chap 1 最优线性滤波

💡 一 线性滤波概念

理解滤波器的概念及线性滤波、最优滤波、维纳滤波、卡尔曼滤波的概念

二 维纳滤波(Weiner Filtering)

掌握：维纳滤波问题, Weiner-Hopf方程,FIR维纳滤波计算及其最小均方误差计算方法,掌握正交原理，去相关滤波的概念, 了解最优滤波与一般线性滤波的比较。

三 卡尔曼滤波(Kalman Filtering)

了解卡尔曼滤波和维纳滤波的关系与区别及标量卡尔曼滤波.

四 自适应滤波(Adaptive Filtering)

掌握自适应滤波定义,原理框图,分类,自适应滤波算法选用的考虑因素。

五 自适应滤波应用

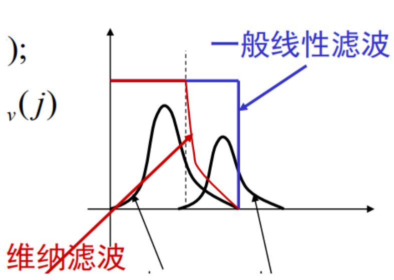
了解自适应滤波应用的四种应用类别：系统辨识, 自适应逆滤波系统,自适用噪音抵消, 自适用谱线增强。掌握并能理解其中的应用原理，在实用中参考信号的获取。

线性滤波→维纳、卡尔曼

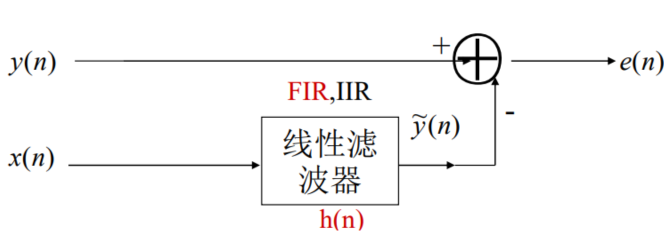
- **滤波器**：一个器件或系统，对混有噪音的数据序列过滤或估计，达到提取有用信息的目的
- **线性滤波**：滤波器输出是输入的线性加权
- **最优线性滤波**：在已知输入信号的某些统计特性（平稳/非平稳）的条件下，滤波器输出是有用信息按某一准则（如最小均方误差准则，MMSE）的最优估计
    - 平稳：信号的统计特性不随时间变化
    - **维纳滤波**：平稳➕已知统计特性➕MMSE➕非递推
    - **卡尔曼滤波**：非平稳➕已知状态和观察方程➕MMSE➕递推

维纳滤波（矢量，非递推）

- 维纳滤波与一般线性滤波的比较



维纳滤波问题



- 符号表示：

    x(n)-输入信号

    y(n)-参考信号（期望输出）

    h(n)-滤波器

    y~(n)-滤波输出，y~(n)=x(n)*h(n) （卷积）

    e(n)-误差信号，e(n)=y(n)-y~(n)

- 已知条件：

x(n)、y(n)是均值为0的**平稳**离散时间信号，二阶矩（自、互相关）已知，滤波器h(n)线性（FIR、IIR）

- 目标：求h(n)
- 采用准则：

  MMSE，最小均方误差

$$J = E[e^2(n)] = E\{[(y(n) - \tilde{y}(n)]^2\} = \min$$

Weiner-Hopf方程

- 令均方误差J对滤波器系数hj求偏导，令其等于0，求得使J最小的关于j的关系式：

$$\boxed{E[e(n)x(n-j)] = 0, \forall j, n}$$

$$E[y(n)x(n-j) - \sum_i h_i x(n-i)x(n-j)] = 0$$

定义: $r_c(j) = E[y(n)x(n-j)]$ x,y 互相关

$r(j) = E[x(n)x(n-j)]$ x 自相关

则: $r_c(j) = \sum_i h_i r(j-i), \forall j$ $\Longrightarrow$ Weiner-Hopf方程

n阶FIR维纳滤波器，及其最小均方误差Jmin的计算（作业题）

- N阶FIR公式：

$$\tilde{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i)$$

- 求滤波器系数H：

$$\begin{aligned}
&\text{输入:}\ \mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), \ldots, x(n-N+1)]^T \\
&\text{系数:}\ \mathbf{H} = [h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}]^T \\
&\text{输出:}\ \tilde{y}(n) = \mathbf{H}^T\mathbf{X}(n) = \mathbf{X}^T(n)\mathbf{H} \\
&E[e(n)x(n-j)] = 0; 0 \le j \le N-1, \forall n \Rightarrow E[e(n)\mathbf{X}(n)] = 0; \forall n \\
&E\{[y(n) - \mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)]\mathbf{X}(n)\} \\
&= E[y(n)\mathbf{X}(n)] - \underbrace{E[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]}_{\mathbf{R}_{xx}}\mathbf{H} = 0 \\
&\therefore \mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{r}_{yx}
\end{aligned}$$

- 求Jmin：

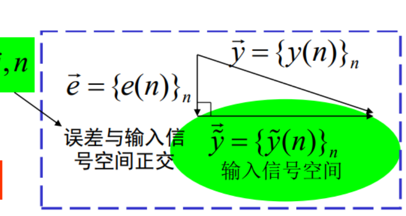
$$\begin{aligned}
&J = E[e^2(n)] = E\{[(y(n) - \tilde{y}(n)]^2\} \\
&\tilde{y}(n) = \mathbf{H}^T\mathbf{X}(n) = \mathbf{X}^T(n)\mathbf{H} \\
&J = E[y^2(n)] - 2E[y(n)\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)] + E[\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\mathbf{H}] \\
&\quad = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} \\
&J_{\min} = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt} \\
&\quad = E[y^2(n)] - \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt} \\
&\quad = E[y^2(n)] - \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{r}_{yx} \\
&* E[y(n)\mathbf{X}^T(n)] = \mathbf{r}_{yx}^T = \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx} \Longleftarrow \mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{r}_{yx}
\end{aligned}$$

正交原理

$$\boxed{E[e(n)x(n-j)] = 0, \forall j, n}$$

$$\tilde{y}(n) = \sum_j h_j x(n-j) \Updownarrow$$

$$\boxed{E[e(n)\tilde{y}(n)] = 0, \forall n}$$



- 维纳滤波 < = > e(n)与y~(n)正交< = > e(n)与x(n-j)正交
- y~(n)是输入信号空间的一个矢量
- 推论

- 线性最优滤波（维纳滤波）的最优估计是参考信号y在输入信号空间的正交投影
- 等价于将参考信号y分解为两个正交分量（误差e和滤波器输出y~），误差e与输入x（正交）不相关，滤波器输出y~与输入x（不正交）相关

去相关滤波

- 维纳滤波是去相关滤波
- y(n)=e(n)+y~(n)，e(n)是滤出的与x(n)不相关的部分，y~(n)是滤出的与x(n)相关的部分

卡尔曼滤波（标量，递推）

- 卡尔曼滤波和维纳滤波的关系与区别
  - **维纳滤波**：平稳➕已知统计特性➕MMSE➕非递推（低效）

$$\text{根据 } x(1), x(2), \ldots, x(n)\text{，估计}\tilde{y}(n|n)$$

  - **卡尔曼滤波**：非平稳➕已知状态和观察方程➕MMSE➕递推（高效）

$$\text{由}n\text{-1时刻及此前的观察信号}, x(1), x(2), \ldots, x(n-1),$$

$$\text{按最小均方误差准则得到}y(n\text{-}1)\text{的最优估计,记为:}$$
$$\tilde{y}(n-1|n-1)$$

$$\text{叠代的方法: } \tilde{y}(n-1|n-1) \xrightarrow[\uparrow\, x(n)]{} \tilde{y}(n|n)$$

- 标量卡尔曼滤波
  1. 一步预测，得到新息（预测误差）

     状态方程：y(n)=a*y(n-1)+w(n)

     测量方程：x(n)=c*y(n)+v(n)

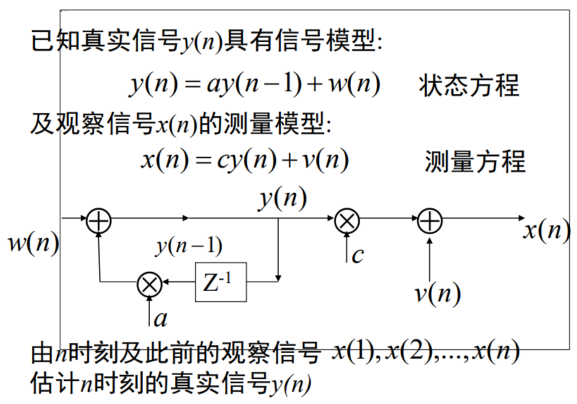
     新息：innovation=x(n)-x~(n|n-1)

     a. y(n)=a*y(n-1)+w(n) ⇒ y~(n|n-1)=a*y~(n-1|n-1)
     b. x(n)=c*y(n)+v(n) ⇒ x~(n|n-1)=c*a*y~(n-1|n-1)
     c. innovation=x(n)-c*a*y~(n-1|n-1)
  2. 根据新息，对预测值y~(n|n-1)进行修正，得到估计值y~(n|n)=y~(n|n-1)+Gn*innovation

     Gn：加权因子（预测增益），由Jn最小（对Gn求偏导，令=0，求出极值点）求得
  - 公式总结

$$\tilde{y}(n|n) = a\tilde{y}(n-1|n-1) + G_n[x(n) - ca\tilde{y}(n-1|n-1)]$$
$$p(n) = a^2 J(n-1) + Q$$
$$G_n = \frac{cp(n)}{R + c^2 p(n)}$$
$$J(n) = \frac{R}{C} G_n = (1 - cG_n)p(n)$$
$$\text{初始条件: } \tilde{y}(0|0), J(0)$$

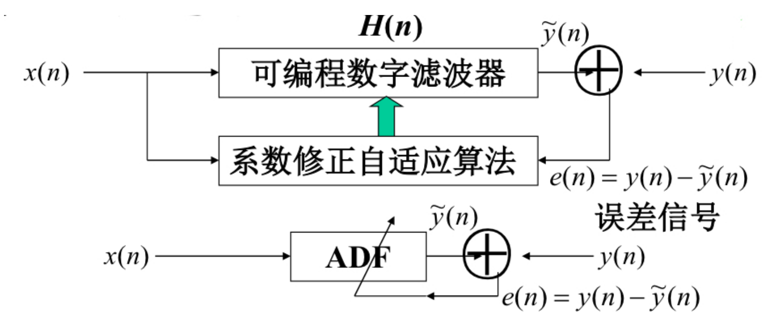
  - 示意图



自适应滤波引言

（背景：维纳滤波和卡尔曼滤波需要关于输入的先验知识，难以获得；如果根据输入进行估计，又耗费资源、非实时，仅适合平稳）

- **自适应滤波的定义**：滤波器的系数可随新数据的获取而按某一准则变化（迭代算法；具有学习能力）
- **原理框图**

  filtering process+adaptive process

  参考信号y(n)很重要

- **分类**
  - 按最优准则分
    - LMS，Least Mean Square，最小均方误差
    - LAV，Least Absolute Value，最小绝对值误差
    - LS，Least Square，最小平方误差
  - 按系数修正算法分
    - 梯度算法
    - 符号算法
    - 递推算法
  - 按可编程滤波器结构分
    - IIR：直接型，级联型，并联型
    - FIR：直接型，级联型，Lattice结构
  - 按被处理信号类型分
    - 一维/多维
    - 实信号/复信号
- **算法选用的考虑因素**
- 自适应滤波的应用（**应用原理，在实用中参考信号的获取）**
  - 系统辨识：信道辨识，回声消除
  - 自适应逆滤波：信道均衡 （消除码间串扰，基于判决的方法）
  - 自适用噪音抵消：心电图记录仪中的50hz陷波器，胎儿心电
  - 自适应谱线增强