-pendulum/double-pendulum-en.html>

Heyl, J. S. (2008). The double pendulum fractal. Department of Physics and Astronomy.