

Problema 4. Hamiltoniano de Pullen-Edmonds

El hamiltoniano de Pullen Edmonds consiste en dos osciladores armónicos de igual frecuencia ω y masa m , acoplados por un término cuártico en las coordenadas:

$$H = \frac{1}{2m}[(p_1)^2 + (p_2)^2] + \frac{m\omega^2}{2}[(q_1)^2 + (q_2)^2] + \alpha(q_1)^2(q_2)^2$$

(donde elegimos unidades tal que $m = 1$ y $\omega = 1$).

- Integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento usando el algoritmo de Runge-Kutta de 4to orden para $\alpha = 0.05$. Particularice para valores de energía $E = 5, 20, 100$, graficando coordenadas y momentos versus tiempo. (utilice el valor óptimo de $h \equiv \Delta t$, e integre hasta $t = 200$). Como condición inicial utilice $q_1 = 2$, $p_1 = 0$, $q_2 = 0$ y $p_2 = \sqrt{2E - 4}$.
- Trazar las superficies de sección de Poincaré en el plano p_1 - q_1 , para los siguientes valores de energía: $E = 5, 20, 100$. Poner un punto cada vez que $q_2 = 0$ (en la implementación es conveniente buscar los cambios de signo de q_2) con $p_2 > 0$. Para la construcción de los gráficos elija al menos 50 condiciones iniciales para cada valor de energía, e integre hasta $t_{final} = 15000$.
- Calcular el espectro de potencias para una órbita con energía $E = 5$ y para una órbita con $E = 100$.

Introducción

Partimos del hamiltoniano de Pullen-Edmonds

$$H = \frac{1}{2m}[(p_1)^2 + (p_2)^2] + \frac{m\omega^2}{2}[(q_1)^2 + (q_2)^2] + \alpha(q_1)^2(q_2)^2$$

el cual consiste en dos osciladores armónicos unidimensionales con un término de interacción $\alpha(q_1)^2(q_2)^2$.

Resultados y discusiones

Inciso a)

Aquí se integraron las ecuaciones de movimiento utilizando las ecuaciones de Hamilton, para obtener las siguientes cuatro ecuaciones de primer orden

$$dH/dp_i = dq_i/dt \Rightarrow \begin{cases} dq_1/dt = p_1/m \\ dq_2/dt = p_2/m \\ dp_1/dt = -q_1[m\omega^2 + 2\alpha(q_2)^2] \\ dq_1/dt = -q_2[m\omega^2 + 2\alpha(q_1)^2] \end{cases} \quad (1)$$

integrando este sistema de ecuaciones diferenciales lineales acopladas de primer orden con RK4 obtenemos (para $m = \omega = 1$, $\alpha = 0.05$ y $q_1 = 2$, $p_1 = q_2 = 0$ y $p_2 = \sqrt{2E - 4}$) qué, como el potencial del sistema no depende de las velocidades la energía mecánica es igual al hamiltoniano. Los resultados fueron, para la órbita 1 q_1 vs p_1 y la órbita 2 q_2 vs p_2 .

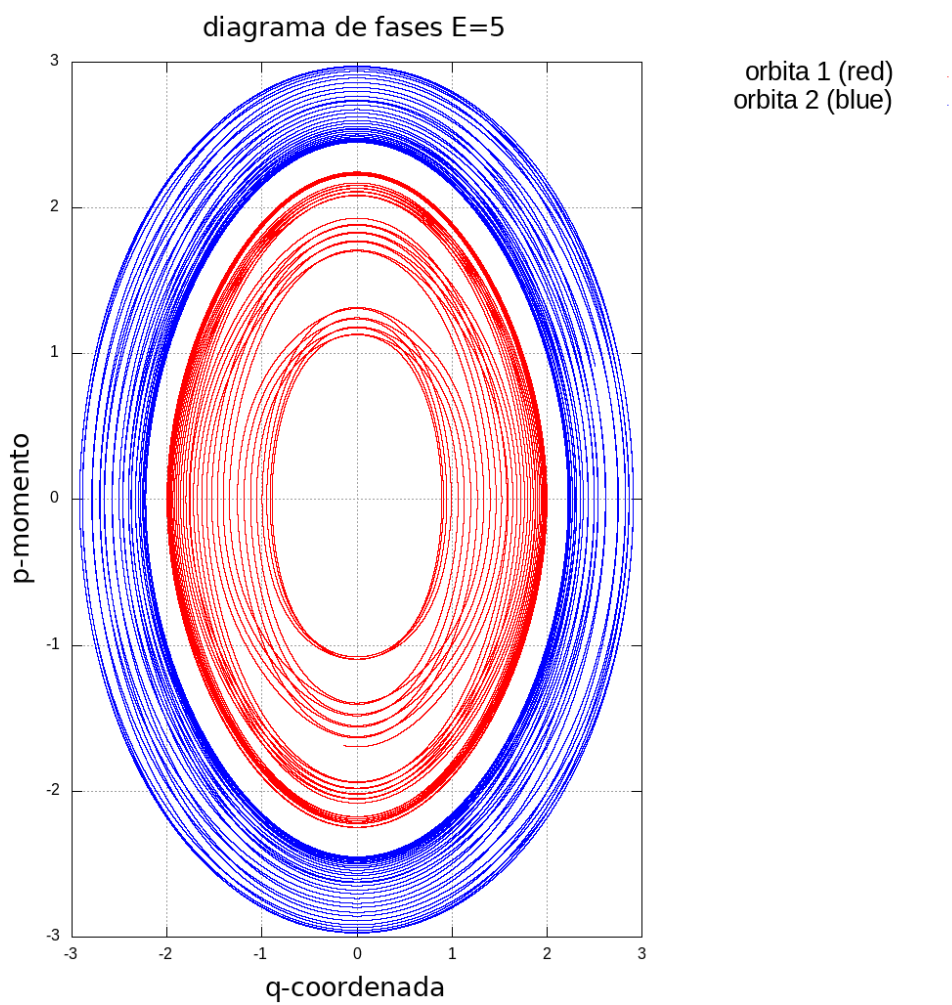


Figure 1:

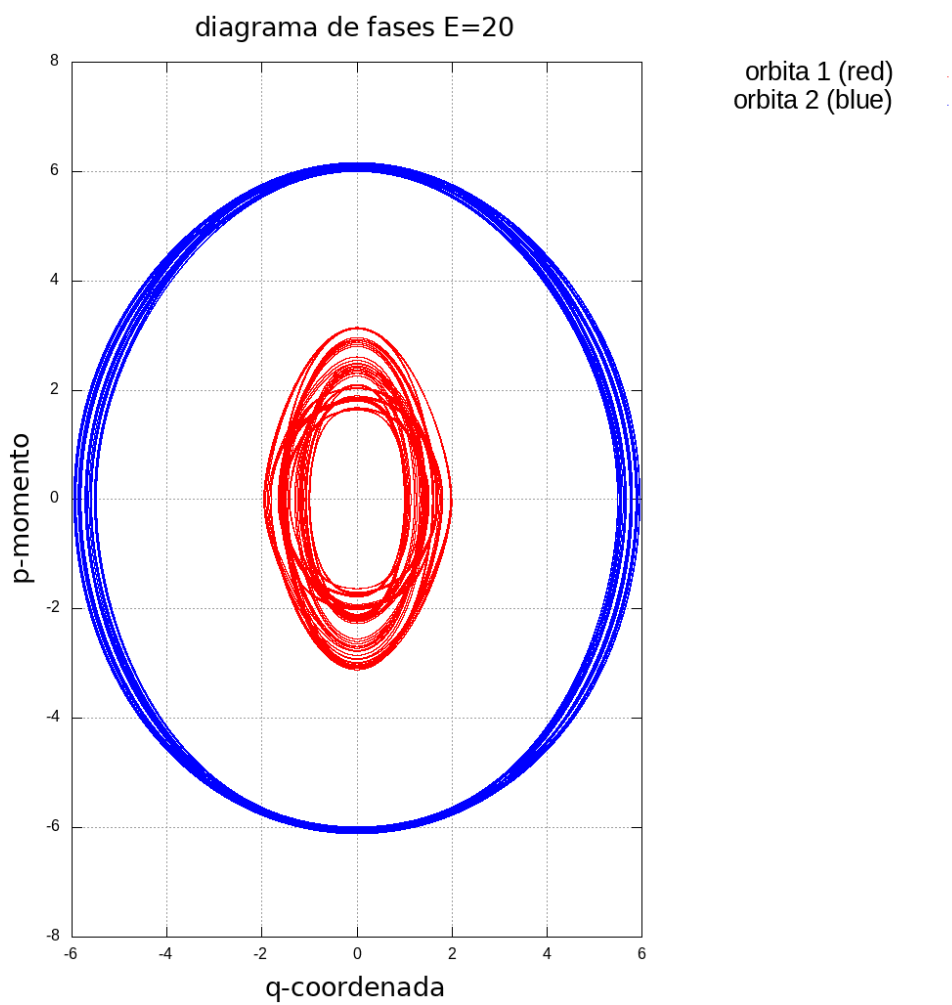


Figure 2:

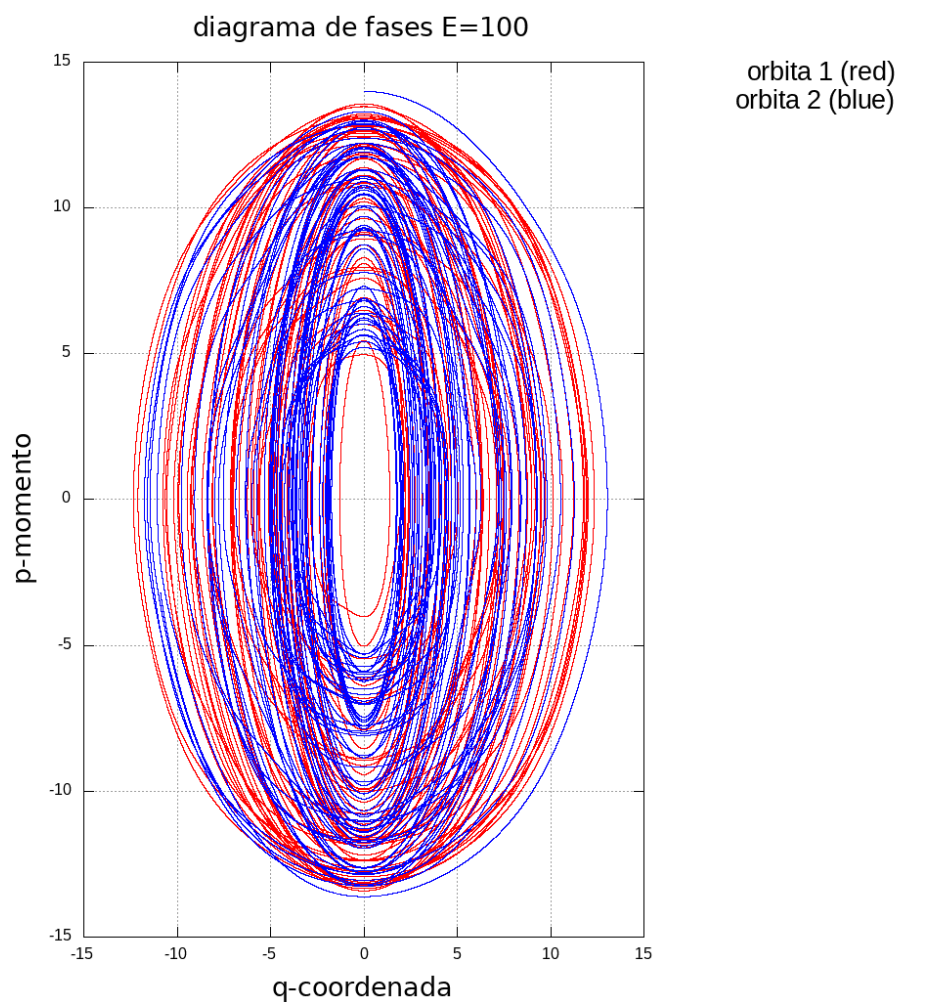


Figure 3:

Aquí notamos que, a pesar de existir caos en el sistema, las trayectorias permanecen acotadas.

Inciso b)

Las secciones de poincaré obtenidas para las energías $E = 5, 20, 100$ fueron

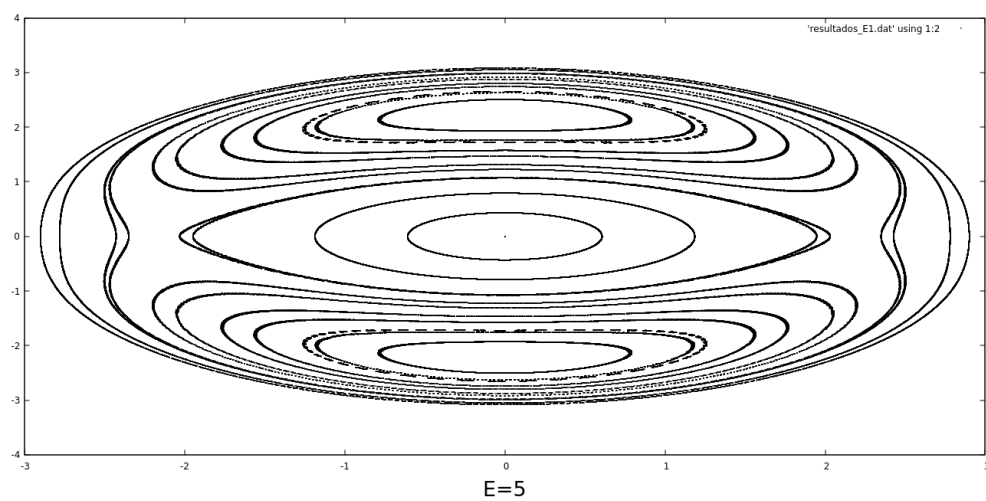


Figure 4:

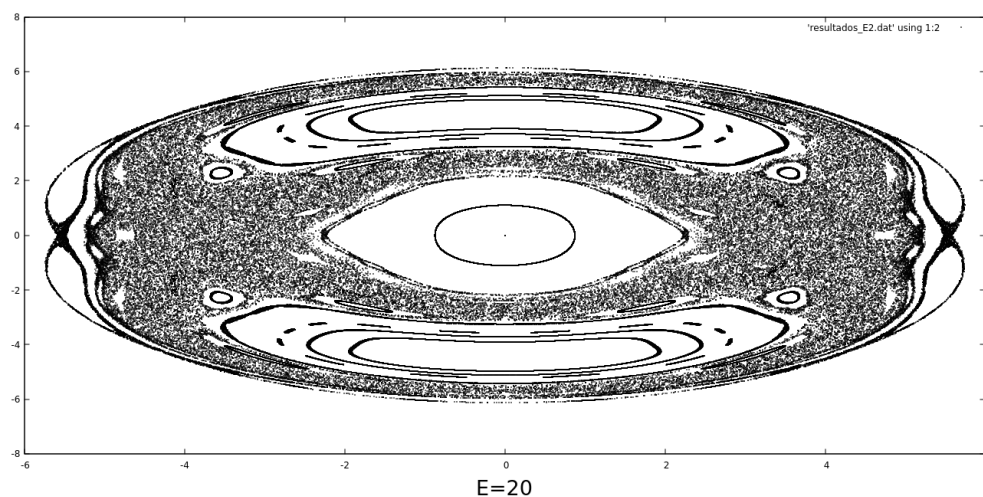
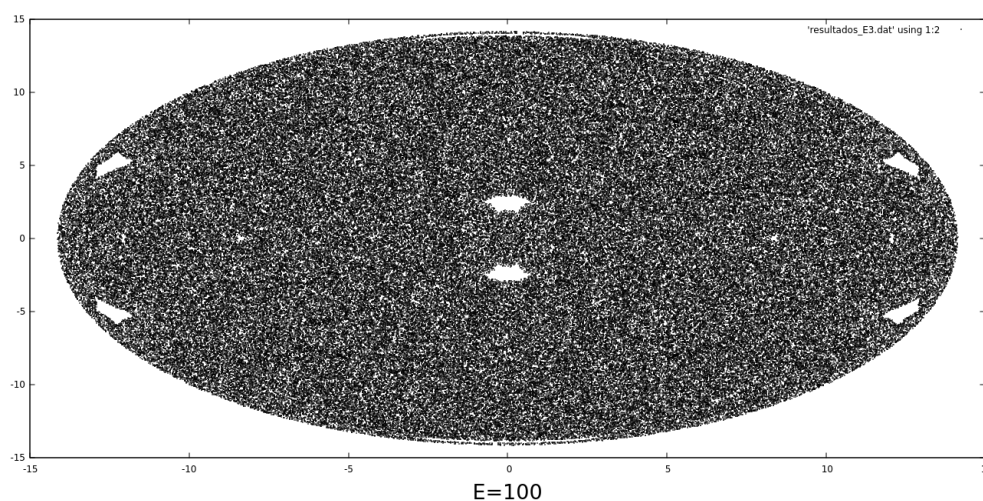


Figure 5:



Se llevaron a cabo dos implementaciones del algoritmos, de los cuales únicamente el último (poincare_sections_02.f90) pudo arrojar los gráficos anteriores. Quizás por algún error en algún cálculo el primer código (poincare_sections.f90) propaga un NaN y no arroja resultados. Los enfoques de ambos códigos son muy diferentes, es decir, la forma de obtener las condiciones iniciales varía de uno a otro, eligiendo de antemano qué coordenadas se imponen inicialmente qué coordenadas se varían.

Las secciones de poincare permiten visualizar transiciones dimensionales (o topológicas) de comportamientos complejos, claramente existen patrones para energías de 5 y 20, y caos en el último caso donde el plano q_1 vs p_1 se ve intersectado por q_2 en una gran región no reconociendo patrón alguno.

Códigos

Repositorio GitHub

<https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022.git>

Repositorio GitHub del problema

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/tree/main/lab01/lab01_b/prob04

Programas principales

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob04/pullen_edmonds.f90

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob04/poincare_sections.f90

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob04/poincare_sections_02.f90

Bash script para correr los códigos

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob04/script_run.sh

Referencias

Chapman, S. (2007). *Fortran 95/2003 for Scientists & Engineers*. McGraw-Hill Education. https://books.google.com/books/about/Fortran_95_2003_for_Scientists_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ

Landau, R. H., Mejía, M. J. P., Páez, M. J., Kowalik, H., & Jansen, H. (1997). *Computational Physics*. Wiley-VCH. https://books.google.com/books/about/Computational_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ