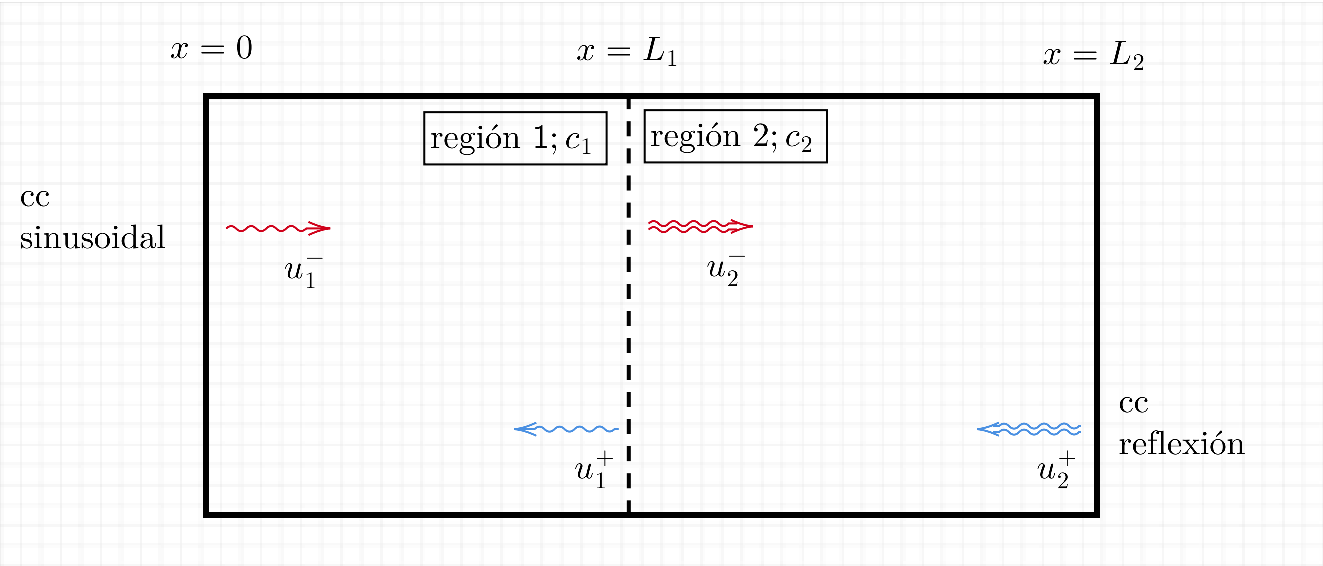
Aquí hacemos un cambio de notación llamando L (left) a la región 1 y R (right) a la región 2 entonces tendremos que,

$$\begin{cases} u_i(x,t) = \dfrac{c_i}{2}\Big[u_i^-(x,t) - u_i^+(x,t)\Big] = \partial_x[\phi_i(x,t)] \\ v_i(x,t) = \dfrac{1}{2}\Big[u_i^-(x,t) + u_i^+(x,t)\Big] = \partial_t[\phi_i(x,t)] \end{cases} ; \; i = \{1,2\} \tag{1}$$



Luego, las condiciones de contorno deberán ser tales que $\partial_x[\phi_i(x,t)]$ y $\partial_t[\phi_i(x,t)]$ sean continuas a través de la interfase, es decir, nos dicen que en la interfase estas derivadas sean iguales entonces podemos pensar que la posición x se puede pensar como suma de dos coordenadas independientes cada una perteneciente a una región en particular entonces

$$x_1 \in \{0, L_1\}; x_2 \in \{L_1, L_2\} \Rightarrow x = (x_1 + x_2) \in \{0, (L_2 + L_2)\} \tag{2}$$

y las condiciones de contorno serán

$$\begin{cases} \partial_x[\phi_1(L_1,t)] = \partial_x[\phi_2(L_1,t)] \\ \partial_t[\phi_1(L_1,t)] = \partial_t[\phi_2(L_1,t)] \end{cases} \tag{3}$$

y de (1) y (3) tendremos,

$$\begin{cases} \dfrac{c_1}{c_2}\Big[u_1^-(L_1,t) - u_1^+(L_1,t)\Big] = \Big[u_2^-(L_1,t) - u_2^+(L_1,t)\Big] \\ \Big[u_1^-(L_1,t) + u_1^+(L_1,t)\Big] = \Big[u_2^-(L_1,t) + u_2^+(L_1,t)\Big] \end{cases} \tag{4}$$

y sumando (restando) m.a.m. ambas expresiones tendremos

$$\begin{cases} (+) \rightarrow \quad \left(1 + \dfrac{c_1}{c_2}\right)u_1^-(L_1,t) + \left(1 - \dfrac{c_1}{c_2}\right)u_1^+(L_1,t) = 2u_2^-(L_1,t) \\ (-) \rightarrow \quad \left(1 - \dfrac{c_1}{c_2}\right)u_1^-(L_1,t) + \left(1 + \dfrac{c_1}{c_2}\right)u_1^+(L_1,t) = 2u_2^+(L_1,t) \end{cases} \tag{5}$$

aquí las incógnitas serían $u_1^+(L_1,t)$ y $u_2^-(L_1,t)$ (esto es debido a que el enunciado nos dice que en la parte izquierda, región 1, ingresa una onda sinusoidal y en la parte derecha, región 2, la onda saliente rebota y se convierte en entrante) entonces, en forma matricial, tendremos

$$
\begin{pmatrix} \left(1-\dfrac{c_1}{c_2}\right) & -2 \\ \left(1+\dfrac{c_1}{c_2}\right) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^+(L_1,t) \\ u_2^-(L_1,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(1+\dfrac{c_1}{c_2}\right)u_1^-(L_1,t) \\ 2u_2^+(L_1,t)-\left(1-\dfrac{c_1}{c_2}\right)u_1^-(L_1,t) \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} \left(\dfrac{c_1}{c_2}-1\right) & 2 \\ \left(1+\dfrac{c_1}{c_2}\right) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^+(L_1,t) \\ u_2^-(L_1,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1+\dfrac{c_1}{c_2}\right)u_1^-(L_1,t) \\ 2u_2^+(L_1,t)+\left(\dfrac{c_1}{c_2}-1\right)u_1^-(L_1,t) \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} & 2 \\ \beta_{1,2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^+(L_1,t) \\ u_2^-(L_1,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1,2}u_1^-(L_1,t) \\ 2u_2^+(L_1,t)+\alpha_{1,2}u_1^-(L_1,t) \end{pmatrix} \tag{6}
$$

donde $\alpha_{1,2} \overset{\text{def}}{=} \left(\dfrac{c_1}{c_2}-1\right)$ y $\beta_{1,2} \overset{\text{def}}{=} \left(1+\dfrac{c_1}{c_2}\right)$ entonces invirtiendo dicha matriz tendremos

$$
\begin{pmatrix} \alpha_{1,2} & 2 \\ \beta_{1,2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2/\beta_{1,2} \\ 1 & -\alpha_{1,2}/\beta_{1,2} \end{pmatrix} \tag{7}
$$

entonces de (7) en (6) tendremos

$$
\begin{pmatrix} u_1^+(L_1,t) \\ u_2^-(L_1,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2/\beta_{1,2} \\ 1 & -\alpha_{1,2}/\beta_{1,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{1,2}u_1^-(L_1,t) \\ \left[\alpha_{1,2}u_1^-(L_1,t)+2u_2^+(L_1,t)\right] \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1^+(L_1,t) \\ u_2^-(L_1,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\beta_{1,2}}\left[\alpha_{1,2}u_1^-(L_1,t)+2u_2^+(L_1,t)\right] \\ \beta_{1,2}u_1^-(L_1,t)-\dfrac{\alpha_{1,2}}{\beta_{1,2}}\left[\alpha_{1,2}u_1^-(L_1,t)+2u_2^+(L_1,t)\right] \end{pmatrix}
$$

y reemplazando $\alpha_{1,2}$ y $\beta_{1,2}$ tendremos

$$
\begin{pmatrix} u_1^+(L_1,t) \\ u_2^-(L_1,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{(c_1+c_2)}\begin{pmatrix} \left[(c_1-c_2)u_1^-(L_1,t)+2c_2u_2^+(L_1,t)\right] \\ \left[2c_1u_1^-(L_1,t)+(c_2-c_1)u_1^-(L_1,t)\right] \end{pmatrix} \tag{8}
$$

Estas ecuaciones nos permitirán crear las condiciones de borde en al interfaz.