$$\begin{cases} u_{(i+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n u(x)}{\Delta x^n}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^n}{n!} \\ u_{(i-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Delta^n u(x)}{\Delta x^n}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^n}{n!} \end{cases} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (D_+u) = \frac{[u_{(i+1)} - u_i]}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^n u(x)}{\Delta x^n}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^{(n-1)}}{n!} \\ (D_-u) = -\frac{[u_{(i-1)} - u_i]}{\Delta x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\Delta^n u(x)}{\Delta x^n}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^{(n-1)}}{n!} \end{cases} \tag{2}$$

$$\Rightarrow (D_0u)_i = \frac{[(D_+u)_i + (D_-u)_i]}{2} = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + (-1)^{n+1}\right] \frac{\Delta^n u(x)}{\Delta x^n}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^{(n-1)}}{n!} \right\}$$

$$\Rightarrow (D_0u)_i = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \Leftrightarrow n = 2j \\ 2 & \Leftrightarrow n = (2j+1) \end{array} \right\} \frac{\Delta^n u(x)}{\Delta x^n}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^{(n-1)}}{n!} \right\}; j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (D_0u)_i = \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\Big|_{x_i} + \frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^2}{3!} + \frac{\Delta^5 u}{\Delta x^5}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^4}{5!} + \frac{\Delta^7 u}{\Delta x^7}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^6}{7!} + \frac{\Delta^9 u}{\Delta x^9}\Big|_{x_i} \frac{\Delta x^8}{9!} + \mathcal{O}\left(\Delta x^{10}\right) \right] \tag{3}$$

Buscamos ahora el operador de diferencia finita de orden 6to de la siguiente manera, primero proponemos un operador con tres bandas no triviales y totalmente antisimétrico de la forma,

$$\Rightarrow (D_6u)_i = \frac{[a \cdot u_{(i+3)} + b \cdot u_{(i+2)} + c \cdot u_{(i+1)} - c \cdot u_{(i-1)} - b \cdot u_{(i-2)} - a \cdot u_{(i-3)}]}{\Delta x} \tag{4}$$

Como el operador diferencia finita aproxima siempre la primera derivada de la función $u(x_i)$ proponemos condiciones para polinomios de orden impar (pues los pares imponen siempre condiciones triviales por simetría),

$$x_i \equiv i\Delta x; i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} u_i = x_i \Rightarrow \left(u^{(1)}\right)_i = 1 & \text{pol. lineal} \\ u_i = (x_i)^3 \Rightarrow \left(u^{(1)}\right)_i = 3(x_i)^2 = 3(i\Delta x)^2 & \text{pol. cubico} \\ u_i = (x_i)^5 \Rightarrow \left(u^{(1)}\right)_i = 5(x_i)^4 = 5(i\Delta x)^4 & \text{pol. quintuplo} \end{cases} \tag{5}$$

y reemplazando en (4) tendremos las siguientes ecuaciones

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{[a(i+3)\Delta x + b(i+2)\Delta x + c(i+1)\Delta x - c(i-1)\Delta x - b(i-2)\Delta x - a(i-3)\Delta x]}{\Delta x} \\ 3(i\Delta x)^2 = \frac{\left\{a[(i+3)\Delta x]^3 + b[(i+2)\Delta x]^3 + c[(i+1)\Delta x]^3 - c[(i-1)\Delta x]^3 - b[(i-2)\Delta x]^3 - a[(i-3)\Delta x]^3\right\}}{\Delta x} \\ 5(i\Delta x)^4 = \frac{\left\{a[(i+3)\Delta x]^5 + b[(i+2)\Delta x]^5 + c[(i+1)\Delta x]^5 - c[(i-1)\Delta x]^5 - b[(i-2)\Delta x]^5 - a[(i-3)\Delta x]^5\right\}}{\Delta x} \end{cases}$$

ahora, si evaluamos para el caso particular de $x_i = 0 \Rightarrow i = 0$, lo cual podemos hacer ya que las ecuaciones que se agregan al considerar $x_i \neq 0$ son linealmente dependientes de las obtenidas para el caso $x_i = 0$ entonces las condiciones se simplifican de la forma

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \left(3^1 a + 2^1 b + 1^1 c + 1^1 c + 2^1 b + 3^1 a\right) = 6a + 4b + 2c \\ 0 = \left(3^3 a + 2^3 b + 1^3 c + 1^3 c + 2^3 b + 3^3 a\right) = 54a + 16b + 2c \\ 0 = \left(3^5 a + 2^5 b + 1^5 c + 1^5 c + 2^5 b + 3^5 a\right) = 486a + 64b + 2c \end{cases}$$

y resolviendo obtenemos $a = \dfrac{1}{60}; b = \dfrac{-3}{20}; c = \dfrac{3}{4}$ entonces el operador diferencia finita con condiciones de contorno periódicas será

$$\Rightarrow (D_6 u) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \cdots & \mathbf{N-4} & \mathbf{N-3} & \mathbf{N-2} & \mathbf{N-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \mathbf{N-4} \\ \mathbf{N-3} \\ \mathbf{N-2} \\ \mathbf{N-1} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & c & b & a & 0 & & 0 & -a & -b & -c \\ -c & 0 & c & b & a & & & 0 & -a & -b \\ -b & -c & 0 & c & b & & & & 0 & -a \\ -a & -b & -c & 0 & c & & & & & 0 \\ 0 & -a & -b & -c & 0 & & & & & \\ & 0 & -a & -b & -c & & & & & \\ & & 0 & -a & -b & \ddots & 0 & & & \\ & & & 0 & -a & & a & 0 & & \\ & & & & 0 & & b & a & 0 & \\ & & & & & & c & b & a & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & c & b & a \\ a & 0 & & & & & -c & 0 & c & b \\ b & a & 0 & & & & -b & -c & 0 & c \\ c & b & a & 0 & & & -a & -b & -c & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6}$$

De forma análoga buscamos ahora el operador de diferencia finita de orden 8vo de la siguiente manera, primero proponemos un operador con cuatro bandas no triviales y totalmente antisimétrico de la forma,

$$\Rightarrow (D_8 u)_i = \frac{\left[a \cdot u_{(i+4)} + b \cdot u_{(i+3)} + c \cdot u_{(i+2)} + d \cdot u_{(i+1)} - d \cdot u_{(i-1)} - c \cdot u_{(i-2)} - b \cdot u_{(i-3)} - a \cdot u_{(i-4)}\right]}{\Delta x} \tag{7}$$

Como el operador diferencia finita aproxima siempre la primera derivada de la función $u(x_i)$ proponemos condiciones para polinomios de orden impar (pues los pares imponen siempre condiciones triviales por simetría),

$$x_i \equiv i\Delta x; i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} u_i = x_i \Rightarrow \left(u^{(1)}\right)_i = 1 & \text{pol. lineal} \\ u_i = (x_i)^3 \Rightarrow \left(u^{(1)}\right)_i = 3(x_i)^2 = 3(i\Delta x)^2 & \text{pol. cubico} \\ u_i = (x_i)^5 \Rightarrow \left(u^{(1)}\right)_i = 5(x_i)^4 = 5(i\Delta x)^4 & \text{pol. quintuplo} \\ u_i = (x_i)^7 \Rightarrow \left(u^{(1)}\right)_i = 7(x_i)^6 = 7(i\Delta x)^6 & \text{pol. septuplo} \end{cases} \tag{8}$$

y reemplazando en (4) y evaluamos para el caso particular de $x_i = 0 \Rightarrow i = 0$, tendremos las siguientes ecuaciones que deberá verificar el operador

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \left(4^1 a + 3^1 b + 2^1 c + 1^1 d + 1^1 d + 2^1 c + 3^1 b + 4^1 a\right) = 8a + 6b + 4c + 2d \\ 0 = \left(4^3 a + 3^3 b + 2^3 c + 1^3 d + 1^3 d + 2^3 c + 3^3 b + 4^3 a\right) = 128a + 54b + 16c + 2d \\ 0 = \left(4^5 a + 3^5 b + 2^5 c + 1^5 d + 1^5 d + 2^5 c + 3^5 b + 4^5 a\right) = 2048a + 486b + 64c + 2d \\ 0 = \left(4^7 a + 3^7 b + 2^7 c + 1^7 d + 1^7 d + 2^7 c + 3^7 b + 4^7 a\right) = 32768a + 4374b + 256c + 2d \end{cases}$$

y resolviendo obtenemos $a = \dfrac{-1}{280}; b = \dfrac{4}{105}; c = \dfrac{-1}{5}; d = \dfrac{4}{5}$ entonces el operador diferencia finita con condiciones de contorno periódicas será

$$
\Rightarrow (D_8 u) = \begin{array}{c}
\\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \\ \vdots \\ \\ \mathbf{N-5} \\ \mathbf{N-4} \\ \mathbf{N-3} \\ \mathbf{N-2} \\ \mathbf{N-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \dots & \mathbf{N-5} & \mathbf{N-4} & \mathbf{N-3} & \mathbf{N-2} & \mathbf{N-1}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & d & c & b & a & 0 & & 0 & -a & -b & -c & -d \\
-d & 0 & d & c & b & a & & & 0 & -a & -b & -c \\
-c & -d & 0 & d & c & b & & & & 0 & -a & -b \\
-b & -c & -d & 0 & d & c & & & & & 0 & -a \\
-a & -b & -c & -d & 0 & d & & & & & & 0 \\
0 & -a & -b & -c & -d & 0 & & a & & & & \\
 & 0 & -a & -b & -c & -d & \ddots & b & a & & & \\
 & & 0 & -a & -b & -c & & c & b & a & & \\
 & & & 0 & -a & -b & & d & c & b & a & \\
0 & & & & 0 & -a & & 0 & d & c & b & a \\
a & 0 & & & & 0 & & -d & 0 & d & c & b \\
b & a & 0 & & & & & -c & -d & 0 & d & c \\
c & b & a & 0 & & & & -b & -c & -d & 0 & d \\
d & c & b & a & 0 & & & -a & -b & -c & -d & 0
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{9}
$$

Energía de la solución

$$
E(t) = \sum_{i=0}^{(N-1)} \Big[(v_i(t))^2 + (u_i(t))^2 \Big] \Delta x \tag{10}
$$

Ecuación de burgers

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \rightarrow \text{Ec. de Bateman} - \text{Burgers} \\
\text{si } \nu = 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= -u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \rightarrow \text{Ec. de Burgers inciscida}
\end{aligned} \tag{11}
$$

y notemos que

$$
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{1}{2}[u(x,t)]^2 \right\} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[2u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}
$$

entonces para el caso de viscosidad nula podremos considerar la ecuación equivalente

$$
\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial [u(x,t)]^2}{\partial x}} \tag{12}
$$

y numéricamente tendremos, usando el operador de diferencia finita

$$
\frac{\partial u}{\partial t} \approx -\frac{1}{2} D_x \big(u^2 \big)
$$

Y usando el método de características tendremos que si se cumple que

$$
\frac{d[x(t)]}{dt} = u(x,t) \tag{13}
$$

entonces también se cumplirá que (usando (12))

$$
\begin{aligned}
\frac{d[u(x(t),t)]}{dt} &= \frac{\partial [u(x(t),t)]}{\partial t} + \frac{\partial [u(x,t)]}{\partial x}\frac{d[x(t)]}{dt} \\
\Rightarrow \frac{d[u(x(t),t)]}{dt} &= \frac{\partial [u(x(t),t)]}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial [u(x,t)]}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{14}
$$

Entonces el sistema a resolver será

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u \\ \dfrac{du}{dt} = 0 \end{cases}$$