

ALGORITHMS
FOR
GLOBAL
POSITIONING

KAI BORRE

2017

目录

I	卫星信号与坐标系统	1
1	GNSS的基本思路与应用	3
1.1	定位的世界	4
1.2	GPS如何提供位置	5
1.3	全球卫星导航系统	6
2	GNSS信号和调制	7
2.1	GNSS信号	8
2.2	二进制偏移载波调制	9
3	坐标系统转换	11
3.1	直角坐标系到椭球坐标系	12
3.2	1980大地参考系	13
3.3	大地椭球面	14
3.4	WGS-84坐标系	15
3.5	坐标系转换与基准转换	16
3.6	GPS参考系的意义	17
II	最优估计	19
4	随机变量和协方差阵	21
4.1	最小二乘方程	22
4.2	协方差与最优权	24
4.3	递归最小二乘（与卡尔曼滤波）	25

4.4	正态分布与 χ^2	26
4.5	均值、方差与协方差	27
4.6	均值与协方差的传播律	28
4.7	单位权方差估计	29
4.8	数值计算方法与最小二乘	30
4.9	置信椭圆	31
4.10	质量控制	32
5	随机过程	33
5.1	连续时间中的随机过程	34
5.2	离散时间中的随机过程	35
5.3	模型	36
6	线性代数中加权最小二乘	37
6.1	格瑞姆-史密正交化系数阵 A 和乔利斯基分解用于 $A^T A$	38
6.2	计算正交矩阵	39
6.3	奇异值	40
6.4	条件数	41
6.5	对权重的依赖	42
6.6	消除未知量	43
6.7	去相关和规范权	44
6.8	等式约束的最小二乘	45
7	奇异方程和网平差	47
7.1	秩亏的标准方程	48
7.2	网中的零空间	49
7.3	约束秩亏问题	50
7.4	随机变量的线性变换	51
7.5	相似变换	52
7.6	协变换	53
7.7	控制点的变量	54
7.8	向量平差	55

8 卡尔曼滤波	57
8.1 更新最小二乘法	58
8.2 静态与动态方程更新	59
8.3 稳定模型	60
8.4 推导卡尔曼滤波	61
8.5 用于批处理的贝叶斯滤波	62
8.6 平滑	63
8.7 卡尔曼方法用于稳定模型	64
8.8 对角的协方差阵	65
8.9 固定约束的卡尔曼滤波	66
8.10 相关过程和观测噪声	67
8.11 时间相关的过程噪声	68
8.12 离散值滤波的稳定	69
8.13 离散时间的卡尔曼滤波小项目	70
 III 定位算法	 71
9 接收机伪距定位的方法	73
9.1 使用GPS定位	74
9.2 EASY Suite工具	77
9.3 时间系统对于GPS的意义	81
9.4 定位卫星	88
9.5 使用观测码定位接收机	97
9.6 可选择的算法	105
9.7 搜索定位接收机	110
9.8 GPS观测值的误差项	112
9.9 星基增强系统	113
9.10 练习题	114
 10 差分观测的一种方法	 115
10.1 联合观测的方法	116
10.2 计算模型的动机	118

10.3 组合编码和伪距观测	122
10.4 GPS的计算模型	123
10.5 检查观测值	124
10.6 模糊度的GOAD解法	125
10.7 模糊度的LAMBDA解法	126
10.8 GPS和时间	127
10.9 动态实时定位	128
IV 大地测量和地球坐标	129
11 椭球面大地测量	131
11.1 旋转椭球	132
11.2 主曲率	133
11.3 子午圈的长度	134
11.4 法截面和测地线	135
11.5 曲线和测地线的Frenet公式	136
11.6 克莱劳方程	137
11.7 测地线的性能	138
11.8 直接和间接的大地测量	139
11.9 算法	140
12 椭球面的正形投影	141
12.1 正形	142
12.2 椭球的高斯投影	143
12.3 笛卡尔坐标系到大地坐标系的转换	144
12.4 子午线收敛角和比例尺	145
12.5 地图叠加	146
12.6 通用横轴墨卡托投影	147
12.7 最好的等角投影	148

第 I 篇

卫星信号与坐标系 Satellite Signals and Coordinate Systems

第 1 章

GNSS的基本思路与应用

Essential Ideas and Applications of GNSS

Contents

1.1	定位的世界	4
1.2	GPS如何提供位置	5
1.3	全球卫星导航系统	6

1.1 定位的世界

The Positioning World

1.2 GPS如何提供位置

How GPS Yields a Position

1.3 全球卫星导航系统

Global Navigation Satellite Systems *GNSS*

第 2 章

GNSS信号和调制

GNSS Signals and Modulations

Contents

2.1	GNSS信号	8
2.2	二进制偏移载波调制	9

2.1 GNSS信号

GNSS Signals

2.2 二进制偏移载波调制

Binary Offset Carrier Modulations

第 3 章

坐标系统转换

Change of Coordinate Systems

Contents

3.1	直角坐标系到椭球坐标系	12
3.2	1980大地参考系	13
3.3	大地椭球面	14
3.4	WGS-84坐标系	15
3.5	坐标系转换与基准转换	16
3.6	GPS参考系的意义	17

3.1 直角坐标系到椭球坐标系

Rectangular to Ellipsoidal Coordinates

3.2 1980大地参考系

Geodetic Reference System 1980

3.3 大地椭球面

Geoid, Ellipsoid, and Datum

3.4 WGS-84坐标系

World Geodetic System 1984

3.5 坐标系转换与基准转换

Coordinate Changes From Datum Changes

3.6 GPS参考系的意义

Reference Systems Relevant for GPS

第 II 篇

最优估计

Optimal Estimates

第 4 章

随机变量和协方差阵

Random Variables

and

Covariance Matrices

Contents

4.1	最小二乘方程	22
4.2	协方差与最优权	24
4.3	递归最小二乘（与卡尔曼滤波）	25
4.4	正态分布与 χ^2	26
4.5	均值、方差与协方差	27
4.6	均值与协方差的传播律	28
4.7	单位权方差估计	29
4.8	数值计算方法与最小二乘	30
4.9	置信椭圆	31
4.10	质量控制	32

4.1 最小二乘方程

The Equations of Least Squares

本章提出了全球定位的基本数学。在大图片中，我们获得卫星到接收机的伪距测量值。有如此多的卫星，我们希望有更多测量值而不是最少的测量值去确定 X, Y, Z, t （位置和时间）。但是这些测量值包含误差（所以我们使用“假，伪”这一词汇去描述观测到的距离）。这就是最小二乘算法：不相容方程组最好的解决方法。典型的问题是超定线性系统有噪声 e （误差）：..... (4.1) 通常我们有适合 n 个参数的 m 个方程（ m 为观测值）。（未知数 x_1, x_2, \dots, x_n 可以表示接收机的位置，速度，或时间）。方程。。。无解，因为 $m < n$ 。我们的任务是找到方程最优解。。。 (被称为“ x 帽子”)。本章建立方程，当噪声向量 e 是一个随机变量时确定 x 。从最简单的假设开始： m 的组成部分 e 独立于标准正态分布（均值为0，方差为1），没有理由相信任何方程在。。。中比其他方程多或少。未加权的最小二乘最小化为。。。，即平方差之和，最佳估计。。。解答正规方程（标准式方程）..... (4.2) 我们将通过微积分和几何代数得到这些方程，通过通常条件。。。微积分最小化。。。通过选择接近于 b ，组合 Ax 的 A 的列数几何最小化 E 。代数承认。。。是 b 的投影，在子空间内所有可能组合 Ax 。所有理解正规方程。。。的方式值得你的关注。也许这是最重要的线性代数中的应用。解决这些方程数值是一个单独的问题。在大多数情况下，我们只是从系数矩阵。。。 (对称正定)入手，然后通过消除不旋转解决。虽然这种方式可以解决，却不是最佳方式： 1. 当。。。为病态（系数矩阵 A 几乎是依赖的列数）时，可能需要更大的数值稳定性，然后有了避免形成。。。的“平方根法”。系数矩阵 A 相反的列可以提前使其正交化，这在第五章中描述。这个著名的算法使用克-施密特方法，但户主矩阵给出一个更好的方法，奇异值分解可以发挥重要作用。 2. B 中的观测值不一定立刻生成，在这种情况下，我们更喜欢递归最小二乘，更新估计的。。。来反映最新的观测结果，从一开始就没有重复之前的步骤和验算。在动态应用（比如移动接收机）中，其状态本身是不断变化的。我们从第 i 步新的观测中估计不同的的位置向量 x_i ，但这个向量 x_i 与之前的 x_{i-1} 通过状态方程建立联系，所以每一步是一个两阶段的过程：从状态方程预测（有自己的误差来源），后跟一

个修正值去说明下一步新的观测值。卡尔曼滤波执行这两个步骤。我们在第八章解释这一想法和推导更新公式，在4.3节举出一个例子。3. b 中的观测值 m 可能不是同样地可靠（它们可能不是独立的，误差 e_1, \dots, e_m 可能是相关的）。 b 中的不确定性通过方差 σ_i^2 来评估， e_i 与 e_j 的相关性通过协方差 σ_{ij} 来评估。所有这些数字放入协方差矩阵 Σ 中，描述如下：对称矩阵 Σ 告诉我们观测方程 $Ax=b$ 正确的权重，普通的最小二乘有隐含的假设，即 Σ 是单位阵，独立且平等的方差确定相等的权重，方差越大的方程，可靠性越低，权重越小。我们将展示逆矩阵 Σ^{-1} 为何是加权最小二乘的正确选择。正规方程从 $A^T A x = A^T b$ 变为 $x = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1} b$ ，这些方程直接解或者递归解。这一重要的结果不仅是最佳估计 \hat{x} ，而且还是协方差矩阵 $\hat{\Sigma}$ ，用来评定最佳估计的可靠性。本章解释概率分布和协方差。正态分布（或高斯分布）中的因素 Σ 总是占主导地位，当协方差阵 Σ 包含在内时系数变为 Σ^{-1} ，这些是基本的想法，定位的应用是这本书的核心。例4.1 最小二乘的一个重要应用是由 m 个点拟合一条直线。从3个点开始：找到最接近 $(0, 6)$ ， $(1, 0)$ 和 $(2, 0)$ 的线。图4.1 最好的线和投影：两张图片，同样的问题。这条线有顶点 $p=(5,2,-1)$ ，误差 $e=(1,-2,1)$ 。方程式 $b=5-3t$ 给出结果 p ，最好的线为 $b=5-3t$ ，第二张图片中， b 的投影为 $p=5a_1-3a_2$ 。没有直线 $b=C+Dt$ 通过这三个点。我们要求两个数 C 和 D ，满足三个方程，这是方程在 $t = 0, 1, 2$ 匹配给定值 $b = 6, 0, 0$ ：
 $t=0$ 第一个点在直线 $b=C+Dt$ 则 $C+D*0=6$
 $t=1$ 第二个点在直线 $b=C+Dt$ 则 $C+D*1=0$
 $t=2$ 第三个点在直线 $b=C+Dt$ 则 $C+D*2=0$ 。
 这个 3×2 的系统没有解决方案： $b = (6, 0, 0)$ 不是列 $(1, 1, 1)$ 和 $(0, 1, 2)$ 的组合。从这些方程中读取 A ， x 和 b ，解答 $Ax=b$ ：缺少矩阵 $Ax=b$ 是不可解的。

4.2 协方差与最优权

Covariances and Optimal Weights

4.3 递归最小二乘（与卡尔曼滤波）

Recursive Least Squares (and Kalman Filter)

4.4 正态分布与 χ^2

The Normal Distribution and χ^2

4.5 均值、方差与协方差

Mean, Variance, and Covariance

4.6 均值与协方差的传播率

Propagation of Means and Covariances

4.7 单位权方差估计

Estimating the Variance of Unit Weight

4.8 数值计算方法与最小二乘

Numerical Methods for Weighted Least Squares

4.9 置信椭圆

Confidence Ellipses

4.10 质量控制

Quality Control

第 5 章

随机过程

Random Processes

Contents

5.1	连续时间中的随机过程	34
5.2	离散时间中的随机过程	35
5.3	模型	36

5.1 连续时间中的随机过程

Random Processes in Continuous Time

5.2 离散时间中的随机过程

Random Processes in Discrete Time

5.3 模型

Modeling

第 6 章

线性代数中加权最小二乘 Linear Algebra for Weighted Least Squares

Contents

6.1	格瑞姆-史密正交化系数阵 A 和乔利斯基分解用于 $A^T A$.	38
6.2	计算正交矩阵	39
6.3	奇异值	40
6.4	条件数	41
6.5	对权重的依赖	42
6.6	消除未知量	43
6.7	去相关和规范权	44
6.8	等式约束的最小二乘	45

6.1 格瑞姆-史密正交化系数阵 A 和乔利斯基分解 用于 $A^T A$

Gram-Schmidt on A and Cholesky on $A^T A$

6.2 计算正交矩阵

Computing with Orthogonal Matrices

6.3 奇异值

Singular Value Decomposition(SVD)

6.4 条件数

The Condition Number

6.5 对权重的依赖

Dependency on the Weights

6.6 消除未知量

Elimination of Unknowns

6.7 去相关和规范权

Decorrelation and Weight Nomalization

6.8 等式约束的最小二乘

Least Squares with Equality Constraints

第 7 章

奇异方程和网平差

Singular Normal Equations and Networks

Contents

7.1	秩亏的标准方程	48
7.2	网中的零空间	49
7.3	约束秩亏问题	50
7.4	随机变量的线性变换	51
7.5	相似变换	52
7.6	协变换	53
7.7	控制点的变量	54
7.8	向量平差	55

7.1 秩亏的标准方程

Rank Deficient Normal Equations

7.2 网中的零空间

Nullspaces for Networks

7.3 约束秩亏问题

Constraining a rank Deficient Problem

7.4 随机变量的线性变换

Linear Transformation of Random Variables

7.5 相似变换

Similarity Transformations

7.6 协变换

Covariance Transformations

7.7 控制点的变量

Variances at Control Points

7.8 向量平差

Adjustment of Vectors

第 8 章

卡尔曼滤波

Kalman Filters

Contents

8.1	更新最小二乘法	58
8.2	静态与动态方程更新	59
8.3	稳定模型	60
8.4	推导卡尔曼滤波	61
8.5	用于批处理的贝叶斯滤波	62
8.6	平滑	63
8.7	卡尔曼方法用于稳定模型	64
8.8	对角的协方差阵	65
8.9	固定约束的卡尔曼滤波	66
8.10	相关过程和观测噪声	67
8.11	时间相关的过程噪声	68
8.12	离散值滤波的稳定	69
8.13	离散时间的卡尔曼滤波小项目	70

8.1 更新最小二乘法

Updating Least Squares

8.2 静态与动态方程更新

Static and Dynamic Updates

8.3 稳定模型

The Steady Model

8.4 推导卡尔曼滤波

Derivation of the Kalman Filter

8.5 用于批处理的贝叶斯滤波

Bayes Filter for Batch Processing

8.6 平滑

Smoothing

8.7 卡尔曼方法用于稳定模型

Kalman Treatments of the Steady Model

8.8 对角的协方差阵

Diagonal Covariance Matrices

8.9 固定约束的卡尔曼滤波

Fixing Constraints in the Kalman Filter

8.10 相关过程和观测噪声

Correlated Process and Observation Noise

8.11 时间相关的过程噪声

Process Noise Correlated Over Time

8.12 离散值滤波的稳定

Stability of Discrete Filter

8.13 离散时间的卡尔曼滤波小项目

Mini Project on Discrete-Time Kalman Filter

第 III 篇

定位算法

Positioning Algorithms

第 9 章

接收机伪距定位的方法

Receiver Position from One-Way Pseudoranges

Contents

9.1	使用GPS定位	74
9.2	EASY Suite工具	77
9.3	时间系统对于GPS的意义	81
9.4	定位卫星	88
9.5	使用观测码定位接收机	97
9.6	可选择的算法	105
9.7	搜索定位接收机	110
9.8	GPS观测值的误差项	112
9.9	星基增强系统	113
9.10	练习题	114

9.1 使用GPS定位

Positioning by GPS

GPS对于定位和地球测量来说是一项革命性的科学技术。一方面在于其精确性，另一方面在于其快捷性和简易性。第三方面在于其廉价性。这些方面的提高导致了GPS方向的应用大量产生。我们真诚的希望我们的读者能够研发新的GPS方面的应用；GPS技术已经成熟，现在需要的是想法，并且主动将这些想法变为现实。

但是这是一本科学的书籍，不是一本宣传手册。我们专注于GPS的一个主要优势：精确度。GPS接收机自生的精确度是可以增强或减弱的。认真处理每一个流程可以提高精度，减弱是引入了显著的信号源误差。我们将使用EASY Suites描述计算的过程。

我们强烈要求重视“GPS时间”这一方面。在GPS定位中，时间是用于描述的第个四维度。这就是为什么我们需要至少四颗，而不是三颗卫星进行接收机定位的原因。这四个定位元素分别是 X, Y, Z 和 $c dt$ ——光速乘以钟差 dt 。这个量 $c dt$ 是距离的单位。由于普通的接收机时钟精确度仅仅只能达到秒一级，那么消除 $c dt$ 的误差就不再是一个可选的，而是完全必须要处理的改进。

总而言之，GPS定位精确性的关键在于准确的卫星轨道和时间信息，在地面上，开普勒参数是通过实际观测到的轨道来计算的。这些参数上传到卫星的存储器里。卫星里携带着原子钟。它们分别播报它们自己的开普勒参数并在接收机计算。它们同时会播报低精度的其他卫星的开普勒参数。但是这些播报的参数是当前卫星轨道上最后的一部分。GPS定位的主要问题就是定位接收机。

关于GPS有一个事实我们需要注意，就是GPS测量提供的是距离而不是角度。我们通过三边测量的方法而不是三角测量的方法，这是几个世纪以来我们一直想要的，因为角度测量是绝对不方便的。当然在定位的元素 X, Y, Z 和 $c dt$ 中，距离测量也是非线性的。接收机必须解决非线性的方程组。

这一章节的目的是解释GPS是如何进行定位和数学上的关系。我们将从廉价的接收机，伪距测量和有限制的精度开始。这一章使用的是小

于\$1000的接收机，测量精度将达到米级。下一章我们将使用大于\$1000的接收机，高质量的接收机（或GPS网）允许使用组合码和相位测量，测量精度将达到毫米级。第十章“差分观测的方法”将处理主要的误差源并且将定位的精度等级提高到令人惊讶的程度。

同样的我们认为MATLAB软件是读者们可以自由获取的。对于这个GPS的前言，Ponsonby（1996）的讲座是特别有帮助的。

9.1.1 钟差和双曲面

Clock Errors and Hyperbolas of Revolution

现在目标是获得一个可靠的接收机坐标。假设它们没有钟差。那么有三颗卫星到接收机的距离就可以确定一个点。每一个卫星都有一个的距离可以在空间钟确定一个球体。首先两个球体相交可以获得一个圆。假设三个卫星不再一条直线上时，第三个球体通常和圆交于两点。一点是正确的接收机位置，另一点通常在太空中。所以三颗卫星足够定位，如果时钟是准确的并且所有的距离测量都是精确的。

实际上接收机的时钟很廉价而且不精确。当钟差是 dt 时，每一个距离测量就会立即多出一项距离误差 $c dt$ 。我们测量信号到达时间，其中包含的信息有发出时间。（光速大约是 $c \approx 300m/\mu sec$ 。当然我们使用更加精确的位数表示 c ，这对电离层误差和对流层误差有略微的不同。它们是模型误差之一。）这个不准确的测量值包含着来自未知钟差的 $c dt$ ，被称为伪距。

有两个卫星时我们可以获得两个伪距观测 ρ_1 和 ρ_2 。它们的差值 $d^{12} = \rho_1 - \rho_2$ 就没有接收机误差 $c dt$ 。接收机必须位于双曲线上，两个卫星分别为焦点。这个曲线图上所有的点在空间中的距离到两个卫星的差值都是 d^{12} 。

第三个伪距值确定接收机在其他的双曲线上（即双曲面）。它们首先相交于曲线。第四个伪距值提供了三个独立的双曲面，它们相切在曲线上（通常是两个）。假如四个卫星不是公面的，我们再一次的获得了两个接收机可能的位置：一个准确位置、另一个在太空中，距精确值偏离了太多所以舍弃了。这个几何结构来自四个伪距观测 p^k ：

$$(X - X^k)^2 + (Y - Y^k)^2 + (Z - Z^k)^2 + (c dt)^2 = (\rho^k)^2$$

9.1.2 参考椭球和坐标系统

Reference Ellipsoid and Coordinate Systems

接收机必须将 X 、 Y 、 Z 坐标转换至大地测量参考标准。对于GPS这个参考是WGS84。俄罗斯的GLONASS的参考系略微有所不同是PZ-90。然后接收机使用一个大地水准体模型计算地理坐标系和海拔高度。通常接收机显示纬度和经度或者在UTM投影上的北距和东距，这样可以使使用者在地图上找到坐标位置。不考虑WGS84到地图投影的修正值的话将极易导致错误。（地图投影仅仅是用来导航）实际上，地图不太可能达到厘米级的精度。尽管如此它们大概足够接近平常用户的用途了。

9.2 EASY Suite工具

The EASY Suites

本章和接下来的章节包含特别的教育工具。这些常见的例子你可以在大多数教科书上找到，例子中大多数的计算描述在相关的MATLAB文件中。我们将其命名为easy1~easy18的M文件。它们发布为两个部分：第一部分easy1~easy10是Borre在2003提供的。第二部分easy11~easy18发布在“Inside GNSS”期刊上。(Borre(2009a)、Borre(2009b)、Borre(2009c)、Borre(2010a)、Borre(2010b)、Borre(2010c))

这些文件的原始观测数据正在被维护。这个决定意味着这些文件在本书中看起来是没有归类的。为了补救这种情况我们在下一页提供了这些文件的一个表格9.2。

EASY Suite工具从2000年创建用于帮助其他人理解如何使用MATLAB代码实现GPS定位。我们为第一部分的基础性的文件构建了一个新的专题。这个专题中包含那些能让其他人能够顺利理解的复杂代码。第二部分是其他人请求能够提供的更有价值的专业代码。

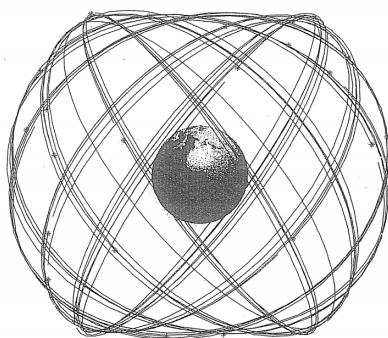


图 9.1: 卫星轨道惯性坐标系——轨道穿过赤道和格林威治子午线(0°纬度、经度0°)。GPS卫星星座有6个轨道面每个上面有4个卫星。绕轨道/天15分钟完成,生产小偏移在每个轨道。

原始观测数据是2001年9月4号位于奥尔堡（瑞士）的两台JPS Euro-card接收机收集的。最终生成的Rinex文件分别是site247j.01o、site24~1.01o、site247j.01n。对于其他需要长时间连续观测的特殊专题，它们所使用的文

表 9.1: EASY Suites的项目列表

名称	专题	页码
easy1	时间转换：时间、UTC、GPS时间、GPS周和GPS秒	第84页
easy2	开普勒法则，使用卫星星历计算卫星位置	第94页
easy3	使用伪距观测值计算接收机在ECEF系下的坐标	第101页
easy4	使用伪距单独计算基线	第??页
easy5	使用伪距和载波计算基线，观测值使用最小二乘求解	第??页
easy6	和上面相同，但是现在用卡尔曼滤波估算基线	第??页
easy6e	和例5相同，但是引入带权重的观测值	第??页
easy7	估算接收机时钟偏移量	第87页
easy8	检查周跳和接收机时钟重置	第??页
easy9	各种坐标下的给定基线	第??页
easy10	估计电离层延迟对个别卫星的影响	第112页
easy11	卫星轨道的立体天球图和在当地局部范围的实时预报图	第95页
easy12	通过解释一个小的数值的例子来描述LAMBDA模型的细节	第??页
easy13	接收机自主完备性监测、水平防护和竖直防护等级	第113页
easy14	星基增强系统的样例，校正位置及其在斯坦福图中的呈现	第113页
easy15	对伪距单点定位、伪距基线结算和伪距载波联合观测的精度比较	第??页
easy16	筛选单向观测进行误差分析	第112页
easy17	卫星轨道在惯性地固坐标系、地心地固坐标系下的图像	第79页
easy18	在基站计算不同的改正	第??页

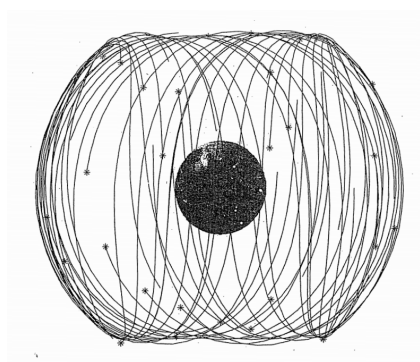


图 9.2: 在ECEF框架下的卫星轨道

件被包含在kofi1.01o中。

上面所有提及文件的压缩包在网上都可以获取，网址是<http://gps.aau.dk/borre/esay/>和<http://gps.aau.dk/borre/esay2/>。

9.2.1 卫星轨道

Orbits of the Satellites

卫星的轨道高度大约为3倍的地球半径。轨道接近于圆形，两个完整的轨道为一个恒星日。根据经验伪距观测值在卫星的高度角最小为 10° 或大于 15° 的范围时最可靠。图9.1显示了二维的早期24星的GPS星座图，在这6个轨道面上每一个都有四颗卫星。现在我们有31颗卫星。

9.2.2 例子17

easy17

初学者对卫星轨道的样子实际上经常会有不同的想法。今天由30颗卫星组成的星座在6个不同的轨道面上，轨道面和赤道的夹角为 55° 和之前的轨道面相比这个旋转了 60° 。图9.1显示的情况看起来好像距离很远，因此我们叫做惯性参考框架。

然而当这幅图像在旋转的地球平面上就显得不太清楚了。轨道到底是什么样的呢？非常奇怪。图9.2描述了这一情况。现在我们使用的是叫做地心地固坐标系(ECEF)。ECEF坐标系和旋转的地球具有固定的联系。那就

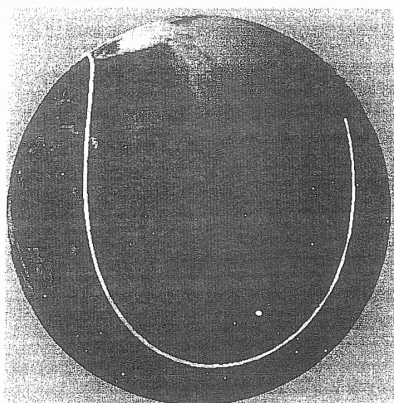


图 9.3: 子卫星点选择的卫星。子卫星的曲线是由点的任意一个轨道的一部分。曲线之间的交点是地球表面和地球中心连线到卫星。

是，给定一个点在一个坐标框架下的平面内是固定，除了那些可以移动的壳？（不懂）

最后图9.3显示的曲线是子卫星在轨道上任意点的图像。这个曲线和地球中心到卫星的连线所在平面相交。子卫星的轨道在赤道两侧是对称的。这限制了向北和向南的对于轨道和赤道的夹角。

9.3 时间系统对于GPS的意义

Time Systems Relevant for GPS

9.3.1 狭义相对论和广义相对论

Special and General Relativity

GPS定位中相对论效应是为数不多的必须要考虑的日常工作。整个系统是基于时钟的，时钟会发生偏移。

所有的时钟都在地球的引力场中，所以广义相对论是很重要的。时钟信号的标称频率为10.23 MHz。实际上，由于相对论效应的影响，卫星钟准确的频率是10.22999999943 MHz 这样就和用户在地球上的10.23 MHz的频率一致了。

由于卫星时钟相对与接收机时钟是运动的，所以在狭义相对论的情况下时间膨胀了。并且地球一直在旋转，光线跟随着螺旋的路径。我们不能完全同步时钟。

萨尼亚克效应的旋转也是迷人的。它破坏了爱因斯坦的同步，这取决于一个常数的光速。这种恒定性局限于惯性系(无相对加速度)。地球的旋转意味着时钟A可以同步时钟B，时钟B可以同步时钟C，但时钟C不同步时钟A。所以我们需要一个世界时，会以不同的速度同步当地时间。这种协调世界时保持在科罗拉多斯普林斯的GPS控制中心。

9.3.2 GPS时间和跳秒

GPS Time and Leap seconds

GPS的基本时间单位是国际单位制(SI)的秒。国际单位制的秒在1967年的第13届的国际计量大会上被定义为“铯原子 Cs^{133} 基态的两个超精细能级间跃迁辐射振荡9192631170周所持续的时间”。国际单位制的天被定义为86400SI秒，一个儒略世纪是36525(SI)天。

为了弥补真太阳时不均匀的缺陷，人们定义了一个假太阳，其运动轨道位于赤道平面，并且它在赤道上的运动角速度时恒定的。平太阳的时角叫做世界时(UT)。

表 9.2: UTC和GPST之间的调整日期和跳秒数

跳秒数	调整日期
1	1982-06-30
2	1983-06-30
3	1985-06-30
4	1987-12-31
5	1989-12-31
6	1990-12-31
7	1992-06-30
8	1993-06-30
9	1994-06-30
10	1995-12-31
11	1997-06-30
12	1998-12-31
13	1999-12-31
14	2005-12-31
15	2008-12-31

儒略日JD日期的表达是一段固定的时间和在基本历元后的部分时间(???)。儒略日的起点为公元前4713年1月1日 12^h 世界时。儒略日时间表示日期是连续计数的,

当前时间用JD表示是一个数值比较大的数, 所以使用简化儒略日MJD来代替。

$$MJD = JD - 2400000.5.$$

因此J2000.0 (公元2000年) = MJD 51544.5。MJD是以1858年11月17日平子夜作为起点。

为了在世界范围内保持时间和完整的描述闰秒。国际原子时间尺度(TAI)不与太阳时保持同步, 由于地球的自转速度是每年放缓近1s。实现平均太阳时称为世界时(UT1)。协调世界时(UTC)与国际原子时(TAI)由一个整秒数的偏移量定期更新, 以保持UTC接近UT1。

跳秒是由IERS(国际地球自转服务)提出的, 所以协调世界时(UTC)与世界时(UT1)的时刻差不能大于0.9s。(国际地球自转服务也负责维护的连续性与早期光学仪器采集的数据)DUT1是UT1-UTC的差值, 播出的时间信号的精度为 ± 0.1 s

时间信号由GPS卫星广播, 而GPS卫星的时间与GPS主控制站(位于科罗拉多州)的原子钟时间同步。全球定位系统时间GPST的起始时刻为1980年1月6日0^h, 起始时刻与UTC对齐, 但并不增加UTC的闰秒。因此, 有一个整秒数的偏移抵消GPST和TAI之间19s的差值。

$$GPST + 19s = TAI.$$

表格9.2显示了从1980年1月6日到2011年的所有的15个跳秒。

$$GPST = UTC + 15s.$$

随着GPST, 从一开始介绍了GPS周数。自1980年1月6日, 每周都有自己的编号。这本书在第1625周。在一周中有了周积秒(sow)的概念。这个数字计数是从周六的午夜开始的, 周日是GPS一周的开始。

另外为了方便, 每周的每一天有一个数字编号:周日是1, 周一是2, 周二是3, 周三是4, 周四为5, 周五是6, 周六是7。

专业的GPS软件使用周积日(dow)有数值的原因。周积秒(sow)就像这么 $7 \times 24 \times 60 \times 60 = 604800s$ 大。为了跟踪一个点的位置(mm级), 我们必须保证时间在0.01ns的精度水平。使用周积秒(sow)和12位小数超出了大多数计算机的计算能力。所以你可能将一周内真正的秒数分割成一个整数部分和小数部分或者计算时间的GPS周数, 周积日和日积秒。

M文件 *gps_time* 用于计算GPS时间 (GPS周(w)和周积秒(sow)):

```

1  t = julday(2011,3,2,10); % year, month, day, hour
2  [w,sow] = gps_time(t)
3  w = 1625
4  sow = 295200

```

为了避免在一周的开始和结束时发生低于或高于限制的错误我们使用M文件*check_t*。

```

01 9 4 9 40 0.000000 0 7G 1G 4G 7G13G20G24G25
20532012.14648 20532011.55846 20532016.22546 107896448.4014 84075170.1284 -702.033 -547.047
21255524.69947 21255524.94445 21255529.02045 111698540.8774 87037834.1244 799.589 623.056
24648794.02245 24648792.88941 24648801.63741 129530300.6484 100932694.9344 -3425.352 -2669.144
21267718.45748 21267718.52445 21267722.00945 111762613.2534 87087766.9504 1911.882 1489.773
21900010.88847 21900009.74444 21900015.95344 115085325.1934 89676892.5064 -3011.439 -2346.579
23828505.41246 23828504.07842 23828511.81542 125219643.5474 97573763.5014 2743.177 2137.544
24104647.59546 24104646.97742 24104654.81342 126670763.8784 98704504.1444 -2800.638 -2182.275

```

9.3.3 例子1

easy1

几乎所有GPS的处理都开始自时间问题，9.3.3展示了如何将一个给出年，月，日，小时，分钟，秒和儒略日的历元时间转化为，GPS周和周积秒(sow)。

下面是sate247j的RINEX格式的观测文件的样本：

这个数据块的第一行告诉历元时间和有哪些观测到的伪随机噪声卫星。我们解释一下时间是2001年4月9日在9小时40分0秒。随后的0表示接收机处于静态模式；接下来我们读到接收机对7个GPS卫星1、4、7、13、20、24、25进行跟踪。

下面的七行包含七个卫星的伪距和载波观测值有：L1上C/A码所测定的伪距，L1和L2上的P码所测定的伪距，L1和L2上的相位观测值，L1和L2上的多普勒频率。

9.3.4 估计接收机时钟偏移量

Estimation of Receiver Clock Offset???

现在我们开始使用数据。第一步是估计时钟偏移量 $c dt_t$ 。在GPS测量中，观测码 b_t (伪距)通常被用来估计一个单点的坐标和接收机时钟偏移的顺序(随时间变化)。假设历元时间 t 提供线性观测值 b_t ：

$$A_t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + e_t c dt_t = b_t - \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1)$$

矩阵 A_t 包含 t 时刻的伪距观测值对坐标的偏导数。后文中式9.22。添加每个伪距观测的钟差， $e_t = (1, 1, \dots, 1)^T$ 当该历元有 m 个卫星时其中便有 m 项。

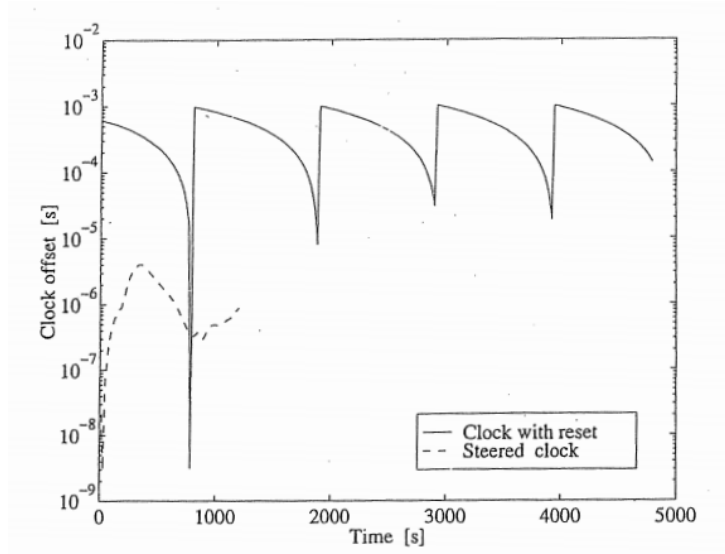


图 9.4: 不同类型接收机的时钟偏移量。时钟重置时间为1ms。

我们收集 n 个历元的观测值统一成为一个的最小二乘问题

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 & & \\ & e_2 & \\ & & \ddots \\ & & & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c dt_1 \\ c dt_2 \\ \vdots \\ c dt_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \epsilon \quad (9.2)$$

正规方程组9.2通过最小二乘方法获得最优的 $x, y, z, c dt_t$ 解。

$$\begin{bmatrix} e_1^T e_1 & & & e_1^T A_1 \\ & e_2^T e_2 & & e_2^T A_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & e_n^T e_n & e_n^T A_n \\ A_1^T e_1 & A_2^T e_2 & \dots & A_n^T e_n & \Sigma_{t=1}^n A_t^T A_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c dt_1 \\ c dt_2 \\ \vdots \\ c dt_n \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T b_1 \\ e_2^T b_2 \\ \vdots \\ e_n^T b_n \\ \Sigma_{t=1}^n A_t^T b_t \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

使用普通高斯消元法从 n 个方程中消去 n 倍的最后一行。我们写下 E_t 矩阵 $e_t(e_t^T e_t)^{-1}e_t^T$ 。修正 (x, y, z) 坐标到初步位置 (x^0, y^0, z^0) 是由矩阵右下角出现

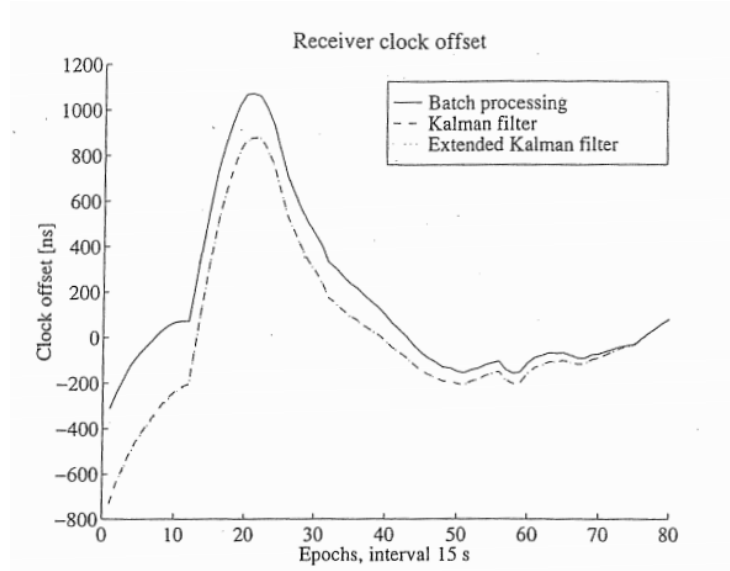


图 9.5: 接收机时钟偏移计算的批处理和卡尔曼滤波。普通和扩展卡尔曼滤波的线性方程

的项来消除的。根据式??。

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\sum_{t=1}^n (A_t^T A_t - A_t^T E_t A_t) \right)^{-1} \sum_{t=1}^n (A_t^T b_t - A_t^T E_t b_t)$$

估计接收机时钟偏移量 $c dt_t$ 是通过回代法解决, $i = n, \dots, 1$:

$$c dt_t = (e_t b_t - e_t A_t x) / (e_t e_t^T). \quad (9.4)$$

估计模型清楚地显示为什么没有必要为所有历元的静态观测收集四个观测值。但需要足够数量的观测值来保持9.3是可逆的。如果只有一个观测值是可以在一个特定的历元估计接收机时钟偏移,但不能估计位置。

我们建议使用描述程序,一些制造商引入不连续的时钟时间变化以保证误差在规定的补偿要求内。某些接收机时钟在复位时抵消1毫秒。图9.4展示了这种跳跃方式抵消钟差的接收机类型,以及这种类型的接收机如何操纵时钟。

图9.5显示了接收机时钟偏移量与不断修正以抵消的操纵方式。图像是由M文件recclock提供。代码迭代三次得到正确的接收机位置——时钟估计

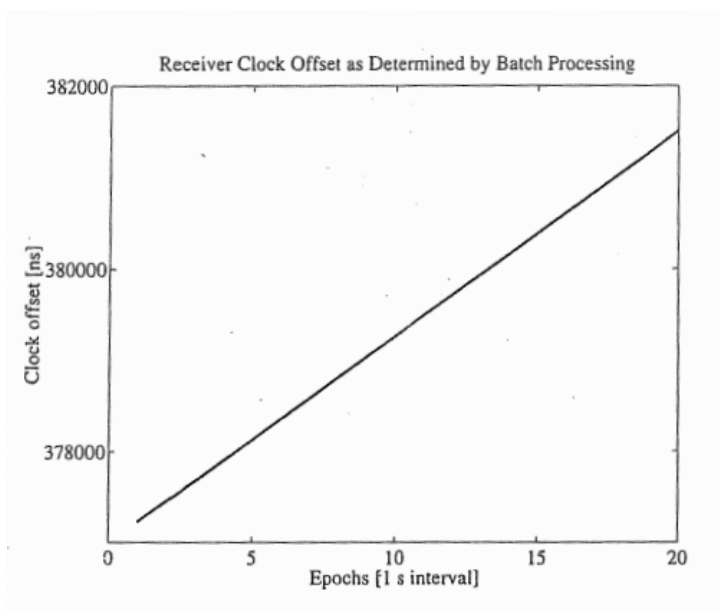
是线性的!

9.3.5 例子7

easy7

伪距这个词的“伪”部分暗指接收机时钟偏移 dt 。常常 dt 是一个不太关心的参数。然而在某些情况下需要知道 dt 。我们应用该算法(9.4)来获取 dt 。

实际数据产生 $dt \approx 0.38ms$ 如图9.6所示。可以看到接收机时钟的速率是在很短的时间内相当稳定。

图 9.6: 接收机时钟偏移量 dt

9.4 定位卫星

Satellite Position

本节以地球为中心在地心地固坐标系(ECEF) X, Y, Z 中, 通过开普勒轨道参数描述卫星的空间位置。选择开普勒参数的原因是, 他们随着时间变化小。之后的五页研究这些轨道参数 a, e, ω, Ω, i , 和 μ , 如图9.7。这是不可避免的技术;许多读者认为可以通过ECEF找到坐标, 并继续。

X 轴指向赤道和格林威治子午线之间的交点。 Z 轴伴随着地球的自转轴。 Y 轴的指向正交于这两个方向, 形成一个右手坐标系。

轨道平面相交赤道平面交线。交线有两个点与赤道相交。卫星从南到北移动的经过的点称为升交点 K 。赤道平面和轨道平面之间的夹角称为轨道倾角 i 。地球中心 C 和 X 轴升交点 K 之间的夹角叫做 Ω ; 这是赤经。轨道上位置最接近地球中心的点(椭圆轨道的焦点)称为近地点。地球中心 C 、升交点 K 和近地点 P 之间的角叫做近地点角距 ω ; 这是从 Z 轴逆时针增加的方向观察的。

图9.8显示了轨道面在以地球为中心的坐标系平面中。 ξ 轴指向近地点 η 轴

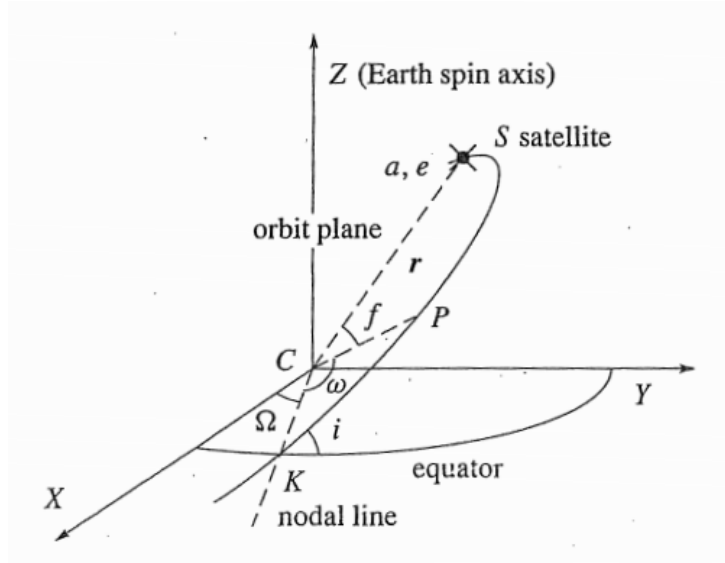


图 9.7: 开普勒轨道参数: 长半径 a , 偏心率 e , 轨道倾角 i , 升交点 K 的赤经 Ω , 近地点角距 ω , 和真近点角 f . 近地点用 P 表示. 地球中心用 C 表示。

指向降交点。 ξ 轴和轨道面正交。从图9.8我们可以获得偏近点角 E 和真近点角 f 。我们可以获得：

$$\xi = r \cos f = a \cos E - ae = a(\cos E - e).$$

$$\eta = r \sin f = \frac{b}{a} \sin E = b \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E.$$

因此，卫星坐标向量 r 在以地球中心 C 表示时是：

$$r = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

通过三角函数变换可以得到下式：

$$\|r\| = a(1 - e \cos E). \quad (9.6)$$

一般角 E 随时间 t 变化，长半轴 a 和偏心率 e 几乎是恒定的。(对于 e 有长时间运行和短周期扰动，对于 a 只有短周期扰动。) $\|r\|$ 是卫星 s 到地球中心 $C = (0, 0, 0)$ 的几何距离

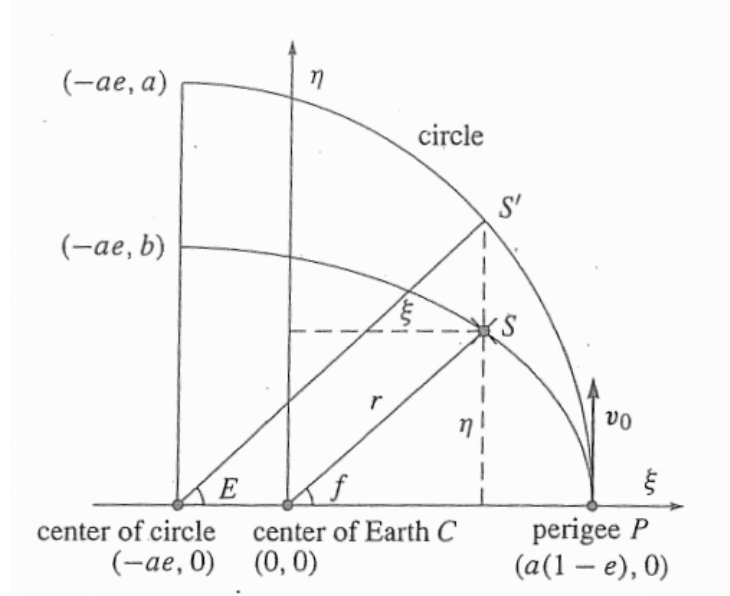


图 9.8: 椭圆轨道在 (ξ, η) 坐标系中。真近点角 f 位于地球中心 C 。

为了供以后参考我们引入平均值 n 即意味着角卫星运动速度。如果卫星的一个旋转周期是 T ，并且 $GM = 3.98600510^{14} m^3/s^2$ 我们就有：

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}. \quad (9.7)$$

现在，是时候来定义平近点角 μ 。这个非几何量定义为近地点和一个虚构的卫星之间的角度在圆形轨道卫星同样的焦距和同一周期的情况，但以一个恒定的速度移动。恒速是指卫星的运动。真实的和虚构的卫星穿越近地点和远地点的阶段，对于虚构的卫星，卫星的平均异常是真正的异常。是在 t 时刻的异常。(???)

$$\mu = n(t - t_0)$$

t_0 是穿过近地点的时间。注意 μ 是一个关于时间的线性函数的时间对于圆形轨道我们有 $\mu = f + \omega$ ，参考Misra & Enge (2006).

著名的开普勒方程关系两个角度，异常值 μ 和偏近点角 E :

$$E = \mu + e \sin E \quad (9.8)$$

从式9.5中我们可获得

$$f = \arctan \frac{\eta}{\xi} = \arctan \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e} \quad (9.9)$$

这样我们获得了真近点角 f , 偏近点角 E , 平近点角 μ 。这些关系式是计算卫星位置的基础。

描述开普勒轨道六参数可以构成的一个轨道,所以他们在表9.3重复显示。

重要的是要意识到轨道平面在地心坐标系 X,Y,Z 中仍相当稳定。换句话说:从太空轨道平面仍然和赤道保持固定关系。格林威治子午线平面绕地球自转轴的运动按照格林尼治恒星时(GAST),速度大约是24小时/天。GPS卫星每天绕行两周, 它的轨道速度为3.87公里/秒。

卫星 K 的轨道平面在笛卡尔坐标系下的图像如图9.7, 我们可以获得

$$\begin{bmatrix} r_j^k \cos f_j^k \\ r_j^k \sin f_j^k \\ 0 \end{bmatrix},$$

$r_j^k = \|r(t_j)\|$ 由式9.6获得, 其中 a, e ,和 E 是在时刻 $t = t_j$ 时的值。

这个向量旋转到 X,Y,Z 坐标系统的三维旋转矩阵对于图9.7为:

$$R_3(-\Omega_j^k)R_1(-i_j^k)R_3(-\omega_j^k).$$

矩阵绕 XY 平面的旋转角为 φ , 同时 Z 方向不变。

$$R_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

同理 $R_1(\varphi)$ 给出了关于 X 轴的旋转:

$$R_1(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

卫星 K 在 t_j 时刻的地心坐标系下的坐标是:

$$\begin{bmatrix} X^k(t_j) \\ Y^k(t_j) \\ Z^k(t_j) \end{bmatrix} = R_3(-\Omega_j^k)R_1(-i_j^k)R_3(-\omega_j^k) \begin{bmatrix} r_j^k \cos f_j^k \\ r_j^k \sin f_j^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

表 9.3: 卫星轨道的开普勒参数

a 长半轴	轨道大小和形状参数
e 偏心率	
ω 近地点角距	轨道平面的参数
Ω 升交点赤经	
i 倾角	
μ 平近点角	在平面的位置

然而, GPS卫星不遵循了正常的轨道理论。我们必须使用与时间有关的更精确的轨道值: 随时间变化的开普勒参数或与其等价的参数。在下文中, 通过广播星历可以获得。我们把这些值插入在一个步骤后面, 最后我们得到了一组变量式9.12。

说一下卫星的星历表。这些参数值在一个特定的时间。每颗卫星传送其独特的星历数据。参数的描述实际的GPS卫星轨道及其开普勒轨道扰动参数。广播星历表使用之前直接计算轨道的一部分, 和他们预测的下一个轨道的一部分。广播星历表是准确为1-2米。对于某些大地测量程序更好的精确性是必要的。一种可能性是获取精度在分米级的后处理精密星历表。

星历表是用于从引用计数在GPS周秒时代 t , 它意味着间隔中心的星历是可用的。广播星历表的目的是在这段时间内使用。他们描述的是轨道2小时之后在指定位置的精度。他们预测4到6小时的曲线拟合数据。广播星历表包括

$$\mu_0, \Delta n, e, \sqrt{a}, \Omega_0, i_0, \omega, \dot{\Omega}, \dot{i}, C_{\omega c}, C_{\omega s}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is}, t_{oe}$$

在 $\dot{\Omega} = \partial\Omega/\partial t$ 和 $\dot{i} = \partial i/\partial t$ 。系数 C_{ω} , C_r , 和 C_i 正确的近地点, 轨道半径, 由于不可避免的扰动理论和轨道倾角变化造成的轨道, 地球的重力场, 反射率和太阳的光压, 太阳和月亮和潮汐力。星历表参数的参考时间是 t_{oe} 。

考虑到传输时间 t (在GPST时间)下面提供必要的变量供式9.12使用:

计算(9.12)的算法在M文件satpos中。函数计算GPS卫星的位置。它是每个位置计算的基础。为更多的细节在WGS84与GPS, 见3.6节。

这个m文件satposin计算卫星位置在一个惯性坐标系 $\omega_e = 0$ 中。

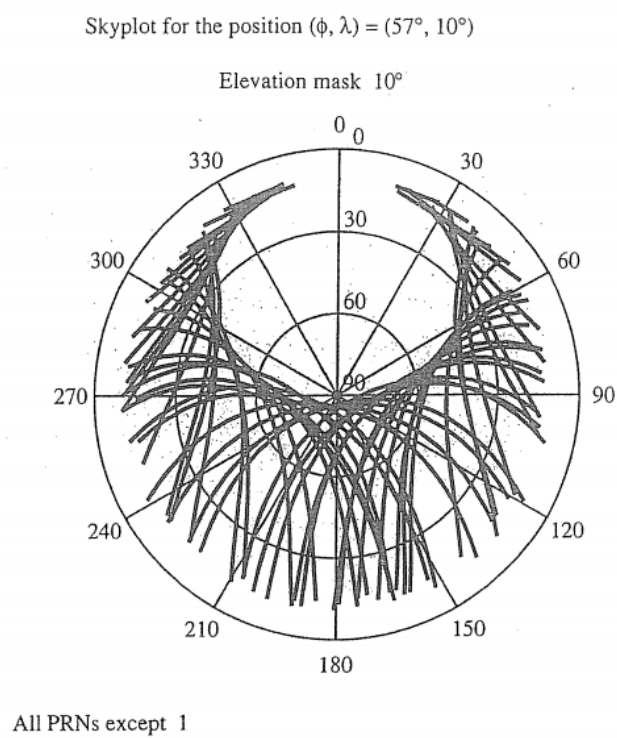


图 9.9: 天空图包括所有GPS卫星在24小时内的给定位置。所有的高度角都为 10° 。其中仅不包含1号卫星。

过去的时间 t_{oe}	$t_j = t - t_{oe}$
在 t_j 的平近点角	$\mu_j = \mu_0 + (\sqrt{GM/a^3} + \Delta n)t_j$
地球的引力常数乘以质量	$GM = 3.986005 \cdot 10^{14} M^3/S^2$
E_j 的迭代解决方案	$E_j = \mu_j + e \sin E_j$
真近点角	$f_j = \arctan \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E_j}{\cos E_j - e}$
升交点经度	$\Omega_j = \Omega_0 + (\dot{\Omega}_0 - \omega_e)t_j - \omega_e t_{oe}$
地球平均自转	$\omega_e = 7.292115147 \cdot 10^{-5} rad/s$
近地点角距	$\omega_j = \omega + f_j + C_{\omega c} \cos 2(\omega + f_j) + C_{\omega s} \sin 2(\omega + f_j)$
径向距离	$r_j = a(1 - e \cos E_j) + C_{rc} \cos 2(\omega + f_j) + C_{rs} \sin 2(\omega + f_j)$
轨道倾角	$i_j = i_0 + \dot{i}t_j + C_{ic} \cos 2(\omega + f_j) + C_{is} \sin 2(\omega + f_j)$

关于开普勒元素的所有信息都包含在星历表。文件通过广播星历表时创建的GPS观测数据下载到一台笔记本电脑中。这些文件通常是特定的二进制格式。幸运的是可以转化为RINEX格式，这些格式见Gurtner(2000)。文件的后缀名第三个字符总是n(导航文件)。

通常我们只需要导航信息中的一部分文件的星历文件。选择和重新格式化是通过以下命令:

```

1 rinexe(ephemerisfile , outputfile);
2 eph=get_eph(outputfile);
3 satp=satpos(t , eph);

```

9.4.1 例子2

easy2

第二个基本问题是计算以地球中心的惯性坐标系(ECI)中的给定位置的卫星伪距发出的时间。ECI GPS坐标系使用地球赤道平面的方向是UTC时间2000年1月1日12时。x轴指向春分，z轴点北极的方向，y在是选为右手坐

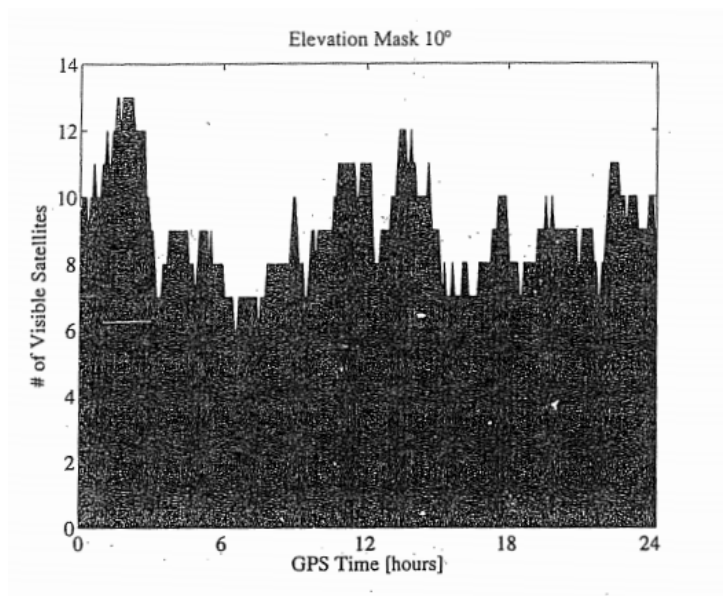


图 9.10: 卫星高度角为10°时

标系。

给定一个星历表从RINEX获得导航信息文件(n文件), easy2完成这个工作。主函数satpos实现GPS接口控制文档中描述的程序(IS-GPS-200 (2007)), 表20-IV。

我们读了RINEX格式的n文件, 然后格式化成本部格式的MATLAB矩阵名叫Eph。此外, 我们把Eph中的每一个卫星打印成一行。每一行包含21个变量; 这些组成一个完整的卫星星历表一。

9.4.2 例子11

easy11

图9.9展示了卫星轨道的极坐标图在一个地球上给定的位置。你可以看到的时间连续24小时期间每个卫星都是可见的。

easy11是基于历书下载的最方便的国家大地测量服务ngs.noaa.gov/CORS/Data.html。实际的文件名是brdcl550.08n。

MATLAB的RINEX文件已被重新格式化为二进制格式的卫星星历表, 以提供给M文件rinexe使用。用户输入(φ, λ)的位置可以看到在这点的图像

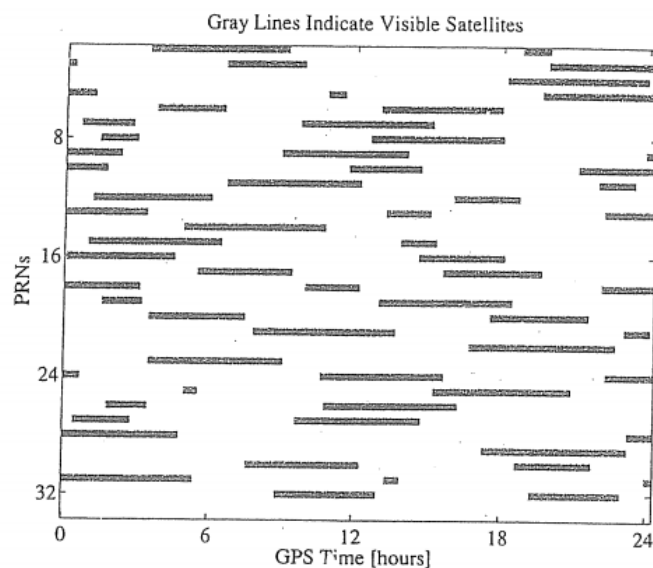


图 9.11: 高度角大于等于 10° 在 $\varphi = 57^\circ$ 和 $\lambda = 10^\circ$ 位置的卫星

和一个需要设置的海拔值，然后将绘制所有可见的方位角和高度角的位置以及卫星计算和绘制极坐标。

下一个遵循记录有多少，哪些卫星可见白天时间当他们可以看到。图9.10和9.11将显示这些点。

MATLAB代码很简单，结果令人印象深刻，它是有用的。在早期GPS星座是不完整的。这样的程序尤其有价值，为达成计划的目的是确保足够的卫星可以定位。除了最严重的地形和城市峡谷，接收器可以找到大量的GPS和GLONASS卫星，这种情况会在伽利略卫星发射后变得更加令人满意。

9.5 使用观测码定位接收机

Receiver Position From Code Observations

在GPS接收机位置问题如下:卫星跟踪数 $m \geq 4$ 。我们假设在任何时间可以计算接收机的坐标。所有卫星和未知位置(X,Y,Z)接收机之间的距离。接收机的时钟是不精确的,所以我们也必须估算其和GPST相比的偏差 dt 。

有四个未知数 X, Y, Z, dt 所以我们为了获得一个位置必须追踪至少四颗卫星。通常我们跟踪8到10颗卫星。

GPS文献提到了几种方法来解决这个问题。普通最小二乘法是一种合理的选择。有的建议对观测到的接近天顶的卫星加权,例如Euler&Goad (1991)。在1990年代Clyde Goad建议搜索在所有可能的位置找到平方和最小的误差。1985年Bancroft概述了基于内积方法,它假定 $m = 4$ 。Kleusberg在1994年描述了一个方法,消除了 dt 和观测方程的平方,再一次 $m = 4$ 。这样的假设是没有预测到的今天有如此多的卫星。

考虑一个GPS信号从卫星 k 到接收机 $i = 1$ 通常 $k = 1, \dots, m$ 。信号发出时间 t^k 由卫星时钟测定。到达时间 t_i 由接收机时钟测定。传播时间是 τ_i^k 。如果 c 是光速,那么伪距 P_i^k 被定义为

$$t_i - t^k = \tau_i^k = P_i^k / c \quad \text{or} \quad t^k = t_i - P_i^k / c \quad (9.13)$$

时钟并不准确,所以我们定义时钟偏移 dt : 接收机钟差

$$t_i = t^{GPST} + dt_i \quad (9.14)$$

卫星钟差 dt^k :

$$t^k = (t - \tau_i^k)^{GPST} + dt^k \quad (9.15)$$

卫星时钟校正定义的参数在星历表上有 a_0, a_1, a_2 :

$$dt^k = a_0 + a_1(t^k - t_{oe}) + a_2(t^k - t_{oe})^2 + \dots \quad (9.16)$$

使用 dt^k 后卫星钟的误差在 $\pm 10\text{ns}$ 而且通常在 $|dt_i| < 1\text{ms}$ 。

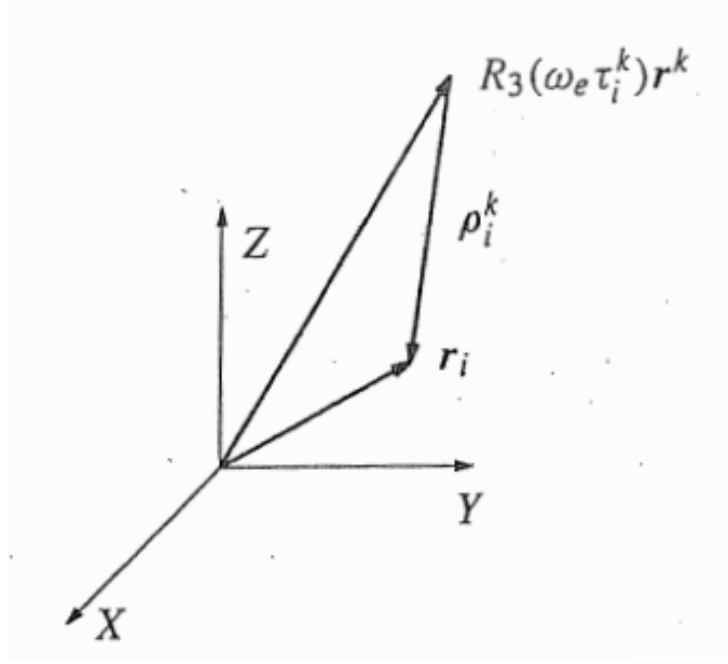


图 9.12: 接收机坐标 r_i 在地心惯性坐标系和卫星坐标 $R_3(\omega_e \tau_i^k) r^k$ 在地心地固坐标系。第一个位置是变成ECEF系统在z轴旋转的角度是 $\omega_e \tau_i^k$

历元 t_i 定义为接收机的时刻。这个历元可见的所有的收到的信号来自跟踪的卫星。然而，信号的传输时间为 $(t - \tau_i^k)^{GPST}$ ，其中最重要的是 μ_i^k 换句话就是就是从接收机i到卫星k的时间。因此首要任务是计算卫星k的传输时间 t^k ，这一步使用方程9.15和9.16。

根据星历表，所有卫星位置的计算在WGS-84坐标系中，这是一个地心地固坐标系(ECEF)。这意味着我们必须旋转的卫星位置向量的三个轴向，相当于地球的角位移信号的传播从卫星到接收机。GPS卫星的高度约为20000公里。因此,信号传输时间是66ms。地球每自转 15 arcsec 的角位移信号相当于地球的旋转轴的传播 1 arcsec 。如果使用ECEF坐标并且没有调整，接收机坐标将偏向约相等于 1 arcsec 的经度。

依照图9.12卫星k和接收机i的距离对地球自转改正被定义为

$$\rho_i^k = \|R_3(\omega_e \tau_i^k) r^k(t - \tau_i^k)_{inert} - r_i(t)_{ECEF}\| = \left\| \begin{bmatrix} X^k \\ Y^k \\ Z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \right\| \quad (9.17)$$

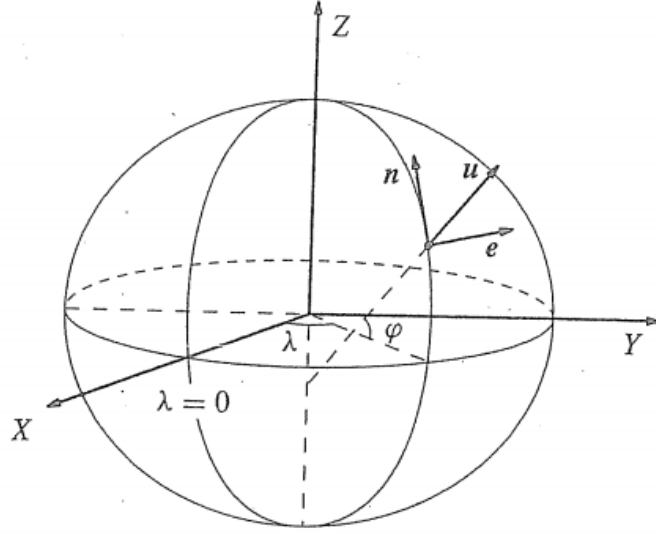


图 9.13: 站心坐标系(e,n,u)

矩阵 R_3 定义的旋转角度 $\omega_e \tau_i^k$ 当信号传播时为:

$$R_3(\omega_e \tau_i^k) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_e \tau_i^k) & \sin(\omega_e \tau_i^k) & 0 \\ -\sin(\omega_e \tau_i^k) & \cos(\omega_e \tau_i^k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

信号传播时间从(信号发出)卫星 k 到(信号接受)接收机 i 被表示为 τ 。地球自转速率是 ω_e 。ECEF系统中的位置向量表示为 $r(t)_{ECEF}$ 。参数 t 强调对时间的依赖。

伪距观测的基本方程的样子为:

$$P_i^k(t) = \rho_i^k + I_i^k + T_i^k - c(dt^k(t - \tau_i^k) - dt_i(t)) - e_i^k \quad (9.19)$$

电离层延迟为 I_i^k ，对流层延迟为 T_i^k ， c 表示真空中的光速 e_i^k 表示一个错误。

所以我们需要改变一个站心坐标系的向量 x 到当地的 e, n 坐标系， u 为铅锤线方向， n 指向北， e 指向西，在图9.13中显示。站心坐标系由地心矢量给

方位角: $Az = \arctan(E/N)$

高度角: $El = \arctan(U/\sqrt{N^2 + E^2})$

距离: $s = \|x\|$

出X, 和三个单位向量的正交矩阵F已经介绍在 (3.31) 中介绍。

$$F = \begin{bmatrix} e & n & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

知道笛卡尔坐标的初值(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0)我们就可以计算接收机的地理坐标(φ, λ), 因此获得矩阵F。现在让 $(E, N, U) = F^T x$ 。我们立即获得方位角、高度角和距离:

知道高度角我们可以计算 T_i^k 。电离层延迟 I_i^k 设置为0, 因为我们不知道更好的值, dt^k 的值由式9.16计算得出。未知数 dt_i 和三维坐标(X_i, Y_i, Z_i)是隐藏在 ρ_i^k 。所以我们先线性化式9.19:

$$-\frac{X^k - X_i^0}{(\rho_i^k)^0} x_i - \frac{Y^k - Y_i^0}{(\rho_i^k)^0} y_i - \frac{Z^k - Z_i^0}{(\rho_i^k)^0} z_i + 1(c dt_i) = (P_i^k)_{obs} - (P_i^k)^0 - e_i^k = b_i - e_i^k \quad (9.21)$$

第一个近似值我们设为 $\rho_i^k \approx (\rho_i^k)^0 = (P_i^k)^0$, 通过几何距离的近似值计算卫星和接收机的坐标。 b_i 表示观测值减去计算值。

$(P_i^k)^0$ 的初值可能是源自或从可能的接收机的初步计算坐标(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0)获得。这是修正接收机时钟偏移 dt_i , 与第一个估计值 $dt_i = 0$ 。如果初值好则右侧 b_i 很小。注意方向余弦描述的参数使用式9.17。

描述线性化观测方程的式子是9.21我们设置的未知数是 $x = (x_i, y_i, z_i, c dt_i)$:

$$Ax = \begin{bmatrix} -\frac{X^1 - X_i}{\rho_i^1} & -\frac{Y^1 - Y_i}{\rho_i^1} & -\frac{Z^1 - Z_i}{\rho_i^1} & 1 \\ -\frac{X^2 - X_i}{\rho_i^2} & -\frac{Y^2 - Y_i}{\rho_i^2} & -\frac{Z^2 - Z_i}{\rho_i^2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X^3 - X_i}{\rho_i^3} & -\frac{Y^3 - Y_i}{\rho_i^3} & -\frac{Z^3 - Z_i}{\rho_i^3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ c dt_i \end{bmatrix} = b - e \quad (9.22)$$

注意参数 c 和 dt_i 一起呆在在一个产品中。这样做是为了数值的原因。未

知的 $c dt_i$ 和另一未知数有着一样的维度，即长度。然而有些人喜欢随着时间估计。这可以通过使用未知的 dt_i 一起相当小系数 $c \times 10^9$ 收益率 dt_i ns。???

Row-wise包含前三列向量的方向余弦在卫星和接收机之间。最小二乘的解决方案是

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{y}_i \\ \hat{z}_i \\ \widehat{c dt_i} \end{bmatrix} = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1} b \quad (9.23)$$

伪距观测值被认为是独立等效的方差 $e \sim N(0, \sigma^2 I)$ 。换句话说矢量 e 零均值和协方差矩阵 $\Sigma = \sigma^2 I$ 。如果这个假设是正确的，式9.23可以化简为

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{y}_i \\ \hat{z}_i \\ \widehat{c dt_i} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (9.24)$$

迭代接收机坐标

$$\hat{X}_i = X_i^0 + \hat{x}_i, \quad \hat{Y}_i = Y_i^0 + \hat{y}_i, \quad \text{and} \quad \hat{Z}_i = Z_i^0 + \hat{z}_i, \quad (9.25)$$

迭代涉及式9.22,9.24 和 9.25 重复直到稳定 $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ 小于 10^2 ，可以说

最后我们建立一个数据集组成的一个历元。它包含 $PRN'sk = 1, 4, 7, 13, 20, 24, 25$ 在表9.4。伪距改正是根据以下方程:

$$P = \text{observed pseudorange} + c dt^k - T. \quad (9.26)$$

M-文件easy3是调用satpos在传输时间的计算。

知道卫星位置和测量的伪距我们可以估计接收机坐标和接收机时钟偏移量 $\widehat{c dt}$ 通过最小二乘法:

接收机的时钟偏移量和GPS时间相比为 $\widehat{dt} = 0.377ms$ 。6次迭代后得到的结果。接收机位置的标准差是2.3米，详见第四章。

9.5.1 例子3

easy3

在easy3中我们通过O文件和N文件计算了接收机的ECEF坐标，仅仅使

表 9.4: 坐标(X^k, Y^k, Z^k) 卫星出现在一个特定的历元。观测到的伪距用 P^k 表示

PRN	1	4	7	13
$X^k[m]$	14789533.14	11784778.93	20131229.62	22053478.89
$Y^k[m]$	7334543.20	-10589833.27	-17092167.32	-4245955.78
$Z^k[m]$	20976503.11	21427005.76	1367264.01	14103264.45
$P^k[m]$	20589966.21	21428477.36	24767161.79	21266276.50

PRN	20	24	25
$X^k[m]$	12654506.52	-1514708.63	-9091147.00
$Y^k[m]$	17685295.10	-16394944.97	13349830.35
$Z^k[m]$	15150460.02	21142855.83	21347346.61
$P^k[m]$	21871195.29	23851770.76	24109819.35

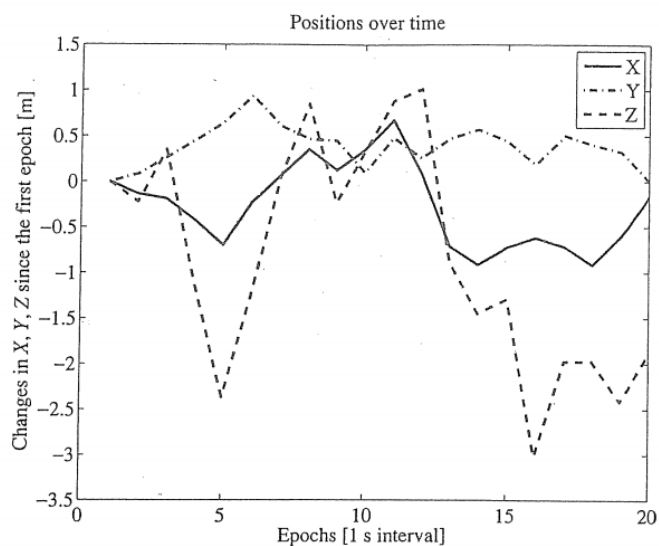


图 9.14: 随时间变化由伪距得出的接收机坐标:X,Y,Z

用了伪距值。GPST的传播时间是 $(t_i - \tau_i^k)^{GPST}$ 用于计算卫星位置。

接下来我们引用一个中心块的代码应用于任何位置计算。第一次可能很难阅读，但是我们试着把单词:目标是找到一个特定的历元在GPST从给定的卫星信号传播。我们知道历元 t_i 、计算的接收机时钟，当观察值被确定。有信号传播 P/c 秒之前的卫星。我们知道了伪距 P 和光速 c 。接下来,我们计算的卫星时钟偏移 t_{corr} 参数 a_0 和 a_1 的星历表。然而，这个量取决于星历的时间发布在 t_{Oc} 。所以 t_{corr} 的值只能通过迭代，所以你看 t_{corr} 出现在左边的两倍。我们终于可以知道 t_{corr} 在那一刻计算的真正GPST信号传播时最后卫星的位置。代码如下:

```

1  k = col_Eph(i);
2  tx_RAW = time - obs(i)/v_light;
3  tOc = Eph(21,k);
4  dt = check_t(tx_RAW-tOc);
5  tcorr = (Eph(2,k) * dt + Eph(20,k)) * dt + Eph(19,k);
6  tx_GPS = tx_RAW- tcorr;
7  dt = check_t(tx_GPS-tOc);
8  tcorr = (Eph(2,k) * dt -f Eph(20,k)) * dt + Eph(19,k)
9      ;
10 tx_GPS = tx_RAW-tcorr;
    X = satpos(tx_GPS, Eph(:,k));

```

下面的代码纠正地球自转导致的信号传播从卫星到接收机的误差。式9.18中描述卫星的位置必须在 z 轴旋转角 $\omega_e \tau_i^k$ 。在第一个迭代中我们不知道确切的传播时间并将其设置为0.072秒。对流层延迟设置为0s。我们在下一次迭代估计卫星的仰角，作为这个角 el 计算对流层延迟是很重要的。它是实现对流层的代码。

```

1  if iter == 1
2      traveltime = 0.072;
3      Rot_X = X;
4      trop = 0;
5  else

```

```

6      rho2=(X(1)-pos(1))^2+(X(2)-pos(2))^2+(X(3)-pos(3))
      ~2;
7      travelttime = sqrt(rho2)/v_light;
8      Rot_X = e_i' _corr(travelttime,X);
9      rho2 = (Rot_X(1)-pos(1))^2 + (Rot_X(2)-pos(2))^2 + (
      Rot_X(3)-pos(3))^2;
10     [az,el,dist] = topocent(pos(1:3,:),Rot_X-pos(1:3,:))
      );
11     if iter == nojterations, El(i) = el; end
12     trop=tropo(sin(el*dtr)
      ,0.0,1013.0,293.0,50.0,0.0,0.0,0.0);
13 end

```

接收机的位置计算的关键代码是一个单独的m文件`recpos`。

我们打开一个RINEX格式的O文件读取所有的伪距。从`easy2`与给定的卫星位置，我们计算出接收机的位置。

重复计算了20个历元。每个位置是迭代最小二乘的结果的过程。位置相对于第一个历元的变化如图9.14。坐标的变化值一般小于5米。

9.6 可选择的算法

Alternative Algorithms

我们考虑各种最小二乘的模型:为了估计接收机j的坐标,通过给出的卫星位置坐标和伪距我们认为普通最小二乘法 and 加权最小二乘法模型最适合。下面是基于数值的例子显示在表中9.4。这个计算在rp.m文件中被实现。

9.6.1 普通最小二乘

Ordinary Least Squares

这个模型描述了 $Ax = b + e$ 。A中每一行的内容为:

$$\left[-\frac{X^k - X_i}{\rho_1^k} \quad -\frac{Y^k - Y_i}{\rho_1^k} \quad -\frac{Z^k - Z_i}{\rho_1^k} \quad 1 \right]$$

对应 b_k 的 b 是:

$$P^k - \left\| \begin{bmatrix} X^k & Y^k & Z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix} \right\|_2 - c dt$$

经过6次迭代后结果如下:

$$\hat{X} = 3427824.23$$

$$\hat{Y} = 603665.35$$

$$\hat{Z} = 5326882.42$$

$$\hat{c dt} = 113058.30$$

与标准偏差为 2.3 m.

9.6.2 加权最小二乘

Weighted Least Squares

可以说,高度角较大的卫星的伪距观测较高度角较小的卫星更精确。让 a_0 和 a_1 作为常数,追踪高度角为 h 的卫星,高度角的截止角度为 h_0 。然后

一个标准模型差为 $\sigma_b = a_0 + a_1 e^{-h/h_0}$ 。但是我们使用一个更简单的表达式 $\sigma_b = 1/\sin h$ 。权 c_i 通过 $c_i = 1/\sigma_b^2$ 计算得出。加权调整的结果为：

$$\hat{X} = 3427826.07m$$

$$\hat{Y} = 603664.47m$$

$$\hat{Z} = 5326883.17m$$

$$c\hat{dt} = 113059.57m.$$

偏离不超过1-2米的每个卫星未加权的结果是。单位权的标准差下降至0.7米。

9.6.3 结论

Conclusions

一组的高斯方法设置了 m 个方程和 n 个未知数， $m \geq n$ ，两个历元后仍保持不变。如下

- 一个独特的(加权)与最小方差最小二乘解
- 测量的准确性(协方差)的解决方案。

在早期的GPS, m 和 n 往往是一个比较小的整数。计算设备的能力是有限的,所以它自然成为寻找最优的解决方案。最常见的选项是放弃一部分。现在我们做得更好。

示例9.1（精度因子）协方差 $matrix_{ECEF}$ for $(x_i, y_i, z_i, c dt)$ 包含的信息决定几何定位的质量。 Σ 是更小的(\hat{x} 更精确的)卫星间隔。追踪 Σ_{ECEF} 压缩这个信息到一个数字，我们不能恢复置信椭球。坐标追踪系统和四个差异 $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 + \sigma_{c dt}^2$ ，是独立的坐标系统。除了几何信息这些差异包括观测的准确性。这可以由 σ_0^2 消除。

我们从协方差矩阵的最小二乘问题开始9.22:

$$\Sigma_{ECEF} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} & \sigma_{X,c dt} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} & \sigma_{Y,c dt} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_Z^2 & \sigma_{Z,c dt} \\ \sigma_{c dt,X} & \sigma_{c dt,Y} & \sigma_{c dt,Z} & \sigma_{c dt}^2 \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned}
\text{几何精度因子: } GDOP &= \frac{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2 + \sigma_{cdt}^2}}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{\text{trace}(\Sigma_{ECEF})}}{\sigma_0} \\
\text{水平精度因子: } HDOP &= \frac{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2}}{\sigma_0} \\
\text{位置精度因子: } PDOP &= \frac{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2}}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{\text{trace}(\Sigma_{ENU})}}{\sigma_0} \\
\text{时间精度因子: } TDOP &= \sigma_{cdt} / \sigma_0 \\
\text{垂直精度因子: } VDOP &= \sigma_U / \sigma_0
\end{aligned}$$

传播规则将 Σ_{ECEF} 转换为本地系统中表达的协方差矩阵坐标(E,N,U)。有趣的是 3×3 子矩阵 $S\Sigma_{ECEF}$ 在9.27所示。转换矩阵是 F^T ,这个子矩阵S是:

$$\Sigma_{ENU} = \begin{bmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{EN} & \sigma_{EU} \\ \sigma_{NE} & \sigma_N^2 & \sigma_{NU} \\ \sigma_{UE} & \sigma_{UN} & \sigma_U^2 \end{bmatrix} = F^T S F \quad (9.28)$$

F连接笛卡尔坐标和本地坐标系统的差异（纬度 φ 和经度 λ ）和ECEF坐标系，参考（3.28）这是衍生出的另一种方式。序列(E,N,U)确保当地和ECEF系统应当是右手坐标系:

$$\begin{aligned}
F^T &= R_3(\pi)R_2(\varphi - \frac{\pi}{2})R_3(\lambda - \pi) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & -\cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (9.29)
\end{aligned}$$

在实践中我们遇到一些形式的精度因子(缩写为DOP):

注意,所有DOF值是无量纲的。他们用错误的范围表示位置的错误(大约)。而且我们有

$$GDOP^2 = PDOP^2 + TDOP^2 = HDOP^2 + VDOP^2 + TDOP^2$$

DOP值在规划观测时间是特别有用的。为此目的的历书没有比广播星历表更高的精度。历书数据允许预先计算卫星位置在几周和有足够的准确性(轨道的星历表表示是在很短的时间内有效)。任何人使用全球定位系统(GPS)时DOP是一个有用的工具, 在一些卫星星座比其他的已知最好的卫星覆盖的时候。???

经验表明,良好的观测是位置误差 $PDOP < 5$,测量来自至少五个卫星。

备注9.1伪距观测 b 是未知的接收机坐标的非线性函数。我们主要线性化观测值和使用泰勒级数展开。

$$b = b_0 + (X - X_0)^T \text{grad } b|_{X=X_0} + \frac{1}{2}(X - X_0)^T H|_{X=X_0}(X - X_0) + \dots$$

X_0 和 X 的是在展开点计算的, 和Hessian H 是二阶导数。我们的目标是估计二阶项的大小。这一项告诉我们关于截断一阶项后的系数的误差。对一组伪距这导致使用张量,所以我们开发一个简单的例子中,使用一个伪距为 b 。

我们已经知道的梯度中给定的伪距9.22我们省略和时钟偏移相关的最后一列:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{X^1 - X_i}{\rho_i^1} & -\frac{Y^1 - Y_i}{\rho_i^1} & -\frac{Z^1 - Z_i}{\rho_i^1} \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

二阶导数在Hessian收集:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{(Y^1 - Y_i)^2 + (Z^1 - Z_i)^2}{(\rho_i^1)^3} & \frac{(X^1 - X_i)(Y^1 - Y_i)}{(\rho_i^1)^3} & \frac{(X^1 - X_i)(Z^1 - Z_i)}{(\rho_i^1)^3} \\ \frac{(X^1 - X_i)(Y^1 - Y_i)}{(\rho_i^1)^3} & \frac{(X^1 - X_i)^2 + (Z^1 - Z_i)^2}{(\rho_i^1)^3} & \frac{(Y^1 - Y_i)(Z^1 - Z_i)}{(\rho_i^1)^3} \\ \frac{(X^1 - X_i)(Z^1 - Z_i)}{(\rho_i^1)^3} & \frac{(Y^1 - Y_i)(Z^1 - Z_i)}{(\rho_i^1)^3} & \frac{(X^1 - X_i)^2 + (Y^1 - Y_i)^2}{(\rho_i^1)^3} \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

和

$$X^1 = (-9138250.97, 13331687.71, 21338151.79)^T$$

$$X_0 = (3427823.97, 603665.739, 5326881.602)^T$$

$X - X_0[m]$	(1,1,1)	(100,100,100)	(10000,10000,10000)
$\alpha[m]$	3×10^{-8}	3×10^{-4}	3.02

和 $\alpha = \frac{1}{2}(X - X_0)^T H(X - X_0)$ 我们从下表中获得数据:

任何模棱两可的成功解决方案取决于伪距观测值;我们目睹,忽略二阶项在正常情况下是无风险的!

9.7 搜索定位接收机

Receiver Position by Search

我们描述一个搜索过程，解决了最小二乘问题没有形成正常的方程。假设四个或更多伪距美元 P_1, P_2, \dots, P_m 在同一历元。我们要确定我们的接收机的位置，没有先验知识，它的位置。

首先我们计算ECEF坐标的m卫星星历文件。然后wc的笛卡尔坐标变换每个卫星传输时间(可以从伪距获得)到 $(\varphi_i, \lambda_i) = (\text{纬度}, \text{经度})$ 。平均坐标是我们第一次猜的接收机的位置。

以这个点为中心，我们引入一个网格覆盖一个半球。可能将 $\pi/2$ 十等分，可能16等分 2π 的角度。在每个网格点，我们计算剩余 $R_i = P_i - P_1, i = 2, \dots, m$ ，观察到的伪距之间的差异和第一个值来消除接收机时钟偏移量。接下来我们区分这些差异：

$$\begin{aligned} r_1 &= R_2 - R_2^0 = (P_2 - P_1) - (P_2^0 - P_1^0) \\ r_2 &= R_3 - R_3^0 = (P_3 - P_1) - (P_3^0 - P_1^0) \\ &\vdots \\ r_{m-1} &= R_m - R_m^0 = (P_m - P_1) - (P_m^0 - P_1^0) \end{aligned}$$

这给第一个近似和 $S = \Sigma r_i^2$ 之间的所有S的可能值，现我们寻求最小的一个，现与该值是新的接收机的位置的估计值。网格是为更精细的下一次迭代。现一个新的决定和选择如下，细化网格的中心和一个后续的搜索。重复这个过程，直到没有进一步改善位置。

最后，我们展示如何计算球面三角学的新位置，如图9.15。最初点的坐标 (φ_1, λ_1) 。我们想要移动 ψ 度沿方位角 (φ_2, λ_2) 的方向。计算 φ_2 和 λ_2 是一个经典大地测量问题，以下基本方程产生解决方案在球面上：

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \psi + \cos \varphi_1 \sin \psi \cos \alpha \quad \text{and} \quad \sin \Delta \lambda = \frac{\sin \lambda \sin \psi}{\cos \varphi_2} \quad (9.32)$$

这些方程给出新的点的纬度 φ_2 和增量 $\Delta \lambda$ 的经度。的m文件recpos显示了快速的实现代码。最终找到一个接收器位置与轨道的精度一致，折射模型和伪距。

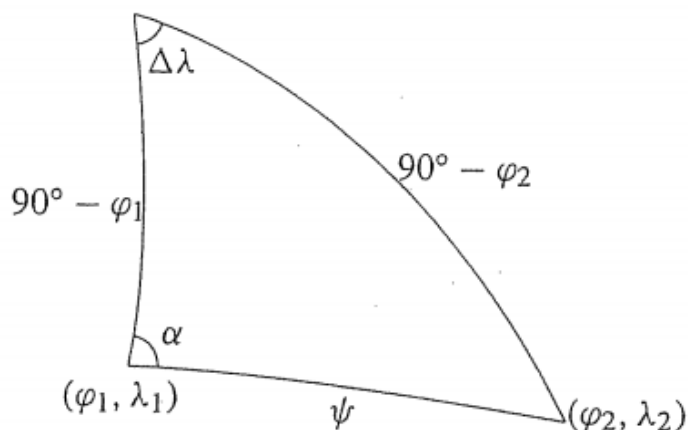


图 9.15: 球面三角形计算接收机的纬度和经度 (φ, λ)

这是另一个最小二乘的一个例子。这里，由于 P_1 减去其他伪距，这显然是相关的差异。任何错误在 P_1 出现在每一个差异中。在搜索中我们忽略这些相关性，因为这个过程只是为了给第一次估计的接收机的位置。

使用适当的协方差矩阵最小二乘过程应该遵循我们的搜索技术。由此产生的猜测是几乎总是(线性)收敛区域内。获得的导航数据 `rinexe ('ohiostat.96n', 'rinex_n.dat')`。你可以放大图片按下鼠标按钮。许多你可以读出缩放后的x和y标签的位置。

将 `get_ephm` 文件打开，读取和构造一个星历表文件。这样的文件通常包含几个特定卫星数据集。常见的做法是选择立即时代之前的星历表使用。文件 `find_eph` 便是这个用途。然而保持这种做法，最终导致星历数据的变化。这很可能会引入跳轨道计算。更先进的程序平滑轨道，如果他们需要更长时间的使用。一个更好的解决方案是改用精密星历表。

9.8 GPS观测值的误差项

Errors in the GPS Observables

9.8.1 信号的延迟

Delay of the Signal

9.8.2 GPS误差预算

Error Budget for GPS

9.8.3 例子16

easy16

9.8.4 例子10

easy10

9.8.5 误差预算的汇总

Summary of the Error Budget

9.9 星基增强系统

Satellite Based Augmentation Systems

9.9.1 测距修正和监测站

Ranging and Integrity Monitoring Station

9.9.2 SBAS消息和产生

SBAS Messages and Their Generation

9.9.3 总结SBAS修正

Summary of the SBAS Corrections

9.9.4 例子13

easy13

9.9.5 例子14

easy14

9.9.6 伽利略完整性的概念

The Galileo Integrity Concept

9.10 练习题

Problem Set

第 10 章

差分观测的一种方法

Differences of One-Way Observations

Contents

10.1 联合观测的方法	116
10.2 计算模型的动机	118
10.3 组合编码和伪距观测	122
10.4 GPS的计算模型	123
10.5 检查观测值	124
10.6 模糊度的GOAD解法	125
10.7 模糊度的LAMBDA解法	126
10.8 GPS和时间	127
10.9 动态实时定位	128

10.1 联合观测的方法

Combining One-Way Observations

单向码观测值是指一颗卫星和一台接收机间的观测值。计算一台独立接收机的位置需要4个或者更多的观测值。根据经验可知，相邻位置的误差源（比如大气延迟）是相同的。这就促使我们使用相邻两个接收机观测相同卫星的模型。此模型计算了两个接收机间的不同矢量。但是比起两个接收机位置相减的解法，这种方法并不会得到更好地结果。有时这种差分模型实际上会产生更差的结果。下面看easy4文件。

10.1.1 例子4

easy4

easy4文件处理了两个接收机C/A伪距码的同步观测值。我们对两个天线的基线进行估计并在图10.1中画出了它的 (X, Y, Z) 分量。坐标变化量达到10m。因此，利用单伪距估计得到的天线位置和基线解有相同的噪声水平。这个结论仅对2000年3月2号之后的观测值有效。

因此，如果对来自两个测站的同步观测数据进行处理，我们得到的基线精度是单点定位误差精度的 $\sqrt{2}$ 倍，除非接收机观测到的伪距是负相关的。那么这种差分方法是不能改善这种情况的。

只有通过使用最小二乘法程序对独立观测值（单向的）进行改正，才能提高差分向量的精度。这正是第九章提出的使用卫星地基增强系统（SBAS）的思想。当码观测值和调制在载波L1、L2上的相位观测值进行组合时，图像变化剧烈。这将在327???页做出总结。

正如在公式（10.2）???定义的，相位噪声 ϵ 的标准差有几毫米，而伪距误差 ρ 取决于接收机的质量。由于速率（频率的另一术语）变慢，C/A 码伪距的噪声值可以达到2~3m。P码的速率可以达到每秒1023万二进制数字或者每秒1023万位。速率是C/A码速率的10倍，这也暗示着P码的噪声水平在10~30cm。一个小的伪距标准差对快速固定L1，L2载波上的整周模糊度是至关重要的。P码通常是加密的，被称之为Y码。

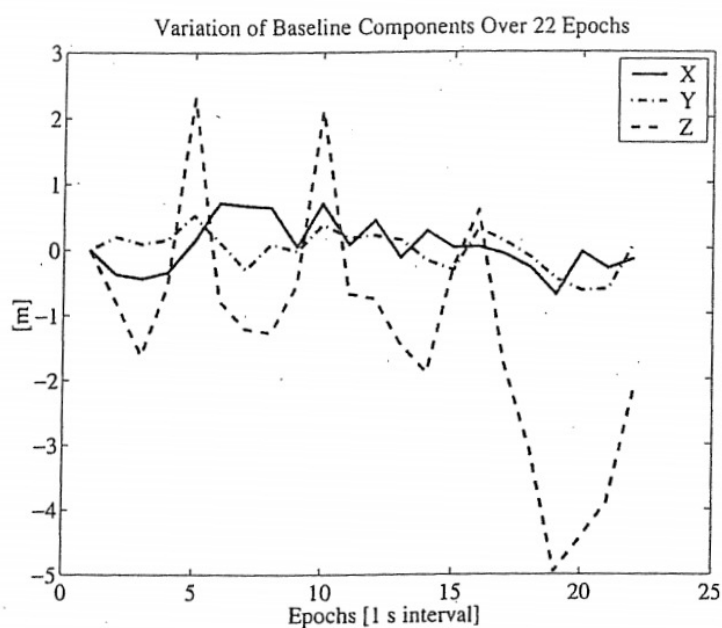


图 10.1: 利用两台接收机的伪距观测值估计得到的基线(X, Y, Z)随时间的变化

下面说明了双频接收机是如何工作的：C/A码仅调制在L1载波上，而P码既调制在L1载波上也调制在L2载波上。P码很长并且不是哥德尔序列（Gold码）。接收机利用C/A码实现与P码的同步，数据存储在导航信息中。因此，接收机只需要实现与C/A码的同步，同时解调导航信息，这与单频率接收机非常相似。在导航信息中可以找到记录一个移位寄存器当前内容的数据，这个移位寄存器用来生成P码。用这种方法就能实现P码的同步。现今的新科技允许获取P码或者是加密的Y码。更多细节详见Misra&Enge（2006）。

这章由以下组成：

- 相位观测值；载波N的数量是未知的（模糊度）
- 周跳的检查；整周数N的变化
- 差分GPS；两台接收机
- 双差；两颗卫星和两台接收机
- 模糊度的估计；经常也是两个频率

10.2 计算模型的动机

Motivation for Computational Models

假设两台接收机的距离是十分接近的（这里指相距50km之内）。来自两万公里以外的卫星信号将沿着相似的路径到达两台接收机。信号在电离层的延迟是非常相似的。卫星钟差、卫星轨道误差都是相同的。那些误差都将在两台接收机的作差中消除。

时间同步、大气影响和轨道误差对于分离的站点是成正比的。电离层梯度通常为 1^6 数量级(???)。对于单频精密定位，两测站相距100km所产生的误差太大而不能忽视（误差影响可达到10mm甚至超过 $1 \sim 2\text{km}$ ）。对于任何距离的两个站点利用双频观测值几乎都能消除这些误差。轨道计算误差在 $1 \sim 2\text{m}$ ，这就等同于超过100km就会产生5mm的误差。这对地质构造是重要的，而对常规测量或是导航无关紧要。差分GPS（DGPS）的思想十分简单。如果基准站的坐标位置精确已知，那么很容易计算出它与每颗卫星之间的距离，然后就可以获得以光速传播的传播时间（距离除以光速 c ）。通过将理论的传播时间与实际的传播时间进行对比获得每颗可视卫星的误差项，并将这些误差项传送给基准站。第二台接收机（或者任意数量的流动站）将会接收这些信息并对相同卫星的传播时间进行改正。

因此，增加额外的收发接收机能够使我们消除电离层的部分自然误差。

差分的工作原理甚至被更多的应用在GPS数据处理的过程中。在本章中将解释双差的含义并不断被应用。利用DGPS原理显著提高了定位精度。

在定位与导航中，角度是传统的观测值，它是大地测量学的基础。但自从20世纪60年代起，测量工作者在科学研究中除了使用角度观测量以外还使用电子测量的距离。对于GPS来说，距离是基本观测值。因此三边测量在很大程度上取代了三角测量。

从大地测量学的观点来看，GPS的关键特性是用户可以随时计算所有可见卫星的位置。在第9章已经描述过计算卫星位置的复杂算法。根据卫星信号携带的信息，接收机可以立即获取卫星坐标。这些坐标涉及到地心地固坐标系，接收机的地心坐标系也与此系统有关。任何好的接收机都能够

在开机两分钟之内提供位置信息。

从概念上讲，卫星可以被看作是空中坐标已知的点，并不断向地面发送它们的位置信息。接收机通过测量每一颗卫星到它的距离计算得到自身坐标 (X_i, Y_i, Z_i) ，定位精度在 $2 \sim 10m$ 之间变化。如果使用位置已知的固定接收机所提供的补偿值进行改正，定位精度会大幅提高。这就是差分GPS。大地测量学中用差分GPS的方式定位可以达到厘米级的精度。

频率 f （行内公式P320正数第一段） $f=10.23\text{MHz}$ 是GPS的基准频率。每颗卫星都发射两种频率的载波（此为在2011年之前，大约在2013年一个新的民用频率L5将用有完全的运行能力）。L1信号的频率为 f （行内公式P320正数第一段） $f=154 = 1575.42\text{MHz}$ ，波长为 λ （行内公式P320正数第一段） $\lambda=0.1905\text{m}$ ；L2信号的频率为 f （行内公式P320正数第一段） $f=120 = 1227.60\text{MHz}$ ，波长为 λ （行内公式P320正数第一段） $\lambda=0.2445\text{m}$ 。这两个频率是相干的因为154和120都是整数。L1载波搭载一个精码和一个粗/捕获码，L2载波仅搭载精码P码。导航信息数据就叠加在这些码上。

利用相位观测值可以计算得到最准确的距离，相位观测值是传入的卫星信号的相位和接收机产生的相同频率信号的相位之间的差值。相位差值来自于锁相环而且分辨率能够达到 λ （行内公式P320正数第二段） λ 周或是更好。初始观测值仅由相位差值的小数部分组成。在连续跟踪卫星信号且没有发生失锁时，从起始历元开始记录相位差值的小数部分和一部分整周部分。但是相位观测值不提供初始整周数即模糊度 N 。

记录没有发生周跳的周数是GPS定位中求解模糊度至关重要的方法。这尤其适用于时间较短的双差观测，例如几个小时观测甚至更短。单向观测和单差观测是不能解决模糊度问题的，因为不能消除（10.2）中的 λ （行内公式P320正数第三段） λ 项。

精密GPS定位精度的高低高度依赖于估计的卫星钟差和接收机钟差的好坏。由于光速在0.01纳秒传播3mm，因此利用可用的GPS观测值达到毫米级的精度就要求我们获取的时间精度小于纳秒级。

标准的观测方法是指利用两台及以上接收机观测四颗及以上卫星获取相位观测值并按历元存储。每个历元都是一个瞬时时间。对于双差观测值我们只需要获取5微秒以内的抽样历元即可且大多数从P码伪距获取。双差观测只要求接收机振荡器具有良好的短期稳定性，而你的腕表具有更好地

长期稳定性，详见表格9.5。

原始观测值是一台接收机和一颗卫星之间的差值（单向），两台接收机对同一颗卫星的估计误差是相同的。接下来我们对站际星际作差即双差，这样得到的双差估计误差对于两台接收机是相同的。最大的误差是接收机钟的偏移，而接收机的频漂是难以估计的。

差分思想对于修复两台接收机的同步误差是有效的。多路径效应是无法消除的，因为它取决于每台接收机所处的具体反射表面的特性。更合理的天线设计和信号处理是当前研究的目标。

我们可以在双差的基础上对两个历元继续作差。利用三差（即站际、星际和历元际）结果估计模糊度 N 。随着时间的推移，模糊度是恒定不变的。由于作差的影响三差观测值具有较差的几何强度，具有很强的相关性且数值不稳定。

GPS卫星信号可能会由于建筑物或者构筑物的遮挡而不连续即发生周跳。当失锁的卫星信号再次建立时，整周模糊度很可能是错误的，因此需要重新固定。现如今周跳探测由非常高效的算法实现，该算法假设历元与历元之间的电离层变化是很小的。因此组合观测值**（行内公式P321正数第一段）**对周跳是非常敏感的。当时间间隔小于几秒时，电离层变化可以到达亚厘米级。由于周跳导致的距离误差是波长**（行内公式P321正数第一段）**的倍数，这对严谨的科学研究的影响是十分巨大的。

搭载在高频率 $L1$ 、 $L2$ 载波上的卫星信号能够相对容易的穿过电离层。电离层延迟与载波频率的平方成反比，双频接收机利用这个关系可以估计得到大部分的电离层延迟。如果我们能够正确估计出模糊度 N 的整周数则称之为固定解（对模糊度），而浮点解只能得到一个不准确的非整数解 N 。

数据处理的最后一步是利用最小二乘原理估计点的坐标，点坐标值作为估计向量。估计值取决于对观测值质量的评估和对可能总误差的检测。GPS测量结果的是通过最小二乘估计得到其位置的网络点。

例子10.1（矩阵**（行内公式P321正数第四段）**和**（行内公式P321正数第四段）**的特性）一个典型的系数矩阵**（行内公式P321正数第四段）**可以描述GPS单一定位的情况。每行包含每颗卫星位置三个方向分量的余弦。第四列是未知的接收机钟偏差，设置为1。 **P321公式** 分别计算前三列的平均值获取各平均方向 **P321公式** 对矩阵**（行内公

式P321正数第二段) **前四行(四颗卫星的观测值)取逆可得 4×4 的块矩阵: **P321公式** 块矩阵有一个非常明显的特性: 前三行每一行的值相加为零, 第四行为1。为什么会出现这种情况呢?(因为矩阵** (行内公式P321正数第二段) **的各行元素与矩阵** (行内公式P321正数第二段) **的每列元素是正交的。)

未知量的协方差矩阵由** (行内公式P321倒数第一段) **计算得到, 并在 4×4 的协方差矩阵中选择相关的块矩阵得到三个坐标: **P321公式** 协方差矩阵** (行内公式P322正数第一段) **的特征值为: **P322公式** 特征向量为: **P322公式**

有人可能认为方向向量** (行内公式P322正数第三段) **是与矩阵** (行内公式P322正数第三段) **第三列的特征向量对准的。所有的计算以下列事实为基准: 所有被追踪的卫星都在当地地平线以上且其平均方向大致是向上的; 提供接收机在地球半径圈上较好的初始近似位置(???)。所有的计算都在M文件的testA.m中执行。上述我们简要的介绍了如何使用GPS实现定位的, 下面我们将着重说明GPS计算方面的问题。

10.3 组合编码和伪距观测

Combined Code and Phase Observations

10.4 GPS的计算模型

Computational Models for GPS

10.5 检查观测值

Investigations of the Observations

10.6 模糊度的GOAD方法

The GOAD Method for Ambiguities

10.7 模糊度的LAMBDA解法

The LAMBDA Method for Ambiguities

10.8 GPS和时间

GPS and Time

10.9 动态实时定位

Real-Time Kinematic Positioning

第 IV 篇

大地测量和地球坐标 Geodesy and Earth Coordinates

第 11 章

椭球面大地测量

Geometry of the Ellipsoid

Contents

11.1 旋转椭球	132
11.2 主曲率	133
11.3 子午圈的长度	134
11.4 法截面和测地线	135
11.5 曲线和测地线的Frenet公式	136
11.6 克莱劳方程	137
11.7 测地线的性能	138
11.8 直接和间接的大地测量	139
11.9 算法	140

11.1 旋转椭球

The Ellipsoid of Revolution

11.2 主曲率

Principal Curvatures

11.3 子午圈的长度

Length of a Meridional Arc

11.4 法截面和测地线

Normal Section and the Geodesic

11.5 曲线和测地线的Frenet公式

Frenet's Formulas on Curves and Geodesics

11.6 克莱劳方程

Clairaut's Equation

11.7 测地线的性能

The Behavior of the Geodesic

11.8 直接和间接的大地测量

The direct and reverse problems of geodesy

11.9 算法

Algorithms

第 12 章

椭球面的正形投影

Differences of One-Way Observations

Contents

12.1 正形	142
12.2 椭球的高斯投影	143
12.3 笛卡尔坐标系到大地坐标系的转换	144
12.4 子午线收敛角和比例尺	145
12.5 地图叠加	146
12.6 通用横轴墨卡托投影	147
12.7 最好的等角投影	148

12.1 正形 conformality

12.2 椭球的高斯投影

The Gaussian Mapping of the Ellipsoid onto the Plane

12.3 笛卡尔坐标系到大地坐标系的转换

Transformation of Cartesian to Geographical Coordinates

12.4 子午线收敛角和比例尺

meridian convergence and scale

12.5 地图叠加

Multiplication of the Mapping

12.6 通用横轴墨卡托投影

Universal Transverse Mercator

12.7 最好的等角投影

Best Possible Conformal Mapping

