

# Standard Source Code Library

AcFast

April 21, 2013

# Contents

1	算法	3
1.1	网络流算法	3
1.1.1	网络流模型	3
1.1.2	SAP	3
1.1.3	有上下界的最大流	6
1.1.4	最小费用最大流	8
1.1.5	KM 算法	10
1.1.6	网络流割点	11
1.2	生成树算法	12
1.2.1	生成树计数	12
1.2.2	无向图的生成数计数 -MatrixTree 定理	13
1.2.3	无向带权图最小生成树计数	13
1.2.4	带限制的最小生成树问题	13
1.3	图算法	14
1.3.1	无向图割点	14
1.3.2	无向图割边	14
1.3.3	树的同构	15
1.3.4	树的分治	15
1.4	哈密尔顿回路	18
1.5	最近公共祖先算法	18
1.5.1	Tarjan	18
1.5.2	祖先树	20
1.6	字符串算法	22
1.6.1	KMP	22
1.6.2	扩展 KMP	22
1.6.3	回文串 Manacher 算法	23
1.6.4	最小表示法	24
1.6.5	Suffix	25
2	数据结构	27
2.1	Splay	27
2.2	左偏树	32
2.3	树链剖分	37
2.4	可持久化数据结构	42
2.4.1	可持久化线段树	42
2.5	字典树	45
2.5.1	Trie 树	45
2.5.2	Trie 图	46
2.6	划分树	48
3	计算几何	50
3.1	计算几何基础	50
3.1.1	基本定理	50
3.1.2	坐标旋转	51
3.1.3	pick 定理	51

3.1.4 点到线段之间的距离	51
3.1.5 线段和直线方程	51
3.1.6 两圆交点	52
3.2 圆与简单多边形面积交	53
3.3 最小圆覆盖	57
3.4 多边形的核	59
3.5 矩形切割	61
3.6 矩形面积并	62
3.7 KD-Tree	64
3.7.1 程序	64
3.7.2 例题	65
<b>4 数学</b>	<b>67</b>
4.1 结论	67
4.2 扩展 GCD	68
4.3 中国剩余定理	69
4.4 组合数取模	70
4.5 欧拉函数	73
4.6 Head 算法	73
4.7 行列式取模	74
4.7.1 辗转相除法	74
4.7.2 高斯消元	75
4.8 特殊数列	76
4.8.1 斐波那契数	76
4.8.2 卡特兰数	76
4.8.3 Stirling 数	77
4.9 格子路径与 Schrodler 数	77
<b>5 自定义类型及 C++ 算法</b>	<b>77</b>
5.1 C++note	77
5.2 Vim 配置	77

# 1 算法

## 1.1 网络流算法

### 1.1.1 网络流模型

1、最大权闭合图：定义一个有向图  $G = (V, E)$  的闭合图是该有向图的一个点集，且该点集的所有出边都还指向该点集。即闭合图内的任一点的任意后继也一定在闭合图中。更形式化地说，闭合图是这样一点集  $V' \subseteq V$ ，满足对于  $\forall u \in V'$  引出的  $\forall \langle u, v \rangle \in E$ ，必有  $v \in V'$  成立。还有一种等价定义为：满足对于  $\forall \langle u, v \rangle \in E$ ，若有  $u \in V'$  成立，必有  $v \in V'$  成立。闭合图允许超过一个连通块。

给每个点  $v$  分配一个点权  $w_v$ （任意实数，可正可负）。最大权闭合图，是一个点权之和最大的闭合图，即最大化  $\sum_{v \in V'} w_v$ 。

在许多实际应用中，给出的有向图常常是一个有向无环图（DAG），闭合图的性质恰好反映了事件间的必要条件的关系：一个时间的发生，它所需要的所有前提也要发生。

最大权闭合图转化成最小割模型：在原图点集的基础上增加源  $s$  和汇  $t$ ；将原图每条有向边  $\langle u, v \rangle \in E$  替换为容量为  $c(u, v) = +\infty$  的有向边  $\langle u, v \rangle \in E_N$ ；增加连接源  $s$  到原图每个正权点  $v (w_v > 0)$  的有向边  $\langle s, v \rangle \in E_N$ ，容量为  $c(s, v) = w_v$ ；增加连接原图的每个负权点  $v (w_v < 0)$  到汇  $t$  的有向边  $\langle v, t \rangle \in E_N$ ，容量为  $c(v, t) = -w_v$ 。其中，正无限  $\infty$  定义为任意一个大于  $\sum_{v \in V} |w_v|$  的整数。

2、最大密度子图：定义一个无向图  $G = (V, E)$  的密度  $D$  为该图的边数  $|E|$  与该图的点数  $|V|$  的比值  $D = \frac{|E|}{|V|}$ 。给出一个无向图  $G = (V, E)$ ，其具有最大密度的子图  $G' = (V', E')$  称为最大密度子图，即最大化  $D' = \frac{|E'|}{|V'|}$ 。

性质：无向图中，任意两个具有不同密度的子图  $G_1, G_2$ ，它们的密度差不小于  $\frac{1}{n^2}$ 。

构图：在原图点集  $V$  的基础上增加源  $s$  和汇  $t$ ；将每条原无向边  $(u, v)$  替换为两条容量为 1 的有向边  $\langle v, u \rangle$  和  $\langle u, v \rangle$ ；增加连接源  $s$  到原图每个点  $v$  的有向边  $\langle s, v \rangle$ ，容量为  $U$ ；增加连接原图每个点  $v$  到汇  $t$  的有向边  $\langle v, t \rangle$ ，容量为  $(U + 2g - d_v)$ 。其中  $U$  是图总的边数， $g$  是二分的答案， $d_v$  表示顶点  $v$  的度。

### 1.1.2 SAP

```
#include <queue>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;
```

```
const int MAXN=102401;
const int MAXM=256000;
const int INF=0x7FFFFFFF;
```

```
/*
 * totalNode是网络图总的顶点数
 * S, T分别为源点和汇点
 *
 * 在做SAP之前，先用BFS从T点遍历反向边给每个点距离标号
```

```

*/

int n,m,S,T,total,totalNode;
int f[MAXM],next[MAXM],adj[MAXM];
int g[MAXN],last[MAXN],h[MAXN],vh[MAXN];

void ins(int x, int y, int limit){
    f[total]=limit;
    adj[total]=y;
    next[total]=g[x];
    g[x]=total++;

    f[total]=0;
    adj[total]=x;
    next[total]=g[y];
    g[y]=total++;
}

void init(){
    int x,y,limit;
    total=0;
    memset(g,255,sizeof(g));
    totalNode=n;
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for (int i=0; i<m; i++){
        scanf("%d%d%d",&x,&y,&limit);
        ins(x,y,limit);
    }
}

int dfs(int node, int add){
    if (node==T) return add;
    int minh=totalNode+1,p=last[node],y,temp;
    do{
        if (f[p]>0){
            y=adj[p];
            if (h[node]==h[y]+1){
                temp=dfs(y,min(add,f[p]));
                if (temp>0){
                    f[p]-=temp;
                    f[p^1]+=temp;
                    last[node]=p;
                    return temp;
                }
            }
            if (h[S]>totalNode) return 0;
            minh=min(minh,h[y]+1);
        }
    }
}

```

```

        p=next[p];
        if (p==-1) p=g[node];
    } while (p!=last[node]);

    if (--vh[h[node]]==0) h[S]=totalNode+1;
    ++vh[h[node]]=minh;
    return 0;
}

/*
 * 从汇点T遍历反向边给点标号，如果是无向图就随便遍历
 */

void BFS(int T){
    memset(h,255,sizeof(h));
    memset(vh,0,sizeof(vh));
    vh[h[T]=0]=1;
    queue<int> q;
    q.push(T);
    while (!q.empty()){
        int node=q.front(); q.pop();
        for (int p=g[node]; p!=-1; p=next[p]){
            //p%2==1表示反向边, h[adj[p]]==-1表示该节点未被标号
            if ((p&1) && h[adj[p]]==-1){
                ++vh[h[adj[p]]=h[node]+1];
                q.push(adj[p]);
            }
        }
    }
}

int maxFlow(){
    if (g[S]==-1){
        /* no flow */
        return 0;
    }
    BFS(T);
    for (int i=1; i<=totalNode; i++) last[i]=g[i];
    int flow=0;
    while (h[S]<=totalNode) flow+=dfs(S,INF);
    return flow;
}

void solve(){
    cout<<maxFlow()<<endl;
}

int main(){

```

```

    init();
    solve();
    return 0;
}

```

### 1.1.3 有上下界的最大流

```

#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
using namespace std;

const int INF=0x7FFFFFFF;

const int maxn=1001;
const int maxm=100001;

int n,m,s,t,ca,P,tot,S,T,NT,flow,maxtot;
int g[maxn],last[maxn],h[maxn],vh[maxn];
int a[maxm][4],f[maxm],adj[maxm],next[maxm];

void insert(int x, int y, int limit){
    f[tot]=limit;
    adj[tot]=y;
    next[tot]=g[x];
    g[x]=tot++;

    f[tot]=0;
    adj[tot]=x;
    next[tot]=g[y];
    g[y]=tot++;
}

int dfs(int now, int add){
    if (now==T) return add;
    int y, tmp, minh=NT+1, p=last[now];
    do{
        y=adj[p];
        if (f[p]>0 && p<maxtot){
            if (h[now]==h[y]+1){
                tmp=dfs(y,min(f[p],add));
                if (tmp!=0){
                    f[p]-=tmp;
                    f[p^1]+=tmp;
                    last[now]=p;
                    return tmp;
                }
            }
        }
    } while (p=next[p]);
    return 0;
}

```

```

        }
        minh=min(minh,h[y]+1);
        if (h[S]>NT) return 0;
    }
    p=next[p];
    if (p==-1) p=g[now];
} while (p!=last[now]);

if (--vh[h[now]]==0) h[S]=NT+1;
h[now]=minh; ++vh[minh];
return 0;
}

int getflow(){
//a[i][0],a[i][1],a[i][2],a[i][3]表示(a[i][0],a[i][1])
//这条边以及下界流量为a[i][2], 上界流量为a[i][3]
//tot是边的总数
tot=0;
memset(g,255,sizeof(g));
for (int i=1; i<=m; i++)
insert(a[i][0],a[i][1],a[i][3]-a[i][2]);
int tmp=tot;
//前面tot条边都是上界流量-下界流量
//做第二次最大流的时候只能用这tot条边
//所以在这里要用tmp纪录tot

//S和T在第一次网络流中是超级源和超级汇。
//对于一条下界边(u,v,lower), 连(u,T,lower)和(S,v,lower)
S=n+1; T=S+1;
for (int i=1; i<=m; i++)
{
    insert(a[i][0],T,a[i][2]);
    insert(S,a[i][1],a[i][2]);
}
//s和t是原图中的源和汇, 第一次最大流要连一条(t,s,无穷大)的边
insert(t,s,INF);

memset(h,0,sizeof(h));
memset(vh,0,sizeof(vh));
for (int i=1; i<=T; i++) last[i]=g[i];
//maxtot表示做网络流时所能经过的编号最大的边, NT表示有多少个顶点
maxtot=tot; vh[0]=T; flow=0; NT=n+2;
while (h[S]<=NT) flow+=dfs(S,INF);
//第一次最大流, 如果流量不等于所有边的下界总和, 则方案不合法
if (flow!=m*lower) return -1;

//第二次最大流在残余图上做
//且只能使用前tmp条边, 源和汇是原图的源汇

```



```

//f[tot-1]表示从原图的源流出的流量，加入到最后的流量中
S=s; T=t; flow=f[tot-1];
memset(h,0,sizeof(h));
memset(vh,0,sizeof(vh));
for (int i=1; i<=n; i++) last[i]=g[i];
//若T比定点个数小，则设NT=n，所有的h[S]<=NT而不是<=T
maxtot=tmp; vh[0]=n; NT=n;
while (h[S]<=NT) flow+=dfs(S,INF);
//flow就是这个有上下界流量的最大流
return flow;
}

```

#### 1.1.4 最小费用最大流

```

#include <queue>
#include <vector>
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <cstring>
using namespace std;

const int MAXN=1500;
const int MAXM=100000;
const int INF=0x3f3f3f3f;

int n,m,S,T,total;
queue<int> q;
bool vis[MAXN];
int g[MAXN],dist[MAXN],pre[MAXN];
int f[MAXM],adj[MAXM],cost[MAXM],nex[MAXM];

void ins(int x, int y, int limit, int c){
    f[total]=limit;
    cost[total]=c;
    adj[total]=y;
    nex[total]=g[x];
    g[x]=total++;

    f[total]=0;
    cost[total]=-c;
    adj[total]=x;
    nex[total]=g[y];
    g[y]=total++;
}

void init(){
    int x,y,len;

```

```

total=0;
memset(g,255,sizeof(g));
scanf("%d%d",&n,&m);
for (int i=0; i<m; i++){
    scanf("%d%d%d",&x,&y,&len);
    ins(x,y,1,len);
    ins(y,x,1,len);
}
S=n+1; T=S+1;
ins(S,1,2,0); ins(n,T,2,0);
}

bool SPFA(){
    memset(vis,0,sizeof(vis));
    memset(dist,60,sizeof(dist));
    int maxlong=dist[S]; dist[S]=0;
    q.push(S); vis[S]=true;
    while (!q.empty()){
        int node=q.front(); q.pop();
        for (int p=g[node]; p!=-1; p=nex[p])
            if (f[p]>0 && dist[node]+cost[p]<dist[adj[p]]){
                dist[adj[p]]=dist[node]+cost[p];
                pre[adj[p]]=p;
                if (!vis[adj[p]]){
                    q.push(adj[p]);
                    vis[adj[p]]=true;
                }
            }
        vis[node]=false;
    }
    return dist[T]!=maxlong;
}

int AugPath(){
    int COST=0,F=INF;
    for (int i=T; i!=S; i=adj[pre[i]^1]) F=min(F,f[pre[i]]);
    for (int i=T; i!=S; i=adj[pre[i]^1]){
        COST+=F*cost[pre[i]];
        f[pre[i]]-=F;
        f[pre[i]^1]+=F;
    }
    return COST;
}

void solve(){
    int COST=0;
    while (SPFA()) COST+=AugPath();
    printf("%d\n",COST);
}

```

```

}

int main(){
    init();
    solve();
    return 0;
}

```

### 1.1.5 KM算法

```

function Find(k:integer):boolean;
var
    i:integer;
begin
    sx[k]:=true;
    for i:=1 to m do
        if (not sy[i]) and (lx[k]+ly[i]=g[k,i]) then
            begin
                sy[i]:=true;
                if (cy[i]=0) or (Find(cy[i])) then
                    begin
                        cx[k]:=i;
                        cy[i]:=k;
                        exit(true);
                    end;
            end;
    exit(false);
end;

function Max(a,b:longint):longint;
begin
    if a>b then exit(a) else exit(b);
end;

function Min(a,b:longint):longint;
begin
    if a>b then exit(b) else exit(a);
end;

procedure main;
var
    i,j,k,tmp:longint;
begin
    fillchar(cx,sizeof(cx),0);
    fillchar(cy,sizeof(cy),0);
    fillchar(lx,sizeof(lx),0);
    fillchar(ly,sizeof(ly),0);

```

```

for i:=1 to n do
  for j:=1 to m do
    lx[i]:=Max(lx[i],g[i,j]);
for k:=1 to n do
  if cx[k]=0 then
    while true do
      begin
        fillchar(sx,sizeof(sx),0);
        fillchar(sy,sizeof(sy),0);
        if Find(k) then break;
        tmp:=Maxlong;
        for i:=1 to n do
          if sx[i] then
            for j:=1 to m do
              if not sy[j] then
                tmp:=Min(tmp,lx[i]+ly[j]-g[i,j]);
        for i:=1 to n do
          if sx[i] then lx[i]:=lx[i]-tmp;
        for i:=1 to m do
          if sy[i] then ly[i]:=ly[i]+tmp;
      end;
    ans:=0;
    for i:=1 to n do
      ans:=ans+g[i,cx[i]];
    writeln(ans);
end;

```

#### 1.1.6 网络流割点

网络流求割点：将一个点拆成两个点，两个点之间连一条边。求出最大流后，从源点开始DFS遍历，如果一条边没有满流就可以通过，记录源点S可以到达的点。如果一条边是割边，则这条边的两个点分别属于S集合和T集合。

```

procedure dfs(x:longint); //从原点开始遍历f[p]>0的边，得到S点集。。。
var
  p,y:longint;
begin
  p:=last[x];
  repeat
    y:=adj[p];
    if (f[p]>0) and (not visit[y]) then
      begin
        visit[y]:=true;
        dfs(y);
      end;
    p:=next[p];
    if p=0 then p:=g[x];
  until p=last[x];
end;

```

```

procedure slove;      //枚举S点集，找出与S点集连边中满流的边。。。
var
    i,j,p,y:longint;
begin
    ans[0]:=0;
    for i:=1 to 2*n do
        if visit[i] then
            begin
                p:=last[i];
                repeat
                    y:=adj[p];
                    if ((f[p]=0) and (c[p]<>0)) and (not visit[y]) then
                        begin
                            inc(ans[0]);
                            ans[ans[0]]:=i;
                            break;
                        end;
                    p:=next[p];
                    if p=0 then p:=g[i];
                until p=last[i];
            end;
    for i:=1 to ans[0] do
        begin
            if i<>1 then write(' ');
            write(ans[i]);
        end;
    writeln;
end;

```

## 1.2 生成树算法

### 1.2.1 生成树计数

一个完全图  $K_n$  有  $n^{n-2}$  棵生成树，即  $n$  个节点的带标号无根树有  $n^{n-2}$  个。

证明用到 **prufercode**：一棵  $n$  无根树的 **prufercode** 是这样转化的：每次选一个编号最小的叶节点，删除它，并把它所连的父亲节点的编号写下，直到这棵树剩下 2 个节点为止。那么生成的这  $n-2$  个数组成的序列就是这棵树的 **prufercode**。**prufercode** 和树是一一对应的，而一个长度为  $n-2$ ，每个数字的范围为  $[1, n]$  的序列一共有  $n^{n-2}$  种可能，所以  $n$  个节点的带标号无根树一共有  $n^{n-2}$  个。

以上是 Cayley 公式，它的一个应用： $n$  个节点，每个节点的度分别为  $d_1, d_2, \dots, d_n$ ，那么生成树的个数为  $\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\dots(d_n-1)!}$ 。因为顶点  $i$  在序列中出现了  $d_i - 1$  次。

对于完全二分图，两边的顶点分别为  $n, m$ ，那么生成树的个数为  $n^{m-1} * m^{n-1}$ 。

### 1.2.2 无向图的生成数计数 -MatrixTree 定理

给出一个无向图  $G = (V, E)$ ，求生成树个数。做法是构造一个  $n \times n$  的 Kirchhoff 矩阵。矩阵的对角线  $(i, i)$  的位置填的是第  $i$  个顶点的度，对于  $G$  的边  $(v_i, v_j)$  在矩阵  $(i, j)$  和  $(j, i)$  的位置填  $-1$  (若  $(i, j)$  有  $k$  条重边，那么矩阵  $(i, j)$  和  $(j, i)$  的位置填  $-k$ )，然后生成树的个数就是  $n \times n$  的矩阵的  $n - 1$  阶的行列式。具体做法就是删除任意的第  $r$  行  $r$  列，然后求矩阵的行列式。

### 1.2.3 无向带权图最小生成树计数

把所有的边按照边权从小到大排序，然后做 Kruskal。

假设已经处理了边权  $w_i < w$  的边，形成一个森林  $T$ ，现在考虑所有边权为  $w$  的边。

1、若一条边权为  $w$  的边  $(u, v)$  所连接的两个顶点在森林  $T$  中属于同一个块，那么  $(u, v)$  这条边是不可能存在于最小生成树的方案中，否则  $(u, v)$  可以存在于最小生成树的方案中。

2、把所有边权为  $w$ ，且根据森林  $T$  判断出可以存在于最小生成树方案中的边找出来，假设这些边集为  $E$ 。我们可以把森林  $T$  中的每一个块缩成一个点，那么用  $E$  中的边去连接  $T$ ，就形成了一些连通块。对于每一个连通块的方案数就是对这个连通块做一个生成树计数就可以了，然后把把这些连通块各自的方案数相乘就是选择边权为  $w$  的边的方案数。

3、算完边权为  $w$  的方案之后，就把这些边加入到  $T$  中，形成新的森林。

### 1.2.4 带限制的最小生成树问题

#### • Problem

无向带权连通图，每条边是黑色或白色。让你求一棵最小权的恰好有  $K$  条白色边的生成树。

#### • Solution

1、对于一个图，如果存在一棵生成树，它的白边数量为  $x$ ，那么就称  $x$  是合法白边数。所有的合法白边数组成一个区间  $[l, r]$ 。

2、对于一个图，如果存在一棵最小生成树，它的白边数量为  $x$ ，那么就称  $x$  是最小合法白边数。所有的最小合法白边数组成一个区间  $[l, r]$ 。

3、将所有白边追加权值  $x$  所得到的最小生成树，如果该树有  $a$  条白边。那么这棵树就是  $a$  条白边最小生成树的一个最优解。

所以可以二分得到一个最大的  $x$  使得所求的最小生成树的白边的最小值和最大值所组成的一个区间  $[l, r]$ ，若  $K \in [l, r]$ ，则该最小生成树就是最优解。其实只要求出最大的一个  $x$  使得最小生成树中最大白边数量不小于  $K$  即可。记录答案的时候，必须把枚举的  $x$  加上，然后在最后减去  $K * x$ ，如果直接在计算的时候加原来白边的长度的话，有可能超过  $K$  条边。

对于黑、白不同的边，他们内部的顺序是一样的，所以一开始将黑白边分别排序，这样在二分判断的时候只需要  $O(M)$  的时间复杂度去合并排序的边了，其中  $M$  是边数。总的时间复杂度为  $O(M \log W + N \log N)$  其中  $N$  是顶点数， $W$  是边权。

#### • Expansion

1、限制某个节点  $node$  的度数恰好为  $K$  的最小生成树。解法就是把和  $node$  关联的边标记为白边，其余的边为黑边，然后就转化为上面的经典问题了。

## 1.3 图算法

### 1.3.1 无向图割点

```
/*
 * dfn[] 表示访问时的编号, lowlink[] 表示不经过父子边能访问到的dfn的最小值
 * 对于v的子节点u, 若lowlink[u]>=dfn[v], 则v是一个割点。不过对于根节点要特
 * 判, 若根节点的子节点个数>1, 那么根节点就是割点。
 *
 * 以下算法不能处理重边, 如果要处理重边, 则需要加一个判断边的id是否被访问
 * 程序默认1为根节点
 */
```

```
void dfs(int node, int fa){
    dfn[node]=lowlink[node]=++total;
    for (int i=0; i<g[node].size(); i++){
        if (g[node][i]!=fa){
            if (!dfn[g[node][i]]){
                dfs(g[node][i], node);
                lowlink[node]=min(lowlink[node], lowlink[g[node][i]]);
                if (lowlink[g[node][i]]>=dfn[node]){
                    if (node==1) ++son; else cutPoint[node]=true;
                }
            } else lowlink[node]=min(lowlink[node], dfn[g[node][i]]);
        }
    }
}
```

### 1.3.2 无向图割边

dfn[node]表示节点node访问的时间, lowlink[node]表示节点node不通过父子边能访问到的访问时间最早的节点的访问时间

对于u->v这条边, 若lowlink[v]>dfn[u], 那么这就是一条割边

```
void dfs(int node){
    ++sign;
    dfn[node]=lowlink[node]=sign;
    for (int i=0; i<g[node].size(); i++){
        if (!vis[g[node][i].id]){
            vis[g[node][i].id]=true;
            if (dfn[g[node][i].y]==0){
                dfs(g[node][i].y);
                lowlink[node]=min(lowlink[node], lowlink[g[node][i].y]);
                if (lowlink[g[node][i].y]>dfn[node])
                    cout<<g[node][i].id<<endl;
            } else lowlink[node]=min(lowlink[node], dfn[g[node][i].y]);
        }
    }
}
```

### 1.3.3 树的同构

【题目】给出一棵  $n$  个节点的树，用  $m$  种颜色对其节点染色，问有多少种不同的染色方案。

【思路】首先要处理子树的同构问题，对于任意自同构，质心是不动点（质心：直径的中点，如果直径长度是奇数，则质心在边上）。

设  $f(T)$  表示以树  $T$  本质不同的染色数，设  $r$  的儿子中共有  $k$  个同构等价类，分别为  $T_1, T_2, \dots, T_k$ ，数量分别为  $c_1, c_2, \dots, c_k$ 。对于任意等价类分别计算  $f(T_i)$ ， $f(T)$  等于不同构的子树染色数的乘积，对于每一个等价类  $T_i$ ，一共有  $c_i$  个，那么对于这  $c_i$  个等价类的染色数等价于用  $f(T_i)$  种颜色对  $c_i$  个物品染色，这个问题等价于方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_{f(T_i)} = c_i$  的方案数  $C(f(T_i) + c_i - 1, c_i)$ 。

对于子树的同构判断，我们可以计算每一棵子树  $T_i$  的 hash 值。

设  $H_i$  为树  $T_i$  的 hash 值，树  $T$  有  $k$  棵子树，分别为  $T_1, T_2, \dots, T_k$ ，那么树  $T$  的 hash 值  $H(T) = (((((a * p \text{ xor } H_1) \bmod q) * p \text{ xor } H_2) \bmod q) \dots * p \text{ xor } H_k) \bmod q) * b \bmod q$ ，其中  $a, b, p, q$  为常量， $H_i$  需要从小到大排序。

### 1.3.4 树的分治

```
/*
* active[] 表示当前子树的节点
* nodeList 存储当前子树的节点
* visit[] 表示已经用作根个节点 (即已经被计算过)
* data 存储当前子树到根的路径的长度以及该路径属于哪一棵子树
* 算法的具体思想就是找当前子树的中心，以中心为根节点，统计子树通过根节点
* 连接起来的长度 <= limit 的路径。然后再统计删除该根节点后个棵子树的情况，一直递归。
* 时间复杂度  $O(N \log N)$ ，空间复杂度  $O(n)$ 
*/

#include <vector>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

struct node_data{
    int node, len;
    node_data(int node=0, int len=0): node(node), len(len){}
};

const int MAXN=100001;

int n, limit;
bool active[MAXN], visit[MAXN];
int total[MAXN];
vector<int> nodeList;
vector<node_data> g[MAXN];
vector< pair<int, int> > data;
```



```

void init(){
    int x,y,len;
    memset(g,0,sizeof(g));
    for (int i=1; i<n; i++){
        scanf("%d%d%d",&x,&y,&len);
        --x,--y;
        g[x].push_back(node_data(y,len));
        g[y].push_back(node_data(x,len));
    }
}

int newRoot(int node, int fa, int &root, int &nowMax, int totalNode){
    int maxSize=0,sum=1;
    for (int i=0; i<g[node].size(); i++)
        if (g[node][i].node!=fa && active[g[node][i].node]){
            int temp=newRoot(g[node][i].node,node,root,nowMax,totalNode);
            maxSize=max(maxSize,temp);
            sum+=temp;
        }
    maxSize=max(maxSize,totalNode-sum);
    if (maxSize<nowMax){
        root=node;
        nowMax=maxSize;
    }
    return sum;
}

void getSubtree(int node, int fa, int len, int &part){
    for (int i=0; i<g[node].size(); i++){
        if (active[g[node][i].node] && g[node][i].node!=fa){
            if (g[node][i].len+len>limit) continue;
            data.push_back(make_pair(g[node][i].len+len,part));
            getSubtree(g[node][i].node,node,g[node][i].len+len,part);
        }
    }
}

void getNodeList(int node, int fa){
    active[node]=true;
    nodeList.push_back(node);
    for (int i=0; i<g[node].size(); i++)
        if (g[node][i].node!=fa && !visit[g[node][i].node])
            getNodeList(g[node][i].node,node);
}

long long getAnswer(int node, int fa){
    nodeList.clear();
}

```

```

getNodeList(node,fa);
int root,nowMax=n;
newRoot(node,fa,root,nowMax,nodeList.size());

int part=0;
data.clear();
for (int i=0; i<g[root].size(); i++)
if (active[g[root][i].node] && g[root][i].len<=limit){
    data.push_back(make_pair(g[root][i].len,part));
    getSubtree(g[root][i].node,root,g[root][i].len,part);
    ++part;
}
sort(data.begin(),data.end());

long long ret=data.size();
int le=-1,ri=data.size()-1;
while (ri>0){
    while (le+1<ri && data[le+1].first+data[ri].first<=limit){
        ++le;
        ++total[data[le].second];
    }
    while (le>=ri) --total[data[le--].second];
    ret+=le+1-total[data[ri].second];
    --ri;
}
for (int i=0; i<part; i++) total[i]=0;
for (int i=0; i<nodeList.size(); i++) active[nodeList[i]]=false;

visit[root]=true;
for (int i=0; i<g[root].size(); i++)
if (!visit[g[root][i].node])
ret+=getAnswer(g[root][i].node,root);
return ret;
}

void solve(){
    memset(visit,0,sizeof(visit));
    cout<<getAnswer(0,-1)+n<<endl;
}

int main(){
    int SIZE=1<<23;
    char *p=(char*)malloc(SIZE)+SIZE;
    __asm__("movl %0, %%esp\n" :: "r"(p));
    while (scanf("%d%d",&n,&limit)!=EOF){
        init();
        solve();
    }
}

```

```

    return 0;
}

```

## 1.4 哈密尔顿回路

求一个图的哈密尔顿回路是一个 NP 问题，只能用搜索解决。当定点数  $n$  比较小的时候，可以用状态压缩 Dp 解决。当  $n$  比较大的时候，只能用搜索解决。但是，关于哈密尔顿回路，有一个性质：

Ore 性质：对所有不邻接的不同顶点对  $x$  和  $y$ ，有

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n$$

那么这个图一定存在哈密尔顿回路，且可以用一下方法求回路，时间复杂度接近  $O(n^2)$

1) 从任意一个顶点开始，在它的任意一端邻接一个顶点，构造一条越来越长的路径，直到不能再加长为止。设路径为

$$\gamma : y_1 - y_2 - \cdots - y_m$$

2) 检查  $y_1$  和  $y_m$  是否邻接。

- . a) 如果  $y_1$  和  $y_m$  不邻接，则转到 3，否则， $y_1$  和  $y_m$  是邻接的，转到 b。
- . b) 如果  $m = n$ ，则停止构造并输出哈密尔顿回路  $y_1 - y_2 - \cdots - y_m - y_1$ ，否则，转到 c。
- . c) 找出一个不在  $\gamma$  上的顶点  $z$  和在  $\gamma$  上的顶点  $y_k$ ，满足  $z$  和  $y_k$  是邻接的，将  $\gamma$  用下面的长度为  $m + 1$  的路径来替代

$$z - y_k - \cdots - y_m - y_1 - \cdots - y_{k-1}$$

. 转到 2)

3) 找出一个顶点  $y_k (1 < k < m)$ ，满足  $y_1$  和  $y_k$  是邻接的，且  $y_{k-1}$  和  $y_m$  也是邻接的，将  $\gamma$  用下面的路径来替代

$$y_1 - \cdots - y_{k-1} - y_m - \cdots - y_k$$

. 转到 2)

## 1.5 最近公共祖先算法

### 1.5.1 Tarjan

```

/*
 * the node is 1-base
 */
#include <vector>
#include <cstdio>
#include <cstring>
using namespace std;

const int MAXN=100001;
const int MAXM=100001;

```

```

struct query{
    int node,id;
    query(int node=0, int id=0):node(node),id(id){}
};

int n,m;
bool visit[MAXN];
int lca[MAXM];
int father[MAXN];
vector<int> g[MAXN];
vector<query> q[MAXN];

void init(){
    int x,y;
    memset(g,0,sizeof(g));
    scanf("%d",&n);
    for (int i=1; i<n; i++){
        scanf("%d%d",&x,&y);
        g[x].push_back(y);
        g[y].push_back(x);
    }
}

int find(int k){
    return father[k]!=k?father[k]=find(father[k]):k;
}

void dfs(int node, int fa){
    visit[node]=true;
    for (int i=0; i<g[node].size(); i++)
        if (g[node][i]!=fa){
            dfs(g[node][i],node);
            father[g[node][i]]=node;
        }

    for (int i=0; i<q[node].size(); i++)
        if (visit[q[node][i].node]){
            lca[q[node][i].id]=find(q[node][i].node);
        }
}

void solve(){
    int x,y;
    scanf("%d",&m);
    memset(q,0,sizeof(q));
    for (int i=0; i<m; i++){
        scanf("%d%d",&x,&y);
    }
}

```

```

        q[x].push_back(query(y,i));
        q[y].push_back(query(x,i));
    }
    memset(visit,0,sizeof(visit));
    for (int i=1; i<=n; i++) father[i]=i;
    dfs(1,-1);
    for (int i=0; i<m; i++) printf("%d\n",lca[i]);
}

int main(){
    init();
    solve();
    return 0;
}

```

### 1.5.2 祖先树

```

#include <vector>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>
using namespace std;

const int MAXN=100001;
const int maxDeep=17;

/*
 * The ancestor-tree can use to calc LCA with O(logN) Complexity
 * also maintain some information from node i to i's ancestor
 * deep[node] is the distance from root to node
 * father[node][i] is the 2^i ancestor of node
 */

int n,m;
int deep[MAXN],father[MAXN][maxDeep];
vector<int> g[MAXN];

void init(){
    scanf("%d",&n);
    memset(g,0,sizeof(g));
    int x,y;
    for (int i=0; i<n-1; i++){
        scanf("%d%d",&x,&y);
        g[x].push_back(y);
        g[y].push_back(x);
    }
}

```

```

void dfs(int node, int fa){
    //update father[node][] use the information calc before
    for (int i=1; i<maxDeep; i++)
        father[node][i]=father[father[node][i-1]][i-1];

    for (int i=0; i<g[node].size(); i++)
        if (g[node][i]!=fa){
            deep[g[node][i]]=deep[node]+1;
            father[g[node][i]][0]=node;
            dfs(g[node][i],node);
        }
}

int LCA(int x, int y){
    //choose the farther one from root and jump up until x,y has
    //the same distance from root.
    if (deep[x]<deep[y]) swap(x,y);
    int delta=deep[x]-deep[y];
    for (int i=0; i<maxDeep; i++)
        if (delta & (1<<i)) x=father[x][i];

    //when the x's,y's (2^i)-th father is different,both of them
    //should jump up for 2^i step
    for (int i=maxDeep-1; i>=0; i--){
        if (father[x][i]!=father[y][i]){
            x=father[x][i],y=father[y][i];
        }

        //there are two situtation at last
        return x!=y?father[x][0]:x;
    }

void solve(){
    memset(father,0,sizeof(father));
    deep[1]=0;
    dfs(1,0);

    scanf("%d",&m);
    int x,y;
    for (int i=0; i<m; i++){
        scanf("%d%d",&x,&y);
        printf("%d\n",LCA(x,y));
    }
}

int main(){
    init();

```

```

    solve();
    return 0;
}

```

## 1.6 字符串算法

### 1.6.1 KMP

```

/*
str为主串,mode为模式串,返回匹配的位置从0开始计数。
next[i]表示匹配到模式串第i个位置失败后应该尝试匹配next[i]这个位置
*/
void calc_next(string &st){
    int i=0,j=-1; next[0]=-1;
    while (i<st.length()){
        if (j<0 || st[i]==st[j]){
            ++i;
            ++j;
            next[i]=j;
        } else j=next[j];
    }
}

void KMP(string &str, string &mode){
    calc_next(mode);
    int i=0,j=0,modelen=mode.size();
    while (i<str.length()){
        if (j<0 || str[i]==mode[j]){
            ++i;
            ++j;
        } else j=next[j];

        if (j>=modelen){
            cout<<i-mode.length()<<endl;
            j=next[j];
        }
    }
}

```

### 1.6.2 扩展 KMP

```

/*
str是主串,mode是模式串。
next[i]表示以模式串第i个位置开始的后缀和模式串的最长公共前缀的长度。
extend[i]表示主串第i个位置开始的后缀和模式串的最长公共前缀。
*/

```

```

void calc_next(string &st){
    int prev,pos,j=-1;
    next[0]=st.length();
    for (int i=1; i<st.length(); i++,j--){
        if (j<0 || i+next[i-prev]>=pos){
            if (j<0) j=0,pos=i;
            while (pos<st.length() && st[pos]==st[j]){
                ++pos,++j;
            }
            next[i]=j,prev=i;
        } else next[i]=next[i-prev];
    }
}

void getExtend(string &str, string &mode){
    calc_next(mode);
    int prev,pos,j=-1;
    for (int i=0; i<str.length(); i++,--j){
        if (j<0 || i+next[i-prev]>=pos){
            if (j<0) j=0,pos=i;
            while (pos<str.length() && j<mode.length() && str[pos]==mode[j]){
                ++pos,++j;
            }
            extend[i]=j,prev=i;
        } else extend[i]=next[i-prev];
    }
}

```

### 1.6.3 回文串 Manacher 算法

Manacher算法的主要思想就是利用对称关系，记录一个对称轴以及回文串长度+对称轴的最大位置，然后算出以当前字符为中心的最长回文串。

```

#include <string>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>
using namespace std;

const int MAXN=100001;

string st;
int ret[MAXN*2];

int Manacher(string &st){
    //偶数位置填一个没有出现的字符
    string str="#";
    for (int i=0; i<st.size(); i++){

```



```

        str+=st[i];
        str+='#';
    }
    //ret[i]表示以i这个字符为中心，最长的回文串长度减1
    int MAX=0,pos;
    for (int i=1; i<=str.size(); i++){
        if (MAX>i) ret[i]=min(ret[2*pos-i],MAX-i); else ret[i]=1;
        while (str[i-1-ret[i]]==str[i-1+ret[i]]) ++ret[i];
        if (ret[i]+i>MAX){
            MAX=ret[i]+i;
            pos=i;
        }
    }
    MAX=2;
    for (int i=1; i<=str.size(); i++) MAX=max(MAX,ret[i]);
    return MAX-1;
}

void init(){
    cin>>st;
}

void solve(){
    cout<<Manacher(st)<<endl;
}

int main(){
    init();
    solve();
    return 0;
}

```

#### 1.6.4 最小表示法

```

#include <string>
#include <cstring>
#include <iostream>
using namespace std;

string st;

void init(){
    cin>>st;
}

int calc_min_pos(string &st){
    int i=0,j=1,k=0,diff,len=st.size();
    while (i<len && j<len && k<len){

```

```

        diff=st[(i+k)%len]-st[(j+k)%len];
        if (diff==0) ++k; else{
            if (diff>0) i+=k+1; else j+=k+1;
            if (i==j) ++j;
            k=0;
        }
    }
    return min(i,j);
}

void solve(){
    cout<<calc_min_pos(st)<<endl;
}

int main(){
    init();
    solve();
    return 0;
}

```

### 1.6.5 Suffix

Suffix基本步骤:

1、对字符串出现的字符进行排序，如果字符串出现的不同字母个数相对较少就用基数排序，在字符串的最后加上一个字典序最小的字母，这样可以防止例如AAAAA的时候，Suffix无法计算出Rank。如果遇到多个字符串，一般用不同且未出现过的字符隔开。

2、计算SA、Rank以及height数组。

3、后缀数组最常用到height数组的性质， $height[i]$ 表示排名为 $i$ 和 $i-1$ 的后缀的最长公共前缀。

Suffix题目类型:

1、求两个串后缀的最长公共前缀：对height做一次RMQ处理，然后就可以在 $O(1)$ 时间内回答。

2、可重叠最长重复字符串：由于可重复，所以直接求height数组中的最大值即可。

3、不可重叠最长重复字符串(pku1743)：二分字符串长度len，把height中连续 $\geq len$ 的分在一个组，然后在这个组找到最大、最小的 $sa[i], sa[j]$ 如果 $sa[i]-sa[j] \geq len$ 就有解。

4、可重叠的k次最长重复字符串(pku3261)：同样二分字符串长度len，把height中连续 $\geq len$ 的分在一个组，然后判断这个组元素个数是否不小于k。

5、不同子串的个数(spoj705)：每个子串一定是某个后缀的前缀，那么原问题等价于求所有后缀之间的不相同的前缀的个数。如果所有的后缀按照 $suffix(sa[1]), suffix(sa[2]), \dots, suffix(sa[n])$ 的顺序计算，不难发现，对于每一次新加进来的后缀 $suffix(sa[k])$ ，它将产生 $n-sa[k]+1$ 个新的前缀。但是其中有 $height[k]$ 个是和前面的字符串的前缀是相同的。所以 $suffix(sa[k])$ 将“贡献”出 $n-sa[k]+1-height[k]$ 个不同的子串。累加后便是原问题的答案。这个做法的时间复杂度为 $O(n)$ 。

6、一个串的最长回文字串(pku3774): 把原串反过来加在原串后, 用未出现字符隔开, 然后对height做RMQ处理, 然后问题就变成求两个串某两个后缀的最长公共子串。

7、两个串的最长连续公共子串: 用一个未出现的符号连接两串, 然后求满足 $sa[i], sa[i-1]$ 属于不同串的 $height[i]$ 的最大值。

8、长度不小于k 的公共子串的个数(pku3415): 二分答案len, 然后把height分组, 看是否存在一组height值 $\geq len$ 且出现在每个串。

```
/*
 * sa[i]表示排名为i的后缀在原串的起始位置为sa[i] (从1开始计数)
 * rank[i]表示以第i个位置开始的后缀在所有后缀中的排名(从1开始计数)
 * sa[rank[i]]==i、rank[sa[i]]==i
 * height[i]表示排名为i的后缀与排名为i-1的后缀的最长公共前缀
 */

#include <string>
#include <cstring>
#include <iostream>
using namespace std;

const int MAXN=100001;
const int maxChar=256;

int rank[MAXN], rank1[MAXN], rank2[MAXN], sa[MAXN],
    tmpsa[MAXN], height[MAXN], countrank[MAXN];

void suffixArray(string &st){
    int tot=0, len=st.size();
    int number[maxChar];
    bool appear[maxChar];
    memset(appear, 0, sizeof(appear));
    memset(number, 0, sizeof(number));
    for (int i=0; i<len; i++) appear[st[i]]=true;
    for (int i=0; i<maxChar; i++)
        if (appear[i]) number[i]=++tot;

    memset(countrank, 0, sizeof(countrank));
    for (int i=1; i<=len; i++){
        rank[i]=number[st[i-1]];
        ++countrank[rank[i]];
    }
    for (int i=1; i<=maxChar; i++) countrank[i]+=countrank[i-1];
    for (int i=len; i>=1; i--) sa[countrank[rank[i]]--]=i;

    int l=1;
    while (l<=len){
```

```

for (int i=1; i<=len; i++){
    rank1[i]=rank[i];
    if (i+1<=len) rank2[i]=rank[i+1]; else
        rank2[i]=0;
}
memset(countrank,0,sizeof(countrank));
for (int i=1; i<=len; i++) ++countrank[rank2[i]];
for (int i=1; i<=len; i++) countrank[i]+=countrank[i-1];
for (int i=len; i>=1; i--) tmpsa[countrank[rank2[i]]--]=i;

memset(countrank,0,sizeof(countrank));
for (int i=1; i<=len; i++) ++countrank[rank1[i]];
for (int i=1; i<=len; i++) countrank[i]+=countrank[i-1];
for (int i=len; i>=1; i--) sa[countrank[rank1[tmpsa[i]]]--]=tmpsa[i];

rank[sa[1]]=1;
for (int i=2; i<=len; i++){
    rank[sa[i]]=rank[sa[i-1]];
    if (!(rank1[sa[i]]==rank1[sa[i-1]]
        && rank2[sa[i]]==rank2[sa[i-1]]))
        ++rank[sa[i]];
}
l+=1;
}

l=0; height[1]=0;
for (int i=1; i<=len; i++)
    if (rank[i]>1){
        int j=sa[rank[i]-1];
        while (i+1<=len && j+1<=len && st[i+1-1]==st[j+1-1]) ++l;
        height[rank[i]]=l;
        if (l) --l;
    } else height[rank[i]]=0;
}

```

## 2 数据结构

### 2.1 Splay

/\*  
 \* Splay 多数用来维护一段序列，通常这一段序列又需要 reverse 操作，或者删除一段子序列  
 等  
 \* Splay 任意节点 x 提升为节点 y 的儿子，一般可以在这个操作的基础上完成其他操作  
 \* 例如要删除一段范围 [x,y] 的序列，那么可以把 x-1 这个节点提升为根，再把 y+1 这个节点  
 提升  
 \* 为 x-1 的儿子（右儿子），然后 y+1 这个节点的左儿子就是 [x,y] 这一段序列  
 \*

- \* Splay 的操作通常都是把一段范围的序列变为某个节点的一棵子树，然后就可以对这棵子树
- \* 进行操作
- \*
- \* 因为空序列不好处理，所以 Splay 一般都会加入两个不影响结果的辅助节点（头、尾），至于
- \* 怎样不影响结果，要根据题目来设定。
- \*
- \* Splay 提升某个节点的时候，有两种情况。一种是先调用 select 得到节点 x，然后再提升 x，
- 这样
- \* 在 splay 操作时，就不需要 pushdown 标签，因为在 select 过程中已经 pushdown 了。
- \* 但如果是已知某个节点 x，需要 splay 提升，这是在 splay 提升的过程中，就要注意 pushdown
- 标签了
- \* 在对 Splay 操作时，要时刻注意是否要进行 pushdown 操作
- \*
- \*
- \* root : SplayTree 的根节点，要注意时刻维护!!!
- \* build(data,l,r,fa) : 如果初始时给出序列，那么可以用 build 来建立一棵平衡的
- SplayTree
- \* rotate(x) : 将节点 x 往上旋转（左右旋转都没问题）
- \* splay(x,fa) : 将节点 x 提升为 fa 的儿子（当 fa=NULL 即将 x 提升为根）
- \* select(x,k) : 一般调用为 select(root,k)，即获得第排名为 k 的节点，在这个过程
- \* 中需要先 pushdown 下传标签
- \* join(x,y) : 合并 x, y 两棵 SplayTree，其中 y 在 x 的右边。首先将 x 最右的节点提升为
- \* x 的根，此时 x 无右子树，所以直接将 y 连接为 x 的右子树
- \* del(k) : 删除排名为 k 的节点。首先将第 k 个节点提升为根，然后直接合并根的两棵
- \* 子树，注意任意时刻 Splay 都最少保持有 2 个节点（开始加入的 2 个节点）
- \* insert(key,k) : 在第 k 个节点前插入一个 key，首先将节点 k-1 提升为根，然后将节点 k
- 提升
- \* 为 k-1 的儿子，此时节点 k 无左子树，然后将 key 插入到 k 的左子树中。
- \* 要在第 k 个节点之前插入一段连续的数的操作和一个数差不多。
- \*/

题目: reginoal 2012 HangZhou A problem

1: add x

Starting from the arrow pointed element, add x to the number on the clockwise first k2 elements.

2: reverse

Starting from the arrow pointed element, reverse the first k1 clockwise elements.

3: insert x

Insert a new element with number x to the right (along clockwise) of the arrow pointed element.

4: delete

Delete the element the arrow pointed and then move the arrow to the right element.

5: move x

x can only be 1 or 2. If x = 1, move the arrow to the left(along the counterclockwise) element, if x = 2 move the arrow to the right element.

6: query

Output the number on the arrow pointed element in one line.

```

#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <algorithm>
using namespace std;

#define REP(i,st,ed) for (int i=st; i<ed; i++)

const int MAXN = 102400;

struct splayNode{
    splayNode *fa,*ch[2];
    bool rev;
    int size,key,add;
    splayNode(int key=0){
        this->key=key;
        size=1,add=0,rev=false;
        fa=ch[0]=ch[1]=NULL;
    }
    void clear(){
        if (ch[0]) ch[0]->clear();
        if (ch[1]) ch[1]->clear();
        delete this;
    }
    void update(){
        size=(ch[0]?ch[0]->size:0)+(ch[1]?ch[1]->size:0)+1;
    }
    void down(){
        if (add){
            if (ch[0]) ch[0]->key+=add,ch[0]->add+=add;
            if (ch[1]) ch[1]->key+=add,ch[1]->add+=add;
            add=0;
        }
        if (rev){
            swap(ch[0],ch[1]);
            if (ch[0]) ch[0]->rev^=1;
            if (ch[1]) ch[1]->rev^=1;
            rev=false;
        }
    }
    splayNode* rightmost(){
        down();
        if (ch[1]) return ch[1]->rightmost();
        return this;
    }
} *root,*temp;

typedef splayNode* ptr;

```

```

int n,m,k1,k2,data[MAXN];

ptr build(int data[], int l, int r, ptr fa=NULL){
    int mid=(l+r)/2;
    ptr node=new splayNode(data[mid]);
    node->fa=fa;
    if (l<mid) node->ch[0]=build(data,l,mid-1,node);
    if (mid<r) node->ch[1]=build(data,mid+1,r,node);
    node->update();
    return node;
}

void rotate(ptr x){
    ptr y=x->fa;
    if (x->fa==y->fa) y->fa->ch[y->fa->ch[1]==y]=x;
    int o=y->ch[0]==x;
    if (y->ch[!o]==x->ch[o]) x->ch[o]->fa=y;
    x->ch[o]=y;
    y->fa=x;
    y->update();
    x->update();
}

void splay(ptr x, ptr fa){
    while (x->fa!=fa){
        /* this condition are need sometime
        * if (x->fa->fa) x->fa->fa->down();
        * if (x->fa) x->fa->down();
        * x->down();
        */
        if (x->fa->fa==fa) rotate(x); else{
            int o1=x->fa->ch[0]==x,o2=x->fa->fa->ch[0]==x->fa;
            if (o1==o2) rotate(x->fa),rotate(x); else rotate(x),rotate(x);
        }
    }
}

ptr select(ptr x, int k){
    x->down();
    if (x->ch[0]){
        if (x->ch[0]->size>=k) return select(x->ch[0],k);
        k-=x->ch[0]->size;
    }
    if (k==1) return x;
    return select(x->ch[1],k-1);
}

ptr join(ptr x, ptr y){

```

```

    ptr temp=x->rightmost();
    splay(temp,NULL);
    temp->ch[1]=y;
    y->fa=temp;
    temp->update();
    return temp;
}

void del(int k){
    root=select(root,k);
    splay(root,NULL);
    root->ch[0]->fa=root->ch[1]->fa=NULL;
    root=join(root->ch[0],root->ch[1]);
}

void insert(int key, int k){
    root=select(root,k-1);
    splay(root,NULL);
    temp=select(root,k);
    splay(temp,root);
    temp->ch[0]=new splayNode(key);
    temp->ch[0]->fa=temp;
    temp->update();
    root->update();
}

void init(){
    REP(i,1,n+1) scanf("%d",&data[i]);
    root=build(data,0,n+1);
}

void solve(){
    char st[10];
    int number;
    REP(i,0,m){
        scanf("%s",st);
        if (st[0]=='a'){
            scanf("%d",&number);
            root=select(root,1);
            splay(root,NULL);
            temp=select(root,k2+2);
            splay(temp,root);
            temp->ch[0]->key+=number;
            temp->ch[0]->add+=number;
        } else if (st[0]=='r'){
            root=select(root,1);
            splay(root,NULL);
            temp=select(root,k1+2);

```



```

        splay(temp,root);
        root->ch[1]->ch[0]->rev^=1;
    } else if (st[0]=='i'){
        scanf("%d",&number);
        insert(number,3);
    } else if (st[0]=='d'){
        del(2);
    } else if (st[0]=='m'){
        scanf("%d",&number);
        if (number==1){
            temp=select(root,root->size-1);
            int key=temp->key;
            del(root->size-1);
            insert(key,2);
        } else{
            temp=select(root,2);
            int key=temp->key;
            del(2);
            insert(key,root->size);
        }
    } else if (st[0]=='q'){
        root=select(root,2);
        splay(root,NULL);
        printf("%d\n",root->key);
    }
}
root->clear();
}

int main(){
    int ca=0;
    while (scanf("%d%d%d%d",&n,&m,&k1,&k2)){
        if (n==0 && m==0 && k1==0 && k2==0) return 0;
        printf("Case # %d:\n",++ca);
        init();
        solve();
    }
    return 0;
}

```

## 2.2 左偏树

```

/*
* 左偏树应用快速合并两个堆
* 左偏树的节点有4个信息，分别是key，到最近的外部节点的距离dist
* 左右子树的指针left, right
*
* 左偏树的性质:

```

```

* 1、节点的key小于等于左右子节点的key
* 2、节点的左子树的dist不小于右子树的dist
* 3、节点的dist等于其右子树的dist+1，特别地空子树的dist=-1
* 4、一棵N个节点的左偏树的距离最多为log(N+1)-1
*
* 左偏树的操作是建立在merge之上，合并两棵左偏树A,B，以最小堆为例：
* 1、若A为空树，则返回B，若B为空树，返回A
* 2、如果A的key大于B的key，则交换A, B，然后继续合并
* 3、将B和A的右子树合并，如果合并之后A的右子树的dist大于左子树的
* dist，则交换A的左右子树。若合并后A的右子树为空，则A的dist为0，
* 否则A的dist等于右子树的dist+1
*
* 左偏树的操作：
* 1、插入：相当于合并两棵左偏树
* 2、删除根节点：合并根节点的左叉子树
* 3、查询最值：根节点
*
* 给出N个节点，构建一棵N个节点的左偏树。
* 1、首先把所有节点加入到队列里面，每一个节点都可以看作一棵左偏树
* 2、每次选队列最前端的两个节点合并，把合并后的左偏树放到队尾。
* 3、这样合并N-1次就可以得到一棵左偏树，时间复杂度为O(N)
*
* 用指针实现的左偏树，在实现清除操作时，要注意指针所指的数据不能被
* delete多次，否则会出现运行错误
*
* 左偏树的操作的时间复杂度：
* 构建          : O(N)
* 插入          : O(logN)
* 查询最值      : O(1)
* 合并          : O(logN)
*/

```

//以下是用指针实现的根的key为最小值的左偏树

```

#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;

struct leftistNode{
    int key,dist;
    leftistNode *left,*right;
    leftistNode(int key=0):key(key){
        dist=0;
        left=right=NULL;
    }
};

leftistNode *mergeNode(leftistNode *a, leftistNode *b){

```

```

    if (a==NULL) return b;
    if (b==NULL) return a;
    if (a->key>b->key) swap(a,b);
    a->right=mergeNode(a->right,b);
    if (a->right!=NULL){
        if (a->left==NULL || a->left->dist<a->right->dist)
            swap(a->left,a->right);
    }
    if (a->right==NULL){
        a->dist=0;
    } else{
        a->dist=a->right->dist+1;
    }
    return a;
}

struct leftistTree{
    leftistNode *root;

leftistTree():root(NULL){}

    void insert(leftistNode *rhs){
        root=mergeNode(root,rhs);
    }

    void insert(int key){
        leftistNode *temp=new leftistNode(key);
        insert(temp);
    }

    void del(){
        if (root==NULL) return;
        leftistNode *temp=mergeNode(root->left,root->right);
        delete root;
        root=temp;
    }

    void _clear(leftistNode *root){
        if (root==NULL) return;
        if (root->left!=NULL) _clear(root->left);
        if (root->right!=NULL) _clear(root->right);
        delete root;
    }

    void clear(){
        _clear(root);
        root=NULL;
    }
}

```

```

    leftistNode *askMax(){
        return root;
    }
};

leftistTree merge(leftistTree a, leftistTree b){
    leftistTree ret;
    ret.root=mergeNode(a.root,b.root);
    return ret;
}

/*
 * 非指针版的实现就是事先开一个buffer存储数据
 * 以下是z oj2334的程序
 */

#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;

const int MAXN=100001;

struct leftistNode{
    int key,dist,left,right;

    leftistNode(int key=0):key(key){
        dist=0;
        left=right=0;
    }
};

leftistNode buffer[MAXN];

int mergeNode(int A, int B){
    if (!A) return B;
    if (!B) return A;
    if (buffer[A].key<buffer[B].key) swap(A,B);
    buffer[A].right=mergeNode(buffer[A].right,B);
    if (!buffer[B].left ||
        buffer[buffer[A].left].dist<buffer[buffer[A].right].dist)
        swap(buffer[A].left,buffer[A].right);
    if (!buffer[A].right){
        buffer[A].dist=0;
    } else buffer[A].dist=buffer[B].dist+1;
    return A;
}

```

```

struct leftistTree{
    int root;
    leftistTree(int root=0):root(root){}

    void insert(int pos){
        root=mergeNode(root,pos);
    }

    int del(){
        int temp=root;
        root=mergeNode(buffer[root].left,buffer[root].right);
        return temp;
    }

    int top(){
        return root;
    }
};

leftistTree merge(leftistTree &a, leftistTree &b){
    return leftistTree(mergeNode(a.root,b.root));
}

int n;
int number[MAXN],father[MAXN];
leftistTree heap[MAXN];

void init(){
    for (int i=1; i<=n; i++) scanf("%d",&number[i]);
}

int find(int k){
    int x,y=k;
    while (father[y]!=y) y=father[y];
    while (k!=y){
        x=father[k];
        father[k]=y;
        k=x;
    }
    return y;
}

void solve(){
    int x,y,m,total=0;
    for (int i=1; i<=n; i++){
        father[i]=i;
        buffer[++total]=leftistNode(number[i]);
    }
}

```

```

        heap[i].root=i;
    }
    scanf("%d",&m);
    for (int i=0; i<m; i++){
        scanf("%d%d",&x,&y);
        x=find(x),y=find(y);
        if (x==y){
            printf("%d\n",-1);
        } else{
            father[y]=x;
            heap[x]=merge(heap[x],heap[y]);
            int pos=heap[x].del();
            buffer[pos]=leftistNode(buffer[pos].key/2);
            printf("%d\n",buffer[pos].key);
            heap[x].insert(pos);
        }
    }
}

int main(){
    while (scanf("%d",&n)!=EOF){
        init();
        solve();
    }
    return 0;
}

```

## 2.3 树链剖分

```

/*
* nextNode[i]表示树链剖分时第i个节点的下一个节点，如果没有则为-1
*
* chain[i-th]存储第i条链的三个信息：链头的父亲节点、链头及链尾节
* 点在线段树中的编号。
*
* nodeInfo[i]存储树中第i个节点的两个信息：在线段树中的编号pos，
* 所属的链的编号part。
*
* 树链剖分的步骤：
* 1、遍历整棵树，找子树节点个数最大的子节点作为主链。
* 2、遍历轻重边，把原树上的节点与其在线段树的节点对应。
* 记录每条链在线段树中的位置以及链头所链接的父亲节点。
* 3、在询问路径时，从一个节点一直往LCA走，直到查询节点
* 和LCA在同一条链为止。
*
* 每次询问的时间复杂度为 $O((\log N)^2)$ 

```

```

*
* 本程序的例题：询问路径中节点的最大值。把某个节点的值
* 增加一个值。
*
*/

#include <vector>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;

#pragma comment(linker, "/STACK:16777216")

const int MAXN=110001;
const int MAXM=110001;

struct query{
    int node,id;
    query(int node=0, int id=0):node(node),id(id){}
};

struct opt_data{
    char ch;
    int U,V;
};

struct node_data{
    int pos,part;
};

struct chain_data{
    int father,le,ri;
};

int n,m;
bool visit[MAXN];
int lca[MAXM];
int father[MAXN],tree[4*MAXN],nextNode[MAXN];
opt_data opt[MAXM];
vector<int> graph[MAXN];
vector<query> q[MAXN];
chain_data chain[MAXN];
node_data nodeInfo[MAXN];

void init(){
    int x,y;
    memset(graph,0,sizeof(graph));

```

```

scanf("%d\n",&n);
for (int i=1; i<n;i++){
    scanf("%d%d\n",&x,&y);
    graph[x].push_back(y);
    graph[y].push_back(x);
}

memset(q,0,sizeof(q));
scanf("%d\n",&m);
for (int i=0; i<m; i++){
    scanf("%c %d %d\n",&opt[i].ch,&opt[i].U,&opt[i].V);
    if (opt[i].ch=='G'){
        q[opt[i].U].push_back(query(opt[i].V,i));
        q[opt[i].V].push_back(query(opt[i].U,i));
    }
}
}

int find(int k){
    int x,y=k;
    while (father[y]!=y) y=father[y];
    while (k!=y){
        x=father[k];
        father[k]=y;
        k=x;
    }
    return y;
}

/*
 * Travel the tree and mark chain's node select one node
 * with max subtree size,add this node to the main chain.
 * Calculate the LCA for each query at the meantime.
 */
int dfs(int node){
    visit[node]=true;
    int maxSize=0,selectNode,sum=0;
    for (int i=0; i<graph[node].size(); i++){
        if (!visit[graph[node][i]]){
            int temp=dfs(graph[node][i]);
            father[graph[node][i]]=node;
            sum+=temp;
            if (temp>maxSize){
                maxSize=temp;
                selectNode=graph[node][i];
            }
        }
    }
    if (maxSize>0){

```



```

        nextNode[node]=selectNode;
    }
    for (int i=0; i<q[node].size(); i++)
        if (visit[q[node][i].node])
            lca[q[node][i].id]=find(q[node][i].node);
    return sum+1;
}

/*
 * Travel the tree again,mapping the tree's node onto
 * the segment-tree.
 */
void travel(int node, int &totalPart, int &totalNode){
    visit[node]=true;
    nodeInfo[node].pos=++totalNode;
    nodeInfo[node].part=totalPart;
    if (nextNode[node]==-1){
        chain[totalPart].ri=totalNode;
    } else{
        travel(nextNode[node],totalPart,totalNode);
    }

    for (int i=0; i<graph[node].size(); i++)
        if (!visit[graph[node][i]]){
            ++totalPart;
            chain[totalPart].father=node;
            chain[totalPart].le=totalNode+1;
            travel(graph[node][i],totalPart,totalNode);
        }
}

int ask(int l, int r, int state, int &L, int &R){
    if (L>r || l>R) return -0x7FFFFFFF;
    if (L<=l && r<=R) return tree[state];

    int mid=(l+r)/2;
    return max(ask(l,mid,state*2,L,R),ask(mid+1,r,state*2+1,L,R));
}

void change(int l, int r, int state, int &L, int &R, int &value){
    if (L>r || l>R) return;
    if (L<=l && r<=R){
        tree[state]+=value;
        return;
    }

    int mid=(l+r)/2;
    change(l,mid,state*2,L,R,value);

```

```

    change(mid+1,r,state*2+1,L,R,value);
    tree[state]=max(tree[state*2],tree[state*2+1]);
}

int ask_max(int node, int LCA){
    int ret=-0x7FFFFFFF;
    while (nodeInfo[node].part!=nodeInfo[LCA].part){
        int part=nodeInfo[node].part,le=chain[part].le,ri=nodeInfo[node].pos;
        if (le>ri) swap(le,ri);
        ret=max(ret,ask(1,n,1,le,ri));
        node=chain[part].father;
    }
    int le=nodeInfo[node].pos,ri=nodeInfo[LCA].pos;
    if (le>ri) swap(le,ri);
    ret=max(ret,ask(1,n,1,le,ri));
    return ret;
}

void solve(){
    memset(visit,0,sizeof(visit));
    memset(nextNode,255,sizeof(nextNode));
    for (int i=1; i<=n; i++) father[i]=i;
    dfs(1);

    memset(visit,0,sizeof(visit));
    int totalPart=1,totalNode=0;
    chain[1].le=1;
    travel(1,totalPart,totalNode);

    memset(tree,0,sizeof(tree));
    for (int i=0; i<m; i++){
        if (opt[i].ch=='G'){
            printf("%d\n",max(ask_max(opt[i].U,lca[i]),
                               ask_max(opt[i].V,lca[i])));
        } else{
            change(1,n,1,nodeInfo[opt[i].U].pos,
                  nodeInfo[opt[i].U].pos,opt[i].V);
        }
    }
}

int main(){
    init();
    solve();
    return 0;
}

```

## 2.4 可持久化数据结构

### 2.4.1 可持久化线段树

持久化数据结构最重要的思想是无论询问还是插入操作，都不修改原来的数据，而是新建立节点。

### 题目描述

1. C l r d: Adding a constant  $d$  for every  $A_i(l \leq i \leq r)$ , and increase the time  $t$  add by 1, this is the only operation that will cause the time increase.
2. Q l r: Querying the current sum of  $A_i(l \leq i \leq r)$ .
3. H l r t: Querying a history sum of  $A_i(l \leq i \leq r)$  in time  $t$ .
4. B t: Back to time  $t$ . And once you decide return to a past, you can never be access to a forward edition anymore.

### 程序

```
#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <vector>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

const int MAXN=100001;
const int MAXLIMIT=500000;

struct data{
    long long add;
    long long sum;
    data *lt,*rt;
    data(){}
    data(data *lt, data *rt, long long sum, int add=0):lt(lt),rt(rt),sum(sum),add(add){}
    inline long long getSum(int len){
        if (!this) return 0;
        return sum+add*len;
    }
};

data buffer[MAXLIMIT];
data* tree[MAXN];
int n,m,total,number;
int record[MAXN];

data *build(int l, int r){
    if (l==r){
        scanf("%d",&number);
        data *node=&buffer[total++];
        node->lt=node->rt=NULL;
```

```

        node->sum=number; node->add=0;
        return node;
    }

    int mid=(l+r)/2;
    data *node=&buffer[total++];
    node->lt=build(l,mid);
    node->rt=build(mid+1,r);
    node->sum=node->lt->getSum(mid-l+1)+
        node->rt->getSum(r-mid);

    node->add=0;
    return node;
}

data *insert(int l, int r, data *node, int L, int R, long long Add, int add){
    if (L>r || l>R){
        if (Add!=0){
            buffer[total]=data(*node);
            buffer[total].add+=Add;
            return &buffer[total++];
        }
        return node;
    }
    if (L<=l && r<=R){
        buffer[total]=data(*node);
        buffer[total].add+=Add+add;
        return &buffer[total++];
    }

    int mid=(l+r)/2;
    data *lt=insert(l,mid,node->lt,L,R,
        Add+node->add,add);

    data *rt=insert(mid+1,r,node->rt,L,R,
        Add+node->add,add);

    long long sum=lt->getSum(mid-l+1)+
        rt->getSum(r-mid);

    buffer[total++]=data(lt,rt,sum,0);
    return &buffer[total-1];
}

long long ask(int l, int r, data *node, int L, int R, long long Add){
    if (L>r || l>R) return 0;
    if (L<=l && r<=R){
        return node->getSum(r-l+1)+Add*(r-l+1);
    }

    int mid=(l+r)/2;

```

```

    long long lt=ask(1,mid,node->lt,L,R,
        Add+node->add);

    long long rt=ask(mid+1,r,node->rt,L,R,
        Add+node->add);

    return lt+rt;
}

void init(){
    total=0;
    tree[0]=build(1,n);
}

void solve(){
    char opt[2];
    int L,R,add;
    int cur=0,Time;
    record[cur]=total;
    for (int i=0; i<m; i++){
        scanf("%s",opt);
        if (opt[0]=='C'){
            scanf("%d%d%d",&L,&R,&add);
            tree[cur+1]=insert(1,n,tree[cur],L,R,0,add);
            record[++cur]=total;
        } else
        if (opt[0]=='H'){
            scanf("%d%d%d",&L,&R,&Time);
            long long temp=ask(1,n,tree[Time],L,R,0);
            printf("%I64d\n",temp);
        } else
        if (opt[0]=='Q'){
            scanf("%d",&L,&R);
            long long temp=ask(1,n,tree[cur],L,R,0);
            printf("%I64d\n",temp);
        } else{
            scanf("%d",&cur);
            total=record[cur];
        }
    }
}

int main(){
    while (scanf("%d%d",&n,&m)!=EOF){
        init();
        solve();
    }
    return 0;
}

```

## 2.5 字典树

### 2.5.1 Trie树

```
#include<iostream>
#include<cstring>
#include<cstdio>
using namespace std;

const int maxn=100001;
const int maxm=1000001;

string st;
char ch[maxm];
int n,m,tot;
int g[maxn],next[maxm],len[maxm];

int getson(int node, char c)
{
    int now=g[node];
    while (now!=0 && ch[now]!=c) now=next[now];
    return now;
}

void init()
{
    cin>>n>>m; tot=1;
    memset(g,0,sizeof(g));
    //len[now]表示以now这个结点为结束位置的字符串的个数
    memset(len,0,sizeof(len));
    for (int i=0; i<n; i++)
    {
        cin>>st;
        int now=1;
        for (int j=0; j<st.length(); j++)
        {
            int son=getson(now,st[j]);
            if (son>0) now=son; else
            {
                ++tot;
                ch[tot]=st[j];
                next[tot]=g[now];
                g[now]=tot;
                now=tot;
            }
        }
        ++len[now];
    }
}

void solve()
```

```

{
    for (int i=1; i<=m; i++)
    {
        cin>>st;
        int now=1;
        for (int j=0; j<st.length(); j++)
        {
            now=getson(now,st[j]);
            if (now==0) break;
        }
        if (now!=0 && len[now]>0) cout<<"Find"<<endl; else
            cout<<"Not Find"<<endl;
    }
}

int main()
{
    freopen("trie.in","r",stdin);
    freopen("trie.out","w",stdout);
    init();
    solve();
}

```

### 2.5.2 Trie图

/\*  
trie图用于多模式串匹配,一般的题目都是要求生成的字符串中不包含一些字符串  
建立trie图,然后从根节点开始走,只要不走到危险节点就可以了  
注意: trie图的2个性质: 1、一个节点的危险性和它后缀节点相同 2、根节点的直接儿子的后缀是根节点  
\*/

```

#include <string>
#include <queue>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>
using namespace std;

class Trie{
public:
    int tot;
    const static int MAXN=100;

public:
    char ch[MAXN];
    bool danger[MAXN];
    int g[MAXN],next[MAXN],suffix[MAXN];

public:
    Trie(){
        tot=1;
        memset(g,255,sizeof(g));
    }

```

```

        memset(danger,0,sizeof(danger));
    }
    int getson(int node, char c, bool flag);
    void insert(string st);
    void makegraph();
};

int Trie::getson(int node, char c, bool flag){
    while (true){
        int now=g[node];
        while (now!=-1 && ch[now]!=c) now=next[now];
        if (now!=-1 || !flag) return now;
        if (node==1) return node;
        node=suffix[node];
    }
}

void Trie::insert(string st){
    int len=st.size();
    int now=1,son;
    for (int i=0; i<len; i++){
        son=getson(now,st[i],false);
        if (son==-1){
            ++tot;
            ch[tot]=st[i];
            next[tot]=g[now];
            g[now]=tot;
            now=tot;
        } else now=son;
    }
    danger[now]=true;
}

void Trie::makegraph(){
    queue<int> q;
    q.push(1);
    while (!q.empty()){
        int node=q.front(); q.pop();
        for (int p=g[node]; p!=-1; p=next[p]){
            q.push(p);
            if (node==1){
                suffix[p]=1;
            } else{
                suffix[p]=getson(suffix[node],ch[p],true);
            }
            danger[p] |= danger[suffix[p]];
        }
    }
}

int main(){

```



```

    string st;
    Trie graph;
    cin>>st;
    graph.insert(st);
    cin>>st;
    graph.insert(st);
    return 0;
}

```

## 2.6 划分树

```

{
划分树支持静态询问,询问方式为区间[le,ri]中的第k大/小的数
}
Const  maxn=100000;

var
    n,m:longint;
    a:array[0..maxn] of longint;
    toLeft,value:array[0..trunc(ln(maxn)/ln(2))+1,1..maxn] of longint;

procedure qsort(l,r:longint);
var
    i,j,m:longint;
begin
    i:=l; j:=r; m:=a[(i+j) shr 1];
    repeat
        while a[i]<m do inc(i);
        while a[j]>m do dec(j);
        if i<=j then
            begin
                a[0]:=a[i];
                a[i]:=a[j];
                a[j]:=a[0];
                inc(i); dec(j);
            end;
    until i>j;

    if l<j then qsort(l,j);
    if i<r then qsort(i,r);
end;

procedure init;
var
    i:longint;
begin
    readln(n,m);
    for i:=1 to n do read(a[i]);
    for i:=1 to n do value[0,i]:=a[i];
    qsort(1,n);

```

```

end;

procedure BuildTree(x,y,deep:longint);
var
  i,mid,le,ri,same,lsame:longint;
begin
  if x=y then exit;
  mid:=(x+y) shr 1; lsame:=mid-x+1;
  for i:=x to y do
    if value[deep][i]<a[mid] then dec(lsame);
  le:=x; ri:=mid+1; same:=0;
  for i:=x to y do
    begin
      if i=x then toLeft[deep,i]:=0 else toLeft[deep,i]:=toLeft[deep,i-1];
      if value[deep][i]<a[mid] then
        begin
          inc(toLeft[deep,i]);
          value[deep+1,le]:=value[deep,i];
          inc(le);
        end else
        if value[deep][i]>a[mid] then
          begin
            value[deep+1,ri]:=value[deep][i];
            inc(ri);
          end else
          begin
            if same<lsame then
              begin
                inc(toLeft[deep,i]);
                value[deep+1,le]:=value[deep,i];
                inc(le); inc(same);
              end else
              begin
                value[deep+1,ri]:=value[deep,i];
                inc(ri);
              end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;

    BuildTree(x,mid,deep+1);
    BuildTree(mid+1,y,deep+1);
  end;

function ask(le,ri,x,y,deep,kth:longint):longint;
var
  s1,s2,mid:longint;
begin
  if x=y then exit(value[deep,x]);
  mid:=(x+y) shr 1;
  if x=le then
    begin

```

```

    s1:=0;
    s2:=toLeft[deep,ri];
end else
begin
    s1:=toLeft[deep,le-1];
    s2:=toLeft[deep,ri];
end;
if s2-s1>=kth then
begin
    le:=x+s1; ri:=le+s2-s1-1;
    exit(ask(le,ri,x,mid,deep+1,kth));
end else
begin
    kth:=kth-(s2-s1); s2:=ri-le+1-(s2-s1);
    le:=mid+le-x+1-s1; ri:=le+s2-1;
    exit(ask(le,ri,mid+1,y,deep+1,kth));
end;
end;

procedure main;
var
    i,kth,le,ri:longint;
begin
    BuildTree(1,n,0);
    for i:=1 to m do
    begin
        readln(le,ri,kth);
        writeln(ask(le,ri,1,n,0,kth));
    end;
end;

begin
    init;
    main;
end.

```

## 3 计算几何

### 3.1 计算几何基础

#### 3.1.1 基本定理

1、 $\triangle ABC$  的外接圆半径  $R = abc/4S$ ，其中  $a, b, c, S$  分别表示三角形的三条边的边长以及三角形的面积。这个等式可以用正弦定理证明。

2、圆内接四边形的对角互补，设四条边的长度分别为  $a, b, c, d$ ，半周长  $p = (a + b + c + d)/2$ ，则内接四边形的面积  $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ 。其外接圆半径  $R = \frac{\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}}{4S}$ 。在等边长的四边形中，圆内接四边形的面积最大。

3、所有的正多边形都有外接圆，外接圆的圆心和正多边形的中心重合。变长为  $a$  的正  $n$  边形外接圆的半径  $R_n = \frac{a}{2\sin(\frac{\pi}{n})}$ ，面积  $S = \pi R_n^2 = \frac{\pi a^2}{4\sin^2(\frac{\pi}{n})}$ 。

### 3.1.2 坐标旋转

将 $(x_1, y_1)$ 旋转 $\beta$ , 则得到的坐标 $(x_2, y_2)$ 为 $(x_1 * \cos\beta - y_1 * \sin\beta, x_1 * \sin\beta + y_1 * \cos\beta)$

### 3.1.3 pick 定理

(整数格子点简单多边形的面积、内部点数、边界点数关系):

设F为平面上以格子点为定点的单纯多边形, 则其面积为:  $S=b/2+i-1$ 。

b为多边形边上点格点的个数, i为多边形内部格点的个数。

可用其计算多边形的面积, 边界格点数或内部格点数。

### 3.1.4 点到线段之间的距离

首先利用三角形底边与面积关系求出高(点到直线距离), 然后用点乘求出向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角, 如果为钝角, 则高在三角形内, 否则在三角形外, 如果在三角形外的话, 那么点到线段的距离必然是到两端点的距离最短者。

```
double PointLineDist(point C, point A, point B){
    double ret=(B-A)*(C-A)/sqrt((B-A)^(B-A));
    if (((C-B)^(B-A))>0) return sqrt((B-C)^(B-C));
    if (((C-A)^(A-B))>0) return sqrt((A-C)^(A-C));
    return abs(ret);
}
```

### 3.1.5 线段和直线方程

```
struct point{
    double x,y;
};

point operator -(const point &a, const point &b){
    point ret;
    ret.x=a.x-b.x; ret.y=a.y-b.y;
    return ret;
}

/* 叉乘 A*B=|A||B|cos(<A,B>)若A叉乘B<0则A在B的左手边 */
double operator *(const point &a, const point &b){
    return a.x*b.y-a.y*b.x;
}

/* 点乘 A^B=|A||B|sin(<A,B>) */
double operator ^(const point &a, const point &b){
    return a.x*b.x+a.y*b.y;
}

/* 获取线段ab的中点 */
point midpoint(point &a, point &b){
```

```

    point ret;
    ret.x=(a.x+b.x)/2; ret.y=(a.y+b.y)/2;
    return ret;
}

/* 计算经过点a和点b的直线的方程Ax+By=C */
void getABC(double &A, double &B, double &C, point &a, point &b){
    A=b.y-a.y;
    B=a.x-b.x;
    C=A*a.x+B*a.y;
}

/* 计算线段ab的中垂线, 直线ab的方程为Ax+By=C */
void getmidline(double &A, double &B, double &C, point &a, point &b){
    swap(A,B);
    A=-A;
    point p=midpoint(a,b);
    C=A*p.x+B*p.y;
}

/* 计算直线A1x+B1y=C1与直线A2x+B2y=C2的交点 */
point getIntersection(double A1, double B1, double C1,
                     double A2, double B2, double C2){
    double det=A2*B1-A1*B2;
    if (abs(det)<eps){
        /* 两直线平行 */
    }

    point ret;
    ret.x=(B1*C2-B2*C1)/det;
    ret.y=(A2*C1-A1*C2)/det;
    return ret;
}

```

### 3.1.6 两圆交点

```

#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <iostream>
using namespace std;

const double eps=1e-8;

struct point{
    double x,y;
};

struct Circle{
    point C;
    double R;
};

```

```

double sqr(double x){
    return x*x;
}

double Distance2(point &a, point &b){
    return sqr(a.x-b.x)+sqr(a.y-b.y);
}

void Circle_Intersection(Circle A, Circle B){
    double Dist=sqrt(Distance2(A.C,B.C));
    if (Dist-A.R-B.R>eps || fabs(A.R-B.R)-Dist>eps){
        //no Intersection
        cout<<"No Intersection"<<endl;
        return;
    }
    double a=2*A.R*(A.C.x-B.C.x);
    double b=2*A.R*(A.C.y-B.C.y);
    double c=B.R*B.R-A.R*A.R-Distance2(A.C,B.C);
    double p=a*a+b*b;
    double q=-2*a*c;
    double r=c*c-b*b;
    double cos1=(-q+sqrt(q*q-4*p*r))/(2*p);
    double cos2=(-q-sqrt(q*q-4*p*r))/(2*p);
    double sin1=sqrt(1-cos1*cos1);
    double sin2=sqrt(1-cos2*cos2);

    point ret1,ret2;
    ret1.x=cos1*A.R+A.C.x; ret1.y=sin1*A.R+A.C.y;
    ret2.x=cos2*A.R+A.C.x; ret2.y=sin2*A.R+A.C.y;
    if (fabs(Distance2(ret1,B.C)-B.R*B.R)>eps)
        ret1.y=-sin1*A.R+A.C.y;
    if (fabs(Distance2(ret2,B.C)-B.R*B.R)>eps)
        ret2.y=-sin2*A.R+A.C.y;
    //the same point
    if (fabs(Distance2(ret1,ret2))<eps){
        ret1=ret2;
    }
}

```

### 3.2 圆与简单多边形面积交

```

#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <cstring>
#include <map>
#include <set>
#include <queue>
#include <stack>
#include <vector>

```

```

#include <sstream>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

const int MAXN=128;
const double eps=1e-8;
const double pi=acos(-1.0);

struct point{
    double x,y;
    point(){
        x=0;
        y=0;
    }
    point(double x,double y):x(x),y(y){}
    bool operator ==(point b)const{
        return x==b.x && y==b.y;
    }
};

struct polygon{
    int n;
    point points[MAXN];
    int size(){
        return n;
    }
    point& operator [](int i){
        return points[i];
    }
    void resize(int x){
        n=x;
    }
};

inline double length(point a){
    return sqrt(a.x*a.x+a.y*a.y);
}

inline point operator +(point a,point b){
    return point(a.x+b.x,a.y+b.y);
}

inline point operator -(point a,point b){
    return point(a.x-b.x,a.y-b.y);
}

inline point operator *(point a,double t){
    return point(a.x*t,a.y*t);
}

```

```

inline point operator /(point a,double t){
    return point(a.x/t,a.y/t);
}

inline double operator *(point a,point b){
    return a.x*b.x+a.y*b.y;
}

inline double operator ^(point a,point b){
    return a.x*b.y-a.y*b.x;
}

inline double angle(point a,point b){
    double ans=fabs(atan2(a.y,a.x)-atan2(b.y,b.x));
    if (ans>pi) ans=pi*2-ans;
    return ans;
}

const point no_solution(0,0);

point intersection_to_circle(point p,point q,double r){
    point u=q-p;
    double A=u*u;
    double B=2*(p*u);
    double C=p*p-r*r;
    double delta=B*B-4*A*C;
    if (delta<-eps) return no_solution;
    else if (fabs(delta)<eps){
        double t=-B/(2*A);
        if (t<-eps || t>1.0+eps)
            return no_solution;
        return p+u*t;
    } else{
        double t1=(-B-sqrt(delta))/(2.0*A);
        double t2=(-B+sqrt(delta))/(2.0*A);
        double t;
        bool flag1=(t1>-eps && t1<1.0+eps);
        bool flag2=(t2>-eps && t2<1.0+eps);
        if (!flag1 && !flag2) return no_solution;
        else if (!flag1) t=t2;
        else t=t1;
        return p+u*t;
    }
}

point gravity_center(polygon p){
    point ans(0,0);
    double area=0;
    for (int i=0;i<p.size();i++){
        double now_area=p[i]^p[i+1];
        point now_center=(p[i]+p[i+1])/3.0;
    }
}

```



```

        area+=now_area;
        ans=ans+now_center*now_area;
    }
    ans=ans/area;
    return ans;
}

double intersection_area(polygon p,point c,double r){
    double ans=0;
    for (int i=0;i<p.size();i++){
        point a=p[i]-c;
        point b=p[i+1]-c;
        double la=length(a);
        double lb=length(b);
        double now_area;
        int now_sign;
        if ((a^b)>0) now_sign=1;
        else now_sign=-1;
        double phi=angle(a,b);
        if (la<r+eps && lb<r+eps){
            now_area=fabs(a^b);
        } else if (la<r+eps){
            point c=intersection_to_circle(b,a,r);
            double alpha=angle(a,c);
            double beta=phi-alpha;
            now_area=la*r*sin(alpha)+r*r*beta;
        } else if (lb<r+eps){
            point c=intersection_to_circle(a,b,r);
            double alpha=angle(b,c);
            double beta=phi-alpha;
            now_area=lb*r*sin(alpha)+r*r*beta;
        } else{
            point c=intersection_to_circle(a,b,r);
            point d=intersection_to_circle(b,a,r);
            if (c==no_solution) now_area=r*r*phi;
            else{
                double alpha=angle(c,d);
                double beta=phi-alpha;
                now_area=r*r*sin(alpha)+r*r*beta;
            }
        }
        now_area*=now_sign;
        ans+=now_area;
    }
    return ans*0.5;
}

point center;
polygon p;
double v0,theta,t,g,R;

```

```

void init(){
    double x,y;
    cin>>p.n;
    for (int i=0; i<p.n; i++){
        cin>>x>>y;
        p.points[i]=point(x,y);
    }
    p.points[p.n]=p.points[0];
}

void solve(){
    printf("%.2lf\n",intersection_area(p,center,R));
}

int main(){
    while (cin>>center.x>>center.y>>R){
        if (!center.x && !center.y && !v0 && !theta && !t && !g && !R) break;
        init();
        solve();
    }
    return 0;
}

```

### 3.3 最小圆覆盖

```

/*
 * 最小圆覆盖的思想：若第i+1个点不在前i个点的最小圆内，则第i+1个点必然在
 * 前i+1个点的最小圆的边上。
 * 最坏情况下时间复杂度是 $O(n^3)$ ，期望是 $O(n)$ 
 */

```

```

#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

const double eps=1e-8;
const int MAXN=1001;

struct point{
    double x,y;

    point(double x=0, double y=0):x(x),y(y){}
    double sqr(double x){ return x*x; }
    double dist2(const point &b){ return sqr(x-b.x)+sqr(y-b.y); }
    double dist(const point &b){ return sqrt(dist2(b)); }
    point operator -(const point &b){ return point(x-b.x,y-b.y); }
    double operator *(const point &b){ return x*b.y-y*b.x; }
};

```

```

struct circle{
    point center;
    double R;

    circle(){}
    circle(const point &center, double R):center(center),R(R){}

    bool inside(const point &p){
        return center.dist(p)<R+eps;
    }
};

int n;
point P[MAXN];

void init(){
    double x,y;
    for (int i=0; i<n; i++){
        scanf("%lf%lf",&x,&y);
        P[i]=point(x,y);
    }
    random_shuffle(P,P+n);
}

circle getCircleWith2Point(point &a, point &b){
    return circle(point((a.x+b.x)/2,(a.y+b.y)/2),a.dist(b)/2);
}

//calculate the area of triangle ABC
double Area(point &a, point &b, point &c){
    return fabs((b-a)*(c-a)/2.0);
}

//Rotate vector 1/2BA to vector BR
circle calc(point &a, point &b, double sinA, double cosA, double scale, double R){
    double x=(b.x-a.x)*scale,y=(b.y-a.y)*scale;
    return circle(point(a.x+cosA*x-sinA*y,a.y+cosA*y+sinA*x),R);
}

/*
 * R=abc/4S, where S is the area of triangle ABC.
 * calculate the vector 1/2BA and rotate it to BR.
 * when we know vector BR, we can calculate point R.
 */

circle getCircleWith3Point(point &a, point &b, point &c){
    double r=a.dist(b)*b.dist(c)*c.dist(a)/(4*Area(a,b,c));
    double halfAB=a.dist(b)/2.0;
    double lenBR=sqrt(r*r-halfAB*halfAB);
    double scale=r/(halfAB*2);
    circle Circle=calc(a,b,lenBR/r,halfAB/r,scale,r);
}

```

```

        if (Circle.inside(c)) return Circle;
        return calc(a,b,-lenBR/r,halfAB/r,scale,r);
    }

/*
 * we know the minimalCircle of point 1..i, consider the (i+1)th point.
 * if the (i+1)th point is in the minimalCircle of point 1..i, consider (i+2)th point,
 * otherwise, the (i+1)th point is on the edge of the minimalCircle of 1..i+1.
 *
 * so we can add point to the minimalCircle one by one and maintain the minimalCircle.
 * when the point add by random order, the exception complexity of the algorithm is O(n)
 */

void solve(){
    circle Circle=getCircleWith2Point(P[0],P[1]);
    for (int i=2; i<n; i++){
        if (Circle.inside(P[i])) continue;
        Circle=getCircleWith2Point(P[0],P[i]);
        for (int j=0; j<i; j++){
            if (Circle.inside(P[j])) continue;
            Circle=getCircleWith2Point(P[i],P[j]);
            for (int k=0; k<j; k++){
                if (Circle.inside(P[k])) continue;
                Circle=getCircleWith3Point(P[i],P[j],P[k]);
            }
        }
    }
    printf("%.2lf %.2lf %.2lf\n",Circle.center.x,Circle.center.y,Circle.R);
}

int main(){
    while (scanf("%d",&n) && n!=0){
        init();
        solve();
    }
    return 0;
}

```

### 3.4 多边形的核

平面简单多边形的核是该多边形内部的一个点集，该点集中任意一点与多边形边界上一点连线都处于这个多边形内部。

求多边形的核的思想是用原多边形的边所在的直线不断切割多边形。

```

#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <cstring>
using namespace std;

const int MAXN=2000;

```

```

const double eps=1e-8;

struct point{
    double x,y;
};

int n,N,ca;
point a[MAXN],b[MAXN],c[MAXN];

void getABC(double &A, double &B, double &C, point &a, point &b){
    A=b.y-a.y;
    B=a.x-b.x;
    C=A*a.x+B*a.y;
}

point getIntersection(double A1, double B1, double C1,
                     double A2, double B2, double C2){
    double det=A2*B1-A1*B2;
    if (abs(det)<eps){
    }
    point ret;
    ret.x=(B1*C2-B2*C1)/det;
    ret.y=(A2*C1-A1*C2)/det;
    return ret;
}

void init(){
    cin>>n;
    for (int i=0; i<n; i++) cin>>a[i].x>>a[i].y;
}

void check(double A, double B, double C){
    int size=0;
    double A1,B1,C1;
    for (int i=1; i<=N; i++)
        if (A*b[i].x+B*b[i].y-C>=-eps){ //点是逆时针的话就<=eps
            c[++size]=b[i];
        } else{
            if (A*b[i-1].x+B*b[i-1].y-C>eps){ //点是逆时针的话就<-eps
                getABC(A1,B1,C1,b[i],b[i-1]);
                c[++size]=getIntersection(A,B,C,A1,B1,C1);
            }
            if (A*b[i+1].x+B*b[i+1].y-C>eps){ //点是逆时针的话就<-eps
                getABC(A1,B1,C1,b[i+1],b[i]);
                c[++size]=getIntersection(A,B,C,A1,B1,C1);
            }
        }
    N=size;
    for (int i=1; i<=N; i++) b[i]=c[i];
    b[0]=b[N]; b[N+1]=b[1];
}

```

```

void solve(){
    double A,B,C;
    N=n;
    for (int i=1; i<=N; i++) b[i]=a[i-1];
    b[0]=b[N]; b[N+1]=b[1]; a[n]=a[0];
    for (int i=0; i<n; i++){
        getABC(A,B,C,a[i],a[i+1]);
        check(A,B,C);
    }

    //核的面积
    double ret=0;
    for (int i=1; i<=N; i++)
        ret+=b[i].x*b[i+1].y-b[i].y*b[i+1].x;
    printf("%.2lf\n",fabs(ret/2.0));

    //如果N>0则存在核
    if (N>0) cout<<"YES"<<endl; else cout<<"NO"<<endl;
}

int main(){
    init();
    solve();
    return 0;
}

```

### 3.5 矩形切割

```

/*
 * 有n个矩形，求这些矩形的面积并
 * 算法的主要思想是枚举第i个矩形，求出第i个矩形被i+1..n的矩形
 * 切割后剩下的面积是多少，加到最终的答案中
 *
 * 如果题目的每个矩形都有颜色，而且后面的矩形会覆盖前面的矩形，
 * 求每种颜色的面积。这样的题目也可以用矩形切割来做。
 */

//判断两个矩形是否相交，true代表不相交
bool check(int &x1, int &y1, int &x2, int &y2, int &pos){
    return x1>=v[pos].x2 || y1>=v[pos].y2 || x2<=v[pos].x1 || y2<=v[pos].y1;
}

void cut(int x1, int y1, int x2, int y2, int pos){
    while (pos<N && check(x1,y1,x2,y2,pos)) ++pos;

    //已经用v里面的N个矩形切割完
    if (pos==N){
        area+=(x2-x1)*(y2-y1);
        return;
    }
}

```

```

    if (x1<v[pos].x1){
        cut(x1,y1,v[pos].x1,y2,pos+1);
        x1=v[pos].x1;
    }

    if (y1<v[pos].y1){
        cut(x1,y1,x2,v[pos].y1,pos+1);
        y1=v[pos].y1;
    }

    if (x2>v[pos].x2){
        cut(v[pos].x2,y1,x2,y2,pos+1);
        x2=v[pos].x2;
    }

    if (y2>v[pos].y2){
        cut(x1,v[pos].y2,x2,y2,pos+1);
        y2=v[pos].y2;
    }
}

void solve(){
    area=0;
    for (int i=0; i<N; i++)
        cut(v[i].x1,v[i].y1,v[i].x2,v[i].y2,i+1);
    cout<<area<<endl;
}

```

### 3.6 矩形面积并

```

/*
 * 求n个矩形的面积并
 * 先离散化x轴坐标和y轴坐标
 * 用平行x轴的扫描线扫描，把x轴的线段插入到当前的线段树里面
 * 线段树记录x轴被覆盖的长度
 * 假设离散化后x坐标有m个，那么线段树记录的下标是[1..m-1]
 * 若下标从0开始计数，那么区间[l,r]的长度为x[r]-x[l-1]
 */

#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

const int MAXN=100001;

struct segment{
    int x1,x2,y,flag;
    segment(){}
}

```

```

    segment(int x1, int x2, int y, int flag):x1(x1),x2(x2),y(y),flag(flag){}
};

struct data{
    int cover,len;
};

data tree[MAXN*8];
segment seg[MAXN*2];
int n,tot,totx,toty;
int vx[MAXN*2],vy[MAXN*2];

bool cmp(const segment &a, const segment &b){
    return a.y<b.y;
}

void init(){
    int x1,y1,x2,y2;
    tot=totx=toty=0;
    cin>>n;
    for (int i=0; i<n; i++){
        cin>>x1>>y1>>x2>>y2;
        vx[totx++]=x1,vx[totx++]=x2;
        vy[toty++]=y1,vy[toty++]=y2;
        seg[tot++]=segment(x1,x2,y1,1);
        seg[tot++]=segment(x1,x2,y2,-1);
    }
    sort(vx,vx+totx);
    sort(vy,vy+toty);
    totx=unique(vx,vx+totx)-vx;
    toty=unique(vy,vy+toty)-vy;
    sort(seg,seg+tot,cmp);
}

void update(int l, int r, int state){
    if (!tree[state].cover){
        tree[state].len=tree[state*2].len+tree[state*2+1].len;
    } else tree[state].len=vx[r]-vx[l-1];
}

void insert(int l, int r, int state, int L, int R, int flag){
    if (L>r || l>R) return;
    if (L<=l && r<=R){
        tree[state].cover+=flag;
        update(l,r,state);
        return;
    }

    int mid=(l+r)/2;
    insert(l,mid,state*2,L,R,flag);
    insert(mid+1,r,state*2+1,L,R,flag);
}

```



```

        update(l,r,state);
    }

void solve(){
    memset(tree,0,sizeof(tree));
    long long area=0,t=0;
    for (int i=0; i<toty-1; i++){
        while (t<tot && seg[t].y==vy[i]){
            int L=lower_bound(vx,vx+totx,seg[t].x1)-vx+1,R=lower_bound(vx,vx+totx,seg[t].x2)-vx;
            insert(1,totx-1,1,L,R,seg[t].flag);
            ++t;
        }
        area+=(long long)(tree[1].len)*(vy[i+1]-vy[i]);
    }
    cout<<area<<endl;
}

int main(){
    int ca;
    cin>>ca;
    for (int i=0; i<ca; i++){
        init();
        solve();
    }
    return 0;
}

```

## 3.7 KD-Tree

### 3.7.1 程序

查找某个点距离最近的点，基本思想是每次分治把点分成两部分，建议按照坐标规模决定是垂直划分还是水平划分，查找时先往分到的那一部分查找，然后根据当前最优答案决定是否去另一个区间查找。

```

bool Div[MaxN];
void BuildKD(int deep,int l, int r, Point p[])\`记得备份一下P`
{
    if (l > r) return;
    int mid = l + r >> 1;
    int minX, minY, maxX, maxY;
    minX = min_element(p + l, p + r + 1, cmpX)->x;
    minY = min_element(p + l, p + r + 1, cmpY)->y;
    maxX = max_element(p + l, p + r + 1, cmpX)->x;
    maxY = max_element(p + l, p + r + 1, cmpY)->y;
    Div[mid] = (maxX - minX >= maxY - minY);
    nth_element(p + l, p + mid, p + r + 1, Div[mid] ? cmpX : cmpY);
    BuildKD(l, mid - 1, p);
    BuildKD(mid + 1, r, p);
}

long long res;

```

```

void Find(int l, int r, Point a, Point p[])\`查找`
{
    if (l > r) return;
    int mid = l + r >> 1;
    long long dist = dist2(a, p[mid]);
    if (dist > 0)//如果有重点不能这样判断
        res = min(res, dist);
    long long d = Div[mid] ? (a.x - p[mid].x) : (a.y - p[mid].y);
    int l1, l2, r1, r2;
    l1 = l, l2 = mid + 1;
    r1 = mid - 1, r2 = r;
    if (d > 0)
        swap(l1, l2), swap(r1, r2);
    Find(l1, r1, a, p);
    if (d * d < res)
        Find(l2, r2, a, p);
}

```

### 3.7.2 例题

查询一个点为中心的给定正方形内所有点并删除 (2012 金华网赛 A)

```

#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <queue>
using namespace std;

const int MaxN = 100000;
struct Point
{
    int x,y,r;
    int id;
    bool del;
};

int cmpTyp;
bool cmp(const Point& a,const Point& b)
{
    if (cmpTyp == 0)
        return a.x < b.x;
    else
        return a.y < b.y;
}

int cnt[MaxN];
bool Div[MaxN];
int minX[MaxN],minY[MaxN],maxX[MaxN],maxY[MaxN];
void BuildKD(int l,int r,Point p[])

```

```

{
    if (l > r)        return;
    int mid = l+r>>1;
    cmpTyp = 0;
    minX[mid] = min_element(p+l,p+r+1,cmp)->x;
    maxX[mid] = max_element(p+l,p+r+1,cmp)->x;
    cmpTyp = 1;
    minY[mid] = min_element(p+l,p+r+1,cmp)->y;
    maxY[mid] = max_element(p+l,p+r+1,cmp)->y;

    cnt[mid] = r-l+1;
    cmpTyp = Div[mid] = (maxX[mid]-minX[mid] < maxY[mid]-minY[mid]);
    nth_element(p+l,p+mid,p+r+1,cmp);
    BuildKD(l,mid-1,p);
    BuildKD(mid+1,r,p);
}

```

```

queue<int> Q;
int Find(int l,int r,Point a,Point p[])
{
    if (l > r)        return 0;
    int mid = l+r>>1;
    if (cnt[mid] == 0)    return 0;

    if (maxX[mid] < a.x-a.r ||
        minX[mid] > a.x+a.r ||
        maxY[mid] < a.y-a.r ||
        minY[mid] > a.y+a.r)
        return 0;

    int totdel = 0;

    if (p[mid].del == false)
        if (abs(p[mid].x-a.x) <= a.r && abs(p[mid].y-a.y) <= a.r)
        {
            p[mid].del = true;
            Q.push(p[mid].id);
            totdel++;
        }

    totdel += Find(l,mid-1,a,p);
    totdel += Find(mid+1,r,a,p);

    cnt[mid] -= totdel;

    return totdel;
}

```

```

Point p[MaxN],tp[MaxN];
int n;

```

```

int main()
{
    int cas = 1;
    while (true)
    {
        scanf("%d",&n);
        if (n == 0)    break;

        for (int i = 0;i < n;i++)
        {
            p[i].id = i;
            int tx,ty;
            scanf("%d%d%d",&tx,&ty,&p[i].r);
            p[i].x = tx-ty;
            p[i].y = tx+ty;
            p[i].del = false;
            tp[i] = p[i];
        }
        BuildKD(0,n-1,tp);

        printf("Case #%d:\n",cas++);
        int q;
        scanf("%d",&q);
        for (int i = 0;i < q;i++)
        {
            int id;
            scanf("%d",&id);
            int res = 0;
            id--;
            Q.push(id);
            while (!Q.empty())
            {
                int now = Q.front();
                Q.pop();
                if (p[now].del == true)    continue;
                p[now].del = true;
                res += Find(0,n-1,p[now],tp);
            }
            printf("%d\n",res);
        }
    }
    return 0;
}

```

## 4 数学

### 4.1 结论

- 1、费马欧拉素数定理：每个可表示为  $4n + 1$  形式的素数，只能用一种两数平方的形式来表示。

2、任意一个非负整数都能分解为4个平方数之和。设  $N = L * m^2$ ，如果  $L$  的质因子中没有  $4k + 3$  这样的形式，那么  $N$  就能分解成两个平方数之和，如果  $N$  不是  $(8t + 7) * 4^k$  的形式，则  $N$  能分解成3个平方数之和。

3、勾股数  $a, b, c$  满足  $a^2 + b^2 = c^2$ ，若  $(a, b) = 1, (a, c) = 1, (b, c) = 1$  则  $(a, b, c)$  为最原始的勾股数，对于任意一个正数系数  $k$ ， $(ka, kb, kc)$  也是勾股数。构造最原始的勾股数可以令  $a = m^2 - n^2, b = 2nm, c = n^2 + m^2$ ，其中  $(n, m) = 1$  且  $n, m$  的奇偶性不同。

## 4.2 扩展 GCD

考虑这样一个不定方程：

$$ax + by = c$$

易知方程有解的充分必要条件是  $(a, b) \mid c$

根据 gcd 求解的特点，我们可以构造这样一个等式

$$ax + by = bx' + \left(a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor\right) y' = c$$

于是有

$$a(x - y') + b\left(y - x' + \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor y'\right) = 0$$

所以

$$x = y' \quad , \quad y = x' - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor y'$$

是方程  $ax + by = c$  的一个解

扩展 gcd 递归求解，当  $b = 0$  时，令  $x = \frac{c}{a}, y = 0$  是  $ax + by = c$  的一组特解，然后根据上述等式，我们可以求出方程的一般解。令  $x, y$  是方程  $ax + by = c$  的一组特解，且  $d = \gcd(a, b)$ ，则方程  $ax + by = c$  的一般解为

$$X = x + \frac{b}{d}t, Y = y - \frac{a}{d}t \quad |t \in \mathbf{Z}$$

我们用  $b^{-1}$  表示  $b$  的逆元。因为  $\frac{1}{b} \equiv c \pmod{p} \Rightarrow bx - py = c$  于是我们可以利用扩展 gcd 可以求出  $b$  的逆元  $b^{-1}$ ，使得  $\frac{a}{b} \equiv c \pmod{p} \Rightarrow ab^{-1} \equiv c \pmod{p}$

程序：

```
#include<cstdio>
#include<cstring>
#include<iostream>
using namespace std;

int a,b,c,x,y;

void init(){
    cin>>a>>b>>c;
}

void extend_gcd(int a, int b, int &d, int &x, int &y){
    if (!b){
        d=a; x=1; y=0;
    } else{
        extend_gcd(b, a%b, d, y, x);
```

```

        y-=x*(a/b);
    }
}

void solve(){
    //求解ax+by=c
    //方程有解的充要条件是gcd(a,b) | c
    //求出方程的一个解x,y,然后对于任意正整数t,
    //方程的一般解可以表示为X=x+b/d*t , Y=y-a/d*t
    extend_gcd(a,b,d,x,y);
    if (c%d!=0) cout<<"No solution"<<endl; else
        cout<<"x="<<x<<" "<<"y="<<y<<endl;
}

int main(){
    init();
    solve();
    return 0;
}

```

### 4.3 中国剩余定理

考虑同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots\dots\dots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

其中

$$(m_i, m_j) = 1, \quad 1 \leq i, j \leq k, i \neq j$$

设

$$M = m_1 m_2 \cdots m_k, \quad M_i = \frac{M}{m_i}$$

因为  $(M_i, m_i) = 1$ , 所以必然存在  $M_i^{-1}$  使得

$$M_i M_i^{-1} \equiv 1 \pmod{m_i}$$

$$M_i M_i^{-1} \equiv 0 \pmod{m_j}, 1 \leq j \leq k, j \neq i$$

则

$$x = \sum_{i=1}^k a_i M_i M_i^{-1}$$

是同余方程组模  $M$  的唯一解, 其中  $M_i^{-1}$  可用扩展 gcd 求得。

注: 同余方程组有解的充要条件是  $a_i \equiv a_j \pmod{(m_i, m_j)}, 1 \leq i, j \leq k$

程序:

```

int main(){
    cin>>n;
    for (int i=1; i<=n; i++) cin>>a[i]>>m[i];
    int x, y, M=1, ans=0;
    //要求m[i]两两互质,同余方程组解唯一
    for (int i=1; i<=n; i++) M*=m[i];
}

```

```

for (int i=1; i<=n; i++){
    int Mi=M/m[i];
    //求逆元Mi的逆元Mi'
    extended_gcd(Mi,m[i],x,y);
    ans+=a[i]*Mi*x;
}
//ans+M*t是一般解
ans=(ans%M+M)%M;
cout<<ans<<endl<<endl;
return 0;
}

```

## 4.4 组合数取模

如果模数为素数，直接求逆元就可以了。否则就把模数因式分解成  $\prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$ ，求出组合数模  $p_i^{k_i}$  的答案，然后用中国剩余定理把这些解合并。如果要求  $t$  个组合数数  $C(n, m)$  的对模  $Mod$  的模，那么总的时间复杂度是  $O(t(\log n)^2)$  级别的。

```

#include <cstring>
#include <cstdio>
#include <vector>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

const int MAXN=100001;

struct data{
    int Pi,P;
    data(){}
    data(int Pi, int P):Pi(Pi),P(P){}
};

struct com{
    int n,m;
    com(){}
    com(int n, int m):n(n),m(m){}
};

int n,m,ca,Mod;
vector<com> ask;
long long factorial[MAXN],power[2];

void init(){
    int x,y;
    scanf("%d%d%d",&n,&m,&Mod);
    ask.clear();
    for (int i=0; i<m; i++){
        scanf("%d%d",&x,&y);
        ask.push_back(com(x,y));
    }
}

```

```

}

void extended_gcd(int a, int b, int &x, int &y){
    if (!b){
        x=1,y=0;
    } else{
        extended_gcd(b,a%b,y,x);
        y-=(a/b)*x;
    }
}

//calc 1/a mod b
int calcInv(int a, int b){
    int x,y;
    extended_gcd(a,b,x,y);
    return (x%b+b)%b;
}

vector<data> factorization(int Mod){
    vector<data> factor;
    int N=Mod;
    for (int i=2; i*i<=Mod; i++){
        if (N%i==0){
            int temp=1;
            while (N%i==0){
                temp*=i;
                N/=i;
            }
            factor.push_back(data(i,temp));
        }
    }
    if (N!=1) factor.push_back(data(N,N));
    return factor;
}

void initialization(int Pi, int P){
    factorial[0]=1;
    for (int i=1; i<min(MAXN,P); i++){
        if (i%Pi!=0){
            factorial[i]=factorial[i-1]*i%P;
        } else factorial[i]=factorial[i-1];
    }
    if (P<MAXN){
        power[1]=factorial[P-1]; power[0]=power[1]*power[1]%P;
    }
}

//calc n! mod P
int calcFactorialMod(int n, int &cnt, int Pi, int P){
    cnt=0; long long ret=1;
    for (int i=n; i>=1; i/=Pi){
        ret=ret*power[(i/P)&1]*factorial[i%P]%P;
    }
}

```



```

        cnt+=i/Pi;
    }
    return ret;
}

//calculate C(n,m)%P
int combination(int n, int m, int Pi, int P){
    if (m>n) return 0;
    int x,y,cnt1,cnt2,cnt3;
    long long ret1=calcFactorialMod(n,cnt1,Pi,P);
    long long ret2=calcFactorialMod(m,cnt2,Pi,P);
    long long ret3=calcFactorialMod(n-m,cnt3,Pi,P);

    cnt1-=cnt2+cnt3;
    ret1=ret1*calcInv(ret2*ret3%P,P)%P;
    for (int i=0; i<cnt1; i++) ret1=ret1*Pi%P;
    return ret1;
}

//merge
pair<int,int> Chinese_remainder(pair<int,int> a, pair<int,int> b){
    long long p1=a.second,p2=b.second,M=p1*p2;
    int t1=p2*calcInv(p2,p1)*a.first%M,t2=p1*calcInv(p1,p2)*b.first%M;
    return make_pair((t1+t2)%M,M);
}

void solve(){
    vector<data> factor=factorization(Mod);
    vector< pair<int,int> > final(ask.size());
    for (int i=0; i<final.size(); i++) final[i].first=final[i].second=-1;
    for (int i=0; i<factor.size(); i++){
        initialization(factor[i].Pi,factor[i].P);
        for (int j=0; j<ask.size(); j++){
            pair<int,int> p=make_pair(combination(ask[j].n,ask[j].m,
                factor[i].Pi,factor[i].P),factor[i].P);
            if (final[j].first==-1){
                final[j]=p;
            } else{
                final[j]=Chinese_remainder(p,final[j]);
            }
        }
    }
    for (int i=0; i<final.size(); i++)
        printf("C(%d,%d) Mod %d = %d\n",ask[i].n,ask[i].m,Mod,final[i].first);
}

int main(){
    scanf("%d",&ca);
    for (int i=0; i<ca; i++){
        init();
        solve();
    }
}

```

```

    }
    return 0;
}

```

## 4.5 欧拉函数

欧拉函数的性质:

- (1)  $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$  其中  $p$  是质数  
 (2)  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$  其中  $(n, m) = 1$

推论:

- (1)  $\sum_{1 \leq i \leq n, (i, n) = 1} i = \frac{1}{2} n \varphi(n)$   
 (2)  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$   
 (3)  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

$N \log N$  求  $1 \sim N$  的欧拉函数。

```

void euler(int n){
    memset(phi, 0, sizeof(phi));
    phi[1] = 1;
    for (int i = 2; i <= n; i++)
        if (phi[i] == 0){
            phi[i] = i - 1;
            for (int j = i + i; j <= n; j += i){
                if (phi[j] == 0) phi[j] = j;
                phi[j] = phi[j] / i * (i - 1);
            }
        }
}

```

## 4.6 Head 算法

求  $xy \bmod M$  时, 若  $a * b$  已经超出计算机整数表示范围, 则会造成运算溢出。假设内置整数类型所能表示的最大数为  $w$ , 则当  $M < \frac{w}{2}$  时, Head 算法能在不造成运算溢出的情况下, 计算  $x * y \bmod M$ 。

令  $T = \lfloor \sqrt{n + \frac{1}{2}} \rfloor$ ,  $t = T^2 - M$ 。其中有  $|t| < T$  且  $t \equiv T^2 \pmod{M}$

任意整数都能表示成  $aT + b$  的形式, 其中  $0 \leq a \leq T, 0 \leq b < T$ 。

令  $x = aT + b, y = cT + d$ , 则  $xy \equiv (aT + b)(cT + d) \pmod{M}$ 。

$$(aT + b)(cT + d) \pmod{M} \equiv [hT + (g + f)t + bd] \pmod{M}$$

在以上等式中, 将  $ac$  表示成  $eT + f$  的形式, 将  $ad + bc + et$  表示成  $gT + h$  的形式。算出  $e, f, g, h$ , 然后计算  $(hT + (g + f)t + bd) \bmod M$  就会在不造成运算溢出的情况下算出答案。

程序:

```

#include <cmath>

#define ll long long

```

```

11 mul_mod(11 x, 11 y, 11 n){
    11 T=floor(sqrt(n)+0.5);
    11 t=T*T-n;

    11 a=x/T, b=x%T;
    11 c=y/T, d=y%T;
    11 e=a*c/T, f=a*c%T;

    11 v=((a*d+b*c)%n+e*t)%n;
    11 g=v/T, h=v%T;

    11 ret=((f+g)*t%n + b*d)%n+h*T)%n;
    ret=(ret%n+n)%n;
    return ret;
}

```

## 4.7 行列式取模

### 4.7.1 辗转相除法

```

/*
* 1、若矩阵两行进行交换，行列式取反
* 2、一行数加减另外一行数的倍数，行列式不变
* 于是对于第i行和第j行，可以将第j行减去matrix[j][i]/matrix[i][i]倍的i行
* 然后把两行交换，不断迭代至第j行的第i个元素变成0为止
* 这个方法适用于任何模数，时间复杂度为 $O(n^3 \log C)$ ，C就是矩阵的数的范围
*/
int gauss(int matrix[][MAXN], int n){
    int ret=1;
    for (int i=0; i<n; i++)
        for (int j=0; j<n; j++)
            matrix[i][j]=(matrix[i][j]%Mod+Mod)%Mod;
    for (int i=0; i<n; i++){
        for (int j=i+1; j<n; j++){
            while (matrix[j][i]){
                int t=matrix[i][i]/matrix[j][i];
                for (int k=i; k<n; k++){
                    matrix[i][k]=(matrix[i][k]+(Mod-matrix[j][k])*t)%Mod;
                    swap(matrix[j][k],matrix[i][k]);
                }
                ret=Mod-ret;
            }
        }
        if (!matrix[i][i]) return 0;
        ret=ret*matrix[i][i]%Mod;
    }
    return ret;
}

```

#### 4.7.2 高斯消元

```
/*
 * 把矩阵消成上三角矩阵，行列式就是对角线相乘
 * 适用于模数为质数的情况
 * 使用时注意范围溢出问题
 * 时间复杂度 $O(n^3)$ 
 */

void extended_gcd(int a, int b, int &x, int &y){
    if (!b){
        x=1,y=0;
        return;
    }
    extended_gcd(b,a%b,y,x);
    y-=(a/b)*x;
}

int gauss(int matrix[][MAXN], int n){
    long long ret=1,inv=1;
    for (int i=0; i<n; i++)
        for (int j=0; j<n; j++)
            matrix[i][j]=(matrix[i][j]%Mod+Mod)%Mod;

    for (int i=0; i<n; i++){
        int absMax=matrix[i][i],pos=i;
        for (int j=i+1; j<n; j++){
            if (abs(matrix[j][i])>abs(absMax)){
                pos=j;
                absMax=matrix[j][i];
            }
        }
        if (i!=pos){
            for (int j=0; j<n; j++){
                swap(matrix[i][j],matrix[pos][j]);
            }
            ret=Mod-ret;
        }
        if (!matrix[i][i]) return 0;

        for (int k=i+1; k<n; k++){
            if (matrix[k][i]==0) continue;
            int d=gcd(abs(matrix[i][i]),abs(matrix[k][i]));
            int lcm=abs(matrix[i][i]*matrix[k][i])/d,
mul1=lcm/matrix[i][i],mul2=lcm/matrix[k][i];
            inv=inv*mul2%Mod;
            if (inv<0) inv+=Mod;
            for (int j=i; j<n; j++){
```

```

        matrix[k][j]=matrix[k][j]*mul2-matrix[i][j]*mul1;
        matrix[k][j]%Mod;
        if (matrix[k][j]<0) matrix[k][j]+=Mod;
    }
}
ret=ret*matrix[i][i]%Mod;
}

int x,y;
extended_gcd(inv,Mod,x,y);
x=(x%Mod+Mod)%Mod;
ret=ret*x%Mod;
return ret;
}

```

## 4.8 特殊数列

### 4.8.1 斐波那契数

斐波那契数列:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

斐波那契数列的性质:

- (1) :  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = f(n+2) - 1$
- (2) :  $f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(2n-1) = f(2n)$
- (3) :  $f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(2n) = f(2n+1) - 1$
- (4) :  $f(0)^2 + f(1)^2 + \dots + f(n)^2 = f(n)f(n+1)$
- (5) :  $f(n+k) = f(m)f(n+1) + f(m-1)f(n)$
- (6) :  $\gcd(f(n), f(m)) = f_{\gcd(n,m)}$

### 4.8.2 卡特兰数

卡特兰序列:

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862$$

第  $n$  项卡特兰数:

$$C_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}, n \geq 0$$

模型: 有  $n$  个  $+1$  和  $n$  个  $-1$  构成的  $2n$  项

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$$

其部分和满足

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2n)$$

的数列的个数等于第  $n$  个 Catalan 数

$$C_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$$

应用:

(1) 矩阵链乘,  $P = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$  根据乘法的结合律, 不改变其顺序, 只用括号表示成对的乘积, 则一共有  $C_n$  种括号方案。

(2) 一个容量无强大的栈的进栈次序为  $1, 2, 3, \cdots, n$  则一共有  $C_n$  种出栈方式

(3) 具有  $n+1$  条边的凸多边形的三角剖分方案有  $C_{n-1}$  种

(4) 在圆上选择  $2n$  个点, 将这些点成对连接起来使得所有得到的  $n$  条线段不相交的方案数有  $C_n$  种

(5) 给定  $n$  个节点, 能构成  $C_n$  种不同的二叉树

### 4.8.3 Stirling 数

第一类 stirling 数: 将  $n$  个数划分成  $k$  个循环, 一共有  $f(n, k)$  总方案,

$$f(n, k) = f(n-1, k-1) + (n-1)f(n-1, k)$$

第二类 stirling 数: 将  $n$  个数划分成  $k$  个集合, 一共有  $g(n, k)$  种方案,

$$g(n, k) = kg(n-1, k) + g(n-1, k-1)$$

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = g(k, 0)C_{n+1}^1 + g(k, 1)C_{n+1}^2 + \cdots + g(k, k)C_{n+1}^{k+1}$$

## 4.9 格子路径与 Schroder 数

1、从  $(0, 0)$  走到  $(n, m)$ , 只允许向上和向右走的矩形格子路径数为  $C(n+m, m)$ 。

2、从  $(0, 0)$  走到  $(p, q)$ , 只允许向上和向右走, 且不得穿越对角线的方案数为  $\frac{p-q+1}{p+1} * C(p+q, q)$ 。

3、从  $(0, 0)$  走到  $(p, q)$ , 允许向上向右走, 且允许  $D = (1, 1)$  的步进, 不得穿越对角线的方案数为

$$K(p, q) = \sum_{r=0}^{\min\{p, q\}} \frac{(p+q-r)!}{(p-r)!(q-r)!r!}$$

。

## 5 自定义类型及 C++ 算法

### 5.1 C++note

g++增栈, 放在main函数第一句话

```
int SIZE=10<<20; //支持10W节点的数的递归
```

```
char *p=(char*)malloc(SIZE)+SIZE;
```

```
__asm__("movl %0, %%esp\n" :: "r"(p));
```

vc++增栈

```
#pragma comment(linker, "/STACK:16777216")
```

### 5.2 Vim 配置

```
"set ai!
```

```
" 设置自动缩进
```

```
set tabstop=4
```

```
" 设置tab键的宽度
```

```
set nu!
```

```
" 显示行号
```

```
set cindent shiftwidth=4      " 自动缩进4空格
set smartindent              " 智能自动缩进
set backspace=2              " 设置退格键可用
syntax enable                " 打开语法高亮
set makeprg=g++\ -o\ %<\ %\ -g
map <silent> make :make <CR>
map <silent> mr :! ./%< <CR>
map <silent> mw :! ./%< %<.in <CR>
map <silent> mn :cnext <CR>
map <silent> mp :cprev <CR>
map <C-A> <ESC>ggyyVG"+y
```