第 38 卷 第 6 期　　力 学 进 展　　Vol. 38 No. 6
2008 年 11 月 25 日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Nov. 25, 2008

复杂网络的同步: 理论、方法、应用与展望*

吕金虎 †

中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所, 北京 100190

摘 要 复杂网络随处可见, 如互联网、电力网络、商业网络、生物神经网络、社会关系网等. 这些复杂网络与我们的生活息息相关, 对它们的深入研究不但会促进许多重要科学分支的发展而且可能引起人类社会生活方式的根本变革. 同步是自然界中广泛存在的一类非常重要的非线性现象, 复杂网络展示了丰富多彩的网络同步现象. 在过去 10 年里, 不同研究领域的学者从不同的角度广泛而深入地开展了复杂网络同步的研究. 本文简要的回顾国内外过去 10 年在复杂网络同步领域的主要研究进展, 包括理论、方法、应用与展望, 试图推进国内复杂网络同步的研究.

关键词 复杂网络, 局部同步, 全局同步, 同步能力

1 引 言

复杂网络几乎随处可见 [1~20], 如万维网、互联网、无线通讯网络、电力网络、大规模集成电路、商业网络、科学文献索引系统、生物神经网络、新陈代谢系统、生物细胞、DNA、CNNs、社会关系网等 [21~40]. 上述这些复杂网络与我们的生活息息相关, 对它们的深入研究不但会促进许多重要科学分支的发展而且可能引起人类社会生活方式的根本变革 [41~60]. 随着信息技术和生命科学的迅猛发展, 复杂网络的研究显得愈来愈重要 [61~83].

传统的, 人们通过经典图论来研究复杂网络. 1960 年, 数学家 Erdös 和 Rényi 提出了随机网络 [27]. 近 10 年来, 由于计算技术的迅猛发展和人们对互联网等大量复杂网络研究的不断深入, 使得人们的计算能力得到很大的提高并且获得了大量的数据信息, 这些都迫使人们不得不重新认识复杂网络 [4,25~28]. 1998 年, Watts 和 Strogatz 发现了复杂网络的小世界 (small-world) 特征 [4,25~28]. 1999 年, Barabási 和 Albert 发现了复杂网络的无标度 (scale-free) 特征 [4,25~28]. 小世界和无标度特性的提出极大地推动了复杂网络研究的发展. 在过去 10 年里, 复杂网络的理论与应用在很多相关领域得到了迅猛发展.

同步是自然界中广泛存在的一类非常重要的非线性现象. 关于两个物理振子同步的研究可以追溯到 1665 年荷兰物理学家 Huygens (惠更斯) 对于两个挂钟同步摆动的有趣现象的观察: 两个钟摆不管从什么不同的初始位置出发, 经过一段时间以后它们总会趋向于同步摆动 [26]. 1680 年, 荷兰旅行家 Kempfer 在泰国湄南河上发现了萤火虫同步闪光的有趣现象. Winfree 将同步问题简化为相位变化问题, 深入研究了多个耦合振子之间的同步问题. Kuramoto 深入探讨了有限个恒等振子的耦合同步问题. Wu 深入研究了各种耦合映象格子 (coupled map lattice, CML) 和细胞神经网络 (celular neural networks, CNN) 的同步问题 [3,30,33]. 上述这些网络的一个典型特征就是具有规则的拓扑结构. 最近, 人们深入探讨了各种小世界和无标度网络的同步问题 [1~4,26,27]. 尽管在过去相当长一段时间里人们并不了解同步现象的内在机理, 但却在物理、化学、生物、工程技术、经济以及社会科学等领域内观察到了各种各样的同步现象 [4,25~28]. 复杂网络作为一个载体展示了

收稿日期: 2008-06-30, 修回日期: 2008-07-22

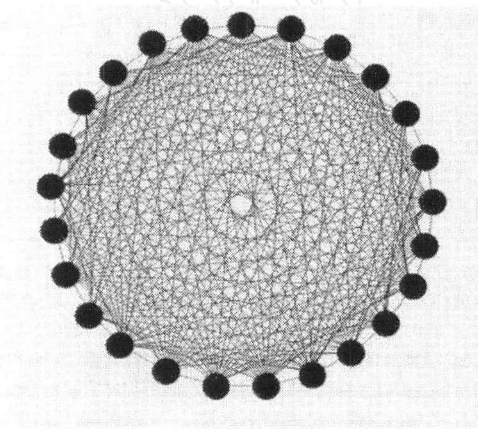
* 国家自然科学基金 (60772158, 60221301), 国家重点基础研究 973 计划 (2007CB310805), 中国科学院知识创新工程重要方向性项目 (KJCX3-SYW-S01)

† E-mail: jhlu@iss.ac.cn

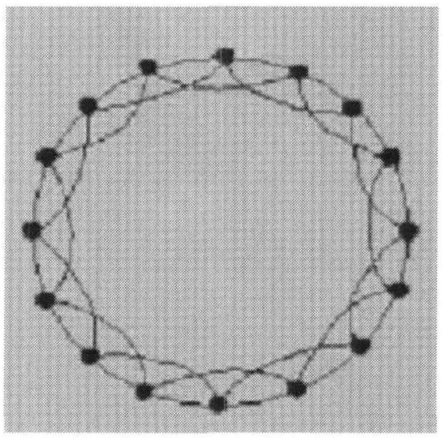
丰富多彩的网络同步现象. 在过去 10 年里, 不同研究领域的学者从不同的角度广泛而深入地开展了复杂网络同步的研究 [25~28].

许多实际的复杂网络在弱耦合情况下仍然展示很强的同步倾向性. 对全连接的网络 (如图 1(a)), 无论耦合强度多小, 若网络充分大, 则一个全局耦合的网络一定能同步. 对最近邻居耦合的网络 (如图 1(b)), 无论耦合强度多大, 若网络充分大, 则一个局部耦合的网络一定不能同步. 事实上, 网络同步主要取决于网络的拓扑结构和节点的动力学. 网络同步可能是有益的, 也可能是有害的. 有益的同步如保密通讯、语言涌现及其发展、组织管理的协调及高效运行; 有害的同步如传输控制协议窗口的增加、英特网或通讯网络中的信息拥塞、不同路由的周期信息可能同步. 今天, 网络同步在核磁共振仪、激光设备、超导材料和通信系统等领域起着非常重要的作用.

本文根据作者自身的研究经历, 力图从动力学与控制论的角度来简要概述国内外过去 10 年在复杂网络同步方向上的主要研究进展, 包括理论、方法、应用与展望. 本文不可避免地包括作者自己的一些主要研究工作 [15~25], 再加上篇幅所限, 因而难免有失偏颇. 第 2 节简要概述几种典型的网络同步的定义; 第 3 节简述网络同步的基本方法与判别准则; 第 4 节简要总结全文并展望一些将来发展的趋势.



(a)



(b)

图 1 两类规则的复杂网络 [1~4]

2 网络同步的定义

网络同步是一种非常普遍而且十分重要的非线性现象. 许多实际的大规模复杂网络在弱耦合情况下仍然展示很强的同步倾向性. 网络同步可以是有益的, 如调和振子的生成、保密通讯、语言的涌现及其发展、组织管理的协调及高效运行等; 网络同步也可以是有害的, 如英特网或通讯网络中的信息拥塞、传输控制协议窗口的增加、周期路由信息的同步. 对于有益的同步, 我们要采取各种技术手段保持网络系统的同步性; 对于有害的同步, 我们要采取各种技术手段破坏网络系统的同步性.

网络同步有很多不同的类别, 如常见的恒等同步、相同步、广义同步等. 下面仅给出我们常用的恒等同步和相同步的定义.

定义 1: 假定 $x_i(t,\boldsymbol{X}_0)(i=1,2,\cdots,N)$ 是复杂动力网络

$$\dot{x}_i=f(x_i)+g_i(x_1,x_2,\cdots,x_N),\quad i=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

的一个解, 其中 $\boldsymbol{X}_0=((x_1^0)^{\mathrm{T}},(x_2^0)^{\mathrm{T}},\cdots,(x_N^0)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{nN}$, $f:\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{R}^n$ 和 $g_i:\boldsymbol{D}\times\cdots\times\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{R}^n(i=1,2,\cdots,N)$ 都是连续可微的, $\boldsymbol{D}\subseteq\boldsymbol{R}^n$, 且满足 $g(x_1,x_2,...,x_n)=0$. 若存在一个非空开集 $\boldsymbol{E}\subseteq\boldsymbol{D}$, 使得对于任意 $x_i^0\in\boldsymbol{E}(i=1,2,\cdots,N)$ 和 $t\geq 0$, $i=1,2,\cdots,N$, 有 $x_i(t,\boldsymbol{X}_0)\in D$ 且

$$\lim_{t\to\infty}\|x_i(t,\boldsymbol{X}_0)-s(t,x_0)\|_2=0,\ i=1,2,\cdots,N \tag{2}$$

其中 $s(t,x_0)$ 是系统 $\dot{x}=f(x)$ 的一个解且有 $x_0\in\boldsymbol{D}$, 则复杂动力网络 (1) 能够实现恒等同步且 $\boldsymbol{E}\times\cdots\times\boldsymbol{E}$ 称为复杂动力网络 (1) 的同步区域.

恒等同步是一类最常见的网络同步现象. 简单的说, 网络恒等同步是指所有的网络节点都趋近于相同的状态. 具体而言, 上述定义中的 $s(t,x_0)$ 是网络的同步状态 (synchronized state), 而 $x_1 = x_2 = \cdots = x_N$ 是网络状态空间中的同步流形 (synchronization manifold).

在人们的日常生活中, 同步现象比比皆是. 例如, 当一场精彩的演出结束时, 刚开始能够听见几个观众零星的掌声, 随后是整个剧场里的观众都一起鼓起掌来. 在整个过程中, 最初的掌声是稀疏的、零乱的、节奏不同的, 但随后经过几秒钟的调整, 所有的观众都会以一致的节奏鼓起掌来. 2000 年, Nature 杂志上发表了一篇论文, 从非线性动力学的观点详细分析了掌声同步产生的机理, 认为周期加倍产生掌声同步 [84]. 2007 年, 李德毅在《中国科学》E 辑上发表一篇论文, 认为周期加倍只是产生掌声同步的一个特例 [85]. 同步在通讯系统、激光系统等当今科学的前沿研究领域存在广泛的应用.

定义 2： 如果两个耦合节点的相位 ϕ_1 和 ϕ_2 之间以一定的比率 $n:m$(n 和 m 均为整数) 锁定, 即 $|n\phi_1 - m\phi_2| \le \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$ 是一个很小的常数, 理想情况下为零. 则我们称两个耦合节点能够实现相位同步.

相位同步 (phase synchronization) 是一类程度相对较弱的同步现象. 当一个网络发生相位同步时, 所有网络节点的相位都会被锁定, 但它们的幅值可能彼此之间相差悬殊. Kuramoto 模型是研究网络相位同步的一个代表性模型.

3 网络同步的基本方法与判别准则

为了深入探讨复杂网络的同步, 我们首先需要建立合适的复杂网络模型. 复杂网络的典型特征是大量的网络节点和复杂的拓扑结构. 在过去 10 年里, 人们发展了一套十分有效的复杂网络的建模方法. 根据复杂网络的建模原理, 复杂网络的模型大致上可以分为概率模型和动力学模型. 概率模型主要包括随机网络模型、小世界网络模型、无标度网络模型、混合演化网络模型等. 动力学模型主要包括连续和离散复杂动力网络模型等. 下面简要介绍几种常用的复杂网络同步的基本方法与判别准则.

3.1 主稳定矩阵方法

考虑下列时不变的复杂动力网络

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\boldsymbol{A}x_j, \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{3}$$

这里 $\dot{x}_i = f(x_i)$ 是网络节点 i 的动力学方程, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$ 是网络节点 i 的状态变量, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是网络的内部耦合矩阵, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{N\times N}$ 是网络的耦合框架矩阵且行和为零.

假定 $c_{ij} = c\bar{c}_{ij}$, 其中 $\bar{c}_{ij}$ 为 0 或 1. 对时不变的网络方程 (3) 在同步解 $s(t)$ 上作线性化, 则得到变分方程

$$\dot{\eta}_i = \boldsymbol{D}f(s)\eta_i + c\sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{ij}\boldsymbol{A}\eta_j, \quad i = 1,2,\cdots,N$$

这里, $\boldsymbol{D}f(s)$ 是 $f(x)$ 的 Jacobi 矩阵在 $x = s(t)$ 处的取值.

令 $\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}\boldsymbol{P}^{-1}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\eta}} = [\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \cdots, \hat{\eta}_N] = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N]\boldsymbol{P}$, 则上述变分方程转换为下列方程组

$$\dot{\hat{\eta}}_i = [\boldsymbol{D}f(s) + c\lambda_i\boldsymbol{A}]\hat{\eta}_i, \; i = 2,3,\cdots,N$$

判断同步流形稳定的一个常用判据就是要求上述方程的横截 Lyapunov 指数全部为负值. 值得注意的是, 这个条件并不是十分严格充分的 [34,35,52]. 在上述方程中, 只有 $\hat{\eta}_i$ 和 λ_i 与 i 相关. 考虑到外部耦合框架矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 的特征值可能为复数, 则网络 (3) 的主稳定方程 (master stability equation) 定义为

$$\dot{y} = [\boldsymbol{D}f(s) + c(\alpha + \mathrm{i}\beta)\boldsymbol{A}]\, y$$

它的最大 Lyapunov 指数 $\mathrm{LE}_{\max}$ 是实变量 α 和 β 的函数, 称为复杂动态网络 (3) 的主稳定函数 (master stability function).

对于给定的耦合强度 c 和任一固定的 $i(i = 2,\cdots,N)$, 在 (α,β) 复平面上可以对应地找到一个固定的点 $c\lambda_i$, 该点所对应的 $\mathrm{LE}_{\max}$ 的 + − 号反映了该特征模态的稳定性 (− 意味着稳定, + 意味着不稳定). 若所有的特征模态都稳定, 则在该耦合强度下整个网络的同步流形是渐近稳定的.

注意, 由于上面采用了线性化方法, 主稳定矩阵方法的结果都是局部的.

3.2 随机网络的同步判别准则

考虑一个由 N 个相同网络节点组成的离散时间 ER (Erdös-Rényi) 随机网络的同步问题. 为简单

起见, 考虑下列离散模型

$$x_i(n+1) = f(x_i(n)) + c\sum_{j=1}^{N}\bar{c}_{ij}f(x_j(n))$$
$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{4}$$

这里 $x_i(n)$ 是第 i 个网络节点在时刻 n 的状态, $f(\cdot)$ 是 logistic 函数, $c > 0$ 是整个网络的耦合强度, 网络节点之间的连接概率为 $0 < p < 1$, $\bar{c}_{ij} = \dfrac{1}{k_i}\hat{c}_{ij}$. 其中, k_i 是第 i 个网络节点的连接度数, 网络的内耦合矩阵定义如下

$$\hat{c}_{ij} = \begin{cases} -k_i, & i = j \\ 1, & i \text{ 连接 } j \\ 0, & i \text{ 与 } j \text{ 无连接} \end{cases}$$

根据文献 [36], 若条件

$$\frac{1-e^{-\mu}}{\lambda_2} < c < \frac{1+e^{-\mu}}{\lambda_N}$$

成立, 则上述 ER 随机网络的同步流形是稳定的, 这里 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \lambda_N$ 是网络 (4) 的耦合矩阵的特征根, μ 是 $f(\cdot)$ 的最大 Lyapunov 指数. 当 N 较大时, 这个条件近似为

$$\frac{1-e^{-\mu}}{1-2\sqrt{(1-p)/(Np)}} < c < \frac{1+e^{-\mu}}{1-2\sqrt{(1-p)/(Np)}}$$

(1) 当 $p \to 1$, 上述条件变为 $c > 1 - e^{-\mu}$, 这与全局耦合网络的结论是一致的;

(2) 当 $0 < p < 1$ 固定且 $N \to \infty$, 上述条件变为 $c > 1 - e^{-\mu}$, 这与全局耦合网络的结论也是一致的;

(3) 当 $N >> k = Np$ 且 $c = 1$, 上述条件变为 $k > 4e^{2\mu}$, 这表明网络的同步与网络的尺寸无关, 即只要耦合强度足够大, 这种 ER 随机网络总能达到网络同步.

由于随机网络的生成依赖于概率, 许多结论很难用确定性的公式明确地表达出来, 通常只能用随机分析的工具进行理论分析或用数值仿真来验证. 图 2 给出了 N 很大的情况下, 具有不同连接概率 p 的 ER 随机网络实现网络同步时所对应的耦合强度.

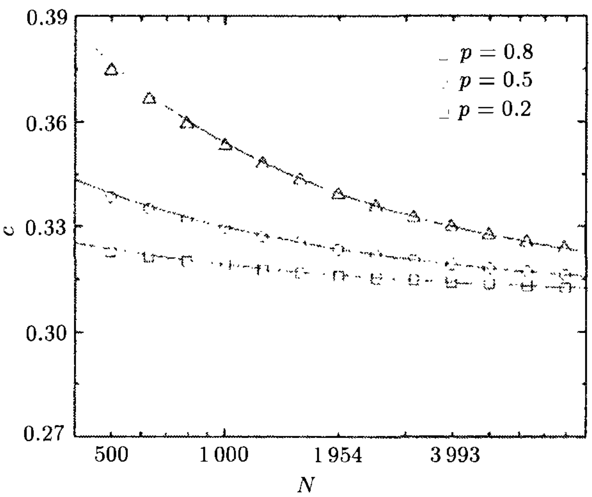


图 2 不同概率 p 对应的耦合强度 c 随网络规模 N 的变化曲线图 (文献 [36])

3.3 小世界网络的同步判别准则

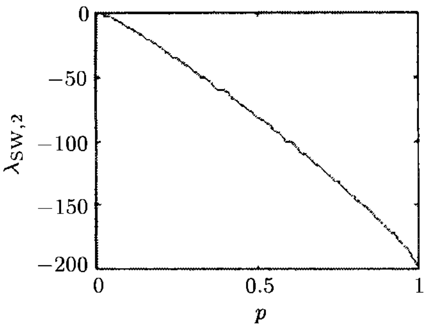
下面考虑传统的 NW 小世界网络的同步问题. 因为小世界网络的生成依赖于概率, 许多结论很难用确定性的公式明确地表达出来, 通常只能用随机分析的工具进行理论分析或用数值仿真来验证. 假定 $c_{ij} = c\bar{c}_{ij}$, 则网络模型 (3) 变为

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c\sum_{j=1}^{N}\bar{c}_{ij}\boldsymbol{A}x_j, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{5}$$

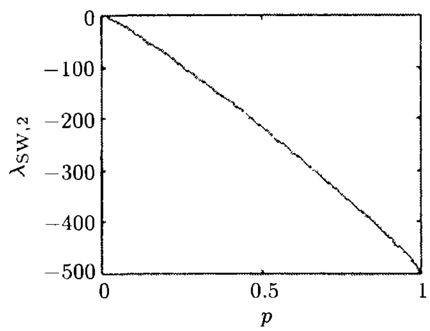
在上述网络模型中, 以概率 p 加边的过程相对应的网络耦合矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 中元素以概率 p 取值为 1. 记网络的第二大特征根为 $\lambda_{\mathrm{SW},2} = \lambda_{\mathrm{SW},2}(p, N)$. 文献 [46] 详细讨论了小世界网络的同步能力, 数值结果如图 3 所示. 主要结论总结如下:

(1) 对于给定的耦合强度 $c > 0$, 假定有足够多的网络节点数 ($N > \bar{d}/c$), 若概率 p 大于一定的阈值 $\bar{p}(\bar{p} \leq p \leq 1)$, 则该网络就能最终达到同步;

(2) 在加边概率相同的情况下, 规模越大的小世界网络的同步能力越强.



(a) $N=200$



(b) $N=500$

图 3　$\lambda_{\mathrm{SW},2}(p,N)$ 随概率 p 变化的曲线图 (文献 [46])

3.4　时变离散复杂动力网络的同步判别准则

2006 年, Earn 和 Levin 提出了一个简单的时不变的离散生态网络模型. 2007 年, 我们提出了一个基本的时变离散复杂网络模型[84]. 假定网络节点的动力学方程为: $x(n+1)=f(x(n))$, 则时变离散复杂网络的动力学方程为

$$x_i(n+1)=f(x_i(n))+\sum_{j=1}^{N}c_{ij}(n)f(x_j(n)) \qquad (6)$$

这里 $i=1,2,\cdots,N$, $n=0,1,\cdots$, $\boldsymbol{C}(n)=(c_{ij}(n))_{N\times N}$ 是网络的耦合框架矩阵且满足条件

$$\sum_{j=1}^{N}c_{ij}(n)=0,\quad i=1,2,\cdots,N,\quad n=0,1,\cdots \qquad (7)$$

离散复杂网络模型 (6) 是一个基本的离散网络模型, 在这个模型的基础上我们可以派生出很多类似的模型, 如考虑时延、脉冲、切换等各种因素.

近来, 我们深入探讨了时变离散复杂动力网络 (6) 的同步. 主要结果如下:

定理 1[86]: 假定 H1 成立且 $\boldsymbol{C}(n)(n=1,2,\cdots)$ 是一个 $N\times N$ 的行和为 0 的实矩阵. 假定存在一个非奇异的实矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(n)$, 满足 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(n)\boldsymbol{C}(n)\boldsymbol{\Phi}(n)=\mathrm{diag}\{\lambda_1(n),\lambda_2(n),\cdots,\ \lambda_N(n)\}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(n)\boldsymbol{\Phi}(n+1)=\mathrm{diag}\{\beta_1(n),\beta_2(n),\cdots,\beta_N(n)\}$. 则时变的离散复杂动力网络 (6) 能够实现局部渐近同步的充分必要条件是线性系统

$$\xi_i(n+1)=[\lambda_i(n)\beta_i(n)\boldsymbol{D}_{s(n)}\boldsymbol{F}]\xi_i(n)$$
$$i=2,3,\cdots,N$$

在零解渐近稳定.

假定 H1[86] 成立且 $\boldsymbol{C}$ 是一个可对角化的 $N\times N$ 的行和为 0 的实矩阵, 则有

(1) 时不变的离散复杂动力网络

$$x_i(n+1)=f(x_i(n))+\sum_{j=1}^{N}c_{ij}f(x_j(n))$$
$$i=1,2,\cdots,N$$

能够实现局部渐近同步的充分必要条件是线性系统

$$\xi_i(n+1)=[\lambda_i\boldsymbol{D}_{s(n)}\boldsymbol{F}]\xi_i(n),\ i=2,3,\cdots,N$$

在零解渐近稳定.

(2) 若 $r\lambda_{\max}<1$, 则时不变的离散复杂动力网络能够实现局部渐近同步.

假定 H1[86] 成立, $\boldsymbol{C}(t)$ 是一个 $N\times N$ 的行和为 0 的实矩阵且可通过一个常数矩阵对角化. 若 $|\lambda_i(n)|(i=2,3,\cdots,N)$ 对于任意的 $t\geq t_0$ 和 $|\lambda_i(t_0)|<e^{-\mu_0}$ 都是非递增的函数, 则时变的离散复杂动力网络 (1) 能够实现局部渐近同步, 其中 μ_0 是网络节点动力系统的最大 Lyapunov 指数.

上述定理和推论中的参数详见参考文献 [86]. 事实上, 上述定理的主要思想是将一个高维系统 (nN 维) 的稳定性问题转化为很多个 ($N-1$ 个) 低维系统的稳定性问题.

3.5　时变连续复杂动力网络的同步判别准则

2005 年, 为了刻画实际世界的复杂网络, 我们引入了一个广义时变的复杂动力网络模型, 动力学方程如下

$$\dot{x}_i(t)=f(x_i(t))+\sum_{j=1}^{N}c_{ij}(t)\boldsymbol{A}(t)x_j(t) \qquad (8)$$

这里 $i=1,2,\cdots,N$, $\boldsymbol{x}_i(t)=(x_{i1}(t),x_{i2}(t),\cdots,x_{in}(t))^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n$ 是网络节点 i 的状态变量, $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是时刻 t 时网络的内部耦合

矩阵, $C(t)=(c_{ij}(t))_{N\times N}$ 是时刻 t 时网络的耦合框架矩阵. 这里 $c_{ij}(t)$ 定义如下: 若 t 时刻从网络节点 i 到网络节点 $j(j\neq i)$ 之间存在着连接, 则 t 时刻的耦合强度 $c_{ij}(t)\neq 0$; 否则, t 时刻的耦合强度 $c_{ij}(t)=0(j\neq i)$. 另外, 耦合框架矩阵 $C(t)=(c_{ij}(t))_{N\times N}$ 满足下列条件

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij}(t)=0,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{9}$$

显然, 若 $C(t)$ 是一个 0~1 的对称矩阵且 $A(t)$ 是一个 0~1 的对角矩阵, 则连续时变的复杂网络 (8) 变成一个时不变的一致连接的动力网络模型. 汪小帆和陈关荣 [27] 深入探讨了这个网络模型的同步. 这里, 时不变的一致连接的动力网络模型是广义时变复杂动力网络模型 (8) 的一个特例. 值得注意的是我们并没有假定矩阵 $C(t)$ 的对称性和非对角元素的非负性, 仅仅假定矩阵 $C(t)$ 是不可约的.

若矩阵 $A(t)$、$C(t)$ 均为常值矩阵, 则时变的复杂动力网络 (8) 变为时不变的复杂动力网络 (3).

连续时变的复杂网络模型 (8) 是一个基本的连续网络模型, 在这个模型的基础上我们可以派生出很多类似的连续模型, 如考虑时延、脉冲、切换等各种因素.

过去几年, 我们深入研究了广义时变连续复杂动力网络 (8) 的同步. 主要结果概括如下:

假设 $s(t)$ 为网络的同步状态且满足条件 $\dot{s}(t)=f(s(t))$, 其中 $f(\cdot)$ 为光滑可微的混沌系统. 令 $\xi_i(t)=x_i(t)-s(t)$(这里不失一般性, 令 $x_1(t)=s(t)$, 则得到 $\xi_1(t)=x_1(t)-s(t)\equiv 0$). 将 $\xi_i(t)$ 代入网络 (8) 中得到

$$\dot{\xi}_i(t)=f(\xi_i(t)+s(t))-f(s(t))+\sum_{j=2}^{N} c_{ij}(t)\boldsymbol{A}(t)\xi_j,\ i=2,\cdots,N$$

再令扩充的向量 $\bar{\boldsymbol{\xi}}(t)=\left[\xi_2^{\mathrm T}(t),\xi_3^{\mathrm T}(t),\cdots,\xi_N^{\mathrm T}(t)\right]^{\mathrm T}\in \boldsymbol{R}^{n(N-1)}$, 则上述误差系统可以简写成一个扩充的向量方程 $\dot{\bar{\boldsymbol{\xi}}}(t)=\boldsymbol{F}(t,\bar{\xi}(t))$. 记函数 $\boldsymbol{F}(t,\bar{\boldsymbol{\xi}})$ 在平衡点 $\bar{\boldsymbol{\xi}}=0$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{DF}(t,0)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}f(s(t))+c_{22}(t)\boldsymbol{A}(t) & a_{23}(t)\boldsymbol{A}(t) & \cdots & a_{2N}(t)\boldsymbol{A}(t)\\ a_{32}(t)\boldsymbol{A}(t) & \boldsymbol{D}f(s(t))+c_{33}(t)\boldsymbol{A}(t) & \cdots & a_{3N}(t)\boldsymbol{A}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{N2}(t)\boldsymbol{A}(t) & a_{N3}(t)\boldsymbol{A}(t) & \cdots & \boldsymbol{D}f(s(t))+c_{NN}(t)\boldsymbol{A}(t)\end{pmatrix}$$

则下面两个定理分别给出了时变复杂动态网络 (8) 同步的充分条件和充要条件.

定理 2[21~23]: 考虑混沌的时变复杂动态网络 (8). 假定 $\boldsymbol{F}:\Omega\rightarrow \boldsymbol{R}^{n(N-1)}$ 在正不变集 $\Omega=\left\{x\in \boldsymbol{R}^{n(N-1)}:\|x\|_2<r\right\}$ 上连续可微. 若存在两个对称的正定矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in \boldsymbol{R}^{n(N-1)\times n(N-1)}$, 满足条件

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{DF}(t,0))+(\boldsymbol{DF}(t,0))^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\le -\boldsymbol{Q}\le -c_1\boldsymbol{I}$$

以及

$$(\boldsymbol{G}(t,y)-\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{S}(t)))^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{G}(t,y)-\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{S}(t))\le c_2\boldsymbol{I}<c_1\boldsymbol{I}$$

则时变复杂动态网络 (8) 的同步流形是指数稳定的. 这里 $c_1>0$ 且

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y})=\mathrm{diag}\left\{\boldsymbol{D}f(y_1),\cdots,\boldsymbol{D}f(y_{N-1})\right\}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=(y_1^{\mathrm T}(t),\cdots,y_{N-1}^{\mathrm T}(t))^{\mathrm T}$$

$$y_i(t)=s(t)+O_i(t)\xi_{i+1}(t),\quad 1\le i\le N-1,\ 0\le O_i(t)\le 1$$

$$\boldsymbol{S}(t)=(s^{\mathrm T}(t),\cdots,s^{\mathrm T}(t))^{\mathrm T}\in \boldsymbol{R}^{n(N-1)}$$

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{S}(t)\in\Omega$$

定理 3[21~23]: 考虑混沌的时变复杂动态网络 (8). 假设 $\boldsymbol{F}:\Omega\rightarrow \boldsymbol{R}^{n(N-1)}$ 在正不变集 $\Omega=\left\{x\in \boldsymbol{R}^{n(N-1)}:\|x\|_2<r\right\}$ 上连续可微, 且对于任意的时间 t, $\boldsymbol{F}(t,0)=0$, Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{DF}(t,x)$ 在 Ω 上有界、Lipschitz 连续、关于时间 t 是一致的. 若存在一个有界的非奇异实矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$, 满足下列条件

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)(\boldsymbol{C}(t))^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{diag}\{\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_N(t)\}$$

以及

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{diag}\{\beta_1(t),\beta_2(t),\cdots,\beta_N(t)\}$$

则网络 (8) 的同步流形是指数稳定的充分必要条件是线性时变系统 $\dot{w}=[\boldsymbol{D}f(s(t))+\lambda_k(t)\boldsymbol{A}(t)-\beta_k(t)\boldsymbol{I}_N]w$, $k=2,\cdots,N$ 的零解都是指数稳定的.

类似的，假设 $f(\cdot)$ 为光滑可微的非混沌系统. 令 $\eta_i(t)=x_i(t)-s(t)$. 将 $\eta_i(t)$ 代入网络 (8) 中得到

$$\dot{\eta}_i(t)=f(\eta_i(t)+s(t))-f(s(t))+\sum_{j=1}^{N}c_{ij}(t)\boldsymbol{A}(t)\eta_j,\quad i=1,\cdots,N$$

再令扩充的向量 $\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)=\left[\eta_1^{\mathrm{T}}(t),\eta_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\eta_N^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{nN}$, 则上述误差系统可以简写成一个扩充的向量方程 $\dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}}(t)=\bar{\boldsymbol{F}}(t,\bar{\boldsymbol{\eta}}(t))$. 记函数 $\bar{\boldsymbol{F}}(t,\bar{\boldsymbol{\eta}})$ 在平衡点 $\bar{\boldsymbol{\eta}}=0$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{F}}(t,0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}f(s(t))+c_{11}(t)\boldsymbol{A}(t) & a_{12}(t)\boldsymbol{A}(t) & \cdots & a_{1N}(t)\boldsymbol{A}(t)\\ a_{21}(t)\boldsymbol{A}(t) & \boldsymbol{D}f(s(t))+c_{22}(t)\boldsymbol{A}(t) & \cdots & a_{2N}(t)\boldsymbol{A}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{N1}(t)\boldsymbol{A}(t) & a_{N2}(t)\boldsymbol{A}(t) & \cdots & \boldsymbol{D}f(s(t))+c_{NN}(t)\boldsymbol{A}(t)\end{pmatrix}$$

则下面两个定理分别给出了时变复杂动态网络 (8) 同步的充分条件和充要条件.

定理 4[21~23]: 考虑非混沌的时变复杂动态网络 (8). 假定 $\bar{\boldsymbol{F}}:\bar{\Omega}\to\boldsymbol{R}^{nN}$ 在正不变集 $\bar{\Omega}=\left\{x\in\boldsymbol{R}^{nN}:\|x\|_2<r\right\}$ 上连续可微. 若存在两个对称的正定矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}},\bar{\boldsymbol{Q}}\in\boldsymbol{R}^{nN\times nN}$, 满足条件

$$\bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{F}}(t,0))+(\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{F}}(t,0))^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\le-\bar{\boldsymbol{Q}}\le-c_1\boldsymbol{I}$$

以及

$$\left(\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{y})-\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{S}(t))\right)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}+\bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{y})-\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{S}(t))\le c_2\boldsymbol{I}<c_1\boldsymbol{I}$$

则时变复杂动态网络 (8) 的同步流形是指数稳定的. 这里 $c_1>0$ 且

$$\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{\boldsymbol{y}})=\mathrm{diag}\left\{\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{F}}(y_1),\cdots,\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{F}}(y_N)\right\}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}(t)=(y_1^{\mathrm{T}}(t),\cdots,y_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$$

$$y_i(t)=s(t)+\theta_i(t)\xi_{i+1}(t),\quad 1\le i\le N-1, 0\le\theta_i(t)\le 1$$

$$\bar{\boldsymbol{S}}(t)=(s^{\mathrm{T}}(t),\cdots,s^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{nN}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}-\bar{\boldsymbol{S}}(t)\in\bar{\Omega}$$

定理 5[21~23]: 考虑非混沌的时变复杂动态网络 (8). 假设 $\bar{\boldsymbol{F}}:\bar{\Omega}\to\boldsymbol{R}^{nN}$ 在正不变集 $\bar{\Omega}=\left\{x\in\boldsymbol{R}^{nN}:\|x\|_2<r\right\}$ 上连续可微, 且对于任意的时间 t, $\bar{\boldsymbol{F}}(t,0)=0$, Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{F}}(t,x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上有界、Lipschitz 连续、关于时间 t 是一致的. 若存在一个有界的非奇异实矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$, 满足下列条件

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)(\boldsymbol{C}(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{diag}\{\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_N(t)\}$$

以及

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{diag}\{\beta_1(t),\beta_2(t),\cdots,\beta_N(t)\}$$

则网络 (8) 的同步流形是指数稳定的充分必要条件是线性时变系统

$$\dot{w}=[\boldsymbol{D}f(s(t))+\lambda_k(t)\boldsymbol{A}(t)-\beta_k(t)\boldsymbol{I}_N]w, k=2,\cdots,N$$

的零解都是指数稳定的.

定理 2~5 将广义连续时不变的复杂动态网络 (3) 的同步稳定性理论推广到广义连续时变的复杂动态网络 (8) 的同步情形, 并指出了时变复杂动态网络 (8) 的同步完全由内部耦合矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$、外部耦合框架矩阵 $\boldsymbol{C}(t)$ 的特征根 $\lambda_k(t)(k=2,\cdots,N)$ 及其对应特征向量的函数 $\beta_k(t)(k=2,\cdots,N)$ 共同决定的. 这里的外部耦合框架矩阵 $\boldsymbol{C}(t)$ 并没有严格的限制, 如对称性和非对角线元素的非负性, 仅要求它为耗散耦合矩阵. 而时不变复杂动态网络 (3) 的同步完全由内部耦合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和外部耦合框架矩阵 $\boldsymbol{C}(t)$ 的特征根 $\lambda_k(k=2,\cdots,N)$ 所决定.

另外, 我们还可以用图论的方法来判定一个网络同步流形的稳定性 [4,25~28]. 值得注意的是, 基于连接图的网络同步的判据并不需要计算 Lyapunov 指数和耦合框架矩阵的特征根. 这样对于网络结构不规则或耦合矩阵特征根不易求得的情况下, 我们也可以得到网络同步的全局 (不是局部) 稳定的充分条件. 基于连接图的网络同步判据的另外一个突出的优点就是可以给出不同边的不同耦合强度的下界, 且比上面介绍的 Lyapunov 函数方法较为不保守.

4 总结与展望

本文简要的回顾了过去 10 年里复杂网络同步的若干基本理论与方法, 由于论文的篇幅所限, 不

可避免的存在某些遗漏, 读者可以参考其他相关综述论文 [1~4,24~28,42,47,54]. 最后, 作者根据个人多年来从事复杂网络同步研究的体会, 简要的展望该领域一些必然的发展趋势, 仅供读者参考.

(1) 复杂网络的拓扑结构与复杂网络的同步能力之间的内在关系. 复杂网络的结构和行为的关系这是一个永恒的研究课题. 过去 10 年里, 这方面的工作取得了很大的进展, 如小世界和无标度复杂网络同步能力的研究; 但很多基本的问题仍然没有解决, 如复杂网络的社团结构与同步能力之间的内在联系.

(2) 复杂网络的节点动力学与复杂网络的同步能力之间的内在关系. 复杂网络的节点动力学和行为的关系仍然是一个十分具有挑战性的研究课题. 过去 10 年里, 几乎所有的研究工作都假定复杂网络具有相同的节点. 但事实上, 绝大多数实际的复杂网络的节点之间或多或少的存在一些差异性或误差, 并不完全相同, 如电力网络. 幸运地, 对于非恒等节点的复杂网络同步的研究已经引起了很多研究人员的高度关注, 如最近人们研究的串同步问题.

(3) 复杂网络的同步能力的优化与调控. 对于一个给定的复杂网络, 如何优化或控制网络的同步能力是一个具有广阔应用前景的挑战性课题. 在过去 10 年里, 人们深入探讨了小世界和无标度网络的同步鲁棒性和脆弱性. 特别地, 人们近来开始深入探讨能否通过网络拓扑的微小改变, 如增加、改变或者减少若干条连接边数, 来大大增强整个网络同步控制的效果. 由于复杂网络的一个典型特征就是拥有大量的网络节点, 从某种意义上说, 我们通常不可能通过控制所有的网络节点来实现网络同步. 但我们能否通过控制少量的关键节点来实现网络同步? 这就是复杂网络的牵制控制与同步问题.

(4) 复杂网络同步的应用. 关于复杂网络同步的应用问题有很多, 但过去 10 年里人们还是主要侧重于理论研究, 离真正的实际应用还有相当长一段路需要走. 毫无疑问, 复杂网络同步的应用和复杂网络的同步能力的优化与调控有着非常密切的关系, 其中同步能力的优化与调控是实现网络同步应用的一个技术手段. 今后这方面工作的一个重点就是如何将已有的理论成果应用于实际的复杂网络系统为人类社会服务.

参 考 文 献

1 Strogatz S H. Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order. New York: Hyperion, 2003

2 Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, et al. The synchronization of chaotic systems. *Phys Rep*, 2002, 366(1-2): 1~101

3 Wu C W. Synchronization in Coupled Chaotic Circuits and Systems. Singapore: World Scientific, 2002

4 Wang X F, Chen G. Complex networks: small-world, scale-free, and beyond. *IEEE Circuits Syst Mag*, 2003, 3(1): 6~20

5 Sorrentino F, Ott E. Adaptive synchronization of dynamics on evolving complex networks. *Phys Rev Lett*, 2008, 100(11): 114101

6 Nair S, Leonard N E. Stable synchronization of mechanical system networks. *SIAM J Contr Optimization*, 2008, 47(2): 661~683

7 Li Q S, Gao Y. Control of spiking regularity in a noisy complex neural network. *Phys Rev E*, 2008, 77(3): 036117

8 Wang Q Y, Lu Q S, Chen G. Spatio-temporal patterns in a square-lattice Hodgkin- Huxley neural network. *Europ Phys J B*, 2006, 54(2): 255~261

9 Shi X, Lu Q S, Chen G R. Anti-phase synchronization of inhibitorily coupled neurons. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2008, 17(12): 4355~4364

10 Rentel C H, Kunz T. A mutual network synchronization method for wireless ad hoc and sensor networks. *IEEE Trans Mobile Comput*, 2008, 7(5): 633~646

11 Yin C Y, Wang B H, Wang W X, et al. Geographical effect on small-world network synchronization. *Phys Rev E*, 2008, 77(2): 027102

12 Belykh I V, Belykh V N, Hasler M. Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling. *Physica D*, 2004, 195: 188~206

13 Zhou J, Chen T P. Synchronization in general complex delayed dynamical networks. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2006, 53(3): 733~744

14 Moreno Y, Pacheco A F. Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *Europhys Lett*, 2004, 68: 603~609

15 Yu W, Cao J, Lü J. Global synchronization of linearly hybrid coupled networks with time-varying delay. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2008, 7(1): 108~133

16 Zhou J, Lu J, Lü J. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network. *Automatica*, 2008, 44(4): 996~1003

17 Zhang Q, Lu J, Lü J, Tse C. K. Adaptive feedback synchronization of a general complex dynamical network with delayed nodes. *IEEE Trans. Circuits Syst II*, 2008, 55(2): 183~187

18 Liu J, Lü J, He K Q, et al. Characterizing the structure quality of general complex software networks via statistical propagation dynamics. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2008, 18(2): 605~613

19 Liu J, Lu J, Lü J. Exploring the synchronizability of small-world networks via different semi-random strategies. *Dyn Continuous Discret Impul Syst Ser B*, 2007, 14(S6): 31~38

20 Zhou J, Lu J A, Lü J. Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical network. *IEEE Trans Automat Contr*, 2006, 51(4): 652~656

21 Lü J, Chen G. A time-varying complex dynamical network models and its controlled synchronization criteria. *IEEE Trans Automat Contr*, 2005, 50(6): 841~846

22 Lü J, Yu X H, Chen G, Cheng D Z. Characterizing the synchronizability of small-world dynamical networks. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2004, 51(4): 787~796

23 Lü J, Yu X H, Chen G. Chaos synchronization of general complex dynamical networks. *Physica A*, 2004, 334(1-2): 281～302

24 Lü J, Leung H, Chen G. Complex dynamical networks: Modelling, synchronization and control. *Dyn Continuous Discret Impul Syst Ser B*, 2004, 11: 70～77

25 Lü J. Mathematical models and synchronization criterions of complex dynamical networks. *Syst Eng Theor Pract*, 2004, 24(4): 17～22

26 陈关荣. 网络同步. 见: 郭雷, 许晓鸣主编. 复杂网络. 上海: 上海科学技术出版社, 2006. 67～95

27 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络 —— 理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 2006

28 赵明, 汪秉宏, 蒋品群, 周涛. 复杂网络动力系统同步的研究进展. 物理学进展, 2005, 25(3): 273～295

29 Wang X F, Chen G. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2002, 49(1): 54～62

30 Wu C W. Synchronization in networks of nonlinear dynamical systems via a directed graph. *Nonlinearity*, 2005, 18: 1057～1064

31 Zhao M, Zhou T, Wang B H, Wang W X. Enhance synchronizability by small structural perturbations. *Phys Rev E*, 2005, 72: 057102

32 Wei G W, Zhan M, Lai C H. Tailoring wavelets for chaos control. *Phys Rev Lett*, 2002, 89(28): 284103

33 Wu C W. Perturbation of coupling matrices and its effect on the synchronizability in arrays of coupled chaotic systems. *Phys Lett A*, 2003, 319: 495～503

34 Pecora L M, Carroll T L. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 2109～2112

35 Barahona M, Pecora L M. Synchronization in small-world systems. *Phys Rev Lett*, 2004, 89(5): 054101

36 Gong B, Yang L, Yang K. Synchronization on Erdos-Renyi network. *Phys Rev E*, 2005, 72: 037101

37 Kaneko K. On the strength of attractors in a high-dimensional system: Milnor attractor network, robust global attraction, and noise-induced selection. *Physica D*, 1998, 124: 322～344

38 Belykh I V, Lange E, Hasler M. Synchronization of bursting neurons: what matters in the network topology. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 188101

39 Strogatz S H, Stewart I. Coupled oscillators and biological synchronization. *Scientific American*, 1993, 12: 102～109

40 Blekhman I I. Synchronization in Science and Technology. New York: ASME Press, 1988

41 Winfree A T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J Theo Biol*, 1967, 16: 15～42

42 Kaneko K. Coupled Map Lattices. Singapore: World Scientific, 1992

43 Li Z, Chen G. Robust adaptive synchronization of uncertain complex networks. *Phys Lett A*, 2004, 324: 166～178

44 Li Z, Chen G. Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks. *IEEE Trans Circuits Syst II*, 2006, 53: 28～33

45 Fan J, Wang X F. On synchronization in scale-free dynamical networks. *Physica A*, 2005, 349: 443～451

46 Wang X, Chen G. Synchronization in small-world dynamical networks. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(1): 187～192

47 Li X. Sync in complex dynamical networks: Stability, evolution, control, and application. *Int J Computat Cognition*, 2005, 3(4): 16～26

48 Donetti L, Hurtado P I, Munoz M A. Entangled networks, synchronization, and optimal network topology. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 188701

49 Park K, Lai Y C, Gupte S, Kim J W. Synchronization in complex networks with a modular structure. *Chaos*, 2006, 16: 015105

50 Li X, Chen G. Synchronization and desynchronization of complex dynamical networks: an engineering viewpoint. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2003, 50(11): 1381～1390

51 Li C G, Chen G. Phase synchronization in small-world networks of chaotic oscillators. *Physica A*, 2004, 341: 73～79

52 Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics. *Phys Rep*, 2006, 424: 175～308

53 Ashwin P, Buescu J, Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators. *Phys Lett A*, 1994, 193: 126～139

54 Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Singapore: Springer-Verlag, 1984

55 Mc Graw P N, Menzinger M. Clustering and synchronization of oscillator networks. *Phys Rev E*, 2005, 72: 015101

56 Gauthier D J, Bienfang J C. Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization. *Phys Rev Lett*, 1996, 77: 1751～1754

57 Lu W L, Chen T P. New approach to synchronization analysis of linearly coupled ordinary differential equations. *Physics D*, 2006, 213: 214～230

58 Motter A E, Zhou C, Kurths J. Enhancing complex-network synchronization. *Europhys Lett*, 2005, 69: 334～340

59 Chavez M, Hwang D U, Amann A, et al. Synchronization is enhanced in weighted complex networks. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 218701

60 Gade P M, Hu C K. Synchronous chaos in coupled map lattices with small-world interactions. *Phys Rev E*, 2000, 62(5): 6409～6413

61 Nishikawa T, Motter A E, Lai Y C, et al. Heterogeneity in oscillator networks: are smaller worlds easier to synchronize? *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 014101

62 Newman M E J. Who is the best connected scientist? A study of scientific coauthorship networks I. *Phys Rev E*, 2001, 64: 016132

63 Hong H, Kim B J, Choi M Y, et al. Factors that predict better synchronizability on complex networks. *Phys Rev E*, 2004, 69: 067105

64 Taylor S R, Gunawan R, Petzold L R, et al. Sensitivity measures for oscillating systems: Application to mammalian circadian gene network. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2008, Sp. Iss. SI: 177～188

65 Miyano T, Tsutsui T. Collective synchronization as a method of learning and generalization from sparse data. *Phys Rev E*, 2008, 77(2): 026112

66 Lu W L, Atay F M, Jost J. Synchronization of discrete-time dynamical networks with time-varying couplings. *SIAM J Math Anal*, 2007, 39(4): 1231～1259

67 Hillier D, Gunel S, Suykens J A K, et al. Partial synchronization in oscillator arrays with asymmetric coupling. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(11): 4177～4185

68 Xia Y X, Hill D J. Attack vulnerability of complex communication networks. *IEEE Trans Circuits Syst II*, 2008, 55(1): 65～69

69 Hong H, Park H, Tang L H. Finite-size scaling of synchronized oscillation on complex networks. *Phys Rev E*, 2007, 76(6): 066104

70 Ma L, Mink A, Xu H, et al. Experimental demonstration of an active quantum key distribution network with over Gbps clock synchronization. *IEEE Communicat Lett*, 2007, 11(12): 1019～1021

71 Chen L, Leneutre J. Toward secure and scalable time synchronization in ad hoc networks. *Comput Communicat*, 2007, 30(11-12): 2453~2467
72 Kshemkalyani A D. Temporal predicate detection using synchronized clocks. *IEEE Trans Comput*, 2007, 56(11): 1578~1584
73 Aguirre C, Campos D, Pascual P, et al. Pattern formation and encoding rhythms analysis on a spiking/bursting neuronal network. *Eur Phys J*, 2007, 146: 169~176
74 Fukuda H, Nakamichi N, Hisatsune M, et al. Synchronization of plant circadian oscillators with a phase delay effect of the vein network. *Phys Rev Lett*, 2007, 99(9): 098102
75 Deng Z D, Zhang Y. Collective behavior of a small-world recurrent neural system with scale-free distribution. *IEEE Trans Neural Networks*, 2007, 18(5): 1364~1375
76 Bassettt D S, Meyer-Lindenberg A, Achard S, et al. Adaptive reconfiguration of fractal small-world human brain functional networks. *Proc Nat Acad Sci USA*, 2006, 103(51): 19518~19523
77 Chavez M, Hwang D U, Martincric J, et al. Degree mixing and the enhancement of synchronization in complex weighted networks. *Phys Rev E*, 2006, 74(6): 066107
78 Atay F M, Biyikoglu T, Jost J. Network synchronization: Spectral versus statistical properties. *Physica D*, 2006, 224(1-2): 35~41
79 Josic K, Torok A. Network architecture and spatiotemporally symmetric dynamics. *Physica D*, 2006, 224(1-2): 52~68
80 Restrepo J G, Ott E, Hunt B R. Emergence of synchronization in complex networks of interacting dynamical systems. *Physcia D*, 2006, 224(1-2): 114~122
81 Zhou C S, Zemanova L, Zamora G, et al. Hierarchical organization unveiled by functional connectivity in complex brain networks. *Phys Rev Lett*, 2006, 97(23): 238103
82 Ghosh B K, Polpitiya A D, Wang W X. Bio-inspired networks of visual sensors, neurons, and oscillators. *Proc IEEE*, 2007, 95(1): 188~214
83 Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proc IEEE*, 2007, 95(1): 215~233
84 Néda Z, Ravasz E, Brechet Y, et al. The sound of many hands clapping —— tumultuous applause can transform itself into waves of synchronized clapping. *Nature*, 2000, 403: 849~850
85 李德毅, 刘坤, 孙岩, 韩明畅. 涌现计算: 从无序掌声到有序掌声的虚拟现实. 2007, 37(10): 1248~1257
86 Chen L, Lü J, Lu J. Synchronization of the time-varying discrete biological networks. In: Proc 2007 IEEE Int Symp Circuits Syst (ISCAS'07), 2007-05-27~30. New Orleans, USA, 2007. 2650~2653

SYNCHRONIZATION OF COMPLEX NETWORKS: THEORIES, APPROACHES, APPLICATIONS AND PROSPECTS*

LÜ Jinhu†

Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

Abstract Complex networks are everywhere in the real world, e.g. the Internet, power grids, business networks, biological neural networks, social networks etc., and all such complex networks have close relationships with our daily life. A further investigation of these complex networks may not only help develop many important science disciplines but also bring on profound transformations of our life styles. Synchronization is a very important type of nonlinear phenomena existing ubiquitously in nature, and there are abundant cases of synchronization in various complex networks. Over the past ten years, scientists from different fields have further explored the synchronization of complex networks from different points of view, and main advances in related studies, including theories, approaches, applications and prospects, are briefly reviewed in the present paper in an attempt to further promote the current research on the synchronization of complex networks.

Keywords complex network, local synchronization, global synchronization, synchronizability

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (60772158, 60221301), the National Basic Research (973) Program of China (2007CB310805) and the Important Direction Project of Knowledge Innovation Program of Chinese Academy of Sciences (KJCX3-SYW-S01)

† E-mail: jhlu@iss.ac.cn