chap 4 短时傅里叶分析

💡 一 理解时频分析概念,了解付里叶变换的时频分析特性

二 理解短时付里叶分析定义、两种解释、性质、时频分析特性

三 掌握离散短时付里叶分析反变换FBS法、OLA法

- 时频分析概念：同时具有时间和频率分辨能力的信号分析方法
- 傅里叶变换的时频分析特性：有精确的频率分辨能力，没有时间分辨能力

优点：

精确的频率分辨能力；

缺点：

- **用傅立叶变换提取信号的频谱需要利用信号的全部时域信息。**
- **傅立叶变换没有反映出信号的非平稳的特性。事实上，非平稳信号的频率成分是随着时间变化的，而傅立叶变换不能反映信号的这种非平稳性质。如：傅立叶变换的积分作用平滑了非平稳信号的突变成分。**

短时傅里叶变换

1. 定义：

连续：

以$g(t)$作为窗函数的窗口傅立叶变换

定义为：

$$WF_g(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t-b) e^{-j\omega t} dt$$

令：
$$g_{\omega,b}(t) = g(t-b) e^{j\omega t}$$

则：
$$\mathrm{WF_g}(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*_{\omega,b}(t) dt$$
$$= \langle f(t), \ g_{\omega,b}(t) \rangle$$

离散：

离散时间STFT定义为

$$X(n,\omega)=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j\omega m}=X_n(e^{j\omega})$$

分析窗

离散STFT定义为

$$X(n,k)=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x(m)w(n-m)e^{-j2\pi km/N}=X_n(e^{j2\pi k/N})$$

2. 两种解释（以离散时间STFT为例）

1) n固定时,离散时间FT 或 DFT

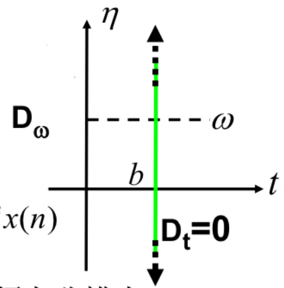
2) ω或k固定时→滤波

（1）傅立叶变换的解释

n固定：

1) $w(n)=\delta(n)\Rightarrow W(e^{j\omega})=1$

$$X_n(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X[e^{j(\omega-\theta)}]e^{-j\theta n}d\theta=e^{-j\omega n}x(n)$$

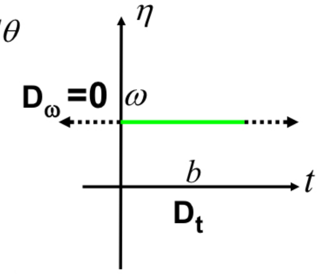


保留了信号的所有时间变化,但不提供任何频率分辨率

w固定：

2) $w(n)=1\Rightarrow W(e^{j\omega})=2\pi\delta(\omega)$

$$\begin{aligned}X_n(e^{j\omega})&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[W(e^{-j\theta})e^{-j\theta n}]X[e^{j(\omega-\theta)}]d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[2\pi\delta(\theta)e^{-j\theta n}]X[e^{j(\omega-\theta)}]d\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta)X[e^{j(\omega-\theta)}]e^{-j\theta n}d\theta\\&=X(e^{j\omega})\end{aligned}$$



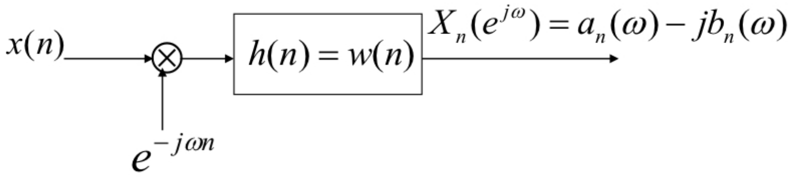
退化为傅立叶变换,不提供任何时间分辨率

（2）滤波器的解释

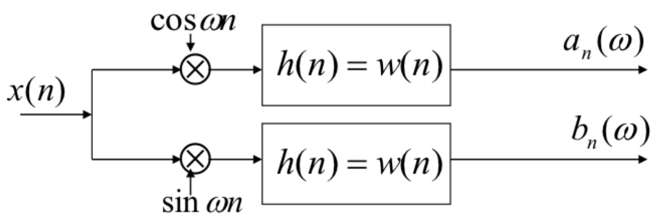
1)第一种形式(低通)

$$X_n(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}[x(m)e^{-j\omega m}]w(n-m)=[x(n)e^{-j\omega n}]*w(n)$$

复数实现形式



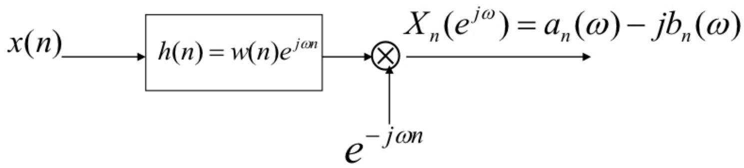
实数实现形式



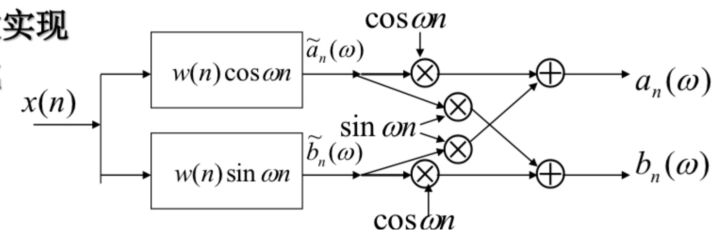
2)第二种形式(带通)

$$X_n(e^{j\omega})=e^{-j\omega n}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}[x(n-m)]\times[w(m)e^{j\omega m}]\right]=e^{-j\omega n}\{\underbrace{\boxed{x(n)*[w(n)e^{j\omega n}]}}_{\tilde{X}(e^{j\omega})=\tilde{a}_n(\omega)-j\tilde{b}_n(\omega)}\}$$

复数实现形式



实数实现形式



3. 性质

从FT角度：离散时间STFT

$$X(n,\omega)=X(n,\omega+2\pi)$$
$$x(n)\text{ real }\leftrightarrow X(n,\omega)=X^*(n,-\omega)$$
$$x(n)\text{ real }\leftrightarrow |X(n,\omega)|=|X(n,-\omega)|$$
$$x(n)\text{ real }\leftrightarrow \arg X(n,\omega)=-\arg X(n,-\omega)$$
$$x(n-n_0)\ \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(n-n_0,\omega)$$

从FT角度：离散STFT

$$X(n,k)=0, k<0 \text{ or } k>N-1$$
$$x(n)\text{ real }\leftrightarrow X(n,k)=X^*(n,N-k)$$
$$x(n)\text{ real }\leftrightarrow |X(n,k)|=|X(n,N-k)|$$
$$x(n)\text{ real }\leftrightarrow \arg X(n,k)=-\arg X(n,N-k)$$
$$x(n-n_0)\ \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}X(n-n_0,k)$$

从Filtering角度：离散时间STFT

$$X(n,0)=x(n)*w(n)$$

$x(n)$长度为N，$w(n)$长度为M，$X(n,\omega)$长度为N+M-1

$X(n,\omega)$的带宽$\le w(n)$的带宽

$X(n,\omega_0)$的频谱中心点是原点

若$x(n), w(n)$为因果信号，$X(n,\omega)$也是因果的

因此，可对 $X(n,\omega)$ 进一步下抽样

4. 时频分析特性

FBS法（Filter Bank Summation，滤波器组求和法）

由离散时间STFT的反变换

↓

离散STFT的反变换

$$x(n)=\left[\frac{1}{2\pi w(0)}\right]\int_{-\pi}^{\pi}X_n(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$\omega=\frac{2\pi}{N}k$ ↓ 离散化

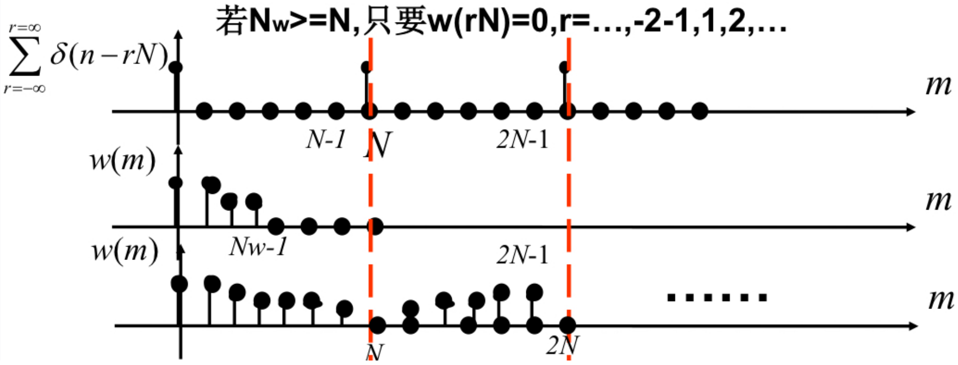
$$y(n)=\left[\frac{1}{Nw(0)}\right]\sum_{k=0}^{N-1}X_n(e^{j\frac{2\pi}{N}k})e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

时域条件：频域条件：

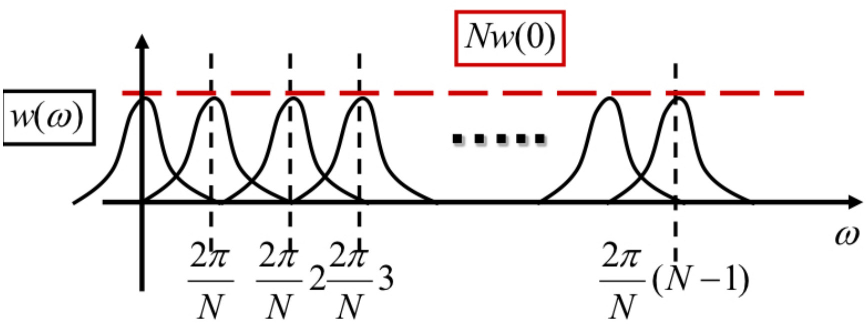
$$w(n)\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}\delta(n-rN)=w(0)\delta(n)$$

若$N_w<N$,上式总成立;

若$N_w>=N$,只要$w(rN)=0$,r=…,-2-1,1,2,…



$$\sum_{k=0}^{N-1}W(\omega-\frac{2\pi}{N}k)=Nw(0)$$



OLA法（Overlap Add，重叠相加法）

由离散时间STFT的反变换

离散STFT的反变换

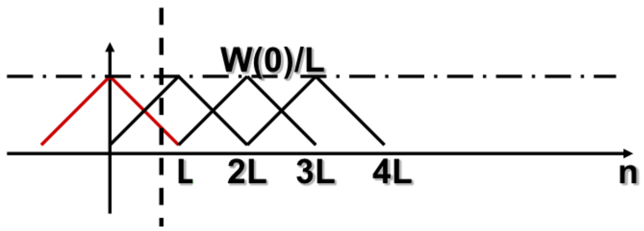
$$x(n)=\left[\frac{1}{2\pi W(0)}\right]\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}X(r,\omega)\right]e^{j\omega n}d\omega$$

採样 $r=pL$

$$y(n)=\left[\frac{L}{W(0)}\right]\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(pL,k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]$$

时域条件：

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}w(pL-n)=\frac{W(0)}{L},\forall n$$



频域条件：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}W\left(\omega-\frac{2\pi m}{L}\right)e^{-j\omega\frac{n}{L}}\Big|_{\omega=0}=W(0)$$