Problema 6

Estados coherentes. Los autoestados del oeprador $\hat{a}$ se definen por la relación:

$$\hat{a}|\psi_\alpha\rangle = \alpha|\psi_\alpha\rangle; \text{ donde } \alpha \text{ es un número complejo}$$

a) Encuentre una expresión para los autoestados del oeprador $\hat{a}$ como combinación lineal de los autoestados ψ_n del oscilador armónico de masa m y frecuencia ω. Muestre que el operador $\hat{a}^\dagger$ no tiene autoestados.

b) Muestre que estos autoestados pueden escribirse como

$$\varphi_a = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger\right)\psi_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 - \alpha^2\right)\right)\exp\left(-i\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\alpha\hat{p}\right)\psi_0$$

c) Use los resultados del problema anterior para mostrar que estos estados son estados coherentes (de incerteza mínima) para los operadores posición y momento. Calcule la evolución temporal según el Hamiltoniano del oscilador armónico para un estado coherente y para la relación de incerteza correspondiente. Compare con la evolución de un paquete de incerteza mínima para una partícula libre.

d) Muestre que la expresión de los estados coherentes en la representación coordenada está dada por la función de onda

$$\psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}e^{i\phi(t)} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}[x-q(t)]^2 + i\frac{p(t)x}{\hbar}\right\}$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ son, respectivamente, el momento y la posición de un oscilador armónico clásico de masa m y frecuencia angular ω. Calcule el valor de ϕ sabiendo que $\psi(x,t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico asociado.

e) Calcule el valor esperado de la energía del oscilador armónico y su dispersión para un estado coherente.

Solución

Inciso a)

Estudiamos las autofunciones $\psi_\alpha(x)$ del operador aniquilación $\hat{a}$, entonces estos deberán cumplir que,

$$\hat{a}|\psi_\alpha\rangle = \alpha|\psi_\alpha\rangle \Rightarrow \langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\psi_\alpha|\alpha^* \quad (1)$$

Sea $\{\phi_n(x)\}$ la base de autoestados del oscilador armónico, la cual es ortogonal y completa, podremos utilizarla para escribir la representación de los autoestados del operador aniquilación en esta base, esto es

$$\boxed{|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)|\phi_n\rangle} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \hat{a}|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\hat{a}|\phi_n\rangle \quad (3)$$

Sabemos que se cumple,

$$\boxed{\hat{a}|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle \Rightarrow \langle\phi_n|\hat{a}^\dagger = \sqrt{n}\langle\phi_{n-1}|} \quad (4)$$

De (4) y (3) tenemos,

$$\hat{a}|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle \quad (5)$$

De (1), (2) y (5) tenemos,

$$\hat{a}\left|\psi_\alpha\right\rangle = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\left|\phi_n\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\sqrt{n}\left|\phi_{n-1}\right\rangle \tag{6}$$

Haciendo un cambio de variables en la sumatoria del lado derecho $n = k + 1$ y teniendo en cuenta que para $n = 0$ $(k = -1)$ esta sumatoria no aporta en nada, comenzamos la serie con $k = 0$,

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\left|\phi_n\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(\alpha)\sqrt{k+1}\left|\phi_k\right\rangle \tag{7}$$

$$\Rightarrow \alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\left|\phi_n\right\rangle - \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(\alpha)\sqrt{k+1}\left|\phi_k\right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha c_n(\alpha) - c_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1}\right]\left|\phi_n\right\rangle = 0 \tag{8}$$

De (8) debe cumplirse que,

$$\alpha c_n(\alpha) - c_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1} = 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow c_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}c_n(\alpha);\ \left\{n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}\right\} \tag{10}$$

Veamos cuales son los parámetros libres de la relación de recurrencia (10),

$$\text{si } n = 0 \Rightarrow c_1(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1}}c_0(\alpha)$$

$$\text{si } n = 1 \Rightarrow c_2(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}c_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1\cdot 2}}c_0(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}c_0(\alpha)$$

$$\text{si } n = 2 \Rightarrow c_3(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}c_2(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3}}c_0(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}c_0(\alpha)$$

$$(\ldots)$$

Rápidamente, notamos que el único parámetro libre es el coeficiente inicial c_0, fijado este, se conocen todos los coeficientes posteriores, entonces tenemos,

$$\boxed{c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0(\alpha);\ \left\{n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}\right\}} \tag{11}$$

De (11) en (2) tenemos,

$$\boxed{\left|\psi_\alpha\right\rangle = c_0(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|\phi_n\right\rangle} \tag{12}$$

Proponiendo soluciones de módulo cuadrado integrable y de la condición de normalización de los vectores de estado $\left|\psi_\alpha\right\rangle$ obtenemos,

$$\text{por un lado se debe cumplir que } \boxed{\left\langle\psi_\alpha\middle|\psi_\alpha\right\rangle = 1} \tag{13}$$

$$\text{por otro lado de (12)} \Rightarrow \left\langle\psi_\alpha\middle|\psi_\alpha\right\rangle = \left\langle c_0^*(\alpha)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\phi_n \middle| c_0(\alpha)\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\phi_m\right\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = \left[c_0^*(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\phi_n^*(x)\right]\left[c_0(\alpha)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\phi_m(x)\right]\langle\phi_n|\phi_m\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = |c_0(\alpha)|^2\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^n\alpha^m}{\sqrt{n!m!}}\delta_{n,m} = |c_0(\alpha)|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

$$\text{como } e^{|\alpha|^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \text{ (desarrollo en serie de Taylor)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2}} \tag{14}$$

Luego, de (13) y (14) tenemos,

$$|c_0(\alpha)|^2 = e^{-|\alpha|^2} \Rightarrow \boxed{c_0(\alpha) = e^{\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)}} \tag{15}$$

Notar que se eligió a $c_0(\alpha) \in \mathbb{R}$, pues si $c_0(\alpha)$ fuese complejo sólo nos agregaría una fase global, lo cual sabemos que representa el mismo estado físico.
De (12) y (15),

$$\boxed{|\psi_\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\phi_n\rangle} \tag{16}$$

Ahora estudiemos los autoestados $|\psi_\beta\rangle$ del operador creación $\hat{a}^\dagger$, entonces estos deberán cumplir que,

$$\hat{a}^\dagger|\psi_\beta\rangle = \beta|\psi_\beta\rangle;\ con\ \beta \in \mathbb{C} \tag{17}$$

Lo que queremos probar es que no existe un vector de estado $|\psi_\beta\rangle$ que cumpla con (17). Para ello suponemos que si existe tal función por lo que se deberá poder escribir como combinación lineal de los autoestados del oscilador armónico esto es,

$$|\psi_\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\beta)|\phi_n\rangle \tag{18}$$

Teniendo en cuenta que

$$\boxed{\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle;\ \langle\phi_n|\hat{a} = \sqrt{n+1}\langle\phi_{n+1}|} \tag{19}$$

De (18) y (19) tenemos,

$$\hat{a}^\dagger|\psi_\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\beta)\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\beta)\sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle \tag{20}$$

Haciendo un cambio de indices tenemos,

$$\text{sea } k = n+1 \Rightarrow \boxed{\hat{a}^\dagger|\psi_\beta\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} d_{k-1}(\beta)\sqrt{k}|\phi_k\rangle} \tag{21}$$

Además, tenemos de (17) y (18),

$$\boxed{\hat{a}^\dagger|\psi_\beta\rangle = \beta|\psi_\beta\rangle = \beta\sum_{n=0}^{\infty} d_n(\beta)|\phi_n\rangle} \tag{22}$$

De (21) y (22) tenemos,

$$\beta\sum_{n=0}^{\infty} d_n(\beta)|\phi_n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} d_{k-1}(\beta)\sqrt{k}|\phi_k\rangle$$

$$\Rightarrow \beta\sum_{n=0}^{\infty} d_n(\beta)|\phi_n\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} d_{k-1}(\beta)\sqrt{k}|\phi_k\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \beta d_0(\beta)|\phi_0\rangle - \beta\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\beta)|\phi_n\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} d_{k-1}(\beta)\sqrt{k}|\phi_k\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \beta d_0(\beta)|\phi_0\rangle - \sum_{k=1}^{\infty}\left[d_{k-1}(\beta)\sqrt{k} - \beta d_k(\beta)\right]|\phi_n\rangle = 0 \tag{23}$$

Igualando coeficientes en (23), ya que los $|\phi_n\rangle$ son L.I., debe cumplirse que,

$$\text{si } \beta \neq 0 \Rightarrow d_0(\beta) = 0 \tag{24}$$

$$d_{k-1}(\beta)\sqrt{k} - \beta d_k(\beta) = 0 \Rightarrow d_k(\beta) = \frac{\sqrt{k}d_{k-1}(\beta)}{\beta}; \{k = 1, 2, \ldots\} \tag{25}$$

$$\text{si } k = 1 \Rightarrow d_1(\beta) = \frac{d_0(\beta)}{\beta};\ \text{de (21)} \Rightarrow d_1(\beta) = 0 \tag{26}$$

$$\text{si } k = 2 \Rightarrow d_2(\beta) = \frac{d_1(\beta)}{\beta}\ \text{de (23)} \Rightarrow d_2(\beta) = 0 \tag{27}$$

$$(\ldots)$$

$$\therefore d_n = 0 \forall n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0};\ \text{de (18)}\ \boxed{|\psi_\beta\rangle = 0}\ (\text{¡ABSURDO!}) \tag{28}$$

El resultado obtenido en (28) nos dice que el operador creación $\hat{a}^\dagger$ no tiene autoestados que sean de módulo cuadrado integrable, por lo tanto, fisicamente no existen tales autoestados.

Inciso b)

De (19) tenemos, $\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle; n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, entonces,

$$\text{si } n = 0 \Rightarrow \hat{a}^\dagger|\phi_0\rangle = \sqrt{1}|\phi_1\rangle \Rightarrow |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1}}\hat{a}^\dagger|\phi_0\rangle$$

$$\text{si } n = 1 \Rightarrow \hat{a}^\dagger|\phi_1\rangle = \sqrt{2}|\phi_2\rangle \Rightarrow |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|\phi_0\rangle$$

$$\text{si } n = 2 \Rightarrow \hat{a}^\dagger|\phi_2\rangle = \sqrt{3}|\phi_3\rangle \Rightarrow |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}^\dagger|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^3|\phi_0\rangle$$

$$(\ldots)$$

De forma general entonces, todos los autoestados de $\hat{n}$ y $\hat{H}$ se pueden construir con base en el autoestado fundamental $|\phi_0\rangle$ por aplicación sucesiva del operador creación $\hat{a}^\dagger$, entonces, tenemos de (4),

$$\boxed{|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|\phi_0\rangle};\ n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0} \tag{29}$$

Donde el factor $\dfrac{1}{\sqrt{n!}}$ garantiza la normalización de cada nuevo estado creado, bajo la convención de que los coeficientes de normalización tengan fase cero, es decir, que sean reales y positivos. Entonces, de (29) y (16) tenemos,

$$|\psi_\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\alpha\hat{a}^\dagger\right)^n|\phi_0\rangle \Rightarrow \boxed{|\psi_\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger\right)|\phi_0\rangle} \quad (30)$$

Por otro lado, tenemos de (4) para $n = 0$, que la acción del operador aniquilación $\hat{a}$ sobre el estado fundamental $|\phi_0\rangle$ devuelve un vector nulo, por lo que podremos re escribir el vector nulo en (29) de la forma,

$$|\phi_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}(\hat{a})^n|\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle - \alpha(\hat{a})^1|\phi_0\rangle + \frac{\alpha^2}{2!}(\hat{a})^2|\phi_0\rangle + \ldots + \frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}(\hat{a})^n|\phi_0\rangle$$

$$\Rightarrow |\phi_0\rangle = \exp(-\alpha\hat{a})|\phi_0\rangle \quad (31)$$

$$\text{y, de forma más general se cumple que } |\phi_0\rangle = \exp(\pm\alpha\hat{a})|\phi_0\rangle$$

De (30) y (29) tenemos,

$$|\psi_\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger\right)\exp(-\alpha\hat{a})|\phi_0\rangle = \exp\left[\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) + \alpha\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\right]|\phi_0\rangle$$

$$|\psi_\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left[\alpha\hat{a}^\dagger + (-\alpha\hat{a})\right]|\phi_0\rangle \quad (32)$$

Recordando la propiedad,

$$\boxed{si\ [\hat{A},\hat{B}] = c\hat{\mathbb{1}} \Rightarrow e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}+\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{2}\right)} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]}} \quad (33)$$

Entonces, definiendo,

$$\hat{A} = \alpha\hat{a}^\dagger;\ \hat{B} = -\alpha\hat{a} \quad (34)$$

$$\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}] = \alpha\hat{a}^\dagger(-\alpha\hat{a}) - (-\alpha\hat{a})\alpha\hat{a}^\dagger = \alpha^2\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) = \alpha^2\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right] = \alpha^2\hat{\mathbb{1}} \quad (35)$$

Entonces, de (34), (33) en (31) tenemos,

$$|\psi_\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left[\alpha\hat{a}^\dagger + (-\alpha\hat{a}) + \frac{\alpha^2\hat{\mathbb{1}}}{2}\right]|\phi_0\rangle \quad (36)$$

$$\Rightarrow |\psi_\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 - \alpha^2\right)\right]\exp\left[\alpha\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\right]|\phi_0\rangle \quad (37)$$

Recordando ahora que,

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right) \Rightarrow \alpha\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right) = -i\sqrt{\frac{2}{\hbar\mu\omega}}\alpha\hat{p} \quad (38)$$

Luego, de (37) en (36) y de (29) tenemos,

$$\boxed{|\psi_\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger\right)|\phi_0\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 - \alpha^2\right)\right]\exp\left[-i\sqrt{\frac{2}{\hbar\mu\omega}}\alpha\hat{p}\right]|\phi_0\rangle} \quad (39)$$

Inciso c)

Veamos si los estados $|\psi_\alpha\rangle$ son estados coherentes (de incerteza mínima), entonces calculamos los valores de espectación de la posición y el momento, entonces

$$\langle\hat{x}\rangle_\alpha = \langle\psi_\alpha|\hat{x}|\psi_\alpha\rangle = \langle\psi_\alpha|\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right]|\psi_\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left[\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}|\psi_\alpha\rangle\right) + \left(\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger\right)|\psi_\alpha\rangle\right]$$

$$\text{de (1)} \Rightarrow \langle\hat{x}\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(\alpha\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle + \alpha^*\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(\alpha+\alpha^*\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}2\Re e\{\alpha\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\hat{x}\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\Re e\{\alpha\}} \tag{40}$$

$$\langle\hat{p}\rangle_\alpha = \langle\psi_\alpha|\hat{p}|\psi_\alpha\rangle = \langle\psi_\alpha|\left[-i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)\right]|\psi_\alpha\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\hat{p}\rangle_\alpha = -i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}\left[\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}|\psi_\alpha\rangle\right) - \left(\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger\right)|\psi_\alpha\rangle\right]$$

$$\text{de (1)} \Rightarrow \langle\hat{p}\rangle_\alpha = -i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}\left(\alpha\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle + \alpha^*\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \langle\hat{p}\rangle_\alpha = -i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}\left(\alpha-\alpha^*\right) = -i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}2i\Im m\{\alpha\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\hat{p}\rangle_\alpha = \sqrt{2\hbar\mu\omega}\Im m\{\alpha\}} \tag{41}$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle_\alpha = \langle\psi_\alpha|\hat{x}^2|\psi_\alpha\rangle = \langle\psi_\alpha|\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right]^2|\psi_\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}^2\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle\psi_\alpha|\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}^2\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle\psi_\alpha|\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}-\hat{a}^\dagger\hat{a}+\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}^2\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle\psi_\alpha|\hat{a}^2+\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}^2\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}^2|\psi_\alpha\rangle\right) + \langle\psi_\alpha|\hat{\mathbb{1}}|\psi_\alpha\rangle + 2\left(\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}|\psi_\alpha\rangle\right) + \left(\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\right)|\psi_\alpha\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}^2\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[\alpha^2+1+2\alpha^*\alpha+\left(\alpha^*\right)^2\right] = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[\alpha^2+2|\alpha|^2+\left(\alpha^*\right)^2+1\right]$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}^2\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[\left(\alpha+\alpha^*\right)^2+1\right] = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[(2\Re e\{\alpha\})^2+1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\hat{x}^2\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[4(\Re e\{\alpha\})^2+1\right]} \tag{42}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle_\alpha = \langle\psi_\alpha|\hat{p}^2|\psi_\alpha\rangle = \langle\psi_\alpha|\left[-i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)\right]^2|\psi_\alpha\rangle = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_\alpha = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\langle \psi_\alpha|\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_\alpha = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\langle \psi_\alpha|\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_\alpha = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\langle \psi_\alpha|\hat{a}^2 - \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] - 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_\alpha = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}^2|\psi_\alpha\rangle\right) - \langle\psi_\alpha|\hat{\mathbb{1}}|\psi_\alpha\rangle - 2\left(\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}|\psi_\alpha\rangle\right) + \left(\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\right)|\psi_\alpha\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_\alpha = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[\alpha^2 - 1 - 2\alpha^*\alpha + \left(\alpha^*\right)^2\right] = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[\alpha^2 - 2|\alpha|^2 + \left(\alpha^*\right)^2 - 1\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_\alpha = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[\left(\alpha - \alpha^*\right)^2 - 1\right] = -\frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[(2i\Im m\{\alpha\})^2 - 1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_\alpha = \frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[4(\Im m\{\alpha\})^2 + 1\right]} \tag{43}$$

Luego, de (39), (40), (41) y (42) tenemos las siguientes dispersiones cuadráticas asociadas,

$$(\Delta\hat{x}_\alpha)^2 = \left\langle \hat{x}^2 \right\rangle_\alpha - (\langle\hat{x}\rangle_\alpha)^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[4(\Re e\{\alpha\})^2 + 1\right] - \frac{2\hbar}{\mu\omega}(\Re e\{\alpha\})^2$$

$$\Rightarrow (\Delta\hat{x}_\alpha)^2 = \frac{\hbar}{\mu\omega}\left[2(\Re e\{\alpha\})^2 + \frac{1}{2} - 2(\Re e\{\alpha\})^2\right] \Rightarrow \boxed{\Delta\hat{x}_\alpha = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}} \tag{44}$$

$$(\Delta\hat{p}_\alpha)^2 = \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_\alpha - (\langle\hat{p}\rangle_\alpha)^2 = \frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[4(\Im m\{\alpha\})^2 + 1\right] - 2\hbar\mu\omega(\Im m\{\alpha\})^2$$

$$\Rightarrow (\Delta\hat{p}_\alpha)^2 = \hbar\mu\omega\left[2(\Im m\{\alpha\})^2 + \frac{1}{2} - 2(\Im m\{\alpha\})^2\right] \Rightarrow \boxed{\Delta\hat{p}_\alpha = \pm\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}} \tag{45}$$

Entonces,

$$\Delta\hat{x}_\alpha\Delta\hat{p}_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}} \Rightarrow \boxed{\Delta\hat{x}_\alpha\Delta\hat{p}_\alpha = \frac{\hbar}{2}} \tag{46}$$

Notemos que los valores dispersion $\Delta\hat{x}_\alpha$ y $\Delta\hat{p}_\alpha$ no dependen del autovalor α, del operador aniquilación, y la relación de incertidumbre toma su valor mínimo.

Ahora bien, nos piden calcular la evolución temporal según el Hamiltoniano de un oscilador armónico para un estado coherente, entonces de (16)

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi_\alpha(0)\rangle = \exp\left(\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\phi_n\rangle \tag{47}$$

Recordando que,

$$\hat{H} = \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{48}$$

Además se cumplira que los $|\phi_n\rangle$ son autofunciones tanto del hamiltoniano, como del operador número. Por lo que estos dos operadores son diagonales en esta base de autofunciones.
Entonces, de (48) en (47),

$$\left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp\left[\frac{-i\left(\hat{n}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega t}{\hbar}\right]\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|\phi_n\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp\left[\frac{-\left(|\alpha|^2+i\omega t\right)}{2}\right]\exp(-i\omega t\hat{n})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|\phi_n\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp\left[\frac{-\left(|\alpha|^2+i\omega t\right)}{2}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp(-i\omega t\hat{n})\left|\phi_n\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp\left[\frac{-\left(|\alpha|^2+i\omega t\right)}{2}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp(-i\omega t n)\left|\phi_n\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp\left[\frac{-\left(|\alpha|^2+i\omega t\right)}{2}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\alpha\exp(-i\omega t)]^n}{\sqrt{n!}}\left[\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n\left|\phi_0\right\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp\left[\frac{-\left(|\alpha|^2+i\omega t\right)}{2}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\alpha\exp(-i\omega t)\hat{a}^\dagger\right]^n}{n!}\left|\phi_0\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp\left[\frac{-\left(|\alpha|^2+i\omega t\right)}{2}\right]\exp\left[\alpha\exp(-i\omega t)\hat{a}^\dagger\right]\left|\phi_0\right\rangle \tag{49}$$

Entonces, definiendo

$$\boxed{\alpha(t) \coloneqq \alpha\exp(-i\omega t)} \tag{50}$$

$$\text{notemos que} \Rightarrow \boxed{|\alpha(t)|^2 = |\alpha|^2} \tag{51}$$

$$\boxed{\left|\phi_{\alpha(t)}(0)\right\rangle \coloneqq \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left[\alpha(t)\hat{a}^\dagger\right]\left|\phi_0\right\rangle} \tag{52}$$

Notemos que $\left|\psi_{\alpha(t)}\right\rangle$ en (49) es análoga a $\left|\psi_\alpha\right\rangle$ en (39), simplemente, reemplazando α por $\alpha(t)$. Luego, de (50), (52) en (49) tenemos,

$$\boxed{\left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)\left|\phi_{\alpha(t)}(0)\right\rangle} \tag{53}$$

$$\text{notemos que} \Rightarrow \boxed{\left\|\left|\psi_\alpha(t)\right\rangle\right\|^2 = \left\|\left|\phi_{\alpha(t)}(0)\right\rangle\right\|^2} \tag{54}$$

Notemos de (53) que $\left|\phi_{\alpha(t)}(0)\right\rangle$ es un estado coherente tiempo a tiempo (que difiere de $\left|\psi_\alpha(t)\right\rangle$ en una fase global, lo cual nos dice que representan el mismo vector de estado), por lo que la evolución temporal de un estado coherente $\left|\psi_\alpha(t)\right\rangle$ sigue siendo un estado coherente.
Por lo tanto, de (49), (52) y de la definición (51), sin perdida de generalidad, podremos reemplazar directamente α por $\alpha(t)$ (ambos difieren de una fase global), en los resultados (39), (40), (41) y (42) entonces,

$$\langle\hat{x}\rangle_{\alpha(t)} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\Re e\{\alpha(t)\} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\Re e\{\alpha\exp(-i\omega t)\}$$

$$\Rightarrow \langle\hat{x}\rangle_{\alpha(t)} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\Re e\{(\Re e\{\alpha\}+i\Im m\{\alpha\})[\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)]\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \hat{x} \rangle_{\alpha(t)} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}[\Re e\{\alpha\}\cos(\omega t) + \Im m\{\alpha\}\sin(\omega t)]} \quad (55)$$

$$\langle \hat{p} \rangle_{\alpha(t)} = \sqrt{2\hbar\mu\omega}\Im m\{\alpha(t)\} = \sqrt{2\hbar\mu\omega}\Im m\{\alpha \exp(-i\omega t)\}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{p} \rangle_{\alpha(t)} = \sqrt{2\hbar\mu\omega}\Im m\{(\Re e\{\alpha\} + i\Im m\{\alpha\})[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)]\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \hat{p} \rangle_{\alpha(t)} = \sqrt{2\hbar\mu\omega}[\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t) - \Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)]} \quad (56)$$

$$\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[4(\Re e\{\alpha(t)\})^2 + 1\right] = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[4(\Re e\{\alpha \exp(-i\omega t)\})^2 + 1\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{x}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[4(\Re e\{(\Re e\{\alpha\} + i\Im m\{\alpha\})[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)]\})^2 + 1\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{x}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\left[4(\Re e\{\alpha\}\cos(\omega t) + \Im m\{\alpha\}\sin(\omega t))^2 + 1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} = \frac{\hbar\left[4\left\{[\Re e\{\alpha\}\cos(\omega t)]^2 + |\alpha|^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) + [\Im m\{\alpha\}\sin(\omega t)]^2\right\} + 1\right]}{2\mu\omega}} \quad (57)$$

$$\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} = \frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[4(\Im m\{\alpha(t)\})^2 + 1\right] = \frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[4(\Im m\{\alpha \exp(-i\omega t)\})^2 + 1\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} = \frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[4(\Im m\{(\Re e\{\alpha\} + i\Im m\{\alpha\})[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)]\})^2 + 1\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} = \frac{\hbar\mu\omega}{2}\left[4(\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t) - \Re e\{\alpha\}\sin(\omega t))^2 + 1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} = \frac{\hbar\mu\omega\left[4\left\{[\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t)]^2 - |\alpha|^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) + [\Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)]^2\right\} + 1\right]}{2}} \quad (58)$$

Luego, de (54), (55), (56) y (57) tenemos,

$$(\Delta\hat{x}_{\alpha(t)})^2 = \left\langle \hat{x}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} - (\langle \hat{x} \rangle_{\alpha(t)})^2$$

$$\Rightarrow (\Delta\hat{x}_{\alpha(t)})^2 = \frac{\hbar\left[4\left\{[\Re e\{\alpha\}\cos(\omega t)]^2 + |\alpha|^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) + [\Im m\{\alpha\}\sin(\omega t)]^2\right\} + 1\right]}{2\mu\omega} -$$

$$-\frac{2\hbar}{\mu\omega}\left\{[\Re e\{\alpha\}\cos(\omega t)]^2 + |\alpha|^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) + [\Im m\{\alpha\}\sin(\omega t)]^2\right\}$$

$$\Rightarrow (\Delta\hat{x}_{\alpha(t)})^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega} \Rightarrow \boxed{\Delta\hat{x}_{\alpha(t)} = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}} \quad (59)$$

$$(\Delta\hat{p}_{\alpha(t)})^2 = \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_{\alpha(t)} - (\langle \hat{p} \rangle_{\alpha(t)})^2$$

$$\Rightarrow (\Delta\hat{p}_{\alpha(t)})^2 = \frac{\hbar\mu\omega\left[4\left\{[\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t)]^2 - |\alpha|^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) + [\Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)]^2\right\} + 1\right]}{2} -$$

$$-2\hbar\mu\omega\left\{[\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t)]^2 - |\alpha|^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) + [\Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)]^2\right\}$$

$$\Rightarrow (\Delta\hat{p}_{\alpha(t)})^2 = \frac{\hbar\mu\omega}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta\hat{p}_{\alpha(t)} = \pm\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}} \tag{60}$$

Notemos que se cumple que,

$$\boxed{\Delta\hat{x}_{\alpha(t)} = \Delta\hat{x}_{\alpha};\ \Delta\hat{p}_{\alpha(t)} = \Delta\hat{p}_{\alpha}} \tag{61}$$

Entonces,

$$\Delta\hat{x}_{\alpha(t)}\Delta\hat{p}_{\alpha(t)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}} \Rightarrow \boxed{\Delta\hat{x}_{\alpha(t)}\Delta\hat{p}_{\alpha(t)} = \frac{\hbar}{2}} \tag{62}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\hat{x}_{\alpha(t)}\Delta\hat{p}_{\alpha(t)} = \Delta\hat{x}_{\alpha}\Delta\hat{p}_{\alpha}} \tag{63}$$

Notemos que la propiedad de incerteza mínma se cumple para todo tiempo, es decir que la forma y el ancho del paquete permanecen intactos en el tiempo. En este caso particular, según (61) dio que esta incerteza se mantiene para todo t. Sin embargo, la propiedad de incerteza mínima, según (45), es una propiedad del estado y no de la evolución temporal de cierto estado.
Por otro lado, recordando la evolución de un paquete de incerteza mínima para una partícula libre teniamos de la G04.P6 (evolución libre paquete gaussiano),

$$\boxed{\Delta\hat{x}(t)\Delta\hat{p}(t) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma^2}\right)^2 + 1}} \tag{64}$$

$$\text{si } t = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\hat{x}(0)\Delta\hat{p}(0) = \frac{\hbar}{2}} \tag{65}$$

Es decir, la evolución libre del paquete gaussiano sólo tiene incertidumbre mínima a tiempo inicial $t = 0$, y a medida que el tiempo se incrementa la incertidumbre también lo hace.

Inciso d)

Nos piden escribir el vector de estado $|\psi_\alpha(t)\rangle$ en la representación coordenada explicitamente.
Del resultado (52) y , nuevamente, sin pérdida de generalidad podemos reemplazar α por $\alpha(t)$ en (38) y obtener $|\phi_{\alpha(t)}(0)\rangle$, esto es,

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)|\phi_{\alpha(t)}(0)\rangle$$

$$\Rightarrow |\phi_{\alpha(t)}(0)\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\}\exp\left[-i\sqrt{\frac{2}{\hbar\mu\omega}}\alpha(t)\hat{p}\right]|\phi_0\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi_\alpha(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\}\exp\left[-i\sqrt{\frac{2}{\hbar\mu\omega}}\alpha(t)\hat{p}\right]|\phi_0\rangle \tag{66}$$

Notemos que el último operador exponencial en (65) es el operador unitario de desplazamiento (u operador traslación) ya que,

$$\hat{T}(d) = \exp\left(\frac{-id}{\hbar}\hat{p}\right) \tag{67}$$

$$\Rightarrow si\ d = \sqrt{\frac{2}{\hbar\mu\omega}}\alpha(t)\hbar = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\alpha(t) \Rightarrow \hat{T}\left(\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\alpha(t)\right) = \exp\left[-\frac{i\left(\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\alpha(t)\right)}{\hbar}\hat{p}\right] \quad (68)$$

Entonces, de (67) en (65) tenemos,

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\}\hat{T}\left(\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\alpha(t)\right)|\phi_0\rangle$$

$$\psi_\alpha(x,t) = \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\}\hat{T}\left(\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\alpha(t)\right)\phi_0(x,0)$$

$$\text{definiendo } \boxed{x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}} \quad (69)$$

$$\Rightarrow \psi_\alpha(x,t) = \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\}\hat{T}(x_0\alpha(t))\phi_0(x,0) \quad (70)$$

Además, recordando que,

$$\hat{T}(d)\psi(x) = \psi(x-d) \text{ ó } \langle x|\hat{T}(d)|\psi\rangle = \langle x-d|\psi\rangle \quad (71)$$

Entonces, de (70) en (69)

$$\psi_\alpha(x,t) = \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\}\phi_0(x - x_0\alpha(t), 0) \quad (72)$$

Ahora bien, veamos qué es $x_0\alpha(t)$, de (71) y (49) tenemos,

$$x_0\alpha(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\alpha\exp(-i\omega t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}[\Re e\{\alpha\} + i\Im m\{\alpha\}][\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow x_0\alpha(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\{[\Re e\{\alpha\}\cos(\omega t) + \Im m\{\alpha\}\sin(\omega t)] + i[\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t) - \Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)]\} \quad (73)$$

De (54) y (55) tenemos,

$$\boxed{\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}[\Re e\{\alpha\}\cos(\omega t) + \Im m\{\alpha\}\sin(\omega t)] = \langle\hat{x}\rangle_{\alpha(t)} = q(t)} \quad (74)$$

$$\boxed{\sqrt{2\hbar\mu\omega}[\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t) - \Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)] = \langle\hat{p}\rangle_{\alpha(t)} = p(t)} \quad (75)$$

$$\Rightarrow i\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}[\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t) - \Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)] = i\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}\frac{p(t)}{\sqrt{2\hbar\mu\omega}}$$

$$\Rightarrow \boxed{i\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega}}[\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t) - \Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)] = i\frac{p(t)}{\mu\omega}} \quad (76)$$

Notemos que en (73) y en (74) hemos definido la posición $q(t)$ y el momento y $p(t)$, como ,en términos cuánticos, los correspondientes valores de espectación de la posición y el momento, es decir, la posición y el momento de un oscilador armónico clásico, respectivamente, entonces, de (73) y (75) en (72) tenemos,

$$\boxed{x_0\alpha(t) = q(t) + i\frac{p(t)}{\mu\omega}} \tag{77}$$

De (76) en (71) tenemos,

$$\psi_\alpha(x,t) = \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\,|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\}\phi_0\left(x - q(t) - i\frac{p(t)}{\mu\omega}, 0\right) \tag{78}$$

Ahora bién ϕ_0 corresponde al estado fundamental del oscilador armónico, por lo que remplazando su expresión explicita según la ecuación (34) de la G05.P1 tenemos,

$$\phi_0\left(x - q(t) - i\frac{p(t)}{\mu\omega}, 0\right) = \left[\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right]^{1/4} exp\left[-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\left(x - q(t) - i\frac{p(t)}{\mu\omega}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \phi_0\left(x - q(t) - i\frac{p(t)}{\mu\omega}, 0\right) = \left[\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right]^{1/4} exp\left[-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\left([x-q(t)]^2 - 2i[x-q(t)]\frac{p(t)}{\mu\omega} - \left[\frac{p(t)}{\mu\omega}\right]^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_0\left(x - q(t) - i\frac{p(t)}{\mu\omega}, 0\right) = \left[\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right]^{1/4} e^{\left[-iq(t)\frac{p(t)}{\hbar} + \frac{p(t)^2}{2\hbar\mu\omega}\right]} e^{\left[-\frac{\mu\omega}{2\hbar}[x-q(t)]^2 + i\frac{p(t)}{\hbar}x\right]}} \tag{79}$$

Además, de (77) tenemos que,

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\,|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\,|\alpha|^2 - (\alpha\exp(-i\omega t))^2\right]\right\} \tag{80}$$

$$\Rightarrow |\alpha|^2 = (\Re e\{\alpha\})^2 + (\Im m\{\alpha\})^2$$

$$\text{de (68) y (76)} \Rightarrow |\alpha|^2 = (\Re e\{\alpha\})^2 + (\Im m\{\alpha\})^2 = \frac{1}{(x_0)^2}\left\{[q(t)]^2 + \left[\frac{p(t)}{\mu\omega}\right]^2\right\}$$

$$\Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{\mu\omega[q(t)]^2}{2\hbar} + \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega} \tag{81}$$

$$\frac{\mu\omega[q(t)]^2}{2\hbar} + \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega} - \frac{\mu\omega[q(t)]^2}{2\hbar} + i\frac{q(t)p(t)}{\hbar} - \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega} = -i\frac{q(t)p(t)}{2\hbar}$$

$$\Rightarrow \left(\alpha e^{(-i\omega t)}\right)^2 = \{[\Re e\{\alpha\} + i\Im m\{\alpha\}][\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)]\}^2$$

$$\Rightarrow \left(\alpha e^{(-i\omega t)}\right)^2 = \{[\Re e\{\alpha\}\cos(\omega t) + \Im m\{\alpha\}\sin(\omega t) + i\{\Im m\{\alpha\}\cos(\omega t) - \Re e\{\alpha\}\sin(\omega t)\}]\}^2$$

$$\text{de (73) y (74)} \Rightarrow \left(\alpha e^{(-i\omega t)}\right)^2 = \left[\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}q(t) + i\frac{1}{\sqrt{2\hbar\mu\omega}}p(t)\right]^2$$

$$\boxed{\Rightarrow [\alpha(t)]^2 = \left(\alpha e^{(-i\omega t)}\right)^2 = \frac{\mu\omega[q(t)]^2}{2\hbar} + i\frac{q(t)p(t)}{\hbar} - \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega}} \tag{82}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left[\,|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right] = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\mu\omega[q(t)]^2}{2\hbar} + \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega} - \frac{\mu\omega[q(t)]^2}{2\hbar} - i\frac{q(t)p(t)}{\hbar} + \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega}\right\}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left[\,|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right] = i\frac{q(t)p(t)}{2\hbar} - \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega} \tag{83}$$

$$\boxed{\Rightarrow \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 - [\alpha(t)]^2\right]\right\} = \exp\left\{i\frac{q(t)p(t)}{2\hbar} - \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega}\right\}} \quad (84)$$

Luego, de (83), (78) y (77) tenemos,

$$\psi_\alpha(x,t) = \left[\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right]^{1/4} e^{\left(\frac{-i\omega t}{2}\right)} e^{\left\{i\frac{q(t)p(t)}{2\hbar} - \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega}\right\}} e^{\left[-iq(t)\frac{p(t)}{\hbar} + \frac{p(t)^2}{2\hbar\mu\omega}\right]} e^{\left[-\frac{\mu\omega}{2\hbar}[x-q(t)]^2 + i\frac{p(t)}{\hbar}x\right]}$$

$$\psi_\alpha(x,t) = \left[\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right]^{1/4} e^{\left\{\frac{-i\omega t}{2} + i\frac{q(t)p(t)}{2\hbar} - \frac{[p(t)]^2}{2\hbar\mu\omega} - iq(t)\frac{p(t)}{\hbar} + \frac{p(t)^2}{2\hbar\mu\omega}\right\}} e^{\left[-\frac{\mu\omega}{2\hbar}[x-q(t)]^2 + i\frac{p(t)}{\hbar}x\right]}$$

$$\Rightarrow \psi_\alpha(x,t) = \left[\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right]^{1/4} \exp\left\{i\left[-\frac{\omega t}{2} - q(t)\frac{p(t)}{\hbar}\right]\right\} \exp\left\{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}[x-q(t)]^2 + i\frac{p(t)}{\hbar}x\right\}$$

$$\text{definiendo } \boxed{\Phi(t) = \left[-\frac{\omega t}{2} - q(t)\frac{p(t)}{\hbar}\right]}$$

$$\boxed{\Rightarrow \psi_\alpha(x,t) = \left[\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right]^{1/4} \exp\{i\Phi(t)\} \exp\left\{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}[x-q(t)]^2 + i\frac{p(t)}{\hbar}x\right\}} \quad (85)$$

Inciso e)

El valor de espectación o esperado de la energía del oscilador armónico y su dispersión asociada, para un estado coherente vendrá dado por,

$$\langle\hat{H}\rangle_\alpha = \langle\psi_\alpha|\hat{H}|\psi_\alpha\rangle = \langle\psi_\alpha|\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|\psi_\alpha\rangle = \hbar\omega\left[\left(\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}|\psi_\alpha\rangle\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \langle\hat{H}\rangle_\alpha = \hbar\omega\left[\alpha^*\alpha\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \boxed{\langle\hat{H}\rangle_\alpha = \hbar\omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)} \quad (86)$$

$$\left\langle\hat{H}^2\right\rangle_\alpha = \langle\psi_\alpha|\hat{H}^2|\psi_\alpha\rangle = \langle\psi_\alpha|\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)^2(\hbar\omega)^2|\psi_\alpha\rangle = (\hbar\omega)^2\langle\psi_\alpha|\left(\hat{n}^2 + \hat{n} + \frac{1}{4}\right)|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle\hat{H}^2\right\rangle_\alpha = (\hbar\omega)^2\langle\psi_\alpha|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{4}\right)|\psi_\alpha\rangle = (\hbar\omega)^2\langle\psi_\alpha|\left[\hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{\mathbb{1}}\right)\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{4}\right]|\psi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle\hat{H}^2\right\rangle_\alpha = (\hbar\omega)^2\left[\left(\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{\mathbb{1}}\right)\left(\hat{a}|\psi_\alpha\rangle\right) + \left(\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}|\psi_\alpha\rangle\right) + \frac{1}{4}\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle\hat{H}^2\right\rangle_\alpha = (\hbar\omega)^2\left[\alpha^*\alpha\left[\left(\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}|\psi_\alpha\rangle\right) + \langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle\right] + \alpha^*\alpha\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle + \frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle\hat{H}^2\right\rangle_\alpha = (\hbar\omega)^2\left[\alpha^*\alpha\left(\alpha^*\alpha + 1\right) + \alpha^*\alpha + \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \boxed{\left\langle\hat{H}^2\right\rangle_\alpha = (\hbar\omega)^2\left(|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + \frac{1}{4}\right)} \quad (87)$$

Luego, de (85) y (86) tenemos,

$$(\Delta\hat{H})^2 = (\hbar\omega)^2\left(|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + \frac{1}{4}\right) - \left[\hbar\omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow \boxed{\Delta\hat{H} = \pm\hbar\omega|\alpha|} \tag{88}$$