

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/287039109>

# The Jaynes–Cummings model

Article in *Optica Pura y Aplicada* · June 2011

CITATIONS

0

READS

3,026

1 author:



**Eugenio Roldán**

University of Valencia

157 PUBLICATIONS 1,904 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Quantum Walks and fields simulations [View project](#)



Rocking [View project](#)

## El modelo de Jaynes-Cummings

### The Jaynes-Cummings model

Eugenio Roldán

Departament d'Òptica, Universitat de València, Dr. Moliner 50, 46100 Burjassot, Spain, EU.

Email: eugenio.roldan@uv.es

Recibido / Received: 28/02/2011. Revisado / Revised: 30/03/2011. Aceptado / Accepted: 31/03/2011

#### RESUMEN:

En este trabajo se presenta una introducción a uno de los modelos más importantes en óptica cuántica: el modelo de Jaynes-Cummings (MJC). Se trata el problema conceptualmente más sencillo de interacción luz-materia en el marco de una teoría completamente cuantizada: la interacción entre un solo átomo de dos niveles y un solo modo del campo electromagnético dentro de la aproximación de la onda rotante. Mostraremos que el MJC también describe otro tipo de sistemas, como el de un ión atrapado en un potencial armónico que interacciona con luz no cuantizada. Estudiamos detenidamente las propiedades atómicas (oscilaciones de Rabi, colapsos y revivals) y también del modo de radiación (estadística sub-Poissoniana, *squeezing*) y dedicamos especial atención a la implementación experimental de este tipo de interacción. La presentación está especialmente dirigida a estudiantes de grado, siendo también adecuada como texto introductorio para posgraduados.

**Palabras clave:** Óptica Cuántica, Electrodinámica Cuántica de Cavidades, Oscilaciones de Rabi, Colapsos y Revivals Cuánticos, Microcavidades Ópticas, Iones Atrapados.

#### ABSTRACT:

This work presents an introduction to one of the most important models in quantum optics: the Jaynes-Cummings model (JCM). It deals with the conceptually simplest problem in light – matter interaction within the frame of completely quantized theory: the interaction between a two-level single atom and a single mode of the electromagnetic field within the rotating wave approximation. It will be shown that JCM also describes other type of systems, like an ion trapped in a harmonic potential that interacts with non quantized light. We study carefully the atomic properties (Rabi oscillations, collapses and revivals), and also the radiation mode (sub-Poisson statistics, squeezing), and special emphasis is made on the experimental implementation of this type of interaction. This presentation is specially intended for grade students, being also appropriate as a introductory text for postgraduates.

**Keywords:** Quantum Optics, Cavity-QED, Rabi Oscillations, Quantum Collapses and Revivals, Optical Microcavities, Trapped Ions

#### REFERENCES AND LINKS

- [1]. E. T. Jaynes, F. W. Cummings, "Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser", *P. IEEE* **51**, 89-109 (1963).
- [2]. J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, "Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity", *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565-582 (2001).
- [3]. H. Walther, B. T. H. Varcoe, B.-G. Englert, Th. Becker, "Cavity quantum electrodynamics", *Rep. Prog. Phys.* **69**, 1325-1382 (2006).
- [4]. C.A. Blockley, D.F. Walls, H. Risken, "Quantum colapses and revivals in a quantized trap", *Europhys. Lett.* **17**, 509-514 (1992).

- [5]. D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, D.J. Wineland, "Quantum dynamics of single trapped ions", *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281-324 (2003).
- [6]. B.W. Shore, P.L. Knight, "The Jaynes-Cummings model", *J. Mod. Opt.* **40**, 1195-1238 (1993).
- [7]. A. Messina, S. Maniscalco, A. Napoli, "Interaction of bimodal fields with few-level atoms in cavities and traps", *J. Mod. Opt.* **50**, 1-49 (2003).
- [8]. J. Larson, "Dynamics of the Jaynes-Cummings and Rabi models: old wine in new bottles", *Phys. Scripta* **76**, 146-160 (2007).
- [9]. Ch. Gerry, P.L. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press (2005).
- [10]. P. Lambropoulos, D. Petrosian, *Fundamentals of quantum optics and quantum information*, Springer-Verlag, (2007).
- [11]. F.J. Yndurain, *Mecánica Cuántica*, Alianza Editorial (1988).
- [12]. L. Allen, J.H. Eberly, *Optical resonance and two-level atoms*, Dover Publications (1987).
- [13]. J. I. Cirac, A. S. Parkins, R. Blatt, P. Zoller, "'Dark' squeezed states of the motion of a trapped ion", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 556-559 (1993).
- [14]. F. W. Cummings, "Stimulated emission of radiation in a single mode", *Phys. Rev.* **140**, A1051-A1056 (1965).
- [15]. P. Meystre, A. Quattropani, H. P. Baltes, "Quantum mechanical approach to Rabi flipping", *Phys. Lett. A* **49**, 85-86 (1974).
- [16]. J. H. Eberly, N. B. Narozhny, J. J. Sánchez-Mondragón, "Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model", *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323-1326 (1980).
- [17]. P. Meystre, M.S. Zubairy, "Squeezed states in the Jaynes-Cummings model", *Phys. Lett. A* **89**, 390-392 (1982).
- [18]. J. R. Kukliński, J. L. Madajczyk, "Strong squeezing in the Jaynes-Cummings model", *Phys. Rev. A* **37**, 3175-3178 (1988).
- [19]. M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, & S. Haroche, "Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800-1803 (1996).
- [20]. S. Stenholm, "The semiclassical theory of laser cooling", *Rev. Mod. Phys.* **58**, 699-739 (1986).
- [21]. D.M. Meekhof, C. Monroe, B.E. King, W.M. Itano, D.J. Wineland, "Generation of nonclassical motional states of a trapped atom", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796-1799 (1996).
- [22]. Ch. Roos, T.H. Zeiger, H. Rohde, H.C. Nägerl, J. Schnier, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt, "Quantum state engineering on an optical transition and decoherence in a Paul trap", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4713-4716 (1999).
- [23]. C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, Y. Arakawa, "Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity", *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3314-3317 (1992).
- [24]. J. P. Reithmeier, G. Sek, A. Löffler, C. Hoffmann, S. Kuhn, S. Reitzenstein, L.V. Keldysh, V.D. Kulakovskii, T. L. Reinecke, A. Forchel, "Strong coupling in a single quantumdot-semiconductor microcavity system", *Nature* **432**, 197-200 (2004).
- [25]. T. Yoshie, A. Scherer, J. Hendrickson, G. Khitrova, H. M. Gibbs, G. Rupper, C. Ell, O. B. Shchekin, D. G. Deppe, "Vacuum Rabi splitting with a single quantum dot in a photonic crystal nanocavity", *Nature* **432**, 200-203 (2004).
- [26]. A. Wallraff, D. I. Shuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, R. J. Schoelkopf, "Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics", *Nature* **431**, 162-167 (2004).
- [27]. R. J. Schoelkopf, S. M. Girvin, "Wiring up quantum systems", *Nature* **451**, 664-669 (2008).
- [28]. J. Johansson, S. Saito, T. Meno, H. Nakano, M. Ueda, K. Semba, H. Takayanagi, "Vacuum Rabi oscillations in a macroscopic superconducting qubit LC oscillator system", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 127006 (2006).
- [29]. J. I. Cirac, P. Zoller, "Quantum computations with cold trapped ions", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091-4093 (1995).

## 1. Introducción

El modelo de Jaynes-Cummings (MJC) describe un sistema formado por un modo cuantizado en interacción con un sistema de dos niveles, y fue originalmente propuesto en 1963 por E.T. Jaynes y F.W. Cummings [1] para describir, de forma muy idealizada, la interacción entre un único modo del campo electromagnético y un único átomo, ambos aislados de la influencia de cualquier entorno perturbador. Hace cincuenta años, las condiciones requeridas por el MJC eran inalcanzables desde un punto de vista experimental, pero la realización del MJC empezó a ser posible a partir de finales de la década de 1980 gracias al desarrollo de la electrodinámica cuántica de cavidades (CQED en sus siglas inglesas) [2,3]. El MJC vio ampliado su campo de aplicación al descubrirse [4] que también modeliza un problema aparentemente muy diferente: el de la interacción entre un modo vibracional de un ión atrapado y el ión mismo, jugando ahora el modo vibracional el papel del modo electromagnético del modelo original. Para que esa interacción se produzca es necesaria la mediación de un campo electromagnético "clásico" (i.e., un campo coherente intenso ya que en este tipo de estado puede ignorarse la influencia de las fluctuaciones cuánticas) que interaccione dipolarmente con el ión. Esto ha podido ser llevado a cabo experimentalmente gracias al gran avance de las técnicas de atrapamiento de iones [5]. Más recientemente se ha descubierto que el MJC puede llevarse a la práctica con otros sistemas físicos diferentes. Aunque a lo largo de este trabajo vamos a formular y estudiar el MJC principalmente en el contexto óptico-cuántico, también lo deduciremos en el contexto del ión atrapado. Al final dedicaremos un apartado a las observaciones experimentales. Hay que resaltar que el tratamiento del problema que se va a presentar no considera el importante fenómeno de la disipación y esto es así porque se pretende mantener la complejidad del tratamiento a un nivel de estudiante de grado.

Finalmente, para ampliar conocimientos sobre el tema, citaremos la revisión de Shore y Knight [6], un trabajo clásico de 1993, así como las revisiones más actualizadas de las Refs. [7,8] y los tratamientos en monografías de óptica cuántica recientes de Gerry y Knight [9] y de

Lambropoulos y Petrosian [10], éste último muy recomendable para un tratamiento relativamente sencillo de la disipación.

## 2. El modelo de Jaynes-Cummings

En esta sección vamos a deducir el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings a partir de primeros principios. Primero formularemos el Hamiltoniano completo (en la aproximación dipolar eléctrica) y luego llevaremos a cabo la importante aproximación de la onda rotante.

### 2.1 Hamiltoniano dipolar eléctrico

Como hemos dicho, el MJC considera un único modo del campo electromagnético en interacción dipolar eléctrica con un único átomo de dos niveles. Hemos de recalcar que esta situación dista mucho de la del problema de un átomo aislado en el vacío interaccionando con un haz de luz monocromática pues en este caso no es sólo uno, sino que son infinitos los modos del campo electromagnético que interaccionan con el átomo, aunque todos los modos menos uno de ellos se encuentren en el estado vacío. Por el contrario, el MJC describe más bien un átomo encerrado en el interior de una cavidad óptica (una microcavidad) de dimensiones tales que sólo existe en su interior un modo capaz de interaccionar efectivamente con la transición atómica elegida. Nótese que, desde un punto de vista puramente teórico, es un problema muy bien definido y particularmente simple. En lo que sigue vamos, primero, a escribir el Hamiltoniano del sistema para poder resolver, a continuación, la ecuación de Schrödinger y así poder calcular la evolución de determinados observables.

El Hamiltoniano del conjunto átomo más campo se puede escribir de la forma  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ , donde  $\hat{H}_0 = \hat{H}_{at} + \hat{H}_{rad}$  contiene la energía de las partes del sistema, átomo y modo aislados, en ausencia de interacción entre ellas, mientras que  $\hat{H}_{int} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{E}}$  describe la interacción en la aproximación dipolar eléctrica, siendo  $\hat{\vec{\mu}}$  el operador momento dipolar del átomo y  $\hat{\vec{E}}$  el operador campo eléctrico.

Dado que consideramos un átomo de dos niveles, si denotamos por  $|e\rangle$  y  $|f\rangle$  a sus estados de mayor y menor energía, respectivamente, y llamamos  $\omega_A$  a su frecuencia de Bohr, podemos escribir

$$\hat{H}_{at} = \frac{1}{2} \hbar \omega_A (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) = \frac{1}{2} \hbar \omega_A \hat{\sigma}_z, \quad (1)$$

donde hemos introducido el operador diferencia de poblaciones  $\hat{\sigma}_z \equiv |e\rangle\langle f| - |f\rangle\langle e|$ . Nótese que  $\hat{H}_{at}|e\rangle = +\frac{1}{2} \hbar \omega_A |e\rangle$  y  $\hat{H}_{at}|f\rangle = -\frac{1}{2} \hbar \omega_A |f\rangle$  pues se ha tomado el origen de energías en el centro de la transición atómica. Por otra parte, el Hamiltoniano que describe un modo de radiación de frecuencia  $\omega$  es  $\hat{H}_{rad} = \hbar \omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$  siendo  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  los operadores bosónicos de destrucción y creación, respectivamente, que describen el modo del campo electromagnético. El término constante  $\hbar \omega/2$  podemos ignorarlo, lo que equivale a un cambio en el origen de energías del modo. Así pues, para el Hamiltoniano libre tenemos

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{at} + \hat{H}_{rad} = \hbar \left( \frac{1}{2} \omega_A \hat{\sigma}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \right). \quad (2)$$

Pasemos al Hamiltoniano de interacción. En primer lugar hemos de recordar que estamos dentro de la aproximación dipolar eléctrica, lo que significa que el campo que siente el átomo es el mismo a lo largo de toda su propia extensión. Teniendo en cuenta que el tamaño atómico es del orden del ångström y que la longitud de onda óptica es del orden de la fracción de micra (un cociente de más de tres órdenes de magnitud para radiación visible), es claro que se trata de una magnífica aproximación. Esto implica que el operador campo puede escribirse de la forma

$$\hat{\vec{E}} = i\mathcal{E} [\hat{\vec{e}} \hat{a} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{\vec{e}}^* \hat{a}^\dagger \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})], \quad (3a)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}}, \quad (3b)$$

donde  $V$  es el volumen de cuantización,  $\omega$  es la frecuencia angular del modo,  $\vec{e}$  es un vector de Jones unitario que caracteriza la polarización del modo y  $\vec{r}$  es la posición del átomo, e.g. su centro de masas ya que no es importante precisarlo pues estamos dentro de la aproximación dipolar eléctrica, con lo que tomaremos por simplicidad  $\vec{r} = 0$ , con lo que  $\hat{\vec{E}} = i\mathcal{E} \hat{\vec{e}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ . También supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $\vec{e}$  es real (polarización lineal). Por otra parte, el operador momento dipolar se escribe, en la base de estados atómicos  $\{|e\rangle, |f\rangle\}$ , de la forma

$$\hat{\vec{\mu}} = \vec{\mu}_{ef} |e\rangle\langle f| + \vec{\mu}_{fe} |f\rangle\langle e| = \vec{\mu} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (4)$$

donde hemos introducido los operadores subida  $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle f|$ , y bajada,  $\hat{\sigma}_- = |f\rangle\langle e|$ , y hemos tomado, por simplicidad pero sin pérdida de generalidad,  $\vec{\mu}_{ef} = \vec{\mu}_{fe}^* \equiv \vec{\mu}$ . Los operadores  $\hat{\sigma}_+$ ,

$\hat{\sigma}_-$  y  $\hat{\sigma}_z$  son los operadores de Pauli, que verifican  $[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z$ , etc., y que en este contexto se denominan operadores de pseudospín. El Hamiltoniano de interacción queda

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} i \hbar g (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (5)$$

donde

$$g = \frac{2\mu}{\hbar} \mathcal{E} = \sqrt{\frac{2\omega\mu^2}{\epsilon_0 \hbar V}}, \quad (6)$$

es la constante de acoplamiento, siendo  $\mu = \vec{\mu} \cdot \vec{e}$ . Reuniendo todas las piezas

$$\hat{H} = \hbar \left[ \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_A \hat{\sigma}_z + \frac{1}{2} i g (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \right], \quad (7)$$

Hamiltoniano que suele denominarse de Rabi.

## 2.2 Aproximación de la onda rotante

Reescribamos (7) de la forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{i1} + \hat{H}_{i2}, \quad (8a)$$

$$\hat{H}_{i1} = \frac{1}{2} i \hbar g (\hat{a} \hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (8b)$$

$$\hat{H}_{i2} = i \frac{1}{2} \hbar g (\hat{a} \hat{\sigma}_- - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+), \quad (8c)$$

que resalta la existencia de dos tipos de términos de interacción.  $\hat{H}$  describe una interacción en la que se conserva la energía, pues es independiente del tiempo. Sin embargo, mientras que los términos de  $\hat{H}_{i1}$  conservan la energía individualmente (pues  $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$  indica que se excita el átomo a costa de la desaparición de un fotón, y  $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$  indica que se gana un fotón a costa de la desexcitación del átomo); los términos de  $\hat{H}_{i2}$  no lo hacen (ya que  $\hat{a} \hat{\sigma}_-$  indica que se destruye un fotón al tiempo que se desexcita el átomo, y  $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+$  indica que se excita el átomo al tiempo que se crea un fotón).

Vamos a escribir (7) en forma matricial en la base  $\{|a, n\rangle; \text{con } a = e, f \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$  que es una base ortonormal del espacio de Hilbert conjunto del sistema campo y átomo  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_{rad}$ . Es fácil ver que

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & E_{f,n} & 0 & 0 & W_{n,n+1} & \cdots \\ \cdots & 0 & E_{e,n} & V_{n,n+1} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & V_{n,n+1} & E_{f,n+1} & 0 & \cdots \\ \cdots & W_{n+1,n} & 0 & 0 & E_{e,n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde aparecen las cantidades ( $a = e, n$ )

$$E_{a,n} = \langle a, n | \hat{H}_0 | a, n \rangle = \hbar \left( n\omega \pm \frac{1}{2} \omega_A \right), \quad (10a)$$

$$V_{n,n+1} = \langle f, n+1 | \hat{H}_{i1} | e, n \rangle = i\hbar g \sqrt{n+1}, \quad (10b)$$

$$W_{n,n+1} = \langle f, n | \hat{H}_{i2} | e, n+1 \rangle = i\hbar g \sqrt{n+1}, \quad (10c)$$

Si calculamos ahora perturbativamente la energía del sistema, tratamiento válido para  $g$  muy pequeña, encontramos fácilmente que la corrección de orden más bajo de la energía  $E_{e,n}$  viene dada por [11]

$$\begin{aligned} E_{e,n}^{(2)} &= \frac{|V_{n+1,n}|^2}{E_{e,n} - E_{f,n+1}} + \frac{|W_{n-1,n}|^2}{E_{e,n} - E_{f,n+1}} = \\ &= \hbar g^2 \left( \frac{n+1}{\omega_A - \omega} + \frac{n}{\omega_A + \omega} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

implicando el cálculo de correcciones de orden superior la aparición de potencias de términos como los anteriores. Este resultado muestra que los términos relativos debidos a  $\hat{H}_{i2}$  contribuyen muy poco en términos relativos siempre que  $\omega \sim \omega_A$  y que, por supuesto,  $g$  y  $n$  sean pequeñas. Así, cuando la interacción es cuasi-resonante y el acoplamiento no es demasiado intenso, se justifica la no consideración de  $\hat{H}_{i2}$ . Esta se denomina aproximación de la onda rotante<sup>1</sup> (RWA, en sus siglas inglesas por *rotating wave approximation*) y su importancia es enorme ya que al realizarla, el Hamiltoniano queda dividido en cajas que afectan únicamente a los estados  $|e, n\rangle$  y  $|f, n+1\rangle$ , es decir, el espacio de Hilbert tiene, en este caso, una dimensión efectiva dos, mientras que si no se hace la RWA el espacio de Hilbert es de dimensión infinita, véase la matriz (9).

Hemos de recalcar, sin embargo, que los términos ignorados pueden tener una influencia no despreciable en ciertas circunstancias, concretamente cuando la frecuencia de la transición es comparable con la frecuencia de Rabi. En el dominio óptico del espectro la RWA es una excelente aproximación pues la frecuencia de Rabi es siempre muchísimo menor que la frecuencia óptica, pero no es difícil salirse del

rango de validez de la aproximación cuando se trabaja con microondas, o con ondas de radiofrecuencia, que es lo que ocurre en los experimentos con microcavidades (QED de cavidad, véase más abajo), en los que la frecuencia de Rabi es comparable a la frecuencia de la radiación. En este caso, los términos contra-rotantes inducen un corrimiento de la resonancia, denominado corrimiento Bloch-Siegert [12], así como la existencia de procesos multifotónicos con un número impar de quanta.

También podemos entender la RWA desde otro punto de vista. Para ello es conveniente pasar a la imagen de interacción con el fin de eliminar del Hamiltoniano las frecuencias elevadas (esto es,  $\omega$  y  $\omega_A$ ). Para ello introducimos el operador unitario

$$U = \exp \left[ i\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z \right) t \right], \quad (12)$$

y definimos  $|\overline{\Psi}\rangle = \hat{U}|\Psi\rangle$ . El nuevo vector estado  $|\overline{\Psi}\rangle$  verifica la ecuación de Schrödinger para el nuevo Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger. \quad (13)$$

Es fácil ver que

$$\hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger = \hat{H}_0 + \hat{U} \hat{H}_{int} \hat{U}^\dagger, \quad (14a)$$

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger = -\hat{H}_0 - \frac{1}{2} \hbar (\omega - \omega_A) \hat{\sigma}_z, \quad (14b)$$

y por tanto

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \hbar \delta \hat{\sigma}_z + \hat{U} \hat{H}_{int} \hat{U}^\dagger, \quad (15)$$

donde hemos introducido la desintonía

$$\delta = (\omega - \omega_A). \quad (16)$$

Por otra parte haciendo uso de la conocida propiedad (lema de Hadamard, que es una consecuencia del teorema de Baker-Hausdorff)

$$e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{x-\hat{A}} = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (17)$$

es fácil demostrar que

$$e^{i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{-i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\omega t}, \quad (18a)$$

$$e^{i\frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_\pm e^{-i\frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z t} = \hat{\sigma}_\pm e^{\pm i\omega t}, \quad (18b)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \hbar [-\delta \hat{\sigma}_z + ig(\hat{a} \hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-)] + \\ &+ \frac{i}{2} \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{2i\omega t} - \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-2i\omega t}). \end{aligned} \quad (19)$$

<sup>1</sup> Este nombre tan poco sugerente tiene su origen en el problema de la interacción dipolar magnética que experimenta un spin en el seno de dos campos magnéticos, uno estacionario y otro oscilante, problema isomorfo al aquí tratado pero estudiado mucho antes, en la década de 1940, particularmente por el premio Nobel de física I. I. Rabi. No está de más recordar que estos estudios han permitido, entre otras cosas, la importantísima técnica diagnóstica de la resonancia magnética nuclear (RMN).

En esta expresión se aprecia claramente que los términos contenidos en  $\hat{H}_{i2}$  (los últimos a la derecha) vienen multiplicados por exponenciales de alta frecuencia. Vemos que la RWA consiste en eliminar estos, que a menudo reciben el nombre de términos contrarrotantes. Así pues, el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings, en la aproximación de la onda rotante y en la imagen de interacción, se escribe

$$\hat{H}_{MJC} = \frac{1}{2} \hbar [-\delta \hat{\sigma}_z + ig(\hat{a} \hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-)]. \quad (20)$$

Dado que  $\hat{H}_{MJC}$  sólo conecta los estados  $|e, n\rangle$  y  $|f, n+1\rangle$ , nos conviene escribir el Hamiltoniano en esa base. Tras lo visto antes es claro que

$$\hat{H}_n = \frac{1}{2} \hbar \begin{bmatrix} -\delta & -\Omega_n \\ -\Omega_n^* & \delta \end{bmatrix}, \quad (21)$$

donde hemos introducido la frecuencia de Rabi  $\Omega_n$

$$\Omega_n = ig\sqrt{n+1} = i \sqrt{\frac{2\omega\mu^2(n+1)}{\epsilon_0 \hbar V}}, \quad (22)$$

indicando el subíndice  $n$  que las cantidades se refieren a la interacción entre los estados  $|e, n\rangle$  y  $|f, n+1\rangle$ .

## 2. Ión atrapado en interacción con luz clásica

En la sección anterior hemos deducido el Hamiltoniano del MJC para el problema original de un modo electromagnético en interacción con un átomo de dos niveles. Siguiendo a [4] y [13] (véase también [9,10]) vamos a demostrar a continuación que un ión forzado a moverse en el seno un potencial armónico mientras interacciona con un campo electromagnético clásico viene descrito también, en cierto límite, por el MJC. En el tratamiento que sigue nada distingue el hecho de que tratemos con un ión en lugar de con un átomo, y si nos referimos a un ión es porque, desde el punto de vista experimental, es mucho más fácil atrapar un ión que un átomo y es así como se hacen los experimentos.

Consideremos un ión de dos niveles de masa  $m$  y frecuencia de Bohr  $\omega_A$  inmerso en un potencial armónico unidimensional. Denotamos con  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  a los operadores posición y momento del ión. Este interacciona, además, con un campo electromagnético clásico de frecuencia  $\omega_L$ . El Hamiltoniano del sistema podemos escribirlo, de nuevo, en la forma  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ , donde ahora  $\hat{H}_0$

corresponde al ión en el seno de la trampa armónica y  $\hat{H}_{int}$  a su interacción con el campo clásico. Claramente

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_T^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega_A \hat{\sigma}_z, \quad (23)$$

que contiene los términos de energía cinética (primer término) y energía potencial (segundo) del centro de masas del ión en el seno de un potencial armónico, y el término de energía interna del ión (el tercero). Dado que el ión está en el seno de un potencial armónico, resultará conveniente expresar los operadores posición y momento del átomo en términos de los operadores creación y destrucción de cuantos en el modo de la trampa armónica

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_T m}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (24a)$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_T m}} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger), \quad (24b)$$

con lo que

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_T \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \hbar \omega_A \hat{\sigma}_z, \quad (25)$$

donde hemos eliminado el término constante  $\hbar \omega_T/2$ . En cuanto al Hamiltoniano de interacción, este sigue teniendo la forma  $\hat{H}_{int} = -\hat{\mu} \cdot \hat{\vec{E}}$  pero ahora el campo electromagnético es una onda plana clásica que se propaga a lo largo de la dirección  $x$  (en la que se produce el movimiento armónico del ión en la trampa). Podemos escribir por tanto  $\vec{E} = \vec{e} \mathcal{E}_c \cos(\omega_L t - k_L x)$ , donde hemos tomado la amplitud del campo clásico,  $\mathcal{E}_c$ , real y su polarización lineal sin pérdida de generalidad. Usando (4) tenemos

$$\hat{H}_{int} = \hbar \omega_S (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \cos(\omega_L t - k_L \hat{x}), \quad (26)$$

donde aparece el operador posición del átomo. Además hemos introducido la frecuencia de Rabi (semiclásica) del campo

$$\Omega_S = \frac{\mu}{\hbar} \mathcal{E}_c. \quad (27)$$

Ahora, a diferencia del MJC original, no podemos fijar arbitrariamente la posición del ión (pues depende del potencial armónico que la gobierna) y hemos de mantenerla como una variable. Haciendo uso de (24) el Hamiltoniano queda

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hbar (\omega_T \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \omega_A \hat{\sigma}_z) + \\ & + \frac{1}{2} \hbar \Omega_S (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{F} e^{-i\omega_L t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega_L t}), \end{aligned} \quad (28)$$

donde

$$\hat{F} = \exp[i\varepsilon(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)], \quad \varepsilon = k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_T m}}. \quad (29)$$

Pasemos ahora a la imagen de Dirac usando la transformación unitaria

$$U' = \exp\left(i \frac{\hat{H}_0}{\hbar} t\right). \quad (30)$$

Tras lo visto en la sección anterior, Ecs. (13) y (18), es fácil obtener que el Hamiltoniano transformado es

$$\hat{H} = \hbar \frac{\Omega_S}{2} (\hat{\sigma}_+ e^{i\omega_A t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_A t}) \times \\ \times (\hat{F} e^{-i\omega_L t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega_L t}), \quad (31)$$

con

$$\hat{F} = \exp[i\varepsilon(\hat{b} e^{i\omega_T t} + \hat{b}^\dagger e^{-i\omega_T t})]. \quad (32)$$

Supongamos ahora que  $\varepsilon$  es lo bastante pequeño (más abajo discutimos el significado de esto) como para que

$$\hat{F} \cong 1 + i\varepsilon(\hat{b} e^{i\omega_T t} + \hat{b}^\dagger e^{-i\omega_T t}), \quad (33)$$

Sustituyendo y desarrollando obtenemos

$$\frac{\hat{H}}{\hbar \frac{\Omega_S}{2}} = \hat{\sigma}_+ (e^{i(\omega_A - \omega_L)t} + e^{i(\omega_A + \omega_L)t}) + \\ + \hat{\sigma}_- (e^{-i(\omega_A - \omega_L)t} + e^{-i(\omega_A + \omega_L)t}) + \\ + i\varepsilon \hat{b} \hat{\sigma}_+ (e^{i(\omega_T - \omega_L + \omega_A)t} - e^{i(\omega_T + \omega_L + \omega_A)t}) + \\ + i\varepsilon \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_+ (e^{-i(\omega_T + \omega_L - \omega_A)t} - e^{-i(\omega_T - \omega_L - \omega_A)t}) + \\ + i\varepsilon \hat{b} \hat{\sigma}_- (e^{i(\omega_T - \omega_L - \omega_A)t} - e^{i(\omega_T + \omega_L - \omega_A)t}) + \\ + i\varepsilon \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_- (e^{-i(\omega_T + \omega_L + \omega_A)t} - e^{-i(\omega_T - \omega_L + \omega_A)t}),$$

expresión que muestra la existencia de diversas resonancias en el sistema. Dependiendo de la frecuencia del láser hay resonancias para  $\omega_L = \omega_A$ ,  $\omega_L = \omega_A + \omega_T$  (primer *blue-sideband*), y  $\omega_L = \omega_A - \omega_T$  (primer *red-sideband*). En el primer caso, la onda electromagnética resuena exactamente con la transición iónica, mientras que en los últimos dos casos la luz está sintonizada a uno u otro de los *sidebands* vibracionales de aquella. Si consideramos el *red-sideband* y suponemos además que  $\omega_A, \omega_T \gg \Omega$ , de forma que se puede aplicar la RWA, obtenemos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} i \hbar \varepsilon \Omega_S (\hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_+ - \hat{b} \hat{\sigma}_-), \quad (35)$$

que es como el Hamiltoniano MJC particularizado para resonancia, esto es la Ec. (20) con  $\delta = 0$ , identificado  $g$  con  $\varepsilon \Omega_S$ . Hemos demostrado que,

en el límite considerado, el problema tratado en este apartado es isomorfo al descrito por el MJC.

Cabe preguntarse qué ocurre si se escoge la resonancia con el *blue-sideband*. En este caso lo que se obtiene, tras realizar la RWA, es

$$\hat{H} = \frac{1}{2} i \hbar \varepsilon \Omega_S (\hat{b} \hat{\sigma}_+ - \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (36)$$

que es un Hamiltoniano que da lugar a transiciones  $|f, n\rangle$  y  $|e, n+1\rangle$  y que no puede darse, por tanto, en una interacción óptico-cuántica. Vemos que la riqueza de este sistema, el ión atrapado forzado exteriormente con un haz de luz, es muy grande.

Analícemos finalmente qué significado físico tiene el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para ello tengamos en cuenta que la amplitud del estado fundamental del potencial armónico vale

$$a_0 = 2\langle \hat{x}^2 \rangle = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_T m}} \langle 0 | \hat{b} \hat{b}^\dagger | 0 \rangle = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_T m}}, \quad (37)$$

con lo que el parámetro  $\varepsilon$  se puede escribir de la forma

$$\varepsilon = \frac{a_0}{\lambda/\pi}, \quad (38)$$

lo que indica que el requerimiento  $\varepsilon \ll 1$  significa que la amplitud máxima del movimiento atómico en el de la trampa ha de ser mucho menor que  $\lambda/\pi$  con  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación, es decir, el movimiento iónico ha de estar fuertemente constreñido por el potencial armónico de la trampa. A este límite se le denomina régimen de *Lamb-Dicke*.

También podemos reescribir  $\varepsilon$  de otra forma

$$\varepsilon = k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_T m}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 k_L^2 / (2m)}{\hbar \omega_T}} = \sqrt{\frac{E_T}{E_{\omega_T}}}, \quad (39)$$

con lo que  $\varepsilon^2$  también puede entenderse como el cociente entre la energía clásica de retroceso del ión  $E_r$ , y la energía de un cuanto de la trampa armónica  $E_{\omega_T} = \hbar \omega_T$ . La energía de retroceso  $E_{\omega_T} = \hbar^2 k_L^2 / (2m)$  es la energía cinética adquirida por el átomo o ión tras la emisión de un fotón de frecuencia  $\omega_L$  (nótese que aquí el campo lo tratamos clásicamente). En el límite clásico, esto es cuando  $\omega_T$  no es muy grande, los estados de la trampa armónica están muy próximos entre sí comparado con la energía de retroceso, con lo que el parámetro  $\varepsilon$  es muy grande. Esto implica que la absorción o emisión de radiación luminosa por parte del ión provocará una modificación



grande en su estado vibracional pues podrá saltar un número alto de estados en cada absorción/emisión. En este caso habrá transiciones no sólo a un fotón, sino mediante procesos multifotónicos (nótese que el desarrollo en serie de la exponencial (29) contiene potencias  $(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^m$  que describen diversos tipos de procesos multifotónicos). Por el contrario, cuando  $\omega_T$  es muy grande de forma que  $\varepsilon$  es muy pequeño (régimen de *Lamb-Dicke*), los estados de la trampa están bien separados comparado con  $E_r$  y serán necesarias muchas absorciones y emisiones de luz para que se produzca un cambio en el estado vibracional iónico. Se entiende así que en este límite, en el que sólo hay procesos a un fotón, el sistema pueda reducirse a un MJC cuando está adecuadamente sintonizado el láser (recordemos que al primer red-sideband vibracional de la transición atómica).

#### 4. Resolución de la ecuación de Schrödinger

Para calcular el valor esperado y las fluctuaciones de los observables necesitamos el vector estado del sistema. Calcularemos los estados vestidos de éste para resolver la ecuación de Schrödinger.

##### 4.1 Estados vestidos

Hemos de diagonalizar  $\hat{H}_n$ , Ec. (21). Denotando por  $\tilde{\omega}_n^\pm$  a sus autovalores es fácil obtener que

$$\tilde{\omega}_n^\pm = \pm \tilde{\Omega}_n \equiv \pm \sqrt{|\Omega_n|^2 + \delta^2}, \quad (40)$$

frecuencias que vienen representadas en la figura 1. Vemos que la interacción modifica la energía de los estados del sistema eliminando, en particular, la degeneración existente en ausencia de interacción para  $\delta = 0$ . Escribimos los autoestados como  $|\pm\rangle_n = e_\pm |e, n\rangle + f_\pm |f, n+1\rangle$  y resolviendo  $\hat{H}_n |\pm\rangle_n = \pm \hbar \tilde{\Omega}_n / 2 |\pm\rangle_n$  obtenemos

$$|+\rangle_n = \cos \theta_n |e, n\rangle - \sin \theta_n |f, n+1\rangle, \quad (41a)$$

$$|-\rangle_n = \sin \theta_n |e, n\rangle + \cos \theta_n |f, n+1\rangle, \quad (41b)$$

con

$$\tan 2\theta_n = \frac{|\Omega_n|}{\delta}, \quad (42)$$

Nótese que para  $\delta = 0$ , los estados son, sencillamente, la suma y la diferencia, normalizadas, de los estados originales.

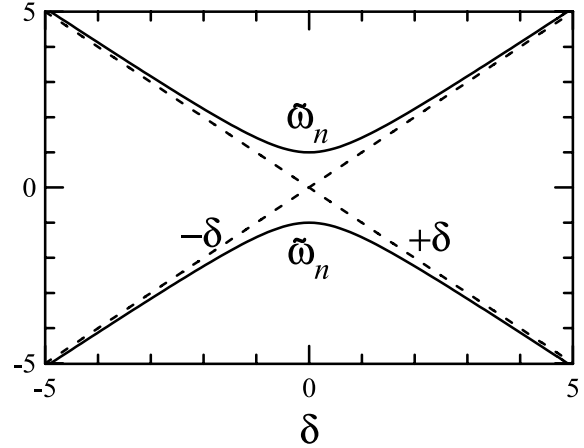


Fig. 1: Energías, normalizadas a  $\hbar$ , en la imagen de interacción. Las líneas discontinuas representan estas energías en ausencia de campo, que son  $\pm\delta$ . Las líneas continuas representan  $\tilde{\omega}_n^\pm$ .

##### 4.2 Evolución temporal

Hemos de resolver la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}_n |\Psi(t)\rangle. \quad (43)$$

Escribimos

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n^+(t) |+\rangle_n + b_n^-(t) |-\rangle_n], \quad (44)$$

y haciendo uso de  $\hat{H}_n |+\rangle_n = \pm \hbar \tilde{\Omega}_n / 2 |+\rangle_n$  y proyectando sobre  ${}_n\langle + |$  obtenemos

$$\frac{db_n^\pm(t)}{dt} = \mp i \frac{\tilde{\Omega}_n}{2} b_n^\pm(t) \rightarrow b_n^\pm(t) = b_n^\pm(0) e^{\mp i \frac{\tilde{\Omega}_n}{2} t}, \quad (45)$$

y por tanto la solución de la ecuación de Schrödinger es

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n^+(0) e^{-i \frac{\tilde{\Omega}_n}{2} t} |+\rangle_n + b_n^-(0) e^{+i \frac{\tilde{\Omega}_n}{2} t} |-\rangle_n \right], \quad (46)$$

Hasta aquí el tratamiento es completamente general, pero en este momento es conveniente concretar algo el estado inicial para no arrastrar expresiones demasiado complicadas. Supongamos por tanto que en  $t = 0$  el átomo se encuentra excitado pero dejemos que el campo se encuentre en una superposición arbitraria de estados número

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |e, n\rangle. \quad (47)$$

comparando con (46) en  $t=0$  obtenemos  $b_k^+(0) = c_k \cos \theta_k$  y  $b_k^-(0) = c_k \sin \theta_k$ , con lo que

$$\overline{|\Psi(t)\rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[ \cos \theta_n e^{-i\frac{\tilde{\Omega}_n}{2}t} |+\rangle_n + \sin \theta_n e^{+i\frac{\tilde{\Omega}_n}{2}t} |-\rangle_n \right], \quad (48)$$

Haciendo ahora uso de (41) obtenemos finalmente

$$\overline{|\Psi(t)\rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} [E_n(t)|e, n\rangle_n + F_n(t)|f, n+1\rangle_n], \quad (49a)$$

$$E_n(t) = c_n \left[ \cos^2 \theta_n e^{-i\frac{\tilde{\Omega}_n}{2}t} + \sin^2 \theta_n e^{+i\frac{\tilde{\Omega}_n}{2}t} \right], \quad (49b)$$

$$F_n(t) = -c_n \sin \theta_n \cos \theta_n \left( e^{-i\frac{\tilde{\Omega}_n}{2}t} - e^{+i\frac{\tilde{\Omega}_n}{2}t} \right), \quad (49c)$$

que es el vector estado en el instante  $t$  cuando el estado inicial del átomo es el excitado. Más adelante nos restringiremos al caso resonante  $\delta = 0$  para el que  $\sin \theta_n = \cos \theta_n = 1/\sqrt{2}$ , ec. (42), con lo que

$$\overline{|\Psi(t)\rangle}_{\delta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{|\Omega_n|}{2}t\right) |e, n\rangle + i \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{|\Omega_n|}{2}t\right) |f, n+1\rangle, \quad (50)$$

## 5. Evolución de las propiedades atómicas

Ahora que disponemos del vector estado vamos a estudiar, en primer lugar, cuál es la probabilidad de excitación atómica, que puede ser determinada experimentalmente tal y como discutiremos más adelante. Es además un observable que podemos comparar directamente con las predicciones de la teoría semiclásica, lo que permite buscar fenómenos genuinamente cuánticos en lo que a la naturaleza del campo se refiere.

La probabilidad de que el átomo se encuentre excitado en un instante cualquiera,  $p_e(t)$  es

$$p_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_e(n, t), \quad (51)$$

$$p_e(n, t) = |\langle e, n | \overline{|\Psi(t)\rangle}|^2, \quad (52)$$

siendo  $p_e(n, t)$  la probabilidad de que el átomo esté excitado y el modo del campo tenga  $n$

fotones. Haciendo uso de (49), tras un poco de álgebra se obtiene

$$p_e(n, t) = |c_n|^2 \left[ 1 - \left( \frac{|\Omega_n|}{\tilde{\Omega}_n} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\tilde{\Omega}_n}{2} t \right) \right], \quad (53)$$

y por tanto

$$p_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[ 1 - \left( \frac{|\Omega_n|}{\tilde{\Omega}_n} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\tilde{\Omega}_n}{2} t \right) \right], \quad (54)$$

siendo  $p_n = |c_n|^2$  la probabilidad de que el modo tenga  $n$  fotones en el estado inicial.

### 5.1. Campo inicial en estado número

En este caso  $p_k = \delta_{kn}$  con lo que

$$p_e^{(n)}(t) = 1 - \left( \frac{|\Omega_n|}{\tilde{\Omega}_n} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\tilde{\Omega}_n}{2} t \right), \quad (55)$$

donde el superíndice  $(n)$  hace referencia al número de fotones del estado de Fock inicial. La Fig. 2 muestra  $p_e^{(n)}(t)$  para varios valores del número de fotones y la desintonía. Este comportamiento se conoce como oscilaciones de Rabi: la probabilidad de que el átomo esté excitado oscila periódicamente con el tiempo, es decir, el átomo cede la energía al campo de forma que después el campo se la vuelve a ceder al átomo.

El resultado es extraordinariamente similar al resultado obtenido con la teoría semiclásica. Recordemos que éste es idéntico al obtenido salvo por el hecho de que la frecuencia de Rabi viene ahora dada por la Ec. (27). Hemos de comparar esta expresión con (22) y para ello comparamos las expresiones clásica y cuántica de la densidad de energía del campo, que son  $W = \epsilon_0 \mathcal{E}_C^2 / 2$  y  $W = \bar{n} \hbar \omega / V$  (con  $\bar{n}$  el número medio de fotones) respectivamente. Concluimos que  $\mathcal{E}_C^2 = 2n \hbar \omega / (\epsilon_0 V)$ , de donde

$$|\Omega_S| = \sqrt{\frac{2\omega\mu^2\bar{n}}{\epsilon_0\hbar V}}, \quad (56)$$

expresión igual a (22) para  $\bar{n}$  grande, de forma que  $n+1 \approx \bar{n}$ . Sin embargo, hay una diferencia esencial entre las expresiones cuánticas y semiclásicas de la frecuencia de Rabi: su valor para  $n=0$ . Mientras que en ese caso  $\Omega_{SC}=0$ , ya que  $\mathcal{E}_{SC}=0$  en el vacío, en el caso cuántico  $\Omega_0 \neq 0$ . Esto significa que la teoría cuántica predice oscilaciones de Rabi en el vacío, a diferencia de la teoría semiclásica que predice que el átomo permanecerá excitado indefinidamente. (Esto siempre que el átomo esté excitado: si el estado inicial del sistema es  $|f, 0\rangle$ , este estado no

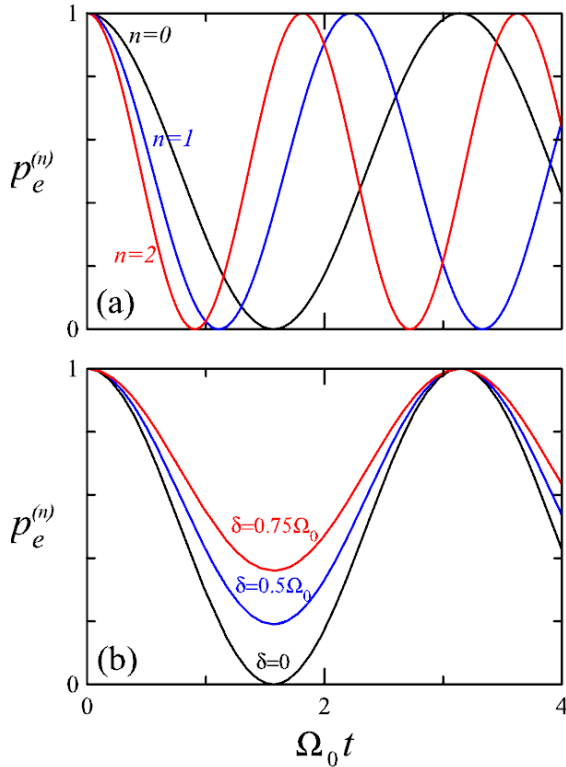


Fig. 2: Oscilaciones de Rabi. Probabilidad de que el átomo esté excitado en función del tiempo normalizado  $\tau = \Omega_0 t$  con  $\Omega_0 = \sqrt{2\omega\mu^2/(\epsilon_0\hbar V)}$ , ver (22). En (a) se muestran los casos  $n=0, 1$ , y  $2$  para  $\delta=0$ . En (b)  $\delta=0, 0.5\Omega_0$  y  $0.75\Omega_0$  para  $n=0$ .

evoluciona ya que el Hamiltoniano del sistema no lo acopla con ningún otro estado en ausencia de fotones). Vemos pues que la teoría cuántica permite la desexcitación atómica en el vacío. Así, el modelo de Jaynes-Cummings contiene el *esqueleto* de la emisión espontánea. Nótese que lo que aquí hemos obtenido no es la emisión espontánea, pues el átomo vuelve a excitarse al cabo de un periodo de Rabi: la emisión espontánea ocurre cuando es un continuo de modos lo que interacciona con el átomo, y no un solo modo como ocurre en el MJC.

## 5.2. Campo inicial en estado coherente

En el apartado anterior hemos visto que el MJC, cuando el campo inicial se encuentra en un estado número, predice básicamente las mismas oscilaciones de Rabi que predice la teoría semiclásica con la importante salvedad de estado inicial vacío. Esto podría resultar un tanto sorprendente dado que el estado número es el estado cuántico del campo menos parecido a un campo clásico. Vamos a calcular ahora qué ocurre cuando el estado inicial del campo es un estado

coherente, que es el estado cuántico más parecido a un campo clásico. Por simplicidad nos limitaremos a estudiar el caso resonante, i.e., en lo que sigue tomaremos  $\delta=0$ .

A partir de la expresión (54), podemos escribir

$$p_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n p_e^{(n)}(t), \quad (57)$$

con  $p_e^{(n)}(t)$  dado por la Ec. (55). Así, para un campo inicial en un estado superposición sólo necesitamos saber la distribución inicial del número de fotones para poder realizar el cálculo de  $p_e(t)$ . En el caso de un estado coherente inicial hemos de tomar la distribución de Poisson para  $p_k$  con lo que

$$p_e(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos^2\left(\frac{|\Omega_n|}{2} t\right), \quad (58)$$

y haciendo uso de la igualdad  $2\cos^2(\phi) = [1 + \cos(\phi)]$ , puede escribirse como

$$p_e(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 + e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(g\sqrt{n+1}t) \right] \quad (59)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $|\Omega_n| = g\sqrt{n+1}t$ , Ec. (22). Desafortunadamente esta suma no puede hacerse de forma exacta, lo que obliga a hacer aproximaciones para obtener algún resultado analítico.

Fijémonos en el término  $\cos(g\sqrt{n+1}t)$  que aparece multiplicado por la distribución de Poisson. Esta distribución tiene un número medio  $\bar{n} = |\alpha|^2$  y una varianza  $\sqrt{\bar{n}} = |\alpha|$ . Así, si el estado coherente inicial es intenso, i.e., si  $|\alpha|^2 \gg 1$ , podremos despreciar en el sumatorio de  $p_e(t)$  la contribución de los valores de  $n$  que estén alejados algunas desviaciones estándar del valor medio  $\bar{n}$ , pues para estos la distribución de Poisson toma valores despreciables. Por otra parte, cuando  $\bar{n}$  es grande, la distribución de Poisson es muy simétrica respecto a  $\bar{n}$ , a diferencia de lo que ocurre para  $\bar{n}$  pequeño, como se ejemplifica en la Fig. 3. Hacemos pues la siguiente aproximación, válida para  $|\alpha|$  grande

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} &= \sqrt{\bar{n}} \sqrt{1 + \frac{n+1-\bar{n}}{\bar{n}}} \approx \\ &\approx \sqrt{\bar{n}} \left( 1 + \frac{n-\bar{n}}{2\bar{n}} \right) = |\alpha| + \frac{n-|\alpha|^2}{2|\alpha|}. \end{aligned} \quad (60)$$

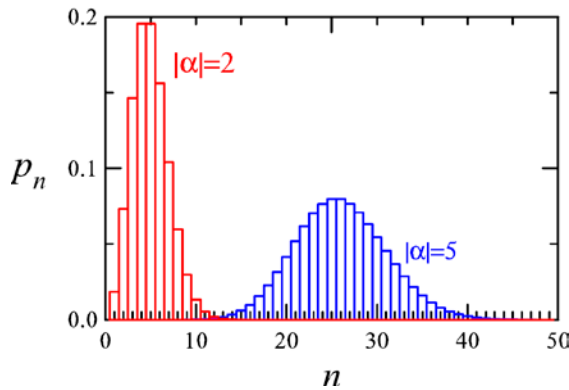


Fig. 3: Distribución de Poisson para dos valores del número medio  $\bar{n} = |\alpha|^2$ . Nótese que para  $|\alpha|=2$  ( $\bar{n} = 4$ ) la distribución es poco simétrica mientras que para  $|\alpha|=5$  ( $\bar{n} = 25$ ) es muy simétrica.

La validez de esta aproximación será tanto mayor cuanto mayor sea  $|\alpha|$ , claro está, pero hemos de tener en cuenta que la función aproximada,  $\sqrt{n+1}$ , aparece en el argumento de una función coseno, lo que hace que la aproximación dejará de ser válida para  $gt$  muy grande. Sustituyendo (60)

$$\cos(g\sqrt{n+1}t) \approx \cos(|\alpha|gt) \cos\left(\frac{n-|\alpha|^2}{2|\alpha|}gt\right) - \sin(|\alpha|gt) \sin\left(\frac{n-|\alpha|^2}{2|\alpha|}gt\right). \quad (61)$$

Al realizar ahora el sumatorio, los términos con dependencia sinusoidal en  $n$  darán una contribución nula por ser impar la función seno (suponiendo, claro está, que la distribución de Poisson es simétrica respecto al máximo, lo que es cierto sólo para  $|\alpha|$  grande, tal y como hemos comentado antes). Por tanto sólo hemos de retener los términos con dependencia coseno en  $n$

$$p_e(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-|\alpha|^2} \cos(|\alpha|gt) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos\left(\frac{n-|\alpha|^2}{2|\alpha|}gt\right) \quad (62)$$

El sumatorio que aparece en esta expresión sí es analítico

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos\left(\frac{n-|\alpha|^2}{2|\alpha|}gt\right) = e^{-\frac{1}{2}i|\alpha|gt + |\alpha|^2 \exp\left(\frac{igt}{2|\alpha|}\right)} + c.c. \quad (63)$$

y tras un poco de álgebra  $p_e(t)$  puede finalmente escribirse

$$p_e(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(|\alpha|t) \times \cos\left(\frac{|\alpha|}{2}t - |\alpha|^2 \sin\left(\frac{t}{2|\alpha|}\right)\right) e^{|\alpha|^2 \cos\frac{t}{2|\alpha|} - 1}, \quad (64)$$

con  $\tau=gt$ .

Antes de analizar esta expresión, recordemos que su validez se limita a valores altos de  $|\alpha|$  y valores pequeños de  $\tau=gt$ . Supongamos primeramente que  $|\alpha| \gg \tau$ . En este caso es fácil ver que podemos aproximar la expresión anterior por

$$p_e(t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(|\alpha|t) e^{-\tau^2/8}], \quad (65)$$

que es una expresión sumamente interesante ya que predice la existencia de oscilaciones de Rabi de frecuencia  $|\alpha|$  amortiguadas. La exponencial alcanza el valor  $1/e$  en  $\tau=2\sqrt{2}$ , i.e., en  $t=2\sqrt{2}/g$ . Este fenómeno de amortiguamiento de las oscilaciones de Rabi se conoce como *colapso* de Cummings, quien lo descubrió en 1965 [14] tras un análisis numérico del problema (la expresión (65) fue deducida más tarde [15]). En la Fig. 4 se representa la probabilidad  $p_e(t)$  dada por (65).

¿Por qué colapsan las oscilaciones de Rabi cuando el campo inicial está en un estado coherente? La razón es sencilla: dado que la frecuencia de Rabi es una función del número de fotones del modo, véase la Ec. (22), y dado que el estado coherente es una superposición de estados número, la oscilación de Rabi con estado coherente inicial es el resultado de la superposición, pesada por la distribución de Poisson, de oscilaciones de Rabi de frecuencias diferentes. Esta superposición da lugar, naturalmente, a una oscilación amortiguada ya que las diferentes oscilaciones de Rabi se desfasan entre sí. Podemos incluso estimar el tiempo que tardan en desfasarse: si el número medio de fotones es  $\bar{n} = |\alpha|^2$ , la frecuencia media de Rabi será  $|\bar{\Omega}_n| = g|\alpha|$  cuando  $|\alpha|$  es grande, Ec. (22), y las frecuencias más alejadas de esta frecuencia media, llamémoslas  $\Omega_n^{max}$  y  $\Omega_n^{min}$ , serán del orden de

$$\Omega_n^{max,min} \sim g\sqrt{|\alpha|^2 \pm l|\alpha|} = |\bar{\Omega}_n| \sqrt{|\bar{\Omega}_n| \pm lg} \approx |\bar{\Omega}_n| \left(1 \pm \frac{l}{2} \frac{g}{|\bar{\Omega}_n|}\right) = |\bar{\Omega}_n| \pm \frac{l}{2} g, \quad (66)$$

con  $l$  alrededor de la unidad. Las oscilaciones individuales que oscilan con estas frecuencias

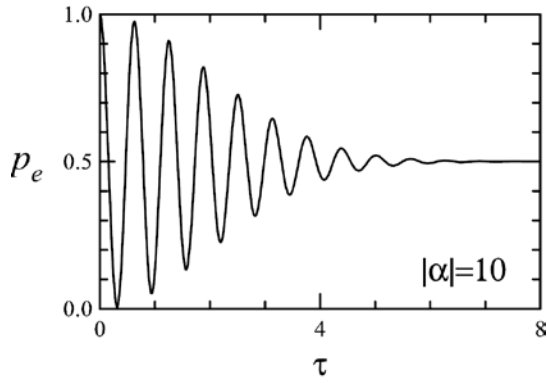


Fig. 4: Colapso de Cummings predicho por la Ec. (65) obtenido para  $|\alpha|=10$ . El tiempo  $\tau=gt$ .

extremas tardarán un tiempo del orden de  $\tau_{\text{col}}=(\Omega_n^{\text{max}} - \Omega_n^{\text{min}})^{-1}\pi \sim \pi/(lg)$  en desfasarse un semiperiodo e interferir destructivamente, resultado consistente con el predicho por la Ec. (65) (ambos coinciden para  $l \approx 1.1$ ).

Es claro que, si bien cuanto mayor es  $g$  menor es el tiempo de colapso, también es menor el periodo de las oscilaciones de Rabi en ese caso. El resultado es que el número de oscilaciones que ocurren antes del colapso es mucho mayor cuanto mayor es  $g$ . Nótese, por otra parte, que en este límite el valor de la frecuencia de Rabi es el mismo que predice la teoría semiclásica, con lo que también con estado inicial coherente podemos conectar el resultado cuántico de las oscilaciones de Rabi con el resultado semiclásico.

Ahora bien, dado que el número de fotones  $n$  es un entero, la superposición de oscilaciones de Rabi de distintas frecuencias no es una superposición continua sino discreta (recuérdese que la frecuencia de Rabi es proporcional a  $\sqrt{n+1}$ ) y podemos esperar, por tanto, que al cabo de un cierto periodo de tiempo las diferentes oscilaciones puedan volver a ponerse en fase, al menos parcialmente, lo que implicaría una reactivación (*revival* es el término anglosajón) de la oscilación de Rabi total.

De hecho la expresión aproximada (65) predice dichos *revivals* pues la exponencial real tiene un exponente que es siempre negativo salvo en los instantes en que  $\cos[\tau/(2|\alpha|)]=1$  en los que el exponente se anula. Es decir, la Ec. (65) predice que el instante en que ocurre el primer *revival* es  $\tau_{\text{rev}}=4\pi|\alpha|$ . Sin embargo hemos de tomar con precaución las conclusiones que extraigamos de la Ec. (65) ya que la validez de ésta disminuye para tiempos grandes. En la Fig. 5 representamos el resultado exacto, obtenido numéricamente a partir de la Ec. (58), para dos valores de  $|\alpha|$ . Vemos que el comportamiento periódico predicho por el resultado (65) no es correcto, pues los *revivals* reales resultan ser imperfectos. Esta discrepancia se debe al efecto de los términos que hemos despreciado en la aproximación que llevó a la Ec. (65). Sin embargo, la expresión aproximada predice correctamente el instante en que ocurren los *revivals*,  $\tau_{\text{rev}}=4\pi|\alpha|$ .

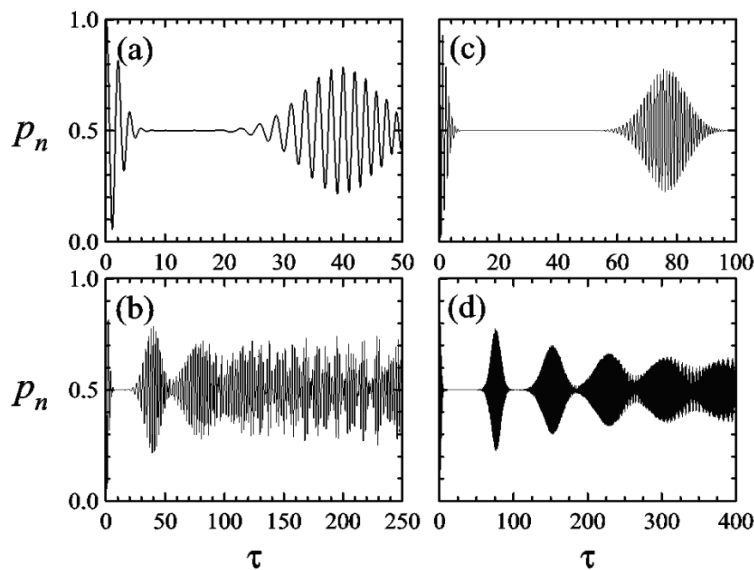


Fig. 5: Colapsos y revivals en el modelo de Jaynes-Cummings obtenidos numéricamente a partir de la Ec. (58). En las Figs. (a) y (b)  $|\alpha|=3$  con un tiempo final diferente entre ambas ( $\tau=gt=50$  y  $250$ , respectivamente). En las Figs. (c) y (d),  $|\alpha|=6$  y tiempos finales son  $\tau=100$  y  $\tau=400$ , respectivamente.

Hay que remarcar que los *revivals*, descritos por primera vez por Eberly *et al.* en 1980 [16], son una manifestación directa de la cuantización del campo electromagnético. Mientras que el colapso de Cummings es un fenómeno que ocurriría aunque las frecuencias de Rabi fuesen un continuo (esto es, si no dependiesen de  $\sqrt{n}$ ), recuérdese el fenómeno de *free-induction decay* estudiado en teoría semiclassical, el *revival* sólo es posible si las frecuencias de Rabi son discretas<sup>2</sup>.

## 6. Evolución de las propiedades del campo

Vamos a concentrarnos ahora en las propiedades del modo del campo sin preocuparnos por el estado atómico. Separaremos este estudio en dos partes: primero abordaremos las propiedades corpusculares del campo (número de fotones) y dejaremos para después sus propiedades ondulatorias (cuadraturas del campo). No pretendemos realizar un estudio exhaustivo, sino solamente ilustrar el tipo de fenómenos que pueden calcularse, mostrando en particular que la radiación presenta propiedades no clásicas (esto es, propiedades no explicables sin cuantizar el campo).

### 6.1. Número de fotones

Vamos a calcular la probabilidad de que el campo tenga  $m$  fotones, esto es, la distribución del número de fotones en el modo. Esta probabilidad viene dada por

$$p_m = \sum_{a=e,f} |\langle a, m | \bar{\Psi}(t) \rangle|^2, \quad (67)$$

donde se hace la suma sobre estados atómicos porque no estamos interesados en si el átomo se encuentra excitado o desexcitado. Haciendo uso de (49) es fácil obtener

$$p_m = |E_m|^2 + |F_{m-1}|^2, \quad (68a)$$

con

$$|E_m|^2 = |c_m|^2 \left[ 1 - \left( \frac{|\Omega_m|}{\bar{\Omega}_m} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\Omega}_m t \right) \right], \quad (68b)$$

$$|F_{m-1}|^2 = |c_{m-1}|^2 \left( \frac{|\Omega_{m-1}|}{\bar{\Omega}_{m-1}} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\Omega}_{m-1} t \right), \quad (68c)$$

Conocida  $p_m$  (para lo que hemos de fijar los  $c_m$  que, recordemos, caracterizan el estado inicial del modo siendo  $|c_n|^2$  la probabilidad de que en su estado el modo tenga  $n$  quanta) podremos calcular el número medio de fotones y su varianza

$$n = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n, \quad \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n, \\ \text{Var}(n) = \bar{n}^2 - \bar{n}^2. \quad (69)$$

Para cuantificar cómo de "no clásico" es el estado del campo, es conveniente calcular el valor del grado de coherencia de segundo orden, que recordemos que venía dado por

$$g^{(2)} = 1 + \frac{\text{Var}(n) - \bar{n}}{\bar{n}^2} = 1 + \frac{Q}{\bar{n}}, \quad (70)$$

donde hemos introducido el parámetro  $Q$  de Mandel

$$Q \equiv \frac{\text{Var}(n) - \bar{n}}{\bar{n}}. \quad (71)$$

Nótese que para  $Q < 0$  la radiación es no clásica pues esto ocurre cuando  $\text{Var}(n) < \bar{n}$  (e.g.,  $Q = -1$  para estados número mientras que  $Q = 0$  para estados coherentes). Cuando esto ocurre ( $Q < 0$  o  $g^{(2)} < 1$ ) decimos que la estadística de esa radiación es sub-Poissoniana, lo que indica un comportamiento genuinamente cuántico, pues clásicamente  $g^{(2)} \geq 1$  siempre [9,10].

#### 6.1.1. Campo inicialmente en estado número

En este caso es claro que  $c_m = \delta_{m,n}$  con lo que es fácil obtener a partir de (69) que

$$\bar{n} = n + \sin^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\Omega}_m t \right), \quad (72)$$

$$\bar{n}^2 = n^2 + (2n + 1) \sin^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\Omega}_m t \right), \quad (73)$$

$$\text{Var}(n) = \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\Omega}_m t \right) = \frac{\bar{n} - n}{4}. \quad (74)$$

Obviamente el número medio de fotones varía entre  $n$  y  $n+1$ , pues sólo en un fotón puede variar la ocupación del modo del campo cuando interacciona con un sólo átomo. En cuanto al factor  $Q$  de Mandel, puede escribirse de la forma

$$Q = -1 + \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\Omega}_m t \right)}{n + \sin^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\Omega}_m t \right)}, \quad (75)$$

<sup>2</sup> El free-induction decay, véase por ejemplo [12], es el amortiguamiento de las oscilaciones de Rabi debido a la existencia de ensanchamiento inhomogéneo en el medio material (como el ensanchamiento Doppler en un gas). Este decaimiento es independiente de la existencia de procesos disipativos (emisión espontánea, colisiones) y es un fenómeno semiclassical, i.e., se puede explicar sin necesidad de cuantizar el campo. En este caso la oscilación de Rabi es también la superposición de oscilaciones con frecuencias de Rabi distintas, lo que explica el colapso, pero dado que hay un continuo de frecuencias, no hay revivals.

que oscila entre  $-1$  y  $-1+1/(4n)$ , que es siempre menor que cero. Como era de esperar, en este caso el comportamiento del número de fotones es altamente no clásico, más cuanto menor número de fotones hay en el modo del campo.

### 6.1.2. Campo inicialmente en un estado coherente

Nos limitaremos aquí al caso resonante  $\delta=0$ . Ahora hemos de tomar

$$|c_m|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!}, \quad (76)$$

con lo que

$$p_m = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(m-1)}}{(m-1)!} \times \left[ \frac{|\alpha|^2}{m} \cos^2\left(\frac{\sqrt{m+1}}{2}gt\right) + \sin^2\left(\frac{\sqrt{m}}{2}gt\right) \right]. \quad (77)$$

No es posible realizar analíticamente el cálculo de  $Q$  en este caso, pero sí numéricamente. En la Fig. 6 mostramos la evolución de  $Q$  para  $|\alpha|=3$  desde  $\tau=0$  hasta el primer revival, y se aprecia que la radiación es no clásica (esto es,  $g^{(2)}$  es sub-Poissoniana) la mayor parte del tiempo, si bien  $Q$  no es mucho menor que cero.

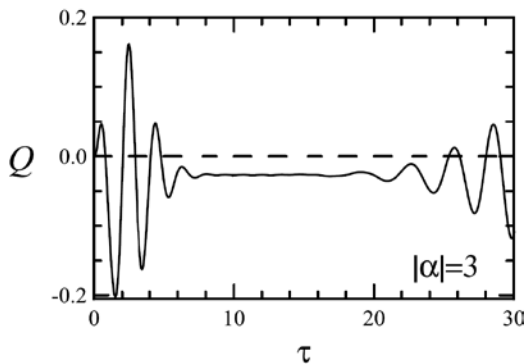


Fig. 6: Evolución temporal del parámetro  $Q$  de Mandel para  $\alpha=3$ . Nótese que es negativo la mayor parte del tiempo.

## 6.2. Cuadraturas

Podemos estudiar las propiedades ondulatorias del campo calculando el valor esperado de las cuadraturas del campo así como sus fluctuaciones. Los operadores cuadratura son

$$\hat{x} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{y} = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (78)$$

Para un estado coherente  $\langle \hat{x} \rangle = |\alpha| \cos \phi$  y  $\langle \hat{y} \rangle = |\alpha| \sin \phi$  (donde hemos hecho uso de la descomposición polar  $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$ ), y lo que es más relevante  $Var(\hat{x}) = Var(\hat{y}) = 1/4$ , independiente del valor de  $\alpha$ . Las cuadraturas de

cualquier estado coherente tienen, por tanto, las mismas propiedades que el estado vacío. Nótese que se trata de un estado de mínima incertidumbre pues  $Var(\hat{x})Var(\hat{y}) = 1/16$  que es el valor mínimo permitido por la desigualdad de Heisenberg. Se entiende entonces que hay compresión (*squeezing*) cuando alguna de las cuadraturas tiene una varianza de sus fluctuaciones menor de la correspondiente al vacío, al precio, claro está, de un correspondiente incremento en la varianza de la otra cuadratura pues la desigualdad de Heisenberg ha de verificarse siempre. Para una introducción al *squeezing* véase [9] y para los trabajos originales sobre compresión en el MJC véase [17,18].

Se ha de calcular  $\langle \hat{a} \rangle$ ,  $\langle \hat{a}^\dagger \rangle$ ,  $\langle \hat{a}^2 \rangle$  y  $\langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle$ . Haciendo uso de (49) es fácil obtener

$$\langle \hat{a} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n} E_{n-1}^* E_n + \sqrt{n+1} F_{n-1}^* F_n), \quad (79a)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} E_{n+1}^* E_n + \sqrt{n+2} F_{n+1}^* F_n), \quad (79b)$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} E_{n-2}^* E_n + \sqrt{n+1} F_{n-2}^* F_n), \quad (79c)$$

$$\langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+1} E_{n+2}^* E_n + \sqrt{n+3} F_{n+2}^* F_n), \quad (79d)$$

cantidades con las que se puede calcular los valores medios de las cuadraturas así como sus valores cuadráticos medios, con los que se determinan las varianzas

$$Var(\hat{x}) = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2, \quad Var(\hat{y}) = \langle \hat{y}^2 \rangle - \langle \hat{y} \rangle^2. \quad (80)$$

De nuevo es difícil obtener expresiones analíticas aproximadas, pero no es difícil obtener resultados numéricos. En la Fig. 7 representamos la varianza de las cuadraturas para el caso de estado inicial coherente con  $|\alpha|=5$ . Para este valor de  $\alpha$ , el primer revival de las oscilaciones de Rabi ocurre, aproximadamente, en  $\tau_{rev} \approx 62.8$ . Vemos así que es precisamente al principio del revival cuando se observa el mayor grado de compresión en la cuadratura  $\hat{x}$ . La cuadratura  $\hat{y}$ , por el contrario, tiene fluctuaciones por encima del vacío siempre. Nótese que el producto de las varianzas de ambas cuadraturas (que ha de ser, y es, mayor o igual a  $1/16$ ) muestra que salvo en el instante inicial, el estado del campo no es de incertidumbre mínima,

si bien se vuelve a aproximar a ese tipo de estado en el primer revival. Mencionemos finalmente que el nivel de compresión (que es, obviamente, un fenómeno transitorio en este sistema) se incrementa con el valor de  $|\alpha|$ .

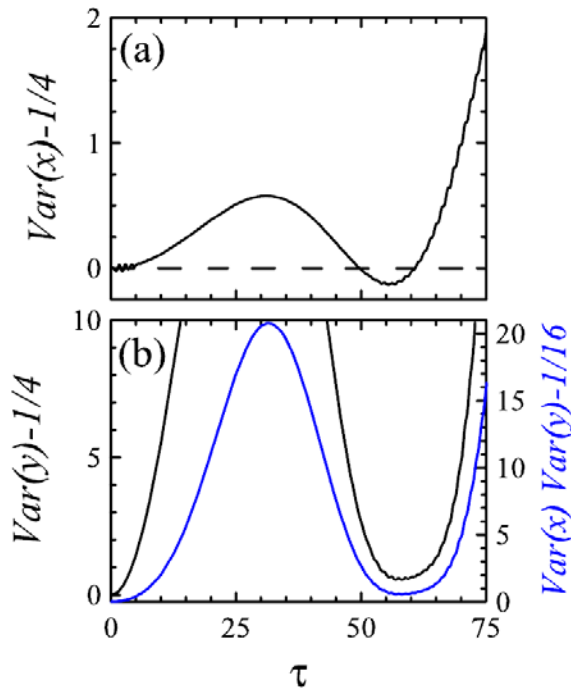


Fig. 7: En línea negra se muestra la varianza de la cuadratura  $\hat{x}$  (a) y de la cuadratura  $\hat{y}$  (b), a las que se ha restado el valor de vacío (que es  $1/4$ ), de forma que hay compresión cuando la cantidad representada es negativa. En (b) se muestra también (en línea azul y referida al eje vertical derecho) el producto de las varianzas menos el nivel de vacío ( $1/4^2=1/16$ ), lo que muestra que el estado, durante la mayor parte del tiempo, no es de incertidumbre mínima.

## 7. Observaciones experimentales

Como ya hemos comentado, el MJC representa, en ciertos límites, diversos sistemas físicos y son por tanto diversos los dispositivos experimentales que pueden utilizarse para la verificación de sus predicciones.

### 7.1. QED de cavidad

El modelo de Jaynes-Cummings permaneció durante mucho tiempo como un problema teórico fundamental imposible de verificar experimentalmente. Sin embargo, a lo largo de la décadas de 1980 y 1990 hubo un extraordinario progreso experimental en las técnica de creación y manipulación de átomos de Rydberg, primero, y en la de la construcción de microcavidades ópticas, después, que hicieron finalmente posible la consecución del estudio experimental del

problema de un único átomo en interacción con un único modo de radiación.

Si bien no es la primera observación experimental del modelo de Jaynes-Cummings, ya que el trabajo del grupo de H. Walther en Garching (Alemania) había conseguido resultados con anterioridad, el trabajo del grupo del grupo de S. Haroche en París sí constituye la primera observación clara de los fenómenos de colapso y revival de las oscilaciones de Rabi con estado inicial coherente [19], y es esta observación la que vamos a comentar aquí. En cualquier caso existen buenos artículos de revisión sobre experimentos en electrodinámica cuántica de cavidades (*cavity QED*, que es como se conoce este campo) tales como [2] y [3].

La dificultad de partida para implementar el MJC es conseguir un dispositivo en el que sólo un modo del campo interactúe con una transición atómica. Esto es posible mediante el uso de microcavidades (cavidades ópticas con dimensiones del orden del centímetro y valores muy elevados del factor de calidad  $Q$ ,<sup>3</sup> que es del orden de  $10^8$ ) en las que se introducen átomos de Rydberg. Un esquema del dispositivo experimental del grupo de París se muestra en la Fig. 8.

Un átomo de Rydberg es un átomo cualquiera cuando es excitado a un estado con número cuántico principal  $n$  muy alto, típicamente  $n=50$  o  $51$ . Las transiciones entre estos estados tienen frecuencias en el rango de las microondas y son transiciones caracterizadas por tener un valor muy alto del momento dipolar  $\mu$ , por una parte, y una vida media muy larga, por otra. Esto significa que el acoplamiento de estos estados atómicos con los modos del vacío es particularmente débil, al tiempo que el acoplamiento con el modo resonante de la microcavidad es particularmente intenso.

Los átomos de Rydberg, que son átomos de Rb en el experimento de París, son emitidos por el horno y con un sistema de selección de velocidades y colimación se consigue que los átomos tengan una distribución estrecha de velocidades axiales, lo que se hace para

<sup>3</sup> El factor de calidad de una cavidad se define como  $Q \equiv \omega/\Delta\omega$  con  $\omega$  la frecuencia de la radiación y  $\Delta\omega$  el ancho de la línea de la cavidad correspondiente. Intuitivamente corresponde al número medio de veces que un fotón permanece en el interior de la cavidad antes de salir al exterior.



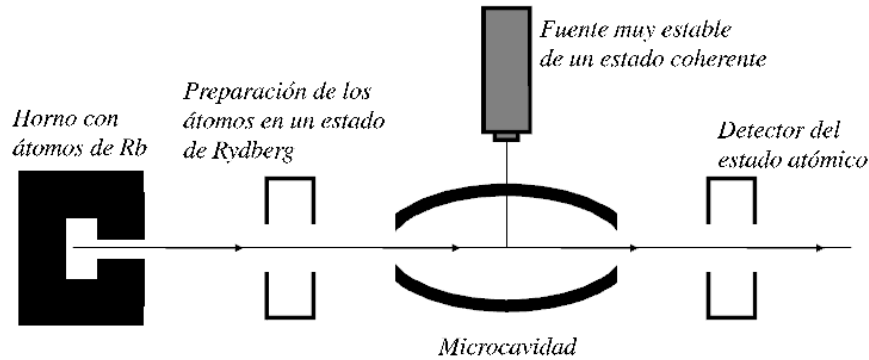


Fig. 8: Esquema del dispositivo experimental de la Ref. [19]. Véase el texto para más detalles.

minimizar el ensanchamiento Doppler de la transición atómica. Tras una fase de preparación, en la que los átomos de Rb son excitados a  $n=50$ , los átomos se introducen individualmente en la cavidad, donde interaccionan con un campo coherente monomodo muy bien estabilizado. El tiempo de tránsito por la cavidad determina el tiempo que el átomo interacciona con el modo. En el experimento este tiempo estaba entre los  $15 \mu\text{s}$  y los  $40 \mu\text{s}$ . El dispositivo experimental se mantiene a una temperatura de  $0.8\text{K}$  para disminuir al máximo la presencia de fotones térmicos. Dado que el tiempo de vida media de los fotones en la cavidad es de  $220 \mu\text{s}$  y la vida media por emisión espontánea de los átomos de Rydberg es de  $30 \text{ ms}$ , puede considerarse que el sistema está muy próximo a lo que el modelo de Jaynes-Cummings describe, pues mientras los átomos interaccionan con la luz, apenas hay efectos de emisión espontánea. A la salida de la microcavidad un detector mide el estado del átomo. Así, variando el tiempo de tránsito en la cavidad y repitiendo el experimento muchas veces, es posible medir la probabilidad de que el átomo esté excitado al cabo de un cierto tiempo de interacción.

La Fig. 9 muestra los resultados del experimento. En ella se representa  $p_e(t)$  y su espectro de Fourier para varios valores de  $|\alpha|$  y se pueden apreciar claramente las oscilaciones de Rabi y el colapso y revival de las mismas. Nótese que los valores de  $|\alpha|$  son muy bajos, por ello representamos para su comparación la predicción del modelo de Jaynes-Cummings para  $|\alpha|=1$  en la Fig. 10. El espectro representado en la Fig. 9 muestra, claramente, que las frecuencias

presentes en la oscilación de Rabi de la población atómica están cuantizadas.

## 7.2.IÓN atrapado

Los estudios teóricos y experimentales sobre el atrapamiento de átomos e iones tienen una ya larga tradición que comenzó en los años setenta del pasado siglo. Dado que los experimentos de que hablaremos se llevaron a cabo en trampas iónicas (el potencial que atrapa a los iones es de hasta varios electron-volts, bastante más profundo que el que puede alcanzarse en las

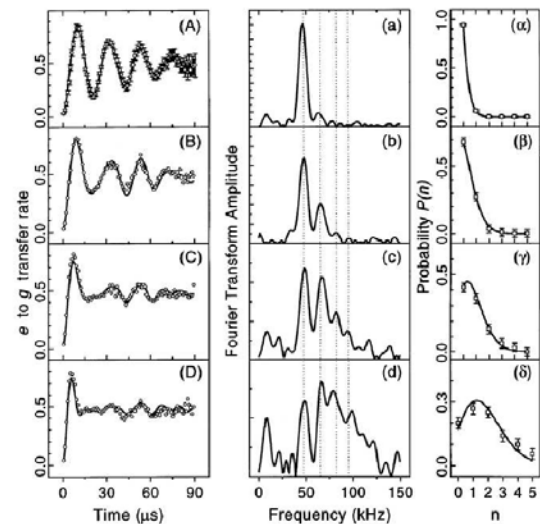


Fig. 9: Figura tomada de la referencia [19] que muestran  $p_e(t)$  y su espectro. En (A) no hay campo inyectado y hay 0.06 fotones térmicos en promedio. En (B), (C), y (D) el campo coherente inyectado tiene un número de fotones promedio igual a 0.40, 0.85, y 1.77, respectivamente; (a), (b), (c), (d) muestra las correspondientes transformadas de Fourier; y (α), (β), (γ), y (δ) muestran la distribución de fotones térmicos en cada caso. Figura reimpressa de [19] con permiso de los autores. Copyright (1993) by the American Physical Society.

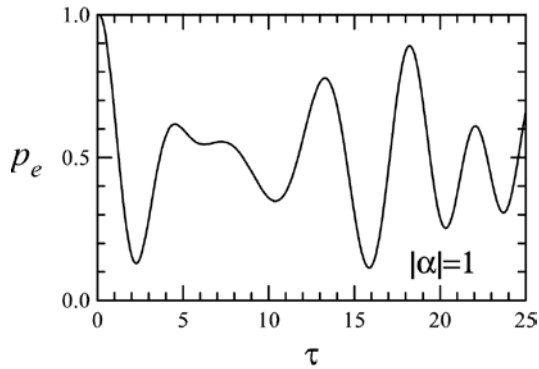


Fig. 10: Colapso y revival de las oscilaciones de Rabi para  $|\alpha|=1$ .

trampas atómicas) nos concentraremos en ellas. Básicamente existen dos formas de atrapar iones de una forma controlada: en la trampa de Penning los iones se mantienen mediante una combinación de campos magnéticos y electrostáticos, mientras que en la trampa de Paul es un campo que varía en el espacio y el tiempo, típicamente en el rango de radiofrecuencias, el que confina a las partículas. Son muchos los experimentos que pueden llevarse a cabo con este dispositivo experimental (estudios de la fluorescencia de un sólo átomo, por ejemplo) pero aquí sólo mencionaremos los relativos a la interacción de un único ión atrapado con un haz de luz monocromática. Hay que resaltar que este dispositivo tiene una ventaja sobre los sistemas de CQED tratados anteriormente: el tiempo de coherencia (el tiempo durante el cual despreciar la disipación es aceptable) es, al menos, un orden de magnitud mayor porque pueden ser aislados del entorno mucho más eficientemente.

Si en la trampa de Paul (véase el esquema de la Fig. 11) se aplican un voltaje constante  $U > 0$  y otro alterno en el rango de las radiofrecuencias  $V \cos \omega_{RF} t$ , el ión se ve sometido a un potencial que induce en él tanto una oscilación a la frecuencia de forzamiento  $\omega_{RF}$ , denominada micro-movimiento, como otras oscilaciones con frecuencias seculares  $\nu_i$  mucho menores, denominadas movimiento secular. El diferente orden de magnitud de la escala temporal de estos movimientos permite promediar sobre la escala más rápida, es decir, despreciar el micromovimiento, obteniéndose entonces un potencial efectivo de tipo armónico. Como fue mostrado por primera vez en [4], y hemos demostrado en la sección 3, el MJC es adecuado

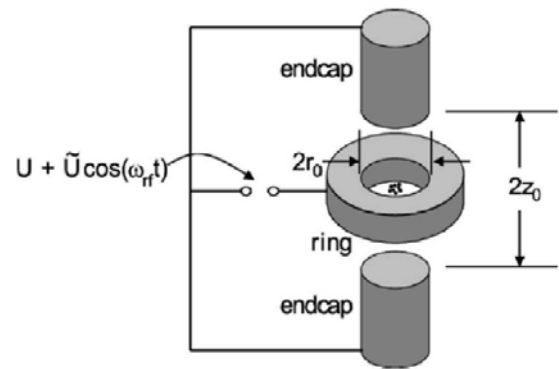


Fig. 11: Esquema de los electrodos de una trampa 3D de radiofrecuencia cilíndricamente simétrica. Valores típicos de las dimensiones son  $r_0 \approx \sqrt{2} z_0 \approx 100 \mu\text{m} - 1 \text{ cm}$ , con  $\tilde{U} \approx 100 - 500 \text{ V}$ ,  $|U| \approx 0 - 50 \text{ V}$ , y  $\omega_{RF}/2\pi \approx 100 \text{ kHz} - 100 \text{ MHz}$ .

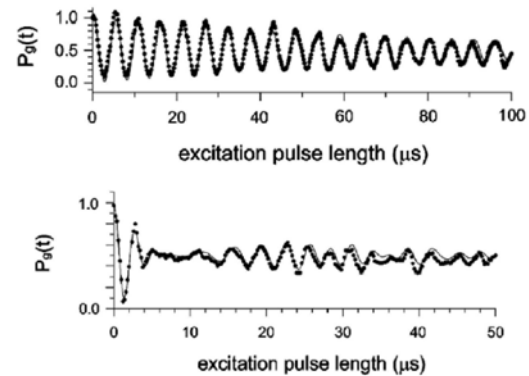


Fig. 12: Probabilidad de excitación iónica en función del tiempo cuando el estado inicial del modo armónico es el vacío (arriba) y cuando es un estado coherente con  $\bar{n} \approx 3$  (abajo). Figura reimpresa de [5] con permiso de los autores. Copyright (1993) by the American Physical Society.

para describir este sistema cuando opera en el régimen de Lamb-Dicke y el láser está sintonizado al *red-sideband* de la transición atómica.

Los experimentos (para un estudio más detallado véase [5] y también [7]) comienzan típicamente con el modo vibratorio en su estado vacío, con el fin de preparar el estado del mismo de forma controlada, es decir, se trata de poder fijar el tipo de estado (número, coherente, comprimido, térmico ...) en que se encuentra la oscilación del centro de masas iónico en el momento en que comienza la interacción con el láser. Éste es un paso crucial pues de no verificarse, no sería posible preservar la coherencia de los estados generados. Para llevar el ión al estado fundamental de su oscilación armónica es necesario enfriarlo, esto es,

disminuir su velocidad todo lo posible. Con las técnicas de enfriamiento láser (véase [20] para una excelente revisión teórica del *laser cooling*) es posible llevar el ión hasta su estado fundamental de movimiento con alta probabilidad. Una vez se verifica esto, se procede a preparar el estado de movimiento deseado como estado inicial para la interacción posterior. Dependiendo del tipo de estado se han de usar unas técnicas u otras. Por ejemplo, si lo que se pretende es tener un estado número inicial, esto se consigue mediante la aplicación de una secuencia de pulsos  $\pi$  resonantes con la transición atómica o con cualquiera de los primeros *sidebands*, mientras que para generar un estado coherente se puede aplicar un forzamiento clásico consistente en un potencial espacialmente homogéneo dependiente sinusoidalmente del tiempo. En [21] un único ión de berilio (véase también los experimentos con calcio de [22]) es sometido a un potencial armónico con frecuencia de oscilación  $\omega_x/2\pi = 11.2\text{MHz}$  en la dirección  $x$  dentro de una trampa de Paul con un parámetro de Lamb-Dicke  $\eta \approx 0.2$ . El ión se enfría mediante *sideband-cooling* con transiciones Raman estimuladas [5], con el resultado de que el ión permanece en el estado fundamental durante más del 95% del tiempo. El enfriamiento es llevado a cabo por dos haces láser que acoplan, mediante transiciones Raman, dos estados de una transición hiperfina del ión. Los haces se propagan formando  $\pm 45^\circ$  con respecto al eje  $x$  de forma tal que el vector de ondas diferencia esté alineado con el eje  $x$ , lo que hace que estas transiciones Raman sean muy insensibles al movimiento iónico en las direcciones  $y$  o  $z$ .

Una vez el estado de movimiento ha sido preparado, se inicia la interacción con el láser. De esta forma, se ha podido estudiar la respuesta del sistema para diversos estados iniciales del modo. Lo que se detecta es el estado atómico tras un tiempo de interacción, de forma análoga a como se estudiaba en los experimentos del grupo de París expuestos más arriba. A continuación mostramos algunos de los resultados obtenidos con este sistema. Para un estudio más sistemático y profundo, véase [5].

En la Fig. 12 se representa la probabilidad de excitación atómica cuando el estado iónico inicial es el vacío, y se aprecia claramente una oscilación

de Rabi poco amortiguada. En la Fig. 13 se representa lo mismo cuando el estado inicial es un estado coherente con  $|\alpha| \approx \sqrt{3}$ , y se aprecia claramente el primer colapso y el primer revival. La línea continua es la predicción del MJC incorporando el efecto de la (poca) disipación. Vemos que los resultados experimentales muestran un alto acuerdo con las predicciones del MJC.

## 8. Conclusión

Hemos estudiado un modelo paradigmático de la interacción luz-átomos: el modelo de Jaynes-Cummings, que muestra el importante papel jugado por la naturaleza cuántica del campo en dicha interacción. También hemos discutido cómo el tipo de interacción del MJC también describe otros sistemas, concretamente la interacción (mediada por un *campo clásico*) entre el estado de vibración del centro de masas de un ión y su estado interno en ciertas circunstancias bien definidas, lo que constituye un claro ejemplo de *simulación cuántica*. Finalmente hemos dedicado un espacio a la implementación del MJC en dos contextos experimentales diferentes: la QED de cavidad y los iones atrapados.

Hay que insistir en que el estudio de la interacción entre un sistema de dos niveles y un oscilador armónico, el núcleo del MJC, puede ser implementado aún por otros medios diferentes a los ya descritos. Por ejemplo, en estado sólido este acoplamiento puede hacerse entre objetos cuánticos similares a los átomos, como son los pozos cuánticos, y los modos de una microcavidad [23]. En otros experimentos, es un único punto cuántico embebido en una nanocavidad de cristal fotónico el que actúa como sistema de dos niveles [24,25]. En otro contexto aún, el de la *circuit-QED*, el átomo es sustituido por un sistema superconductor de dos niveles que se acopla a una cavidad on-chip que consiste en una línea de transmisión superconductora [26,27]. Otras observaciones se han realizado en sistemas superconductores de estado sólido macroscópicos [28]. Se entiende que el JCM sea un modelo paradigmático, sobre todo cuando se tiene en cuenta que juega un papel en información y computación cuánticas: no en vano la primera propuesta de computador cuántico está basada en la interacción entre iones

atrapados y haces de luz [29] y es ésta un área en la que la investigación es muy activa es estos días.

### **Agradecimientos**

Agradezco a Carlos Navarrete-Benlloch su lectura crítica de este manuscrito, y a los Profs. S. Haroche y C. Monroe por su permiso para usar las figuras 9 y 12 de este manuscrito. Este trabajo ha sido financiado con el proyecto nº FIS2008-06024-C03-01 del Gobierno de España y de la Union Europea (fondos FEDER).