

# 带摩擦的平面连杆机构动态静力分析的解析法求解

杨谢柳, 侯祥林, 郑夕健, 罗继曼, 王丹, 孟丽霞

沈阳建筑大学机械工程学院, 辽宁沈阳, 110168

**摘要:** 针对同时考虑摩擦和惯性力的平面连杆机构受力分析问题, 本文提出一种简单准确的解析求解方法。建立机构的位移方程, 利用差商法计算各构件的运动参数; 用不考虑摩擦时各运动副处的正压力及其产生的摩擦力或摩擦力矩近似各运动副处的总反力; 根据功能原理计算需施加在原动件上的平衡力矩。采用本解析法思路可实现摩擦与惯性力同时作用下任意平面连杆机构的受力分析问题的求解, 对机械原理的理论教学及工程实际中平面连杆机构受力分析问题的求解都具有重要意义。

**关键词:** 连杆机构受力分析; 动态静力分析; 考虑摩擦的动态静力分析; 差商法; 平面连杆机构

## 1. 引言

平面连杆机构因其结构简单、制造方便等原因, 在农业、纺织、工程等机械设备中得到广泛应用<sup>[1, 2]</sup>。为分析平面连杆机构的运动和动力性能或进行机构强度设计, 都必须对平面连杆机构进行受力分析, 以确定机构中各运动副处的反力或需施加在机构原动件上的平衡力或平衡力矩<sup>[3, 4]</sup>。在现代机械原理教材中, 平面连杆机构的受力分析大多只详细讲述两种情况, 即, 考虑运动副中的摩擦而不计构件惯性力时机构的力分析和不考虑摩擦但计构件惯性力时的力分析, 对于既考虑摩擦又计构件惯性力时的力分析涉及较少, 仅在年代较为久远的机械原理教材中有图解法求解过程<sup>[5, 6]</sup>。在工程实际中, 往往也仅对计惯性力但不计摩擦的情况进行分析<sup>[7-10]</sup>。张纪元等提出建立机构的力平衡方程, 利用数值法进行迭代求解, 实现考虑摩擦时机构的动态静力分析<sup>[11]</sup>。针对同时考虑摩擦和惯性力的平面连杆机构受力分析问题, 本文提出了一种简单准确的解析求解方法。下面仅以曲柄滑块机构为例进行介绍。

## 2. 已知条件及力分析求解要求

如图 1 所示曲柄滑块机构中, 已知曲柄 OA 以转速  $n$  匀速转动, 各构件的长度、质量、质心位置、绕质心的转动惯量、各转动副处的摩擦圆半径、各移动副

处的摩擦系数及作用在滑块上的工作阻力均已知。要求同时考虑摩擦和惯性力，确定机构各运动副处的总反力及需施加在曲柄上的驱动力矩。

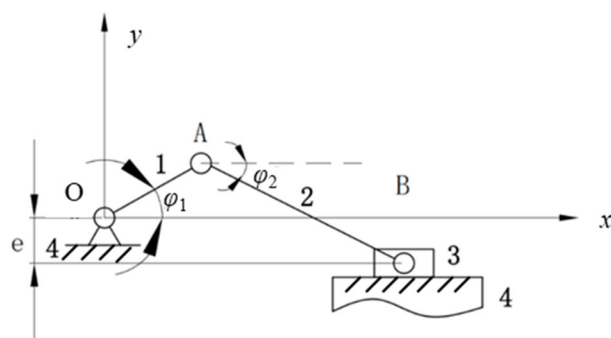


图 1 曲柄滑块机构示意图

### 3. 曲柄驱动力矩计算原理

本文将根据功能原理确定需施加在曲柄上的驱动力矩。机械系统中做一般平面运动的构件  $i$  的动能  $E_{ki}$  可表示为：

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_{Si}^2 + \frac{1}{2} J_{Si} \omega_i^2 \quad (1)$$

式中  $m_i$  为构件  $i$  的质量， $J_{Si}$  为构件  $i$  绕其质心的转动惯量， $v_{Si}$  为构件  $i$  质心的线速度， $\omega_i$  为构件  $i$  的角速度。

平动构件的动能只包含上式的第一项，绕质心定轴转动的构件只包含上式的第二项。若机构中有  $N$  个活动构件，则机构的全部构件的动能总和为：

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i v_{Si}^2 + \frac{1}{2} J_{Si} \omega_i^2 \right) \quad (2)$$

设作用在机构每个活动构件上的外力和外力矩分别为  $F_i$  和  $M_i$ ， $F_i$  与其作用点速度  $v_i$  的夹角为  $\beta_i$ ， $M_i$  作用构件的角速度为  $\omega_i$ ，外载荷产生的瞬时功率之和为：

$$P = \sum_{i=1}^N (F_i v_i \cos \beta_i + M_i \omega_i) \quad (3)$$

式中， $M_i$  和  $\omega_i$  同向时  $M_i$  取正值，否则取负值。

不对

由功能原理可知，作用在系统上的外力，在任一时间间隔内所做的功应等于该系统所有的动能增量，即：

$$P dt = dE \quad (4)$$

亦即：

$$P = \frac{dE}{dt} \quad (5)$$

力F，速度v，力矩M和角速度w都带符号参与运算的话，得到的力矩M符号也是顺为负，逆为正。

将式(3)和(2)代入式(5)得

$$\sum_{i=1}^N (F_i v_i \cos \beta_i + M_i \omega_i) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i v_{Si}^2 + \frac{1}{2} J_{Si} \omega_i^2 \right) \right\} \quad (6)$$

故：

$$\sum_{i=1}^N (F_i v_i \cos \beta_i + M_i \omega_i) = \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{v}_{Si} \cdot \mathbf{a}_{Si} + J_{Si} \omega_i \alpha_i) \quad (7)$$

式中  $\mathbf{v}_{Si}$  和  $\mathbf{a}_{Si}$  分别为构件  $i$  质心的线速度矢量和加速度矢量， $\alpha_i$  为构件  $i$  的角加速

度。记  $\mathbf{F}_{li} = -m_i \mathbf{a}_{Si}$ 、 $M_{li} = -J_{Si} \alpha_i$ ，则  $\mathbf{F}_{li}$  和  $M_{li}$  分别为构件  $i$  在质心处的惯性力矢量和

惯性力矩，式(7)可简写为：

$$\sum_{i=1}^N (F_i v_i \cos \beta_i + M_i \omega_i) = \sum_{i=1}^N (-\mathbf{F}_{li} \cdot \mathbf{v}_{Si} - M_{li} \omega_i) \quad (8)$$

在考虑摩擦时，曲柄滑块四杆机构上的外载荷有曲柄 OA 上的驱动力矩  $M_1'(t)$ 、

执行件在工作行程的工作阻力  $F_r(t)$ （与执行件的运动速度  $v_z$  方向相反）、各构件

重力  $m_i g$  和各运动副处的摩擦力  $F_{fi}$  或摩擦力矩  $M_{fi}$ 。移动副处摩擦力  $F_{fi}$  与相对

速度  $v_{fei}$  方向相反，转动副处摩擦力矩  $M_{fi}$  与相对转动速度  $\omega_{fei}$  方向相反，摩

擦力和摩擦力矩所做功恒为负，故式(8)可写为：

$$M_1'(t) \omega_1 = \sum_{i=1}^{N_1} |F_{fi} v_{fei}| + \sum_{i=1}^{N_2} |M_{fi} \omega_{fei}| + \sum_{i=1}^N (m_i g v_{Siy}) + |F_r(t) v_z| + \sum_{i=1}^N (-\mathbf{F}_{li} \cdot \mathbf{v}_{Si} - M_{li} \omega_i) \quad (9)$$

到考虑摩擦的曲柄 OA 上驱动力矩（等效阻力矩） $M_1'(t)$ ，应确定各构

件的速度矢量和加速度矢量，各构件的角速度和角加速度，各移动副处

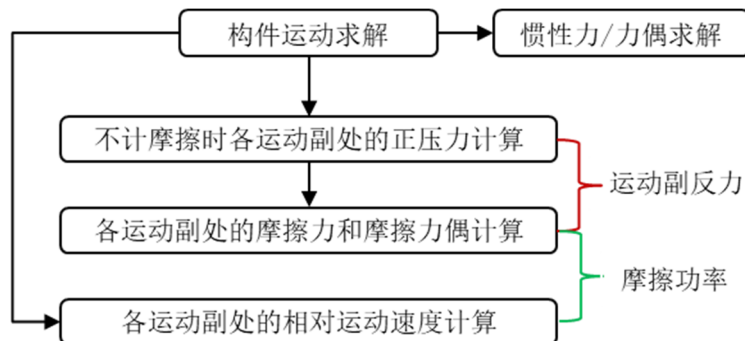
和相对速度，及各转动副处的摩擦力矩和相对转速。移动副处摩擦力  $F_{fi}$

等于移动副处的正压力乘以摩擦系数，转动副处的摩擦力矩等于转动副处的

正压力乘以摩擦圆半径，在摩擦系数和摩擦圆半径已知的情况下，需确定所有移

动副的正压力，本文将利用不考虑摩擦时各运动副处的正压力进行近似

计算。所需参数的计算流程如图 2 所示，下面将分别进行详细介绍。



Mli写错了，Mi

公式中所有字符都包含正负号

这里M1为曲柄上的平衡力矩，非等效阻力矩，两者差一个正负号

只有工作行程有阻力，非工作行程无阻力

M 逆为正，顺为负，w也是；（若计算时M1时，w1没有带符号，恒为正值，则M1为负时表示与w转向相反，M1为正时与w转向相同，需自己给M加上正负号，程序中w是带符号的，也就是说计算出来的M正逆负顺）

图 2 曲柄滑块机构示意图

#### 4. 解析法推导各构件的运动参数

##### (1) 位置表达式推导

由图 1 可知滑块 3 的水平位置方程可表示为：

$$x_3 = a \cos(\varphi_1) + \sqrt{b^2 - [a \sin(\varphi_1) - e]^2} \quad (10)$$

其中,  $a$  和  $b$  分别表示构件 OA 和 AB 的长度,  $e$  表示导轨沿  $y$  方向的偏置坐标,  $e$  可正可负, 图 1 所示位置  $e$  为负值。  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  的关系可表示为:

这里公式没问题

$$\varphi_2 = -\arcsin\left(\frac{a \sin(\varphi_1) - e}{b}\right) \quad (11)$$

求得  $\varphi_2$  后, 便可计算各转动副中心的坐标, 见表 1, 执行构件的位置可用坐标  $x_B$  表示:

表 1 曲柄滑块机构中各点坐标

点	$x$ 坐标	$y$ 坐标
$O$	0	0
$A$	$a \cos(\varphi_1)$	$a \sin(\varphi_1)$
$B$	$a \cos(\varphi_1) + \sqrt{b^2 - [a \sin(\varphi_1) - e]^2}$	$e$

##### (2) 构件运动参数的推导

此处的运动参数包括各活动构件及特定点的速度（角速度）和加速度（角加速度）。根据  $n$  阶差商为  $n$  阶导数的近似, 对各构件的位置方程求一阶和二阶差商即可得到各构件的速度（角速度）和加速度（角加速度）, 进而可求得构件上特定点的速度和加速度。记时间变化量为  $\Delta t$ （单位为 s）, 记  $t=0$  时曲柄 OA 的初始角度为  $\varphi_1(0)$ （单位为 rad）, 则  $t=k\Delta t$  时曲柄 OA 的角度为:

$$\varphi_1(t) = \omega t + \varphi_1(0) = \frac{2\pi n}{60} t + \varphi_1(0) \quad (12)$$

下面将分别推导各构件的速度、角速度、加速度及角加速度。需要说明的是, 下述公式中的所有符号都已包含表示方向的正负号。代入已知的角速度时逆时针为正, 顺时针为负。若无特殊说明, 利用本文公式计算得到的角速度、角加速度和力矩, 正值代表逆时针, 负值代表顺时针, 利用本文公式计算得到的沿各坐标

轴的速度、加速度和惯性力，正值代表沿各坐标轴正向，负值代表沿各坐标轴负向。

### 1) 构件 1 的运动参数

构件 1 即 OA 杆，做匀速圆周运动，记杆的质心  $S_1$  到 O 的距离为  $r_1$ ，则构件 1 的运动参数如表 2 所示。

表 2 构件 1 的运动参数

参数	公式
角速度	$\omega_1(t) = 2\pi n / 60$
角加速度	$\alpha_1(t) = 0$
质心沿 $x$ 方向运动速度	$v_{S_1x}(t) =  \omega_1(t)  \cdot r_1 \cdot \cos\left\{\varphi_1(t) + \text{sign}[\omega_1(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$
质心沿 $y$ 方向运动速度	$v_{S_1y}(t) =  \omega_1(t)  \cdot r_1 \cdot \sin\left\{\varphi_1(t) + \text{sign}[\omega_1(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$
质心法向加速度	$a_{S_1}^n(t) = \omega_1(t)^2 \cdot r_1$
质心切向加速度	$a_{S_1}^t(t) = \alpha_1(t) \cdot r_1$
质心沿 $x$ 方向加速度	$a_{S_1x}(t) = \omega_1(t)^2 \cdot r_1 \cdot \cos[\varphi_1(t) + \pi]$
质心沿 $y$ 方向加速度	$a_{S_1y}(t) = \omega_1(t)^2 \cdot r_1 \cdot \sin[\varphi_1(t) + \pi]$
A 点沿 $x$ 方向速度	$v_{Ax}(t) =  \omega_1(t)  \cdot a \cdot \cos\left\{\varphi_1(t) + \text{sign}[\omega_1(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$
A 点沿 $y$ 方向速度	$v_{Ay}(t) =  \omega_1(t)  \cdot a \cdot \sin\left\{\varphi_1(t) + \text{sign}[\omega_1(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$
A 点沿 $x$ 方向加速度	$a_{Ax}(t) = \omega_1(t)^2 \cdot a \cdot \cos[\varphi_1(t) + \pi]$
A 点沿 $y$ 方向加速度	$a_{Ay}(t) = \omega_1(t)^2 \cdot a \cdot \sin[\varphi_1(t) + \pi]$

(注：sign(x)为符号函数， $x$  为正，sign(x)=1； $x$  为负，sign(x)=-1。)

### 2) 构件 2 的速度、角速度、加速度、角加速度

构件 2，即 AB 杆，做平面运动，设杆的质心  $S_2$  到 A 点距离为  $r_2$ ，则构件 2 的运动参数如下。

角速度：

$$\omega_2(t) = \frac{\varphi_2(t + \Delta t) - \varphi_2(t)}{\Delta t} \quad (11) \text{式求得各值的差分。} \quad (13)$$

角加速度：

$$\alpha_2(t) = \frac{\omega_2(t + \Delta t) - \omega_2(t)}{\Delta t} \quad (13) \text{式求得各值的差分。} \quad (14)$$

质心相对 A 点的法向加速度：

$$a_{S_2}^n(t) = \omega_2(t)^2 \cdot r_2 \quad (15)$$

质心相对 A 点的切向加速度：

$$a_{S_2}^t(t) = \alpha_2(t) \cdot r_2 \quad (16)$$

质心沿  $x$  方向速度：

$$v_{S_2x}(t) = v_{Ax}(t) + |\omega_2(t)| \cdot r_2 \cdot \cos\{\varphi_2(t) + \text{sign}[\omega_2(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad (17)$$

质心沿  $y$  方向速度：

$$v_{S_2y}(t) = v_{Ay}(t) + |\omega_2(t)| \cdot r_2 \cdot \sin\{\varphi_2(t) + \text{sign}[\omega_2(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad (18)$$

质心沿  $x$  方向加速度：

$$a_{S_2x}(t) = a_{Ax}(t) + a_{S_2}^n(t) \cdot \cos(\varphi_2 + \pi) + |a_{S_2}^t(t)| \cdot \cos\{\varphi_2 + \text{sign}[a_{S_2}^t(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad (19)$$

质心沿  $y$  方向加速度：

$$a_{S_2y}(t) = a_{Ay}(t) + a_{S_2}^n(t) \cdot \sin(\varphi_2 + \pi) + |a_{S_2}^t(t)| \cdot \sin\{\varphi_2 + \text{sign}[a_{S_2}^t(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad (20)$$

B 点相对 A 点的法向加速度：

$$a_B^n(t) = \omega_2(t)^2 \cdot b \quad (21)$$

B 点相对 A 点的切向加速度：

$$a_B^t(t) = \alpha_2(t) \cdot b \quad (22)$$

B 点沿  $x$  方向速度：

$$v_{Bx}(t) = v_{Ax}(t) + |\omega_2(t)| \cdot b \cdot \cos\{\varphi_2(t) + \text{sign}[\omega_2(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad (23)$$

B 点沿  $y$  方向速度：

$$v_{By}(t) = v_{Ay}(t) + |\omega_2(t)| \cdot b \cdot \sin\{\varphi_2(t) + \text{sign}[\omega_2(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad (24)$$

B 点沿  $x$  方向加速度：

$$a_{Bx}(t) = a_{Ax}(t) + a_B^n(t) \cdot \cos(\varphi_2 + \pi) + |a_B^t(t)| \cdot \cos\{\varphi_2 + \text{sign}[a_B^t(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad (25)$$

B 点沿  $y$  方向加速度:

$$a_{By}(t) = a_{Ay}(t) + a_B^n(t) \cdot \sin(\varphi_2 + \pi) + |a_B^t(t)| \cdot \sin\{\varphi_2 + \text{sign}[a_B^t(t)] \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad (26)$$

### 3) 构件 3 的速度与加速度

构件 3 平动, 其速度和加速度均可用其上 B 点的速度和加速度表示, 即

$$v_3(t) = v_{Bx}(t) \quad (27)$$

$$a_3(t) = a_{Bx}(t) \quad (28)$$

对于构件 3 的速度与加速度也可通过构件 3 的位置函数利用差商法得到:

$$v_3(t) = \frac{x_3(t + \Delta t) - x_3(t)}{\Delta t} \quad (29)$$

加速度为:

$$a_3(t) = \frac{v_3(t + \Delta t) - v_3(t)}{\Delta t} \quad (30)$$

### (3) 各构件的惯性力矩和绕质心的惯性力计算

得到各构件的运动参数后, 各构件的惯性力矩  $M_{Ii}$  和绕质心的惯性力  $F_{Ii}$  分别如表 3 和表 4 所示。

表 3 曲柄滑块机构各杆的惯性力矩

杆	$M_{Ii}$
OA 杆	$M_{I1}(t) = -J_1\alpha_1(t)$
AB 杆	$M_{I2}(t) = -J_2\alpha_2(t)$

表 4 曲柄滑块机构各杆的惯性力

构件	惯性力
构件 1 质心处的惯性力	沿 $x$ 方向的分量 $F_{I1x}(t) = -m_1 a_{S1x}(t)$
	沿 $y$ 方向的分量 $F_{I1y}(t) = -m_1 a_{S1y}(t)$
构件 2 质心处的惯性力	沿 $x$ 方向的分量 $F_{I2x}(t) = -m_2 a_{S2x}(t)$
	沿 $y$ 方向的分量 $F_{I2y}(t) = -m_2 a_{S2y}(t)$
构件 3 质心处的惯性力	$F_{I3}(t) = -m_3 a_3(t)$

## 5. 解析法推导各运动副处的摩擦力或摩擦力矩

### (1) 不考虑摩擦时各运动副处的正压力计算

为求得各运动副处的正压力需要将对机构的各个构件进行受力分析。对构件 3 受力分析如图 3 所示，根据  $\sum F_x = 0$  和  $\sum F_y = 0$  有：

$$\begin{cases} F_{R23x} = F_{I3} - F_r \\ F_{R43} = m_3 \cdot g + F_{R23y} \end{cases} \quad (31)$$

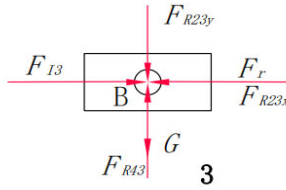


图 3 曲柄滑块机构中构件 3 受力分析

对构件 2 受力分析如图 4 所示，根据  $\sum M_A = 0$ ， $\sum F_x = 0$ ， $\sum F_y = 0$  有：

$$\begin{cases} -F_{R32x} \cdot b \sin(\varphi_2) + F_{R32y} \cdot b \cos(\varphi_2) - m_2 g b \cos(\varphi_2) - F_{I2x} \cdot r_2 \sin(\varphi_2) + F_{I2y} \cdot r_b \cos(\varphi_2) + M_{I2} = 0 \\ F_{R12x} + F_{I2x} + F_{R32x} = 0 \\ F_{R12y} + F_{I2y} + F_{R32y} - m_2 g = 0 \end{cases} \quad (32)$$

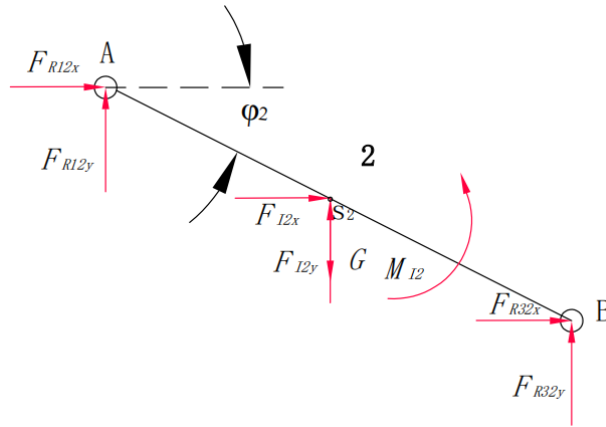


图 4 曲柄滑块机构中构件 2 受力分析

对构件 1 受力分析如图 5 所示，根据  $\sum M_O = 0$ ， $\sum F_x = 0$ ， $\sum F_y = 0$  有：

$$\begin{cases} F_{R21x} a \sin(\varphi_1) - F_{R21y} a \cos(\varphi_1) + F_{I1y} r_1 \cos(\varphi_1) - F_{I1x} r_1 \sin(\varphi_1) - m_1 g r_1 \cos(\varphi_1) + M_{I1} + M_1 = 0 \\ F_{R41x} + F_{I1x} - F_{R21x} = 0 \\ F_{R41y} + F_{I1y} - F_{R21y} - m_1 \cdot g = 0 \end{cases} \quad (33)$$



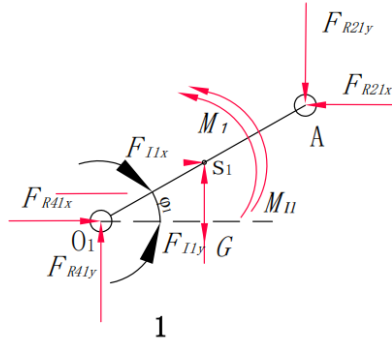


图 5 曲柄滑块机构中构件 1 受力分析

式(31)、(32)和(33)中共 12 个未知数，分别为  $F_{R43}$ 、 $F_{R23x}$ 、 $F_{R23y}$ 、 $F_{R12x}$ 、 $F_{R12y}$ 、 $F_{R32x}$ 、 $F_{R32y}$ 、 $M_1$ 、 $F_{R41x}$ 、 $F_{R41y}$ 、 $F_{R21x}$ 、 $F_{R21y}$ ，由于其中  $F_{R32x}$  和  $F_{R23x}$ 、 $F_{R23y}$  和  $F_{R32y}$ 、 $F_{R12x}$  和  $F_{R21x}$ 、 $F_{R12y}$  和  $F_{R21y}$  分别是相互作用力，大小相等，因此，联立式(31)、(32)和(33)即可求得  $F_{R43}$ 、 $F_{R23x}$ 、 $F_{R23y}$ 、 $F_{R12x}$ 、 $F_{R12y}$ 、 $M_1$ 、 $F_{R41x}$ 、 $F_{R41y}$ ，其中  $M_1$  为不考虑摩擦时需加在曲柄 OA 上的驱动力矩。至此可计算各转副处的正压力，如表 5。

表 5 曲柄滑块各转副处的正压力

转动副	正压力
O	$F_{NO} = \sqrt{F_{R41x}^2 + F_{R41y}^2}$
A	$F_{NA} = \sqrt{F_{R12x}^2 + F_{R12y}^2}$
B	$F_{NB} = \sqrt{F_{R23x}^2 + F_{R23y}^2}$

## (2) 各运动副处的摩擦力和摩擦力矩计算

记各运动副处的摩擦系数和摩擦圆半径分别为  $f_i$  和  $\rho_i$ ，则各运动副处的摩擦力  $F_{fi}$  和摩擦力矩  $M_{fi}$  见表 6。

表 6 各运动副处的摩擦力和摩擦力矩

运动副	摩擦力 $F_{fi}$ 或摩擦力矩 $M_{fi}$
O	$M_{fO} = F_{NO} \cdot \rho_O$
A	$M_{fA} = F_{NA} \cdot \rho_A$

B

$$M_{fB} = F_{NB} \cdot \rho_B$$

移动副

$$F_{f34} = F_{N34} f_{34}$$

6. 各运动副处的相对运动速度计算

各运动副处的相对运动速度见表 7。

表 7 曲柄滑块各运动副处的相对运动

运动副	相对运动速度
转动副 O	$\omega_1$
转动副 A	$\omega_2 - \omega_1$
转动副 B	$\omega_2$
移动副	$v_3$

将上述参数代入式(9)即可得到考虑摩擦时需施加在曲柄上的驱动力矩  $M_1'(t)$ ，而各运动副处的总反力可以由不考虑摩擦时的正压力和因此产生的摩擦力矩或摩擦力来近似表示，如此，便完成了同时考虑摩擦和惯性力的平面机构的受力分析。

7. 结果示例

根据上述理论分析，我们利用 VB 进行了编程实现，当曲柄滑块机构各参数设置如图 6 所示时，程序计算得到的在不同曲柄转角下，不考虑摩擦时曲柄上需施加的驱动力矩如图 7 蓝色曲线所示，考虑摩擦时曲柄上需施加的驱动力矩如图 7 红色曲线所示。

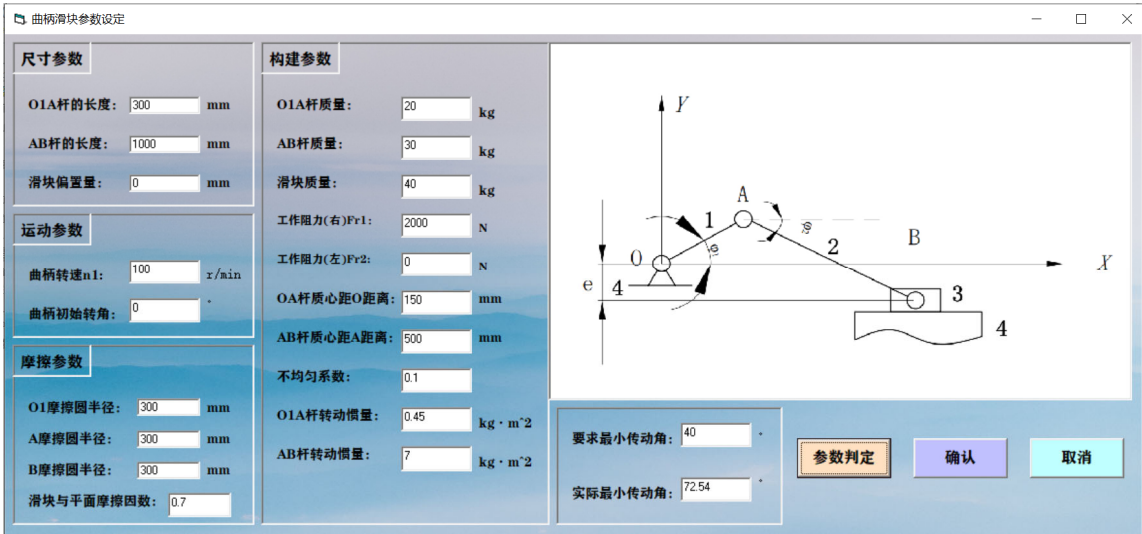


图 6 曲柄滑块机构参数设置值

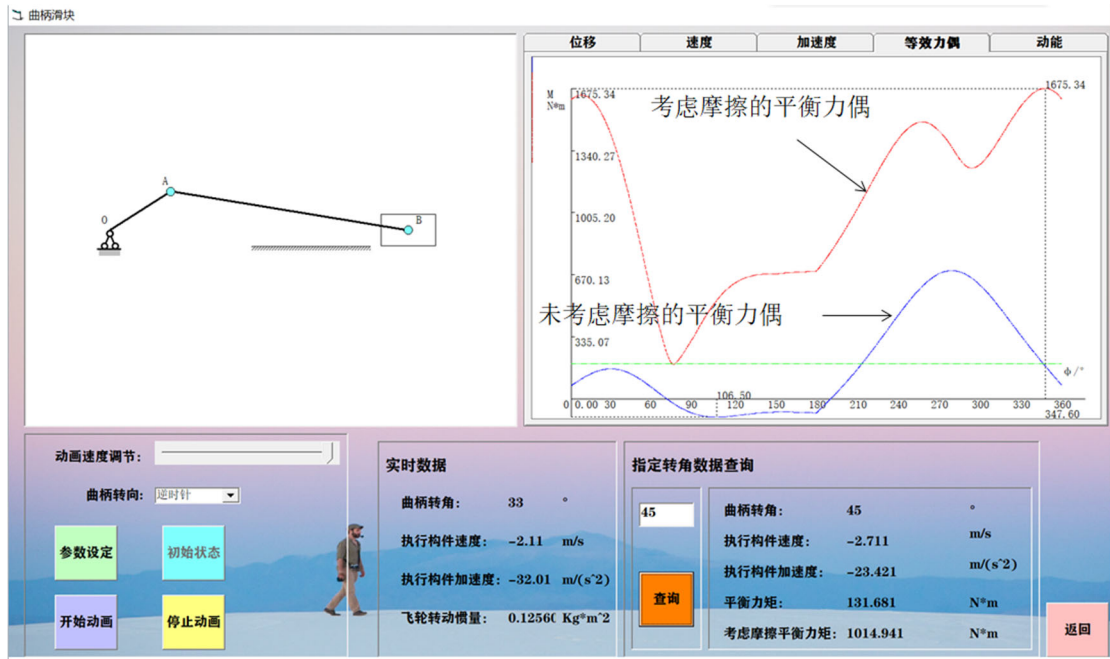


图 7 曲柄滑块机构平衡力矩的计算结果示例

## 8. 总结

本文提出一种同时考虑摩擦和惯性力的平面机构受力分析问题的解析求解方法。根据机构位置方程，采用差商法估计各构件的速度和加速度等运动参数；对各构件进行受力分析，采用解析法求得不考虑摩擦时各运动副处的正压力；用不考虑摩擦时各运动副处的正压力及其产生的摩擦力或摩擦力矩近似各运动副处的总反力；根据功能原理计算需施加在构件上的平衡力矩。采用本解析法思路可实现摩擦与惯性力同时作用下任意平面机构的受力分析问题的求解，且可编程实现，便于准确求解和分析，有助于机构设计分析过程的自动化。

## 参考文献

- 徐艳妮, 基于 MATLAB 的平面连杆机构综合与分析. 2014, 西安科技大学.
- 杨捷, 基于 Matlab 的平面机构分析解析法. 2013, 西华大学.
- 孙桓, 陈作模, and 葛文杰, 机械原理 (第八版). 2013, 北京: 高等教育出版社.
- 张洪生, et al., 钻井泵曲柄连杆机构的受力分析研究. 石油钻探技术, 2009. 37(06): p. 70-73.
- (苏)季诺维也夫, B.A., 机械原理讲义. 1959, 北京: 高等教育出版社.
- 黄锡恺 and 郑文纬, 机械原理 第6版. 1989, 北京: 高等教育出版社.
- 车胜创, 内燃机曲柄连杆机构受力精确值与近似值的误差分析. 筑路机械与施工机械化, 1993(04): p. 11-14+21.

8. 李宗, 姚锦涛, and 刘康, 基于 *MATLAB* 的曲柄滑块机构的动态静力分析. 装备制造技术, 2018(02): p. 247-249.
9. 熊滨生, 平面连杆机构的动态静力分析. 郑州工学院学报, 1994(01): p. 51-56.
10. 王中双, 解晓梅, and 徐长顺, 平面连杆机构动态静力分析回转键合图法. 机械设计, 2009. 26(07): p. 6-8+31.
11. 张纪元 and 沈守范, 考虑摩擦时平面机构动态静力分析的数值解法. 南京理工大学学报(自然科学版), 1993(06): p. 1-5.