

## Introducción

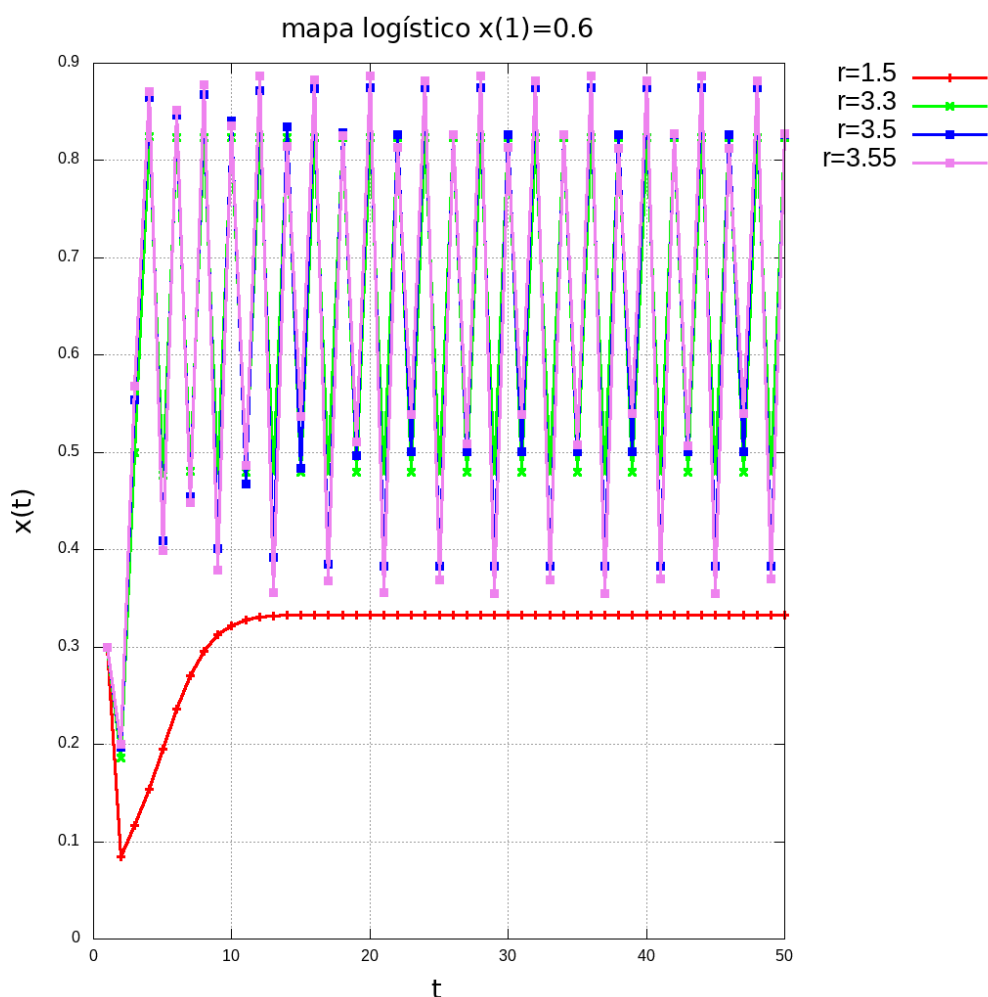
$$x_{(n+1)} = r \cdot x_n(1 - x_n); \quad 0 \leq x_n \leq 1 \quad (1)$$

esta ecuación es una ecuación de recurrencia denominada mapa logístico, estudiada inicialmente para explicar el crecimiento de poblaciones. Esta ecuación discreta no lineal, pues aparece el término  $(x_n)^2$  evidencia un comportamiento caótico en sus fundamentos. Lo cual permite estudiar el caos (comportamiento complejo) variando parámetros y condiciones iniciales, pero siempre partiendo de una relación "sencilla". En particular este modelo de mapeo discreto presenta un comportamiento de bifurcación, evidenciando aspectos de teoría de fractales, donde las trayectorias de bifurcas y cuyas distancias entre si pueden crecer y decrecer exponencialmente.

## Resultados y discusiones

### Inciso a)

El mapa logístico obtenido se muestra a continuación

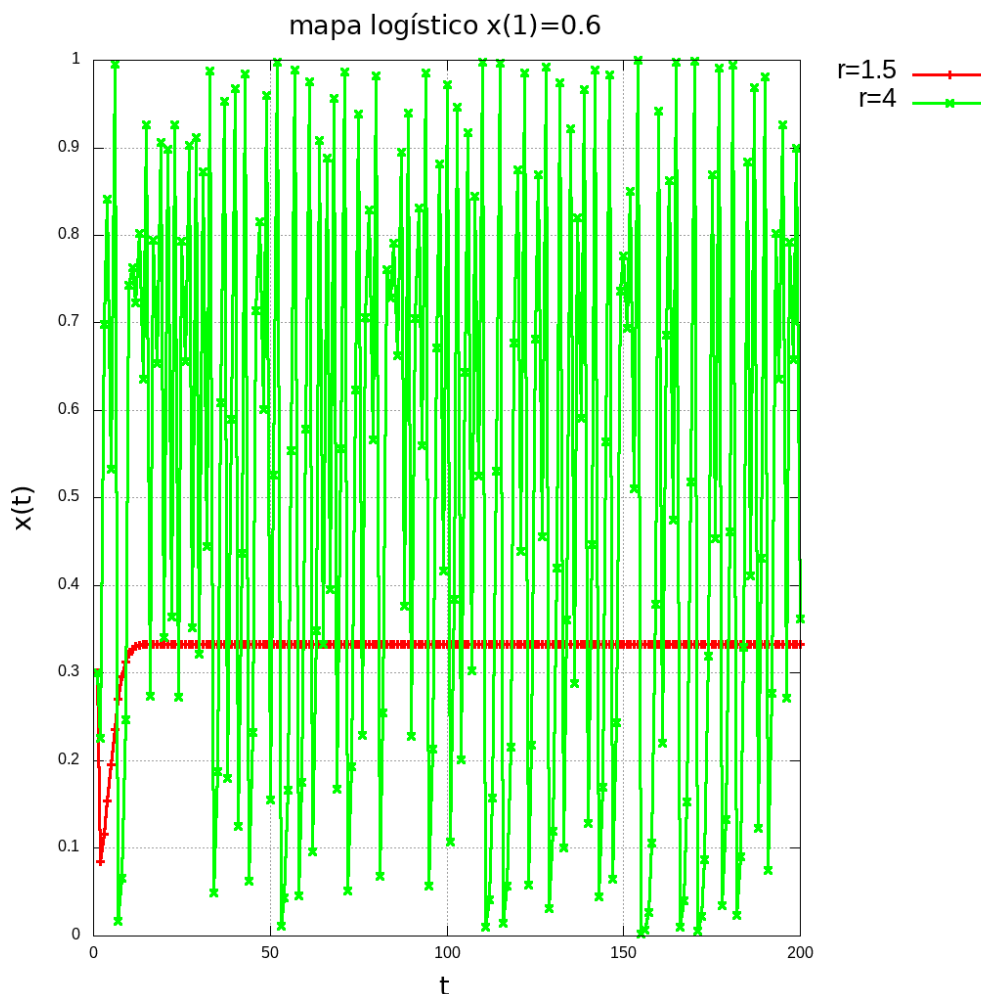


**Figure 1:**

vemos que para una misma condición inicial (en este caso  $x_0 = 0.6$ ) obtenemos distintas evoluciones de la coordenada discreta  $x$ , tan solo variando el parámetro de la ecuación logística.

También notamos que cada valor del parámetro tiene un tiempo característico luego del cual entramos en régimen estacionario, por ejemplo, en la curva roja (para  $r = 1.15$ ) obtenemos un tiempo largo ( $\approx 15$  [s]) luego del cual la respuesta es estacionaria, estable y no-oscilante. En cambio para el resto de curvas (con distintos valores de  $r$ ) el tiempo característico es menor ( $\approx 8$  [s]) luego del cual la respuesta entra en régimen estacionario y oscilante (es decir, podemos asociar alguna frecuencia de oscilación y reconocer algún patrón en la evolución).

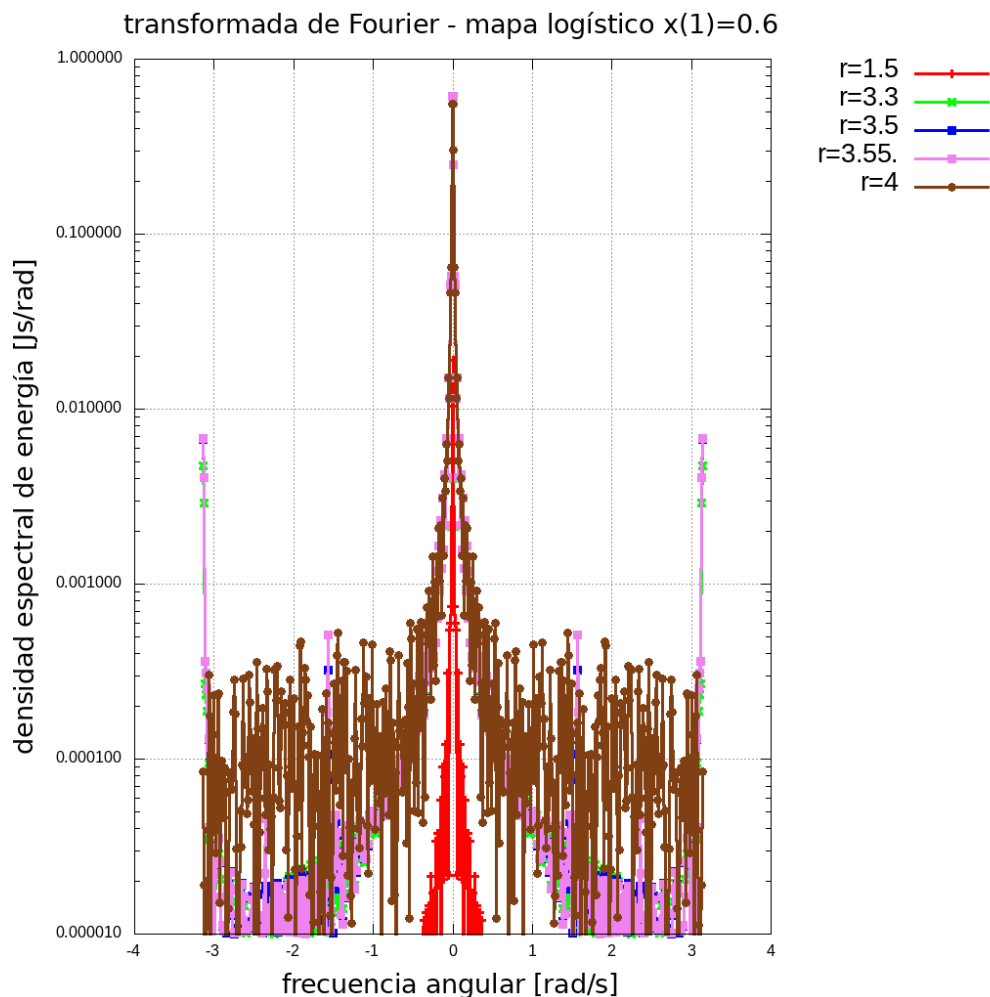
Notemos además que la ecuación logística solo nos permite conocer puntos en el espacio  $x-t$ , que hemos unido con líneas para observar tendencias y proveer alguna intuición del comportamiento físico, pero debemos recordar que los puntos a lo largo de las líneas dibujadas no existen en la realidad.



**Figure 2:**

Aquí podemos observar el comportamiento caótico de  $x(t)$  obtenido a partir de una misma condición inicial pero con un cambio de parámetro, notemos que no podemos reconocer fácilmente ningún patrón de oscilación. Notemos además que hemos representado el mapa logístico hasta un tiempo mayor a los 50[s] correspondientes a la gráfica anterior. Esto nos permite visualizar que el comportamiento para  $r = 4$  presenta una notable diferencia respecto al primer caso con  $r = 1.5$ .

**inciso b)**



**Figure 3:**

Notamos que las corridas con parámetros  $r < 4$  el espectro de potencia nos muestra picos bien definidos, es decir, nos permite conocer las frecuencias características del sistema. El espectro asociado a  $r = 1.5$  nos muestra un solo pico en el origen (primer componente del desarrollo de Fourier, valor promedio), evidenciando que la respuesta estacionaria no oscila, el espectro asociado a  $r = 3.3$  nos muestra dos frecuencias características (además del pico en el origen que, como es el valor promedio, debe de aparecer en todos los espectros) que nos define un periodo de oscilación característico  $T$  y luego los espectros asociados a  $r = 3.5$  y  $r = 3.55$  nos muestran cuatro y seis picos respectivamente, evidenciando que se trata de comportamientos con un periodo de oscilación característico de  $T/2$  y  $T/4$  respectivamente. Además, notemos que para el caso de  $r = 4$  el espectro de potencia no presenta picos característicos es decir, estamos en presencia de un comportamiento caótico.

MOSTRAR `fourier_tranform_01.png`, `fourier_tranform_02.png`, `fourier_tranform_03.png`,  
`fourier_tranform_04.png`, `fourier_tranform_05.png`

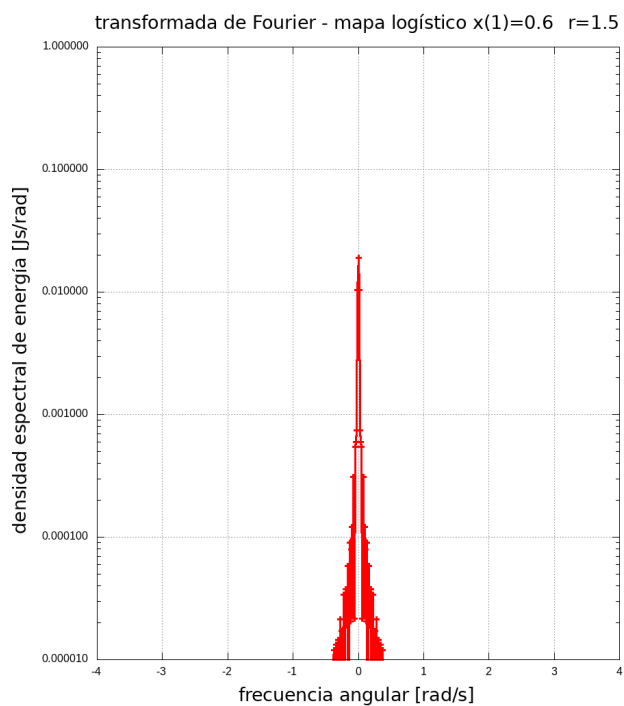


Figure 4:

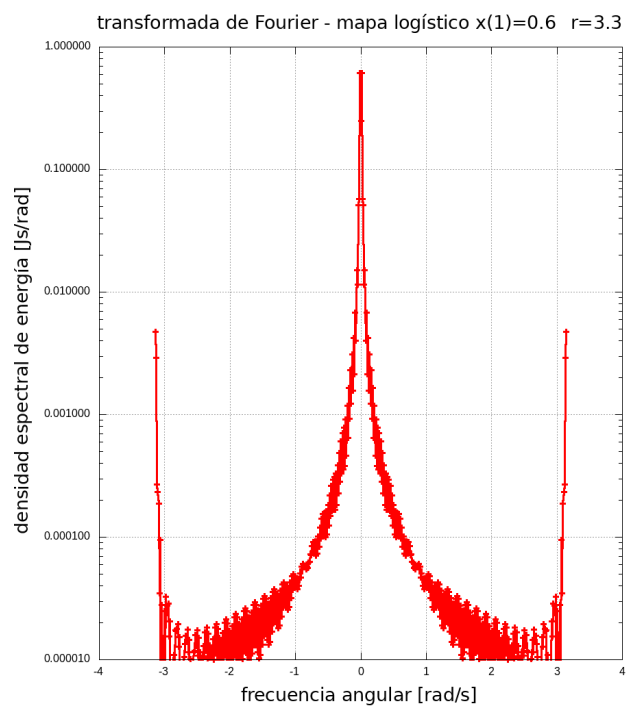


Figure 5:

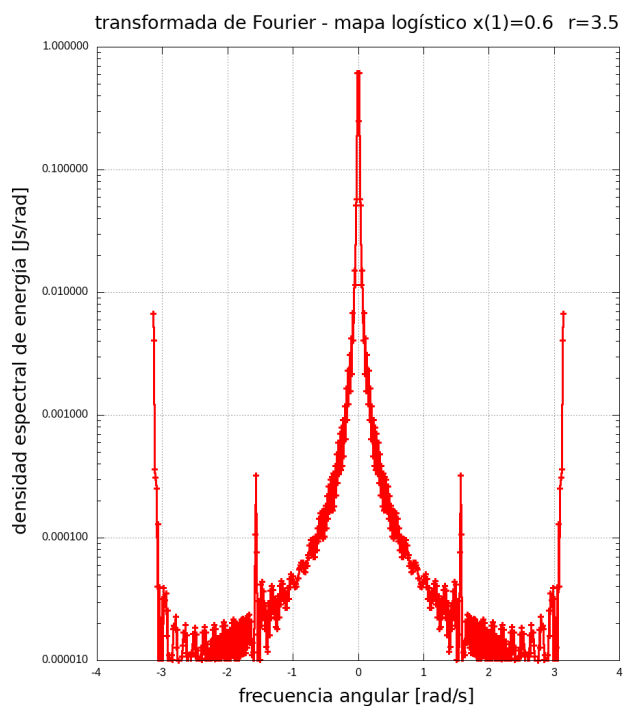


Figure 6:

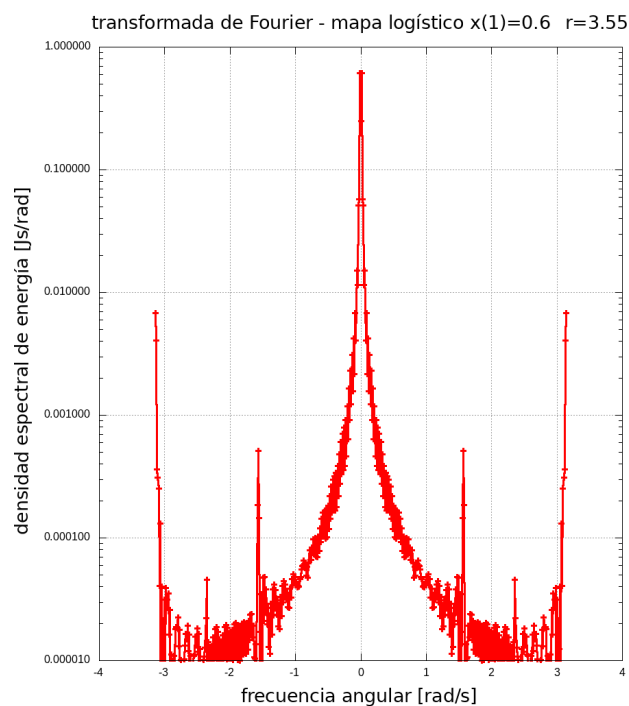
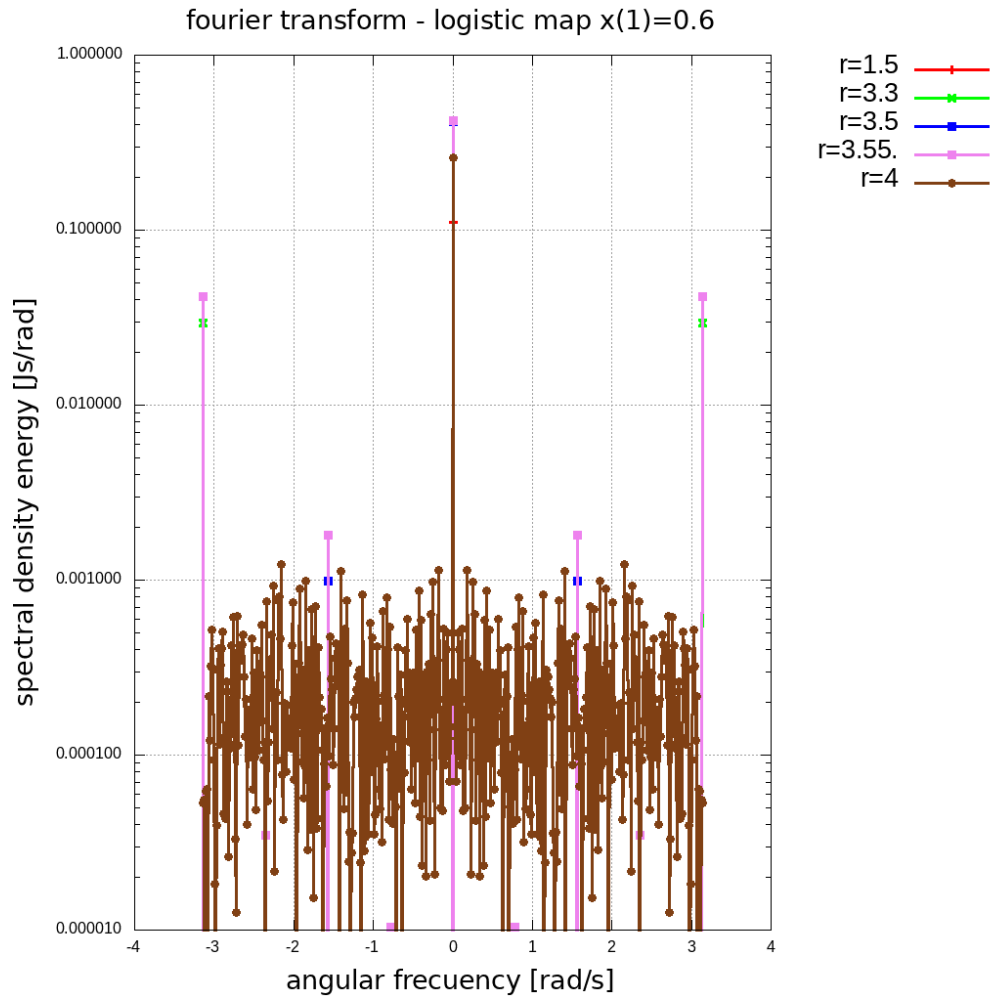


Figure 7:

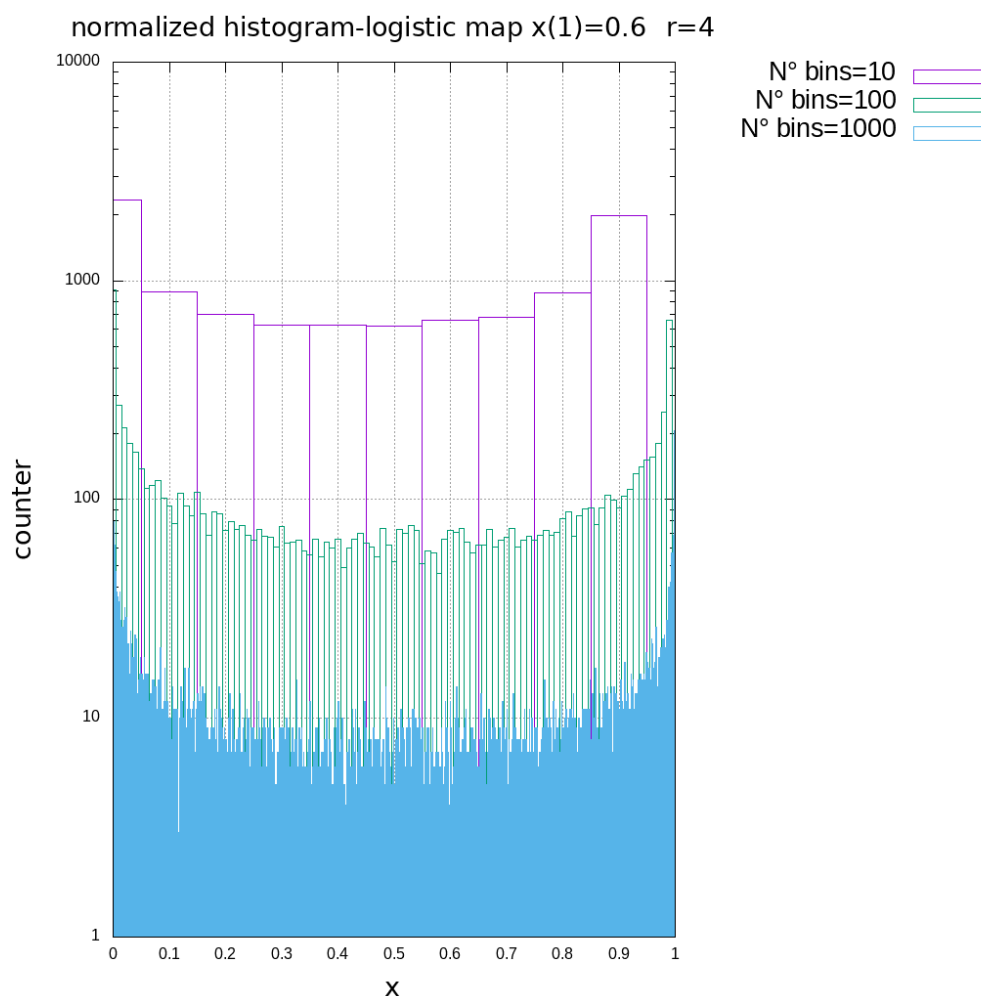
Comentario: Se ha calculado el espectro de potencia considerando el régimen transitorio y estacionario (evolución completa del mapa logístico) obteniendo el siguiente resultado



**Figure 8:**

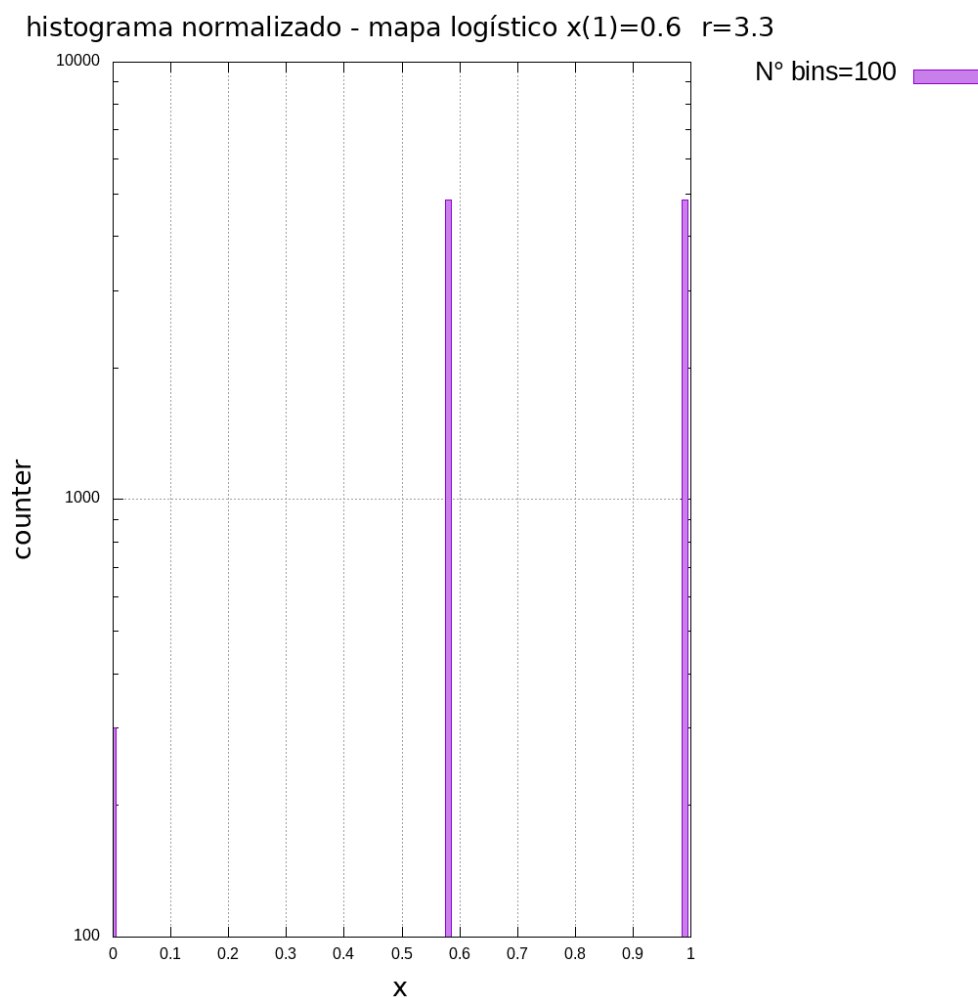
Esto nos muestra que, se presentan ciertas diferencias (que pueden ser muy significativas) en cuanto a considerar o no el transitorio. Además, cabe aclarar que si bien para todos los casos (para todos los valores del parámetro  $r$ ) se debería descartar el transitorio de acuerdo al tiempo característico del mismo, para asegurarnos de que estemos en el estado estacionario independientemente del valor de  $r$  se tomo un tiempo transitorio (cantidad de pasos del mapa logístico) muy grande  $t_{trans} = 300$ .

**inciso c)**



**Figure 9:**

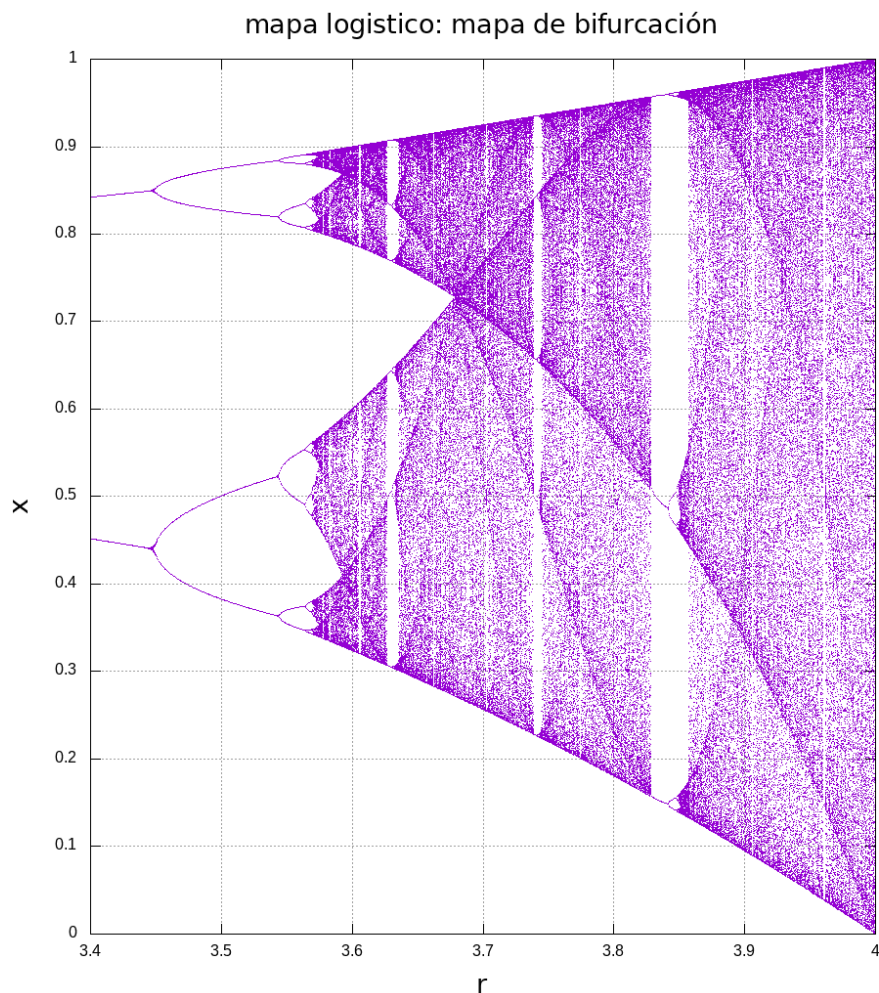
Este gráfico muestra la cantidad de veces que el mapa logístico toma un mismo valor, a lo largo de la evolución del mapa. Como la gráfica anterior muestra el caso de  $r = 4$  el cual sabemos está en el régimen caótico no muestra ninguna frecuencia característica de oscilación. Sin embargo, se realizó el histograma para un caso no caótico (específicamente para el caso de  $r = 3.3$ ) y se evidenciaron las dos frecuencias de oscilación del mapa logístico.



**Figure 10:**

Por otra parte, en el primer hitograma para  $r = 4$  vemos que a medida que disminuye el tamaño del bin (o aumenta el número de bins por unidad de ancho característico) las imágenes varían, esto evidencia el cuidado que hay que tener al momento de elegir el ancho de los bins, por ejemplo, si el ancho es muy pequeño cada bin puede contener un único punto del mapa logístico y esto no es adecuado para evidenciar oscilaciones, en cambio, si el ancho del bin es muy grande, puede incluir demasiados puntos y ocultar frecuencias características.

**Inciso d)**



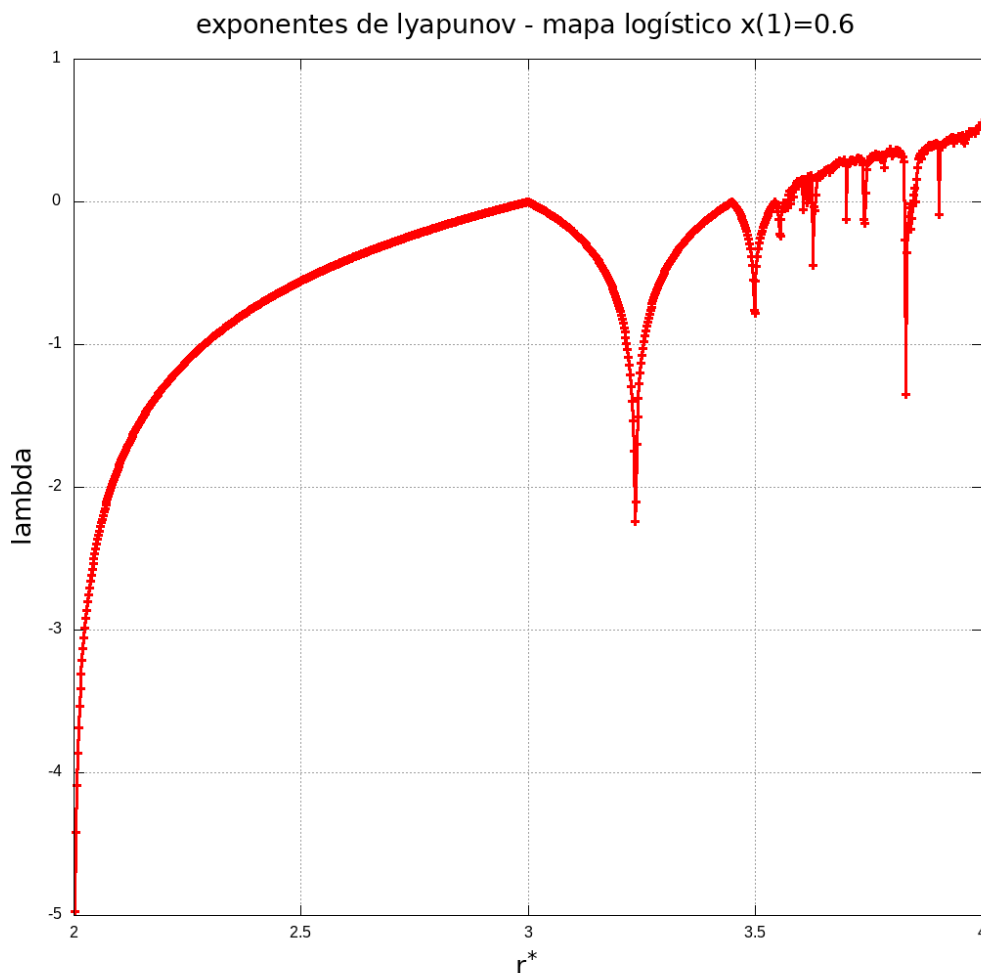
**Figure 11:**

En este gráfico vemos el comportamiento de las trayectorias para distintos valores de parámetros, vemos que inicialmente el comportamiento de las trayectorias no es oscilatorio, luego se bifurca en dos posibles evoluciones, y luego se bifurca nuevamente cada una de ellas, evidenciando un comportamiento fractal. Es más, sabemos que las distancias entre trayectorias tienen valores diferentes dependiendo de la zona en el gráfico y que en determinado momento se evidencia el comportamiento caótico (zona sombreada). El comportamiento caótico se caracteriza por ser determinista hasta cierto punto luego del cual no se puede predecir más.

La ampliación del gráfico no se pudo lograr, el código arroja datos en una zona no deseada no pudiendo obtener el patrón repetido (o invertido) evidenciando la propiedad de fractal que presenta el mapa logístico. El error en el algoritmo no se pudo encontrar.

**inciso e)**





**Figure 12:**

Este gráfico nos muestra cómo varía el exponente de lyapunov del mapa logístico en función de los parámetros. Como era de esperar verificamos que los casos de  $r = 1.5; 3.3; 3.5$  son estables es decir que las distancias entre las distintas trayectorias decae exponencialmente, sin embargo, el caso de  $r = 4$  vemos que corresponde a un  $\lambda > 0$  lo cual nos dice que es caótico el comportamiento y las distancias entre trayectorias crecen exponencialmente. Además podemos ver otros valores de  $r$  no simulados, por ejemplo aquellos donde  $\lambda = 0$ , para estos casos tenemos un comportamiento "cuasi-periódico" (si hacemos un análisis en el espacio de frecuencias, obtenemos un espectro con algunos picos definidos), y estos casos nos dicen que nos encontramos en un límite donde las trayectorias no se acercan ni se alejan exponencialmente.

## Códigos

### Repositorio GitHub

<https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022.git>

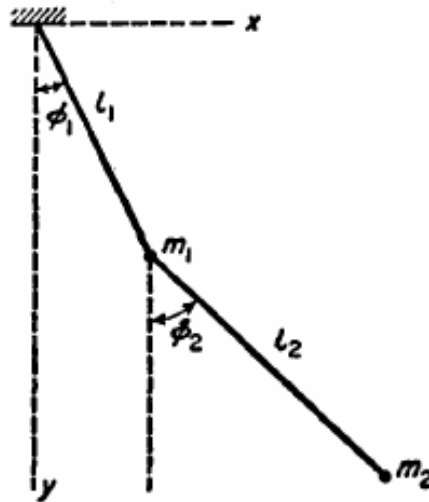
## Referencias

Chapman, S. (2007). *Fortran 95/2003 for Scientists & Engineers*. McGraw-Hill Education. [https://books.google.com/books/about/Fortran\\_95\\_2003\\_for\\_Scientists\\_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ](https://books.google.com/books/about/Fortran_95_2003_for_Scientists_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ)

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. [https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos\\_num%C3%A9ricos\\_para\\_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ](https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ)

Landau, R. H., Mejía, M. J. P., Pájez, M. J., Kowallik, H., & Jansen, H. (1997). *Computational Physics*. Wiley-VCH. [https://books.google.com/books/about/Computational\\_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ](https://books.google.com/books/about/Computational_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ)

# Introducción



**Figure 1:** Péndulo doble plano

Tenemos péndulos unidos por un vínculo sin rozamiento, cada uno en cuyo extremo se encuentra una masa puntual  $m_1$  y  $m_2$  las ecuaciones de movimiento resultan (derivándolas considerando la función lagrangiana  $\mathcal{L} = (T - U)$ )

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{\left\{ -(1+\alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \alpha \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[ (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] \right\}}{1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{\left\{ (1+\alpha) \left[ (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] + \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[ (1+\alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \right\}}{\beta[1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\alpha = m_1/m_2$ ,  $\beta = L_2/L_1$  y  $\gamma = g/L_1$ .

Como vemos las dos coordenadas generalizadas son los dos ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  y la evolución del sistema está gobernado por (1) que es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Para poder resolver el sistema con el método de integración de Runge-Kutta de 4to orden planteamos las siguientes 4 ecuaciones diferenciales lineales acopladas

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\left\{ -(1+\alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \alpha \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[ (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] \right\}}{1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\left\{ (1+\alpha) \left[ (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin(\theta_2) \right] + \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[ (1+\alpha)\gamma \sin(\theta_1) - \alpha\beta(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \right\}}{\beta[1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \end{cases}$$

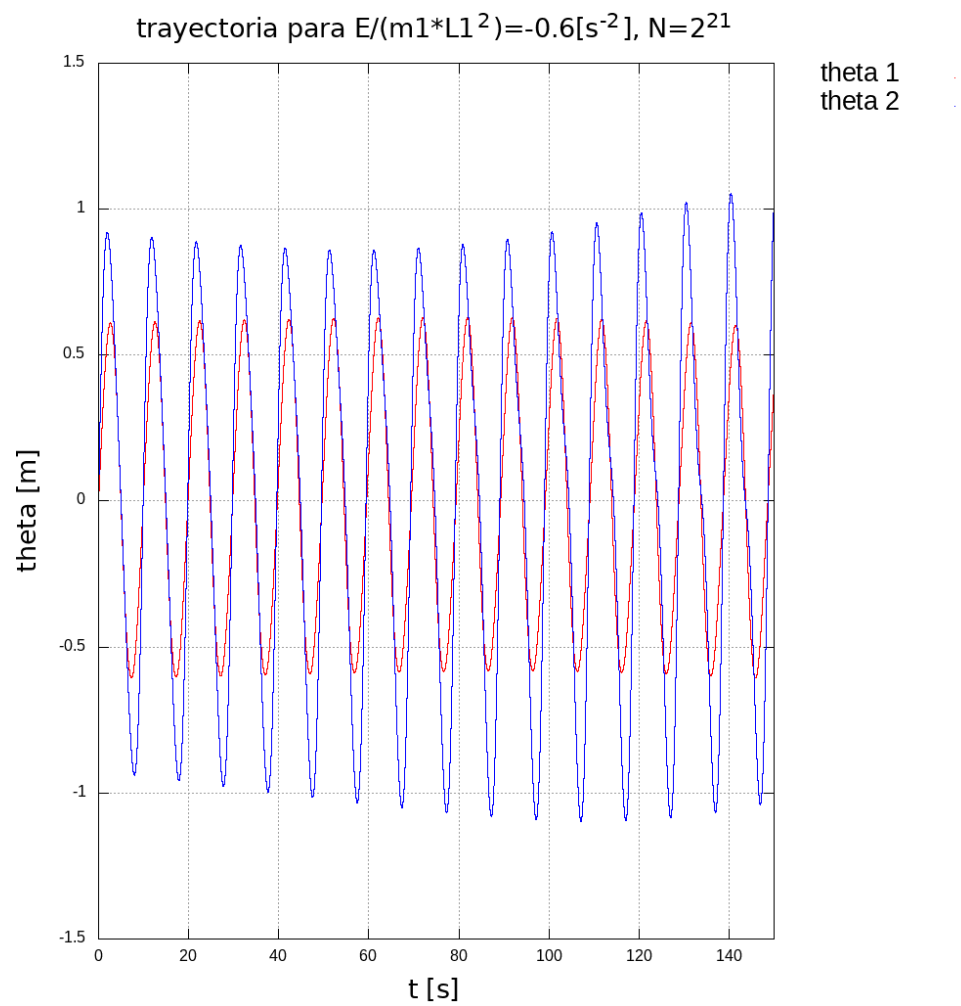
La subrutina "lagrangian\_dble\_pendulum" dentro del módulo "module\_double\_pendulum" se encarga de realizar este cálculo.

## Resultados y discusiones

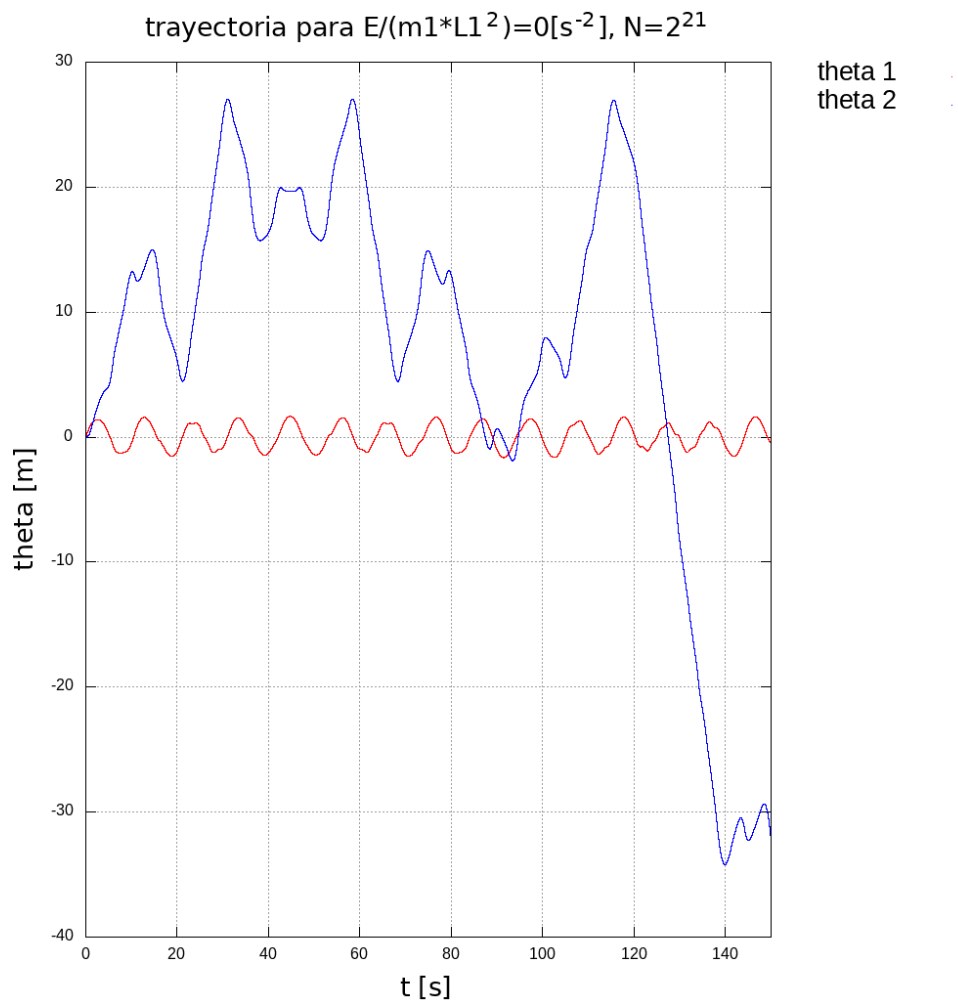
Inciso a)

Calculamos las soluciones para el caso en que  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = \gamma = 1/2$  y para las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0; \dot{\theta}_1(0) = 0.332; \dot{\theta}_2(0) = 0.845 & \rightarrow \text{configuración 01} \\ \theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0; \dot{\theta}_1(0) = \sqrt{1.125} & \rightarrow \text{configuración 02} \end{cases} \quad (2)$$

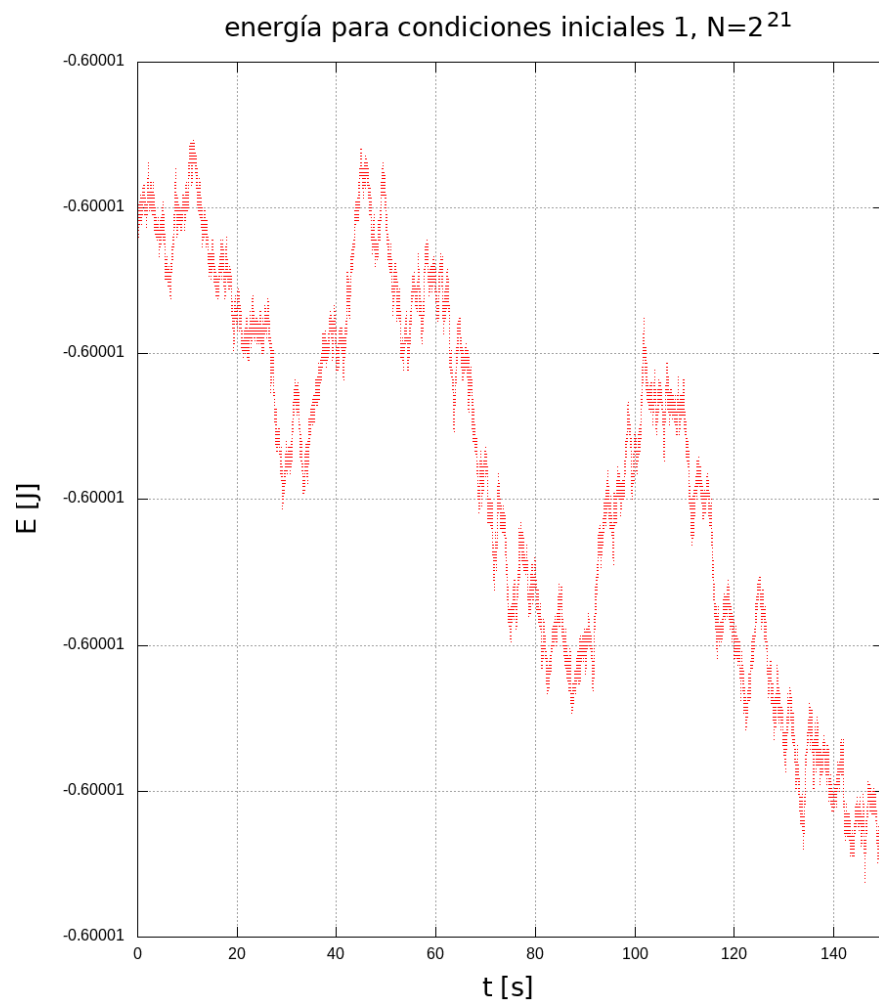


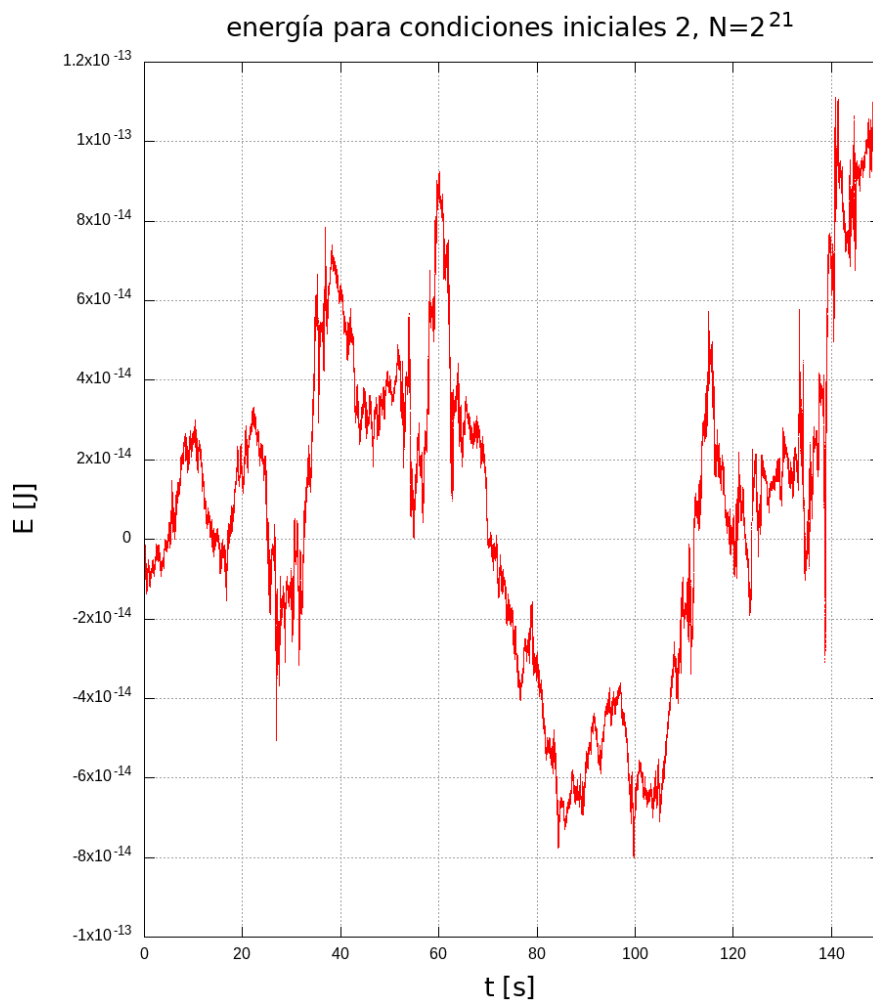
**Figure 2:**

**Figure 3:**

Al graficar las trayectorias vemos que al obtener las soluciones con condiciones iniciales tales que la energía  $E/m_1(L_1)^2 = -0.6[s^{-2}]$  el comportamiento de ambas coordenadas generalizadas es acotado y periódico, sin embargo, al obtener las soluciones con condiciones iniciales tales que la energía  $E/m_1(L_1)^2 = 0[s^{-2}]$  el comportamiento de  $\theta_1$  es acotado y periódico, pero para  $\theta_2$  vemos que crece indefinidamente, presentando un comportamiento caótico.

Para verificar que efectivamente cada configuración de condiciones iniciales tiene la energía antes mencionada, se graficó esta punto a punto, y se obtuvieron ligeras variaciones que están en el orden del error de la máquina

**Figure 4:**



**Figure 5:**

Además, esto nos permite corroborar que como el sistema físico es conservativo, el método de RK4 conserva la energía, lo cual es punto fuerte a tener en cuenta para aplicar en casos donde esto sea relevante.

### **Inciso c)**

Calculamos el espectro de potencia para las órbitas con energías  $E/m_1(L_1)^2 = -0.745[s^{-2}]$  y  $E/m_1(L_1)^2 = 0[s^{-2}]$  para encontrar las condiciones iniciales del primer caso (pues para el segundo con energía nula usamos las condiciones del inciso anterior), se implementó un loop calculando la energía del sistema, que como tenemos un sistema conservativo la calculamos en el instante inicial y fijando algunas condiciones iniciales, podemos calcular otras imponiendo la condición de energía. Los resultados fueron,

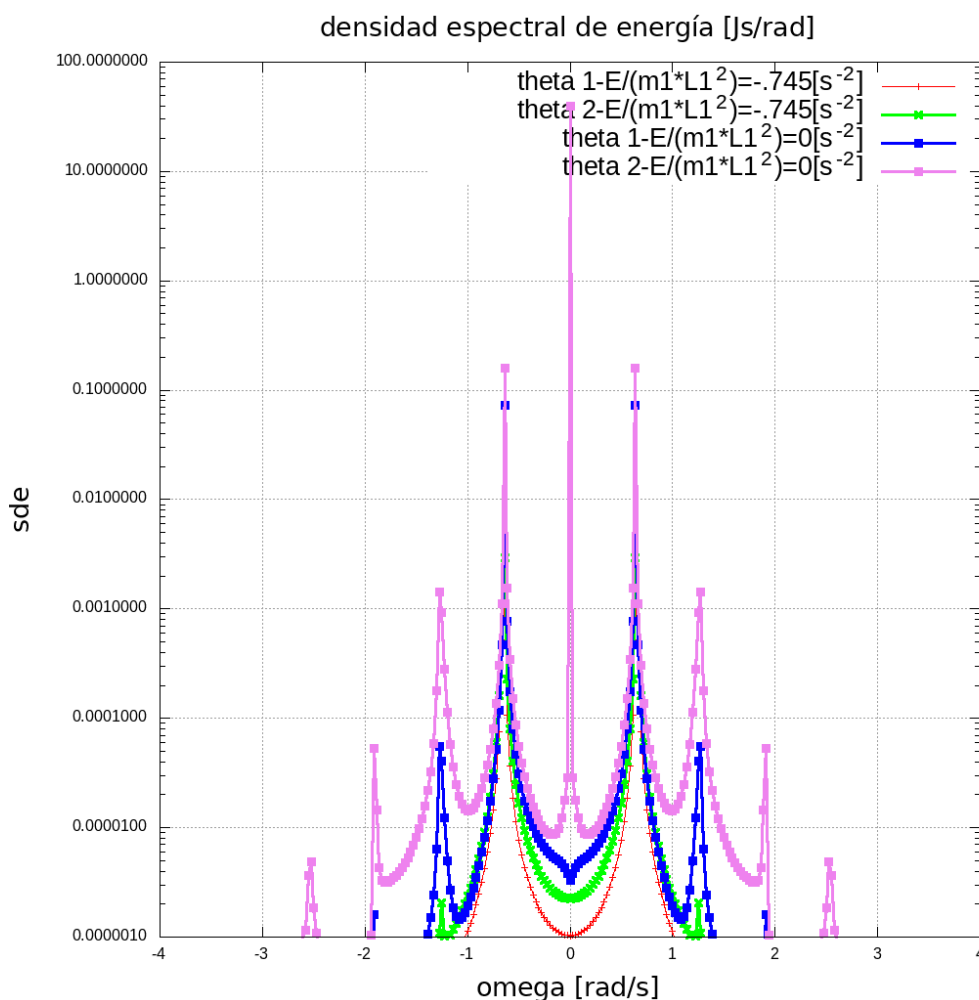


Figure 6:

En este gráfico se puede observar el espectro de frecuencias para los dos regímenes, para el caso de energía no nula se observan picos bien definidos asociados a comportamientos oscilatorios con frecuencias definidas y para el caso de energía nula, el cual se trata de un comportamiento caótico se observan muchos picos, sin embargo, debería haberse evidenciado muchos más picos pequeños, lo que caracterizan a un movimiento aperiódico, estas diferencias obtenidas podrían deberse a errores en la elección del tiempo de muestreo o elecciones en número de puntos utilizados en los integradores de RK4, cuyas soluciones dependen fuertemente de ellos.

#### Inciso d)

Aquí se estudio el comportamiento caótico del péndulo doble utilizando el método de Heyl, contando la cantidad de flips (tiempos en los cuales  $\theta_1$  o  $\theta_2$  exceden el valor de  $\pi$ ). Para ello se tuvieron en cuenta lo siguiente

```

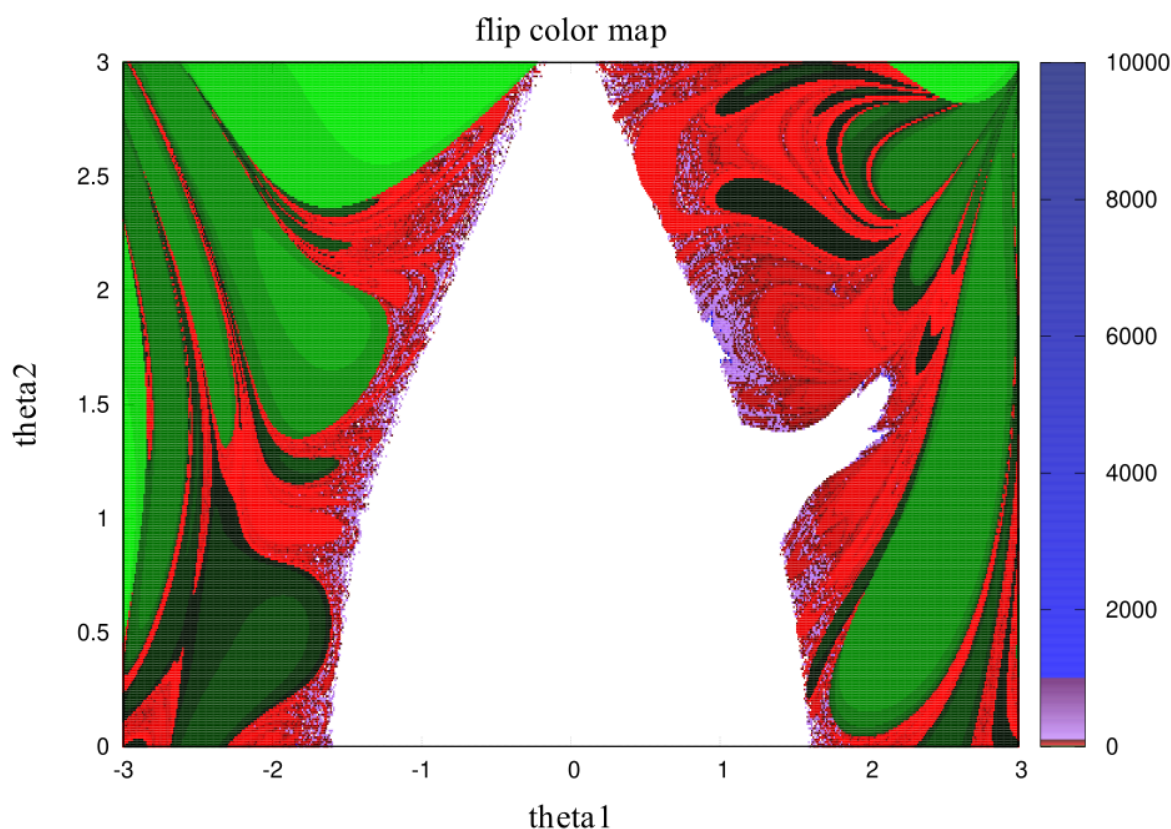
detector = .false. ! no-detected flip
pepito_bucle: do i = 2, n, 1
  #integración de RK4
  if (escribir .eqv. .false. ) then
    if (abs(y1_RK4(i)) >= pi .or. abs(y2_RK4(i)) >= pi) then
      detector = .true. ! detected flip
      exit pepito_bucle
    else if (2._dp*cos(y1_RK4(i))+cos(y2_RK4(i)) > 1._dp) then
      ! no-detected flip
      exit pepito_bucle
    
```



```
end if
end if
```

es decir, el detector comienza con un valor falso pues las condiciones iniciales son tales que el flip nunca ocurre (se encuentra acotadas por los valor 3 y  $-3$ ) y entonces se procede a integrar las soluciones. Luego, se pregunta si las soluciones en determinado instante superan o igualan el valor de  $\pi$  y en caso de ser afirmativo detectan un flip y se registra el tiempo de flipeo. Además, si la energía no es suficiente para que las soluciones flipeen también se sale del loop y se registra un no-flipeo. Caso contrario a las condiciones anteriores, se sigue integrando hasta que se detecte un flip o se alcance el tiempo final de integración.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes,



**Figure 7:**

El código se corrió sin tener en cuenta la condición de energía ( $2 \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) > 1$ ) debido a un error en el código. Esto evidentemente, incrementó notablemente el costo computacional del algoritmo, sin embargo, no se logró encontrar el error lógico, evidentemente los resultados obtenidos no eran correctos, al considerar el condicional de energía ocurría que no se detectaban flips en absoluto o si, se detectaban, estaban acotados por un valor menor a diez, resultados, ilógicos comparando con las gráficas esperadas. Se agregaron algunas variables de control para verificar si los integradores RK4 estaban integrando bien y se obtuvieron resultados favorables, lo cual acotó la región de error, pero aún sin descubrirlo.

## Códigos

Repositorio GitHub

<https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022.git>

## Referencias

Chapman, S. (2007). *Fortran 95/2003 for Scientists & Engineers*. McGraw-Hill Education. [https://books.google.com/books/about/Fortran\\_95\\_2003\\_for\\_Scientists\\_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ](https://books.google.com/books/about/Fortran_95_2003_for_Scientists_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ)

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. [https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos\\_num%C3%A9ricos\\_para\\_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ](https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ)

Landau, R. H., Mejía, M. J. P., Páñez, M. J., Kowallik, H., & Jansen, H. (1997). *Computational Physics*. Wiley-VCH. [https://books.google.com/books/about/Computational\\_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ](https://books.google.com/books/about/Computational_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ)

Wikipedia contributors. (2022). *Row- and column-major order* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. <https://web.mit.edu/jorloff/www/chaosTalk/double-pendulum/double-pendulum-en.html>

## Introducción

Partimos del hamiltoniano de Pullen-Edmonds

$$H = \frac{1}{2m}[(p_1)^2 + (p_2)^2] + \frac{m\omega^2}{2}[(q_1)^2 + (q_2)^2] + \alpha(q_1)^2(q_2)^2$$

el cual consiste en dos osciladores armónicos unidimensionales con un término de interacción  $\alpha(q_1)^2(q_2)^2$ .

## Resultados y discusiones

Inciso a)

Aquí se integraron las ecuaciones de movimiento utilizando las ecuaciones de Hamilton, para obtener las siguientes cuatro ecuaciones de primer orden

$$dH/dp_i = dq_i/dt \Rightarrow \begin{cases} dq_1/dt = p_1/m \\ dq_2/dt = p_2/m \\ dp_1/dt = -q_1[m\omega^2 + 2\alpha(q_2)^2] \\ dp_2/dt = -q_2[m\omega^2 + 2\alpha(q_1)^2] \end{cases} \quad (1)$$

integrando este sistema de ecuaciones diferenciales lineales acopladas de primer orden con RK4 obtenemos (para  $m = \omega = 1$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $q_1 = 2$ ,  $p_1 = q_2 = 0$  y  $p_2 = \sqrt{2E-4}$ ) qué, como el potencial del sistema no depende de las velocidades la energía mecánica es igual al hamiltoniano. Los resultados fueron, para la órbita 1  $q_1$  vs  $p_1$  y la órbita 2  $q_2$  vs  $p_2$ .

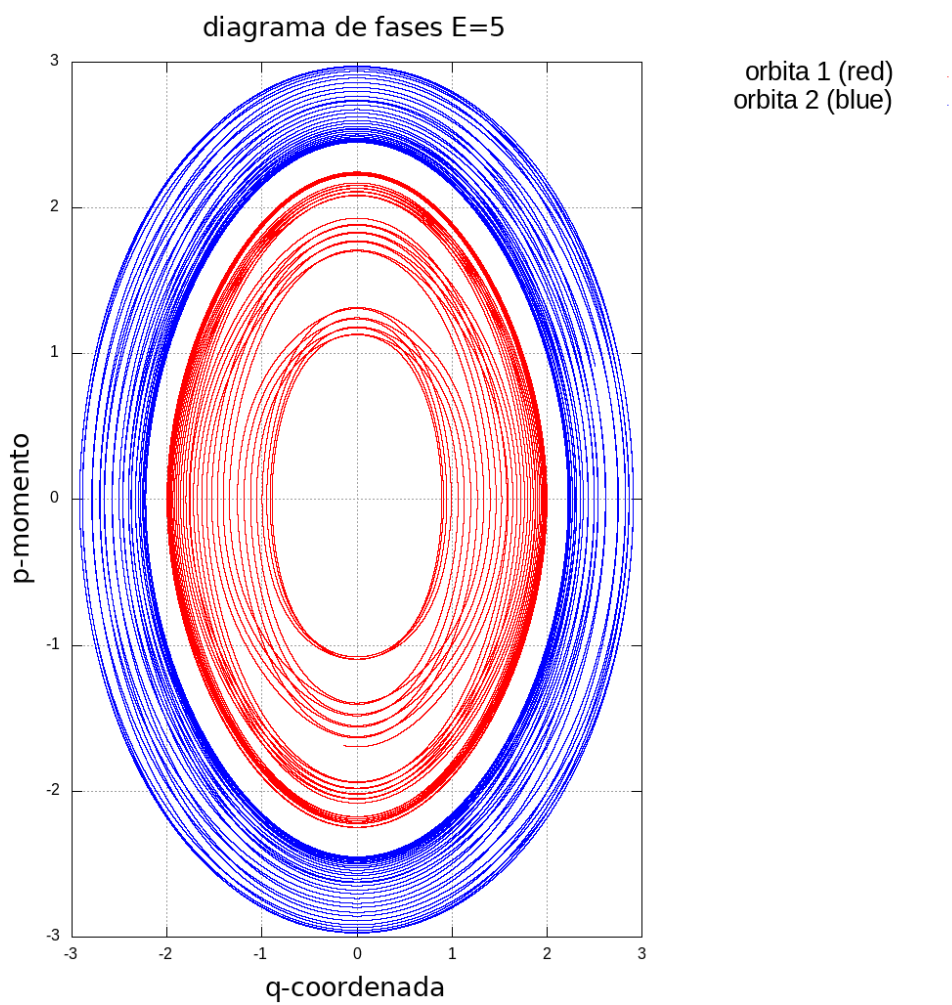


Figure 1:

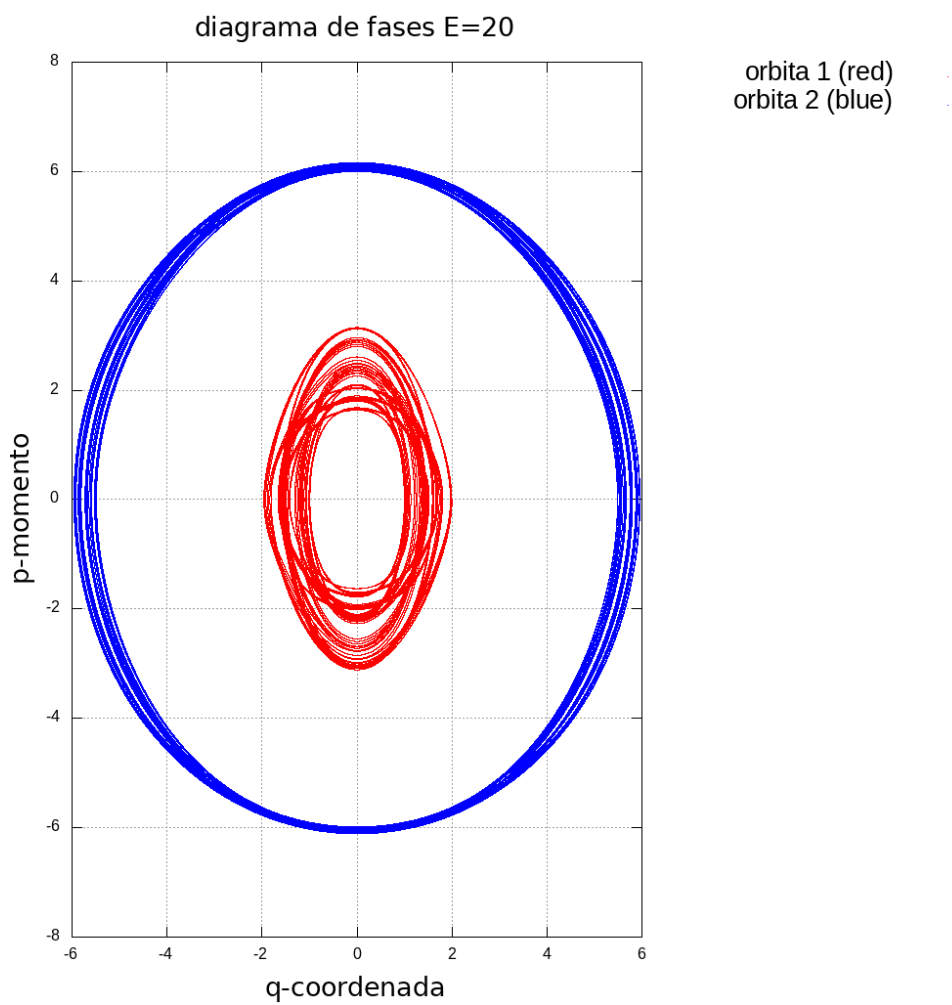
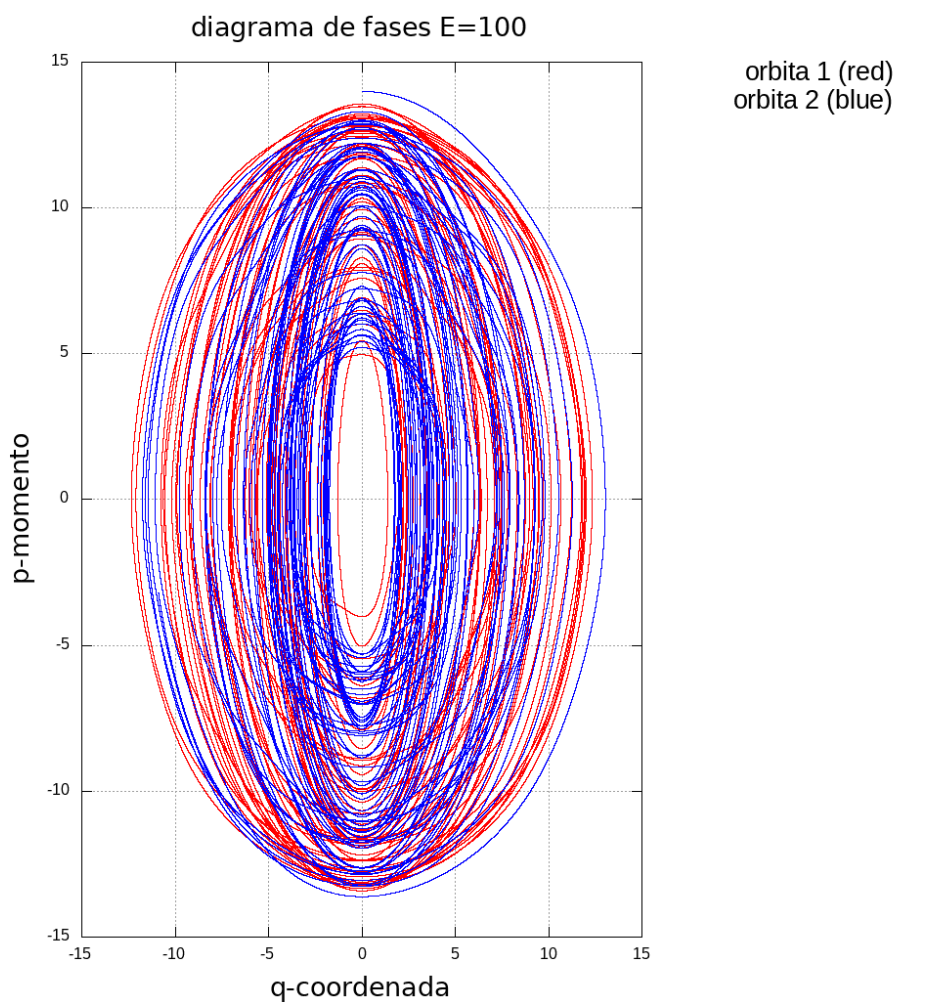


Figure 2:

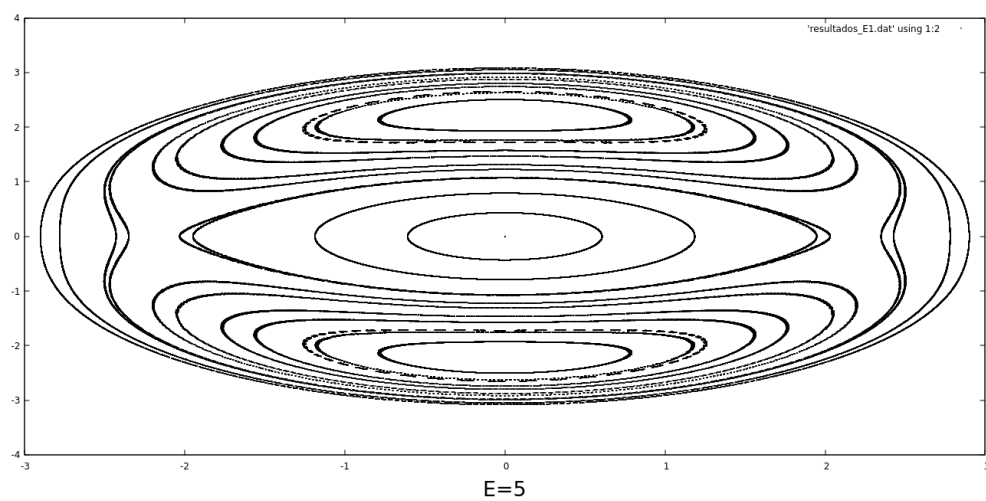


**Figure 3:**

Aquí notamos que, a pesar de existir caos en el sistema, las trayectorias permanecen acotadas.

**Inciso b)**

Las secciones de poincaré obtenidas para las energías  $E = 5, 20, 100$  fueron



**Figure 4:**



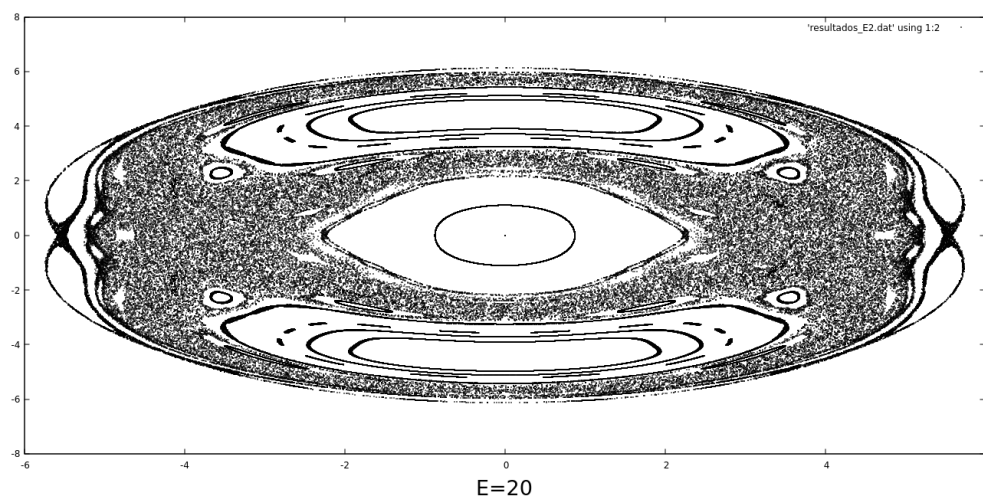
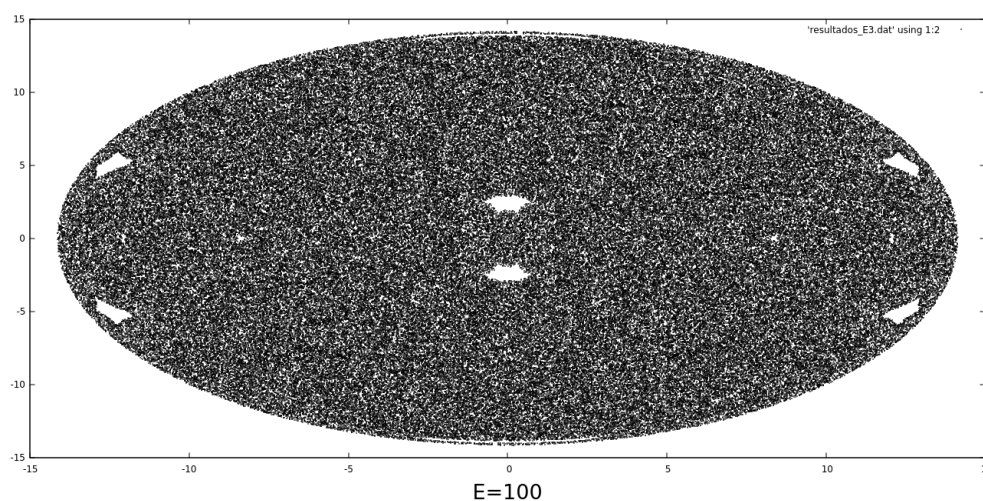


Figure 5:



Se llevaron a cabo dos implementaciones del algoritmos, de los cuales únicamente el último (poincare\_sections\_02.f90) pudo arrojar los gráficos anteriores. Quizás por algún error en algún cálculo el primer código (poincare\_sections.f90) propaga un NaN y no arroja resultados. Los enfoques de ambos códigos son muy diferentes, es decir, la forma de obtener las condiciones iniciales varía de uno a otro, eligiendo de antemano qué coordenadas se imponen inicialmente qué coordenadas se varían.

Las secciones de poincare permiten visualizar transiciones dimensionales (o topológicas) de comportamientos complejos, claramente existen patrones para energías de 5 y 20, y caos en el último caso donde el plano  $q_1$  vs  $p_1$  se ve intersectado por  $q_2$  en una gran región no reconociendo patrón alguno.

## Códigos

script

**Repositorio GitHub**

<https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022.git>

## Referencias

Chapman, S. (2007). *Fortran 95/2003 for Scientists & Engineers*. McGraw-Hill Education. [https://books.google.com/books/about/Fortran\\_95\\_2003\\_for\\_Scientists\\_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ](https://books.google.com/books/about/Fortran_95_2003_for_Scientists_Engineers.html?hl=&id=c8cLDQEACAAJ)

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. [https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos\\_num%C3%A9ricos\\_para\\_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ](https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ)

Landau, R. H., Mejía, M. J. P., Páez, M. J., Kowalik, H., & Jansen, H. (1997). *Computational Physics*. Wiley-VCH. [https://books.google.com/books/about/Computational\\_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ](https://books.google.com/books/about/Computational_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAAMAAJ)