VELOCIDAD DE CHOQUE: ECUACIÓN DE BURGERS

$$\left\{u_t = \frac{1}{2}\left(u^2\right)_x\right\} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)] = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[u^2(x,t)\right]\right\}$$

y recordando que estamos resolviendo ecuaciones de la forma

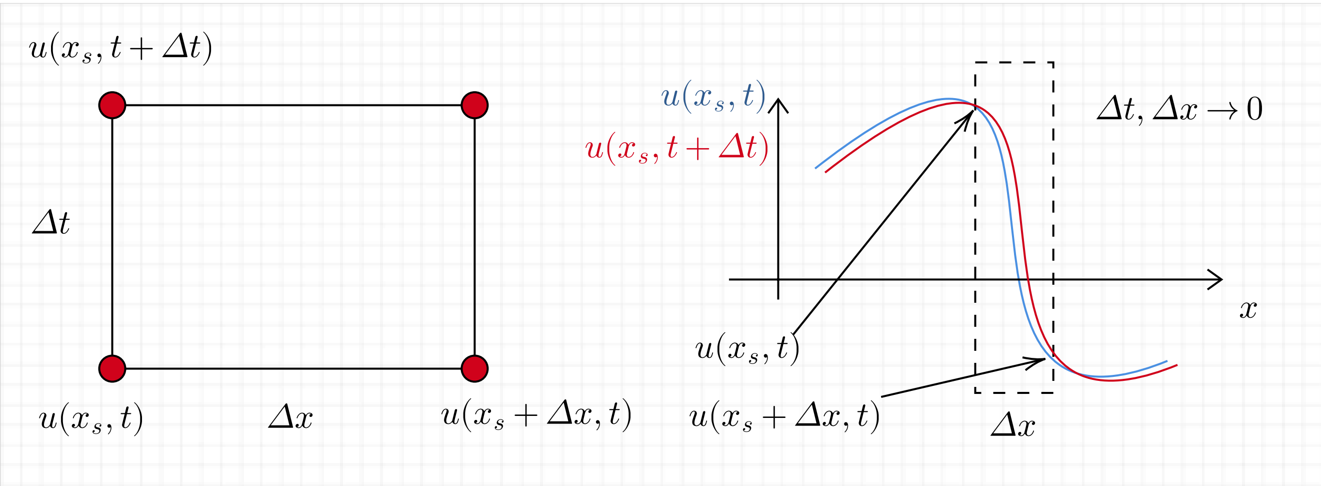
$$\{u_t = (F(u))_x\} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)] = \frac{\partial}{\partial x}[F(u(x,t))]\right\}$$

y para Burgers se cumplirá que $F(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}u^2(x,t)$ entonces, la versión discreta de esta ecuación será

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[F(u(x+\Delta x,t)) - F(u(x,t))]}{\Delta x}$$

y si nos situamos en una región entorno al choque a una distancia x_s tendremos que la velocidad del choque será de la forma

$$\Rightarrow v_c \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \frac{[F(u(x_s+\Delta x,t)) - F(u(x_s,t))]}{[u(x_s,t+\Delta t) - u(x_s,t)]}$$



y, específicamente para Burgers, tendremos

$$v_c = \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\left[u^2(x_s+\Delta x,t) - u^2(x_s,t)\right]}{[u(x_s,t+\Delta t) - u(x_s,t)]}$$

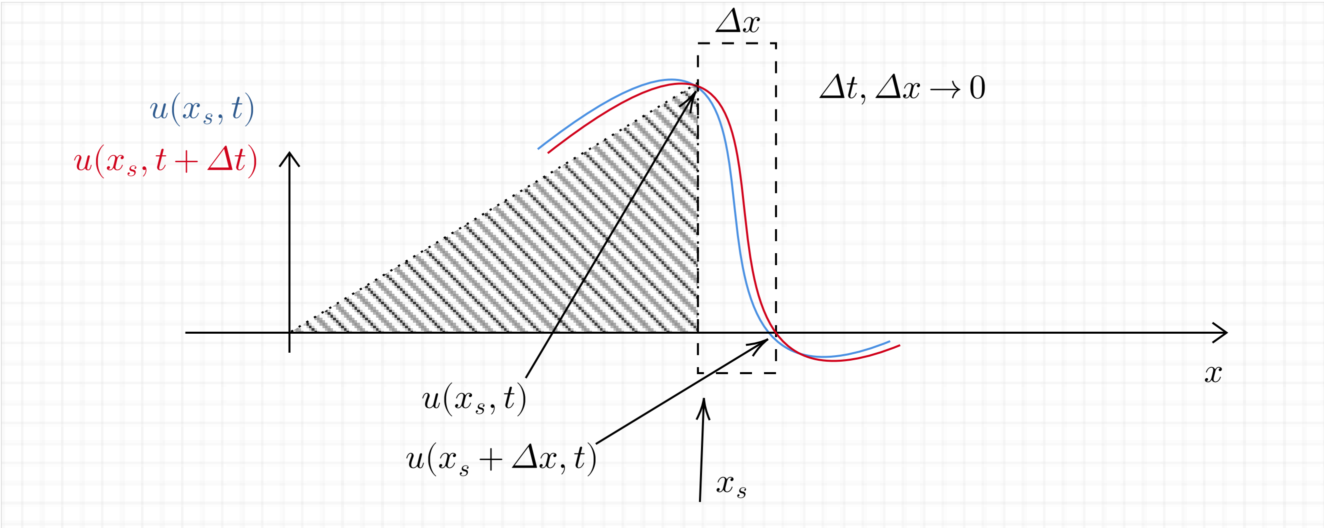
$$v_c = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \frac{[u(x_s+\Delta x,t) + u(x_s,t)][u(x_s+\Delta x,t) - u(x_s,t)]}{[u(x_s,t+\Delta t) - u(x_s,t)]}$$

si $\Delta t, \Delta x \to 0 \Rightarrow u(x_s+\Delta x,t) \approxeq u(x_s,t+\Delta t)$ entonces

$$v_c \approx \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \to 0} [u(x_s+\Delta x,t) + u(x_s,t)]$$

entonces la velocidad del choque depende del promedio de la altura del choque en un instante dado.

Ahora bien, siempre podemos hacer un escaléo de la solución de tal forma de que $u(x_s+\Delta x,t) = 0$, es decir, que la solución se anule inmediatamente luego del choque.



Además, si consideramos que inmediatamente antes de producirse el choque el área bajo la curva es esencialmente un triangulo (esto es válido para el caso particular de la ecuación de Burgers) con altura igual a $|u(x_s,t) - u(x_s+\Delta x,t)| = |u(x,t)|$ y base $|x_0 - x_s|$ donde $x_0 = 0$ es el origen de la discretización espacial y x_s es la posición en que ocurre el choque entonces, el área antes y luego del choque se mantiene constante en un valor C entonces, (considerando $u(x_s,t) \geqslant 0$)

$$C = \frac{1}{2}u(x_s,t)x_s \Rightarrow x_s = \frac{2C}{u(x_s,t)}$$

$$\text{si } u(x_s+\Delta x,t) = 0 \Rightarrow v_s = \frac{1}{2}u(x_s,t)$$

y diferenciando la ecuación anterior tendremos

$$2\underbrace{\cancel{\frac{\partial C}{\partial t}}}_{=0} = \frac{\partial}{\partial t}[u(x_s,t)x_s] = \frac{\partial[u(x_s,t)]}{\partial t}x_s + u(x_s,t)\underbrace{\frac{\partial x_s}{\partial t}}_{=v_s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial[u(x_s,t)]}{\partial t} = -\frac{u(x_s,t)v_s}{x_s} = -\frac{u(x_s,t)\left[\frac{1}{2}u(x_s,t)\right]}{\left[\frac{2C}{u(x_s,t)}\right]} = -\frac{u^3(x_s,t)}{4C}$$

e integrando esta ecuación tendremos

$$u_{x_s,t} \overset{\text{def}}{=} u(x_s,t)$$

$$\int_{u^i_{x_s,t}}^{u_{x_s,t}} [u'_{x_s,t}]^{-3}du'_{x_s,t} = -\frac{1}{4C}\int_{t_i}^{t} dt' \Rightarrow -\frac{[u'_{x_s,t}]^{-2}}{2}\Bigg|_{u^i_{x_s,t}}^{u_{x_s,t}} = -\frac{(t-t_i)}{4C}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{[u_{x_s,t}]^2} - \frac{1}{\left[u^i_{x_s,t}\right]^2}\right\} = -\frac{(t-t_i)}{4C} \Rightarrow \frac{1}{[u_{x_s,t}]^2} = \frac{(t-t_i)}{2C} + \frac{1}{\left[u^i_{x_s,t}\right]^2}$$

$$\Rightarrow [u_{x_s,t}]^2 = \frac{1}{c + \frac{1}{\left[u^i_{x_s,t}\right]^2}} = \frac{\left[u^i_{x_s,t}\right]^2}{\left\{1 + \frac{(t-t_i)}{2C}\left[u^i_{x_s,t}\right]^2\right\}} \Rightarrow u_{x_s,t} = \pm\frac{u^i_{x_s,t}}{\sqrt{1 + \frac{(t-t_i)}{2C}\left[u^i_{x_s,t}\right]^2}}$$

y analizando los límites vemos que si $u^i_{x_s,t} \neq 0$ entonces,

$$t \approx t_i \Rightarrow u_{x_s,t} = \pm u^i_{x_s,t}; t \gg t_i \Rightarrow u_{x_s,t} \approx \pm\sqrt{\frac{2C}{t}}$$

Shallow Waters whit topology

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial((\eta + h)u)}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[-\left(\dfrac{u^2}{2} - g\eta\right)\right] \equiv \dfrac{\partial(F_u(u))}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}[-(\eta + h)u] \equiv \dfrac{\partial(F_\eta(u))}{\partial x} \end{cases}$$

donde se uso que $u\dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}$.