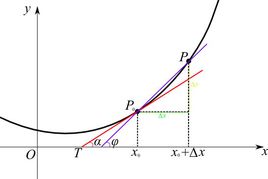
**导数**

导数（Derivative）是[微积分](https://baike.baidu.com/item/%E5%BE%AE%E7%A7%AF%E5%88%86" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)中的重要基础概念。当函数y=f(x)的[自变量](https://baike.baidu.com/item/%E8%87%AA%E5%8F%98%E9%87%8F" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)x在一点x0上产生一个增量Δx时，函数输出值的增量Δy与自变量增量Δx的比值在Δx趋于0时的[极限](https://baike.baidu.com/item/%E6%9E%81%E9%99%90/3564509" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)a如果存在，a即为在x0处的导数，记作f'(x0)或df(x0)/dx。

导数是函数的局部性质。一个函数在某一点的导数描述了这个函数在这一点附近的变化率。如果函数的自变量和取值都是实数的话，函数在某一点的导数就是该函数所代表的曲线在这一点上的[切线](https://baike.baidu.com/item/%E5%88%87%E7%BA%BF" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)[斜率](https://baike.baidu.com/item/%E6%96%9C%E7%8E%87" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)。导数的本质是通过极限的概念对函数进行局部的线性逼近。例如在[运动学](https://baike.baidu.com/item/%E8%BF%90%E5%8A%A8%E5%AD%A6" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)中，物体的[位移](https://baike.baidu.com/item/%E4%BD%8D%E7%A7%BB" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)对于时间的导数就是物体的[瞬时速度](https://baike.baidu.com/item/%E7%9E%AC%E6%97%B6%E9%80%9F%E5%BA%A6" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)。

不是所有的函数都有导数，一个函数也不一定在所有的点上都有导数。若某函数在某一点导数存在，则称其在这一点[可导](https://baike.baidu.com/item/%E5%8F%AF%E5%AF%BC" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)，否则称为不可导。然而，可导的函数一定[连续](https://baike.baidu.com/item/%E8%BF%9E%E7%BB%AD/6532794" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)；不连续的函数一定不可导。

对于可导的函数f(x)，x↦f'(x)也是一个函数，称作f(x)的[导函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)（简称导数）。寻找已知的函数在某点的导数或其导函数的过程称为[求导](https://baike.baidu.com/item/%E6%B1%82%E5%AF%BC" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)。实质上，求导就是一个求极限的过程，导数的四则运算法则也来源于极限的四则运算法则。反之，已知导函数也可以倒过来求原来的函数，即[不定积分](https://baike.baidu.com/item/%E4%B8%8D%E5%AE%9A%E7%A7%AF%E5%88%86" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)。[微积分基本定理](https://baike.baidu.com/item/%E5%BE%AE%E7%A7%AF%E5%88%86%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E5%AE%9A%E7%90%86" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)说明了求原函数与积分是等价的。求导和积分是一对互逆的操作，它们都是微积分学中最为基础的概念。

定义：

设[函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)y=f(x)在点x0的某个[邻域](https://baike.baidu.com/item/%E9%82%BB%E5%9F%9F" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)内有定义，当自变量x在x0处有增量Δx，(x0+Δx)也在该邻域内时，相应地函数取得[增量](https://baike.baidu.com/item/%E5%A2%9E%E9%87%8F" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)Δy=f(x0+Δx)-f(x0)；如果Δy与Δx之比当Δx→0时[极限](https://baike.baidu.com/item/%E6%9E%81%E9%99%90" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)存在，则称函数y=f(x)在点x0处可导，并称这个极限为函数y=f(x)在点x0处的导数记作**①**

IMG_256  即IMG_259

需要指出的是：IMG_260

两者在数学上是等价的。

### 导函数

如果函数y=f(x)在开区间内每一点都可导，就称函数f(x)在区间内可导。这时函数y=f(x)对于区间内的每一个确定的x值，都对应着一个确定的导数值，这就构成一个新的函数，称这个函数为原来函数y=f(x)的[导函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)，记作y'、f'(x)、dy/dx或df(x)/dx，简称导数。

导数是微积分的一个重要的支柱。[牛顿](https://baike.baidu.com/item/%E7%89%9B%E9%A1%BF" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)及[莱布尼茨](https://baike.baidu.com/item/%E8%8E%B1%E5%B8%83%E5%B0%BC%E8%8C%A8" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)对此做出了贡献。 [1]  [2] 

### 几何意义

函数y=f(x)在x0点的导数f'(x0)的几何意义：表示函数曲线在点P0(x0,f(x0))处的切线的斜率（导数的几何意义是该函数曲线在这一点上的切线斜率）。

公式：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **函数** | **原函数** | **导函数** |
| **[常函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%B8%B8%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)**  **（即[常数](https://baike.baidu.com/item/%E5%B8%B8%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)）** | IMG_256  （***C***为常数） | IMG_257 |
| **[指数函数](https://baike.baidu.com/item/%E6%8C%87%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_258  IMG_259 | IMG_260  IMG_261 |
| **[幂函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%B9%82%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_262 | IMG_263 |
| **[对数函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%B9%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_264  IMG_265 | IMG_266  IMG_267 |
| **[正弦函数](https://baike.baidu.com/item/%E6%AD%A3%E5%BC%A6%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_268 | IMG_269 |
| **[余弦函数](https://baike.baidu.com/item/%E4%BD%99%E5%BC%A6%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_270 | IMG_271 |
| **[正切函数](https://baike.baidu.com/item/%E6%AD%A3%E5%88%87%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_272 | IMG_273 |
| **[余切函数](https://baike.baidu.com/item/%E4%BD%99%E5%88%87%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_274 | IMG_275 |
| **[正割函数](https://baike.baidu.com/item/%E6%AD%A3%E5%89%B2%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_276 | IMG_277 |
| **[余割函数](https://baike.baidu.com/item/%E4%BD%99%E5%89%B2%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_278 | IMG_279 |
| **[反正弦函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%8F%8D%E6%AD%A3%E5%BC%A6%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_280 | IMG_281 |
| **[反余弦函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%8F%8D%E4%BD%99%E5%BC%A6%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_282 | IMG_283 |
| **[反正切函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%8F%8D%E6%AD%A3%E5%88%87%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_284 | IMG_285 |
| **[反余切函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%8F%8D%E4%BD%99%E5%88%87%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_286 | IMG_287 |
| **[双曲线函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%8F%8C%E6%9B%B2%E7%BA%BF%E5%87%BD%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)** | IMG_288 | IMG_289 |

### 导数的计算

计算已知函数的导函数可以按照导数的定义运用变化比值的极限来计算。在实际计算中，大部分常见的解析函数都可以看作是一些简单的函数的和、差、积、商或相互复合的结果。只要知道了这些简单函数的导函数，那么根据导数的求导法则，就可以推算出较为复杂的函数的导函数。

### 导数的求导法则

由基本函数的和、差、积、商或相互复合构成的函数的导函数则可以通过函数的求导法则来推导。基本的求导法则如下：

1、求导的线性：对函数的线性组合求导，等于先对其中每个部分求导后再取线性组合（即①式）。

2、两个函数的乘积的导函数：一导乘二+一乘二导（即②式）。

3、两个函数的商的导函数也是一个分式：（子导乘母-子乘母导）除以母平方（即③式）。

4、如果有复合函数，则用链式法则求导。

### 高阶求导

**[高阶导数](https://baike.baidu.com/item/%E9%AB%98%E9%98%B6%E5%AF%BC%E6%95%B0" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)的求法**

1．直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数。

一般用来寻找解题方法。

2．高阶导数的运算法则：

IMG_256

（[二项式定理](https://baike.baidu.com/item/%E4%BA%8C%E9%A1%B9%E5%BC%8F%E5%AE%9A%E7%90%86" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)）

3．间接法：利用已知的高阶导数公式，通过[四则运算](https://baike.baidu.com/item/%E5%9B%9B%E5%88%99%E8%BF%90%E7%AE%97" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)，变量代换等方法。

注意：代换后函数要便于求，尽量[靠拢](https://baike.baidu.com/item/%E9%9D%A0%E6%8B%A2" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)已知公式求出阶导数。

### 口诀

为了便于记忆，有人整理出了以下口诀：

**常为零，幂降次**

**对倒数（***e*为底时直接倒数，a为底时乘以1/lna**）**

**指不变（**特别的，自然对数的指数函数完全不变，一般的指数函数须乘以lna**）**

**正变余，余变正**

**切割方（**切函数是相应割函数（切函数的倒数）的平方**）**

**割乘切，反分式**

### 单调性

⑴若导数大于零，则单调递增；若导数小于零，则单调递减；导数等于零为函数[驻点](https://baike.baidu.com/item/%E9%A9%BB%E7%82%B9/10207453" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)，不一定为[极值点](https://baike.baidu.com/item/%E6%9E%81%E5%80%BC%E7%82%B9" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)。需代入驻点左右两边的数值求导数正负判断单调性。  
　　⑵若已知函数为递增函数，则导数大于等于零；若已知函数为递减函数，则导数小于等于零。

根据[微积分基本定理](https://baike.baidu.com/item/%E5%BE%AE%E7%A7%AF%E5%88%86%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E5%AE%9A%E7%90%86" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)，对于可导的函数，有：

如果函数的导函数在某一区间内恒大于零（或恒小于零），那么函数在这一区间内单调递增（或单调递减），这种区间也称为函数的单调区间。导函数等于零的点称为函数的驻点，在这类点上函数可能会取得极大值或极小值（即极值可疑点）。进一步判断则需要知道导函数在附近的符号。对于满足的一点，如果存在使得在之前区间上都大于等于零，而在之后区间上都小于等于零，那么是一个极大值点，反之则为极小值点。

### 凹凸性

可导函数的凹凸性与其导数的单调性有关。如果函数的导函数在某个区间上单调递增，那么这个区间上函数是向下凹的，反之则是向上凸的。如果二阶导函数存在，也可以用它的正负性判断，如果在某个区间上恒大于零，则这个区间上函数是向下凹的，反之这个区间上函数是向上凸的。曲线的凹凸分界点称为曲线的[拐点](https://baike.baidu.com/item/%E6%8B%90%E7%82%B9" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0/_blank)。