## 第一章

例1-4 取3.14作为圆周率的四舍五人近似值时，试求其相对误差限。

解： 四舍五人的近似值 的

绝对误差限为 ,则其相对误差限

例1-5 以作为圆周率的近似值，有几位有效数字?

解： 由

因为，题中已知，所以有，

即作为的近似值有3 位有效数字。

例1-6 取和作为圆周率的近似值各有几位有效数字?

解：，当取3.142作为其近似值时

即 ，，，所以作为的近似值有4位有效数字,

当取作为的近似值时

即 ，，，所以作为的近似值时有3位有效数字，

例1-8 取3.14 作为圆周率的四舍五入的近似值时，试求其相对误差。

解： 四舍五入的近似值3.14，其各位都是有效数字，即n=3，

所以

例1-9 已知近似数有两位有效数字，试求其相对误差。

解：

但第一位有效数字未给出，所以有

可按最不利的情况，取，此时相对误差为最大。

例1-10 求的近似值，使其相对误差不超过。

解：因为，则，设有位有效数字，

求出满足此不等式的最小正数，故取。

例1-11 已知近似数的相对误差为0.25%，问可能有几位有效数字

解：

\*

未给出，取

则

则

按最不利的情况取，至少有两位有效数字。

例1-13 设，的相对误差为，求的相对误差。

解：因有相对误差，所以设是真值的一个近似值，

例1-14 已测得某场地长的值，宽的值，已知, ，求场地面积的绝对误差限和相对误差限。

解：因为，，，有

其中

于是绝对误差限

相对误差限

习题1-1. 已知圆周率，问

(1)若其近似值取5位有效数字，则该近似值是多少?其误差限是多少?

(2)若其近似值精确到小数点后面4位，则该近似值是什么?其误差限是什么?

(3)若其近似值的绝对误差限为，则该近似值是什么?

解：(1) 近似值，误差限

(2) 和(1)相同， ，

(3)

习题1-2. 下列各数都是经过四舍五人得到的近似值，求各数的绝对误差限、相对误差限和有效数字的位数。

(1)

解：绝对误差限

相对误差限

经过四舍五入得到的近似值3580，其各位都是有效数字，故有4位有效数字

(2)

解：绝对误差限

相对误差限

经过四舍五人得到的近似值0.0476，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为3位。

(3)

解：绝对误差限

相对误差限

经过四舍五人得到的近似值30.120，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为5位

(4)

解：绝对误差限

相对误差限

经过四舍五入得到的近似值，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为4位。

习题1-3. 确定圆周率 π如下近似值的绝对误差限、相对误差限、并求其有效数字的位数。

(1)

解：，

，取绝对误差，则相对误差

取绝对误差限，因为，，所以，有3位有效数字。此时相对误差限

(2)

解：，

，取绝对误差，则相对误差

取绝对误差限，因为，，所以，有3位有效数字。此时相对误差限

(3)

解：，

，取绝对误差，则相对误差

取绝对误差限，因为，，所以，有7位有效数字。此时相对误差限

习题1-4. 设，其近似数的相对误差。，证明的相对误差。

解：

习题1-5. 要使的近似值的相对误差限小于，要取几位有效数字?

解：因为，有，设近似值有位有效数字，由定理1-1

因为，故取4位有效数字，

习题1-6. 已知近似数的相对误差限为，问至少有几位有效数字?

解：由，根据定理，有

的取值范围是，由于未给出，取，;取，，按最不利的情况，至少有3位有效数字。

习题1-8. 计算球体积时，为使的相对误差不超过，问半径的相对误差允许是多少?

解：设的近似值为，的近似值为

根据定义

由于 =

令|e，可知半径允许的相对误差。

注：差立方的公式：

习题1-11.设，取4位有效数字用如下两个等价的式子

和

进行计算，求的近似值，并将结果与准确值进行比较，各有多少位有效数字。

解 将代入，取4位有效数字，有

与准确值比较，因前者出现相近数相减，计算结果只有1位有效数字，后者没有相近数相减，有4位有效数字。

## 第二章

例2-1 求是方程的几重根?

解：

因此， 是的三重根。

例2-2：求的有根区间。

解：三次多项式，作图复杂

在内，即为一单调递增函数。

那么在内最多只有一个实根。

又

故在内有唯一实根。

例2-3 证明在区间内有一个根，使用二分法求误差不大于的根要二分多少次。

解：令，是连续函数。

在区间上单调减少。

又， , 在区间上有且仅有一个根。

使用二分法时，误差限

=> =>

所以需二分14次。

例2-4 用区间二分法求方程在区间内的一个实根，使误差不大于0.001。

解： 取，，

在区间上，，即在区间上单调连续，

且，，

所以在区间上有一个根。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 的符号 |  |
| 0 | 1.0000 | 1.5000 | 1.2500 | - | 0.5000 |
| 1 | 1.2500 | 1.5000 | 1.3750 | + | 0.2500 |
| 2 | 1.2500 | 1.3750 | 1.3125 | - | 0.1250 |
| 3 | 1.3125 | 1.3750 | 1.3438 | + | 0.0625 |
| 4 | 1.3125 | 1.3438 | 1.3281 | + | 0.0313 |
| 5 | 1.3125 | 1.3281 | 1.3203 | - | 0.0156 |
| 6 | 1.3203 | 1.3281 | 1.3242 | - | 0.0078 |
| 7 | 1.3242 | 1.3281 | 1.3262 | + | 0.0039 |
| 8 | 1.3242 | 1.3262 | 1.3252 | + | 0.0020 |
| 9 | 1.3242 | 1.3252 | 1.3247 | - | 0.0010 |

从计算结果可以看出，由

取。此时满足。

例2-5 对方程构造收敛的迭代格式并求其根，要求精度。

解： 设，则

故在区间内有根。

又，对，方程在内仅有一个根，即区间内的那个根。

等价方程，迭代函数，在区间上，，,当时，收敛。取进行迭代。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0.500000 | 7 | 0.568438 | 14 | 0.567119 |
| 1 | 0.606531 | 8 | 0.566409 | 15 | 0.567157 |
| 2 | 0.545239 | 9 | 0.567560 | 16 | 0.567135 |
| 3 | 0.579703 | 10 | 0.566907 | 17 | 0.567148 |
| 4 | 0.560065 | 11 | 0.567277 | 18 | 0.567141 |
| 5 | 0.571172 | 12 | 0.567067 |  |  |
| 6 | 0.564863 | 13 | 0.567186 |  |  |

从计算结果可以看出

取。

例2-6 求的最小正根。

解：确定最小正根所在区间，取，用试凑法

故。

取迭代格式 即

则 ， ,

可得 ，因此。

将原方程改写为 ，

则, ,

将原方程改写成

则，,

可得收敛

取 选初值 计算

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 | 2.500000 |
| 1 | 2.154435 |
| 2 | 2.103612 |
| 3 | 2.095927 |
| 4 | 2.094761 |
| 5 | 2.094583 |
| 6 | 2.094556 |
| 7 | 2.094552 |

具体计算如表所示，取2.0946。

例2-7 设，要使迭代过程局部收敛到，求的取值范围。

解：

由在根邻域具有局部收敛性时，收敛条件

所以

例2-8 对方程在初值附近建立收敛的迭代格式，并求解，要求精确到小数点后4位。

解：构造迭代公式。写出方程的等价形式

迭代格式：

判断迭代格式的收敛性。迭代函数

有

所以迭代收敛。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 1.50000 |  |
| 1 | 1.48125 | 0.01875 |
| 2 | 1.47271 | 0.00854 |
| 3 | 1.46882 | 0.00389 |
| 4 | 1.46705 | 0.00177 |
| 5 | 1.46624 | 0.00080 |
| 6 | 1.46588 | 0.00037 |
| 7 | 1.46571 | 0.00017 |
| 8 | 1.46563 | 0.00008 |
| 9 | 1.46560 | 0.00003 |

计算结果如表所示，取，此时。

例2-9 求方程的最大根。

解：初值的确定:令，取值进行试凑

取初值，建立迭代格式 ，迭代函数 。

判断收敛性：， ，收敛

进行迭代计算。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 | 3.50000 |
| 1 | 3.77203 |
| 2 | 3.78829 |
| 3 | 3.78922 |
| 4 | 3.78927 |
| 5 | 3.78928 |

计算结果如表所示，取。

例2-15 用牛顿迭代法求在0.5附近的根。

解：由有=0，取

牛顿迭代公式

取，迭代4次就得到8位有效数字，取。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 | 0.500000000 |
| 1 | 0.571020440 |
| 2 | 0.567155569 |
| 3 | 0.567143291 |
| 4 | 0.567143290 |

例2-16 构造平方根表。导出计算的牛顿迭代公式，并计算。

解：计算是求的正根，解出，即得到。

取 ，则有构造平方根表的牛顿迭代公式

的值在之间，取初值，则

迭代结果如表所示，取。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 | 10.000000000 |
| 1 | 10.750000000 |
| 2 | 10.723837209 |
| 3 | 10.723805295 |
| 4 | 10.723805295 |

例2-17 用牛顿迭代法求方程在附近的一个根。

解: 用牛顿迭代公式

取迭代初值，分别计算。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 1.50000 | 0.60000 |
| 1 | 1.34783 | 17.90000 |
| 2 | 1.32520 | 11.94680 |
| 3 | 1.32472 | 7.98552 |
| 4 | 1.32472 | 5.35691 |
| 5 |  | 3.62500 |
| 6 |  | 2.50559 |
| 7 |  | 1.82013 |
| 8 |  | 1.46104 |
| 9 |  | 1.33932 |
| 10 |  | 1.32491 |
| 11 |  | 1.32472 |
| 12 |  | 1.32472 |

例2-18 已知是方程的二重根，用牛顿迭代法、重根修正公式和未知重根数的修正公式求解。

解：牛顿迭代法

重根数时的修正牛顿迭代法

未知重根数的修正牛顿迭代法（迭代格式稍微复杂）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | (m已知) | (m未知) |
| 0 | 1.500000000 | 1.500000000 | 1.500000000 |
| 1 | 1.458333333 | 1.416666667 | 1.411764706 |
| 2 | 1.436607143 | 1.414215686 | 1.414211438 |
| 3 | 1.425497619 | 1.414213562 | 1.414213562 |
| 4 | 1.419877922 | 1.414213562 | 1.414213562 |
| 5 | 1.417051391 |  |  |
| 6 | 1.415633898 |  |  |
| … | … |  |  |
| 25 | 1.414213565 |  |  |
| 26 | 1.414213564 |  |  |
| 27 | 1.414213563 |  |  |
| 28 | 1.414213563 |  |  |

例2-19 求在区间内的实根(取3位小数)。

解：据题意，取=1.5，，有

取，计算结果，取。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 1.000 | -0.600 |
| 1 | 1.148 | -0.180 |
| 2 | 1.188 | -0.045 |
| 3 | 1.197 | -0.011 |
| 4 | 1.199 | -0.002 |
| 5 | 1.200 | -0.001 |
| 6 | 1.200 | -0.000 |

例2-20 用双点弦法解方程。

解：设，取初值和作为开始值，按双点弦法迭代公式有

进行计算，得到

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0.500000 | -0.175639365 |
| 1 | 0.600000 | 0.093271280 |
| 2 | 0.565315 | -0.005044029 |
| 3 | 0.567095 | -0.000134445 |
| 4 | 0.567143 | 0.000000201 |
| 5 | 0.567143 | -0.000000000 |

习题2-1.求方程 的有根区间,

解 设连续函数，由于，，在区间上至少有一个实根。

取为步长，从出发，向右进行根的搜索，结果列表如下:

可以看出，在，,各区间内至少有一个实根。

习题2-2. 用区间二分法求方程的最小正根，要求误差不大于.

解 记，则，，所以最小正根。

用区间二分法求解，要使，只要

解得，取，只要二分6次，即可求得满足精度要求的最小正根。

计算过程如表所示，取。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| **0** | **0** | **0.5** | **0.25** | **-** |
| **1** | **0.25** | **0.5** | **0.375** | **+** |
| **2** | **0.25** | **0.375** | **0.3125** | **-** |
| **3** | **0.3125** | **0.375** | **0.34375** | **+** |
| **4** | **0.3125** | **0.34375** | **0.328125** | **-** |
| **5** | **0.328125** | **0.34375** | **0.3359375** | **+** |
| **6** | **0.328125** | **0.3359375** | **0.33203125** |  |

习题2-3. 用区间二分法求方程在区间上的近似根，误差小于 至少要二分多少次?

解：设连续函数，则，在区间上，单调连续，且，，所以在区间上只有一个根。

由二分法误差估计式，其中，，则

即误差小于至少要二分9次。

计算过程如表所示，取。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| **0** | **1.0000** | **-** | **2.0000** | **+** | **1.5000** | **+** |
| **1** |  |  | **1.5000** | **+** | **1.2500** | **-** |
| **2** | **1.2500** | **-** |  |  | **1.3750** | **+** |
| **3** |  |  | **1.3750** | **+** | **1.3125** | **-** |
| **4** | **1.3125** | **-** |  |  | **1.3438** | **+** |
| **5** |  |  | **1.3438** | **+** | **1.3282** | **+** |
| **6** |  |  | **1.3282** | **+** | **1.3204** | **-** |
| **7** | **1.3204** | **-** |  |  | **1.3243** | **+** |
| **8** |  |  | **1.3243** | **+** | **1.3224** | **-** |
| **9** | **1.3224** | **-** |  |  | **1.3234** | **-** |

习题2-9.对求方程在初值 附近建立收敛的迭代格式，并求解使之有4位有效数字。

解 对方程建立等价方程，则有迭代函数，

，，所以迭代格式

局部收敛。取进行计算如表所示，取。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 | 1.5 |
| 1 | 1.4502 |
| 2 | 1.4265 |
| 3 | 1.4153 |
| 4 | 1.4100 |
| 5 | 1.4075 |
| 6 | 1.4063 |
| 7 | 1.4057 |
| 8 | 1.4054 |

习题2-16.导出计算的牛顿迭代公式，要求该迭代公式既无开方又无除法运算。

解 计算，令，即等价于求方程的正根，取，，有

牛顿迭代公式为。

习题2-21.用单点弦法和双点弦法，求 Leonardo方程在附近的根。

解： 设

对单点弦法，其中，，所以

，再选取，迭代结果如下表所示。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 1.5 | 2.875 |
| 1 | 1.4 | 0.664 |
| 2 | 1.36996834 | 0.02448464 |
| 3 | 1.36885143 | 0.00091388 |
| 4 | 1.36880972 | 0.00003414 |
| 5 | 1.36880817 | 0.00000127 |

取方程在1.5附近的根.

双点弦法。，再选取，迭代结果如下表所示。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 1.5 | 2.875 |
| 1 | 1.4 | 0.664 |
| 2 | 1.36996834 | 0.024484641 |
| 3 | 1.368818541 | 0.00022010 |
| 4 | 1.368808111 | 0.00000007 |

取方程在1.5附近的根。

## 第三章

例3-3 用**列选主元**法求解方程组

解：增广矩阵：

第1列选主元，交换1、3行

第1列消元 （ 0.400，0.100 ）

第2列选主元，不需要交换

第2列消元（0.243）

回代

最终结果： ，，。

例3-27 求解方程组

解：分别从上式三个方程中分离出，和

据此可建立迭代公式

设取迭代初值 ，当迭代次数增大时，迭代值,,会越来越逼近方程组的精确解。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1 | 0.3000 | 1.5000 | 2.0000 |
| 2 | 0.8000 | 1.7600 | 2.6600 |
| 3 | 0.9180 | 1.9260 | 2.8640 |
| 4 | 0.9716 | 1.9700 | 2.9540 |
| 5 | 0.9894 | 1.9897 | 2.9823 |
| 6 | 0.9962 | 1.9961 | 2.9938 |
| 7 | 0.9986 | 1.9986 | 2.9977 |
| 8 | 0.9995 | 1.9995 | 2.9992 |
| 9 | 0.9998 | 1.9998 | 2.9997 |
| 10 | 0.9999 | 1.9999 | 2.9999 |
| 11 | 1.0000 | 2.0000 | 3.0000 |

最终取：

例3-28 用SOR法求解线性方程组

解: 用SOR求解，其迭代公式为

取， ，计算结果如表所示。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 3.650000 | 0.884588 | -0.202110 |
| 2 | 2.321669 | 0.423094 | -0.222432 |
| 3 | 2.566140 | 0.694826 | -0.495259 |
| 4 | 2.253720 | 0.750477 | -0.662763 |
| … | … | … | … |
| 25 | 2.000000 | 1.000000 | -1.000001 |
| 26 | 2.000000 | 1.000000 | -1.000000 |
| 27 | 2.000000 | 1.000000 | -1.000000 |

该方程组的精确解

习题3-1.用高斯消去法解下列方程组。

(1)

(2)

(1) 解： 增广矩阵

第一次消元（ ， ），得到

第二次消元（），得到

回代计算后，得到

结果是

(2) 解： 增广矩阵

第1列消元（ ， ），得到

第2列消元（），得到

回代计算后，得到

结果是

习题3-2.用列主元消元法解下列方程组。

(1)

(2)

(1) 解： 增广矩阵 第2行第1列绝对值最大，交换1，2行

第1列消元（ ， ）得到

第3行第2列绝对值大，交换2，3行

第2列消元（），得到

回代计算后，得到

结果是

(2) 解： 增广矩阵

第2行第1列绝对值最大，交换1，2行

第1列消元（ ， ）得到

第4行第2列绝对值最大，交换2，4行

第2列消元（ ， ）得到

第3行第3列最大，不需要行交换。

第3列消元校园（），得到

回代计算后，得到

结果是

习题3-4.分别用高斯消去法和列主元高斯消去法求解线性方程组，要求用4位有效数字。

解：**高斯消去法**

增广矩阵，

第1列消元（），得到

回代计算后，得到

结果是

**列主元高斯消去法**

增广矩阵，第2行第1列数值较大，交换1，2行

第1列消元（），得到

回代计算后，得到

结果是

习题3-22.用雅可比迭代法，高斯-赛德尔迭代法解下列方程组。

(1)

(2)

(1) 解：雅可比迭代法的迭代公式如下：

迭代计算结果如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 0.100000 | 0.050000 | 0.333300 |
| 2 | 0.176660 | 0.103330 | 0.399965 |
| 3 | 0.200659 | 0.125329 | 0.461071 |
| 4 | 0.217280 | 0.136239 | 0.483736 |
| 5 | 0.223995 | 0.141830 | 0.496550 |
| 6 | 0.227676 | 0.144454 | 0.502515 |
| 7 | 0.229394 | 0.145787 | 0.505492 |
| 8 | 0.230256 | 0.146428 | 0.506953 |
| 9 | 0.230676 | 0.146746 | 0.507668 |
| 10 | 0.230883 | 0.146902 | 0.508020 |
| 11 | 0.230984 | 0.146979 | 0.508193 |
| 12 | 0.231034 | 0.147016 | 0.508278 |
| 13 | 0.231059 | 0.147035 | 0.508319 |
| 14 | 0.231071 | 0.147044 | 0.508340 |
| 15 | 0.231077 | 0.147048 | 0.508350 |
| 16 | 0.231080 | 0.147050 | 0.508355 |
| 17 | 0.231081 | 0.147051 | 0.508357 |
| 18 | 0.231082 | 0.147052 | 0.508358 |
| 19 | 0.231082 | 0.147052 | 0.508359 |
| 20 | 0.231082 | 0.147052 | 0.508359 |
| 21 | 0.231082 | 0.147052 | 0.508359 |
| 22 | 0.231082 | 0.147052 | 0.508360 |

高斯-赛德尔迭代法的迭代公式如下：

迭代计算结果如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 0.100000 | 0.070000 | 0.413299 |
| 2 | 0.196660 | 0.130662 | 0.485959 |
| 3 | 0.223324 | 0.143261 | 0.503246 |
| 4 | 0.229301 | 0.146185 | 0.507188 |
| 5 | 0.230674 | 0.146854 | 0.508091 |
| 6 | 0.230989 | 0.147007 | 0.508298 |
| 7 | 0.231061 | 0.147042 | 0.508346 |
| 8 | 0.231078 | 0.147050 | 0.508356 |
| 9 | 0.231081 | 0.147052 | 0.508359 |
| 10 | 0.231082 | 0.147052 | 0.508359 |
| 11 | 0.231082 | 0.147052 | 0.508360 |

(2) 解：雅可比迭代法的迭代公式如下：

迭代计算结果如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 0.600000 | 2.272727 | -1.100000 | 1.875000 |
| 2 | 1.047273 | 1.715909 | -0.805227 | 0.885227 |
| 3 | 0.932636 | 2.053306 | -1.049341 | 1.130881 |
| 4 | 1.015199 | 1.953696 | -0.968109 | 0.973843 |
| 5 | 0.988991 | 2.011415 | -1.010286 | 1.021351 |
| 6 | 1.003199 | 1.992241 | -0.994522 | 0.994434 |
| 7 | 0.998128 | 2.002307 | -1.001972 | 1.003594 |
| 8 | 1.000625 | 1.998670 | -0.999036 | 0.998888 |
| 9 | 0.999674 | 2.000448 | -1.000369 | 1.000619 |
| 10 | 1.000119 | 1.999768 | -0.999828 | 0.999786 |
| 11 | 0.999942 | 2.000085 | -1.000068 | 1.000109 |
| 12 | 1.000022 | 1.999959 | -0.999969 | 0.999960 |
| 13 | 0.999990 | 2.000016 | -1.000013 | 1.000019 |
| 14 | 1.000004 | 1.999993 | -0.999994 | 0.999992 |
| 15 | 0.999998 | 2.000003 | -1.000002 | 1.000003 |
| 16 | 1.000001 | 1.999999 | -0.999999 | 0.999999 |
| 17 | 1.000000 | 2.000001 | -1.000000 | 1.000001 |
| 18 | 1.000000 | 2.000000 | -1.000000 | 1.000000 |

高斯-赛德尔迭代法的迭代公式如下：

迭代计算结果如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 0.600000 | 2.327273 | -0.987273 | 0.878864 |
| 2 | 1.030182 | 2.036938 | -1.014456 | 0.984341 |
| 3 | 1.006585 | 2.003555 | -1.002527 | 0.998351 |
| 4 | 1.000861 | 2.000298 | -1.000307 | 0.999850 |
| 5 | 1.000091 | 2.000021 | -1.000031 | 0.999988 |
| 6 | 1.000008 | 2.000001 | -1.000003 | 0.999999 |
| 7 | 1.000001 | 2.000000 | -1.000000 | 1.000000 |
| 8 | 1.000000 | 2.000000 | -1.000000 | 1.000000 |

习题3-23.取初始向量，用雅可比迭代法解下列方程组。()

解：雅可比迭代法的迭代公式如下：

取初始向量，迭代计算结果如下

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 1.000 | 3.000 | 5.000 |
| 2 | 5.000 | -3.000 | -3.000 |
| 3 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 4 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

习题3-24.用雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法和逐次超松弛方法(取ω=1.8和ω=1.22)解下列线性方程组。

解：雅可比迭代法的迭代公式如下：

迭代计算结果如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 6.000000 | 7.500000 | -6.000000 |
| 2 | 0.375000 | 1.500000 | -4.125000 |
| 3 | 4.875000 | 6.187500 | -5.625000 |
| 4 | 1.359375 | 2.437500 | -4.453125 |
| … | … | … | … |
| 65 | 3.000001 | 4.000001 | -5.000000 |
| 66 | 2.999999 | 3.999999 | -5.000000 |
| 67 | 3.000001 | 4.000001 | -5.000000 |
| 68 | 3.000000 | 4.000000 | -5.000000 |

高斯-赛德尔迭代法的迭代公式如下：

迭代计算结果如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 6.000000 | 3.000000 | -5.250000 |
| 2 | 3.750000 | 3.375000 | -5.156250 |
| 3 | 3.468750 | 3.609375 | -5.097656 |
| 4 | 3.292969 | 3.755859 | -5.061035 |
| … | … | … | … |
| 30 | 3.000001 | 3.999999 | -5.000000 |
| 31 | 3.000001 | 3.999999 | -5.000000 |
| 32 | 3.000001 | 4.000000 | -5.000000 |
| 33 | 3.000000 | 4.000000 | -5.000000 |

逐次超松弛方法(取ω=1.8和ω=1.22)

取，迭代计算结果如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 10.800000 | -1.080000 | -11.286000 |
| 2 | 3.618000 | 4.401000 | 0.209250 |
| 3 | 1.964250 | 7.421625 | -7.627669 |
| 4 | -0.790594 | 5.197551 | -2.358967 |
| … | … | … | … |
| 70 | 3.000000 | 4.000001 | -4.999999 |
| 71 | 2.999999 | 4.000001 | -5.000001 |
| 72 | 2.999999 | 4.000000 | -4.999999 |
| 73 | 3.000001 | 3.999999 | -5.000001 |
| 74 | 3.000000 | 4.000000 | -5.000000 |

取，迭代计算结果如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 1 | 7.320000 | 2.452200 | -6.572079 |
| 2 | 3.465837 | 3.434791 | -4.826531 |
| 3 | 3.414682 | 3.797820 | -5.099828 |
| 4 | 3.093765 | 3.928237 | -4.999925 |
| … | … | … | … |
| 12 | 3.000028 | 3.999983 | -5.000003 |
| 13 | 3.000010 | 3.999994 | -5.000001 |
| 14 | 3.000003 | 3.999998 | -5.000000 |
| 15 | 3.000001 | 3.999999 | -5.000000 |
| 16 | 3.000000 | 4.000000 | -5.000000 |

## 第四章

例4-1 已知的函数表 求线性插值多项式，并计算时函数的近似值。

解：已知两点的线性插值多项式

例4-2 已知 ，求。

解：利用线性插值

例4-3 已知的函数表 ，求抛物线插值多项式，并计算的近似值。

解：代入抛物线插值公式

2.58

例4-4 利用100，121 和 144 的开方值求 。

解： 由已知

例4-5 求过三个点(0,1)、(1,2)、(2,3)的插值多项式

解：

例4-6 已知的观测数据 构造插值多项式。

解：四个点可以构造三次插值多项式，将数据代入插值公式，有

例4-12 已知函数表 求牛顿插值多项式，并计算时的函数近似值。

解：列出差商表

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0阶** | **1阶** | **2阶** | **因子** |
| **1** | **1** |  |  | **1** |
| **3** | **2** | **0.5** |  |  |
| **2** | **-1** | **3** | **2.5** |  |

例4-13 已知函数在节点处的函数值分别是求二次和三次牛顿插值多项式并计算的近似值。

解：根据给定的函数值构造差商表

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0阶** | **1阶** | **2阶** | **3阶** | **因子** |
| **0** | **3** |  |  |  | **1** |
| **1** | **6** | **3** |  |  |  |
| **2** | **11** | **5** | **1** |  |  |
| **4** | **51** | **20** | **5** | **1** |  |

二次牛顿插值多项式选最接近0.5的三个节点0，1，2组成，即

由此，有

三次牛顿插值多项式

例4-14 给出的函数表，求四次牛顿插值多项式，由此求并估计误差。

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0.40** | **0.55** | **0.65** | **0.80** | **0.90** | **1.05** |
|  | **0.41075** | **0.57815** | **0.69675** | **0.88811** | **1.02652** | **1.25382** |

解：表中给出6个节点数据，故可构造五次牛顿插值多项式，但题中只要求构造四次插值多项式，并求的近似值，故可选最接近0.596的前5个节点，首先构造差商表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **1阶** | **2阶** | **3阶** | **4阶** | **5阶** | **因子** |
| **0.40** | **0.41075** |  |  |  |  |  | **1** |
| **0.55** | **0.57815** | **1.11600** |  |  |  |  |  |
| **0.65** | **0.69675** | **1.18600** | **0.28000** |  |  |  |  |
| **0.80** | **0.88811** | **1.27573** | **0.35893** | **0.19733** |  |  |  |
| **0.90** | **1.02652** | **1.38410** | **0.43347** | **0.21295** | **0.03124** |  |  |
| **1.05** | **1.25382** | **1.51533** | **0.52493** | **0.22867** | **0.03143** | **0.00029** |  |

**+ 0.28000**

**+ 0.19733**

**+ 0.03124**

已知满足作的二次拉格朗日插值多项式,并求的近似值。

解: 设 , ,则f(x)的二次拉格朗日插值基函数为

因此的二次拉格朗日插值多项式为

且

习题4-2. 已知数据表 用拉格朗日插值计算的近似值。

解：四个点可以构造三次插值多项式，将数据代入插值公式，有

= 0.12141

习题4-7、设，用拉格朗日余项定理写出以为节点的三次插值多项式。

解：四个点可以构造三次插值多项式，将数据代入插值公式，有

习题4-9.已知 在 的值分别为。，分别用一次插值和二次插值求的近似值。

解：一次插值，取接近50的两个值45和60进行插值

=0.76008

二次插值

习题4-11、绐出概率积分的数据表

用二次插值计算:

(1) 当 时，积分值等于多少?

(2) 当 为何值时积分值为?

解：（1）二次插值需要3个点，取离0.472最近的三个点：0.46、0.47、0.48

当 时，积分值等于。

（2）原函数是连续单调函数，可以用反插值法计算。将看成的函数，即，用二次插值计算时，选取最接近的后三个节点、、

当时，积分值等于。

习题4-19. 已知的函数表

求二次和三次牛顿插值多项式，计算的近似值。

解：根据给定的函数表构造差商表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0阶** | **1阶** | **2阶** | **3阶** | **因子** |
| **0** | **0** |  |  |  | **1** |
| **0.2** | **0.20134** | **1.00670** |  |  |  |
| **0.3** | **0.30452** | **1.03180** | **0.08367** |  |  |
| **0.5** | **0.52110** | **1.08290** | **0.17033** | **0.17333** |  |

二次牛顿插值多项式为

**=**

三次牛顿插值多项式为

习题4-20. 已知连续函数在处的值分别是，用牛顿插值求

(1) 的近似值:

(2) 时的近似值。

解：（1）函数值如下

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

根据函数值构造差商表

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0阶** | **1阶** | **2阶** | **3阶** | **因子** |
| **-1** | **-4** |  |  |  | **1** |
| **0** | **-1** | **3** |  |  |  |
| **2** | **0** | **0.5** | **-0.83333** |  |  |
| **3** | **3** | **3** | **0.83333** | **0.41667** |  |

四个点构造三次牛顿插值多项式

的近似值是0.40624

（2）由于函数单调连续，存在反函数。令，则，有函数表

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

根据函数值构造差商表

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0阶** | **1阶** | **2阶** | **3阶** | **因子** |
| **-4** | **-1** |  |  |  | **1** |
| **-1** | **0** | **0.33333** |  |  |  |
| **0** | **2** | **2** | **0.41667** |  |  |
| **3** | **3** | **0.33333** | **-0.41667** | **-0.11905** |  |

因此， 时的近似值是2.91071。

## 第五章

例5-1 已知实验数据 用最小二乘法求拟合直线。

解：把表中所给数据画在坐标纸上，可以看出，数据点的分布可以用一条直线来近似地描述，设所求的拟合直线为，满足的法方程组

建立计算表

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| **1** | **0.0** | **0.9** | **0.00** | **0.000** |
| **2** | **0.2** | **1.9** | **0.04** | **0.380** |
| **3** | **0.4** | **2.8** | **0.16** | **1.120** |
| **4** | **0.6** | **3.3** | **0.36** | **1.980** |
| **5** | **0.8** | **4.2** | **0.64** | **3.360** |
| **Σ** | **2.0** | **13.1** | **1.200** | **6.84** |

根据计算表，建立方程组

消元

回代

得到拟合曲线

例5-2 已知观测数据及相应的权，若x和y之间有线性关系，用最小二乘法确定和。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 14 | 27 | 12 | 1 |
|  | 2 | 4 | 6 | 8 |
|  | 2 | 11 | 28 | 40 |

解：直线拟合方程，正则方程组为

构造计算表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **2** | **2** | **14** | **28** | **56** | **28** | **56** |
| **2** | **4** | **11** | **27** | **108** | **432** | **297** | **1188** |
| **3** | **6** | **28** | **12** | **72** | **432** | **336** | **2016** |
| **4** | **8** | **40** | **1** | **8** | **64** | **40** | **320** |
| **Σ** |  |  | **54** | **216** | **984** | **701** | **3580** |

根据计算表，建立方程组

消元

回代

拟合直线为

例5-A1 已知一组试验数据 试用直线拟合这组数据(计算过程保留3位小数)。

解：直线拟合方程，正则方程组为

根据数据建立计算表

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| **1** | **2** | **4** | **4** | **8** |
| **2** | **2.5** | **4.5** | **6.25** | **11.25** |
| **3** | **3** | **6** | **9** | **18** |
| **4** | **4** | **8** | **16** | **32** |
| **5** | **5** | **8.5** | **25** | **42.5** |
| **6** | **5.5** | **9** | **30.25** | **49.5** |
| **Σ** | **22** | **40** | **90.5** | **161.25** |

根据计算表构建方程组

消元

回代

拟合直线是

例5-8 给定函数的实例数据表 , 试用最小二乘法求二次拟合多项式（计算过程保留4位小数）。

解：设二次拟合多项式,写出正则方程组

根据数据建立计算表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **1** | **2** | **1** | **1** | **1** | **2** | **2** |
| **2** | **2** | **3** | **4** | **8** | **16** | **6** | **12** |
| **3** | **3** | **6** | **9** | **27** | **81** | **18** | **54** |
| **4** | **4** | **7** | **16** | **64** | **256** | **28** | **112** |
| **5** | **6** | **5** | **36** | **216** | **1296** | **30** | **180** |
| **6** | **7** | **3** | **49** | **343** | **2401** | **21** | **147** |
| **7** | **8** | **2** | **64** | **512** | **4096** | **16** | **128** |
| **Σ** | **31** | **28** | **179** | **1171** | **8147** | **121** | **635** |

根据计算表的数据，构建方程组

消元

回代

拟合曲线为

例5-A2 已知一组试验数据 ，试用二次多项式拟合这组数据. (计算过程保留3位小数)

解：设二次拟合多项式,写出正则方程组

根据试验数据建立计算表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **0.8** | **2.5** | **0.608** | **0.475** | **0.370** | **1.950** | **1.521** |
| **2** | **1.6** | **1.2** | **2.434** | **3.796** | **5.922** | **1.872** | **2.920** |
| **3** | **2.3** | **1.1** | **5.476** | **12.813** | **29.982** | **2.621** | **6.133** |
| **4** | **3.1** | **2.3** | **9.734** | **30.371** | **94.759** | **7.020** | **21.902** |
| **5** | **3.8** | **4.3** | **14.516** | **55.306** | **210.717** | **16.307** | **62.129** |
| **Σ** | **11.6** | **11.4** | **32.768** | **102.762** | **341.750** | **29.770** | **94.605** |

根据计算表的数据，建立方程组

消元

回代

拟合曲线为

习题2. 已知观测数据及相应的权，若x和y之间有线性关系，用最小二乘法确定和。（计算时保留4位小数）

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|  | **4** | **4.5** | **6** | **8** | **8.5** |
|  | **2** | **1** | **3** | **1** | **1** |

解：直线拟合方程，正则方程组为

构造计算表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **1** | **4** | **2** | **2** | **2** | **8** | **8** |
| **2** | **2** | **4.5** | **1** | **2** | **4** | **4.5** | **9** |
| **3** | **3** | **6** | **3** | **9** | **27** | **18** | **54** |
| **4** | **4** | **8** | **1** | **4** | **16** | **8** | **32** |
| **5** | **5** | **8.5** | **1** | **5** | **25** | **8.5** | **42.5** |
| **Σ** |  |  | **8** | **22** | **74** | **47** | **145.5** |

根据计算表，建立方程组

消元

回代

拟合直线为

习题4. 用二次多项式拟合以下数据

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|  | **15** | **14** | **14** | **14** | **14** | **15** | **16** |

解：用平移变换将数据变得易于处理，设，，则数据变为

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **-3** | **-2** | **-1** | **0** | **1** | **2** | **3** |
|  | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **2** |

设二次拟合多项式,写出正则方程组

根据试验数据建立计算表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **-3** | **1** | **9** | **-27** | **81** | **-3** | **9** |
| **2** | **-2** | **0** | **4** | **-8** | **16** | **-0** | **0** |
| **3** | **-1** | **0** | **1** | **-1** | **1** | **-0** | **0** |
| **4** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **5** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| **6** | **2** | **1** | **4** | **8** | **16** | **2** | **4** |
| **7** | **3** | **2** | **9** | **27** | **81** | **6** | **18** |
| **Σ** | **0** | **4** | **28** | **0** | **196** | **5** | **31** |

根据计算表的数据，建立方程组

消元

回代

拟合曲线为

将原值代入

整理后得到

习题5.用最小二乘法求形如的多项式，使之与下列数据拟合。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **19** | **25** | **31** | **38** | **44** |
|  | **19.0** | **32.3** | **49.0** | **73.3** | **97.8** |

解：取 ，多项式改为，数据改为

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **361** | **625** | **961** | **1444** | **1936** |
|  | **19.0** | **32.3** | **49.0** | **73.3** | **97.8** |

直线拟合方程，正则方程组为

根据数据建立计算表

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| **1** | 361 | 19.0 | 130321 | 6859.0 |
| **2** | 625 | 32.3 | 390625 | 20187.5 |
| **3** | 961 | 49.0 | 923521 | 47089.0 |
| **4** | 1444 | 73.3 | 2085136 | 105845.2 |
| **5** | 1936 | 97.8 | 3748096 | 189340.8 |
| **Σ** | 5327 | 271.4 | 7277699 | 369321.5 |

根据计算表构建方程组

消元

回代

拟合直线是

原直线方程为：

6. 已知数据

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **-2** | **-1** | **0** | **1** | **2** |
|  | **-0.1** | **0.1** | **0.4** | **0.9** | **1.6** |

二次多项式拟合这些数据。（计算时保留4位小数）

解：设二次拟合多项式,写出正则方程组

根据试验数据建立计算表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **-2** | **-0.1** | **4** | **-8** | **16** | **0.2** | **-0.4** |
| **2** | **-1** | **0.1** | **1** | **-1** | **1** | **-0.1** | **0.1** |
| **3** | **0** | **0.4** | **0** | **0** | **0** | **0.0** | **0.0** |
| **4** | **1** | **0.9** | **1** | **1** | **1** | **0.9** | **0.9** |
| **5** | **2** | **1.6** | **4** | **8** | **16** | **3.2** | **6.4** |
| **Σ** | **0** | **2.9** | **10** | **0** | **34** | **4.2** | **7.0** |

根据计算表的数据，建立方程组

消元

回代

拟合曲线为

## ========

## 第六章

## 第七章