Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF-UNC) Curso de Física Computacional 2022-Guía N°02

Problema 1

Ecuación de Calor

Resolvemos, mediante diferentes algoritmos, la ecuación del calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa_T}{C\rho} \nabla^2 [T(x, t)] \tag{1}$$

para el caso particular de una barra de aluminio de longitud L=1[m] y diámetro ω , alineada a lo largo del eje x; que está aislada en sus lados, pero no en sus extremos. Inicialmente la barra se encuentra a 100[°C], y se colocan sus extremos a 0[°C]. El calor fluye sólo por los extremos. La conductividad térmica (κ_T) , el calor específico (C) y la densidad (ρ) del aluminio son

$$\kappa_T = 237 \left[\frac{W}{mK} \right]; \ C = 900 \left[\frac{J}{kgK} \right]; \ \rho = 2700 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$
 (2)

Para ello:

a) Adimensionalizar la ecuación para llevarla a la forma

$$\frac{\partial [T(\tilde{x},\tilde{t})]}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 [T(\tilde{x},\tilde{t})]}{\partial^2 \tilde{x}} \tag{3}$$

- b) Escriba el código que resuelva la ecuación utilizando el método (de diferencias finitas) explícito de Euler "hacia adelante" (forward Euler). Utilice 100 divisiones en el eje x, y prevea hacer miles de pasos en t (es buena costumbre estimar tamaños de archivos antes de calcular (discuta en informe)! (Almacene sólo los valores de t que necesita, no todos). use $\Delta t = 0.3[s]$ (adimensionalizar y verificar que cumpla la condición de estabilidad). Escriba cada aproximadamente 300 pasos temporales los valores de la temperatura en la barra, y haga un gráfico de superficie mostrando T(x,t) versus (x,t).
- c) Controle que el programa dé una distribución de temperatura que varía suavemente a lo largo de la barra, y que está de acuerdo con las condiciones de contorno.
- d) Verifique que el programa dé una distribución de temperatura que varía suavemente a lo largo de la barra, y que está de acuerdo con las condiciones de contorno.
- e) Compare la solución analítica:

$$T(x,t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4T_0}{n\pi} \sin(k_n x) \exp\left[\frac{-(k_n)^2 \kappa_T t}{C\rho}\right]$$
(4)

con la solución numérica. Para ello, grafique T(x,t), para $t_1=180[s]$ y $t_2=1800[s]$. Utilice ahora 10 divisiones en el eje x (y elija Δt de acuerdo a la condición de estabilidad) y compare los resultados obtenidos para t_1 y t_2 .

- f) Haga un gráfico de superficie mostrando T(x,t) versus (x,t), y un gráfico de contornos mostrando las isotermas.
- g) Repita los incisos (b)-(f) para los algoritmos: implícito y Crank-Nicolson. Presente figuras donde se comparen, y discutan: si las diferencias son apreciables al ojo, sus tiempos de CPU, sus errores, complejidad de métodos, etc.
- h) Compare los tiempos de CPU para llegar a $t_2 = 1800[s]$ con cada método y con una precisión de 10^{-4} (error relativo).

Resultados y Discusiones

Inciso a)

Análisis dimensional

Adimensionalización, partimos de la ecuación unidimensional

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 [T(x,t)]}{\partial^2 x}; \ D = \frac{\kappa_T}{C\rho}$$
 (5)

notemos que las unidades de D (en unidades generales de tiempo (t), temperatura (T), y espacio (L) y masa (M)) las podremos averiguar conociendo las unidades de κ_T , C y ρ , entonces de (2)

$$[\kappa_T] = \left[rac{potencia}{distancia \cdot temperatura}
ight] \equiv \left[rac{potencia}{L \cdot T}
ight]$$

pero las unidades de potencia se pueden expresar de forma fundamental como

$$[potencia] = \left[\frac{trabajo}{tiempo}\right] = \left[\frac{fuerza \cdot distancia}{tiempo}\right] = \left[\frac{masa \cdot aceleración \cdot distancia}{tiempo}\right]$$

$$\Rightarrow [potencia] = \left[\frac{masa \cdot (distancia)^{2}}{(tiempo)^{3}}\right] \equiv \left[\frac{M \cdot L^{2}}{t^{3}}\right] \therefore [\kappa_{T}] \equiv \left[\frac{M \cdot L}{t^{3} \cdot T}\right]$$

y por otro lado tendremos.

$$[C] = \left[\frac{trabajo}{masa \cdot temperatura}\right] \equiv \left[\frac{L^2}{T \cdot t^2}\right] \wedge [\rho] = \left[\frac{masa}{volumen}\right] \equiv \left[\frac{M}{L^3}\right]$$

luego

$$[D] = \frac{[\kappa_T]}{[C] \cdot [\rho]} \equiv \left[\frac{L^2}{t} \right] \equiv \left[\frac{(distancia)^2}{tiempo} \right]$$
 (6)

y si ahora definimos las siguientes coordenadas adimensionales de espacio (\tilde{x}) y tiempo (\tilde{t})

$$\alpha \tilde{x} = x \wedge \beta \tilde{t} = t \tag{7}$$

donde α y β son parámetros característicos a definir para realizar las adimensionalidades. Si por un lado, adimensionalizamos x con la longitud característica de la barra $L \Rightarrow \alpha = L$ entonces deberá cumplirse que de (5), (7) (y usando regla de la cadena)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \underbrace{\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tilde{t}}}_{= 1/\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}; \quad \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} = \left[\frac{\partial^{2}}{\partial \tilde{x}^{2}} \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right)^{2}}_{= 1/\alpha} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \underbrace{\frac{\partial^{2} \tilde{x}}{\partial x^{2}}}_{= 0} \right] = \frac{1}{\alpha^{2}} \frac{\partial^{2}}{\partial \tilde{x}^{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = \frac{\beta D}{\alpha^{2}} \frac{\partial^{2} [T(\tilde{x}, \tilde{t})]}{\partial^{2} \tilde{x}} \tag{8}$$

entonces, para obtener la ecuación (3) deberá cumplirse que

$$\frac{\beta D}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha^2}{D} = \frac{L^2}{D} \tag{9}$$

es decir, encontramos el tiempo característico del sistema para adimensionalizar el la coordenada temporal y donde se verifican las unidades pues, $[\beta] = [L^2] \cdot [t/L^2] = [t] \equiv [tiempo]$.

Inciso b)

Estimación de tamaño de archivos

Se llevo a cabo una estimación de tamaño de archivos de la siguiente manera, por ejemplo, si tenemos las siguientes configuraciones en nuestro código

- $1 \quad {\tt program \ estimated_size}$
- 2 use module_precision

```
implicit none
real(dp) :: valor1=4._dp*atan(1.0_dp),valor2=4._dp*atan(1.0_dp)
integer(sp) :: i,istat
open(10,file='estimated_size.dat',status='replace',action='write',iostat=istat)
write(*,*) 'Input/Output file. istat10 = ',istat
20 format(E9.2,x,E9.2)
do i=1,200; write(10,20) valor1,valor2; end do
end program estimated_size

12 ! gfortran -o estimated_size.o module_precision.f90 estimated_size.f90 && ./estimated_size.o && rm
*.mod *.o
```

donde (dp) designa doble precisión (flotante de 8[bytes] \equiv 64[bits]) que utiliza 26 dígitos para su representación. En primera instancia, si no imprimimos los datos con formato tamaño del archivo sería tamaño = (#filas) $\cdot \left(\frac{\text{#valores}}{\text{fila}}\right) \cdot \left(\frac{\text{digitos}}{\text{valor}}\right)$ [bytes], pero debemos tener en cuenta

también que el sistema operativo guarda en memoria el indice de fila y columna del archivo de datos y por cada indice consume un byte (en nuestro caso tenemos 200 filas y 2 columnas y habrá que considerar 202 bytes adicionales) entonces,

$$tamaño = (200 \cdot 2 \cdot 26 + 202)[bytes] = 10602[bytes]$$

notemos que estuvimos muy cerca del tamaño real que fue de

```
-rw-rw-r-- 1 mendez mendez 10600 abr 24 09:51 estimated_size.dat
```

Ahora bien, esta es una estimación grosera pues el formato no nos imprimirá todos los dígitos de doble precisión sino que sólo utilizará 9 dígitos para guardar todo el número (contando signos, puntos, exponente, decimales, etc.), además, como en el formato tenemos un espacio en blanco por renglón el sistema operativo también gasta un byte para su representación (esto, sin embargo, no se sabe muy bien por qué razón los espacios en blanco utilizan memoria quizás se debe a los datos basura de los sistemas operativos y también podría deberse al editor de texto en si, comprimiendo o no datos para su almacenamiento, por ejemplo, en este link se discute acerca de esto y la respuesta podría estar en que si se almacenan los datos en cadenas de caracteres, cualquiera de ellos, incluso los espacios en blanco ocupan memoria) entonces debemos estimar el tamaño como

$$tamaño = (200 \cdot 2 \cdot 9 + 203 + 200)[bytes] = 4003[bytes]$$

donde el segundo término de 203 bytes se debe al gasto de almacenar indices de filas y columnas (200 filas y 3 columnas) y el tercer término de 200 bytes se debe a el gasto adicional de almacenar un espacio en blanco. El tamaño real fue de

```
-rw-rw-r-- 1 mendez mendez 4000 abr 24 10:22 estimated_size.dat
```

Dirigiéndonos ahora a las simulaciones numéricas mostramos a continuación los resultados obtenidos

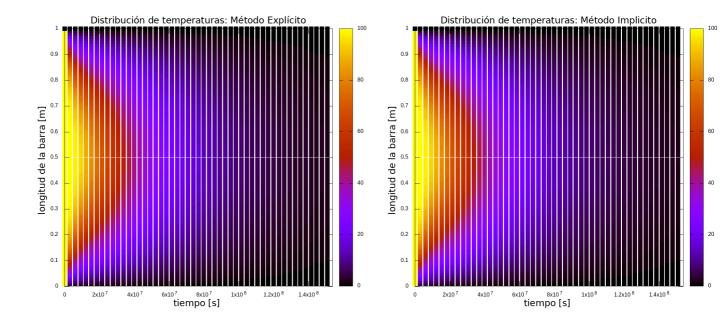


Figure 1:

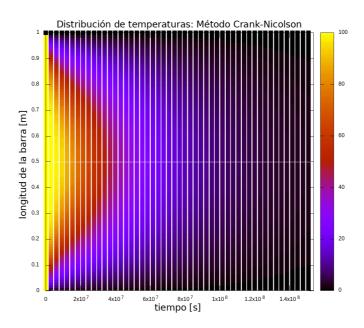


Figure 2:

Las gráficas anteriores muestran la distribución de temperatura (en colores) para cada posición de la barra (cada paso espacial simulado en el eje vertical) y cada 300 pasos de evolución temporal (eje horizontal). A simple vista no se aprecian diferencias significativas, lo que evidencia que los resultados para cada uno de los métodos son similares.

inciso e,f,g)

Control de estabilidad método explícito

Hubo mucha variación de los resultados dependiendo del parámetro de estabilidad elegido, por ejemplo, si bien teóricamente es necesario que este parámetro sea menor a $\frac{1}{2}$ para que el método explícito sea estable, si se elegía un valor cercano a $\frac{1}{2}$ la distribución de temperaturas era nula (como si la relajación fuese instantánea) lo cual sabemos que físicamente no ocurre, y se obtenía un incremento considerable del tiempo de CPU. Y, cuanto menor sea el parámetro la distribución de temperaturas será más gradual, sin embargo, tampoco debe ser muy pequeño pues no se tendrá

relajación alguna. Los resultados se muestran a continuación:

```
real(dp), parameter
                        :: alpha=0.45_dp (verificando estabilidad por muy poco)
mendez@mendez-notebook:~/my_repositories$ cat ../results/result_02_aprox.dat
0.00E+00 0.00E+00
 0.11E+00 0.15-322
0.22E+00 0.30-322
0.33E+00 0.40-322
 0.44E+00 0.44-322
 0.56E+00 0.44-322
 0.67E+00 0.40-322
 0.78E+00 0.30-322
 0.89E+00 0.15-322
 0.10E+01 0.00E+00
                        :: alpha=1.E-20_dp (muy por debajo del error de la maquina)
real(dp), parameter
mendez@mendez-notebook:~/my_repositories$ cat ../results/result_02_aprox.dat
0.00E+00 0.00E+00
0.11E+00 0.10E+03
0.22E+00 0.10E+03
 0.33E+00 0.10E+03
 0.44E+00 0.10E+03
 0.56E+00 0.10E+03
 0.67E+00 0.10E+03
 0.78E+00 0.10E+03
 0.89E+00 0.10E+03
 0.10E+01 0.00E+00
                        :: alpha=1.E-7_dp (por encima del error de la maquina)
real(dp), parameter
mendez@mendez-notebook:~/my_repositories$ cat ../results/result_02_aprox.dat
0.00E+00 0.00E+00
0.11E+00 0.84E+02
 0.22E+00 0.99E+02
 0.33E+00 0.10E+03
 0.44E+00 0.10E+03
 0.56E+00 0.10E+03
 0.67E+00 0.10E+03
 0.78E+00 0.99E+02
 0.89E+00 0.84E+02
 0.10E+01 0.00E+00
```

También, se probó con valores mayores a 1/2 produciéndose errores numéricos (propagación de NaN) lo cual evidencia alguna división por cero o algún error aritmético similar.

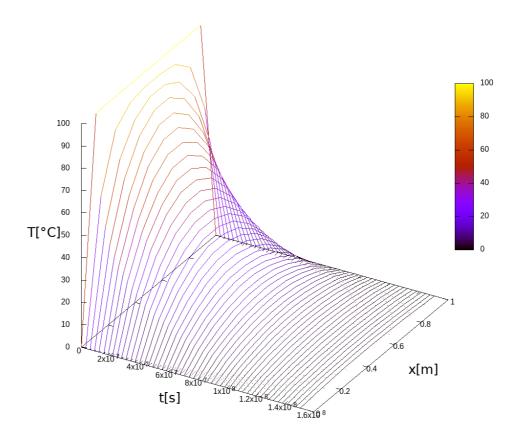
```
:: alpha=4.5 dp (no verificando estabilidad)
real(dp), parameter
mendez@mendez-notebook:~/my_repositories$ cat ../results/result_02_aprox.dat
 0.00E+00 0.00E+00
0.11E+00
                NaN
0.22E+00
                NaN
0.33E+00
                NaN
 0.44E+00
                NaN
 0.56E+00
                NaN
 0.67E+00
                NaN
 0.78E+00
                NaN
 0.89E+00
                NaN
 0.10E+01 0.00E+00
```

Para todos los casos el α utilizado fue de 10^{-7} . Es necesario aclarar que, el análisis anterior no es estrictamente correcto, pues los errores de los métodos dependen de los valores de α pero específicamente de los valores de Δx y Δt de forma acoplada, es decir, en los casos anteriores el

 Δx siempre se mantiene fijo y el valor de Δt se ve modificado por el valor de α , esto no es un método correcto de variar α pues el error numérico puede verse modificado groseramente ya que no se acompaña una discretización espacial con una discretización temporal (estamos haciendo elementos finitos más esbeltos en la dimensión temporal en vez de hacerlos más esbeltos en ambas dimensiones y obtener elementos finitos pequeños en su totalidad).

El gráfico de superficie obtenido se muestra en la siguiente figura

Distribución de temperaturas: Método Explícito



La figura anterior sólo se hizo para el método explícito, teniendo en cuenta los resultados anteriores que nos permitían asegurar que los resultados no variaban apreciablemente. En la figura se observa inicialmente la temperatura con los extremos de la barra a 0[°C] y el resto del cuerpo de la barra a 100[°C], luego de un tiempo se ve la termalización de la barra, es decir, se produce la relajación de la barra a una temperatura de equilibrio de 0[°C].

Luego, graficando la distribución de temperaturas para los tiempos específicos de 180[s] y 1800[s], para cada uno de los métodos, tendremos:

Temperature vs position bar

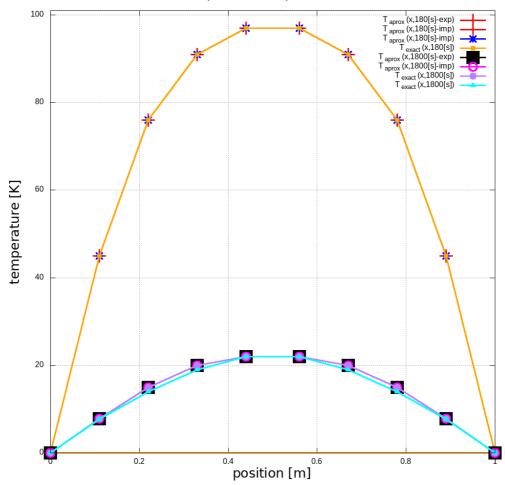


Figure 3:

En esta gráfica podemos ver que los tres métodos arrojan resultados muy próximos a la solución exacta, además, para tiempos mayores vemos que existen diferencias más apreciables respecto al valor exacto.

Inciso h)

Los tiempos fueron medidos para los distintos métodos utilizando la herramienta perf versión 5.13.19, con este comando se corrieron cada uno de los códigos una cinco veces y se pudo medir el valor medio y tolerancia del tiempo de CPU, como así también la cantidad de instrucciones por ciclo, referencias a memoria cache y cache-misses (cantidad de veces que los registros no entran completamente en memoria caché haciendo más dificultoso el procesamiento e incrementando el tiempo de cpu). Para todos los casos se relajó el sistema hasta los 1800[s], con 142200000 pasos temporales, y se midió el tiempo total de ejecución del programa, es decir, primero se compilaron los tres códigos (correspondientes a cada uno de los métodos), se generaron los códigos objeto y luego se aplicó el comando perf a estos códigos binarios para hacer las mediciones de performance.

Los resultados obtenidos fueron,

```
# METODO IMPLÍCITO
perf stat -e cycles,instructions,cache-references,cache-misses -r 5 ./heateq comparison 02.0
 Performance counter stats for './heateq_comparison_02.o' (5 runs):
   91.829.376.951 cycles
253.610.980.072 instructions
15.309.764 cache-reference
                          cache-references
                                                                                               (+- 9,38%)
         6.619.732
                          cache-misses
                                                       # 43,239 % of all cache refs
                                                                                               ( +- 11,09% )
             35,429 +- 0,872 seconds time elapsed ( +- 2,46% )
# METODO CRANK-NICOLSON
# ++++++++++++++++++++++++++++++++++
perf stat -e cycles,instructions,cache-references,cache-misses -r 5 ./heateq_comparison_02.o
 Performance counter stats for './heateg comparison 03.0' (5 runs):
  204.268.612.300 cycles

540.648.910.045 instructions

59.518.787 cache-references

17.188,257 cache
                                                                                                (+-0,92\%)
                                                                                               ( +- 0,00% )
                                                                                               ( +- 12,88% )
                                                       # 28,879 % of all cache refs
             78,652 +- 0,789 seconds time elapsed ( +- 1,00% )
```

Claramente, el método que más tiempo de CPU obtuvo fue el de Crank-Nicolson (C-N), seguido por el método implícito y el más rápido fue el método explícito. Sin embargo, el método de(C-N obtuvo un 33% menos de cache-misses que el método implícito y un 19% menos que el método explícito. La complejidad de los códigos es, en términos generales, la misma aunque el aumento significativo de tiempo de cómputo quizás se deba a que los métodos de C-N e implícito trabajan con matrices mientras que el método explícito no, es más, el aumento de tiempo de CPU del método de C-N respecto del método implícito quizás podría deberse al agregado de operaciones de tipo multiplicación de matrices y vectores, ya que, si bien en ambos métodos se trabaja con matrices bandeadas y con una subrutina que trata con estos sistemas de ecuaciones específicos, el método de C-N realiza más operaciones matemáticas con una segunda matriz bandeada.

Códigos

Repositorio GitHub

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022.git

Repositorio GitHub del problema

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/tree/main/lab02/prob01

Programas principales

 $\label{lem:https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_explicit_method.f90} $$ https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_implicit_method.f90} $$ https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_crank_nicolson_method.f90} $$ https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_comparison_01.f90} $$ https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_comparison_02.f90} $$ https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_comparison_03.f90} $$$

Módulos necesarios

 $\frac{https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/modules/module_precision.f90}{https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/modules/module_tridiag_matrix.f90}$

Bash script para correr los códigos

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/script run.sh

Referencias

Chapman, S. (2007). Fortran 95/2003 for Scientists & Engineers. McGraw-Hill Education. https://books.google.com/books/about/Fortran_95_2003_for_Scientists_Engineers.html?hl=&id=c8cLD_QEACAAJ

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). $M\acute{e}todos\ num\acute{e}ricos\ para\ ingenieros.$ https://books.google.com/books/about/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_ingenieros.html?hl=&id=hoH0MAAACAAJ

Landau, R. H., Mejía, M. J. P., Páez, M. J., Kowallik, H., & Jansen, H. (1997). Computational Physics. Wiley-VCH. https://books.google.com/books/about/Computational_Physics.html?hl=&id=MJ3vAAAMAAJ

Códigos explícitos

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_explicit_method.f90

```
program heateq_explicit_method
   use module_precision
   implicit none
   integer(sp), parameter :: n=98_sp
                                                                ! numero de elementos finitos
   real(dp), parameter :: u0_Li=0._dp,u0_Lf=0._dp
                                                                ! condiciones de borde
                            :: u0_ti=<mark>100.</mark>_dp
                                                                ! condicion inicial
                            :: param_t,param_x
   real(dp)
                             :: D
                             :: alpha
                             :: t_step_adim,x_step_adim
                                                                ! pasos temporales entre escrituras
   integer(sp), parameter
                            :: t_write=300_sp
   open(10,file='../results/result_01_explicit.dat',status='replace',action='write',iostat=istat)
   ! parametros para adimensionalizar
   D=237._dp*(1._dp/(900._dp*2700._dp))
                                            ! D = K/C*rho [L^2]/[t]
                                          ! longitud caracteristica (long total barra) [L]
   param_x=1._dp
   write(*,'(A20,E10.4)') 'param_x = ',param_x
   param_t=param_x*param_x*(1._dp/D)
                                                  ! tiempo caracteristico (paso temporal) [t]
   t_step_adim=0.3_dp*(1._dp/param_t)
   write(*,*) t_step_adim
   x_step_adim=1._dp/(real(n,dp)+1._dp)
   write(*,*) x_step_adim
   alpha=t_step_adim*(1._dp/(x_step_adim*x_step_adim))
    ! verificamos condición de estabilidad debe ser menor a 1/2
   write(*,'(A20,E10.4)') 'alpha = ',alpha
   ! inicializamos el vector espacial a tiempo inicial
   ux_old(1)=u0_Li
       ux_old(i)=u0_ti
       write(10,20) real(i-1,dp)*x_step_adim,ux_old(i)
   end do
   ux_old(n+2)=u0_Lf
    write(10,20) real(n+1,dp)*x_step_adim,ux_old(n+2)
   ux_new(n+2)=ux_old(n+2)
   ! hacemos la evolución temporal (sin considerar los extremos)
    ! asignamos valores al vector espacial a tiempo t
   do k=1,50 ! evolucionamos (50*t_write) pasos temporales
       do i=1_sp,(t_write-1_sp)
           do j=2_sp,(n+1_sp)
                ux_new(j) = (1._dp-2._dp*alpha)*ux_old(j)+alpha*(ux_old(j+1)+ux_old(j-1)) 
        ! escribimos valores luego de t_write pasos temporales
        write(10,20) 0._dp,ux_new(1)
       do j=2_sp,(n+1_sp)
```

```
ux_new(j)=(1._dp-2._dp*alpha)*ux_old(j)+alpha*(ux_old(j+1)+ux_old(j-1))
write(10,20) real(j-1,dp)*x_step_adim,ux_new(j)
end do
write(10,20) real(n+1,dp)*x_step_adim,ux_new(n+2)
end do
close(10)
close(10)
close(10)
end do
i vrite(*,'(A20,E10.4)') 'T(L/2,t_final) = ', ux_new(50)
estimamos tamaño de archivo
factor=10._dp ! este factor depende de (20 format (2(E10.2))), en este ejemplo factor es 10
write(*,'(A30,E10.4,A10)') 'Tamaño aprox. de archivo = ', 2._dp*real(n,dp)*51._dp*factor, '[bytes]'
deallocate(ux_old,ux_new)
end program heateq_explicit_method
```

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_implicit_method.f90

```
program heateq_implicit_method
      use module_precision
       use module_tridiag_matrix
       implicit none
                                                           ! numero de elementos finitos
       integer(sp), parameter :: n=98_sp
      real(dp), parameter :: u0_Li=0._dp, u0_Lf=0._dp ! condiciones de borde
       real(dp), parameter :: u0_ti=100._dp
                                                           ! condicion inicial
       integer(sp), parameter :: t_write=300_sp
                                                           ! pasos temporales entre escrituras
       real(dp), allocatable :: ux_old(:),ux_new(:),diag(:),diag_sup(:),diag_inf(:)
      real(dp)
                               :: param_t,param_x
      real(dp)
                                                           ! thermal diffusivity
      real(dp)
                               :: alpha
      real(dp)
                               :: t_step_adim,x_step_adim
                               :: i,j,k,istat
       20 format(E8.2,x,E8.2)
       open(10,file='../results/result_01_implicit.dat',status='replace',action='write',iostat=istat)
       write(*,*) 'istat(10file) = ',istat
       ! parametros para adimensionalizar
       D=237._dp*(1._dp/(900._dp*2700._dp))
                                                 ! D = K/C*rho [L^2]/[t]
       param x=1. dp
                                                 ! longitud caracteristica (long total barra) [L]
       param_t=param_x*param_x*(1._dp/D)
                                                ! tiempo caracteristico (paso temporal) [t]
       t_step_adim=0.3_dp*(1._dp/param_t)
       x step adim=1. dp/(real(n,dp)+1. dp)
       alpha=t_step_adim*(1._dp/(x_step_adim*x_step_adim))
       ! cargamos diagonales central, superior e inferior
       allocate(diag(n),diag_sup(n),diag_inf(n))
       diag sup(n)=0. dp
      diag_inf(1)=0._dp
       do i=1,n
          diag(i)=1._dp+2._dp*alpha
           if (i/=1) diag inf(i)=-alpha
           if (i/=n) diag_sup(i)=-alpha
      ! cargamos datos iniciales de temperatura
      ux old(1)=u0 Li
      write(10,20) 0._dp,ux_old(1)
       do i=2,n+1
          ux old(i)=u0 ti
           write(10,20) real(i-1,dp)*x_step_adim,ux_old(i)
       end do
       ux old(n+2)=u0 Lf
43
       write(10,20) real(n+1,dp)*x_step_adim,ux_old(n+2)
       ! aplicamos método implicito
          do j=1,(t_write-1)
               call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,ux_old(2:n+1),ux_new(2:n+1))
           call implicit_method(n,diag_diag_sup,diag_inf,ux_old(2:n+1),ux_new(2:n+1))
           do j=1,n+2
              write(10,20) real(j-1,dp)*x step adim,ux new(j)
```

```
end do
end do
close(10)
deallocate(diag,diag_sup,diag_inf,ux_old,ux_new)
end program heateq_implicit_method
```

 $\underline{\text{https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_crank_nicolson_method.f90}$

```
program heateq_crank_nicolson_method
   use module_precision
    use module_tridiag_matrix
    implicit none
                             :: param t,param x
                                                          ! thermal diffusivity
                             :: alpha
                             :: t_step_adim,x_step_adim
    real(dp)
    real(dp), allocatable :: ux_old(:),ux_new(:),diag(:),diag_sup(:),diag_inf(:)
real(dp), allocatable :: B_matrix(:,:),A_matrix(:,:)
    integer(sp), parameter :: n=98_sp
                                                           ! numero de elementos finitos
    real(dp), parameter :: u0_Li=0._dp, u0_Lf=0._dp ! condiciones de borde
                            :: u0_ti=<mark>100.</mark>_dp
                                                         ! condicion inicial
    real(dp),
                parameter
                                                          ! pasos temporales entre escrituras
    integer(sp), parameter
                             :: t_write=300_sp
    open(10,file='../results/result_01_cranknicolson.dat',status='replace',action='write',iostat=istat)
    ! ANALISIS DIMENSIONAL
    D=237._dp*(1._dp/(900._dp*2700._dp))
                                             ! D = K/C*rho [L^2]/[t]
    param_x=1._dp
                                             ! longitud caracteristica (long total barra) [L]
   param_t=param_x*param_x*(1._dp/D)
                                             ! tiempo caracteristico (paso temporal) [t]
    t_step_adim=0.3_dp*(1._dp/param_t)
    x_{step\_adim=1}._dp/(real(n,dp)+1._dp)
    write(*,*) 'x_step_adim = ',x_step_adim
    alpha=t_step_adim*(1._dp/(x_step_adim*x_step_adim))
    ! CARGAMOS DIAGONALES CENTRAL, SUPERIOR E INFERIOR
    allocate(diag(n),diag_sup(n),diag_inf(n))
    diag_sup(n)=0._dp
    diag_inf(1)=0._dp
        diag(i)=2._dp*(1._dp/alpha+1._dp)
        if (i/=1) diag_inf(i)=-1._dp
        if (i/=n) diag_sup(i)=-1._dp
    end do
    ! CARGAMOS MATRIZ CUADRADA PARA USAR MÉTODO IMPLÍCITO
    allocate(B_matrix(n,n))
    B_matrix=0._dp ! elementos nulos fuera de la tribanda
        B_matrix(i,i)=2._dp*(1._dp/alpha-1._dp) ! diagonal principal
                                                 ! diagonal inferior
        if (i/=1) B_matrix(i,i-1)=1._dp
        if (i/=n) B_matrix(i,i+1)=1._dp
                                                 ! diagonal superior
    ! CARGAMOS DATOS INICIALES DE TEMPERATURA
    allocate(A matrix(n,1)) ! matriz auxiliar p/matmul (column vector rank=2)
    ux old(1)=u0 Li
       A_matrix(i-1,1)=u0_ti
        write(10,20) real(i-1,dp)*x_step_adim, A_matrix(i-1,1)
   end do
   ux_old(n+2)=u0_Lf
    write(10,20) real(n+1,dp)*x_step_adim, ux_old(n+2)
    ! CARGAMOS DATOS INICIALES PARA APLCIAR MÉTODO IMPLÍCITO
    A_matrix=matmul(B_matrix,A_matrix)
    ux old(2:n+1)=A matrix(1:n,1)
    ! APLICAMOS MÉTODO IMPLÍCITO
   do i=1,50
        do j=1,(t_write-1)
            call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,data_vector=ux_old(2:n+1),unknown_vector=ux_new(2:n+1))
            A_matrix=matmul(B_matrix,A_matrix)
```

```
call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,ux_old(2:n+1),ux_new(2:n+1))
do j=1,n+2

write(10,20) real(j-1,dp)*x_step_adim, ux_new(j)

end do

end do

close(10)

close(10)

controlAMOS TEMALIZACIÓN EN EL CENTRO DE LA BARRA

write(*,'(A20,E10.4)') 'T(L/2,t_final) = ', ux_new(50)

deallocate(diag,diag_sup,diag_inf,ux_old,ux_new)

deallocate(B_matrix,A_matrix)

end program heateq_crank_nicolson_method
```

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_comparison_01.f90

```
! Comparación entre el método explícito y la solución exacta
program heateq_comparison_01
   use module_precision
    implicit none
   :: param_t,param_x
                                                                                    ! thermal diffusivity(D=(K/C*rho)[L^2]/[t])
                            :: t_step_adim,x_step_adim ! variables adimensionales (espacial y temporal)
   integer(dp)
                            :: t_write_1_noadm=<mark>180</mark>._dp,t_write_2_noadm=<mark>1800</mark>._dp ! tiempos en dimensiones para escrituras
    ! parametros para adimensionalizar
   param x=1. dp
                                           ! longitud caracteristica (long total barra en metros) [L]
                                           ! tiempo caracteristico [t]
    x_step_adim=1._dp/(real(n,dp)+1._dp)
    \verb|t_step_adim=alpha*x_step_adim*x_step_adim|\\
    ! inicializamos el vector espacial a tiempo inicial
    ux old(1)=u0 Li
    ux_old(2:n+1)=u0_ti
    ux_old(n+2)=u0_Lf
    ! ADIMENSIONALIZAMOS LOS TIEMPOS DE ESCRITURA
    t_write_2=int(t_write_2_noadm*(1._dp/(param_t*t_step_adim)),dp)
    write(*,*) t_write_2
    ! HACEMOS LA EVOLUCIÓN TEMPORAL (SIN CONSIDERAR LOS EXTREMOS)
    ux new(1)=u0 Li;ux new(n+2)=u0 Lf
            ux_new(j) = (1._dp-2._dp*alpha)*ux_old(j)+alpha*(ux_old(j+1)+ux_old(j-1)) 
        end do
    end do
    ! ESCRIBIMOS VALORES LUEGO DE t_write_1 PASOS TEMPORALES
    !open(10,file='../results/result_02_aprox_explicit.dat',status='replace',action='write',iostat=istat)
    !call exact_solution(0._dp,t_write_1_noadm*(1._dp/param_t),u0_Li,T_exact)
    !write(10,20) 0._dp,ux_new(1)
    !write(11,20) 0._dp,T_exact
    do j=2,(n+1)
        ux_new(j) = (1._dp-2._dp*alpha)*ux_old(j)+alpha*(ux_old(j+1)+ux_old(j-1)) 
        ! call \ \ \underline{exact\_solution(real(j-1,dp)*x\_step\_adim,t\_write\_1\_noadm*(1.\_dp/param\_t),u0\_ti,T\_exact)}
        call \ \ exact\_solution(real(j-1,dp)*x\_step\_adim,t\_write\_1\_noadm,D,u0\_ti,T\_exact)
        !write(10,20) \ real(j-1,dp)*x\_step\_adim,ux\_new(j)
        !write(11,20) real(j-1,dp)*x_step_adim,T_exact
    end do
    ! call \ \ \underline{exact\_solution(real(n+1,dp)*x\_step\_adim,t\_write\_1\_noadm*(1.\_dp/param\_t),u0\_Lf,T\_exact)}
    call \ \ exact\_solution(real(n+1,dp)*x\_step\_adim,t\_write\_1\_noadm,D,u0\_Lf,T\_exact)
    !write(10,20) real(n+1,dp)*x_step_adim,ux_new(n+2)
    !write(11,20) real(n+1,dp)*x_step_adim,T_exact
   do i=t_write_1,(t_write_2-1)
             ux_new(j) = (1.\_dp-2.\_dp*alpha)*ux_old(j)+alpha*(ux_old(j+1)+ux_old(j-1)) 
       end do
    end do
    ! ESCRIBIMOS VALORES LUEGO DE t_write_2 PASOS TEMPORALES
    !call exact_solution(0._dp,t_write_2_noadm*(1._dp/param_t),u0_Li,T_exact)
    !write(10,20) 0. dp,ux new(1)
```

```
!write(11,20) 0._dp,T_exact
           ux_new(j)=(1._dp-2._dp*alpha)*ux_old(j)+alpha*(ux_old(j+1)+ux_old(j-1))
           call \ \ exact\_solution(real(j-1,dp)*x\_step\_adim,t\_write\_2\_noadm,D,u0\_ti,T\_exact)
           !write(10,20) real(j-1,dp)*x_step_adim,ux_new(j)
           !write(11,20) real(j-1,dp)*x_step_adim,T_exact
       !write(10,20) real(n+1,dp)*x_step_adim,ux_new(n+2)
       !write(11,20) real(n+1,dp)*x_step_adim,T_exact
       deallocate(ux_old,ux_new)
88 end program heateq_comparison_01
   subroutine exact_solution(x,t,D,Temp0,Temp)
      use module precision
       implicit none
       real(dp), intent(out) :: Temp
       ! variables locales
       integer(dp)
       Temp=0. dp
       do n=1, n_max, 2 ! recorro numeros impares
          kn=real(n,dp)*pi
           \label{temp} Temp + (1._dp/real(n,dp))*sin(kn*x)*exp(-(kn*kn*t*D))
       end do
       Temp=4._dp*Temp0*(1._dp/pi)*Temp
106 end subroutine exact_solution
```

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_comparison_02.f90

```
! Comparación entre el método implícito y la solución exacta
{\tt program\ heateq\_comparison\_02}
   use module_precision
   use module_tridiag_matrix
   implicit none
                                                     ! vectores de temperatura (paso anterior y paso posterior)
   :: u0_ti=100._dp
                                                     ! condicion inicial
                                                     ! tiempo caracteristico (paso temporal) [t]
                          :: param t
                                                     ! longitud caracteristica (long total barra) [L]
                                                     ! thermal diffusivity (D=K/C*rho [L^2]/[t])
                          :: t_step_adim, x_step_adim ! deltatiempo y deltaespacio (adimensionales)
                          :: t_write_1_noadm=<mark>180</mark>._dp,t_write_2_noadm=<mark>1800</mark>._dp ! tiempos en dimensiones para escrituras
                           :: t_write_1,t_write_2
   ! ANÁLISIS DIMENSIONAL
   param_t = param_x*param_x*(1._dp/D)
   t_step_adim=alpha*x_step_adim*x_step_adim
   ! CARGAMOS DIAGONALES CENTRAL, SUPERIOR E INFERIOR
   do i=1,n
       if (i/=1) diag_inf(i) = -alpha
       if (i/=n) diag_sup(i) = -alpha
   end do
   ! CARGAMOS DATOS INICIALES DE TEMPERATURA
   ux_old(1)=u0_Li
   ux_old(2:n+1)=u0_ti
   ux_old(n+2)=u0_Lf
   ! ADIMENSIONALIZAMOS LOS TIEMPOS DE ESCRITURA
   t_write_2=int(t_write_2_noadm*(1._dp/(param_t*t_step_adim)),dp)
   ! APLICAMOS MÉTODO IMPLÍCITO
   do j=1, (t write 1-1)
```

```
call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,ux_old(2:n+1),ux_new(2:n+1))

do k=2,(n+1); ux_old(k)=ux_new(k); end do

end do

! escribinos VALORES LUEGO DE t_write_1 PASOS TEMPORALES

call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,ux_old(2:n+1),ux_new(2:n+1))

!do j=1,n+2; write(10,20) real(j-1,dp)*x_step_adim, ux_new(j); end do

do j=t_write_1,(t_write_2-1)

call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,ux_old(2:n+1),ux_new(2:n+1))

do k=2,(n+1); ux_old(k)=ux_new(k); end do

end do

! ESCRIBIMOS VALORES LUEGO DE t_write_2 PASOS TEMPORALES

call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,ux_old(2:n+1),ux_new(2:n+1))

!do j=1,n+2; write(10,20) real(j-1,dp)*x_step_adim, ux_new(j); end do

!close(10)

deallocate(diag,diag_sup,diag_inf,ux_old,ux_new)

deallocate(diag,diag_sup,diag_inf,ux_old,ux_new)

deallocate(comparison_02)
```

 $\underline{\text{https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/lab02/prob01/code/heateq_comparison_03.f90}$

```
program heateq comparison 03
   use module_precision
   use module_tridiag_matrix
    implicit none
                                                      ! vectores de temperatura (paso anterior y paso posterior)
   ! tiempo caracteristico (paso temporal) [t]
                            :: param_x
                                                        ! longitud caracteristica (long total barra) [L]
                                                       ! thermal diffusivity (D=K/C*rho [L^2]/[t])
    real(dp)
                           :: t_step_adim, x_step_adim ! deltatiempo y deltaespacio (adimensionales)
                           :: \ t\_write\_1\_noadm=180.\_dp, t\_write\_2\_noadm=1800.\_dp \ ! \ tiempos \ en \ dimensiones \ para \ escrituras
                           :: t_write_1,t_write_2
    ! 20 format (E8.2,x,E8.2)
   ! ANÁLISIS DIMENSIONAL
   param_t = param_x*param_x*(1._dp/D)
    x_step_adim=1._dp/(real(n,dp)+1._dp)
    t_step_adim=alpha*x_step_adim*x_step_adim
   ! ADIMENSIONALIZAMOS LOS TIEMPOS DE ESCRITURA
    t_write_2=int(t_write_2_noadm*(1._dp/(param_t*t_step_adim)),dp)
    ! CARGAMOS DIAGONALES CENTRAL, SUPERIOR E INFERIOR
    do i=1,n
    ! CARGAMOS MATRIZ CUADRADA PARA USAR MÉTODO IMPLÍCITO
    B_matrix=0._dp ! elementos nulos fuera de la tribanda
       B_{\text{matrix}}(i,i)=2._dp^*(1._dp/alpha-1._dp) ! diagonal principal
       if (i/=1) B_matrix(i,i-1)=1._dp
if (i/=n) B_matrix(i,i+1)=1._dp
                                               ! diagonal inferior
    end do
    ! CARGAMOS DATOS INICIALES DE TEMPERATURA
    allocate(A_matrix(n,1)) ! matriz auxiliar p/matmul (column vector rank=2)
    ux_old(1)=u0_Li
    ux old(n+2)=u0 Lf
    !CARGAMOS DATOS INICIALES PARA APLCIAR MÉTODO IMPLÍCITO
    A_matrix=matmul(B_matrix,A_matrix)
    ux old(2:n+1)=A matrix(1:n,1)
    ! APLICAMOS MÉTODO IMPLÍCITO
    ux new(n+2)=ux old(n+2)
    do i=1, (t write 1-1)
       call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,data_vector=ux_old(2:n+1),unknown_vector=ux_new(2:n+1))
        A matrix=matmul(B matrix, A matrix)
    ! ESCRIBIMOS VALORES LUEGO DE t_write_1 PASOS TEMPORALES
    call implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,ux_old(2:n+1),ux_new(2:n+1))
```

Módulos

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/modules/module_precision.f90

https://github.com/mendzmartin/fiscomp2022/blob/main/modules/module_tridiag_matrix.f90

```
module module_tridiag_matrix
       use module_precision
       implicit none
       subroutine implicit_method(n,diag,diag_sup,diag_inf,data_vector,unknown_vector)
           ! variables de entrada/salida
           integer(sp), intent(in) :: n
real(dp), intent(out) :: u
                                                                            ! dimension del vector diagonal
                                                                            ! vector de incognitas
                        intent(in) :: diag(n),diag_sup(n),diag_inf(n) ! diagonales central, superior e inferior
intent(in) :: data vector(n)
                                                                            ! vector de datos conocidos
           ! variables locales
           integer(sp) :: i
                                                ! variable del loop
                                                ! diagonal superior redefinida
                     :: data_vector_new(n) ! vector de datos redefinidos
           ! descomposición LU
           factor=1._dp/diag(1)
           diag_sup_new(1)=diag_sup(1)*factor
               factor=1._dp/(diag(i)-diag_inf(i)*diag_sup_new(i-1))
                diag_sup_new(i)=diag_sup(i)*factor
               data_vector_new(i)=(data_vector(i)-diag_inf(i)*data_vector_new(i-1))*factor
         end do
           ! sustitución hacia atrás
               unknown_vector(i)=data_vector_new(i)-diag_sup_new(i)*unknown_vector(i+1)
           end do
      end subroutine implicit_method
31 end module module_tridiag_matrix
32 ! Los vectores de entrada deben definirse de la siguiente manera
33 ! diag_{sup} = [ds(1) ds(2) ... ds(n-1) ds(n)=0]
34 ! diag_inf = [ di(1)=0 di(2) ... di(n-1) di(n) ]
35 ! diag
```