chap 7 最小二乘自适应滤波

💡 一 掌握以下概念：线性 LS 估计问题，正交原理，正则方程

二 理解标准 RLS 自适应滤波器算法原理，存在的问题

三 掌握：最小二乘自适应滤波器的矢量空间分析基本方法， 正向预测和后向预测误差滤波的矢量空间分析基本方法，时间更新和阶次更新思路、 方法及推导过程；

理解： 最小二乘滤波器的矢量空间分析中的投影矩阵和正交投影矩阵,角参量的物理意义

了解： LS 准则下的预测误差滤波器的格形结构， 最小二乘格形（LSL）自适应算法

四 了解快速横向滤波（FTF）自适应算法的算法原理， 理解横向滤波算子， 增益滤波器的概念

最小二乘法

线性LS估计问题

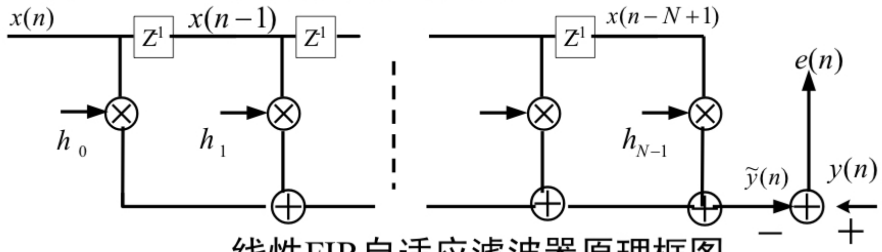
LMS的缺点：失调较大，需要信号平稳

解决方法：LS(Least Square，最小二乘)，以时间均值代替统计均值

$$J(\mathbf{H}) = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} e^2(n) = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} [(y(n) - \tilde{y}(n)]^2 = \min$$

$$J(\mathbf{H}) = E[e^2(n)] = \min$$

设:(1)观察信号 $x(1), x(2), \dots, x(L)$;　$\mathbf{H} = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T$
　(2)期望信号 $y(1), y(2), \dots, y(L)$



线性FIR自适应滤波器原理框图

线性FIR自适应滤波器的输出:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(n-k) \qquad e(n) = y(n) - \tilde{y}(n)$$

$$J(\mathbf{H}) = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} e^2(n) = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} [(y(n) - \tilde{y}(n)]^2 = \min \quad \mathbf{H}_{LS} \Leftarrow \textbf{LS Filter}$$

正交原理

$$\frac{\partial J(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} = 0 \Rightarrow \sum_{n=n_1}^{n=n_2} x(n-k)e(n) = 0, k = 0, 1, \dots, N-1$$

正交原理:**LS滤波器的输入*x(n-k)*和误差*e(n)*正交, *k = 0,1,…,N-1***

推论1:滤波器的输出和误差*e(n)*正交

$$\sum_{n=n_1}^{n=n_2} \tilde{y}(n)e(n) = 0$$

推论2:LS滤波等价于将期望信号y(n)进行正交分解

$$\mathbf{y}(n) = \tilde{\mathbf{y}}(n) + \mathbf{e}(n)$$

正则方程

$$e(n) = y(n) - \tilde{y}(n) = y(n) - \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(n-k)$$

代入

$$\sum_{n=n_1}^{n=n_2} x(n-k)e(n) = 0, k = 0,1,\ldots,N-1$$

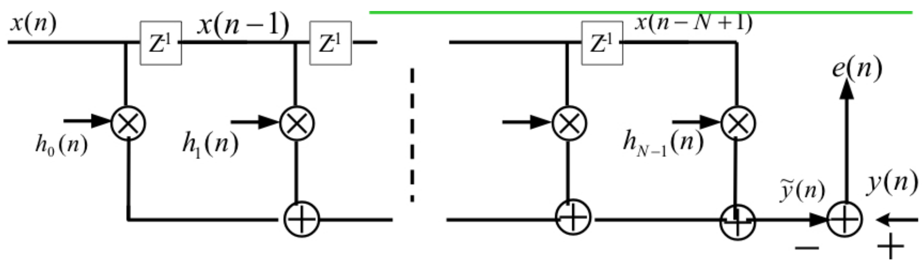
$$\sum_{m=0}^{N-1} h_m \underbrace{\sum_{n=n_1}^{n=n_2} x(n-k)x(n-m)}_{\text{自}} = \underbrace{\sum_{n=n_1}^{n=n_2} x(n-k)y(n)}_{\text{互}}, k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} h_m \Phi(m,k) = z(-k), k = 0,1,\ldots,N-1$$ **Normal Equation**

$$\mathbf{\Phi H} = \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{H}_{LS} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{z}$$

标准 RLS 自适应滤波器

算法原理



基本思想: 假设在*n*-1时刻得到滤波器系数的LS估计,在*n*时刻新的数据到来后,按LS准则更新滤波器系数→RLS

$$J[\mathbf{H}(n)] = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} e^2(i) = \min \qquad \lambda \rightarrow \text{遗忘因子}$$

$$\mathbf{x}(i) = [x(i), x(i-1), \ldots, x(i-N+1)]^T \qquad e(i) = y(i) - \tilde{y}(i)$$

$$\mathbf{H}(n) = [h_0(n), h_1(n), \ldots, h_{N-1}(n)]^T$$

$$\tilde{y}(i) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k(n)x(i-k) = \mathbf{H}^T(n)\mathbf{x}(i) = \mathbf{x}^T(i)\mathbf{H}(n)$$

初始化： $\mathbf{H}(0)=\mathbf{0}$

$$P(0)=\delta^{-1}\mathbf{I}$$

$$\delta=\begin{cases} \textit{small positive} \text{ contant for high SNR} \\ \text{large } \textit{positive} \text{ contant for low SNR} \end{cases}$$

叠代：n=1,2,…

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n),$$

$P(n) = \varphi^{-1}(n)$

$$\mathbf{k}(n)=\frac{\boldsymbol{\pi}(n)}{\lambda+\mathbf{x}^T(n)\boldsymbol{\pi}(n)},$$

λ: 遗忘因子

$$\xi(n)=y(n)-\mathbf{H}^T(n-1)\mathbf{x}(n),$$

$$\mathbf{H}(n)=\mathbf{H}(n-1)+\mathbf{k}(n)\xi(n),$$

$$\mathbf{P}(n)=\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)-\lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n-1)$$

存在的问题

矢量空间分析

LS Adaptive Filter的矢量空间分析

$$\mathbf{X}_{0,N-1}(n)=\begin{bmatrix} x(1) & 0 & 0 & 0 \\ x(2) & x(1) & & \\ & & & \\ x(n-1) & x(n-2) & & x(n-N) \\ x(n) & x(n-1) & & x(n-N+1) \end{bmatrix}$$

以$\mathbf{X}_{0,N-1}(\mathbf{n})$的N个列向量 $z^0\mathbf{x}(n), z^{-1}\mathbf{x}(n),\ldots, z^{-(N-1)}\mathbf{x}(n)$ 为基底，构成n维空间的N维子空间$\{\mathbf{X}_{0,N-1}(\mathbf{n})\}$

$$\mathbf{x}(n)=[x(1),x(2),\ldots,x(n)]^T$$

$$z^{-j}\mathbf{x}(n)=[0,\ldots,x(1),x(2),\ldots,x(n-j)]^T$$

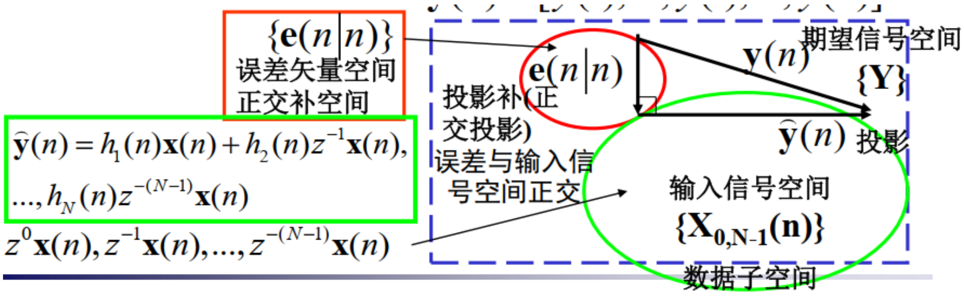
$$\mathbf{X}_{0,N-1}(n)=[z^0\mathbf{x}(n),z^{-1}\mathbf{x}(n),\ldots,z^{-(N-1)}\mathbf{x}(n)]$$

$$\hat{\mathbf{y}}(n)=\mathbf{X}_{0,N-1}(n)\mathbf{H}(n)=[z^0\mathbf{x}(n),z^{-1}\mathbf{x}(n),\ldots,z^{-(N-1)}\mathbf{x}(n)]\mathbf{H}(n)$$

$$=h_0(n)\mathbf{x}(n)+h_1(n)z^{-1}\mathbf{x}(n),\ldots,h_{N-1}(n)z^{-(N-1)}\mathbf{x}(n)$$

$\Rightarrow$ 线性组合，估计是数据矢量空间的一个矢量

投影矩阵和正交投影矩阵



角参量的物理意义

新息的度量

时间更新和阶次更新

正向预测和后向预测误差滤波的矢量空间分析

$$e(i|n)=y(i)-\sum_{k=0}^{N-1}h_k(n)x(i-k),i=1,..,n$$

正向预测误差:

$$e_N^f(i)=x(i)-\hat{x}_f(i)=x(i)-\sum_{k=1}^{N}a_{Nk}x(i-k),1\le i\le n$$

$$\varepsilon_N^f(n)=\sum_{i=1}^{n}[e_N^f(i)]^2\overset{\{a_{Nk}\}_{k=1}^{N}}{\Rightarrow}\min$$

定义:

$$\mathbf{e}_N^f(n)=[e_N^f(1),\ldots,e_N^f(i),\ldots,e_N^f(n)]^T$$

$$\mathbf{x}(n-1)=[x(1),x(2),\ldots,x(n-1)]^T\Leftarrow\mathbf{x}(n)$$ 输入信号矢量

$$\mathbf{x}(n)=[x(1),x(2),\ldots,x(n)]^T\Leftarrow\mathbf{y}(n)$$ 参考信号矢量

$$\hat{\mathbf{x}}_f(n)=[\hat{x}_f(1),\ldots,\hat{x}_f(i),\ldots,\hat{x}_f(n)]^T\Leftarrow\hat{\mathbf{y}}(n)$$

$$\mathbf{A}_N(n)=[a_{N1}(n),a_{N2}(n),\ldots,a_{NN}(n)]^T\Leftarrow\mathbf{H}(n)$$

$$\mathbf{X}_{1,N}(n)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x(1) & 0 & & \\ & & & \\ x(n-2) & x(n-3) & & x(n-N-1) \\ x(n-1) & x(n-2) & & x(n-N) \end{bmatrix}$$

$$=[z^{-1}\mathbf{x}(n), z^{-2}\mathbf{x}(n), \ldots, z^{-N}\mathbf{x}(n)]^T$$

则：$\hat{\mathbf{x}}_f(n)=\mathbf{X}_{1,N}(n)\mathbf{A}_N(n)=\mathbf{P}_{1,N}(n)\mathbf{x}(n)$

$$\mathbf{e}_N^f(n)=\mathbf{x}(n)-\mathbf{X}_{1,N}(n)\mathbf{A}_N(n)=\mathbf{P}_{1,N}^{\perp}\mathbf{x}(n)$$

$$\{\mathbf{X}_{1,N}(n)\}\ \begin{cases} \mathbf{P}_{1,N}(n)=\mathbf{X}_{1,N}(n)\left\langle \mathbf{X}_{1,N}, \mathbf{X}_{1,N}\right\rangle^{-1}\mathbf{X}_{1,N}^T \\ \mathbf{P}_{1,N}^{\perp}(n)=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{1,N}(n) \end{cases}$$

$$e_N^f(n)=\boldsymbol{\pi}^T(n)\mathbf{e}_N^f(n)=\left\langle \boldsymbol{\pi}(n), \mathbf{P}_{1,N}^{\perp}\mathbf{x}(n)\right\rangle$$

$$\varepsilon_N^f(n)=\sum_{i=1}^{n}[e_N^f(i)]^2=\left\langle \mathbf{e}_N^f(n), \mathbf{e}_N^f(n)\right\rangle$$

后向预测误差滤波的矢量空间分析

$$\boxed{e(i|n)=y(i)-\sum_{k=0}^{N-1}h_k(n)x(i-k), i=1,..,n}$$

反向（后向）预测误差:

$$e_N^b(i)=x(i-N)-\hat{x}_b(i-N)=x(i-N)-\sum_{k=1}^{N}b_{Nk}x(i-N+k)$$

$$1\le i\le n$$

$$\varepsilon_N^f(n)=\sum_{i=1}^{n}[e_N^b(i)]^2 \overset{\{b_{Nk}\}_{k=1}^N}{\Rightarrow} \min$$

定义：

$$\mathbf{e}_N^b(n)=[e_N^b(1),\ldots,e_N^b(i),\ldots,e_N^b(n)]^T$$

$\mathbf{x}(n)=[x(1),x(2),\ldots,x(n)]^T$ 输入信号矢量

$$\mathbf{x}_b(n-N)=[x(1-N),\ldots,x(i-N),\ldots,x(n-N)]^T \Leftarrow \mathbf{y}(n)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b(n-N)=[\hat{x}_b(1-N),\ldots,\hat{x}_b(i-N),\ldots,\hat{x}_b(n-N)]^T \Leftarrow \hat{\mathbf{y}}(n)$$

$$\mathbf{B}_N(n)=[b_{NN}(n), b_{N(N-1)}(n-1),\ldots,b_{N1}(n)]^T \Leftarrow \mathbf{H}(n)$$

$$\mathbf{X}_{0,N-1}(n)=\begin{bmatrix} x(1) & 0 & 0 & 0 \\ x(2) & x(1) & & \\ & & & \\ x(n-1) & x(n-2) & & x(n-N) \\ x(n) & x(n-1) & & x(n-N+1) \end{bmatrix}$$

$$=[z^{0}\mathbf{x}(n),z^{-1}\mathbf{x}(n),\ldots,z^{-(N-1)}\mathbf{x}(n)]^{T}$$

则： $\hat{\mathbf{x}}_{b}(n-N)=\mathbf{X}_{0,N-1}(n)\mathbf{B}_{N}(n)=\mathbf{P}_{0,N-1}(n)z^{-N}\mathbf{x}(n)$

$$\mathbf{e}_{N}^{b}(n)=z^{-N}\mathbf{x}(n)-\hat{\mathbf{x}}_{b}(n-N)=\mathbf{P}_{0,N-1}^{\perp}z^{-N}\mathbf{x}(n)$$

$$\{\mathbf{X}_{0,N-1}(n)\}\begin{cases}\mathbf{P}_{0,N-1}(n)=\mathbf{X}_{0,N-1}(n)\left\langle \mathbf{X}_{0,N-1},\mathbf{X}_{0,N-1}\right\rangle^{-1}\mathbf{X}_{0,N-1}^{T} \\ \mathbf{P}_{0,N-1}^{\perp}(n)=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{0,N-1}(n)\end{cases}$$

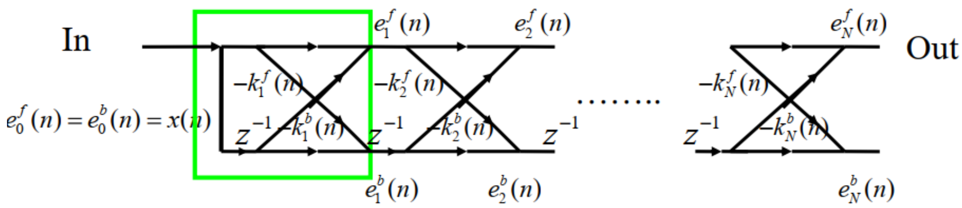
$$e_{N}^{b}(n)=\boldsymbol{\pi}^{T}(n)\mathbf{e}_{N}^{b}(n)=\left\langle \boldsymbol{\pi}(n),\mathbf{P}_{0,N-1}^{\perp}z^{-N}\mathbf{x}(n)\right\rangle$$

$$\varepsilon_{N}^{b}(n)=\sum_{i=1}^{n}[e_{N}^{b}(i)]^{2}=\left\langle \mathbf{e}_{N}^{b}(n),\mathbf{e}_{N}^{b}(n)\right\rangle$$

LS 准则下的预测误差滤波器的格形结构

$$\boxed{e_{N+1}^{f}(n)=e_{N}^{f}(n)-k_{N+1}^{b}e_{N}^{b}(n-1)}$$

$$\boxed{e_{N+1}^{b}(n)=e_{N}^{b}(n-1)-k_{N+1}^{f}e_{N}^{f}(n)}$$



最小二乘格形（LSL）自适应算法

算法总结：

1）初始化，N=1,2,,…P

$$e_N^b(0)=0,\Delta_N(0)=0,\gamma_N(0)=1,\varepsilon_N^b(0)=\varepsilon_N^f(0)=\delta$$

For n=1,2,3,… Repeat 2) and 3):

2） *n*时刻初始化(零阶预测）（*n*=1,2,3,…)

$$e_0^f(n)=e_0^b(n)=x(n)$$
$$\varepsilon_0^b(n)=\varepsilon_0^f(n)=\varepsilon_0^f(n-1)+x^2(n)$$
$$\gamma_0(n)=1$$

3）n时刻的阶次迭代（N=0,1,2,,…P-1)

$$\Delta_{N+1}(n)=\Delta_{N+1}(n-1)+\frac{e_N^f(n)e_N^b(n-1)}{\gamma_N(n-1)}$$
$$k_{N+1}^b(n)=\frac{\Delta_{N+1}(n)}{\varepsilon_N^b(n-1)}\quad k_{N+1}^f(n)=\frac{\Delta_{N+1}(n)}{\varepsilon_N^f(n)}$$
$$e_{N+1}^f(n)=e_N^f(n)-k_{N+1}^b e_N^b(n-1)$$
$$e_{N+1}^b(n)=e_N^b(n-1)-k_{N+1}^f e_N^f(n)$$
$$\varepsilon_{N+1}^f(n)=\varepsilon_N^f(n)-k_{N+1}^b(n)\Delta_{N+1}(n)$$
$$\varepsilon_{N+1}^b(n)=\varepsilon_N^b(n)-k_{N+1}^f(n)\Delta_{N+1}(n)$$
$$\gamma_{N+1}(n-1)=\gamma_N(n-1)-\frac{[e_N^b(n-1)]^2}{\varepsilon_N^b(n-1)}$$

快速横向滤波（FTF）自适应算法

算法原理

FTF自适应算法流程：

1 初始化

$$\mathbf{A}_N(0)=\mathbf{0},\mathbf{B}_N(0)=\mathbf{0},\mathbf{H}_N(0)=\mathbf{0},\mathbf{G}_N(0)=0,\gamma_N(0)=1.0$$

$$\varepsilon^f(0)=\varepsilon^b(0)=\delta,0<\delta<1$$

2 按时间叠代计算（n=1,2,…)

(1)前向预测误差滤波器参量的时间更新

$$e^f(n|n-1)=x(n)-\mathbf{x}_N^T(n-1)\mathbf{A}_N(n-1)$$
$$e^f(n|n)=\gamma_N(n-1)e^f(n|n-1)$$
$$\varepsilon^f(n)=\varepsilon^f(n-1)+e^f(n|n)e^f(n|n-1)$$
$$\mathbf{A}_N(n)=\mathbf{A}_N(n-1)+e^f(n|n-1)\mathbf{G}_N(n-1)$$

(2) N+1阶角参量的时间更新和阶次更新

$$\gamma_{N+1}(n)=\frac{\varepsilon^f(n-1)}{\varepsilon^f(n)}\gamma_N(n-1)$$

(3)N+1阶增益滤波器权矢量的时间更新和阶次更新

$$\mathbf{G}_{N+1}(n)=\begin{bmatrix}\mathbf{k}_N(n)\\ k(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{G}_N(n-1)\end{bmatrix}+\frac{e^f(n|n)}{\varepsilon^f(n)}\begin{bmatrix}1\\ -\mathbf{A}_N(n)\end{bmatrix}$$

（4）后向预测误差滤波器参量， N阶角参量， N阶增益滤波器权矢量的时间更新

$$e^b(n|n-1)=x(n-N)-\mathbf{x}_N^T(n)\mathbf{B}_N(n-1)$$
$$\gamma_N(n)=[1-k(n)e^b(n|n-1)]^{-1}\gamma_{N+1}(n)$$
$$e^b(n|n)=\gamma_N(n)e^b(n|n-1)$$

$$\varepsilon^b(n)=\varepsilon^b(n-1)+e^b(n|n)e^b(n|n-1)$$

$$\mathbf{G}_N(n)=[\mathbf{k}_N(n)+k(n)\mathbf{B}_N(n-1)]\frac{\gamma_N(n)}{\gamma_{N+1}(n)}$$

$$\mathbf{B}_N(n)=\mathbf{B}_N(n-1)+e^b(n|n-1)\mathbf{G}_N(n)$$

（5）最小二乘横向滤波器权矢量的时间更新

$$e(n|n-1)=y(n)-\mathbf{x}_N^T(n)\mathbf{H}_N(n-1)$$

$$\mathbf{H}(n)=\mathbf{H}(n-1)+e(n|n-1)\mathbf{G}_N(n)$$

FTF比LMS算法收敛速度快

运算量： 8N

横向滤波算子

$$\mathbf{H}(n)=[\mathbf{X}_{0,N-1}^T(n)\mathbf{X}_{0,N-1}(n)]^{-1}\mathbf{X}_{0,N-1}^T(n)\mathbf{y}(n)$$

$$\mathbf{K}_{0,N-1}(n)=[\mathbf{X}_{0,N-1}^T(n)\mathbf{X}_{0,N-1}(n)]^{-1}\mathbf{X}_{0,N-1}^T(n)$$ 横向滤波算子

$$\mathbf{H}(n)=\mathbf{K}_{0,N-1}(n)\mathbf{y}(n) \Rightarrow \mathbf{H}(n-1)=\mathbf{K}_{0,N-1}(n-1)\mathbf{y}(n-1)\overset{?}{\Rightarrow}\mathbf{H}(n)$$

增益滤波器

$$\mathbf{G}_N(n)=\mathbf{K}_{0,N-1}(n)\boldsymbol{\pi}(n)$$

$\mathbf{G}_N(n)$是数据矩阵$\mathbf{X}_{0,N-1}(n)$对$\boldsymbol{\pi}(n)$的最小二乘估计器