chap 1 最优线性滤波

💡 一 线性滤波概念

理解滤波器的概念及线性滤波、最优滤波、维纳滤波、卡尔曼滤波的概念

二 维纳滤波(Weiner Filtering)

掌握：维纳滤波问题, Weiner-Hopf方程,FIR维纳滤波计算及其最小均方误差计算方法,掌握正交原理，去相关滤波的概念, 了解最优滤波与一般线性滤波的比较。

三 卡尔曼滤波(Kalman Filtering)

了解卡尔曼滤波和维纳滤波的关系与区别及标量卡尔曼滤波.

四 自适应滤波(Adaptive Filtering)

掌握自适应滤波定义,原理框图,分类,自适应滤波算法选用的考虑因素。

五 自适应滤波应用

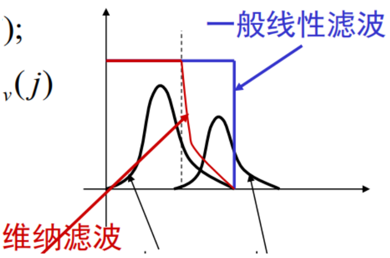
了解自适应滤波应用的四种应用类别：系统辨识, 自适应逆滤波系统,自适用噪音抵消, 自适用谱线增强。掌握并能理解其中的应用原理，在实用中参考信号的获取。

线性滤波→维纳、卡尔曼

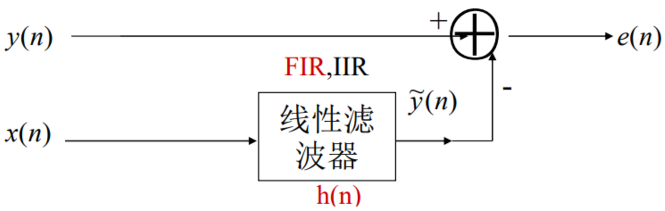
- **滤波器**：一个器件或系统，对混有噪音的数据序列过滤或估计，达到提取有用信息的目的
- **线性滤波**：滤波器输出是输入的线性加权
- **最优线性滤波**：在已知输入信号的某些统计特性（平稳/非平稳）的条件下，滤波器输出是有用信息按某一准则（如最小均方误差准则，MMSE）的最优估计
  - 平稳：信号的统计特性不随时间变化
  - **维纳滤波**：平稳➕已知统计特性➕MMSE➕非递推
  - **卡尔曼滤波**：非平稳➕已知状态和观察方程➕MMSE➕递推

维纳滤波（矢量，非递推）

- 维纳滤波与一般线性滤波的比较



维纳滤波问题



- 符号表示：

  x(n)-输入信号

  y(n)-参考信号（期望输出）

  h(n)-滤波器

  y~(n)-滤波输出，y~(n)=x(n)*h(n) （卷积）

  e(n)-误差信号，e(n)=y(n)-y~(n)

- 已知条件：

  x(n)、y(n)是均值为0的**平稳**离散时间信号，二阶矩（自、互相关）已知，滤波器h(n)线性（FIR、IIR）

- 目标：求h(n)
- 采用准则：

  MMSE，最小均方误差

$$J = E[e^2(n)] = E\{[(y(n) - \tilde{y}(n)]^2\} = \min$$

Weiner-Hopf方程

- 令均方误差J对滤波器系数hj求偏导，令其等于0，求得使J最小的关于j的关系式：

$$E[e(n)x(n-j)]=0,\forall j,n$$

$$E[y(n)x(n-j)-\sum_i h_i x(n-i)x(n-j)]=0$$

定义: $r_c(j)=E[y(n)x(n-j)]$ x、y 互相关

$r(j)=E[x(n)x(n-j)]$ x 自相关

则: $r_c(j)=\sum_i h_i r(j-i),\forall j$ ⟹ Weiner-Hopf方程

n阶FIR维纳滤波器，及其最小均方误差Jmin的计算（作业题）

- N阶FIR公式：

$$\tilde{y}(n)=\sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i)$$

- 求滤波器系数H：

输入: $\mathbf{X}(n)=[x(n),x(n-1),...,x(n-N+1)]^T$

系数: $\mathbf{H}=[h_0,h_1,...,h_{N-1}]^T$

输出: $\tilde{y}(n)=\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)=\mathbf{X}^T(n)\mathbf{H}$

$$E[e(n)x(n-j)]=0;0\le j\le N-1,\forall n\Rightarrow E[e(n)\mathbf{X}(n)]=0;\forall n$$

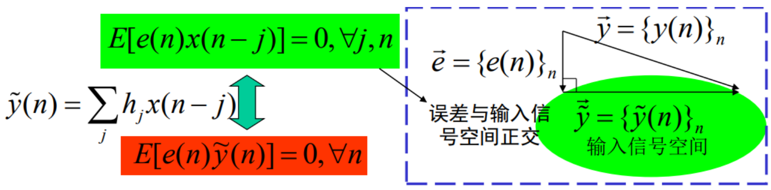
$$E\{[y(n)-\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)]\mathbf{X}(n)\}$$
$$=E[y(n)\mathbf{X}(n)]-\underbrace{E[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]}_{\mathbf{R}_{xx}}\mathbf{H}=0$$
$$\therefore \mathbf{H}_{opt}=\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{r}_{yx}$$

- 求Jmin：

$$J=E[e^2(n)]=E\{[(y(n)-\tilde{y}(n)]^2\}$$
$$\tilde{y}(n)=\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)=\mathbf{X}^T(n)\mathbf{H}$$
$$J=E[y^2(n)]-2E[y(n)\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)]+E[\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\mathbf{H}]$$
$$=E[y^2(n)]-2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}$$
$$J_{\min}=E[y^2(n)]-2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H}_{opt}+\mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt}$$
$$=E[y^2(n)]-\mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt}$$
$$=E[y^2(n)]-\mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{r}_{yx}$$

$$*\,E[y(n)\mathbf{X}^T(n)]=\mathbf{r}_{yx}^T=\mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\Leftarrow \mathbf{H}_{opt}=\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{r}_{yx}$$

正交原理



- 维纳滤波 < = > e(n)与y~(n)正交< = > e(n)与x(n-j)正交
- y~(n)是输入信号空间的一个矢量
- 推论
    - 线性最优滤波（维纳滤波）的最优估计是参考信号y在输入信号空间的正交投影
    - 等价于将参考信号y分解为两个正交分量（误差e和滤波器输出y~），误差e与输入x（正交）不相关，滤波器输出y~与输入x（不正交）相关

去相关滤波

- 维纳滤波是去相关滤波
- y(n)=e(n)+y~(n)，e(n)是滤出的与x(n)不相关的部分，y~(n)是滤出的与x(n)相关的部分

卡尔曼滤波（标量，递推）

- 卡尔曼滤波和维纳滤波的关系与区别
    - **维纳滤波**：平稳➕已知统计特性➕MMSE➕非递推（低效）

$$\text{根据 } x(1),x(2),\dots,x(n)\text{，估计 }\tilde{y}(n|n)$$

    - **卡尔曼滤波**：非平稳➕已知状态和观察方程➕MMSE➕递推（高效）

$$\text{由 } n\text{-}1 \text{ 时刻及此前的观察信号}, x(1),x(2),\dots,x(n-1),$$

$$\text{按最小均方误差准则得到 } y(n\text{-}1) \text{ 的最优估计,记为:}$$

$$\tilde{y}(n-1|n-1)$$

$$\begin{tikzcd} \text{叠代的方法: } \tilde{y}(n-1|n-1) \arrow[r] & \tilde{y}(n|n) \\ x(n) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

- 标量卡尔曼滤波
  1. 一步预测，得到新息（预测误差）

     状态方程：y(n)=a*y(n-1)+w(n)

     测量方程：x(n)=c*y(n)+v(n)

     新息：innovation=x(n)-x~(n|n-1)

     a. y(n)=a*y(n-1)+w(n) ⇒ y~(n|n-1)=a*y~(n-1|n-1)

     b. x(n)=c*y(n)+v(n) ⇒ x~(n|n-1)=c*a*y~(n-1|n-1)

     c. innovation=x(n)-c*a*y~(n-1|n-1)
  2. 根据新息，对预测值y~(n|n-1)进行修正，得到估计值y~(n|n)=y~(n|n-1)+Gn*innovation

     Gn：加权因子（预测增益），由Jn最小（对Gn求偏导，令=0，求出极值点）求得

  - 公式总结

$$\tilde{y}(n|n)=a\tilde{y}(n-1|n-1)+G_n[x(n)-ca\tilde{y}(n-1|n-1)]$$

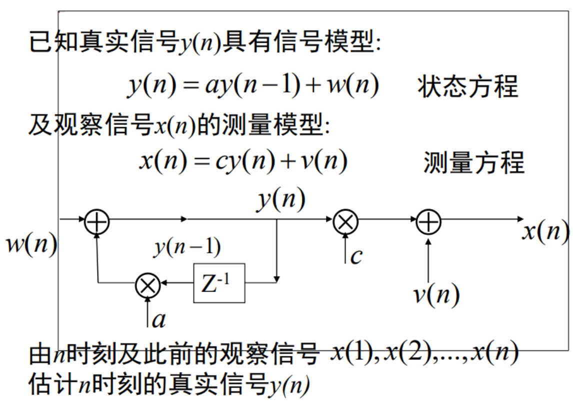
$$p(n)=a^2J(n-1)+Q$$

$$G_n=\frac{cp(n)}{R+c^2p(n)}$$

$$J(n)=\frac{R}{C}G_n=(1-cG_n)p(n)$$

初始条件：$\tilde{y}(0|0),J(0)$

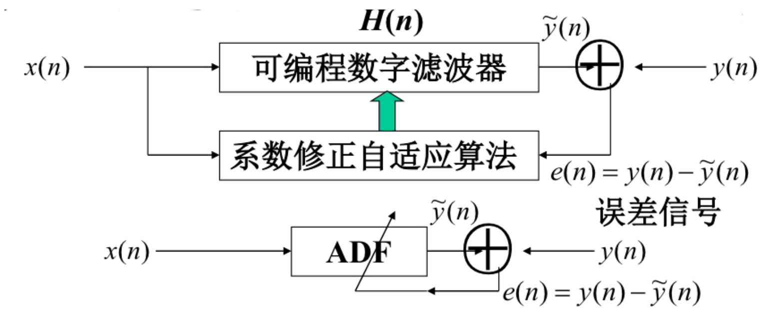
  - 示意图



自适应滤波引言

（背景：维纳滤波和卡尔曼滤波需要关于输入的先验知识，难以获得；如果根据输入进行估计，又耗费资源、非实时，仅适合平稳）

- **自适应滤波的定义**：滤波器的系数可随新数据的获取而按某一准则变化（迭代算法；具有学习能力）
- **原理框图**



  filtering process+adaptive process

  参考信号y(n)很重要

- **分类**
  - 按最优准则分
    - LMS，Least Mean Square，最小均方误差
    - LAV，Least Absolute Value，最小绝对值误差
    - LS，Least Square，最小平方误差
  - 按系数修正算法分
    - 梯度算法
    - 符号算法
    - 递推算法
  - 按可编程滤波器结构分
    - IIR：直接型，级联型，并联型
    - FIR：直接型，级联型，Lattice结构
  - 按被处理信号类型分
    - 一维/多维

            - 实信号/复信号

- **算法选用的考虑因素**
- 自适应滤波的应用（**应用原理，在实用中参考信号的获取）**
  - 系统辨识：信道辨识，回声消除
  - 自适应逆滤波：信道均衡 （消除码间串扰，基于判决的方法）
  - 自适用噪音抵消：心电图记录仪中的50hz陷波器，胎儿心电
  - 自适应谱线增强