多元正态分布

n维随机向量x符合均值为μ协方差矩阵为Σ的正态分布，记为

$$x \sim N(n, \mu, \Sigma)$$

概率密度函数

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}}$$

简写为

$$f(x) = f_{N(n,\mu,\Sigma)}(x)$$

当$\mu = 0$时，以上简化为

$$f(x) = f_{N(n,0,\Sigma)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^T \Sigma^{-1} x}}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}}$$

对数形式

$$\ln f(x) = \ln f_{N(n,0,\Sigma)}(x) = -\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x - \frac{1}{2} n \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Sigma|$$

简单但不失一般性，以下只讨论$\mu = 0$的情况。

正态分布的条件分布与边缘分布

假设

$$x = \begin{bmatrix} u^k \\ v^{n-k} \end{bmatrix}$$

Σ 的 Cholesky 分解为

$$\Sigma = L L^T$$

$$L = \begin{bmatrix} A^{k\times k} & 0^{k\times(n-k)} \\ B^{(n-k)\times k} & C^{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

以下容易证明

$$\Sigma = \begin{bmatrix} AA^T & AB^T \\ BA^T & BB^T + CC^T \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma| = |A|^2 |C|^2$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$x^T \Sigma^{-1} x = (v - B A^{-1} u)^T C^{-T} C^{-1} (v - B A^{-1} u) + u^T A^{-T} A^{-1} u$$

因为u的协方差矩阵为$A A^T$，所以边缘分布

$$f_u(u) = f_{N(k,0,AA^T)}(u) = \frac{e^{-\frac{1}{2}u^T A^{-T} A^{-1} u}}{\sqrt{(2\pi)^k |A|^2}}$$

根据贝叶斯定理，条件分布和边缘分布存在以下关系

$$f_{v|u}(u,v) = \frac{f(u,v)}{f_u(u)}$$

由此可计算出条件分布

$$f_{v|u}(u,v) = f_{N(n-k,BA^{-1}u,CC^T)}(u) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(v-BA^{-1}u)^T C^{-T} C^{-1} (v-BA^{-1}u)}}{\sqrt{(2\pi)^{n-k} |C|^2}}$$

混合分布的条件分布与边缘分布

一个混合分布的概率密度函数为

$$f(u,v)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i f_i(u,v)$$

其边缘分布

$$f_u(u)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i f_{i,u}(u)$$

条件分布

$$f_{v|u}(u,v)=\frac{f(u,v)}{f_u(u)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i f_i(u,v)}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i f_{i,u}(u)}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i f_{i,u}(u) f_{i,v|u}(u,v)}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i f_{i,u}(u)}$$

混合分布的期望与协方差

一个混合分布的概率密度函数为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i f_i(x)$$

则它的期望为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i E(X_i)$$

协方差为

$$Cov(X)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i Cov(X_i)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(E(X_i)-E(X))(E(X_i)-E(X))^T$$