chap 2 LMS自适应滤波

💡 一 LMS算法

了解性能误差曲面,从梯度算法的角度掌握LMS算法的原理,LMS算法公式,直接实现结构

二 LMS算法稳定性分析

了解均值收敛和均方收敛的意义和过程,掌握均值收敛条件和均方收敛条件、 均方收敛时的最小误差和超量误差

三 LMS算法性能分析

掌握均值收敛和均方收敛下的时间常数计算方法, 均方收敛下的失调的计算方法,了解自适应步长、滤波器长度、和信号特性(相关阵的特征值)对LMS算法性能的影响

四 LMS算法变形

掌握泄放因子,符号算法归一化LMS算法的公式和原理, 各种变形针对解决的问题。了解跟踪误差的概念

五 级联型FIR梯度自适应滤波器和IIR梯度自适应滤波器

掌握算法原理, 不要求计算

LMS算法

- **原理**

LMS自适应滤波是梯度自适应滤波的重要一种. 梯度自适应滤波是基于最陡下降迭代算法的基本思想的一类自适应滤波.

梯度自适应滤波原理框图

- **公式**

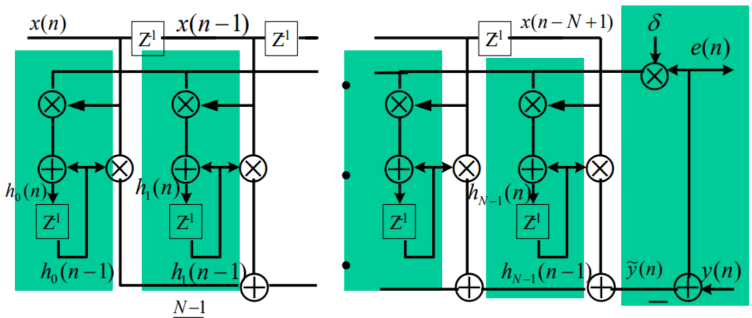
$$e(n+1)=y(n+1)-\mathbf{H}^T(n)\mathbf{X}(n+1)$$ →滤波

$$\mathbf{H}(n+1)=\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1),n=0,1,2,...$$ →参数更新

$$\mathbf{X}(n+1)=[x(n+1),x(n),...,x(n-N+2)]^T$$

$$\mathbf{H}(n)=[h_0(n),h_1(n),...,h_{N-1}(n)]^T$$

- **直接实现结构**



$$\tilde{y}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h_k(n-1)x(n-k)$$

$$e(n)=y(n)-\tilde{y}(n)$$

$$h_k(n)=h_k(n-1)+\delta e(n)x(n-k),k=0,1,2,...N-1$$

稳定性分析

- **均值收敛条件**

均值收敛：E[H(n)]→Hopt

$$|1-\delta\lambda_k|<1, \qquad for\ all\ k$$

$$0<\delta<2/\lambda_{\max}$$

（收敛条件由最大特征值决定，收敛快慢由最小特征值决定）

- **均方收敛条件**

均方收敛：均方误差J(n)收敛到一个最小值

$$0<\delta<\frac{2}{N\sigma_x^2}$$

- **均方收敛时的最小误差Jmin(n)**

$$J(n) = J_{\min} + J_{ex}(n)$$

$$e_0(n+1) = y(n+1) - \mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{H}_{opt}$$

$$E[e_0^2(n+1)] = J_{\min}$$

- **均方收敛时的超量误差Jex(n)**

$$J_{ex}(n) = \mathbf{\Lambda}^T \boldsymbol{\beta}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i E[\alpha_i^2(n)]$$

收敛时，Jex(n)达到一个稳定值

$$J_{ex}(\infty) = \frac{\delta}{2}[J_{\min}/(1-\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2)][N\sigma_x^2]$$
$$= J_{\min} \bullet \frac{\delta}{2}N\sigma_x^2/(1-\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2)$$

性能分析

1) δ 与 τ 成反比

采用小的δ值，自适应较慢，时间常数较大，相应收敛后的均方误差要小，需要较大量的数据来完成自适应过程；

当δ值较大时，自适应相对较快，代价是增加了收敛后的平均超量误差,需要较少量的数据来完成自适应过程;

因此δ的倒数可以被看成是LMS算法的Memory长度。$\frac{1}{\delta}$

2) N

由于算法均方收敛的条件是 $0 < \delta < \frac{2}{\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_j}$ 或 $0 < \delta < \frac{2}{N\sigma_x^2}$

所以均方误差J(n)的收敛特性和阶次N有关。

3) λ_i

当输入的相关阵R的特征值比较分散时，LMS算法的超量均方误差主要由最大特征值决定。而权系数矢量均值收敛到$\mathbf{H}_{opt}$所需的时间受最小特征值限制。在特征值很分散（输入相关阵是病态的）时，LMS算法的收敛较慢。

- **均值收敛下，时间常数计算方法**

时间常数是指衰减到初始值的 e^{-1} 倍时所需的时间

时间常数越大，表示收敛越慢

$$\tau_k = \frac{-1}{\ln(1-\delta\lambda_k)}$$

当步长δ足够小时：

$$\tau_k \approx \frac{1}{\delta\lambda_k}$$

- **均方收敛下，时间常数计算方法**

$$\tau_k = \frac{-1}{\ln(1-2\delta\lambda_k)} \approx \frac{1}{2\delta\lambda_k}$$

$$\tau_e \approx \frac{1}{2\delta\bar{\lambda}} = \frac{1}{2\delta\sigma_x^2}$$

- **均方收敛下，失调的计算方法**

$$M_{adj} = \frac{J(\infty)}{J_{\min}}$$

$$\begin{aligned} M_{adj} &\approx 1+\frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i \\ &= 1+\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2 \end{aligned}$$

算法变形

超量误差=梯度失调（权系数矢量噪声）➕跟踪误差（权系数矢量滞后误差）

非平稳才有跟踪误差，平稳没有

- **泄放因子**

当输入信号消失时 =0，递推式中系数被锁死在那儿，这时最好让其返回到0，以便下一次重新递归，从而有个稳定的行为。这可以通过加一个泄放因子来实现。

$$\mathbf{H}(n+1)=(1-\gamma)\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1) \quad \text{式中} \quad 0<\gamma<1$$

从而当 $\mathbf{X}(n+1)=0$ 时，$\mathbf{H}(n+1)\to 0$

$$\mathbf{H}_{\infty}=[\mathbf{R}+\frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N]^{-1}\ \mathbf{R}\ \mathbf{H}_{opt}$$

这时相当于一个白噪声被叠加到输入信号 $x(n)$ 上产生同样的效果

$\delta^2=\frac{\gamma}{\delta}$

$$[\mathbf{R}+\frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N]=[\mathbf{R}]+\begin{bmatrix}\frac{\gamma}{\delta} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\gamma}{\delta}\end{bmatrix}$$

泄放因子尤其对于处理非平稳信号有用，适当选择泄放因子可减小输出误差功率。

（语音信号中，试验表明，$\delta=2^{-6}$，$\gamma=2^{-8}$是一种好的选择）

- **符号算法归一化LMS算法的公式和原理**

LMS算法中，系数自适应遵循

$$\mathbf{H}(n+1)=\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

运算量↑

导致滤波器中（N+1）次乘法（相对于FIR，额外）. 而当信号是非平稳时（如 σ_x^2 在变化），尚需估计 σ_x^2，用 $\frac{1}{\tau_e\sigma_x^2}$ 代替 δ（如希望时间常数保持稳定：$\frac{1}{\delta\sigma_x^2}=\tau_e$）。

实用中有一种简化算法 —— 符号算法。

$$\mathbf{H}(n+1)=\mathbf{H}(n)+\ \Delta\ \ sign[e(n+1)]\ \ sign[\mathbf{X}(n+1)]$$

- **各种变形针对解决的问题**
    - 处理非平稳：加泄放因子
    - 简化计算：符号算法

级联型FIR梯度自适应滤波器 & IIR梯度自适应滤波器