chap 5 现代谱估计

💡 一　掌握有关基本概念: 功率谱密度定义，功率谱估计中的问题及谱估计方法分类

二　了解传统功率谱估计(非参数谱估计)方法的原理和算法,主要存在的问题和原因

三　理解最大熵谱估计原理，最大熵自相关外推原理，最大熵谱估计的解

四　理解参数模型法谱估计的步骤,三种模型及其之间的关系；AR模型谱估计的解(Yule-Walker方程), AR模型谱估计的性质。了解MA和ARMA模型谱估计的解的方法和性质.

五 白噪声中正弦波频率的估计 理解：白噪声中正弦波频率的估计问题和定义、白噪声中正弦波序列的性质、基于一般谱估计的方法的白噪声中正弦波频率的估计、基于最大似然法的白噪声中正弦波频率的估计；掌握基于特征分解（信号子空间，噪声子空间）的白噪声中正弦波频率的估计原理和方法

功率谱

功率谱密度S定义

$$\begin{cases} S_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{m=-\infty} R_x(m)e^{-j\omega m} \\ R_x(m) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega \end{cases}$$

谱估计问题、方法分类

1 谱估计问题 $x(n)$

给定一个随机过程的一个实现中的有限长度数据

$x(0)$，$x(1)$，。。。，$x(N-1)$

来估计：$S_x(e^{j\omega})$

2 谱估计方法

- 非参数法谱估计
  - 周期图法，自相关法
  - 平滑周期图法
  - 最小方差法
- 参数法谱估计
  - 时间序列模型
  - 最大熵谱估计法

- 线性谱分析法（经典谱估计）
- 非线性谱分析法（现代谱估计）

传统谱估计

原理和算法

一 间接法（BT法，自相关法）

间接法I $\hat{S}(e^{j\omega})=\sum_{m=-M}^{M}R_N(m)e^{-j\omega m}, M\le N-1$ 渐进无偏

间接法II $\hat{S}(e^{j\omega})=\sum_{m=-M}^{M}R_N'(m)e^{-j\omega m}, M\le N-1$ 渐进无偏

二 直接法（周期图法）

$$x(n), n=0,1,\ldots,N-1 \Rightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\text{定义}: I_N(\omega)=\frac{1}{N}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 \Leftarrow \text{周期图}$$

$$\text{则令}: \hat{S}(e^{j\omega})=I_N(\omega)$$

周期图法=间接法1当M=N+1shi

改进：

1.平均周期图法

K个独立同分布随机变量的平均值的方差为单独一个变量方差的1/K

$x(n), n=0,1,\ldots,N-1 \Rightarrow$ 分成K段，每段M个取样，N=KM

$$x^i(n)=x(n+iM-M), 0\le n\le M-1, 1\le i\le K$$

$$I_M^i(\omega)=\frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x^i(n)e^{-j\omega n}\right|^2, 1\le i\le K$$

定义：$B_x(\omega)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}I_M^i(\omega)$

则：$E[B_x(\omega)]=E[I_M^i(\omega)]=S_x(e^{j\omega})*W_B^M(e^{j\omega})$

而：$Var[B_x(\omega)]=\frac{1}{K}Var[I_M^i(\omega)]\approx\frac{1}{K}S_x^2(e^{j\omega})\left\{1+\frac{\sin^2[\omega M]}{[M\sin\omega]^2}\right\}$

→有偏渐近一致估计

2.平滑周期图法（BT谱估计的改进）

$$BT:\hat{S}(e^{j\omega})=\sum_{m=-M}^{M}R_N(m)e^{-j\omega m}, M\le N-1$$

$$\overset{M=N-1}{=}\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}R_N(m)e^{-j\omega m}$$

m大 → 估计$R_N(m)$所用数据少 → 估计$R_N(m)$不可靠，方差大

→ $\hat{S}(e^{j\omega})$的方差大 ⇒ 减少m大的$R_N(m)$对$\hat{S}(e^{j\omega})$的贡献 ⇒ 对$R_N(m)$加权

$$\hat{S}_{BT}(e^{j\omega})=\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}w(m)R_N(m)e^{-j\omega m}$$

- $0\le w(m)\le w(0)=1$
- $w(-m)=w(m)$
- $w(m)=0, |m|>M, M\le N-1$

$w(m)\Leftrightarrow W(e^{j\omega}), R_N(m)\Leftrightarrow \hat{S}(e^{j\omega})=I_N(\omega)$

$\hat{S}_{BT}(e^{j\omega})=I_N(\omega)*W(e^{j\omega})$

3.修正周期图求平均法（Welch法）

加窗平滑+分段平均

$$x(n), n=0,1,\ldots,N-1 \Rightarrow \text{分成}K\text{段, 每段M个取样, N=KM}$$

$$x^i(n) = x(n+iM-M), 0 \le n \le M-1, 1 \le i \le K$$

$$J_M^i(\omega) = \frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x^i(n)w(n)e^{-j\omega n}\right|^2, 1 \le i \le K \qquad U = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$$

$$\text{定义}: \widehat{S}_{avpd}(e^{j\omega}) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} J_M^i(\omega)$$

$$\text{则}: E[\widehat{S}_{avpd}(e^{j\omega})] = E[J_M^i(\omega)] = S_x(e^{j\omega}) * W_B^M(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

$$Var[\widehat{S}_{avpd}(e^{j\omega})] \approx \frac{1}{K} S_x^2(e^{j\omega}) \qquad W(e^{j\omega}) = \frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1} w(n)e^{-j\omega n}\right|^2$$

存在的问题和原因

偏差和方差的折衷 $\Longleftrightarrow$ 分辨率和可靠性

$\Updownarrow$

- 人为地将观察到的数据以外的数据视为零

- 经典谱估计方法的缺点：
  - 有偏估计：经典谱估计方法无法进一步提高分辨率，存在较严重的旁瓣“泄漏”现象。
  - 方差很大：估计的方差随着采样数目N的增大基本上不减小。
  - 经典谱估计得到的功率谱密度不是一致性估计。
  - 在采样数目N有限的条件下，经典谱估计方法无法较好地调和估计偏差和方差的矛盾。
- 产生经典谱估计方法缺点的原因分析：
  - 数据长度有限是造成分辨率低和旁瓣“泄漏”的根本原因。
  - 经典谱估计都仅是对提供数据的“简单”利用，没有想办法挖掘并利用数据间内在的规律性。

最大熵谱估计

最大熵谱估计原理

问题：已知$R_x(0),\ldots, R_x(M)$→估计 $S_x(f) \Rightarrow \hat{S}_x(f)$

方法：按最大熵原理，在已知

$$R_x(m) = \int_{-f_c}^{f_c} S_x(f) e^{-j2\pi fmT} df, m = 0,1,\ldots, M$$

的条件下，估计$R_x(m)$,m>=M+1,使得

$$S_x(f) = T\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j2\pi fmT}$$

时对应的熵率 $h = \frac{1}{2}\ln(2f_c) + \frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c} \ln[S_x(f)]df$

最大，或使

$$H = \frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]$$

最大。

最大熵自相关外推原理

$$H = \frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]$$

$R_x(0),\ldots, R_x(M)$ ➡ $R_x(M+1)$→ $R_x(M+2)$ →…

$$\frac{\partial \det[\mathbf{R}_x(M+1)]}{\partial R_x(M+1)]} = 0, \frac{\partial \det[\mathbf{R}_x(M+2)]}{\partial R_x(M+2)]} = 0, \ldots$$

最大熵谱估计的解

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\sigma^2}{\left|1 + \sum_{n=1}^{M} a_n e^{-j2\pi fnT}\right|^2}$$

参数模型法谱估计

步骤

1.选择模型

2.由有限个观察数据估计模型的参数

3.由估计得到的模型参数代入模型计算功率谱

三种模型及其之间的关系

AR，MA模型是**ARMA**模型的特例

AR参数估计容易一些。

Kolomogorov定理：任何**ARMA(p,q)**过程，或**MA(q)**都能

用无限阶的**AR(p)[p=**无穷大**]**过程表示；

任何一**ARMA(p,q)**过程，或**AR(p)**也能用无限阶的**MA(q)**

[q=无穷大**]**过程表示。

AR模型谱估计的解(Yule-Walker方程)

$$R_{xx}(m)=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{p}a_kR_{xx}(m-k)+\sigma^2, m=0\\ -\sum_{k=1}^{p}a_kR_{xx}(m-k), m>0\end{cases}$$

AR模型谱估计的性质

- 隐含了对自相关函数值进行外推
- 相当于对随机时间序列以最大熵准则外推后估计信号的功率谱密度
- 和对随机时间序列最佳线性预测误差滤波功率谱密度估计等价
- 相当于最佳白化处理

MA和ARMA模型谱估计的解的方法和性质

- MA

1）MA模型法不需要估计模型参数，而只要根据已给数据估计出**|m|≤q**时的自相关函数值即可得到功率谱估计。

2）MA模型法实际上就是自相关法谱估计，也与周期图法谱估计是等效的。只是符合**MA(q)**模型的随机时间序列本身只有**k**小于等于**q**的***R*(k)**才不为**0**，因此只要估计出**k**小于等于**q**时的***R*(k)**，就能得到精确的谱估计结果。

$$R_{xx}(m)=-\begin{cases}\sigma^2\sum_{k=0}^{q-m}b_{k+m}b_k, m=0,1,..,q\\ 0, m\geq q+1\end{cases}$$

- ARMA

ARMA模型谱估计

- 求解目标：
  - 模型阶数**p**和**q**；
  - 模型参数a_k，**k=1, 2 ... p**、 b_k，**k=1, 2 … q**；
  - 白噪声的方差σ^2。
- 求解方法：
  - 假定模型阶数**p**和**q**。
  - 模型阶数已知时对模型两边同求某种统计特征以将随机变量转化为确定性的量。
  - 对各种阶数下的模型进行比较应用某种准则选出最好的模型。

$$R_{xx}(m) = -\begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k R_{xx}(m-k) + \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k), m = 0,1,..,q, (1) \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k R_{xx}(m-k), \quad m \geq q+1, (2) \end{cases}$$

若已知$R_{xx}(m)$,q+1<=m<=q+p:

1)由（2）式求模型参数a_k，k=1, 2 ... p;

2）求得a_k后，再由（1）式求b_k，k=1, 2 ... q→解非线性方程

问题：解非线性方程计算量大

改进：求得ak后，用A(z)对x(n)进行滤波；最小二乘法

白噪声中正弦波频率的估计

白噪声中正弦波频率的估计问题和定义

- 问题
  - 估计淹没在噪声中的正弦波的频率与幅度，是信号处理中最有实际应用价值的技术之一。
  - 估计淹没在噪声中的正弦波的频率，也是评价谱估计方法性能的经常采用的谱估计问题。
- 定义

已知长度为N的离散随机时间序列模型为：

$$x(n)=\sum_{i=1}^{M} A_i e^{j(\omega_i n+\varphi_i)}+v(n)\ , \quad n=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

其中：

A_i、ω_i是待估计的未知常数。
φ_i是$[0, 2\pi)$内均匀分布的独立随机变量。
$v(n)$是均值为0，方差为σ^2的高斯白噪声。

试根据这N个随机采样样本估计A_i、ω_i，i=1, 2 ... M。

白噪声中正弦波序列的性质

1）一阶与二阶统计性质（时间平均和集合平均）：

$$E\{x(n)\}=E\{\sum_{i=1}^{M} A_i e^{j(\omega_i n+\varphi_i)}+v(n)\}=0$$

$$\boxed{x(n)=\sum_{i=1}^{M} A_i e^{j(\omega_i n+\varphi_i)}+v(n)}$$

$$\begin{aligned}R_x(n,m)&=E\{x(n+m)x^*(n)\}\\&=E\{[\sum_{i=1}^{M} A_i e^{j[(n+m)\omega_i+\varphi_i]}+v(n+m)][\sum_{k=1}^{M} A_k e^{-j(n\omega_k+\varphi_k)}+v(n)]\}\\&=\sum_{i=1}^{M} P_i e^{jm\omega_i}+\sigma^2\delta(m)\\&=R_x(m)\ , \qquad P_i=|A_i|^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}S_x(\omega)&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x(m)e^{-jm\omega}\\&=\sum_{i=1}^{M} P_i\delta(\omega-\omega_i)+\sigma^2\end{aligned}}$$

结论：

- 白噪声中的正弦波序列为平稳的、遍历的随机过程。
- 白噪声中的正弦波序列的频率与其功率谱密度函数中谱峰的位置相对应。

2）白噪声中正弦波序列与ARMA模型的关系：

以只有一个复正弦波序列的情况为例：

令：$s(n) = A e^{j(\omega n+\varphi)}$

目标：$x(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i x(n\text{-}i) + \sum_{j=0}^{q} b_j u(n\text{-}j)$

$$x(n) = s(n) + v(n)$$

$$\begin{aligned} x(n-1) &= s(n-1) + v(n-1) \\ &= A e^{j[\omega(n-1)+\varphi]} + v(n-1) \\ &= e^{-j\omega} s(n) + v(n-1) \\ &= e^{-j\omega}[x(n) - v(n)] + v(n-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{x(n) = e^{j\omega} x(n-1) + v(n) - e^{j\omega} v(n-1)}$$

AR和MA参数相同的、特殊的ARMA(1,1)模型

特殊性：

1. $H(z) = \dfrac{1-e^{j\omega} z^{-1}}{1-e^{j\omega} z^{-1}}$；
2. 极点$e^{j\omega}$在单位圆上，系统不稳定，不适合用ARMA模型法求解；
3. $v(n) = u(n)$。

➢可以证明：具有M个复正弦波的序列也可以用类似的 ARMA(M, M) 模型来表示。

基于一般谱估计的方法的白噪声中正弦波频率的估计

一般谱估计（周期图方法、AR模型法、修正协方差AR谱估计法）

- 周期图方法
  - 简便。
  - 两个正弦波频率相互很接近时无法分辨。
- AR模型法
  - 分辨率高。
  - 对噪声和正弦波的相位敏感，容易引起谱峰移动。
  - 采用修正协方差法估计AR模型参数对噪声和正弦波相位相对来说敏感性较低，能提供相对稳定的高分辨率的估计结果。
- 修正协方差AR谱估计法

（1）基本思路：

- 利用**AR**模型法的性质，特别是**AR**模型法与线性预测谱估计等效。
- **AR**模型的参数与线性预测滤波器的参数相同：$E(z) = A(z) \times X(z)$。
- 对于平稳的随机时间序列，用时间平均代替集合平均，即：**AR**模型参数的提取化为以下优化问题：

$$\min_{a_k,\ k=1,2\cdots p} \quad E\{[e_p^+(n)]^2\}$$

$$\min_{a_k,\ k=1,2\cdots p} \quad E\{[e_p^+(n)]^2 + [e_p^-(n)]^2\}$$

（2）估计准则：

$$\min_{a_k,\ k=1,2\cdots p} \quad \varepsilon = \sum_{n=p}^{N-1} \{[e_p^+(n)]^2 + [e_p^-(n)]^2\}$$

（3）求解方法：

与**Burg**法不同之处在于直接对**AR**参数求解，即：

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_{pi}} = 0\ , \quad i = 1, 2\ \cdots\ p$$

（5）估计性能：

- 当信噪比很高时，得到的频率估计是无偏估计且方差接近于**Cramer - Rao**极限。
- 当信噪比很低时，估计性能却很差，出现偏倚同时有大的方差。

（6）信噪比低时的改进方法：

- 适当增加**AR**模型的阶数。

基于最大似然法的白噪声中正弦波频率的估计

- 基本思想

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{M} A_{ci}\boldsymbol{e}_i + \mathbf{v} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{M} A_{ci}\boldsymbol{e}_i \sim N(\mathbf{0},\ \sigma^2\mathbf{I})$$

$$\mathbf{v} \sim N(\mathbf{0},\ \sigma^2\mathbf{I})$$

- 在白噪声中含有单个复正弦信号，其频率的最大似然估计，可根据数据的周期图的最大值所在的频率位置求出来
- 当白噪声中有多个复正弦信号时，最大似然估计是非线性方程的最大化求解
- 最大似然估计容易陷入局部极值点，难以得到好的估计结果
- 如果各正弦波的频率能用周期图进行分辨，那么最大似然估计结果将对应于周期图诸最大值所在的频率

基于特征分解（信号子空间，噪声子空间）的白噪声中正弦波频率的估计原理和方法

- 基本思路

研究自相关矩阵

- 信号子空间

基本原理：

利用性质5忽略噪声子空间的影响，而只保留信号子空间中特征向量的信息，这样就能有效地提高信噪比，然后用AR模型法中的Yule - Walker方程组估计AR模型的参数，进而用估计出的功率谱密度求正弦波的频率，就能较好地保证估计精度。

实现方法：

- 用随机采样样本估计p×p阶自相关矩阵$\boldsymbol{R}_x$；
- 求$\boldsymbol{R}_x$的前M个主特征值λ_i和主特征向量$\mathbf{u}_i$，并用下式代替$\boldsymbol{R}_x$：

$$\hat{\boldsymbol{R}}_x=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^{*T}$$

- 用Yule - Walker方程组估计AR(p)模型的参数：

$$\hat{R}_x\widehat{\mathbf{A}}_p=-\hat{\mathbf{r}}_x$$

$$\sum_{i=0}^{p}\widehat{a}_i R_x(i)=\hat{\sigma}^2, \quad \widehat{a}_0=1$$

$$\widehat{\mathbf{A}}=[\widehat{a}_1\ \widehat{a}_2\ \cdots\ \widehat{a}_p]^T, \quad \hat{\mathbf{r}}_x=[\widehat{R}_x(1)\ \widehat{R}_x(2)\ \cdots\ \widehat{R}_x(p)]^T$$

分析：

不管模型阶数p增加到多少，都只用M个特征值和特征向量来估计模型参数。这样就既能增加模型的阶，而又不易产生虚假谱峰（因为提高了信噪比）。

- 噪声子空间

基本原理：

$$\mathbf{e}_i=[1\quad e^{j\omega_i}\quad e^{j2\omega_i}\quad\cdots\quad e^{j(N-1)\omega_i}]^T,$$

$$i=1,2\cdots M\text{构成信号子空间}$$

$$\mathbf{e}_i\perp\mathbf{u}_k, \quad \forall k>M$$

$$<\mathbf{e}_i,\mathbf{u}_k^*>=0, \quad \forall k>M$$

Pisarenko谐波分解（PHD）方法：

- **问题：考虑N=M+1的特殊情况，即采样样本长度比正弦波的数目多1。**
- **原理：**
  - $\boldsymbol{R_x = R_s + R_v}$**，且**$\boldsymbol{R_s}$**的秩为M，** $\boldsymbol{R_v}$**的秩为M+1。**
  - **将估计出的(M+1)×(M+1)阶自相关矩阵**$\boldsymbol{R_x}$**对角化后由前M个主特征向量**$\{u_1, u_2 \ldots u_M\}$**构成信号子空间，而最后一个特征向量**$\{u_{M+1}\}$**构成噪声子空间，即有：**

$$< u_{M+1}, e_i^* > = 0, \quad i=1, 2 \ldots M$$

多信号分类（MUSIC）算法：

- **问题：采样样本长度为N，复正弦波的数目为M，估计正弦波的频率。**
- **原理：**
  - ✓ $\boldsymbol{R_x = R_s + R_v}$**，且**$\boldsymbol{R_s}$**的秩为M，** $\boldsymbol{R_v}$**的秩为N。**
  - ✓ **将估计出的N×N阶自相关矩阵**$\boldsymbol{R_x}$**对角化后由前M个主特征向量**$\{u_1, u_2 \ldots u_M\}$**构成信号子空间，而后N-M个特征向量**$\{u_{M+1}, u_{M+2} \ldots u_N\}$**构成噪声子空间，即有：**

$$< u_j, e_i^* > = 0, \quad i=1, 2 \ldots M, \quad j>M$$

- 总结

✓ 白噪声中复正弦波频率的估计可看作是一个谱估计问题，可用一般的谱估计方法求解，实验表明基于修正的协方差算法的**AR**谱估计方法的效果较好。

✓ 利用高斯白噪声概率密度函数可知的特点可以用最大似然方法求白噪声中复正弦波的频率，结果表明其性能与周期图方法相当。

✓ 通过分析理论上的白噪声中复正弦波信号的自相关函数矩阵，一方面可以利用信号子空间提高复正弦波信号的信噪比，使得运用一般谱估计方法也能得到好的精度；另一方面运用信号与噪声子空间正交的特点导出了两种噪声子空间频率估计算法。