Satz 0.1. *Seien $\mathfrak{a} \subset A$, dann*

a) $\mathfrak{a}$ ist Primideal $\Leftrightarrow A/\mathfrak{p}$ ist Integritätsbereich (nullteilerfrei)

b) $\mathfrak{a}$ ist maximales Ideal $\Leftrightarrow A/\mathfrak{a}$ ist ein Körper.

Beweis. a) $\Rightarrow$ Sei $a + \mathfrak{a} \in A/p$ ein Nullteiler, dann existiert $x \in A \setminus p$, sodass

$$(a + \mathfrak{a})(x + \mathfrak{a}) = ax + \mathfrak{a} = p$$

Also ist $ax \in \mathfrak{a}$ und da $\mathfrak{a}$ Primideal folgt $a \in \mathfrak{a}$.

$\Leftarrow$ Sei $A/\mathfrak{a}$ Integritätsbereich und sei $ab \in \mathfrak{a}$, dann ist

$$(a + \mathfrak{a})(b + \mathfrak{a}) = ab + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

Da $A/\mathfrak{a}$ Integritätsbereich ist gilt $a + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ oder $b + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, also $a \in \mathfrak{a}$ oder $b \in \mathfrak{a}$.

b) $\Rightarrow$ Sei $I/\mathfrak{a}$ ein Ideal in $A/\mathfrak{a}$.
Hierbei ist I eine Ideal in A welches $\mathfrak{a}$ enthält, also $\mathfrak{a} \subseteq I \subseteq A$.
Da $\mathfrak{a}$ maximal ist, muss $\mathfrak{a} = I$ oder $\mathfrak{a} = A$. Also ist $A/\mathfrak{a}$ ein Körper.

$\Leftarrow$ Sei I ein Ideal in A mit $\mathfrak{a} \subseteq I \subseteq A$.
Dann ist $I/\mathfrak{a}$ eine Ideal in $A/\mathfrak{a}$, d.h.

$$I/\mathfrak{a} = \mathfrak{a}/\mathfrak{a} \quad \text{oder} \quad I/\mathfrak{a} = A/\mathfrak{a}$$

Damit folgt $I = \mathfrak{a}$ oder $I = \mathfrak{A}$.

□

Bemerkung. Insbesondere ist jedes maximale ideal prim.

Definition 0.2. Sei $A \neq \emptyset$. Eine **Relation** auf A ist eine Teilmenge $R \subset A \times A$. R heißt **partielle Ordnung** wenn

a) $\forall a \in A$ gilt $(a, a) \in R$ (Reflexivität)

b) $\forall a, b, c \in A$ gilt $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, so gilt auch $(a, c \in R)$ (Transitivität)

c) $\forall a, b \in A$ mit $(a, b \in R)$ und $(b, a) \in \mathbb{R}$, dann gilt $a = b$. (Antisymmetrie)

Ist R eine partielle Ordnungn auf A so schrieben wir für $(a, b) \in R$ auch $a \leq b$.
Zwei Elemente $a, b \in A$ heißen **vergleichbar**, wenn $a \leq b$ oder $b \leq a$ ist.
Eine Teilmenge $B \subset A$ heißt **Kette**, wenn für alle $a, b \in B$ gilt, dass $a \leq b$ oder $b \leq a$.

Lemma 0.3. *Sei $A \neq \emptyset$ partielle geordnet. Hat jede Kette $B \neq \emptyset$ in A eine obere Schranke in A, d.h. es gibt ein $a \in A$,sodass $b \leq a$ für alle $b \in B$., so besitzt A ein maximales Element.*

Theorem 0.4. *Sei $A \neq 0$ ein Ring, dann besitzt A ein maximales Ideal.*

Beweis. Sei $\Sigma = \{I \subset A \mid I \text{ ist Ideal}\}$. Dann ist $O \in \Sigma$ und Σ ist partielle geordnet durch die mengentheoretische Inklusion.
Sei $(C_i)_{i \in I}$ eine Kette in Σ. Dann ist

$$C = \bigcup_{i \in I} C_i$$

ein Ideal in A. Aus $I \notin C_i$ für alle $i \in I$ folgt, dass $I \notin C$,d.h. $C \in \Sigma$. Somit hat Σ ein maximales Element. □

Korollar 0.5. *Sei A ein Ring und $I \subsetneq A$ ein Ideal, dann ist I in einem maximalen Ideal enthalten.*

Korollar 0.6. *Sei A ein Ring und $a \in A \setminus A^*$. Dann ist a in einem maximalen Ideal enthalten.*

Beweis. Betrachte $(a) = Aa \neq A$. □

0.1 Lokale Ringe

Definition 0.7. Ein Ring A mit nur eine maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ heißt **lokaler Ring** und $A/\mathfrak{m}$ heißt **Restklassenkörper** von A.

Satz 0.8. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{m} \neq A$ eine Ideal in A.*
Ist jedes $x \in A \setminus +m$ eine Einheit, si ist A ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$.

Beweis. Für jedes Ideal $I \subsetneq A$ gilt $I \cap A^* = \emptyset$, enthält also keine Einheiten und ist somit in $\mathfrak{m}$ enthalten. Somit ist $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal. □

Satz 0.9. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{m} \subset A$ eine maximales Ideal, sodass jedes Element m eine Einheit in A ist. Dann ist A ein lokaler Ring.*

Beispiel 0.10.1. Jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ ist der Form $(m) = \mathbb{Z}m$ mit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Es gilt, dass (m) genau dann Primideal ist, wenn $m = 0$ oder m Primzahl.
Ist $\mathfrak{p}$ Primzahl, so ist (p) maximal.

Sei K ein Körper und $A = K[X_1, ..., X_n]$. Dann ist der Kern des Homomorphismus $\phi : A \to K, f \mapsto f(0)$ ein maximales Ideal in A.

0.2 Radikale

Satz 0.11. *Sei A eine Ring und $N = \{a \in A \mid a \text{ ist nilpotent}\}$. Dann ist N ein Ideal in A und A/N enthält keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.*

Beweis.

- Zz: N ist eine additive Untergruppe von A
  Seien $x, y \in N$ mit $x^n = y^m = 0$. Dann ist

  $$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} = 0$$

  denn kann nicht sowohl $k < n$, als auch $n + m - k < m$ sein.

- Z.z. $AN \subset N$.
  Sei $x \in N$ mit $x^n = 0$ und $a \in A$. Dann ist $(ax)^n = a^n x^n = 0$, also $ax \in N$.
  Also ist N Ideal in A.
  Sei nun $a + N \in A/N$ nilpotent. Dann ist $(a+N)^n = 0$ für ein $n > 0$. Also ist $a^n + N = 0$, also $a^n \in N$.
  Dann ist $(a^n)^m = 0$ udn somit $a^{nm} = 0$, also nilpotent. Es folgt, dass $a \in N$.

$\square$

Definition 0.12. Das Ideal $N = \{a \in A \mid a \text{ ist Nilpotent}\}$ heißt das **Nilradikal** von A.

Definition 0.13. Sei A ein Ring dann nennt man $J = \{x \in A \mid \forall y \in A : 1 - xy \text{ ist Einheit}\}$ das **Jacobsonradikal**.

Satz 0.14. *Sei A eine Ring, dann ist*

a) das Nilradikal von A der Schnitt aller Primideal von A.

b) das Jacobsonradikal von A der Schnitt aller Maximalen Ideale von A.

Definition 0.15. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal in A. Dann wird

$$r(a) := \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n > 0\}$$

als **Radikal** von $\mathfrak{a}$ bezeichnet. (auch $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$, $\sqrt{\mathfrak{a}}$)

Beweis. Sei $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ die Kanonische Projektion. Dann ist $r(a) = \pi^{-1}\left(N_{A/\mathfrak{a}}\right)$. Also ist $r(a)$ ein Ideal. $\square$

Satz 0.16. *Sei $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ein Ideal, dann gilt*

a) $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$

b) $r\big(r(\mathfrak{a})\big) = r(\mathfrak{a})$

c) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$

d) $r(\mathfrak{a}) = A \Leftrightarrow \mathfrak{a} = A$.

e) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r\big(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})\big)$.

0.2.1 Operationen auf Radikalen

Definition 0.17. Sein A ein Ring.

a) Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ Ideale in A.
   Dann ist

$$a + b =: \{x + y \mid x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\}$$

   ein Ideal in A.

b) Analog: Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Idealen in A, für eine Indexmenge I. Dann ist

$$\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i =: \left\{\sum_{i\in I} x_i \mid x_i \in \mathfrak{a}_i \text{ und fast alle } x_i = 0\right\}$$

ein Ideal in A.

c) Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Idealen in A, für eine Indexmenge I. Dann ist der Schnitt

$$\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i$$

ein Ideal in A.

d) Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ Ideal in A. Dann ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

ein Ideal in A.

Satz 0.18. *Die Operationen Summe, Durchschnitt und Produkt auf Idealen sind kommutativ und Assoziativ und es gilt das Distributivgesetz.*

Definition 0.19. Sei A ein Ring. Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ heißen **teilerfremd**, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A = (1)$.

Satz 0.20. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ Ideale in A. Dann sind äquivalent:*

a) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind Teilerfremd

b) Es gibt ein $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$, sodass $x + y = 1$.

Beweis. **2)⇒1)** Sei $z \in A$ und $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$, mit $x + y = 1$.
Dann ist $z = zx + zy$, wobei $zx \in \mathfrak{a}, zy \in \mathfrak{b}$, also $z \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

1)⇒2)

□

Satz 0.21. *Sei A ein Ring und seinen $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n$ paarweise teilerfremde Ideal in A. Dann gilt*

a) Jedes $\mathfrak{a}_i$ ist teilerfremd zu $\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\mathfrak{a}_j$.

b) Es gilt

$$\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i$$

Beweis. a) Sei i fest. Es gibt Elemente $x_j \in \mathfrak{a}_i, y_j \in \mathfrak{a}_j$ mit $1 = x_j + y_j$ für $i \neq j$. Dann ist

$$1 = \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}(x_j + y_j) = \underbrace{x}_{\in\mathfrak{a}_i} + \underbrace{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}}_{\in\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}\mathfrak{a}_j} \in \mathfrak{a}_i + \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}\mathfrak{a}_j$$

b) Durch Induktion über n.

$n = 2$ Sei $z \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Schreieb $1 = x + y$ mit $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$. Dann ist $z = zx + zy \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

$n > 2$ Sei

$$\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

Wir nehmen an es gelte

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i = \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i$$

Dann ist aber

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b} = \bigcap_{i=1}^{n} a_i$$

□

Definition 0.22. Sei A ein Ring und seinen $\mathfrak{a}_i, ..., \mathfrak{a}_n$ Ideale in A.
Wir definieren die Abbildung

$$\phi : A \to \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{a}_i)$$
$$a \mapsto (a + \mathfrak{a}_1, ..., a + \mathfrak{a}_n)$$

Proposition 0.23. a) ϕ ist ein Ringhomomorphismus und

$$\mathrm{Kern}(\phi) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$$

b) ϕ ist genau dann surjektiv, wenn die $\mathfrak{a}_i$ paarweise disjunkt sind.
Insbesondere ist

$$A/\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \simeq \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{a}_i$$

Beweis. b) $\Rightarrow$ Sei ϕ surjektiv. Wir zeigen, dass $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ teilerfremd sind.
Es gibt ein $x \in A$ mit $\phi(x) = (1_{A/\mathfrak{a}_1}, 0, ..., 0)$.
Also ist $x = 1 \mod \mathfrak{a}_i$ und $x = x \mod \mathfrak{a}_2$.
Dann ist

$$1 = \underbrace{(1 - x)}_{\in \mathfrak{a}_i} + \underbrace{x}_{\in \mathfrak{a}_2} \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$$

$\Leftarrow$ Seien un die $\mathfrak{a}_i$ paarweise teilerfremd.
Es reicht zu zeigen,dass es Elemente $x_i \in A$ mit

$$\phi(x_i) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$$

(1 an der i-ten Position) gibt.
Wir zeigen für $i = 1$:

Da $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_j = A$ für alle $j > 1$, gibt es $x_j \in \mathfrak{a}_1, y_j \in \mathfrak{a}_j$ mit $x_j + y_j = 1$
Sei nun

$$x := \prod_{i=2}^{n} y_j = \prod_{i=2}^{n} 1 - x_j = 1 \mod \mathfrak{a}_1$$

und $x = 0 \mod \mathfrak{a}_j$ für $j > 1$.

□

0.3 Ringe von Brüchen

Definition 0.24. Sei A ein Ring. Eine Teilmenge $S \subset A$ heißt **multiplikativ abgeschlossen**, wenn

a) Für alle $s, t \in S$ gilt, dass $st \in S$

b) $1 \in S$.

Bemerkung 0.25. Auf $A \times S$ wird durch

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow (at - bs)u = 0 \text{ für ein } u \in S$$

eine Äquivalenzklasse definiert.
Für die Transitivität wird die multiplikative Abgeschlossenheit von S benötigt.
Die Äquivalenzklassen von (a, s) wird mit a/s bezeichnet.
Die Menge der Äquivalenzklasssen wir als $S^{-1}A$ geschrieben.

Definition 0.26. Seien $a/s, b/t \in S^{-1}A$. Man definiert

- $a/s + b/t := (at + bs)/st$
- $a/s \cdot b/t := ab/st$

Definition 0.27. Diese Verknüpfungen sind wohldefiniert und versehen $S^{-1}A$ mit einer Ringstruktur.
$S^{-1}A$ wird als der **Ring der Brüche** von A bezüglich S bezeichnet.

Beispiel 0.28. Sei $A = \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist $S^{-1}A$ isomorph zu $\mathbb{Q}$.

Korollar 0.29. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_S : A &\to S^{-1}A \\ a &\mapsto a/1 \end{aligned}$$

hat folgende Eigenschaften:

a) φ_S ist ein Ringhomomorphismus. (i.A. nicht injektiv)

b) Sei $s \in S$, dann ist $\varphi_S(s)$ eine Einheit in $S^{-1}A$.

c) $\mathrm{Kern}(\varphi_S) = \{a \in A \mid as = 0$ *für ein* $s \in S\}$.

d) Jedes Element in $S^{-1}A$ ist der Form $\varphi_S(a)\varphi_S(s)^{-1}$ für ein $a \in A$, $s \in S$.

Beweis. b) Sei $s \in S$, dann ist $s/1 \cdot 1/s = s/s = 1/1 = 1_{S^{-1}A}$

c) Sei $a \in \mathrm{Kern}(\varphi_S)$, dann ist $a/1 = 0/1$, also $(a1 - 01)s = 0$ für ein $s \in S$. Also ist $as = 0$ für ein $s \in S$.

d) Sei $a/s \in S^{-1}A$. Dann ist

$$\varphi_S(a) = a/1 \qquad \varphi_S(s) = s/1 \qquad \varphi_S(s)^{-1} = 1/s$$

Es folgt

$$\varphi_S(a)\varphi(s)^{-1} = a/1 \cdot 1/s = a/s$$

□

Satz 0.30. *Seien A, B Ringe und $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Sei $g : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, der 1)-3) aus erfüllt, dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $h : S^{-1}A \to B$ mit $h \circ \varphi_S = g$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_S"] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Definition 0.31. Sei A ein Integritätsbereich und $S = A \setminus \{0\}$. Dann nennt man $S^{-1}A$ den **Quotientenkörper**

Lemma 0.32. *Der Quotientenkörper ist ein Körper, φ_S ist injektiv und wir können A mit seinem Bild in $S^{-1}A$ identifizieren.*

Definition 0.33. Sei A ein Ring. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Man schreibt $A_\mathfrak{p}$ für $S^{-1}A$ und nennt $A_\mathfrak{p}$ die **Lokalisierung** von A bezüglich $\mathfrak{p}$.

Lemma 0.34. *Sei A ein Ring. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A.*
Dann ist $S = A \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ Abgeschlossen.

Lemma 0.35. *Sei $A = \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Dann ist $\mathbb{Z}_{(p)} = \{m/n \mid m/n \in \mathbb{Q}, p \not| n\}$.*

Satz 0.36. *Sei A ein Ring und $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist*

a) Ist I ein Ideal in A so ist auch $S^{-1}I = \{a/s \mid a \in I\}$ ein Ideal in $S^{-1}A$

b) Die Ideale in $S^{-1}A$ sind der Form $S^{-1}I$, wobei I ein Ideal in A ist.

c) Sind I, J Ideal in A, dann gilt

$$\begin{aligned} S^{-1}(I + J) &= S^{-1}I + S^{-1}J \\ S^{-1}(I \cap J) &= S^{-1}I \cap S^{-1}J \\ S^{-1}(IJ) &= (S^{-1}I)(S^{-1}J) \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen nur 2).
Sei J ein Ideal in $S^{-1}A$. Dann ist $I = \varphi_S^{-1}(J)$ ein Ideal in A und $J = S^{-1}I$:
Sei $a/s \in S^{-1}I$. Aus $I = \varphi_S^{-1}(J)$ folgt, dass $\varphi_S(a) \in J$. Also ist

$$a/s = \underbrace{a/1}_{\varphi_S(a)} \cdot \underbrace{1/s}_{\in S^{-1}A} \in J$$

d.h. $s \in \varphi_S^{-1}(J) = I$ und $a/s \in S^{-1}I$. □

0.4 Integritätsbereiche und Hauptidealringe

Definition 0.37. Sei A ein Ring. Ein Ideal der Form $(a) = Aa$ heißt **Hauptideal**.

Definition 0.38. Ein Ring A heißt **Hauptidealring**, wenn jede Ideal in A Hauptideal ist.

Definition 0.39. Ein Ring A heißt **euklidisch**, wenn es eine Abbildung

$$\lambda : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$$

gibt, sodass zu je zwei Elementen $a, b \in A$ mit $b \neq 0$ Elemente $q, r \in A$ existieren mit $a = qb + r$ wobei $\lambda(r) < \lambda(b)$ oder $r = 0$.

Beispiel 0.40. a) $\mathbb{Z}$ ist euklidisch unter $\lambda(x) = |x|$.

b) Sei K ein Körper. Dann ist $K[X]$ euklidisch mit $\lambda(f) = \deg(f)$.

Satz 0.41. *Sei A ein euklidischer Ring. Dann ist A ein Hauptidealring.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \neq 0$ in Ideal in A. Dann hat

$$\lambda(x) \mid x \in a, x \neq 0$$

ein kleinstes Element, d.h. es gibt ein $x \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ mit $\lambda(x) \leq \lambda(y)$ für alle $y \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$.
Es gilt $\mathfrak{a} = (x)$.
Sei $y \in a \setminus \{0\}$. Schreibe $y = qx + r$ mit $r = 0$ oder $\lambda(r) < \lambda(x)$.
Dann ist $r \in \mathfrak{a}$ und aus der Minimalität von $\lambda(x)$ folgt $r = 0$ und damit $\mathfrak{a} \subset (x)$. □

Definition 0.42. Sei A ein Ring und seinen $a, b \in A$.
$d \in A$ heißt **Größter gemeinsamer Teiler** von a und b, wenn gilt

a) $d|a$ und $d|b$.

b) Wenn es $g \in A$ gibt mit $g|a$ und $g|b$, dann muss $g|d$.

Wir schreiben $d = \gcd(a, b) = (a, b)$

Definition 0.43. Sei A ein Ring und seinen $a, b \in A$.
$d \in A$ heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b, wenn gilt

a) $a|v$ und $b|v$.

b) Wenn es $g \in A$ gibt mit $a|g$ und $b|g$, dann muss $v|v$.

Wir schreiben $v = \operatorname{lcm}(a, b) = (a, b)$

Satz 0.44. *Sei A ein Hauptidealring und seien $a, b \in A$.*
Dann existiert ein $d = \gcd(a, b)$ und $v = \operatorname{lcm}(a, b)$ von a, b und es gilt

a) $(a) + (b) = (d)$

b) $(a) \cap (b) = (v)$

Beweis.

- Da A ein Hauptidealring ist, gilt $(a) + (b) = (d)$ für ein $d \in A$.
  Es gilt $a, b \in (d)$, also $d|a$ und $d|b$.
  Sei $g \in A$ mit $g|a$ und $g|b$. Dann ist $(a) \subset (g)$ und $(b) \subset (g)$.
  Daraus folgt, dass $(a) + (b) \subseteq (g)$, also $(d) \subset (g)$. Damit folgt $g|d$.
- Analog für lcm.

□

Definition 0.45. Sei A in Integritätsbereich. Zwei Elemente $a, b \in A$ heißen **assoziiert**, wenn

- $a|b$ und $b|a$.
- (äquivalent) $a = bu$ für ein $u \in A^*$.
- (äquivalent) $(a) = (b)$.

Man schreibt dann $a \sim b$.

Definition 0.46. Sei A in Integritätsbereich. Ein Element $p \in A$ heißt **prim**, **Primelement**, wenn

- $p \notin A^*$, $p \neq 0$ und aus $p|ab$ folgt $p|a$ oder $p|b$.
- (äquivalent) $p \neq 0$ und (p) ist Primideal.

Definition 0.47. Sei A in Integritätsbereich. $c \in A$ heißt **irreduzibel** oder **unzerlegbar**, wenn

a) für $c \notin A^*$ und $c \neq 0$ aus $c = ab$ folgt, dass $a \in A^*$ oder $b \in A^*$.

b) (äquivalent) für $c \neq 0$ für alle $a \in A$ gilt, dass aus $(c) \subset (a)$ folgt, dass $(a) = A$ oder $(a) = (c)$.

Satz 0.48. *Sei A ein Integritätsbereich und $p \in A$ prim. Dann ist p irreduzibel.*

Beweis. Sei $p = ab$, dann gilt $p|ab$. Es folgt $p|a$ oder $p|b$.
Angenommen $p|a$, dann ist $a = px$ für ein $x \in A$ und $p = pxb$. Es folgt, dass $p(1 - bx) = 0$ und da A Integritätsbereich ist $1 - bx = 0$.
Also muss $bx = 1$ also ist $b \in A^*$. □

Satz 0.49. *Sei A ein Hauptidealring und Integritätsbereich. Dann gilt für $c \in A$*

$$c \text{ prim} \Leftrightarrow c \text{ irreduzibel}$$

Beweis. Sei c irreduzibel, also ist (c) maximal. Daraus folgt, dass (c) Primideal ist und somit c prim. □

Definition 0.50. Ein Integritätsbereich heißt **faktoriell**, wenn

a) Jedes $a \in A \backslash A^*$, $a \neq 0$ zerfällt in ein Produkt von irreduziblen Elementen.

b) Die Zerlegung ist bis auf Reihenfolge und Einheiten eindeutig. D.h.

D.h. wenn $a = c_1 \cdot ... \cdot c_m = d_1 \cdot ... \cdot d_n$ mit c_1, d_1 irreduzibel, so folgt $m = n$ und es gibt $\pi \in S_n$ mit $c_1 \sim d_{\pi(i)}$ für alle $i = 1, ..., n$.

Bemerkung 0.51. Die Eindeutigkeit der Faktorisierung impliziert, dass es irreduzibles Element in einem faktoriellen Integritätsbereich prim ist.

Lemma 0.52. *Sei A ein Hauptidealring und S eine nichtleere Menge von Idealen in A. Dann hat S ein maximales Element (bezüglich $\subset$)*

Beweis. Angenommen S hat kein maximales Element. Dann gibt es zu jedem $\mathfrak{a}_1 \in S$ ein $\mathfrak{a}_2 \in S$ mit $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2$. Es gibt also eine unendliche Kette

$$\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \dots$$

von Idealen in S. Sei nun $\mathfrak{a} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i$.
Dann ist a ein Ideal in A, also ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal und $\mathfrak{a} = (x)$ für ein $x \in A$.
Dann folgt insbesondere, dass $x \in \mathfrak{a}$. Damit folgt, dass es $j_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit $x \in \mathfrak{a}_{j_0}$.
Somit ist $(x) \subset \mathfrak{a}_{j_0}$ und somit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{j_0}$.
Dies bedeutet aber, dass die Kette stationär wird, was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Theorem 0.53. *Sei A ein Integritätsbereich. Ist A ein Hauptidealring, so ist A faktoriell.*

Beweis. **Zerlegbarkeit der Elemente** Sei $S = \{(a) \mid a \in A, a \notin A^*, a \neq$ 0a zerfällt nicht in irreduzible Faktoren$\}$.
Angenommen $S \neq \emptyset$. Dann hat S eine maximales Element (a) und a ist nicht irreduzibel.
Dann gibt es $b, c \in A \setminus A^*$, mit $a = bc$.
Also ist $(a) \subsetneqq (b)$ und $(a) \subsetneqq (c)$. Da (a) maximal in S ist folgt daraus, dass $(b), (c) \notin S$.
Somit zerfallen b, c in irreduzible Faktoren und damit gilt $a \in S$. Widerspruch!.

Eindeutigkeit der Zerlegung Sei $a \in A$. Angenommen es gäbe zwei irreduzible Zerlegungen $a = c_1 \dots c_m = d_1 \dots d_n$ mit $m \leq n$.
Dann ist c_1 irreduzibel und somit prim. Also muss $c_1 | d_i$ für ein i gelte.
Nach Umnummerierung gilt $c_1 | d_1$, also $d_1 = u_1 c_1$ für $u_1 \in A^*$.
Also ist

$$\begin{aligned} & c_1 \dots c_m = u_1 c_1 d_2 \dots d_n \\ \Rightarrow \quad & c_2 \dots c_m = d_2 \dots d_n \end{aligned}$$

Fortsetzen des Argumentes liefert

$$1 = u_1 \dots u_m d_{m+1} \dots d_n$$

für geeignete $u_i \in A^*$.
Dann sind aber $d_{m+1}, \dots, d_n$ Einheiten und damit Eindeutig bis auf Einheiten und Reihenfolge.

□

0.5 Inverse und direkte Limiten

Definition 0.54. Man nennt I eine unter $\leq$ **partiell geordnete Menge**, wenn für alle $x, y, z \in I$ gilt

a) $x \leq x$.

b) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.

c) Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

Definition 0.55. Für jedes $i \in I$sei A_i ein Ring und sei für jedes Paar $i, j \in I$ mit $i \leq j$ die Abbildung $f_{ij} : A_j \to A_i$ ein Ringhomomorphismus, sodass

a) $f_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ für alle $i \in I$

b) $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ falls $i \leq j \leq k$.

Dann nennt man das System $(A_i, f_{ij})_{i,j \in I}$ **projektives System** von Ringen.

Definition 0.56. Ein Ring A zusammen mit dem Homomorphismus $f_i : A \to A_i$, sodass $f_i = f_{ij} \circ f_j$ für $i \leq j$ heißt **projektiver Limes** oder **inverser Limes** des Systems (A_i, f_{ij}), wenn folgende universelle Eingenschaft erfüllt ist:
Sind $h_u : B \to A_i$ für alle $i \in I$ Ringhomomorphismen mit $h_i = f_{ij} \circ h_j$ für $i \leq j$, so existiert genau ein Ringhomomorphismus $h : B \to A$ mit $h_i = f_i \circ h$ für alle $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\exists! h"] \arrow[dr, "h_j"] \arrow[ddr, "h_i"'] & & A \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[ddl, "f_i"] \\
& A_j \arrow[d, "f_j"] & \\
& A_i &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 0.57. Falls ein projektiver Limes existiert, so ist er bis auf kanonische Isomorphie eindeutig:
Sind (A, f_i) und (B, h_i) projektive Limiten von (A_i, f_{ij}), so gibt es Homomorphismen $h : B \to A$ und $g : A \to B$, die die oben beschrieben Verträglichkeitsbedingungen erfüllen.
Durch Zusammensetzen dieser Homomorphismen erhalten wir Abbildungen Die Eindeutigkeitsbedingung Impliziert nun, dass $g \circ h = \mathrm{id}_B$ und $h \circ g = \mathrm{id}_A$.
Man schreibt auch $A = \varprojlim_{i \in I} A_i$ für den projektiven Limes des Systems (A_i, f_{ij}).

Existenz des Projektiven Limes. Sei $(A_i, f_{ij})_{i,j \in I}$ ein projektives System von Ringen.
Setze

$$A = \left\{ (x_i)_{i \in I | f_{ij}(x_j) = x_i \text{ für } i \leq j} \right\} \subset \prod_{i \in I} A_i$$

und $h_j : A \to A_j, (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$.
Dann ist $(A, h_i)_{i \in I}$ ein projektiver Limes von (A_i, f_{ij}).
Insebsondere definiert jede Famiele $(x_i)_{i \in I}$ mit $f_{ij}(x_j) = x_i$ ein eindeutiges Element $x \in \varprojlim_{i \in I} A_i$. $\square$

Beispiel 0.58. Ein Beispiel für einen projektiven Limes sind die p-adisches ganzen Zahlen.
Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, $I = \mathbb{N}$, mit der Ordnung $\leq$.
Für $n \geq 1$ sei $A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Sei

$$\begin{aligned} f_{mn} : A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} &\to A_m = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \\ x &\mapsto x \mod p^m \end{aligned}$$

Dann ist $(A_m, f_{mn})_{m,n\geq 1}$ ein projektives System. Der projektive Limes wird als Ring der p-adischen ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n\geq 1} A_n$$

bezeichnet. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p &= \{(x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, f_{mn}(x_n) = x_n \text{ für } m \leq n\} \\ &= \{(x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, x_n \mod p^{n-1} = x_{n-1}\} \end{aligned}$$

Wir schreiben die Elemente aus $\mathbb{Z}_p$ auch als Folgen

$$x = (x_n)_{n\geq 1} = (..., x_{n+1}, x_n, ..., x_1)$$

mit $x_n \mod p^{n-1} = x_{n-1}$.
Addition und Multiplikation erfolgen komponentenweise.
Sie Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_p \\ m &\mapsto (..., m + p^n, ..., m + p) \end{aligned}$$

ist in injektiver Ringhomomorphismus.

Sei $x = (..., x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$. Ist $x \neq 0$, so ist x der Form $(..., x_{n+1}, x_n, 0, ..., 0)$ und für $j \leq n$ sind alle Einträge $x_j \neq$.
Weiterhin gilt

$$p|x \Leftrightarrow x|x_n \text{ für alle } n \geq 1$$

Satz 0.59. *Sei $x \in \mathbb{Z}_p$. Dann ist*

a) $x \in \mathbb{Z}_p^* \Leftrightarrow p \not| x$

b) Ist $x \neq 0$, so lässt sich x eindeutig schreiben als $x = p^n u$ mit $u \in \mathbb{Z}_p^*$ und $n \geq 0$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ Sei $x = (..., x_n, ..., x_1) \in \mathbb{Z}_p^*$. Dann exitsiert ein $y = (..., y_n, ..., y_1) \in \mathbb{Z}^p$ mit

$$\begin{aligned} xy &= (..., x_n, ..., x_1)(..., y_n, ..., y_1) \\ &= (..., x_n y_n, ..., x_1 y_1) \\ &= (..., 1, ..., 1) = 1 \end{aligned}$$

d.h. jeder Eintrag von x_j von x ist invertierbar, d.h. $p \not| x_n$ für alle $n \geq 1$.

$\Leftarrow$ Angenommen $p \nmid x$, dann muss $p \nmid x_n$ für ein $n \geq 1$.
Dann muss aber $p \nmid x_n$ für alle $n \geq 1$.
d.h. jedes x_n ist invertierbar. Sei

$$y = (..., x_n^{-1}, ..., x_1^{-1}) \in \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

dann erfüllt y die Kompatibilitätsbedingungen, d.h. $y \in \mathbb{Z}_p$ und $xy = 1$.

b) Ist klar.

$\square$

Definition 0.60. Sei $x \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq 0$. Schreibe $x = p^n u$ mit $u \in \mathbb{Z}_p^*$. Dann heißt

$$n = \nu_p(x)$$

die **p-adische Bewertung** von x.
Man setzt $\nu_p(0) = \infty$.
Man bezeichnet $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$ als den **p-adischen Betrag**.

Lemma 0.61. *Für die p-adische Bewertung gilt:*

a) $\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$

b) $\nu_p(x + y) \geq \inf\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$

Satz 0.62. *$\mathbb{Z}_p$ ist ein Integritätsbereich.*
Der Quotientenkörper $\mathbb{Q}_p$ von $\mathbb{Z}_p$ wird als Körper der p-adischen Zahlen bezeichnet.
$\mathbb{Q}_p$ kann auch (analytisch) als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des p-adischen Betrage konstruiert werden.

Definition 0.63. Man nennt I eine unter $\leq$ **gerichtete Menge**, wenn für alle $x, yz \in I$ gilt

a) $x \leq x$

b) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$

c) Für alle x, y exitsiert ein $z \in I$mit $x \leq z$,$y \leq z$

Definition 0.64. Für jedes $i \in I$ sei ein Ring A_i und für jedes Paar $i, j \in I$ mit $i \leq j$ sei ein Ringhomomorphismus $f_{ij} : A_i \to A_j$ gegeben, mit

a) $f_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ für alle $i \in I$

b) $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für alle $i \leq j \leq k$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "f_{ik}"'] & A_j \arrow[r, "f_{jk}"] & A_k \end{tikzcd}$$

Ein solches System (A_j, f_{ij}) heißt **induktives System** von Ringen.

Definition 0.65. Ein Ring A zusammen mit dem einem Homomorphismus $f_i : A_i \to A$, sodass gilt $f_i = f_j \circ f_{ij}$ für $i \leq j$ heißt **induktiver Limes** oder **direkter Limes** des Systems (A_i, f_{ij}), wenn folgende Universelle Eigenschaft erfüllt ist:
Ist B ein Ring, und sind $h_i : A_i \to B$, $i \in I$ Ringhomomorphismen mit $h_i = h_j \circ f_{ij}$ für $i \leq j$, so existiert genau ein Ringhomomorphismus $h : A \to B$ mit $h_i = h \circ f_i$ für alle $i \in I$.

Lemma 0.66. *Falls ein indktiver Limes existiert, so ist er eindeutig.*

Beweis. Sei

$$\hat{A} = \dot{\bigcup}_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \{(i, x) \mid x \in A_i\}$$

Wir definieren die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\hat{A}$:
Seien $x, y \in \hat{A}$, d.h. $x \in A_i, y \in A_j$.

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ ex gibt ein } k \in I \text{ mit } i \leq k \text{ und } j \leq k \text{ und } f_{ik}(x) = f_{jk}(x)$$

□

0.6 Nullstellen von Polynomen

Definition 0.67. Sei $f \in A[X]$, $f \neq 0$.
$a \in A$ heißt **Nullstelle** von f, wenn $f(a) = 0$.

Satz 0.68. *Sei $f \in A[X]$, $f \neq 0$ und $a \in A$. Dann gilt*

$$a \textit{ ist Nullstelle von } f \Leftrightarrow (x - a) | f$$

Beweis. $\Rightarrow$ Sei $f(a) = 0$. Division mit Rest liefert

$$f = q(x - a) + r$$

mit $\deg(r) < 1$. Aus $f(a) = r$ folgt $(x - a)|f$

□

Satz 0.69. *Sei $f \in A[X]$, $f \neq 0$ ein Polynom das eine Nullstelle in A hat. Dann gibt es paarweise verschiedene Elemente $a_1, ..., a_m \in A$ und $n_1, ..., n_m \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $g \in A[X]$, welchen keine Nullstellen in A hat, sodass*

$$f = g \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)^{n_i}$$

ist.
Es gilt

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \leq \deg(f)$$

Beweis. Teilen mit Rest. □

Definition 0.70. Lässt sich $f \in A[X]$, $f \neq 0$ schreiben als

$$f = c\prod_{i=1}^{m}(x - a_i)^{n_i}$$

mit $c, a_1, ..., a_m \in A$ und $n_1, ..., n_m \in \mathbb{N}$, dann sag man f **zerfällt in Linearfaktoren**.

Satz 0.71. *Sei A ein Integritätsbereich. Dann hat $f \in A[X]$ mit $f \neq 0$ höchsten $n = \deg(f)$ verschiedene Nullstellen in A.*

Beweis. Durch Induktion über n:

Induktionanfang: Sei $n = 0$. (Konstantes Polynom $\Rightarrow$ keine Nullstelle)

Induktionsschritt: Sei $n > 0$. Ist $a \in A$ eine Nullstelle von f, so ist $f = g(x - a)$ mit $\deg(q) = n - 1$.
Sei $b \neq a$ eine weitere Nullstelle von f, dass ist $0 = f(b) = q(b)(b - a)$.
Da aber $(b \neq a)$ ist, muss b Nullstelle von q sein.
Nach Induktionsannahme hat q höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen.

□

Korollar 0.72. *Sei A ein unendlicher Integritätsbereich und $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) \neq 0$.*

Beispiel 0.73. Sei K ein endlicher Körper und sei

$$f = \prod_{a \in K}(x - a)$$

Dann ist $f(a) = 0$ für alle $a \in K$.

Satz 0.74. *Sei G_1 zyklische Gruppe der Ordnung n_1, G_2 zyklische Gruppe der Ordnung n_2.*
Sein n_1, n_2 Teilerfremd, so ist $G_1 \times G_2$ zyklisch.

Beweis. Sei $G_1 =< x_1 >$ und $G_2 =< x_2 >$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to G_1 \times G_2 \\ m &\mapsto (mx_1, mx_2) \end{aligned}$$

hat den Kern $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ und ist surjektiv nach **??**.
Dann ist

$$\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} G_1 \times G_2$$

□

Theorem 0.75. *Sei K ein Körper und $G \subset K^*$ Untergruppe. Ist G endlich, so ist G zyklisch.*

Beweis. Da G einen endliche abelsche Gruppe ist zerfällt G in

$$g = \bigotimes_{p \text{ prim}} G_p$$

Dabei ist $G_p = \{g \in G \mid g^q = 1 \text{ für ein } q = p^n\}$.

Angenommen G_p ist nicht zyklisch. Dann ist $\operatorname{ord}(g) \leq |G_p|$ für alle $g \in G_p$ und es gibt ein $q = p^n < |G_p|$ mit $g^q = 1$ für alle $q \in G_p$.
Dann hat aber das Polynom $X^q - 1$ mehr als q Nullstellen in K. Widerspruch!

Also sind alle G_p zyklisch. Dann folgt nach **??**, dass G zyklisch ist. $\square$

Korollar 0.76. *Ist K endlicher Körper, so ist K^* zyklisch.*

Satz 0.77. *Sie A ein faktorieller Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei*

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_i X^1 + a_0$$

ein Polynom in $K[X]$.
Ist $b = c/d$ eine Nullstelle von f in K mit teilerfremden c, d, so gilt

$$c | a_0 \text{ und } d | a_n$$

Beweis. Aus $f(b) = 0$ folgt

$$a_n \left(c/d\right)_n + a_{n-1}(c/d)^{n-1} + ... + a_0$$

Dann ist (nach Multiplikation mit d^n)

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} d + ... + a_n d^n = 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned} a_n d^n &= c(...) \\ a_n c^n &= d(...) \end{aligned}$$

Also gilt $c | a_0$ und $d | a_n$ $\square$

Definition 0.78. Sei $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Ist $a \in A$ eine Nullstelle von f, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} (x-a)^n &| f \\ (x-a)^{n-1} &\not| f \end{aligned}$$

Dann heißt n die **Vielfachheit** oder **Multiplizität** von a und man nennt a eine **n-fache Nullstelle** von f.

Definition 0.79. Die Abbildung

$$\begin{aligned} D : A[X] &\to A[X] \\ \sum_{j=0}^{n} a_j X^j &\mapsto \sum_{j=1}^{n} j a_j X^{j-1} \end{aligned}$$

Man schreibt $f' := D(f)$.

Lemma 0.80. *Seien $f, g \in A[X]$, $a, b \in A$ Für die Ableitung D gilt*

a) $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)$ (Linearität) *b)* $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ *(Produktregel)*

Satz 0.81. *Sei $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Sei $a \in A$ eine Nullstelle von f. Dann gilt*

$$a \text{ hat Vielfachheit } 1 \Leftrightarrow f'(a) \neq 0$$

Beweis. Da a eine Nullstelle von f ist gilt

$$f = q(x - a)$$

für ein $q \in A[X]$. Es folgt

$$f' = q + q'(X - a)$$

und a hat genau dann Vielfachheit 1, wenn $(x - a) \not| q$, also $(x - a) \not| f'$, bzw. $f'(a) \neq 0$. □

Definition 0.82. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{Z} &\to A \\ n &\mapsto n \cdot 1 \end{aligned}$$

Ist ein Ringhomomorphismus und

$$\operatorname{Kern}(\chi) = (n) = n\mathbb{Z}$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.
n heißt die **Charakteristik** von A und man schreibt $n = \operatorname{char}(A)$.

Lemma 0.83. *Ist A ein Integritätsbereich, so ist $n = 0$ oder n ist prim.*

Satz 0.84. *Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ $f \neq$const, dann gilt*

a) *Ist* $\operatorname{char}(K) = 0$*, so gilt*

$$\deg(f') = \deg(f) - 1$$

b) *Ist* $\operatorname{char}(K) = p > 0$*, so gilt*

$$\deg(f') \leq \deg(f) - 1$$

Weiterhin gilt

$$f' = 0 \Leftrightarrow f(X) = g(X^p) \text{ für ein } g \in K[X]$$

0.7 Bewertungen

Definition 0.85. Sei K ein Körper. Ein **Betrag** auf K ist eine Abbildung

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R}$$

mit

a) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|xy| = |x|\,|y|$

c) $|x + y| \leq |x|\,|y|$

Definition 0.86. Ein Betrag $|\cdot|$ heißt **Archimedisch**, wenn es $x, y \in K$ gibt, sodass

$$|x+y| > \max\{|x|\,|y|\}$$

bzw **nicht-archimedisch**, wenn für alle x, y gilt, dass$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

Satz 0.87. *Sei $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Betrag auf K. Ist $|x| \neq |y|$, so gilt*

$$|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$$

Beweis. Sei $|x| \leq |y|$. Dann ist

$$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |x|$$

Andererseits ist $x = (x+y) + (-y)$, sodass

$$|x| = |(x+y) + (-y)| \leq \max\{|x+y|, |y|\} = |x+y|$$

also $|x| \leq |x+y|$. □

Definition 0.88. Sei A ein Integritätsbereich. Eine **Bewertung** auf A ist eine Abbildung

$$\nu : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

mit

a) $\nu(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$

b) $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$

c) $\nu(a+b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$

Satz 0.89. *Sei A ein Integritätsbereich und $\nu : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf A.*

a) ν kann zu einer Bewertung auf dem Quotientenkörper K von A fortgesetzt werden, durch

$$\nu(a/b) = \nu(a) - \nu(b)$$

b) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $c > 1$. Dann definiert

$$|x| = c^{-\nu(x)}$$

einen nciht-archimedischen Betrag auf K.

Beispiel 0.90.1. Sei A ein faktorieller Integritätsbereich und $p \in A$ prim. Dann lässt sich ein beliebiges $a \in A \setminus \{0\}$ schreiben als

$$a = a' p^{\nu_p(a)}$$

mit $\gcd(a', p) = 1$ und $\nu_p(a) \in \mathbb{N}_0$.
Mit der Bedingung, dass $\nu_p(0) = \infty$, ist die Abbildung

$$\nu : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

eine Bewertung auf A.
Diese setzt sich zu einer Bewertung auf dem Quotientenkörper fort.

Beispiel 0.90.2. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine positive Primzahl. Dann definiert

$$\nu_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

wie Oben einen Bewertung auf $\mathbb{Z}$. Diese setzt sich zu einer Bewertung auf $\mathbb{Q}$ fort. Man definiert für $x \in \mathbb{Q}$

$$|x|_p := p^{-\nu_p(x)}$$

Dies liefert einen Betrag auf Q.

Sei $x \in \mathbb{Q}$. Schreibe $x = a/bp^n$ mit $p \not| ab$. Dann ist $|x|_p = p^{-n}$ und die Folge $1, p, p^2, ...$ ist eine Nullfolge, bzgl $|\cdot|_p$.
Die Vervollständigung von Q bezüglich $|\cdot|_p$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}_p$.

Theorem 0.91 (Lemma von Gauß)**.** *Sei A in Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und sei $\nu : A \to \mathbb{R} \cup \infty$ eine Bewertung auf A.*
Setze ν fort zu einer Bewertung auf K durch

$$\nu(a/b) = \nu(a) - \nu(b)$$

Für $f = \sum a_j X^j \in K[X]$ definieren wir

$$\nu(f) = \min\{\nu(a_i)\}$$

für $f \neq 0$ und $\nu(0) = \infty$.
Dann ist ν eine Bewertung auf $K[X]$.

Beweis. Wir zeigen

$$\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g).$$

- Seien f, g Konstant, dann ist die Aussage klar.

- Sei nun $g = c \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} \nu(gf) &= \nu(cf) \\ &= \min\{\nu(ca_i)\} = \min\{\nu(c) + \nu(a_i)\} \\ &= \nu(c) + \min\{\nu(a_i)\} \\ &= \nu(g) + \nu(f) \end{aligned}$$

- Seien nun f, g nicht Konstant.
  Durch multipliaktion mit geeigenter Konstante können wir erreichen, dass

$$\nu(f) = \nu(g) = 0$$

  Es ist zu zeigen, dass $\nu(fg) = 0$.
  Sei dazu $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^m b_j x^j$. Dann ist

$$fg = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k$$

mit

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Es gilt

$$\nu(c_k) \geq \min\{ \underbrace{\nu(a_i b_j)}_{=\nu(a_i)+\nu(b_j)\geq 0} \} \geq 0$$

sodass $\nu(fg) \geq 0$.

Aus $c_{s+t} = a_0 b_{s+t} + a_1 b_{s+t-1} + ... + a_s b_t + ... + a_{s+t} b_0$ folgt

$$a_s b_t = c_{s+t} - a_0 b_{s+t} - a_1 b_{s+t-1} - .... - a_{s+t} b_0$$

Dann ist also

$$\nu(a_s b_t) \geq \min\{\nu(c_{s-t}), \underbrace{\nu(a_0 b_{s+t})}_{=\nu(a_0)+\nu(b_{s+t}>0)}, ..., \nu(a_{s+t} b_0)\} > 0$$

damit $\nu(a_s) + \nu(b_t) > 0$. Widerspruch!

□

0.8 Der Satz von Gauß

Definition 0.92. Sei A ein faktorieller Integritätsbereich mit Quotientenkörper K.
Ein Polynom

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_o \in A_[X]$$

heißt **primitiv**, wenn für seine Koeffizienten gilt: $\gcd(a_0, ..., a_n) = 1$.
Äquivalent dazu $\nu_p(f) = 1$ für alle Primelemente $p \in A$.
Ein Polynom $f \in K[X]$, $f \neq 0$ lässt sich schreiben als $f = c\tilde{f}$ mit $\tilde{f} \in A[X]$ primitiv und $c \in K$.

Satz 0.93. *Sei A ein faktorieller Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und $f \in A[X]$ primitiv mit* $\deg(f) \geq 1$.
Dann gilt

$$f \textit{ ist irreduzibel in } A[X] \Leftrightarrow f \textit{ ist irreduzibel in } K[X]$$

Beweis. $\Rightarrow$ Sei f irreduzibel in $A[X]$. Sei $f = gh$ eine Zerlegung von f in $K[X]$.
Schreibe

$$g = c\tilde{g} \qquad h = d\tilde{h}$$

mit $\tilde{g}, \tilde{h} \in A[X]$ primitiv. Dann ist

$$f = cd\tilde{g}\tilde{h}$$

und insbesondere

$$\underbrace{\nu_p(f)}_{\geq 0} = \nu_p(cd) + \underbrace{\nu_p(\tilde{g})}_{=0} + \underbrace{\nu_p(\tilde{h})}_{=0}$$

Also $\nu_p(cd) \geq 0$ für alle $p \in A$ prim.
Dann muss aber die Potenz von jedem Primfaktor des Nenners $= 0$ sein.
Also ist $a = cd \in A$. Da $A[X]^* = A^*$ und $f = a\tilde{g}\tilde{h}$ und da f irreduzibel ist muss $a\tilde{g}$ oder $\tilde{h}$ eine Einheit in $A[X]$ sein.
Dann ist $a\tilde{g}$ oder $\tilde{h}$ in A^*, also g oder h Konstant und somit in $K^* = K[X]^*$.

$\Leftarrow$ Sei f irreduzibel in $K[X]$. Sei $f = gh$ in $A[X]$. Dann ist g oder h in $K[X^*]$, also konstant.
Sei $g = c$ für ein $c \in A$, dann ist

$$\nu_p(f) = \nu_p(c) + \nu_p(h)$$

Da f primitiv ist, ist $\nu_p(f) = 0$.
Dann gilt $\nu_p(c) = \nu_p(h) = 0$ für alle $p \in A$ prim.
Also muss $c \in A^* = A[X]^*$.

□

Bemerkung. Sei A wie Oben, $f \in A[X]$, nicht zwingend Primitiv mit $\deg(f) \geq 1$ und f irreduzible in $K[X]$, dann ist $f$irreduzibel in $A[X]$.

Theorem 0.94 (Satz von Gauß)**.** *Sei A ein faktorieller Integritätsbereich. Dann ist auch $A[X]$ ein faktorieller Integritätsbereich.*

Beweis. Sei K der Quotientenkörper von A. Sei $f \in A[X] \setminus (A[X^*] \cup \{0\})$.
Wir zeigen, dass f über $A[X]$ in irreduzible Faktoren zerfällt.
Wir schreiben $f = c\tilde{f}$ mit $\tilde{f} \in A[X]$ primitiv und $c \in A$.
c zerfällt in A in irreduzible Faktoren.
Diese sind auch irreduzibel in $A[X]$.
Da $K[X]$ auch faktoriell ist, zerfällt $\tilde{f}$ in $K[X]$ in irreduzible Faktoren $\tilde{f} = \tilde{f}_1 \cdot ... \cdot \tilde{f}_n$ mit $\deg(\tilde{f}_i) \geq 1$.
Es gibt insbesondere eine Zerlegung

$$\tilde{f} = d\tilde{f}_1 \cdot ... \cdot \tilde{f}_n$$

mit $d \in K$ und $\tilde{f}_i \in A[X]$ primitiv und $\deg(\tilde{f}_i) \geq 1$.
Mit 0.93 sind die $\tilde{f}_i$ auch irreduzible in $A[X]$.
Aus

$$\underbrace{\nu_p(\tilde{f})}_{=0} = \nu_p(d) + \underbrace{\nu_p(\tilde{f}_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\nu_p(\tilde{f}_n)}_{=0}$$

folgt $\nu_p(d) = 0$ für alle $p \in A$ prim.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass die gefundenen Zerlegung eindeutig ist. Se

$$\begin{aligned} f &= c_1 \cdot .. \cdot c_m g_1 \cdot ... \cdot g_r \\ &= d_1 \cdot ... \cdot d_n h_1 \cdot ... \cdot h_s \end{aligned}$$

mit $c_i, d_j \in A$ irreduzibel und $g_i.h_j \in A[X]$ irreduzibel mit $\deg \geq 1$.
Dann ist

$$c/d \cdot g_1 \cdot ... \cdot g_r = h_1 \cdot ... \cdot h_s$$

mit $c = c_1 \cdot ... \cdot c_m$, $d = d_1 \cdot ... \cdot d_n$ sind die g_i, h_j irreduzible in $A[X]$ und somit auch in $K[X]$.
Da $K[X]$ faktoriell ist, ist $r = s$ und nach Umsortierung ist

$$\begin{aligned} c/d \cdot g_1 &= x_1 h_1 \\ g_j &= x_j h_j \end{aligned}$$

für alle $j > 1$.
Dann ist

$$\begin{aligned} \nu_p(c/d) + \underbrace{\nu_p(g_1)}_{=0} &= \nu_p(x_1) + \underbrace{\nu_p(h_1)}_{=0} \\ \nu_p(x_i) - \nu_p(c/d) &= 0 \\ \nu_p(x_i \cdot d/c) &= 0 \end{aligned}$$

Wir definieren $\epsilon_1 := x_i \cdot d/c$. Dann ist $\epsilon_1 \in A^*$.
Zusätzlich ist

$$\underbrace{\nu_p(g)}_{\geq 0} = \nu_p(x_j) + \underbrace{\nu_p(h_j)}_{=0}$$

Sei $\epsilon_j = x_j$ für $j \geq 1$. Dann ist $\epsilon_j = x_j \in A^*$.
Also ist

$$g_i = \underbrace{\epsilon_i}_{\in A^*} h_i$$

Weiterhin folgt $c = \epsilon d$ für ein $\epsilon \in A^*$.

Da A faktoriell ist, gilt $m = n$ und nach Umnummerieren $c_i \eta_i d_i$ mit $\eta_i d \in A^*$. □

Korollar 0.95. *Sie K ein Körper, dann ist $K[X_1, ..., X_n]$ ein faktorieller Integritätsbereich.*

Beispiel 0.96.1. $\mathbb{Z}[X]$ ist ein faktorieller Integritätsbereich aber kein Hauptidealring.

Beispiel 0.96.2. Sei K ein Körper. $K[X]$ ist ein Hauptidealring und somit faktorieller. $K[X, Y]$ ist kein Hauptidealring aber faktoriell.

0.9 Der Hilbertsche Basissatz

Theorem 0.97 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist auch $A[X]$ noethersch.*

Beweis. Sei $I \subset A[X]$ ein Ideal. Wr zeigen, dass I endlich erzeugt ist. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$I_n := \{f \in I \mid \deg(f) \leq n\}$$

□

Für $f = \sum_{a_i X^i \in A[X]}$ sei $b_n(f) = a_n$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} b_n(f+g) &= n_b(f) + b_n(g) \\ b_n(af) &= ab_n(f) \end{aligned}$$

für alle $f, g \in A[X]$ und $a \in A$.
Die Menge $I(n) := b_n(I_n)$ ist ein Ideal in A und es gilt

$$I(0) \subset I(1) \subset ...$$

den $f \in I_n$ impliziert $Xf \in I_{n+1}$. Dann ist $b_n(f) = b_{n+1}(Xf) \in I(n+1)$.
Da A noethersch ist wird jede Folge stationär. Also gibt es $m \in \mathbb{N}$, mit

$$I(m) = I(m+1) = ...$$

Für jedes$n = 0, 1, ...$ wähle Polynome f_{n_j}, sodass $I(n)$ von den Koeffizienten $b_n(f_{n_j})$ erzeugt wird.
Dann wird I von den f_{n_j} über $A[X]$ erzeugt:
Sei $f \in I$ vom Grad t.

- Ist $t \leq m$, so hat
$$f - \sum_t a_{t_j} f_{t_j} \in I$$
Grad $\leq t - 1$.
Nach endlich vielen Schritten hat man f als Linearkombination der f_{n_j} dargestellt.

- Ist $t > m$, so reduziert man den Grad von f durch
$$f - \sum a_{t_j} X^{t-m} f_{m_j} \in I$$

0.10 Eigenschaften von Polynomringen

Sei A ein Ring.

a) A Integritätsbereich $\Leftrightarrow$ $A[X_1, ..., X_n]$ Integritätsbereich.
Dann gilt $A[X-1, ..., X_n]^* = A^*$.

b) (Gauss) A faktorieller Integritätsbereich $\Leftrightarrow$ $A[X_1, ..., X_n]$ faktorieller Integritätsbereich.

c) (Hilbert) A noethersch $\Leftrightarrow$ $A[X_1, ..., X_n]$ noethersch.

d) Sei A zusätzlich Integritätsbereich, dann ist
A Körper $\Leftrightarrow$ $A[X]$ Hauptidealring.

0.11 Irreduziblitätskriterien

Theorem 0.98 (Eisenstein)**.** *Sei A ein faktoriell Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(A)$.*
Sei
$$f = a_n X^n + ... + a_0 \in A[X]$$
mit $\deg(f) = n \geq 1$. *Sei $p \in A$ prim mit $p | a_i$ für $i = 0, ..., n-1$ und $a \not| a_n$ und $p^2 \not| a_0$.*
Dann ist f irreduzibel in $K[X]$.
Ist f zusätzlich primitiv, so ist f auch irreduzibel in $A[X]$.

Beweis. Sei $f = c\tilde{f}$ mit $\tilde{f} \in A[X]$ primitv und $c \in A$.
Es reciht zu ziegen, dass $\tilde{f}$ irreduzibel in $A[X]$ ist.
Angenommen $f = gh$ mit $g, h \in A[X] \setminus A$. Sei

$$\tilde{f} = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k X^k$$
$$g = \sum_{k=0}^{s} b_k X^k$$
$$h = \sum_{k=0} a_k X^k$$

Dann folgt aus $p \not| a_n$, dass $p \not| c$ und aus $p|a_0$, dass $p|\tilde{a}_0 = b_0 d_0$.
Wir können annehmen. dass $p|b_0$.
Aus $p^2 \not| a_0$ folgt, das $p \not| d_0$. Es gibt aber j, sodass $p \not| b_j$ (da sonst $p|g$).
Wähle nun j, sodass $p|b_i$ für alle $i < j$ und $p \not| b_j$.
Dann muss $1 \leq j \leq s \leq n$. Aus

$$\tilde{a}_j = b_0 d_j + b_1 d_{j-1} + ... + b_j d_0$$

folgt, (da $p|\tilde{a}_j$), dass $p|b_j d_0$ und $p|d_0$. Widerspruch!. □

Beispiel 0.99. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine positive Primzahl. dann ist das p-te Kreisteilunsgpolynom

$$f = X^{p-1} X^{p-2} + ... + 1$$

irreduzibel in $Z[X]$.

Satz 0.100 (Reduktionskriterium)**.** *Sei A ein faktorieller Integritätsbereich mit Quotientenkörper K, $p \in A$ prim und $d = a_n X^n + ... + a_0$ ein Polynom in $A[X]$ mit $\deg(f) \geq 1$ und $\neq a_n$.*
Sei

$$\pi : A[X] \to \big(A/(p)\big)[X]$$

und $\pi(f)$ irreduzible in $\big(A/(p)\big)[X]$, dann ist f irreduzibel in $K[X]$.

Beweis. Wir nehmen an, dass f primitv ist.
Ist f reduzibel über $K[X]$ so auch über $A[X]$.
Sei $f = gh$ mit $g, h \in A[X] \setminus A$. Da p den höchsten Koeffiezienten von f nicht teilt, gilt dies auch für g und h dun es gilt

$$\pi(f) = \pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$$

d.h. $\pi(f)$ zerfällt in $\big(A/(p)\big)[X]$.
Sei f nun beliebig. Schreibe $f = c\tilde{f}$ mit $x \in A$ und $\tilde{f} \in A[X]$ primitv.
Angenommen f ist nicht irreduzibel in $K[X]$, dann gilt f reduzibel in $K[X] \Rightarrow \tilde{f}$ ist reduzibel in $K[X] \Rightarrow \tilde{f}$ ist reduzzibel in $A[X] \Rightarrow \tilde{f} = gh$ mit $g, h \in A[X] \setminus A$ $\Rightarrow f = cgh$.
Somit ist

$$\pi(f) = \pi(cg)\pi(h)$$

eine Zerlegung von $\pi(f)$. □

Beispiel 0.101.1. Wir zeigen, dass $F = X^2 + 3X^2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist. Wir fassen f als Polynom über $\mathbb{Z}$ auf und reduzierten die Koeffizienten $\mod 3$.

$$\pi(f) = X^3 - X - 1$$

Da $\pi(f)(t) \neq 0$ für alle $t \in \Pi_3$ ist, ist $\pi(f)$ irreduzibel über Π_3 und somit auch über $\mathbb{Q}$.

Beispiel 0.101.2. Das Polynom $f = X^4 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und in $Z[X]$. Allerdings ist $\pi(f) \in \Pi_p[X]$ reduzibel für alle positiven Primzahlen p.

0.12 Symmetrische Polynome

Definition 0.102. Für $f \in A[X_1, ..., X_n]$ und $\sigma \in S_n$ sei

$$\sigma(f) = \sigma(f(X_1, ..., X_n)) := f(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)})$$

Dies liefert eine Operation von S_n auf $A[X_1, ..., X_n]$.

Bemerkung 0.103. Insbesondere gilt für $\sigma, \tau \in S_n$, dass $(\sigma\tau)(f) = \sigma(\tau(f))$.