chap 3 线性预测误差滤波

💡 一 掌握线性预测误差滤波的定义和性质(与信号模型间的关系, 最小相位特性,可预测信号)

二 掌握正向和反向预测误差的概念, 正向和反向预测误差的关系，反向预测误差的性质.

三 掌握阶次叠代关系----Livinson-Dubin算法

四 掌握Lattice预测误差滤波器的结构, 反射系数的性质, Lattice法求解反射系数(Burg法).

五 掌握FIR梯度自适应预测器、Lattice梯度自适应预测误差滤波器的原理和计算方法, 了解IIR梯度自适应预测器的原理

线性预测误差滤波

- **定义**

预测值是过去值的线性组合:

$$\hat{x}(n)=\sum_{i=1}^{N}a_i x(n-i) \longrightarrow \text{线性预测}$$

预测系数

预测误差:

$$e(n)=x(n)-\hat{x}(n)=x(n)-\sum_{i=1}^{N}a_i x(n-i) \longrightarrow \text{新息}$$

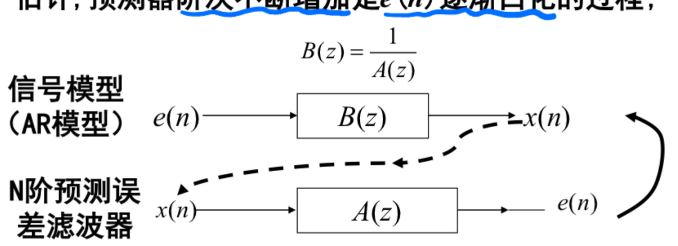
线性预测误差滤波器: $H(z)=1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}=A(z)$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(z)=A(z)} \longrightarrow e(n)$$

- **性质1: 与AR模型的关系**

1) 对于模型阶次已知为N的AR过程, 当正向预测误差按最小均方误差准则求N阶预测误差滤波器预测系数和该AR过程相应的参数有相同的值;

2) 推论：当过程为非自回归时(非AR模型), 或是AR模型的阶次N未知, 则预测误差滤波器提供了对该过程模型的一个估计, 预测器阶次不断增加是$e(n)$逐渐白化的过程;



- **性质2: 最小相位特性**

线性预测误差滤波器A(z)是最小相位的, 即其全部零点在平面的单位园内(包括单位园).

- **性质3: 信号的可预测性**

一个信号是N阶可预测的指

$E_{aN}=0$ 即 $E_a=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|A(e^{j\omega})\right|^2 P_x(e^{j\omega})d\omega=0$

或时间域有

$$x(n)=\sum_{i=1}^{N}a_i x(n-i)$$

唯一满足上述方程的信号是具有线谱特性的信号, 即

$P_x(e^{j\omega})=\sum_{i=1}^{N}|S_i|^2\delta(\omega-\omega_i)$, $|S_i|^2$是ω_i线谱的功率

离散

正向和反向预测误差

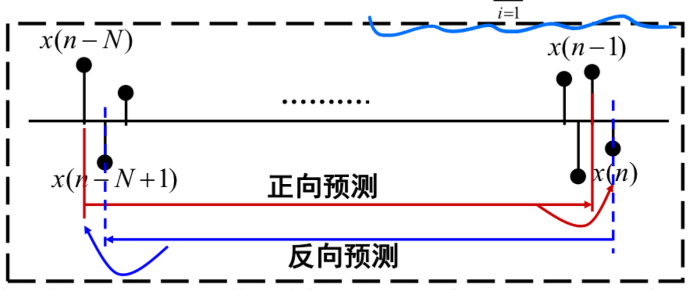
- **概念**

正向预测误差:

$$e_a(n)=x(n)-\hat{x}(n)=x(n)-\sum_{i=1}^{N}a_i x(n-i)$$

反向预测误差:

$$e_b(n)=x(n-N)-\hat{x}(n-N)=x(n-N)-\sum_{i=1}^{N}b_i x(n-N+i)$$



物理意义1:反向预测误差可看着是正向预测时最旧数据丢失所引起的损失。

物理意义2:反向预测误差反映信号在反向时间上的相关性。

- **正向与反向的关系**

对于平稳的输入信号讲,正反向预测误差功率相同,系数也相同,但排列次序是相反的.因此从理论上讲,线性预测误差分析可以从正向来完成,也可以从反向来完成,但是涉及非平稳时,或在过渡区(R_{N+1}可能会不同),差别就会显现.

- **反向的性质**

（1）滤波器是最大相位的（正向的是最小相位）

（2）各阶反向预测误差构成一组不相关（正交）系列，可作为信号空间的一组正交基

Livinson-Dubin算法

Levinson求解方法的基本思想:阶次叠代,即A^j, E^j 用j-1阶的解A^{j-1}, E^{j-1} *递推得到.*

Livinson - Dubin 算法：

求解j=p阶预测误差滤波器，首先计算r (0) , r (1) , . . . , r (p)

1) 初始化, E^0=r (0)

2) j=1

$$a_1^1=k_1=r(1)/r(0)$$

$$E^1=(1-k_1^2)r(0)$$

$$\mathbf{A}^j=\begin{bmatrix}a_1^j\\a_2^j\\\cdots\\a_{j-1}^j\\a_j^j\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}^{j-1}=\begin{bmatrix}a_1^{j-1}\\a_2^{j-1}\\\cdots\\a_{j-1}^{j-1}\end{bmatrix}\ 0\quad \mathbf{B}^{j-1}=\begin{bmatrix}b_{j-1}^{j-1}\\b_{j-2}^{j-1}\\\cdots\\b_1^{j-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{j-1}^{j-1}\\a_{j-2}^{j-1}\\\cdots\\a_1^{j-1}\end{bmatrix}\ -1$$

3) 2=<j<=p递推

反射系数

$$k_j=\frac{1}{E^{j-1}}\left[r(j)-\sum_{i=1=}^{j-1}a_i^{j-1}r(j-i)\right]$$

0-(-kj)

$$a_j^j=k_j \qquad \boxed{b_{j-i}^{j-1}}$$

$$a_i^j=a_i^{j-1}-k_j a_{j-i}^{j-1}, i=1,2,\ldots,j-1$$

$$E^j=(1-k_j^2)E^{j-1}$$

4) p阶的解

给定：$k_1,k_2,\ldots.k_p$；$a_1^1=k_1$

For j=2....,p {

$a_j^j=k_j$

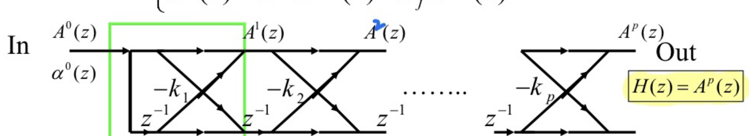
$a_i^j=a_i^{j-1}-k_j a_{j-i}^{j-1}, i=1,2,\ldots,j-1$

$E^j=(1-k_j^2)E^{j-1}$ }

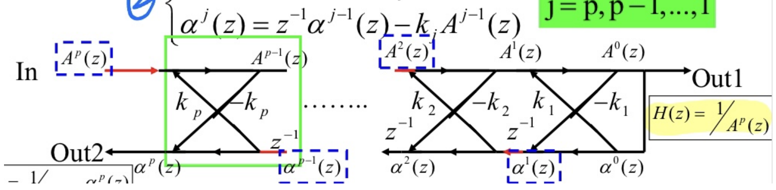
Lattice预测误差滤波器

- **两种结构**

① $$\begin{cases}A^j(z)=A^{j-1}(z)-k_j z^{-1}\alpha^{j-1}(z)\\ \alpha^j(z)=z^{-1}\alpha^{j-1}(z)-k_j A^{j-1}(z)\end{cases}\qquad j=1,2,\ldots,p$$



② $$\begin{cases}A^{j-1}(z)=A^j(z)+k_j z^{-1}\alpha^{j-1}(z)\\ \alpha^j(z)=z^{-1}\alpha^{j-1}(z)-k_j A^{j-1}(z)\end{cases}\qquad j=p,p-1,\ldots,1$$



- **反射系数的性质**

（1）表示了归一化的正反向预测误差的互相关

$$k_N = K_N \big/ E^{N-1} = E[e_a^{N-1}(n)e_b^{N-1}(n-1)] \big/ E^{N-1}$$

（2）｜kj ｜< 1 是Lattice FIR滤波器因果最小相位的充分必要条件

（3）FIR的aj与kj一一对应

- **Burg法求反射系数**

准则：正向和反向的预测误差能量之和最小

已知信号x(L), x(L+1), …, x(U)；

1)初始化 $e_a^0(n)=x(n); e_b^0(n)=x(n)$

2)递推 $1 \le j \le p$

$$k_j^B = \frac{2\sum_{n=L+j}^{U} e_a^{j-1}(n)e_b^{j-1}(n-1)}{\sum_{n=L+j}^{U}\left[e_a^{j-1}(n)\right]^2 + \sum_{n=L+j}^{U}\left[e_b^{j-1}(n-1)\right]^2}$$

$$e_a^j(n) = e_a^{j-1}(n) - k_j^B e_b^{j-1}(n-1)$$

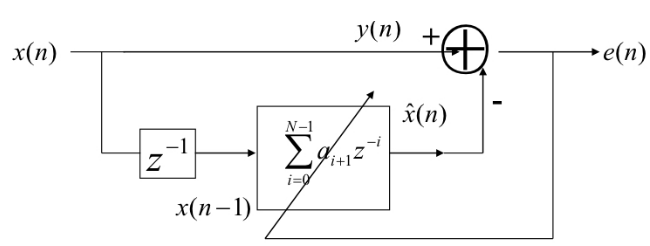
$$e_b^j(n) = e_b^{j-1}(n-1) - k_j^B e_a^{j-1}(n)$$

3)计算a系数(如果需要的话)

$$a_j^j = k_j^B$$

$$a_i^j = a_i^{j-1} - k_j^B a_{j-i}^{j-1}, i = 1,2,\dots, j-1$$

- **FIR梯度自适应**



比较:*参考信号 $x(n) \rightarrow y(n)$

*输出信号 $\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i)$ 输入信号 $X(n-1) \rightarrow X(n)$

*估计误差(预测):$e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$)

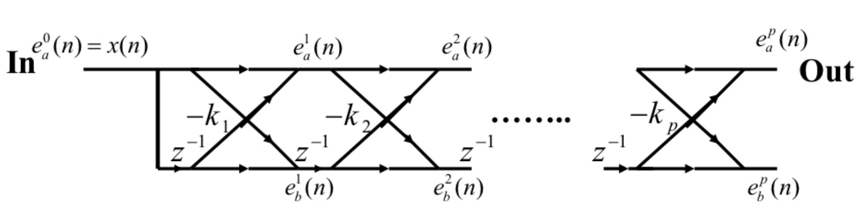
$$\text{原LMS}: e(n+1) = y(n+1) - \mathbf{H}^T(n)\mathbf{X}(n+1) \qquad \Rightarrow \qquad e(n+1) = x(n+1) - \mathbf{A}^T(n)\mathbf{X}(n)$$

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1) \qquad \mathbf{A}(n+1) = \mathbf{A}(n) + \delta e(n+1)\mathbf{X}(n)$$

有关LMS算法的结论均适应FIR自适应预测器

- **Lattice梯度自适应**

Lattice结构递度自适应预测误差滤波器可通过在自适应过程中控制反射系数而保证自适应预测误差滤波器的最小相位特性，从而保证其逆系统的稳定性



$$\begin{cases} e_a^j(n) = e_a^{j-1}(n) - k_j e_b^{j-1}(n-1) \\ e_b^j(n) = e_b^{j-1}(n-1) - k_j e_a^{j-1}(n) \end{cases}$$

k_j是要修正的参数;修正准则是使正反向预测误差最小:

$$\min\left\{[e_a^j(n+1)]^2 + [e_b^j(n+1)]^2\right\}$$

$$k_j(n+1) = k_j(n) - \frac{\delta}{2}\left[e_a^j(n+1)\frac{\partial e_a^j(n+1)}{\partial k_j} + e_b^j(n+1)\frac{\partial e_b^j(n+1)}{\partial k_j}\right]$$

Lattice结构递度自适应预测误差滤波器是级联型结构，各级反射系数的调整是相当于一级FIR自适应滤波，第j阶所用到的数据是：$e_a^{j-1}(n), e_b^{j-1}(n)$