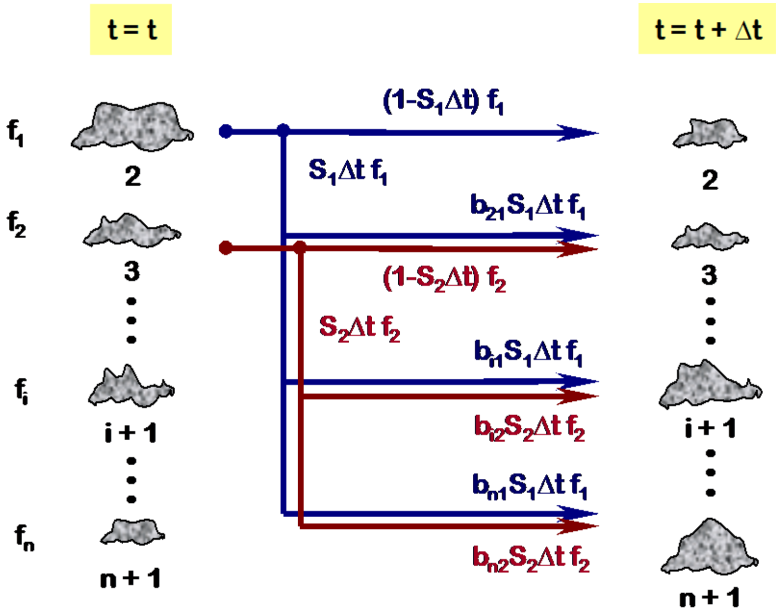
1. Moagem

Para a simulação do moinho de bolas o modelo baseia-se na chamada Teoria do Modelo Populacional. Esta teoria introduziu dois conjuntos de parâmetros: a Função de Seleção *S* e a função de quebra *B*. O primeiro conjunto refere-se à cinética de moagem de cada partícula independente do segundo conjunto, que caracteriza a distribuição do tamanho dos fragmentos produzidos como resultado de um evento de quebra.

A Figura abaixo ajuda a definir ambos os conceitos com maior clareza. Considere que em qualquer instante *t*, a distribuição de tamanho do sólido em um moinho é quantificada pelas frações f_i *(i = 1, n)* retida nas *n* malhas diferentes representadas à esquerda dessa figura. Após um intervalo de tempo Δt, a distribuição de tamanho resultante é representada à direita da mesma figura. Durante este intervalo algumas partículas serão fraturadas e seus fragmentos redistribuídos para as malhas inferiores. Para as partículas retidas na malha '*i + 1*' (a fração 'i'), a função de seleção *Si* (min^{-1}) representa a velocidade de quebra, ou seja, a fração das partículas na faixa de tamanho [*di + 1, di*] que são fraturadas, por unidade de tempo. Portanto, o produto ($S_i\Delta t$) representa a fração do material retido na malha '*i + 1*', no tempo *t*, que será fraturada pela ação da carga moedora, durante o período de tempo Δt. A Função de Quebra *bij* denota a distribuição dos fragmentos decorrentes da quebra das partículas retida na malha '*j + 1*' para retidas na malha inferior '*i + 1*'.



Com relação à figura acima, é possível estabelecer, para cada fração de tamanho *i*, o seguinte balanço populacional de partículas:

[Partículas na fração i no tempo (t + Δt)] =

[Partículas na fração i no instante t]

- [Partículas na fração i quebradas durante o intervalo de tempo Δt]

+[Somatório de partículas adicionadas à fração i como resultado da quebra de partículas nas frações mais grossas (j = 1, i-1)]

então, se W representa a massa do minério no moinho:

$$f_i(t+\Delta t)W = f_i(t)W - S_i\Delta t f_i(t)W + b_{i1}S_1\Delta t f_1(t)W + b_{i2}S_2\Delta t f_2(t)W + \cdots\ b_{i,i-1}S_{i-1}\Delta t f_{i-1}(t)W$$

Considerando a condição limite quando Δt se aproxima de zero, a expressão acima reduz-se ao sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d(f_i)}{dt} = -S_i f_i + \sum_{j=i-1}^{1} b_{ij}\, S_j f_j$$

A solução analítica deste complexo sistema de equações diferenciais é dada pela solução do sistema matricial expresso como:

$$f = (TJT^{-1})f^o$$

Onde,

$f = \{f_i \vert i = 1,2,\ldots,n\}$	Vetor da distribuição de massa de partículas na classe de tamanho *i* do produto do moinho.
$f^o = \{f_i \vert i = 1,2,\ldots,n\}$	Vetor da a distribuição de massa de partículas na classe de tamanho *i* da alimentação do moinho
$T = \{T_{ij} \vert i = 1,2,\ldots,n\}$	Matriz triangular inferior de valores Tij definida como: $T_{ij} = 0$ quando i<j $T_{ij} = 1$ quando i=j $T_{ij} = \sum_{k=j}^{i-1} \frac{b_{ij} SkT_{kj}}{(S_i - S_j)}$ quando i>j.

E,

$J = \{J_{ij} \vert i = 1,2,\ldots,n\}$	Matriz diagonal definida como: $J = \left(1 + \frac{S_i \tau}{N}\right)^{-N}$ quando i=j $J = 0$ quando i ≠j

onde τ é o tempo de residência médio e N o números de misturadores perfeitos em série. O método para determinar o valor deste parâmetro pode ser baseado na relação entre comprimento e diâmetro do moinho ou considerar ainda a viscosidade da polpa e velocidade de rotação, entretanto o valor de $N = 3$ misturadores perfeitos é usualmente válido na maioria dos casos.

O modelo para a Função Seleção e Quebra é representado pelas seguintes relações:

- Para a função de seleção

$$Si = [1/(1+\alpha_{02}/\alpha_{01})]\ \{\alpha_{01}(d_i^*)\alpha_{11}/[1+d_i^*/(d_{crit})\alpha_2]+\alpha_{02}(d_i^*)\alpha_{12}\}$$

E

$$d_i^* = \left(d_i * d_{j+1}\right)^{0.5}$$

$$d_{crit} = \exp(7.27 + 0.5 * d_{mu})$$

Onde,

d_{mu}	Diâmetro em polegada do *top-size* de reposição da carga de bolas.
α_{02}, α_{01}, α_{011}, α_2, α_{12}	Parâmetros de ajuste da Função Seleção.

- Para a função quebra:

$$B_{ij} = \beta_{0j}\left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_1} + (1 - \beta_{0j})\left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_2}$$

E

$$\beta_{0j} = \beta_{00}\left(\frac{d_{j+1}}{1000}\right)^{-\beta_{01}}$$

$\beta 00$, $\beta 01$, $\beta 1$, $\beta 2$	parâmetros da função quebra determinados a partir de teste de laboratório.

A abordagem energética da moagem é introduzida para possibilitar o cálculo da energia consumida pelo moinho em função de suas características, utilizando a fórmula empírica dada por Hogg & Fuerstenau ("Power Relations for Tumbling Mills", Trans. SME-AIME, Vol. 252, pp. 418-432, 1972), aqui expandida a partir de sua formulação original para considerar a contribuição de cada componente da carga do moinho (bolas e polpa) na energia total.

O escalonamento da função seleção é feito através do consumo específico de energia (kWh/tonelada) pela relação:

$$S_i\tau = Si^E * P/W$$

Onde,

W: Taxa de sólidos da descarga do moinho.

$$P = \eta P_{gross} = 0.238D^{3.5}\left(\frac{L}{D}\right)N_c\rho_{ap}(J - 1.065J^2)\sin(\alpha)$$

Onde,

P_{gross}	Energia bruta do moinho (kW) = Pnet / η.
η	eficiência elétrica e de transmissão de energia, ° / 1.
D	diâmetro interno efetivo do moinho, pés.
L	comprimento interno efetivo do moinho, pés.
N_c	velocidade de rotação; expresso como fração (° / 1) da velocidade crítica
J	enchimento volumétrico aparente do moinho fracionário, ° / 1 (incluindo as bolas e os vazios intersticiais).
α	ângulo de elevação de carga (define o posicionamento do centro de gravidade da carga do moinho (o 'feijão') em relação à direção vertical. Tipicamente na faixa de 30 ° a 35 °.

e

$$\rho_{ap} = \{(1 - f_v)\rho_b J_b + \rho_p J_p f_v J_b + \rho_p(J - J_b)\}/J$$

e ρ_{ap} representa a densidade aparente da carga (tonelada / m3), que pode ser determinada com base nos componentes de carga (bolas, preenchimento intersticial e polpa em suspensão ou *overfilling*).

Onde,

f_v	fração de volume (° / 1) de vazios intersticiais entre as bolas (tipicamente assumido como sendo 40% do volume aparentemente ocupado pelas bolas).
J_b	preenchimento de bolas aparentes (° / 1) (incluindo bolas, polpa e os vazios intersticiais entre as bolas).
J_p	enchimento de polpa intersticial (° / 1), correspondente à fração dos vazios intersticiais (entre a carga de bola) realmente ocupada pela polpa.
ρ_p	densidade da polpa (tonelada / m3).

2. Hidrociclone

O modelo de hidrociclone está baseado nos trabalhos de Rao and A. J. Lynch em “Modelling and Scale-up of Hydrocyclone Classifiers”, XI Int. Min. Proc. Congress II, 1-25, 1975. Além de L. R. Plitt "A Mathematical Model for the Hydrocyclone Classifier", CIM Bulletin, p.114, December 1976.

O modelo estabelece a curva de partição E_i (ou classificação, ou curva de eficiência), definida como a recuperação em massa de sólido para o fluxo de *underflow* em função do tamanho de partícula.

$$p_{UF} = E_i f^o$$

$$p_{OF} = (E_i f^o) - f^o$$

Onde,

$p_{UF} = \{p_{UF\,i} \mid i = 1,2,\dots,n\}$	Vetor da distribuição de massa de partículas na classe de tamanho *i* do *overflow* do hidrociclone.
$p_{UF} = \{p_{OF\,i} \mid i = 1,2,\dots,n\}$	Vetor da distribuição de massa de partículas na classe de tamanho *i* do *underflow* do hidrociclone.
$f^o = \{f_i^o \mid i = 1,2,\dots,n\}$	Vetor da a distribuição massa de partículas na classe de tamanho *i* da alimentação do moinho

Essa curva é decomposta para considerar o efeito de curto-circuito (ou by-pass) da fração (*B_{pf}* e *B_{pc})* do fluxo alimentado que não sofre efeito de classificação (*E_{ic}*), assim temos:

$$E_i = B_{pf} + (1 - B_{pf} - B_{pc})\, E_i^c$$

Onde:

E_i	Eficiência de classificação real do ciclone para partículas de tamanho d_i.
E_i^c	Eficiência de classificação corrigida para partículas de tamanho d_i, excluindo o by-pass.
B_{pf}	Fração da alimentação que sofre by-pass.
B_{pc}	Fração de grossos que sofre by-pass para o *overflow* (em geral $B_{pc} = 0$).

A curva de partição corrigida é calculada como:

$$E_i^c = 1 - \exp\,[\, - 0.693\, (d_i/d_{50}^c)^m\,]$$

Onde,

d_{50}^c	Tamanho de corte corrigido d_{50}^c.
d_i	Tamanho de partícula na classe de tamanho *i*.

Onde,

$$d_{50}^c = a1 * [(DC)^{0.44} (DI)^{0.58} (DO)^{1.91} \exp(\,11.12\, \phi\,)] \,/\, [(DU)^{0.80}\, h^{0.37}\, Q^{0.44}\, (\,\rho_s - 1\,)^{0.5}]$$

Onde,

a1	Parâmetro de ajuste do d50.
DC	Diâmetro do corpo do hidrociclone em polegadas.
DI	Diâmetro do *inlet* em polegadas.
DO	Diâmetro do *vortex finder* em polegadas.
ϕ	Fração de sólidos em volume.
DU	Diâmetro do apex em polegadas.
h	Altura livre (parte baixa do *vortex finder* ao *apex*) do hidrociclone em polegadas.
Q	Fluxo de alimentação de polpa em m^3/h
ρ_s	Densidade do sólido em t/m^3.

O expoente *m* da relação da curva de partição corrigida (E_i^c) é dado por:

$$m = \exp\,[\, a2 - 1.58\, S/(S+1)\,]\, [\, (DC)^2\, h \,/\, Q\,]^{0.15}$$

onde,

a2	Parâmetro de ajuste.
S	Partição de fluxo

A partição de fluxo *S* é definida como a relação entre a vazão de polpa direcionada ao *underflow* e a vazão de polpa direcionada ao *overflow*. Essa relação é modelada como:

$$S = a3[h^{0.19} (DU/DO)^{2.64} \exp(-4.33\phi + 8.77\phi^{2})]/ [H^{0.54} (DC)^{0.38}]$$

Onde,

a3	Parâmetro de ajuste.
H	Pressão de alimentação em kPa.

A pressão de alimentação *H* é fornecida pela relação:

$$H = a4 [Q^{1.46} \exp(-7.63\phi+ 10.79 \phi^{2})]/[(DC)^{0.20} h^{0.15} (DI)^{0.51} (DO)^{1.65} (DU)^{0.53}]$$

Onde,

a4	Parâmetro de ajuste.

A fração de polpa não classificada, by-pass, é relacionada com a recuperação de água para o *underflow* e modelada como:

$$B_{pf} = \lambda B_{pw}$$

Onde,

λ	Parâmetro de ajuste.
B_{pw}	Recuperação de água para o *underflow.*

A recuperação de água para o *underflow* é dada pela relação:

$$B_{pw} = [S/(S+1) - \phi R_{s}^{c}] / 1 - \phi [1 - \phi (1 - R_{s}^{c})]$$

Onde,

R_{s}^{c}	Recuperação de sólidos hipotética dada pela curva de partição corrigida.

A recuperação de sólidos hipotética é dada pela relação:

$$R_{s}^{c} = \sum_{i=1}^{n} f_i \, E_c$$

Onde,

f_i	Vetor da a distribuição granulométrica da alimentação do hidrociclone.

3. Célula de flotação

O modelo é baseado na representação da flotação como um fenômeno cinético de primeira ordem.

Uma constante cinética é calculada partículas de cada componente *i* e classe de tamanho *j* de acordo com a formulação de King (*Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems 2nd Edition, 2012, by R.P. King*)

$$k_{ij} = a_i/d_j^{0.5}\left[1-\left(d_j/d_{\max i}\right)^{1.5}\right]\exp(-\left(d_{opti}/2d_j\right)^2)$$

Onde,

a_i	Parâmetro de ajuste para partículas do componente *i*.
d_j	Média geométrica entre partícula na classe j e j+1. $d_j = \left(d_j * d_{j+1}\right)^{0.5}$
$d_{\max i}$	Tamanho de partícula máximo flotável de partículas do componente *i*.
d_{opti}	Tamanho de partícula mais facilmente flotável do componente *i*.

Cada banco de flotação é representado por um misturador perfeito, onde para cada célula temos:

$$Q_{cij} = Q_{fij}\left[1-\frac{1}{1+k_{ij}\tau}\right]$$

Onde,

Q_{cij}	Taxa de partículas do componente *i* na classe de tamanho *j* no flotado.
Q_{fij}	Taxa de partículas do componente *i* na classe de tamanho *j* na alimentação.
τ	Tempo médio de residência na célula, calculado a partir da razão entre o volume efetivo da célula e a taxa de alimentação.

4. Britagem – Whiten

Este modelo representa a britagem por meio das funções de quebra e classificação propostas por W.J. Whiten et al. em "A breakage function suitable for crusher models". Fourth Tewksbury, Symposium, Melbourne, February, 1979.

O produto do britador é dado pelo sistema matricial:

$$f = (I - C) * (I - B * C)^{-1} f^o$$

Onde,

p	Vetor da distribuição granulométrica do produto do britador.
f^o	Vetor da a distribuição granulométrica da alimentação do britador
I	Matriz identidade.
C	Matriz de classificação de Whiten.
B	Matriz de quebra.

A função de classificação de Whiten descreve a probabilidade de as partículas de classe de tamanho d_i serem classificadas para quebra como função do tamanho de partícula por:

0 se $d_i < k_1$

1 se $d_i < k_2$

$C(d_i)$ se $k_1 < \ d_i < k_2$

$$C(d_i) = 1 - \left[\frac{d_i - k_2}{k_1 - k_2}\right]^2$$

$$k_1 = 0.67G$$

$$k_2 = 1.121G + 2.31Q + T(t)$$

Em que T(t) é uma função spline cúbica da taxa de alimentação *t* em t/h passando pelos pontos (100;-0.0486), (250;-0.085), (400;-0.259).

Onde,

G	Abertura do Gap (mm)
Q	Fração da alimentação maior que uma polegada.
$T(t)$	Função spline cúbica da taxa de alimentação *t* em t/h passando pelos pontos (100;-0.0486), (250;-0.085), (400;-0.259).

A função quebra é dada pela matriz:

$$B_{ij} = \alpha B_1 + (1 - \alpha) B_2$$

Onde,

$$\alpha = 0.872 + 0.115G$$

E,

$$B_{1_{ij}} = (1 - \exp\left(-d_i/d_j\right)^u \ )/(1 - \exp(-1))$$

$$B_{2_{ij}} = 1 - \exp(-d_i/s")^v$$

u	Expoente da quebra por tração.
v	Expoente da quebra por compressão.

5. Britagem – Whiten Modificado

Este modelo representa a britagem por meio de adaptações das funções de quebra e classificação propostas por W.J. Whiten et al. em "A breakage function suitable for crusher models". Fourth Tewksbury, Symposium, Melbourne, February, 1979.

O produto do britador é dado pelo sistema matricial:

$$f = (I - C) * (I - B * C)^{-1} f^o$$

Onde,

p	Vetor da distribuição granulométrica do produto do britador.
f^o	Vetor da a distribuição granulométrica da alimentação do britador
I	Matriz identidade.
C	Matriz de classificação de Whiten.
B	Matriz de quebra.

A função de classificação de Whiten descreve a probabilidade de as partículas de classe de tamanho d_i serem classificadas para quebra como função do tamanho de partícula por:

0 se $d_i < k_1$

1 se $d_i < k_2$

$C(d_i)$ se $k_1 < \ d_i < k_2$

$$C(d_i) = 1 - \left[\frac{d_i - k_2}{k_1 - k_2}\right]^{k_3}$$

$$k_1 = \alpha C_{ss}$$

$$k_2 = \beta C_{ss} + \gamma$$

Onde,

C_{ss}	Abertura na posição fechada (mm) (*Closed Side Setting - CSS*)
α	Multiplicador do CSS para determinar o tamanho inferior ao qual não ocorrerá mais quebra (mm).
β	Multiplicador do CSS para determinar o tamanho superior ao qual ocorrerá quebra de todo material (mm).
γ	Correção do tamanho superior ao qual ocorrerá quebra de todo material (mm).
k_3	Inclinação da curva de probabilidade de quebra de Whiten.

A função quebra é dada pela matriz:

$$B_{ij} = \varphi \left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_1} + (1 - \varphi)\left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_2}$$

φ	Fração de quebra por tração.
β_1	Expoente da quebra por tração.
β_2	Expoente da quebra por compressão.