Introducción a la óptica cuántica
Manipulación de átomos ultrafríos con campos electromagnéticos

Modelo de Jaynes-Cummings

Consideramos un átomo de dos niveles en una cavidad tal que el átomo se acopla a un único modo del campo electromagnético. Usando la aproximación de onda rotante, el Hamiltoniano puede escribirse en la forma $\hat{H} = (\hat{H}_0 + \hat{V})$, con $\hat{H}_0 = \left(\hbar\omega_0|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$ y $\hat{V} = \hbar g\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\right)$ (el uso de la letra g para dos cosas distintas es convencional... dado el contexto tiene que ser claro a qué se refiere).

a) Mostrar que el número total de excitaciones se conserva, es decir, $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$ donde $\hat{N} = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e|\right)$.

b) De acuerdo al resultado anterior, el espacio puede descomponerse en subespacios de dos niveles de la forma $\left\{|g,(n+1)\rangle, |e,n\rangle\right\}$, según los autovalores del operador $\hat{N}$, y la evolución temporal sólo acopla pares de estados dentro del mismo subespacio (el estado $|g,0\rangle$ queda desacoplado de los demás). Escribir el Hamiltoniano como matriz de 2×2 para cada uno de estos subespacios.

c) Dibujar esquemáticamente el espectro del subespacio $\left\{|g,(n+1)\rangle, |e,n\rangle\right\}$ como función de la desintonía $\Delta_c = (\omega_c - \omega_0)$ (dejando fijo ω_c u ω_0 a elección). Indicar qué forma toman los autoestados y autovalores en el caso resonante y en los límites muy lejos de la resonancia.

d) Considerar el caso resonante, $\Delta_c = 0$, y calcular todos los autoestados y autovalores. Graficar los primeros siete niveles de energía (recordar que el modelo asume $\omega_0 \gg g$), e indicar los autoestados correspondientes. Calcular la evolución temporal de un estado inicial $|g,(n+1)\rangle$, y la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado como función del tiempo. Indicar la frecuencia de oscilación de esta probabilidad.

e) Suponer que en el caso resonante, el estado inicial es de la forma $|g,\alpha\rangle$ con el átomo en el estado fundamental y el campo en un estado coherente. Calcular la evolución temporal del estado, y la probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado como función del tiempo, teniendo en cuenta que $p_e(t) = \sum_n p_{e,n}(t)$, es decir la suma de la probabilidades de encontrar el átomo en el estado excitado y el campo en cualquier estado $|n\rangle$. Graficar (numéricamente) para los casos $|\alpha|^2 = \{10, 20, 30, 50\}$. Discutir el comportamiento para $|\alpha|^2 \gg 1$ y comparar con el resultado semiclásico.

Solución

Inciso a)

$$[\hat{H}, \hat{N}] = [(\hat{H}_0 + \hat{V}), \hat{N}] = [\hat{H}_0, \hat{N}] + [\hat{V}, \hat{N}]$$

y analizando cada conmutador por separado tendremos por un lado que,

$$[\hat{H}_0, \hat{N}] = \left(\hbar\omega_0|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e|\right) - \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e|\right)\left(\hbar\omega_0|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

$$\Rightarrow [\hat{H}_0, \hat{N}] = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_0|e\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\langle e| + \hbar\omega_c\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^2 + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}|e\rangle\langle e| - ...$$

$$...-\hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a}|e\rangle\langle e|-\hbar\omega_c\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^2-\hbar\omega_0|e\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\langle e|-\hbar\omega_c|e\rangle\langle e|\hat{a}^\dagger\hat{a}\Rightarrow[\hat{H}_0,\hat{N}]=0 \quad (1)$$

donde se usó el hecho de que $\left[\hat{a}^\dagger\hat{a},|e\rangle\langle e|\right]=0$.
Por otro lado tendremos que,

$$[\hat{V},\hat{N}]=\hbar g\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ +\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\right)\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+|e\rangle\langle e|\right)-\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+|e\rangle\langle e|\right)\hbar g\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ +\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\right)$$

$$\Rightarrow[\hat{V},\hat{N}]=\hbar g\hat{a}\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hbar g\hat{a}\hat{\sigma}_+|e\rangle\langle e|+\hbar g\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hbar g\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-|e\rangle\langle e|-...$$

$$...-\hbar g\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{\sigma}_+-\hbar g\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_--\hbar g|e\rangle\langle e|\hat{a}\hat{\sigma}_+-\hbar g|e\rangle\langle e|\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$$

$$\Rightarrow[\hat{V},\hat{N}]=\hbar g\hat{\sigma}_+\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hbar g\hat{\sigma}_+|e\rangle\langle e|\hat{a}+\hbar g\hat{\sigma}_-\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\hat{a}+\hbar g\hat{\sigma}_-|e\rangle\langle e|\hat{a}^\dagger-...$$

$$...-\hbar g\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger\hat{a}^2-\hbar g\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hbar g|e\rangle\langle e|\hat{\sigma}_+\hat{a}-\hbar g|e\rangle\langle e|\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger$$

donde se usó el hecho de que $[\hat{a},\hat{\sigma}_\pm]=\left[\hat{a}^\dagger,\hat{\sigma}_\pm\right]=0$

y, recordando que $\hat{\sigma}_+=|e\rangle\langle g|=(\hat{\sigma}_-)^\dagger$

$$\Rightarrow\hat{\sigma}_+|e\rangle\langle e|=\left(|e\rangle\langle e|\hat{\sigma}_-\right)^\dagger=|e\rangle\underbrace{\langle g|e\rangle}_{=0}\langle e|=0$$

$$\Rightarrow\hat{\sigma}_-|e\rangle\langle e|=\left(|e\rangle\langle e|\hat{\sigma}_+\right)^\dagger=|g\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\langle e|=\hat{\sigma}_-$$

entonces

$$[\hat{V},\hat{N}]=\hbar g\left[\hat{\sigma}_+\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{\sigma}_-\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\hat{a}+\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger-\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger\hat{a}^2-\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{\sigma}_+\hat{a}\right]$$

$$\Rightarrow[\hat{V},\hat{N}]=\hbar g\left[\hat{\sigma}_+\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]\hat{a}+\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]+\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger-\hat{\sigma}_+\hat{a}\right]$$

$$\Rightarrow[\hat{V},\hat{N}]=\hbar g\left[\hat{\sigma}_+\left(\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]-1\right)\hat{a}+\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\left(\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]+1\right)\right]\Rightarrow[\hat{V},\hat{N}]=0 \quad (2)$$

donde se usó que $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=-\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]=\hat{I}$.

Finalmente, concluimos que $[\hat{H},\hat{N}]=0$ y el observable "número de excitaciones" $\hat{N}$ es una constante de movimiento. Y como ambos operadores conmutan podemos asegurar que existe una base común que diagonaliza a ambos operadores.

Inciso b)
Usando los autovalores de los operadores creación y aniquilación

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{(n+1)}|(n+1)\rangle;\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|(n-1)\rangle$$

podremos concluir que la base $\mathcal{B}=\left\{|g,(n+1)\rangle,|e,n\rangle\right\}$ es el conjunto de todos los autoestados del operador $\hat{N}$. Esto lo podemos ver por partes, primero analizando los términos diagonales tendremos,

$$\hat{N}|g,(n+1)\rangle=\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+|e\rangle\langle e|\right)|g,(n+1)\rangle$$

$$\Rightarrow\hat{N}|g,(n+1)\rangle=|g\rangle\otimes\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}|(n+1)\rangle\right)+\left(|e\rangle\underbrace{\langle e|g\rangle}_{=0}\right)\otimes|(n+1)\rangle$$

$$\Rightarrow\hat{N}|g,(n+1)\rangle=|g\rangle\otimes\left(\hat{a}^\dagger\sqrt{(n+1)}|n\rangle\right)=|g\rangle\otimes\left(\sqrt{(n+1)}\sqrt{(n+1)}|(n+1)\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \hat{N}|g,(n+1)\rangle = (n+1)|g,(n+1)\rangle \Rightarrow \left\langle g,(n+1)\middle|\hat{N}\middle|g,(n+1)\right\rangle = (n+1) \tag{3}$$

y de forma análoga obtenemos que

$$\hat{N}|e,n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e|\right)|e,n\rangle$$
$$\Rightarrow \hat{N}|e,n\rangle = |e\rangle \otimes \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\right) + \left(|e\rangle \underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\right)\otimes|n\rangle$$
$$\Rightarrow \hat{N}|e,n\rangle = |e\rangle\otimes\left(\hat{a}^\dagger\sqrt{n}|(n-1)\rangle\right) + |e,n\rangle = |e\rangle\otimes\left(\sqrt{n}\sqrt{n}|n\rangle\right) + |e,n\rangle$$
$$\Rightarrow \hat{N}|e,n\rangle = (n+1)|e,n\rangle \Rightarrow \left\langle e,n\middle|\hat{N}\middle|e,n\right\rangle = (n+1) \tag{4}$$

ahora bien, los términos cruzados serán

$$\left\langle e,n\middle|\hat{N}\middle|g,(n+1)\right\rangle = (n+1)\underbrace{\langle e|g\rangle}_{=0}\underbrace{\langle n|(n+1)\rangle}_{=0} = 0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \left\langle g,(n+1)\middle|\hat{N}\middle|e,n\right\rangle = (n+1)\underbrace{\langle g|e\rangle}_{=0}\underbrace{\langle n|(n+1)\rangle}_{=0} = 0 \tag{6}$$

Con este resultado y notando que los autoestados del operador $\hat{N}$ también son autoestados del operador $\hat{H}_0$ tendremos que

$$\left\langle g,(n+1)\middle|\hat{H}_0\middle|g,(n+1)\right\rangle = \hbar\omega_c(n+1) \tag{7}$$
$$\left\langle e,n\middle|\hat{H}_0\middle|e,n\right\rangle = \hbar(\omega_c n + \omega_0) \tag{8}$$
$$\left\langle e,n\middle|\hat{H}_0\middle|g,(n+1)\right\rangle = \left\langle g,(n+1)\middle|\hat{H}_0\middle|e,n\right\rangle = 0 \tag{9}$$

Y de forma análoga para $\hat{V}_0$ tendremos, que los términos cruzados serán

$$\hat{V}_0|g,(n+1)\rangle = \hbar g\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\right)|g,(n+1)\rangle$$
$$\Rightarrow \hat{V}_0|g,(n+1)\rangle = \hbar g\left(\hat{a}|e\rangle\langle g| + \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e|\right)|g,(n+1)\rangle$$
$$\Rightarrow \hat{V}_0|g,(n+1)\rangle = \hbar g\left(|e\rangle\underbrace{\langle g|g\rangle}_{=1}\right)\otimes\left(\hat{a}|(n+1)\rangle\right) + \hbar g\left(|g\rangle\underbrace{\langle e|g\rangle}_{=0}\right)\otimes\left(\hat{a}^\dagger|(n+1)\rangle\right)$$
$$\Rightarrow \hat{V}_0|g,(n+1)\rangle = \hbar g|e\rangle\otimes\left(\sqrt{(n+1)}|n\rangle\right) = \hbar g\sqrt{(n+1)}|e,n\rangle$$

y de forma análoga obtenemos que

$$\hat{V}_0|e,n\rangle = \hbar g\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\right)|e,n\rangle$$
$$\Rightarrow \hat{V}_0|e,n\rangle = \hbar g\left(\hat{a}|e\rangle\langle g| + \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e|\right)|e,n\rangle$$
$$\Rightarrow \hat{V}_0|e,n\rangle = \hbar g\left(|e\rangle\underbrace{\langle g|e\rangle}_{=0}\right)\otimes\left(\hat{a}|n\rangle\right) + \hbar g\left(|g\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\right)\otimes\left(\hat{a}^\dagger|n\rangle\right)$$
$$\Rightarrow \hat{V}_0|e,n\rangle = \hbar g|g\rangle\otimes\left(\sqrt{(n+1)}|(n+1)\rangle\right) = \hbar g\sqrt{(n+1)}|g,(n+1)\rangle$$

entonces,

$$\Rightarrow \left\langle e,n\middle|\hat{V}_0\middle|g,(n+1)\right\rangle = \hbar g\sqrt{(n+1)}\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = \hbar g\sqrt{(n+1)} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \left\langle g,(n+1)\middle|\hat{V}_0\middle|e,n\right\rangle = \hbar g\sqrt{(n+1)}\underbrace{\langle g|g\rangle}_{=1}\underbrace{\langle (n+1)|(n+1)\rangle}_{=1} = \hbar g\sqrt{(n+1)} \tag{11}$$

donde se uso que $g \in \mathbb{R}$. Ahora bien, los términos diagonales serán

$$\left\langle g,(n+1)\middle|\hat{V}_0\middle|g,(n+1)\right\rangle = \hbar g\sqrt{(n+1)}\underbrace{\langle g|e\rangle}_{=0}\underbrace{\langle (n+1)|n\rangle}_{=0} = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \left\langle e,n\middle|\hat{V}_0\middle|e,n\right\rangle = \hbar g\sqrt{(n+1)}\underbrace{\langle e|g\rangle}_{=0}\underbrace{\langle n|(n+1)\rangle}_{=0} = 0 \tag{13}$$

Luego, de forma matricial, los subespacios 2×2 del hamiltoniano $\hat{H}$ serán

$$\hat{H}\Big|_n = \begin{pmatrix} |\mathbf{g},(\mathbf{n}+\mathbf{1})\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{n}\rangle & \\ \hbar\omega_c(n+1) & \hbar g\sqrt{(n+1)} & \langle \mathbf{g},(\mathbf{n}+\mathbf{1})| \\ \hbar g\sqrt{(n+1)} & \hbar(\omega_c n+\omega_0) & \langle \mathbf{e},\mathbf{n}| \end{pmatrix} \tag{14}$$

y de forma general tendremos que el operador $\hat{H}$ es una matriz infinita, diagonal por bloques de la forma,

$$\hat{H} = \hbar\begin{pmatrix} |\mathbf{g},\mathbf{1}\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{0}\rangle & |\mathbf{g},\mathbf{2}\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{1}\rangle & \dots & |\mathbf{g},(\mathbf{n}+\mathbf{1})\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{n}\rangle & \dots & \\ \omega_c & \hbar g & 0 & 0 & & 0 & 0 & & \langle \mathbf{g},\mathbf{1}| \\ \hbar g & \omega_0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & \langle \mathbf{e},\mathbf{0}| \\ 0 & 0 & 2\omega_c & \sqrt{2}g & & 0 & 0 & & \langle \mathbf{g},\mathbf{2}| \\ 0 & 0 & \sqrt{2}g & (\omega_c+\omega_0) & & 0 & 0 & & \langle \mathbf{e},\mathbf{1}| \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \omega_c(n+1) & g\sqrt{(n+1)} & & \langle \mathbf{g},(\mathbf{n}+\mathbf{1})| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & g\sqrt{(n+1)} & \hbar(\omega_c n+\omega_0) & & \langle \mathbf{e},\mathbf{n}| \\ & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Inciso c)

De la expresión para $\hat{H}\Big|_n$ podremos re-escribir esta representación matricial del subespacio usando la definición de desintonía $\varDelta = (\omega_c - \omega_0)$ de la forma

$$\hat{H}\Big|_n = \hbar\begin{pmatrix} |\mathbf{g},(\mathbf{n}+\mathbf{1})\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{n}\rangle & \\ \omega_c(n+1)+(\varDelta-\varDelta)(n+1) & g\sqrt{(n+1)} & \langle \mathbf{g},(\mathbf{n}+\mathbf{1})| \\ g\sqrt{(n+1)} & [\omega_c n+\omega_0+(\varDelta-\varDelta)n] & \langle \mathbf{e},\mathbf{n}| \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{H}(\varDelta)\Big|_n = \hbar\begin{pmatrix} |\mathbf{g},(\mathbf{n}+\mathbf{1})\rangle & |\mathbf{e},\mathbf{n}\rangle & \\ (\varDelta+\omega_0)(n+1) & g\sqrt{(n+1)} & \langle \mathbf{g},(\mathbf{n}+\mathbf{1})| \\ g\sqrt{(n+1)} & [\varDelta n+\omega_0(n+1)] & \langle \mathbf{e},\mathbf{n}| \end{pmatrix} \tag{15}$$

donde se usó que,

$$\begin{aligned} \omega_c(n+1)+(\varDelta-\varDelta)(n+1) &= \omega_c(n+1)+[(\omega_c-\omega_0)-(\omega_c-\omega_0)](n+1) \\ \Rightarrow \omega_c(n+1)+(\varDelta-\varDelta)(n+1) &= (\varDelta+\omega_0)(n+1) \end{aligned} \tag{16}$$

$$[\omega_c n+\omega_0+(\mathit{\Delta}-\mathit{\Delta})n]=\{\omega_c n+\omega_0+[(\omega_c-\omega_0)-(\omega_c-\omega_0)]n\}$$
$$\Rightarrow[\omega_c n+\omega_0+(\mathit{\Delta}-\mathit{\Delta})n]=[\mathit{\Delta}n+\omega_0(n+1)] \tag{17}$$

Y los autovalores de este subespacio se calculan teniendo en cuent ael problema de autovalores, según la ec. de Schrödinger independiente del tiempo de la forma,

$$\hat{H}\Big|_n|\phi_n\rangle=\epsilon_n|\phi_n\rangle$$
$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}[(\mathit{\Delta}+\omega_0)(n+1)-\epsilon_n] & g\sqrt{(n+1)}\\ g\sqrt{(n+1)} & [\mathit{\Delta}n+\omega_0(n+1)-\epsilon_n]\end{pmatrix}=0$$

de forma general tendremos, (resolviendo con Mathematica)

$$\Rightarrow \epsilon_n^{\pm}=\frac{1}{2}\Big((2n+1)(\mathit{\Delta}+\omega_0)\pm\sqrt{\big[\mathit{\Delta}^2+4g^2(n+1)\big]}\Big) \tag{18}$$
$$\langle\phi_n^{\pm}|=\begin{pmatrix}-\dfrac{\Big[-\mathit{\Delta}\pm\sqrt{\big[\mathit{\Delta}^2+4g^2(n+1)\big]}\Big]}{2g\sqrt{(n+1)}}, & 1\end{pmatrix} \tag{19}$$

analizando el caso particular de $n=0$, tendremos los siguientes autovalores y autovectores,

$$n=0\Rightarrow \det\begin{pmatrix}(\mathit{\Delta}+\omega_0-\epsilon_0) & g\\ g & (\omega_0-\epsilon_0)\end{pmatrix}=0$$
$$\Rightarrow \epsilon_0^{\pm}=\frac{1}{2}\Big(\mathit{\Delta}+2\omega_0\pm\sqrt{\big(\mathit{\Delta}^2+4g^2\big)}\Big);\langle\phi_0^{\pm}|=\begin{pmatrix}-\dfrac{\Big[-\mathit{\Delta}\pm\sqrt{\big(\mathit{\Delta}^2+4g^2\big)}\Big]}{2g} & 1\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$n=1\Rightarrow \det\begin{pmatrix}[2(\mathit{\Delta}+\omega_0)-\epsilon_1] & g\sqrt{2}\\ g\sqrt{2} & (\mathit{\Delta}+2\omega_0-\epsilon_1)\end{pmatrix}=0$$
$$\Rightarrow \epsilon_1^{\pm}=\frac{1}{2}\Big(3\mathit{\Delta}+4\omega_0\pm\sqrt{\big(\mathit{\Delta}^2+8g^2\big)}\Big);\langle\phi_1^{\pm}|=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}\Big[-\mathit{\Delta}\pm\sqrt{\big(\mathit{\Delta}^2+8g^2\big)}\Big]}{4g} & 1\end{pmatrix} \tag{21}$$

y analizando los límites tendremos (considerando que $\omega_0\gg g$),

Límite muy cerca de resonancia $\mathit{\Delta}\to 0$
Autoenergías

$$\lim_{\mathit{\Delta}\to 0}\epsilon_0^{\pm}=(\omega_0\pm g)\Rightarrow \lim_{\mathit{\Delta}\to 0}\mathit{\Delta}\epsilon_0=\big(\epsilon_0^{+}-\epsilon_0^{-}\big)=2g\to(\text{gap}) \tag{22}$$
$$\lim_{\mathit{\Delta}\to 0}\epsilon_1^{\pm}=\big(2\omega_0\pm\sqrt{2}g\big)\Rightarrow \lim_{\mathit{\Delta}\to 0}\mathit{\Delta}\epsilon_1=\big(\epsilon_1^{+}-\epsilon_1^{-}\big)=2\sqrt{2}g\to(\text{gap}) \tag{23}$$

Autoestados

$$\lim_{\mathit{\Delta}\to 0}\langle\phi_0^{\pm}|=\begin{pmatrix}\mp 1 & 1\end{pmatrix}\equiv\frac{\big(\langle e,0|\mp\langle g,1|\big)}{\sqrt{2}} \tag{24}$$
$$\lim_{\mathit{\Delta}\to 0}\langle\phi_1^{\pm}|=\begin{pmatrix}\mp 1 & 1\end{pmatrix}\equiv\frac{\big(\langle e,1|\mp\langle g,2|\big)}{\sqrt{2}} \tag{25}$$

Límite muy lejos de resonancia $\mathit{\Delta}\to\infty$
Autoenergías

$$\lim_{\Delta\to\infty} \epsilon_0^{\pm} = \omega_0 + \frac{(\Delta \pm \Delta)}{2} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta\to\infty} \epsilon_0^{+} = (\omega_0 + \Delta) \\ \lim\limits_{\Delta\to\infty} \epsilon_0^{-} = \omega_0 \end{cases} \tag{26}$$

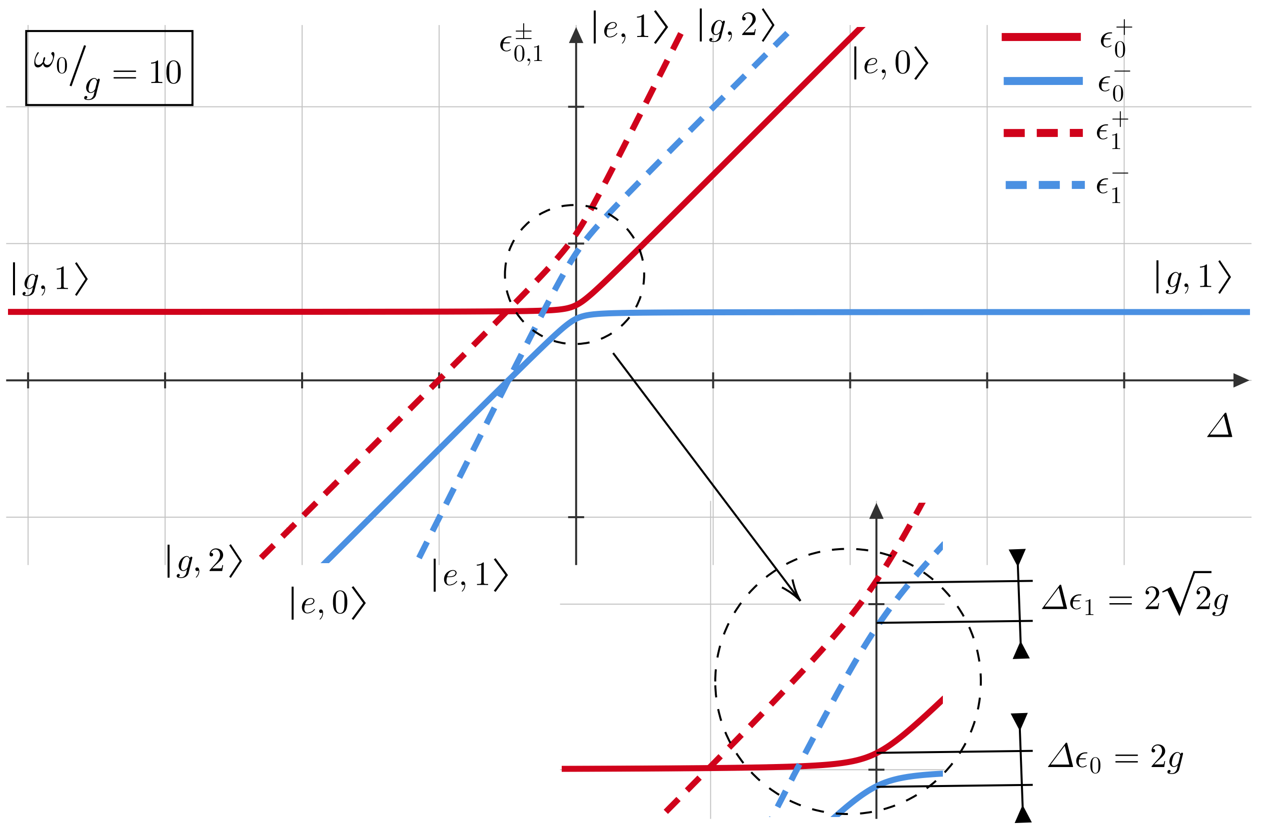
$$\lim_{\Delta\to\infty} \epsilon_1^{\pm} = 2\omega_0 + \frac{3(\Delta \pm \Delta)}{2} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta\to\infty} \epsilon_1^{+} = (2\omega_0 + 3\Delta) \\ \lim\limits_{\Delta\to\infty} \epsilon_1^{-} = 2\omega_0 \end{cases} \tag{27}$$

Autoestados

$$\lim_{\Delta\to\infty} \left\langle \phi_0^{\pm} \right| = \begin{pmatrix} \frac{(\Delta \mp \Delta)}{2g} & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta\to\infty} \left\langle \phi_0^{+} \right| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \langle e, 0| \\ \lim\limits_{\Delta\to\infty} \left\langle \phi_0^{-} \right| = \lim\limits_{\Delta\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{g} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \langle g, 1| \end{cases} \tag{28}$$

$$\lim_{\Delta\to\infty} \left\langle \phi_1^{\pm} \right| = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}(\Delta \mp \Delta)}{4g} & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta\to\infty} \left\langle \phi_1^{+} \right| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \langle e, 1| \\ \lim\limits_{\Delta\to\infty} \left\langle \phi_1^{-} \right| = \lim\limits_{\Delta\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\Delta}{2g} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \langle g, 2| \end{cases} \tag{29}$$

y gráficamente tendremos,

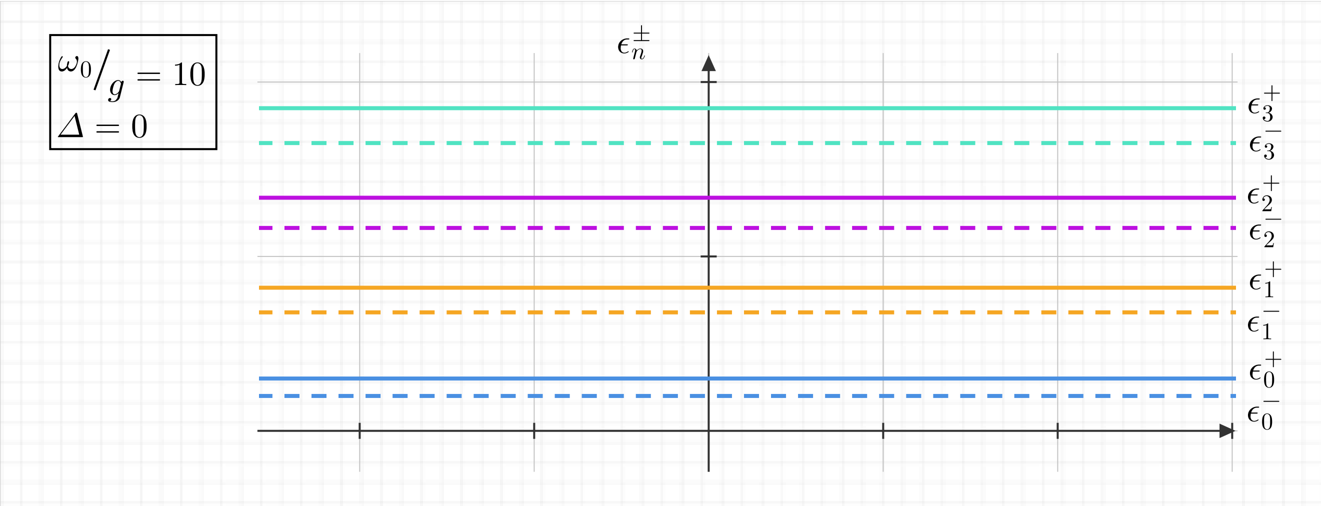


Inciso d)

Para el caso resonante $(\Delta \to 0)$ tendremos que, los autoestados y autoenergías serán

$$\Rightarrow \epsilon_n^{\pm} = \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 \pm g\sqrt{(n+1)}\right); \left\langle \phi_n^{\pm} \right| = \begin{pmatrix} \mp 1, & 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{\left(\langle e, n| \mp \langle g, (n+1)|\right)}{\sqrt{2}} \tag{30}$$

y gráficamente, los primeros ocho niveles para el caso resonante serán,



Teniendo en cuenta que el hamiltoniano del sistema es bloco-diagonal podremos considerar un único sub-bloque 2×2 (subespacio) y diagonalizarlo de la forma, obteniendo una base de autoestados $\mathcal{B}_n := \left\{ \left| \phi_n^1, \phi_n^2 \right\rangle \right\}$ y asociados a los autovalores $\left\{ \epsilon_n^1, \epsilon_n^2 \right\}$ entonces la evolución de un estado inicial de la forma $\left| \psi_0 \right\rangle$ será, según la ec. de Schrödinger, de la forma

$$\left| \psi(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{2} \exp\left(-i\epsilon_n^j \Delta t /_{\hbar} \right) \left| \psi_0 \right\rangle \tag{31}$$

y teniendo en cuenta que cualquier estado inicial $\left| \psi_0 \right\rangle$ se puede descomponer en la base de autoestados del subespacio del hamiltoniano $\mathcal{B}_n$

$$\left| \psi_0 \right\rangle = \sum_{k=1}^{2} c_k^{\psi_0} \left| \phi_n^k \right\rangle \tag{32}$$

entonces

$$\left| \psi(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{2} c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^k \Delta t /_{\hbar} \right) \left| \phi_n^k \right\rangle \tag{33}$$

Luego, la probabilidad de población, partiendo de un estado $\left| \chi \right\rangle$ general tendremos,

$$p_\chi(t) = \left\| \left\langle \chi \middle| \psi(t) \right\rangle \right\|^2 = \left\| \left\langle \chi \right| \sum_{k=1}^{2} c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^k \Delta t /_{\hbar} \right) \left| \phi_n^k \right\rangle \right\|^2$$

$$\text{como } \left| \chi \right\rangle = \sum_{l=1}^{2} c_l^{\chi} \left| \phi_n^l \right\rangle \Rightarrow p_\chi(t) = \left\| \sum_{l=1}^{2} \left(c_l^{\chi} \right)^* \left\langle \phi_n^l \right| \sum_{k=1}^{2} c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^k \Delta t /_{\hbar} \right) \left| \phi_n^k \right\rangle \right\|^2$$

$$\Rightarrow p_\chi(t) = \left\| \sum_{k,l=1}^{2} \left(c_l^{\chi} \right)^* c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^k \Delta t /_{\hbar} \right) \underbrace{\left\langle \phi_n^l \middle| \phi_n^k \right\rangle}_{=\delta_{l,k}} \right\|^2$$

$$\Rightarrow p_\chi(t) = \left\| \sum_{k=1}^{2} \left(c_k^{\chi} \right)^* c_k^{\psi_0} \exp\left(-i\epsilon_n^j \Delta t /_{\hbar} \right) \right\|^2 \tag{34}$$

para el caso particular en que $\left| \psi_0 \right\rangle = \left| g, (n+1) \right\rangle$ y $\left| \chi \right\rangle = \left| e, n \right\rangle$ tendremos, para el caso resonante $\Delta \to 0$ entonces los autoestados y autoenergías son

$$\begin{cases} \epsilon_n^1 = \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 + g\sqrt{(n+1)}\right) \\ \epsilon_n^1 = \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 - g\sqrt{(n+1)}\right) \end{cases} ; \begin{cases} \left|\phi_n^1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|e,n\right\rangle - \left|g,(n+1)\right\rangle\right] \\ \left|\phi_n^2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|e,n\right\rangle + \left|g,(n+1)\right\rangle\right] \end{cases}$$

entonces,

$$\left|g,(n+1)\right\rangle = \frac{c_1^{\psi_0}}{\sqrt{2}}\left[\left|e,n\right\rangle - \left|g,(n+1)\right\rangle\right] + \frac{c_2^{\psi_0}}{\sqrt{2}}\left[\left|e,n\right\rangle + \left|g,(n+1)\right\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \left|g,(n+1)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(c_1^{\psi_0} + c_2^{\psi_0}\right)\left|e,n\right\rangle + \left(c_2^{\psi_0} - c_1^{\psi_0}\right)\left|g,(n+1)\right\rangle\right]$$

y de forma análoga para $\left|\chi\right\rangle$ tendremos,

$$\left|e,n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(c_1^{\chi} + c_2^{\chi}\right)\left|e,n\right\rangle + \left(c_2^{\chi} - c_1^{\chi}\right)\left|g,(n+1)\right\rangle\right]$$

y se deberá cumplir que

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^{\psi_0} \\ c_2^{\psi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1^{\psi_0} = \frac{-1}{\sqrt{2}}; c_2^{\psi_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^{\chi} \\ c_2^{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1^{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}}; c_2^{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{36}$$

y la probabilidad de población serán, considerando que $\Delta t = \left(\underbrace{t_f}_{=t} - \underbrace{t_0}_{=0}\right) = t$

$$p_e^n(t) = \left\|\left(c_1^{\chi}\right)^* c_1^{\psi_0} \exp\left(\frac{-i\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) + \left(c_2^{\chi}\right)^* c_2^{\psi_0} \exp\left(\frac{-i\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right\|^2$$

$$\Rightarrow p_e^n(t) = \left\|\frac{-1}{2}\exp\left(\frac{-i\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-i\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right\|^2 = \frac{1}{4}\underbrace{\left\|\exp\left(\frac{-i\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{-i\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right)\right\|^2}_{=\bigstar}$$

y desarrollando este último término tendremos,

$$\bigstar = \left\|-\left[\cos\left(\frac{\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) - \cos\left(\frac{\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right] + i\left[\sin\left(\frac{\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) - \sin\left(\frac{\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right]\right\|^2$$

$$\Rightarrow \bigstar = \left|\cos\left(\frac{\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) - \cos\left(\frac{\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right|^2 + \left|\sin\left(\frac{\epsilon_n^1 t}{\hbar}\right) - \sin\left(\frac{\epsilon_n^2 t}{\hbar}\right)\right|^2$$

y recordando las siguientes propiedades trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(\alpha_1 \pm \beta_1) = \cos(\alpha_1)\cos(\beta_1) \mp \sin(\alpha_1)\sin(\beta_1) \\ \sin(\alpha_2 \pm \beta_2) = \sin(\alpha_2)\cos(\beta_2) \pm \cos(\alpha_2)\sin(\beta_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\cos(\alpha_1 - \beta_1) - \cos(\alpha_1 + \beta_1)] = 2\sin(\alpha_1)\sin(\beta_1) \\ [\sin(\alpha_2 + \beta_2) - \sin(\alpha_2 - \beta_2)] = 2\cos(\alpha_2)\sin(\beta_2) \end{cases}$$

entonces, si consideramos

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}; \beta_1 = -\beta_2 = \frac{-t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}$$

luego

$$\bigstar = \left| 2\sin\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\sin\left[\frac{-t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\right|^2 + \left| 2\cos\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\sin\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\right|^2$$

$$\Rightarrow \bigstar = 4\underbrace{\left\{\sin^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right] + \cos^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 + \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]\right\}}_{=1}\sin^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right] = 4\sin^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]$$

entonces,

$$\Rightarrow p_e^n(t) = \sin^2\left[\frac{t\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right)}{2\hbar}\right]$$

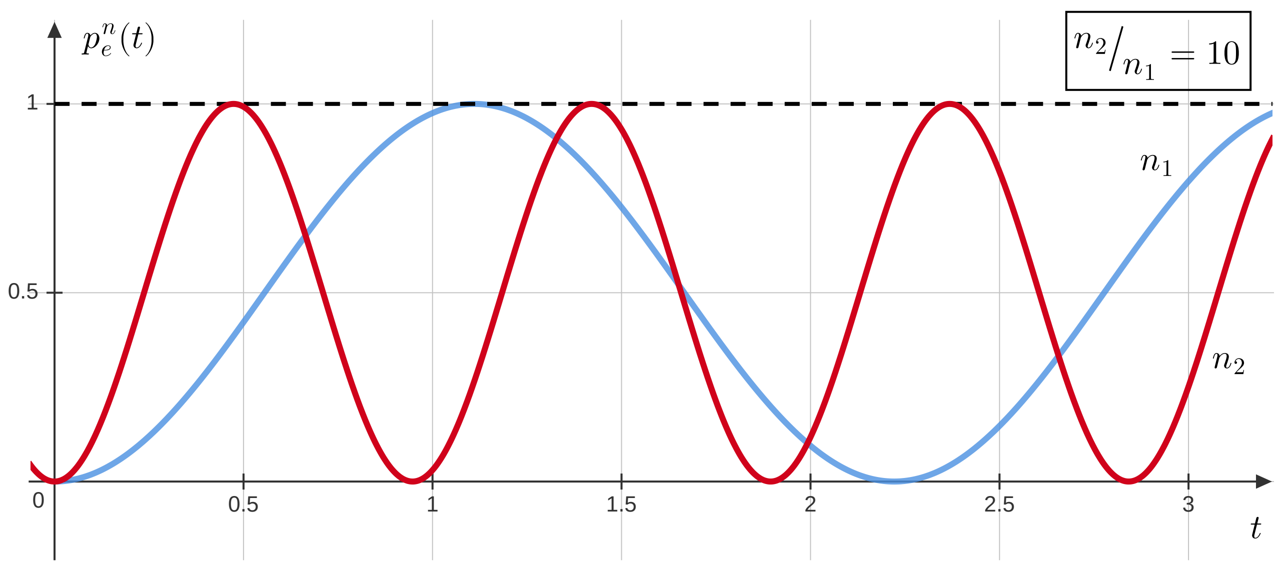
reemplazando las expresiones de las autoenergías tendremos,

$$\left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right) = \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 + g\sqrt{(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{2}(2n+1)\omega_0 - g\sqrt{(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\epsilon_n^1 - \epsilon_n^2\right) = 2g\sqrt{(n+1)} \Rightarrow \boxed{p_e^n(t) = \sin^2\left[\frac{g\sqrt{(n+1)}}{\hbar}t\right]} \tag{37}$$

cuya frecuencia de oscilación es

$$\omega_e = \frac{g\sqrt{(n+1)}}{\hbar} \tag{38}$$



Inciso e)

Este inciso al ser un problema numérico, se desarrollo enteramente en Jupyter Notebook en código Julia, en el mismo se puede consultar los desarrollos matemáticos para calcular la población del estado excitado si inicialmente partimos de un estado coherente con el átomo en el estado fundamental.

Links útiles

- https://github.com/mendzmartin/quantum_optics/blob/master/parcial/JaynesCummings_model.ipynb
- https://github.com/mendzmartin/quantum_optics/blob/master/parcial/module_JaynesCummings.jl
- https://www.researchgate.net/publication/287039109_The_Jaynes-Cummings_model

Preguntas Complementarias

i) Qué temas fueron los más interesantes/relevantes hasta ahora? Cuáles los menos? A qué temas habrían preferido dedicar más tiempo? A cuáles menos?

ii) Habrían preferido ver los temas en otro orden? (si es así, aclarar cuál) Habrían preferido apegarse más a algún libro? (si es así, a cuál?)

iii) Para el resto de la materia, qué temas del programa pintan más prometedores? Qué les gustaría agregar/profundizar? Qué preferirían quitar? (hay que tener en cuenta que el tiempo es finito!)

Inciso i)

Los temas más relevantes fueron:

- Fenómeno de Avoided Crossing teniendo en cuenta que ya me había topado con este fenómeno al simular osciladores armónicos con términos perturbativos y me sirvió para entender bien el concepto y poder explicarlo formalmente con ecuaciones.
- Eliminación adiabática estuvo muy bueno porque entendí como estimar valores, analizar resultados desde el punto de vista físico.
- Ejercicios numéricos porque permiten entender bien la teoría y aplicarla para luego variar parámetros y calcular de forma más rápida (y automática) los resultados, ver tendencias, comportamientos, fenómenos raros (o complejos) y generar nuevas preguntas o replantearse si entendimos realmente el tema, cosa que analíticamente sería muy trabajoso. Incluso estos problemas me sirvieron para resolverlos con paquetes que utilizaré en mi doctorado, por ejemplo el paquete MCTDH y comparar que ambos enfoques me den los mismos resultados (a pesar de que MCTDH ataca la parte estructural del átomo y grados de libertad de spin, cosa que la resolución simple no tiene en cuenta nada de esto).

Los temas menos relevantes fueron:

- Ningún tema me pareció irrelevante, todos fueron nuevos y en cada tema aprendí cosas que no sabía. Si tuviese que elegir algún tema menos relevante serían los coeficientes de Einstein o quizás la primer parte de operadores densidad, cuyos temas podrían haberse aprendido o repasado por nuestra cuenta.

Los temas que hubiese preferido dedicar más tiempo fueron:

- Ecuaciones maestras, o ver un poco de procesos estocásticos aplicados a la mecánica cuántica (profundizar un poco más cuándo utilizar uno u otro, aunque sea con ejemplos básicos teniendo en cuenta que hay cursos específicos sobre estos temas). Es decir, entenderlos más conceptualmente para en caso de utilizarlo en algún futuro por lo menos tener una base sólida para empezar a profundizar.

- Campo magnético cuantizado, me hubiese gustado ver en mayor profundidad (por lo menos conceptualmente), al igual que las autocorrelaciones cuánticas.
- Interpretación de papers. Hubiese sido interesante dar un paper (con complejidad suficiente) para leer y luego analizarlo todos juntos en clase y aclarar muchas problemáticas que nos toparemos como científicos. (en particular el ejercicio de análisis de paper dado en clase, elegí uno que tenía muchas cosas resueltas, pues era muy divulgativo o conceptual, pero soy consciente que no siempre será así)

Inciso ii)
El orden en que se vieron los temas me pareció correcto.

Respecto a la bibliografía puedo mencionar que apegarse más a un libro siempre ayuda porque uno no debe ir cambiando notaciones constantemente, pero es evidente que muchas veces no se puede porque los temas se abordan más profundamente en unos y otros. Algo útil podría haber sido un apunte o notas de clase que nos permite entender rápidamente los temas específicos vistos en clase (notas con comentarios interesantes o referencias específicas) y luego el que quiera pueda profundizar en otra bibliografía.

Inciso iii)
Temas prometedores

- Fluorescencia en resonancia y superradiancia
- Fuerzas ópticas sobre los átomos (enfriamiento Doppler)
- Información cuántica
- Sistemas cuánticos abiertos

Temas para agregar o profundizar

- Me gustaría profundizar en computación cuántica (compuertas lógicas, ver la parte física y la parte algorítmica/computacional)
- Algoritmos simples aplicados a la computación cuántica.
- Teniendo en cuenta que mi tema de investigación es relacionada a puntos cuánticos (heteroestructuras semiconductoras) y simulaciones cuánticas, todo lo relacionado al tema será muy relevante.

Temas para quitar:

- Como desconozco la mayor cantidad de temas que veremos, no puedo decidir cuál tema será menos relevante para tratar. Si tuviese que elegir alguno elegiría sacar aquellos temas que se ven muy muy por encima.