

## Problema 2. Sistemas caóticos

Considerar el mapeo logístico

$$x_{(t+1)} = rx_t(1 - x_t)$$

- Graficar las trayectorias  $x_t$  vs  $t$  para  $r = 1.5; 3.3; 3.5; 3.55; 4$ . Realice 500 pasos para diferentes condiciones iniciales ( $x_0 = 0.06; 0.3; 0.6; 0.9$ , por ejemplo) y grafique eligiendo adecuadamente el rango de  $t$ .
- Calcular el espectro de potencia para los mismos valores de  $r$  que en el punto (a) usando FFT. Note que debe descartar el transitorio (300 pasos). Tome como condición inicial  $x_0 = 0.6$ .
- Graficar el histograma (normalizado) de la distribución de  $x$  para  $r = 4$  y  $x_0 = 0.6$ . Luego de descartar los primeros 300 pasos considere los 10000 pasos siguientes. Sea cuidadoso en la elección del ancho de los "bins".
- Obtener el "diagrama de órbitas" en el plano  $x-r$ . Para ello, para cada valor de  $r$  iterar primero 300 puntos, que se descartan, luego graficar  $x_{301}, \dots, x_{600}$  para cada valor de  $r$ . Graficar para  $3.4 < r < 4$ . Realizar una ampliación del gráfico para  $3.847 < r < 3.8568$  mostrando la región  $0.13 < x < 0.185$ . (Para esto último hacer más iteraciones, por ej,  $x_{301}, \dots, x_{1500}$ ).
- Calcular y graficar el exponente de Lyapunov para  $2 < r < 4$ . Recuerde descartar el transitorio, y utilice del orden de 1500 pasos para calcular el exponente.

## Introducción

$$x_{(n+1)} = r \cdot x_n(1 - x_n); \quad 0 \leq x_n \leq 1 \quad (1)$$

esta ecuación es una ecuación de recurrencia denominada mapa logístico, estudiada inicialmente para explicar el crecimiento de poblaciones. Esta ecuación discreta no lineal, pues aparece el término  $(x_n)^2$  evidencia un comportamiento caótico en sus fundamentos. Lo cual permite estudiar el caos (comportamiento complejo) variando parámetros y condiciones iniciales, pero siempre partiendo de una relación "sencilla". En particular este modelo de mapeo discreto presenta un comportamiento de bifurcación, evidenciando aspectos de teoría de fractales, donde las trayectorias de bifurcas y cuyas distancias entre si pueden crecer y decrecer exponencialmente.

## Resultados y discusiones

### Inciso a)

El mapa logístico obtenido se muestra a continuación

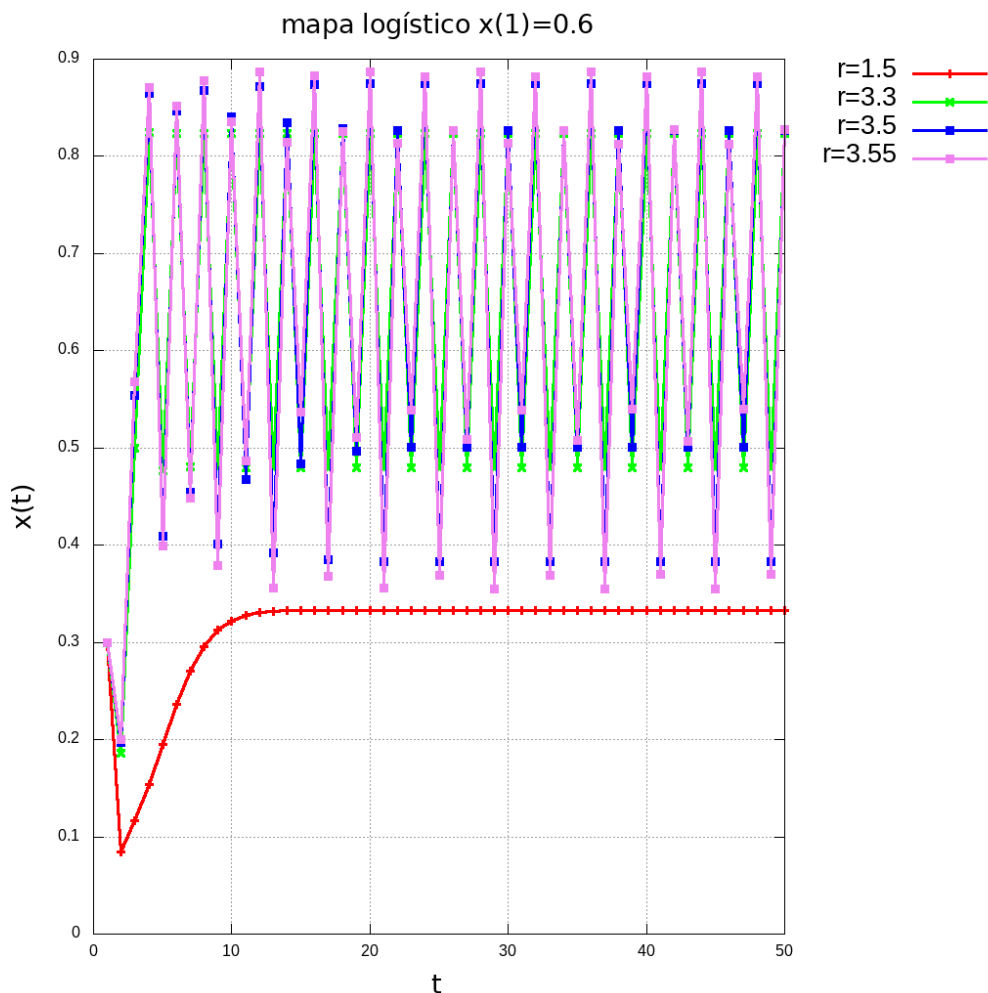
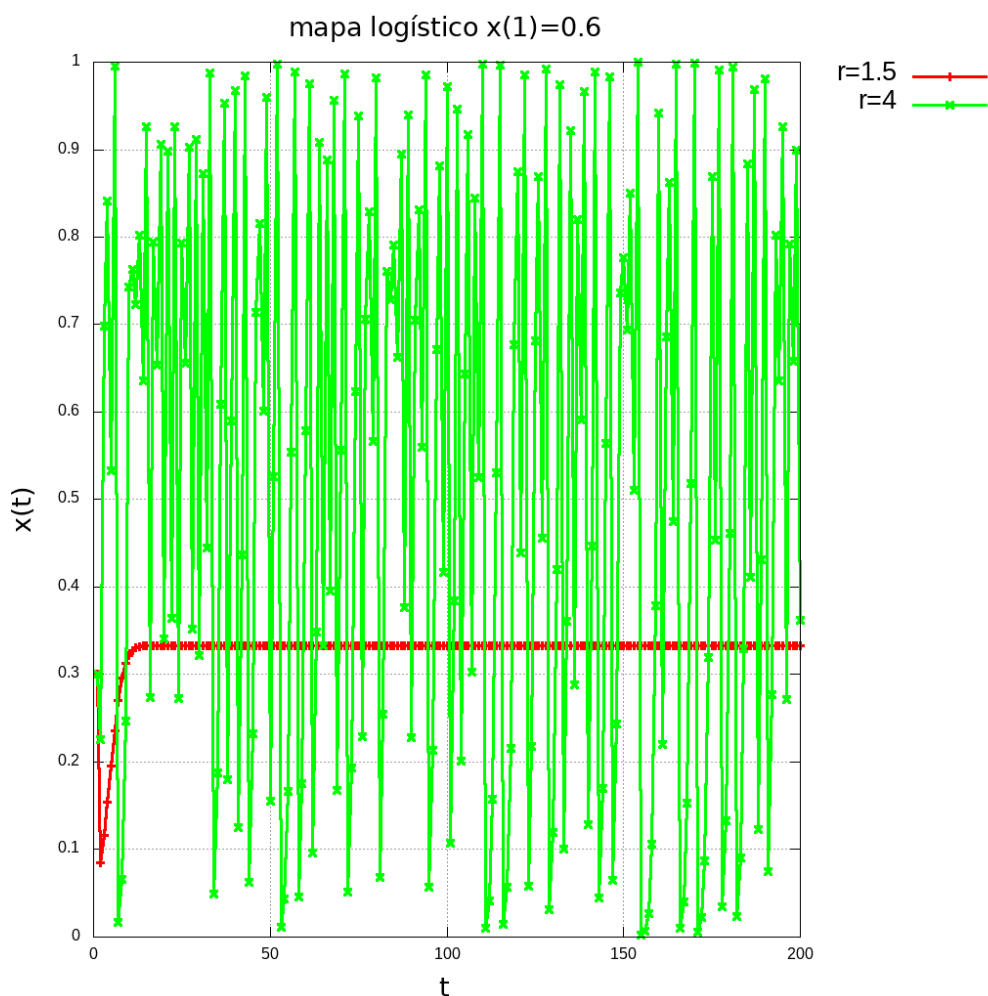


Figure 1:

vemos que para una misma condición inicial (en este caso  $x_0 = 0.6$ ) obtenemos distintas evoluciones de la coordenada discreta  $x$ , tan solo variando el parámetro de la ecuación logística. También notamos que cada valor del parámetro tiene un tiempo característico luego del cual entramos en régimen estacionario, por ejemplo, en la curva roja (para  $r = 1.15$ ) obtenemos un tiempo largo ( $\approx 15 [s]$ ) luego del cual la respuesta es estacionaria, estable y no-oscilante. En cambio para el resto de curvas (con distintos valores de  $r$ ) el tiempo característico es menor ( $\approx 8 [s]$ ) luego del cual la respuesta entra en régimen estacionario y oscilante (es decir, podemos asociar alguna frecuencia de oscilación y reconocer algún patrón en la evolución).

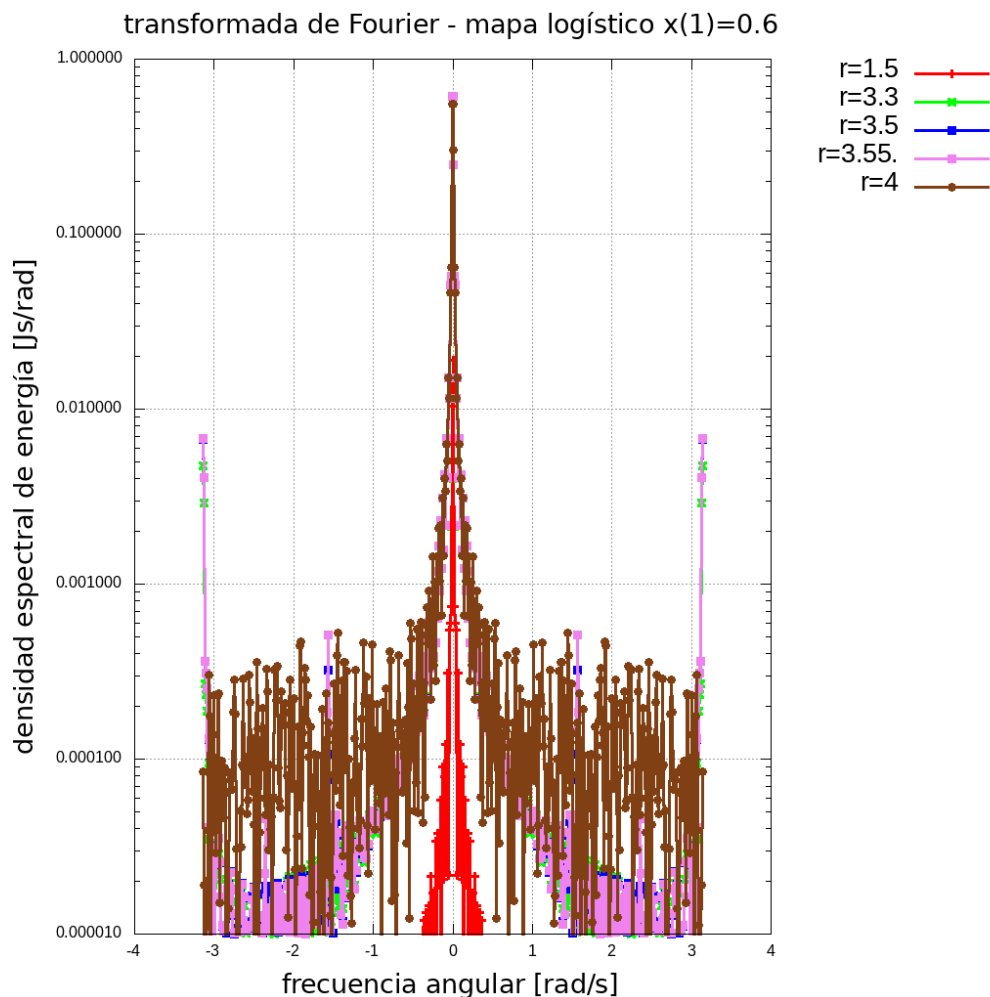
Notemos además que la ecuación logística solo nos permite conocer puntos en el espacio  $x-t$ , que hemos unido con líneas para observar tendencias y proveer alguna intuición del comportamiento físico, pero debemos recordar que los puntos a lo largo de las líneas dibujadas no existen en la realidad.



**Figure 2:**

Aquí podemos observar el comportamiento caótico de  $x(t)$  obtenido a partir de una misma condición inicial pero con un cambio de parámetro, notemos que no podemos reconocer fácilmente ningún patrón de oscilación. Notemos además que hemos representado el mapa logístico hasta un tiempo mayor a los  $50[s]$  correspondientes a la gráfica anterior. Esto nos permite visualizar que el comportamiento para  $r = 4$  presenta una notable diferencia respecto al primer caso con  $r = 1.5$ .

**inciso b)**



**Figure 3:**

Notamos que las corridas con parámetros  $r < 4$  el espectro de potencia nos muestra picos bien definidos, es decir, nos permite conocer las frecuencias características del sistema. El espectro asociado a  $r = 1.5$  nos muestra un solo pico en el origen (primer componente del desarrollo de Fourier, valor promedio), evidenciando que la respuesta estacionaria no oscila, el espectro asociado a  $r = 3.3$  nos muestra dos frecuencias características (además del pico en el origen que, como es el valor promedio, debe de aparecer en todos los espectros) que nos define un periodo de oscilación característico  $T$  y luego los espectros asociados a  $r = 3.5$  y  $r = 3.55$  nos muestran cuatro y seis picos respectivamente, evidenciando que se trata de comportamientos con un periodo de oscilación característico de  $T/2$  y  $T/4$  respectivamente. Además, notemos que para el caso de  $r = 4$  el espectro de potencia no presenta picos característicos es decir, estamos en presencia de un comportamiento caótico.

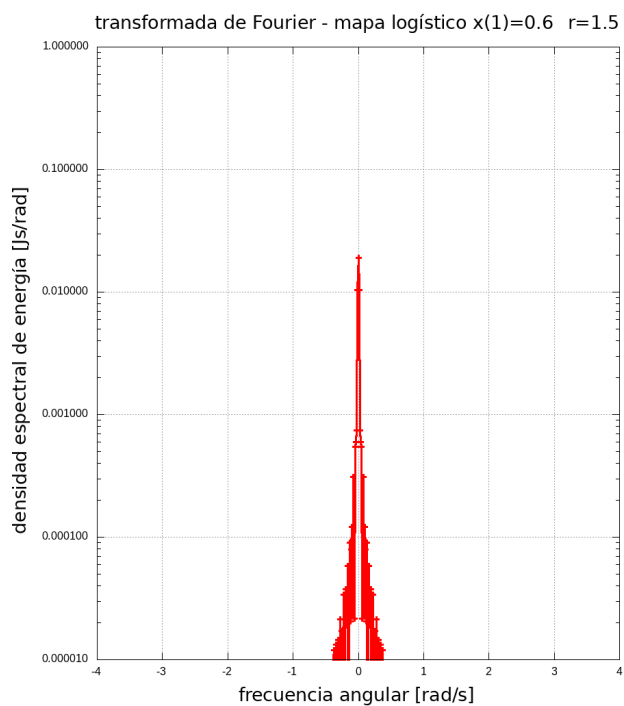


Figure 4:

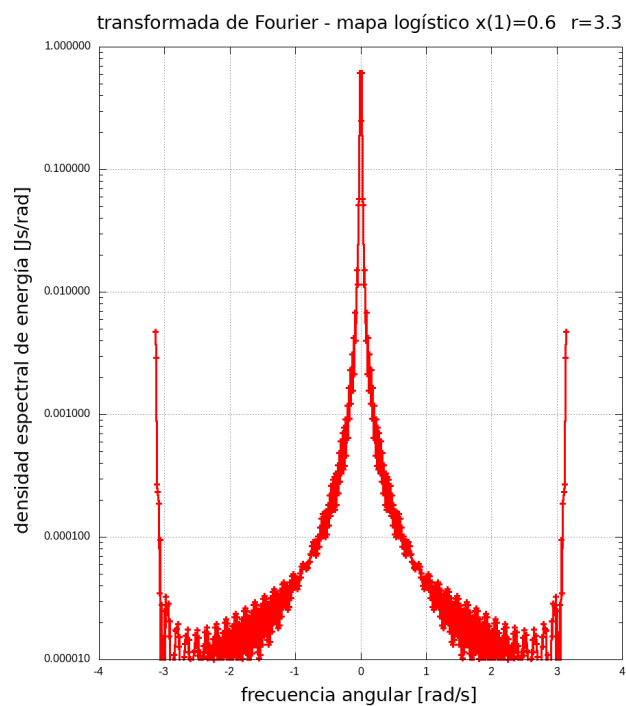


Figure 5:

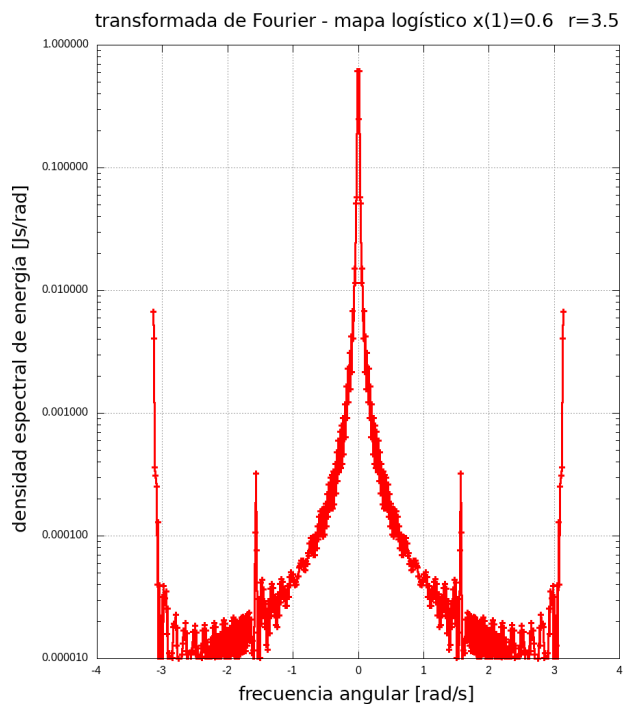


Figure 6:

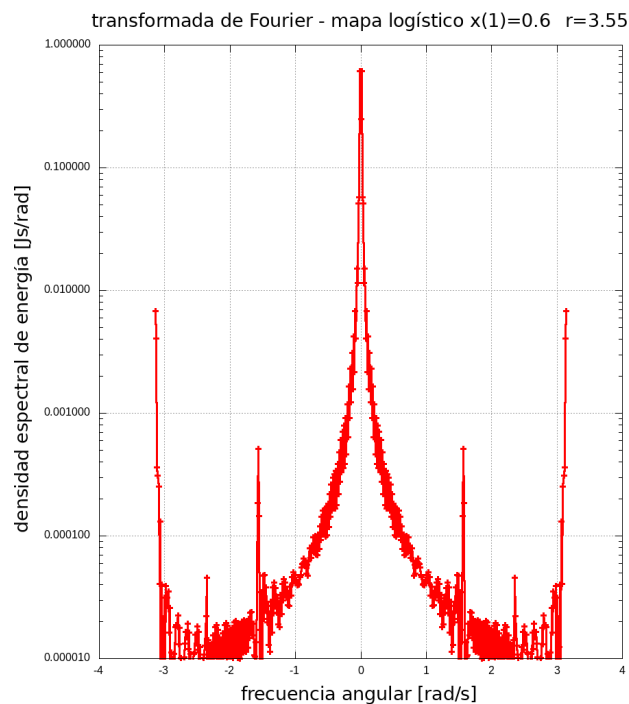


Figure 7:

Comentario: Se ha calculado el espectro de potencia considerando el régimen transitorio y estacionario (evolución completa del mapa logístico) obteniendo el siguiente resultado

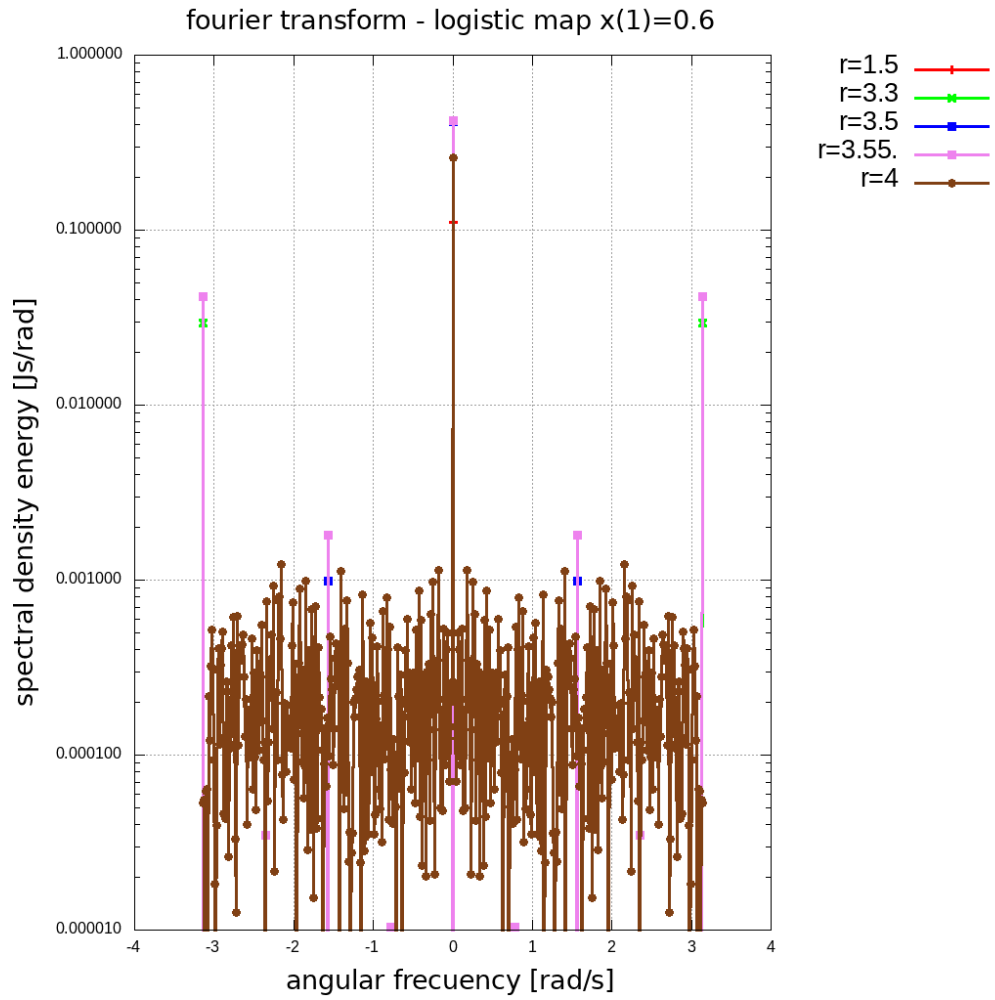
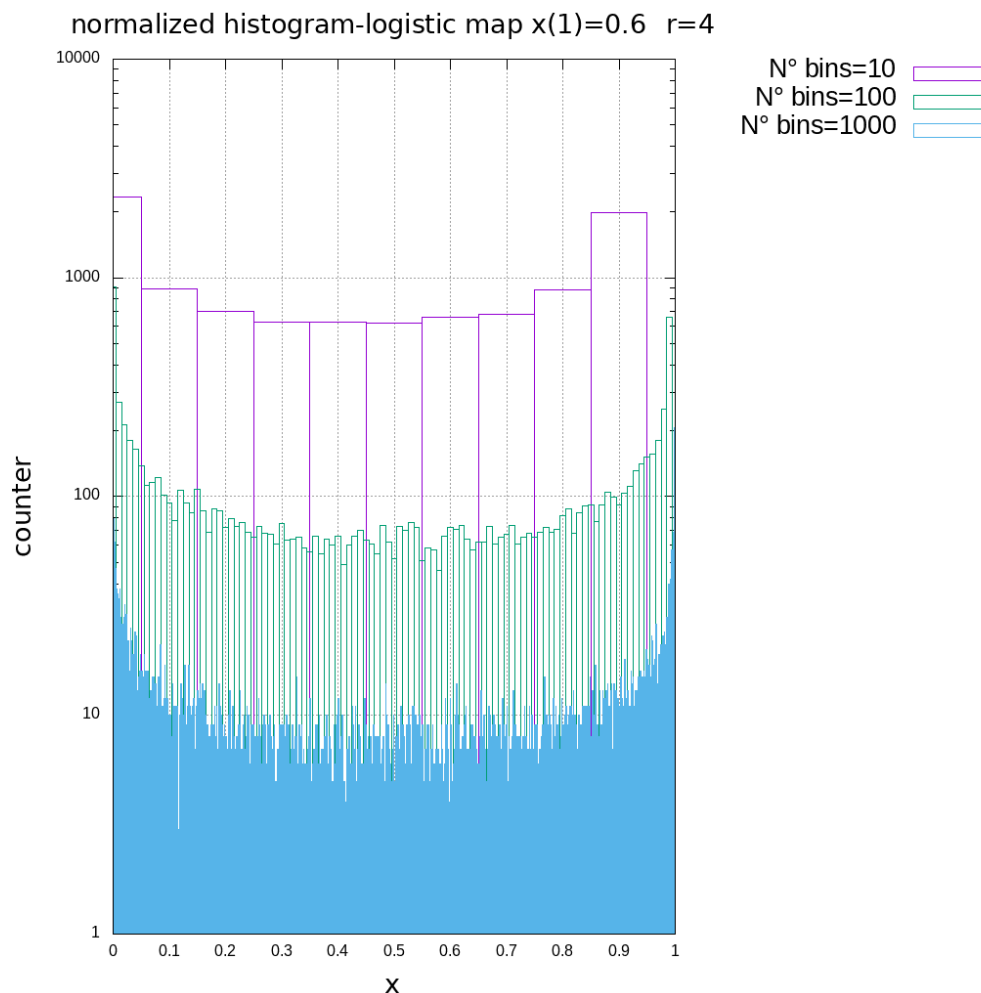


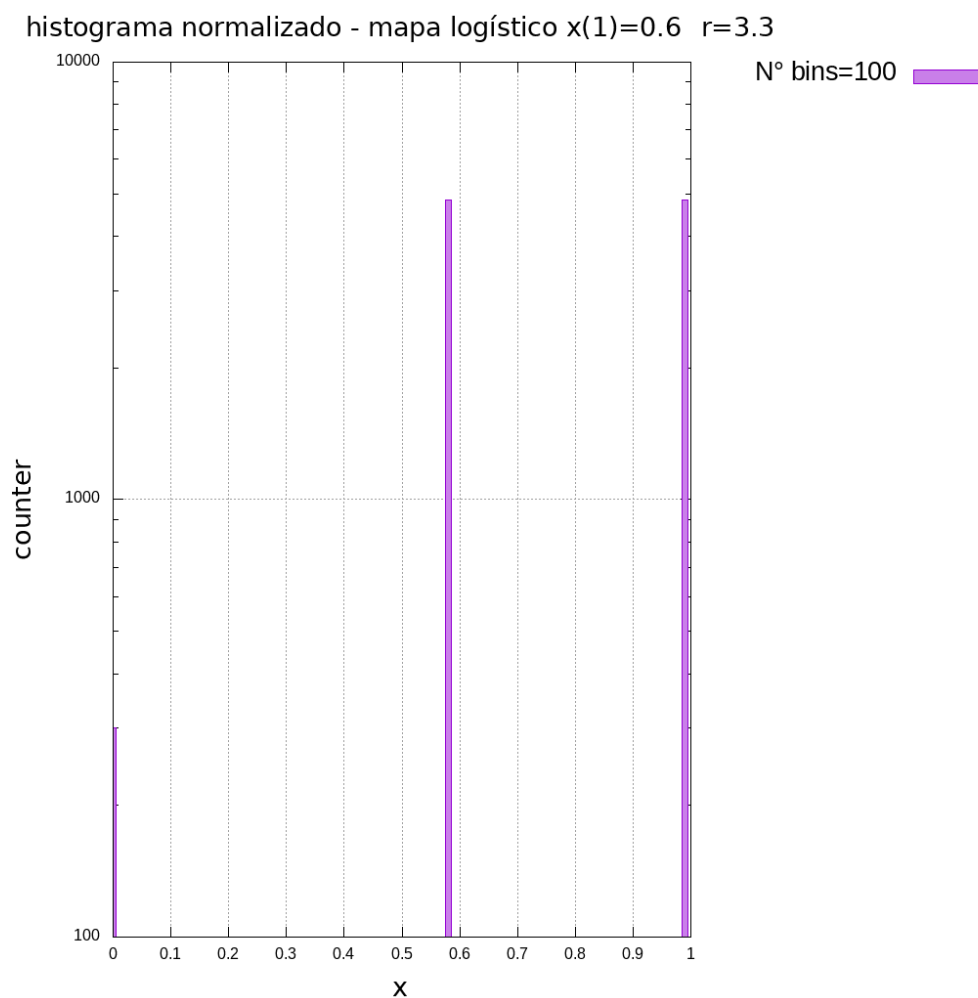
Figure 8:

Esto nos muestra que, se presentan ciertas diferencias (que pueden ser muy significativas) en cuanto a considerar o no el transitorio. Además, cabe aclarar que si bien para todos los casos (para todos los valores del parámetro  $r$ ) se debería descartar el transitorio de acuerdo al tiempo característico del mismo, para asegurarnos de que estemos en el estado estacionario independientemente del valor de  $r$  se tomo un tiempo transitorio (cantidad de pasos del mapa logístico) muy grande  $t_{trans} = 300$ .

**inciso c)**

**Figure 9:**

Este gráfico muestra la cantidad de veces que el mapa logístico toma un mismo valor, a lo largo de la evolución del mapa. Como la gráfica anterior muestra el caso de  $r = 4$  el cual sabemos está en el régimen caótico no muestra ninguna frecuencia característica de oscilación. Sin embargo, se realizó el histograma para un caso no caótico (específicamente para el caso de  $r = 3.3$ ) y se evidenciaron las dos frecuencias de oscilación del mapa logístico.

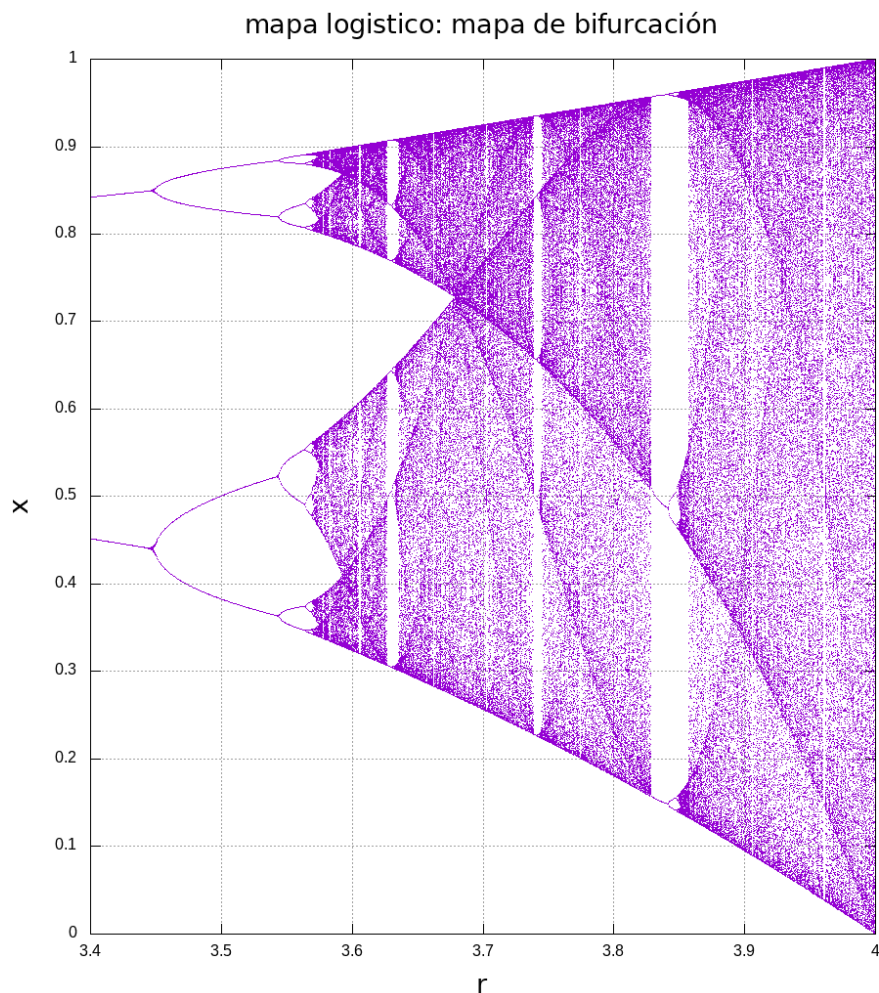


**Figure 10:**

Por otra parte, en el primer hitograma para  $r = 4$  vemos que a medida que disminuye el tamaño del bin (o aumenta el número de bins por unidad de ancho característico) las imágenes varían, esto evidencia el cuidado que hay que tener al momento de elegir el ancho de los bins, por ejemplo, si el ancho es muy pequeño cada bin puede contener un único punto del mapa logístico y esto no es adecuado para evidenciar oscilaciones, en cambio, si el ancho del bin es muy grande, puede incluir demasiados puntos y ocultar frecuencias características.

**Inciso d)**





**Figure 11:**

En este gráfico vemos el comportamiento de las trayectorias para distintos valores de parámetros, vemos que inicialmente el comportamiento de las trayectorias no es oscilatorio, luego se bifurca en dos posibles evoluciones, y luego se bifurca nuevamente cada una de ellas, evidenciando un comportamiento fractal. Es más, sabemos que las distancias entre trayectorias tienen valores diferentes dependiendo de la zona en el gráfico y que en determinado momento se evidencia el comportamiento caótico (zona sombreada). El comportamiento caótico se caracteriza por ser determinista hasta cierto punto luego del cual no se puede predecir más.

La ampliación del gráfico no se pudo lograr, el código arroja datos en una zona no deseada no pudiendo obtener el patrón repetido (o invertido) evidenciando la propiedad de fractal que presenta el mapa logístico. El error en el algoritmo no se pudo encontrar.

**inciso e)**

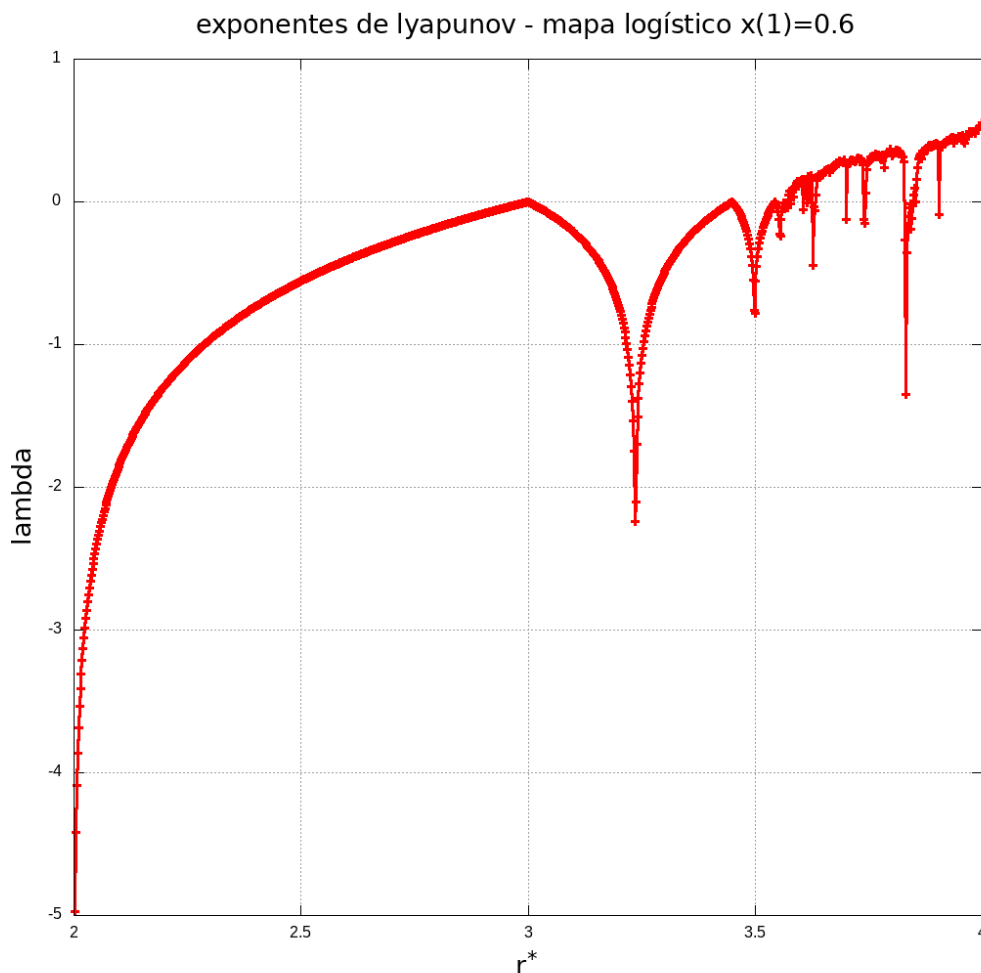


Figure 12:

Este gráfico nos muestra cómo varía el exponente de lyapunov del mapa logístico en función de los parámetros. Como era de esperar verificamos que los casos de  $r = 1.5; 3.3; 3.5$  son estables es decir que las distancias entre las distintas trayectorias decae exponencialmente, sin embargo, el caso de  $r = 4$  vemos que corresponde a un  $\lambda > 0$  lo cual nos dice que es caótico el comportamiento y las distancias entre trayectorias crecen exponencialmente. Además podemos ver otros valores de  $r$  no simulados, por ejemplo aquellos donde  $\lambda = 0$ , para estos casos tenemos un comportamiento "cuasi-periódico" (si hacemos un análisis en el espacio de frecuencias, obtenemos un espectro con algunos picos definidos), y estos casos nos dicen que nos encontramos en un límite donde las trayectorias no se acercan ni se alejan exponencialmente.

## Códigos

### Repositorio GitHub del curso

<https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022.git>

### Repositorio GitHub del problema

[https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/tree/main/lab01/lab01\\_b/prob02](https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/tree/main/lab01/lab01_b/prob02)

### Programas principales

[https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01\\_b/prob02/logistic\\_map.f90](https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob02/logistic_map.f90)

[https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01\\_b/prob02/fftw3\\_logistic\\_map.f90](https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob02/fftw3_logistic_map.f90)

[https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01\\_b/prob02/histogram\\_chaos.f90](https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob02/histogram_chaos.f90)

[https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01\\_b/prob02/orbits\\_diagram\\_chaos.f90](https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob02/orbits_diagram_chaos.f90)

[https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01\\_b/prob02/lyapunov\\_exponent.f90](https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob02/lyapunov_exponent.f90)

### Bash script para correr los códigos

[https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01\\_b/prob02/script\\_run.sh](https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab01/lab01_b/prob02/script_run.sh)

## Referencias

Chapman, S. (2007). *Fortran 95/2003 for Scientists & Engineers*. McGraw-Hill Education. [https://books.google.com/books/about/Fortran\\_95\\_2003\\_for\\_Scientists\\_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ](https://books.google.com/books/about/Fortran_95_2003_for_Scientists_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ)

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. [https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos\\_num%C3%A9ricos\\_para\\_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ](https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ)

Landau, R. H., Mejía, M. J. P., Páñez, M. J., Kowallik, H., & Jansen, H. (1997). *Computational Physics*. Wiley-VCH. [https://books.google.com/books/about/Computational\\_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ](https://books.google.com/books/about/Computational_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ)