Modelo de Jaynes-Cummings

Consideramos un átomo de dos niveles en una cavidad tal que el átomo se acopla a un único modo del campo electromagnético. Usando la aproximación de onda rotante, el Hamiltoniano puede escribirse en la forma $\hat{H} = (\hat{H}_0 + \hat{V})$, con $\hat{H}_0 = \left(\hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}\right)$ y $\hat{V} = \hbar g\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-\right)$ (el uso de la letra g para dos cosas distintas es convencional... dado el contexto tiene que ser claro a qué se refiere).

a) Mostrar que el número total de excitaciones se conserva, es decir, $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$ donde $\hat{N} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + |e\rangle\langle e|\right)$.

b) De acuerdo al resultado anterior, el espacio puede descomponerse en subespacios de dos niveles de la forma $\left\{|g,(n+1)\rangle, |e,n\rangle\right\}$, según los autovalores del operador $\hat{N}$, y la evolución temporal sólo acopla pares de estados dentro del mismo subespacio (el estado $|g,0\rangle$ queda desacoplado de los demás). Escribir el Hamiltoniano como matriz de 2×2 para cada uno de estos subespacios.

c) Dibujar esquemáticamente el espectro del subespacio $\left\{|g,(n+1)\rangle, |e,n\rangle\right\}$ como función de la desintonía $\Delta_c = (\omega_c - \omega_0)$ (dejando fijo ω_c u ω_0 a elección). Indicar qué forma toman los autoestados y autovalores en el caso resonante y en los límites muy lejos de la resonancia.

d) Considerar el caso resonante, $\Delta_c = 0$, y calcular todos los autoestados y autovalores. Graficar los primeros siete niveles de energía (recordar que el modelo asume $\omega_0 \gg g$), e indicar los autoestados correspondientes. Calcular la evolución temporal de un estado inicial $|g,(n+1)\rangle$, y la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado como función del tiempo. Indicar la frecuencia de oscilación de esta probabilidad.

e) Suponer que en el caso resonante, el estado inicial es de la forma $|g,\alpha\rangle$ con el átomo en el estado fundamental y el campo en un estado coherente. Calcular la evolución temporal del estado, y la probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado como función del tiempo, teniendo en cuenta que $p_e(t) = \sum_n p_{e,n}(t)$, es decir la suma de la probabilidades de encontrar el átomo en el estado excitado y el campo en cualquier estado $|n\rangle$. Graficar (numéricamente) para los casos $|\alpha|^2 = \{10, 20, 30, 50\}$. Discutir el comportamiento para $|\alpha|^2 \gg 1$ y comparar con el resultado semiclásico.

Solución

Inciso a)

$$[\hat{H}, \hat{N}] = [(\hat{H}_0 + \hat{V}), \hat{N}] = [\hat{H}_0, \hat{N}] + [\hat{V}, \hat{N}]$$

y analizando cada conmutador por separado tendremos por un lado que,

$$[\hat{H}_0, \hat{N}] = \left(\hbar\omega_0|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e|\right) - \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e|\right)\left(\hbar\omega_0|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

$$\Rightarrow [\hat{H}_0, \hat{N}] = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_0|e\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\langle e| + \hbar\omega_c\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^2 + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}|e\rangle\langle e| - ...$$

$$... - \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a}|e\rangle\langle e| - \hbar\omega_c\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^2 - \hbar\omega_0|e\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\langle e| - \hbar\omega_c|e\rangle\langle e|\hat{a}^\dagger\hat{a} \Rightarrow [\hat{H}_0, \hat{N}] = 0 \tag{1}$$

donde se usó el hecho de que $\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, |e\rangle\langle e|\right] = 0$.

Por otro lado tendremos que,

$$[\hat{V},\hat{N}] = \hbar g\Big(\hat{a}\hat{\sigma}_{+}+\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}\Big)\Big(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+|e\rangle\langle e|\Big) - \Big(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+|e\rangle\langle e|\Big)\hbar g\Big(\hat{a}\hat{\sigma}_{+}+\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}\Big)$$

$$\Rightarrow [\hat{V},\hat{N}] = \hbar g\hat{a}\hat{\sigma}_{+}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar g\hat{a}\hat{\sigma}_{+}|e\rangle\langle e| + \hbar g\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar g\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}|e\rangle\langle e| - ...$$

$$...- \hbar g\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}\hat{\sigma}_{+} - \hbar g\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-} - \hbar g|e\rangle\langle e|\hat{a}\hat{\sigma}_{+} - \hbar g|e\rangle\langle e|\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}$$

$$\Rightarrow [\hat{V},\hat{N}] = \hbar g\hat{\sigma}_{+}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar g\hat{\sigma}_{+}|e\rangle\langle e|\hat{a} + \hbar g\hat{\sigma}_{-}\left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{2}\hat{a} + \hbar g\hat{\sigma}_{-}|e\rangle\langle e|\hat{a}^{\dagger} - ...$$

$$...- \hbar g\hat{\sigma}_{+}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{2} - \hbar g\hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hbar g|e\rangle\langle e|\hat{\sigma}_{+}\hat{a} - \hbar g|e\rangle\langle e|\hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger}$$

donde se usó el hecho de que $[\hat{a},\hat{\sigma}_{\pm}] = \left[\hat{a}^{\dagger},\hat{\sigma}_{\pm}\right] = 0$

y, recordando que $\hat{\sigma}_{+} = |e\rangle\langle g| = (\hat{\sigma}_{-})^{\dagger}$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{+}|e\rangle\langle e| = \Big(|e\rangle\langle e|\hat{\sigma}_{-}\Big)^{\dagger} = |e\rangle\underbrace{\langle g|e\rangle}_{=0}\langle e| = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{-}|e\rangle\langle e| = \Big(|e\rangle\langle e|\hat{\sigma}_{+}\Big)^{\dagger} = |g\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\langle e| = \hat{\sigma}_{-}$$

entonces

$$[\hat{V},\hat{N}] = \hbar g\Big[\hat{\sigma}_{+}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hat{\sigma}_{-}\left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{2}\hat{a} + \hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger} - \hat{\sigma}_{+}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{2} - \hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{\sigma}_{+}\hat{a}\Big]$$

$$\Rightarrow [\hat{V},\hat{N}] = \hbar g\Big[\hat{\sigma}_{+}\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]\hat{a} + \hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger}\left[\hat{a}^{\dagger},\hat{a}\right] + \hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger} - \hat{\sigma}_{+}\hat{a}\Big]$$

$$\Rightarrow [\hat{V},\hat{N}] = \hbar g\Big[\hat{\sigma}_{+}\Big(\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]-1\Big)\hat{a} + \hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger}\Big(\left[\hat{a}^{\dagger},\hat{a}\right]+1\Big)\Big] \Rightarrow [\hat{V},\hat{N}] = 0 \tag{2}$$

donde se usó que $\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right] = -\left[\hat{a}^{\dagger},\hat{a}\right] = \hat{I}$.

Finalmente, concluimos que $[\hat{H},\hat{N}] = 0$ y el observable "número de excitaciones" $\hat{N}$ es una constante de movimiento. Y como ambos operadores conmutan podemos asegurar que existe una base común que diagonaliza a ambos operadores.

Inciso b)

Usando los autovalores de los operadores creación y aniquilación

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{(n+1)}|(n+1)\rangle; \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|(n-1)\rangle$$

podremos concluir que la base $\mathcal{B} = \Big\{|g,(n+1)\rangle, |e,n\rangle\Big\}$ es el conjunto de todos los autoestados del operador $\hat{N}$. Esto lo podemos ver por partes, primero analizando los términos diagonales tendremos,

$$\hat{N}|g,(n+1)\rangle = \Big(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+|e\rangle\langle e|\Big)|g,(n+1)\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N}|g,(n+1)\rangle = |g\rangle\otimes\Big(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|(n+1)\rangle\Big) + \Big(|e\rangle\underbrace{\langle e|g\rangle}_{=0}\Big)\otimes|(n+1)\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N}|g,(n+1)\rangle = |g\rangle\otimes\Big(\hat{a}^{\dagger}\sqrt{(n+1)}|n\rangle\Big) = |g\rangle\otimes\Big(\sqrt{(n+1)}\sqrt{(n+1)}|(n+1)\rangle\Big)$$

$$\Rightarrow \hat{N}|g,(n+1)\rangle = (n+1)|g,(n+1)\rangle \Rightarrow \Big\langle g,(n+1)\Big|\hat{N}\Big|g,(n+1)\Big\rangle = (n+1) \tag{3}$$

y de forma análoga obtenemos que

$$\hat{N}|e,n\rangle = \Big(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+|e\rangle\langle e|\Big)|e,n\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N}|e,n\rangle = |e\rangle \otimes \big(\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\big) + \big(|e\rangle \underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\big) \otimes |n\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N}|e,n\rangle = |e\rangle \otimes \big(\hat{a}^\dagger\sqrt{n}|(n-1)\rangle\big) + |e,n\rangle = |e\rangle \otimes \big(\sqrt{n}\sqrt{n}|n\rangle\big) + |e,n\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N}|e,n\rangle = (n+1)|e,n\rangle \Rightarrow \big\langle e,n\big|\hat{N}\big|e,n\big\rangle = (n+1) \tag{4}$$

ahora bien, los términos cruzados serán

$$\big\langle e,n\big|\hat{N}\big|g,(n+1)\big\rangle = (n+1)\underbrace{\langle e|g\rangle}_{=0}\underbrace{\langle n|(n+1)\rangle}_{=0} = 0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \big\langle g,(n+1)\big|\hat{N}\big|e,n\big\rangle = (n+1)\underbrace{\langle g|e\rangle}_{=0}\underbrace{\langle n|(n+1)\rangle}_{=0} = 0 \tag{6}$$

Con este resultado y notando que los autoestados del operador $\hat{N}$ también son autoestados del operador $\hat{H}_0$ tendremos que

$$\big\langle g,(n+1)\big|\hat{H}_0\big|g,(n+1)\big\rangle = \hbar\omega_c(n+1) \tag{7}$$

$$\big\langle e,n\big|\hat{H}_0\big|e,n\big\rangle = \hbar(\omega_c n + \omega_0) \tag{8}$$

$$\big\langle e,n\big|\hat{H}_0\big|g,(n+1)\big\rangle = \big\langle g,(n+1)\big|\hat{H}_0\big|e,n\big\rangle = 0 \tag{9}$$

Y de forma análoga para $\hat{V}_0$ tendremos, que los términos cruzados serán

$$\hat{V}_0|g,(n+1)\rangle = \hbar g\big(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\big)|g,(n+1)\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{V}_0|g,(n+1)\rangle = \hbar g\big(\hat{a}|e\rangle\langle g| + \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e|\big)|g,(n+1)\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{V}_0|g,(n+1)\rangle = \hbar g\big(|e\rangle\underbrace{\langle g|g\rangle}_{=1}\big)\otimes\big(\hat{a}|(n+1)\rangle\big) + \hbar g\big(|g\rangle\underbrace{\langle e|g\rangle}_{=0}\big)\otimes\big(\hat{a}^\dagger|(n+1)\rangle\big)$$

$$\Rightarrow \hat{V}_0|g,(n+1)\rangle = \hbar g|e\rangle\otimes\big(\sqrt{(n+1)}|n\rangle\big) = \hbar g\sqrt{(n+1)}|e,n\rangle$$

y de forma análoga obtenemos que

$$\hat{V}_0|e,n\rangle = \hbar g\big(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\big)|e,n\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{V}_0|e,n\rangle = \hbar g\big(\hat{a}|e\rangle\langle g| + \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e|\big)|e,n\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{V}_0|e,n\rangle = \hbar g\big(|e\rangle\underbrace{\langle g|e\rangle}_{=0}\big)\otimes\big(\hat{a}|n\rangle\big) + \hbar g\big(|g\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\big)\otimes\big(\hat{a}^\dagger|n\rangle\big)$$

$$\Rightarrow \hat{V}_0|e,n\rangle = \hbar g|g\rangle\otimes\big(\sqrt{(n+1)}|(n+1)\rangle\big) = \hbar g\sqrt{(n+1)}|g,(n+1)\rangle$$

entonces,

$$\Rightarrow \big\langle e,n\big|\hat{V}_0\big|g,(n+1)\big\rangle = \hbar g\sqrt{(n+1)}\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = \hbar g\sqrt{(n+1)} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \big\langle g,(n+1)\big|\hat{V}_0\big|e,n\big\rangle = \hbar g\sqrt{(n+1)}\underbrace{\langle g|g\rangle}_{=1}\underbrace{\langle (n+1)|(n+1)\rangle}_{=1} = \hbar g\sqrt{(n+1)} \tag{11}$$

donde se uso que $g \in \mathbb{R}$. Ahora bien, los términos diagonales serán

$$\left\langle g,(n+1)\left|\hat{V}_0\right|g,(n+1)\right\rangle = \hbar g\sqrt{(n+1)}\underbrace{\langle g|e\rangle}_{=0}\underbrace{\langle (n+1)|n\rangle}_{=0} = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \left\langle e,n\left|\hat{V}_0\right|e,n\right\rangle = \hbar g\sqrt{(n+1)}\underbrace{\langle e|g\rangle}_{=0}\underbrace{\langle n|(n+1)\rangle}_{=0} = 0 \tag{13}$$

Luego, de forma matricial, los subespacios 2×2 del hamiltoniano $\hat{H}$ serán

$$\hat{H}\Big|_n = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad|\mathbf{g},(\mathbf{n+1})\rangle & \qquad|\mathbf{e},\mathbf{n}\rangle \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \hbar\omega_c(n+1) & \hbar g\sqrt{(n+1)} \\ \hbar g\sqrt{(n+1)} & \hbar(\omega_c n+\omega_0) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \langle\mathbf{g},(\mathbf{n+1})| \\ \langle\mathbf{e},\mathbf{n}| \end{array} \end{array} \tag{14}$$

y de forma general tendremos que el operador $\hat{H}$ es una matriz infinita, diagonal por bloques de la forma,

$$\hat{H} = \hbar \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} |\mathbf{g},\mathbf{1}\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{0}\rangle & |\mathbf{g},\mathbf{2}\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{1}\rangle & \dots & |\mathbf{g},(\mathbf{n+1})\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{n}\rangle & \dots \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \omega_c & \hbar g & 0 & 0 & & 0 & 0 & \\ \hbar g & \omega_0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2\omega_c & \sqrt{2}g & & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{2}g & (\omega_c+\omega_0) & & 0 & 0 & \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \omega_c(n+1) & g\sqrt{(n+1)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & g\sqrt{(n+1)} & \hbar(\omega_c n+\omega_0) & \\ & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \langle\mathbf{g},\mathbf{1}| \\ \langle\mathbf{e},\mathbf{0}| \\ \langle\mathbf{g},\mathbf{2}| \\ \langle\mathbf{e},\mathbf{1}| \\ \vdots \\ \langle\mathbf{g},(\mathbf{n+1})| \\ \langle\mathbf{e},\mathbf{n}| \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

Inciso c)

De la expresión para $\hat{H}\Big|_n$ podremos re-escribir esta representación matricial del subespacio usando la definición de desintonía $\varDelta = (\omega_c - \omega_0)$ de la forma

$$\hat{H}\Big|_n = \hbar \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \qquad|\mathbf{g},(\mathbf{n+1})\rangle & \qquad\qquad|\mathbf{e},\mathbf{n}\rangle \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \omega_c(n+1)+(\varDelta-\varDelta)(n+1) & g\sqrt{(n+1)} \\ g\sqrt{(n+1)} & [\omega_c n+\omega_0+(\varDelta-\varDelta)n] \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \langle\mathbf{g},(\mathbf{n+1})| \\ \langle\mathbf{e},\mathbf{n}| \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \hat{H}(\varDelta)\Big|_n = \hbar \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad|\mathbf{g},(\mathbf{n+1})\rangle & \qquad|\mathbf{e},\mathbf{n}\rangle \end{array} & \\ \begin{pmatrix} (\varDelta+\omega_0)(n+1) & g\sqrt{(n+1)} \\ g\sqrt{(n+1)} & [\varDelta n+\omega_0(n+1)] \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \langle\mathbf{g},(\mathbf{n+1})| \\ \langle\mathbf{e},\mathbf{n}| \end{array} \end{array} \tag{15}$$

donde se usó que,

$$\begin{aligned} \omega_c(n+1)+(\varDelta-\varDelta)(n+1) &= \omega_c(n+1)+[(\omega_c-\omega_0)-(\omega_c-\omega_0)](n+1) \\ \Rightarrow \omega_c(n+1)+(\varDelta-\varDelta)(n+1) &= (\varDelta+\omega_0)(n+1) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} [\omega_c n+\omega_0+(\varDelta-\varDelta)n] &= \{\omega_c n+\omega_0+[(\omega_c-\omega_0)-(\omega_c-\omega_0)]n\} \\ \Rightarrow [\omega_c n+\omega_0+(\varDelta-\varDelta)n] &= [\varDelta n+\omega_0(n+1)] \end{aligned} \tag{17}$$

Y los autovalores de este subespacio se calculan teniendo en cuent ael problema de autovalores, según la ec. de Schrödinger independiente del tiempo de la forma,

$$\hat{H}\Big|_n |\phi_n\rangle = \epsilon_n |\phi_n\rangle$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} [(\Delta+\omega_0)(n+1)-\epsilon_n] & g\sqrt{(n+1)} \\ g\sqrt{(n+1)} & [\Delta n+\omega_0(n+1)-\epsilon_n] \end{pmatrix} = 0$$

de forma general tendremos, (resolviendo con Mathematica)

$$\Rightarrow \epsilon_n^{\pm} = \frac{1}{2}\Big((2n+1)(\Delta+\omega_0) \pm \sqrt{\big[\Delta^2+4g^2(n+1)\big]}\Big) \tag{18}$$

$$\langle\phi_n^{\pm}| = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Big[-\Delta \pm \sqrt{\big[\Delta^2+4g^2(n+1)\big]}\Big]}{2g\sqrt{(n+1)}}, & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

analizando el caso particular de $n=0$, tendremos los siguientes autovalores y autovectores,

$$n=0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} (\Delta+\omega_0-\epsilon_0) & g \\ g & (\omega_0-\epsilon_0) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_0^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(\Delta+2\omega_0 \pm \sqrt{\big(\Delta^2+4g^2\big)}\Big); \langle\phi_0^{\pm}| = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Big[-\Delta \pm \sqrt{\big(\Delta^2+4g^2\big)}\Big]}{2g} & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$n=1 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} [2(\Delta+\omega_0)-\epsilon_1] & g\sqrt{2} \\ g\sqrt{2} & (\Delta+2\omega_0-\epsilon_1) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_1^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(3\Delta+4\omega_0 \pm \sqrt{\big(\Delta^2+8g^2\big)}\Big); \langle\phi_1^{\pm}| = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}\Big[-\Delta \pm \sqrt{\big(\Delta^2+8g^2\big)}\Big]}{4g} & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

y analizando los límites tendremos (considerando que $\omega_0 \gg g$),

Límite muy cerca de resonancia $\Delta \to 0$
Autoenergías

$$\lim_{\Delta\to 0} \epsilon_0^{\pm} = (\omega_0 \pm g) \Rightarrow \lim_{\Delta\to 0} \Delta\epsilon_0 = \left(\epsilon_0^{+}-\epsilon_0^{-}\right) = 2g \to (\text{gap}) \tag{22}$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \epsilon_1^{\pm} = \left(2\omega_0 \pm \sqrt{2}g\right) \Rightarrow \lim_{\Delta\to 0} \Delta\epsilon_1 = \left(\epsilon_1^{+}-\epsilon_1^{-}\right) = 2\sqrt{2}g \to (\text{gap}) \tag{23}$$

Autoestados

$$\lim_{\Delta\to 0} \langle\phi_0^{\pm}| = \begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{\big(\langle e,0| \mp \langle g,1|\big)}{\sqrt{2}} \tag{24}$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \langle\phi_1^{\pm}| = \begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{\big(\langle e,1| \mp \langle g,2|\big)}{\sqrt{2}} \tag{25}$$

Límite muy lejos de resonancia $\Delta \to \infty$
Autoenergías

$$\lim_{\Delta\to\infty} \epsilon_0^{\pm} = \omega_0 + \frac{(\Delta \pm \Delta)}{2} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta\to\infty} \epsilon_0^{+} = (\omega_0+\Delta) \\ \lim\limits_{\Delta\to\infty} \epsilon_0^{-} = \omega_0 \end{cases} \tag{26}$$

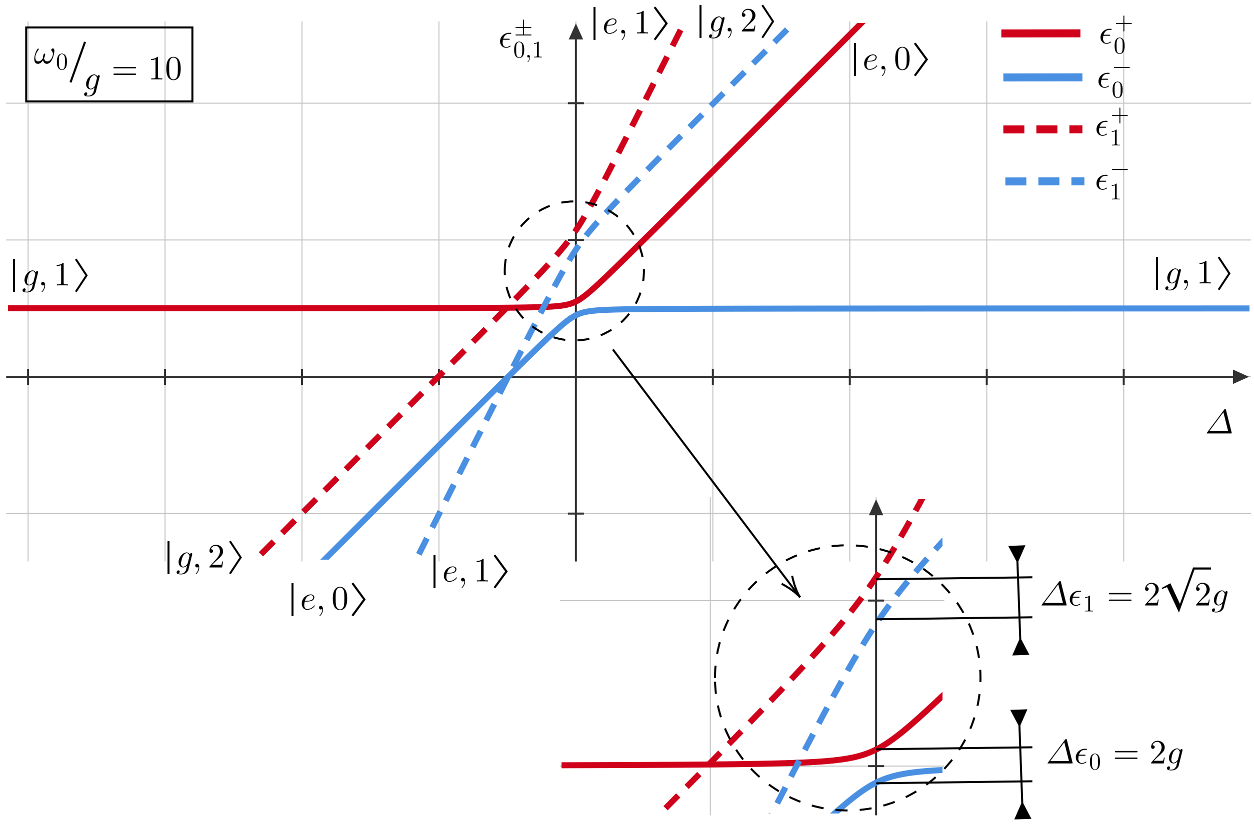
$$\lim_{\varDelta\to\infty}\epsilon_1^{\pm}=2\omega_0+\frac{3(\varDelta\pm\varDelta)}{2}=\begin{cases}\lim_{\varDelta\to\infty}\epsilon_1^{+}=(2\omega_0+3\varDelta)\\ \lim_{\varDelta\to\infty}\epsilon_1^{-}=2\omega_0\end{cases}\tag{27}$$

Autoestados

$$\lim_{\varDelta\to\infty}\left\langle\phi_0^{\pm}\right|=\begin{pmatrix}\frac{(\varDelta\mp\varDelta)}{2g} & 1\end{pmatrix}=\begin{cases}\lim_{\varDelta\to\infty}\left\langle\phi_0^{+}\right|=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\equiv\langle e,0|\\ \lim_{\varDelta\to\infty}\left\langle\phi_0^{-}\right|=\lim_{\varDelta\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{\varDelta}{g} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\equiv\langle g,1|\end{cases}\tag{28}$$

$$\lim_{\varDelta\to\infty}\left\langle\phi_1^{\pm}\right|=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}(\varDelta\mp\varDelta)}{4g} & 1\end{pmatrix}=\begin{cases}\lim_{\varDelta\to\infty}\left\langle\phi_1^{+}\right|=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\equiv\langle e,1|\\ \lim_{\varDelta\to\infty}\left\langle\phi_1^{-}\right|=\lim_{\varDelta\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}\varDelta}{2g} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\equiv\langle g,2|\end{cases}\tag{29}$$

y gráficamente tendremos,

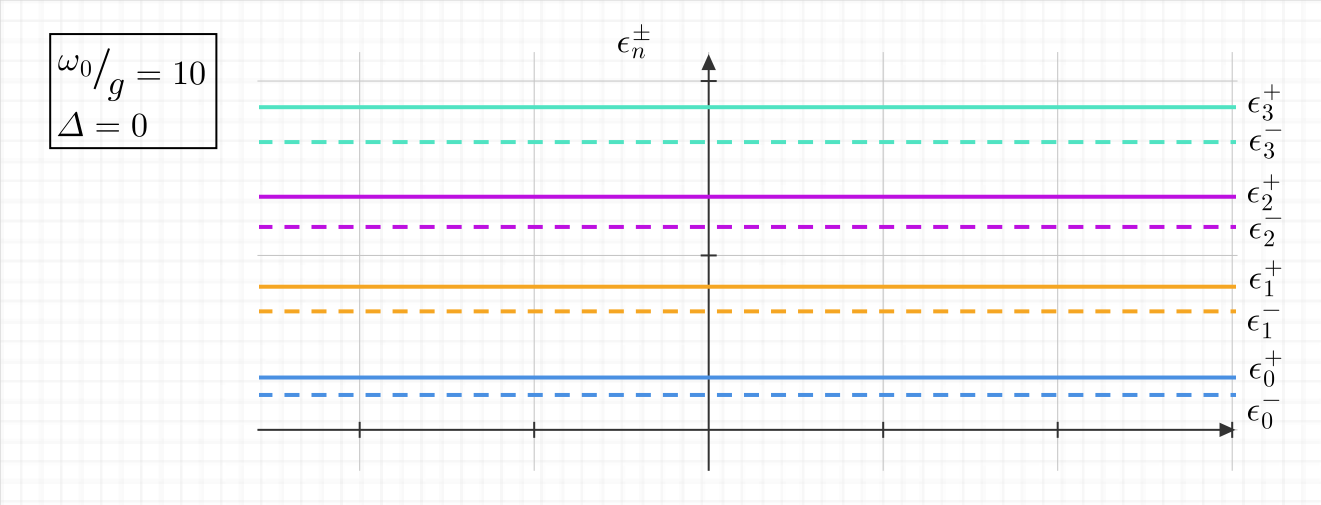


Inciso d)

Para el caso resonante $(\varDelta\to 0)$ tendremos que, los autoestados y autoenergías serán

$$\Rightarrow\epsilon_n^{\pm}=\left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0\pm g\sqrt{(n+1)}\right);\left\langle\phi_n^{\pm}\right|=\begin{pmatrix}\mp 1, & 1\end{pmatrix}\equiv\frac{\left(\langle e,n|\mp\langle g,(n+1)|\right)}{\sqrt{2}}\tag{30}$$

y gráficamente, los primeros ocho niveles para el caso resonante serán,



Teniendo en cuenta que el hamiltoniano del sistema es bloco-diagonal podremos considerar un único sub-bloque 2×2 (subespacio) y diagonalizarlo de la forma, obteniendo una base de autoestados $\mathcal{B}_n := \left\{ \left| \phi_n^1, \phi_n^2 \right\rangle \right\}$ y asociados a los autovalores $\left\{ \epsilon_n^1, \epsilon_n^2 \right\}$ entonces la evolución de un estado inicial de la forma $\left|\psi_0\right\rangle$ será, según la ec. de Schrödinger, de la forma

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_{k=1}^{2} \exp\left(-i\epsilon_n^j \Delta t /_{\hbar}\right) \left|\psi_0\right\rangle \tag{31}$$

y teniendo en cuenta que cualquier estado inicial $\left|\psi_0\right\rangle$ se puede descomponer en la base de autoestados del subespacio del hamiltoniano $\mathcal{B}_n$

$$\left|\psi_0\right\rangle = \sum_{k=1}^{2} c_k^{\psi_0} \left|\phi_n^k\right\rangle \tag{32}$$

entonces

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_{k=1}^{2} c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^k \Delta t /_{\hbar}\right) \left|\phi_n^k\right\rangle \tag{33}$$

Luego, la probabilidad de población, partiendo de un estado $\left|\chi\right\rangle$ general tendremos,

$$p_\chi(t) = \left\| \left\langle \chi | \psi(t) \right\rangle \right\|^2 = \left\| \left\langle \chi \right| \sum_{k=1}^{2} c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^k \Delta t /_{\hbar}\right) \left|\phi_n^k\right\rangle \right\|^2$$

$$\text{como } \left|\chi\right\rangle = \sum_{l=1}^{2} c_l^\chi \left|\phi_n^l\right\rangle \Rightarrow p_\chi(t) = \left\| \sum_{l=1}^{2} \left(c_l^\chi\right)^* \left\langle \phi_n^l \right| \sum_{k=1}^{2} c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^k \Delta t /_{\hbar}\right) \left|\phi_n^k\right\rangle \right\|^2$$

$$\Rightarrow p_\chi(t) = \left\| \sum_{k,l=1}^{2} \left(c_l^\chi\right)^* c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^k \Delta t /_{\hbar}\right) \underbrace{\left\langle \phi_n^l | \phi_n^k \right\rangle}_{=\delta_{l,k}} \right\|^2$$

$$\Rightarrow p_\chi(t) = \left\| \sum_{k=1}^{2} \left(c_k^\chi\right)^* c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^j \Delta t /_{\hbar}\right) \right\|^2 \tag{34}$$

para el caso particular en que $\left|\psi_0\right\rangle = \left|g, (n+1)\right\rangle$ y $\left|\chi\right\rangle = \left|e, n\right\rangle$ tendremos, para el caso resonante $\Delta \to 0$ entonces los autoestados y autoenergías son

$$\begin{cases} \epsilon_n^1 = \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 + g\sqrt{(n+1)}\right) \\ \epsilon_n^1 = \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 - g\sqrt{(n+1)}\right) \end{cases} ; \begin{cases} \left|\phi_n^1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|e,n\right\rangle - \left|g,(n+1)\right\rangle\right] \\ \left|\phi_n^2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|e,n\right\rangle + \left|g,(n+1)\right\rangle\right] \end{cases}$$

entonces,

$$\left|g,(n+1)\right\rangle = \frac{c_1^{\psi_0}}{\sqrt{2}}\left[\left|e,n\right\rangle - \left|g,(n+1)\right\rangle\right] + \frac{c_2^{\psi_0}}{\sqrt{2}}\left[\left|e,n\right\rangle + \left|g,(n+1)\right\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \left|g,(n+1)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(c_1^{\psi_0} + c_2^{\psi_0}\right)\left|e,n\right\rangle + \left(c_2^{\psi_0} - c_1^{\psi_0}\right)\left|g,(n+1)\right\rangle\right]$$

y de forma análoga para $\left|\chi\right\rangle$ tendremos,

$$\left|e,n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(c_1^{\chi} + c_2^{\chi}\right)\left|e,n\right\rangle + \left(c_2^{\chi} - c_1^{\chi}\right)\left|g,(n+1)\right\rangle\right]$$

y se deberá cumplir que

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^{\psi_0} \\ c_2^{\psi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1^{\psi_0} = \frac{-1}{\sqrt{2}}; c_2^{\psi_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^{\chi} \\ c_2^{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1^{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}}; c_2^{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{36}$$

y la probabilidad de población serán, considerando que $\Delta t = \left(\underbrace{t_f}_{=t} - \underbrace{t_0}_{=0}\right) = t$

$$p_e^n(t) = \left\|\left(c_1^{\chi}\right)^* c_1^{\psi_0} \exp\left(\frac{-i\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) + \left(c_2^{\chi}\right)^* c_2^{\psi_0} \exp\left(\frac{-i\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right\|^2$$

$$\Rightarrow p_e^n(t) = \left\|\frac{-1}{2}\exp\left(\frac{-i\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-i\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right\|^2 = \frac{1}{4}\underbrace{\left\|\exp\left(\frac{-i\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{-i\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right)\right\|^2}_{=\bigstar}$$

y desarrollando este último término tendremos,

$$\bigstar = \left\|-\left[\cos\left(\frac{\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) - \cos\left(\frac{\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right] + i\left[\sin\left(\frac{\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) - \sin\left(\frac{\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right]\right\|^2$$

$$\Rightarrow \bigstar = \left|\cos\left(\frac{\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) - \cos\left(\frac{\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right|^2 + \left|\sin\left(\frac{\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) - \sin\left(\frac{\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right|^2$$

y recordando las siguientes propiedades trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(\alpha_1 \pm \beta_1) = \cos(\alpha_1)\cos(\beta_1) \mp \sin(\alpha_1)\sin(\beta_1) \\ \sin(\alpha_2 \pm \beta_2) = \sin(\alpha_2)\cos(\beta_2) \pm \cos(\alpha_2)\sin(\beta_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\cos(\alpha_1 - \beta_1) - \cos(\alpha_1 + \beta_1)] = 2\sin(\alpha_1)\sin(\beta_1) \\ [\sin(\alpha_2 + \beta_2) - \sin(\alpha_2 - \beta_2)] = 2\cos(\alpha_2)\sin(\beta_2) \end{cases}$$

entonces, si consideramos

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}; \beta_1 = -\beta_2 = \frac{-t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}$$

luego

$$\bigstar = \left|2\sin\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\sin\left[\frac{-t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\right|^2 + \left|2\cos\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\sin\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\right|^2$$

$$\Rightarrow \bigstar = 4\underbrace{\left\{\sin^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right] + \cos^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\right\}}_{=1}\sin^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right] = 4\sin^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]$$

entonces,

$$\Rightarrow p_e^n(t) = \sin^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]$$

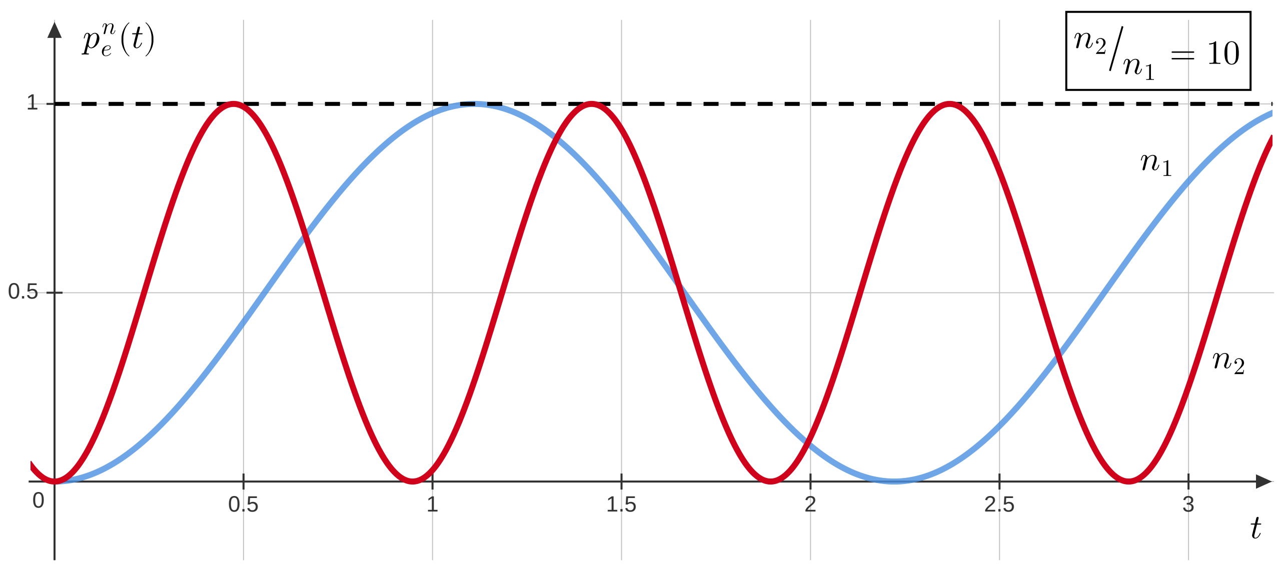
reemplazando las expresiones de las autoenergías tendremos,

$$\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right) = \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 + g\sqrt{(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 - g\sqrt{(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right) = 2g\sqrt{(n+1)} \Rightarrow \boxed{p_e^n(t) = \sin^2\left[\frac{g\sqrt{(n+1)}}{\hbar}t\right]} \tag{37}$$

cuya frecuencia de oscilación es

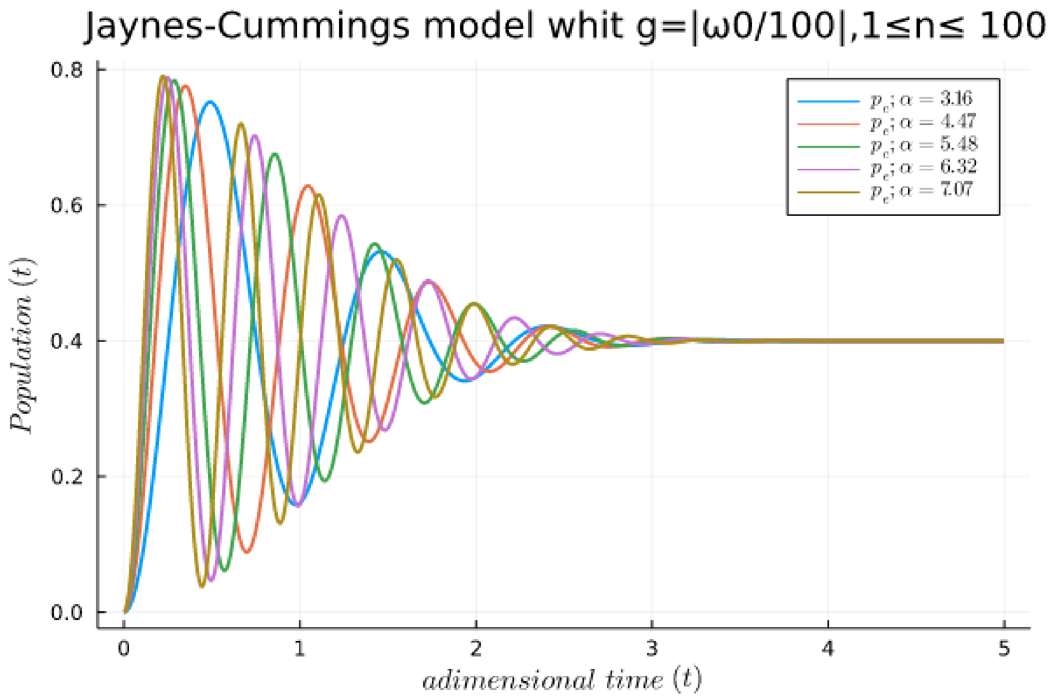
$$\omega_e = \frac{g\sqrt{(n+1)}}{\hbar}$$



Inciso e)

Ejercicio Numérico (ver en código en Julia desde respositorio GitHub)

El resultado obtenido se muestra en la siguiente gráfica



Links
https://www.researchgate.net/publication/287039109_The_Jaynes-Cummings_model

Referencias

Roldán, E. (2011). The Jaynes-Cummings model. *Optica Pura y Aplicada*, *44*, 361–379.