评分：__________

SHANGHAI UNIVERSITY

数学建模课程论文

COURSE PAPER

讨论不同情况下快递箱耗材的优化问题

学　　院　　理学院

专　　业　数学与应用数学

学　　号 20123175　20123177　20123178

学生姓名　俞梦泽　陈涛　沈承泽

讨论不同情况下快递箱耗材的优化问题

摘要

随着互联网高速发展，网购需求日益增长，快递行业也随之不断发展。在这其中快递包装盒的成本是一笔很大的开支。本文通过对各类型快递包装盒进行数学建模，分别考虑了长方体，圆柱形和三角柱形的快递包装盒，结合实际情况，分析各类型包装盒的优劣，帮助减少快递包装盒的成本，并且对于快递装箱问题做了一定的研究和讨论。

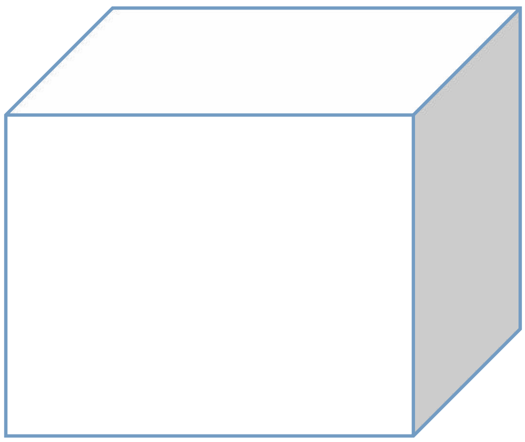
关键词：容积，耗材面积，装箱，优化

一、问题背景

1980 年 EMS 开办全球邮政特快专递业务，四年后也开启了国内的特快专递服务。于几年后，随着顺丰、申通的成立以及淘宝开启自己的菜鸟快递业务，快递业务逐渐变得成熟起来。从 08 年仍会因为几千万元的订单而瘫痪的快递系统，现如今已经发展到了如此壮大的地步。而日益增长的网购需求也促成了快递行业的迅速发展。而快递量几何级增长的同时，对于快递箱的需求量也日益增加。因此对于构成快递箱主要材料的硬纸板便成为了需求量极大的物品。于是，如何使用更少的瓦楞纸板来包装更多的物品，对于无论是商家的利益亦或是环境的保护都是极为重要的问题。

二、问题提出

设计一款如下图的长方体快递箱



其中长方体的长为 l，宽为 w，高为 h，用于包裹类似于粉丝、茶叶等物品，总计容积为 $V\ m^2$。由于装的物品易碎，因此要求长方体快递箱的顶面和地面皆为由双层瓦楞纸板构成。同时瓦楞纸板的厚度为 $t\ mm$。

，该如何设计才能使包装箱子所需的硬纸板的表面积最小？

（如果需要加厚的层数为 1 或 4 时，又该如何设计？）

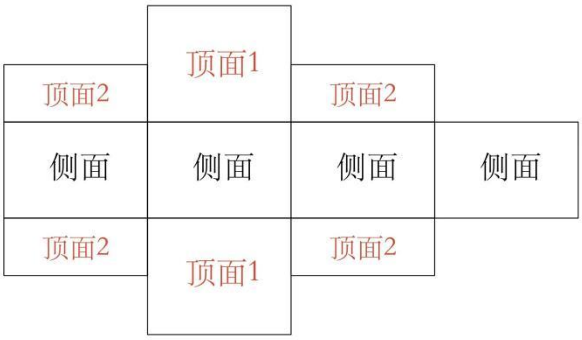
三、模型假设与模型建立

根据题目的要求，纸箱所需容纳物体的容积固定为 $\mathrm{V}\ \mathrm{m}^2$。同时当高度和面积一定时，当且仅当纸箱底面为正方形时，底面才有最小的周长，因此我们可以直接假设我们所需的包装盒的底面为正方形，即 $l = w$。如此一来我们只需要在保持体积固定的情况下，优化纸箱的地面长宽 w 以及纸箱的高度 h 来使纸箱的表面积最小。（不考虑胶水粘贴部分，仅考虑包装时所需表面积）

先不考虑纸板的厚度。很容易得出包装箱的体积表达式为

$$V = l * w * h = w^2 h$$

我们将常规的包装箱展开成平面可得到如下图。



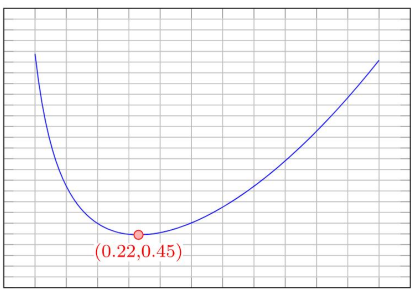
由于长宽高确定，我们也很容易得出侧面的面积为 wh，顶面的面积为 w^2

考虑到纸箱的底面和顶面为双层瓦楞纸板，如上图所示，因此我们所需硬纸板表面积为 $S = 4wh + 4w^2$

将 $h = V / w^2$ 以及 $V = \mathrm{V}\ m^3$ 代入后我们就得到了成本与地面尺寸间的数量关系

$$S(w) = 4\mathrm{V}/w + 4w^2$$

通过带入固定的 V 和 r 绘制 $S(w)$ 的图像，我们可以看到 S 关于 w 的变化趋势：



从图像可知，我们可以通过求导的方式，令 $S(w)$ 的导数值为 0 来求该函数的极值点。

而在上文的模型中，我们并没有考虑纸箱的厚度所带来的问题，只是将纸箱的体积即看作容积，实际生活中，包装盒的真实容积是一定小于外观体积的。因此对于大规模的生产来说，纸板的厚度也是不可忽略的因素之一。

考虑纸板的厚度为 t mm 。在宽度和长度上，各有两层纸板，而在高度上，由于加厚纸板带来的影响，纸箱的容积可表示为

$$V = (w-2t)^2 * (h-4t)$$

因此有

$$h = \frac{V}{(w-2t)^2} + 4t$$

代入表面积公式可得

$$S = 4(w^2 + \frac{w\mathrm{V}}{(w-2t)^2} + 4wt)$$

同理，通过求导的方法求极值点来获得最后模型的解。

四、问题求解

我们通过求导获得表面积关于底面边长 w 的导函数

$$S'(w) = 8w + 16wt + 4\mathrm{V}(w-2\mathrm{t})^2 - \frac{8w\mathrm{V}(w-2t)}{(w-2t)^4}$$

利用 python 代码’scipy’库函数中的’solve’函数，对 $S'(w)=0$ 进行求解。根据数学分析的知识，可以知道当导函数值为零时，可以得到原函数的极值点。显然原函数时开口向上的函数，于是极值点即为当容积一定时，让硬纸板所需表面积最小的底面尺寸大小。

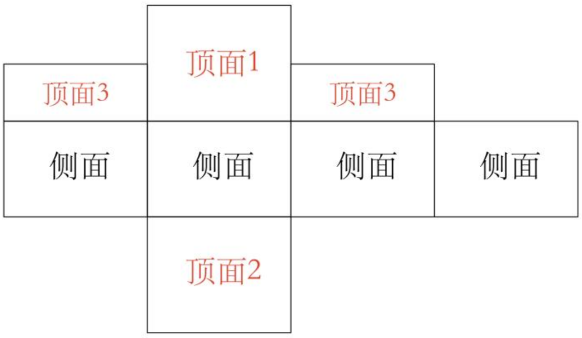
在方程的求解过程中，可能会出现虚数解。因此在代码的开头，我们定义了一个 whetherfloat 函数来判断方程的解是否为实数，若结果为虚数则舍去该解。

通过求解和对解的筛选，可以得到令表面积最小时的底面尺寸大小。

除了上下底面为双层的包装盒设计，我们还考虑了一面和四面为双层硬纸板的情况。

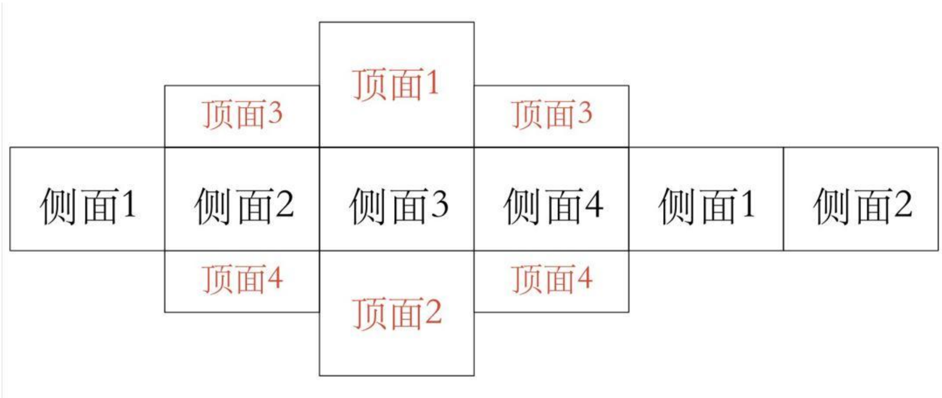
硬纸板构造如下。

一层：



其导函数为$S'(w)=6w+12wt+4\mathrm{V}(w-2t)^2-\dfrac{8w\mathrm{V}(w-2t)}{(w-2t)^4}$

四层：



其导函数为$S'(w)=8w+24t+6\mathrm{V}(w-2t)^2-\dfrac{6w\mathrm{V}(2w-4t)}{(w-2t)^4}$

通过两者各自的导函数，我们可以计算出当一面或者是四面为双层纸板时的包装盒,当容积一定时令表面积最小的底面尺寸。

五、模型的推广

除去常规的长方体形状的快递箱以外，对于某些特定物品例如我们平时见过的罐装薯片包装盒，就是圆柱体型的设计。还有部分巧克力的礼品盒包装，也会用到四面体形的包装。这也让我们思考，不同形状的快递箱，所使用的耗材都会不同，那我们用非传统的非长方体快递箱，会不会能节省耗材呢？

5.1 圆柱形包装盒

我们在控制包装盒容积不变的前提下，采用圆柱形的包装盒，其上下底面为圆形，在上述长方体模型的基础上来对圆柱形包装盒进行建模。

圆柱形包装盒的上下底面为圆形，顶盖为两层结构，上底面其半径我们记为r，圆柱体的高度我们记为h，则其上下面的面积为πr^2，其侧面的面积为$2\pi rh$，可得圆柱形包装盒所需的材料面积为

$$S = 3\pi r^2 + 2\pi rh$$

圆柱形包装盒的容积为

$$V = \pi(r-t)^2(h-3t),$$

由此推出高度h与半径r之间的

$$h = \frac{V}{\pi(r-t)^2} + 3t$$

关系，再将其代入材料面积中，得到

$$S = 3\pi r^2 + 6\pi rt + \frac{2rV}{(r-t)^2}$$

对其求导得

$$S' = 6\pi r + 6\pi t + \frac{2V(r-t)^2 - 2rv(2r-2t)}{(r-t)^4},$$

对上述公式求零点可以获得极值点，将极值点代入获得高度和最小表面积（最小材料使用面积）。

5.2 三角形包装盒

我们还可以采用三角形得包装盒，其上下底面为正三角形，顶层需要消耗 2 层纸板。我们记正三角形的边长为l，三角形包装盒的高度为h，则可以获得底面

为三角形的包装盒所需耗材的面积为$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 + 3lh$

在考虑三角形包装盒实际容积时，我们将其底面正三角形的边长近似为$l-2t$，高近似为$\frac{\sqrt{3}}{2}l-2t$，通过体积公式可以得到

$$V = (\frac{\sqrt{3}}{2}l-2t)(l-2t)(h-3t)$$

由此我们得到了三角形包装盒底边长l和高度h的关系

$$h = \frac{V}{(\frac{\sqrt{3}}{2}l-2t)(l-2t)} + 3t$$

再将其代入所需耗材的面积公式中，得到

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 + \frac{3lV}{(\frac{\sqrt{3}}{2}l-2t)(l-2t)} + 9lt$$

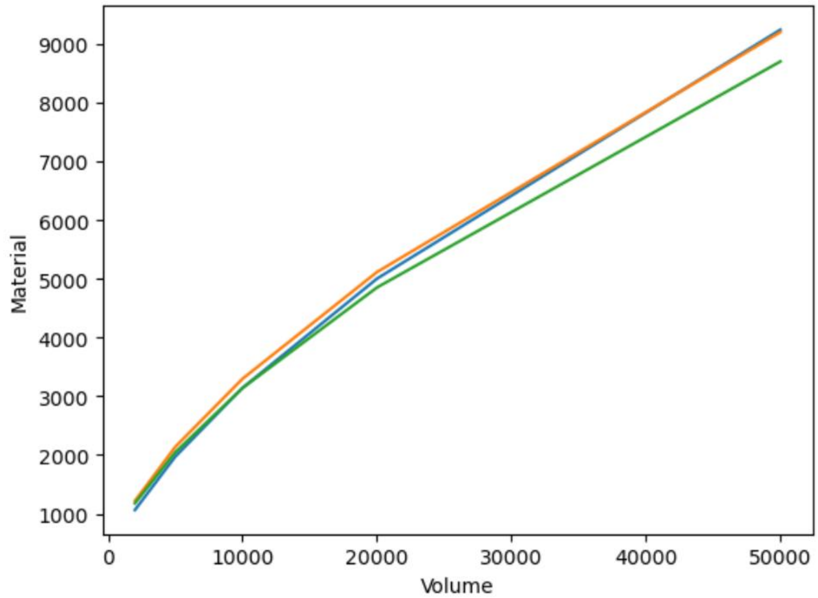
对该公式求导得到

$$S' = 3\sqrt{3}l + 9t + \frac{3V(\frac{\sqrt{3}}{2}l-2t)(l-2t) - 3lV(\sqrt{3}l-(2+\sqrt{3})t)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}l-2t)^2(l-2t)^2}$$

求其零点可以获得极值点，将极值点代入，结合以上公式可以得到高度和最小材料使用面积。

5.3 比较三种包装盒

通过对上述三种快递包装盒建模后，我们得到了包装箱内部容积和原材料使用面积的关系，现在我们用 matplotlib 库中的 plt 函数进行绘图，从而直观地获得三种不同形状的包装盒的容积和原材料使用情况。



通过分析数据图，我们可以发现随着需求容积的不断增加，模型表示三角柱形的快递包装盒所需要的原材料是最少的，而圆柱形和长方体形状的快递包装盒所需的材料十分相近。这表面如果只考虑快递包装盒的原材料以及其实际容积的情况下，采取正三角柱形的包装盒能够节省材料。但是，在实际生活中，我们还要考虑运输成本，三角柱形和圆柱形的包装盒在摆放时的空间利用率不如长方体包装盒，因此我们要结合实际需求来选择快递包装盒。

六、装箱问题

当我们使用包装盒时，除了对茶叶、粉丝等形状不固定的物体，我们可以像上文一样，通过讨论容积来得到最省材料的快递箱。更多时候，我们需要面对的是已经有固定形状的产品，对于这些产品，我们只需要根据它们的形状选择快递箱即可。因而，下文我们想讨论，当有多个产品，需要放进同一长方体快递箱时，应当如何摆放，并选择合适的快递箱，使得最终使用的快递箱，耗材面积最小。

6.1 两物品的装箱问题

我们首先考虑两件物品装箱的问题时，这时对于盒子的摆放方式，我们可以先假定，第一个物品的摆放是恒定的，当我们置入第二件物品时，它的摆放方式有三种，平放，侧放和竖放，同样地，它相对第一个物品的相对位置也可以简化为三种，当我们正视一个物体时，我们可以看作放在第一个物品的左面，下面或后面。于是，我们可以引入两个新变量‘dir’和‘$next$’表示第二个纸箱的摆放方式和相对位置：

当第二个物体平放时，我们令$dir=[1，0，0]$，侧放时，$dir=[0，1，0]$，竖放时，$dir=[0，0，1]$。第二个纸箱的长$x=l*dir[0]+w*dir[1]+h*dir[2]$宽 $y=x=l*dir[2]+w*dir[0]+h*dir[1]$ ， 高 $z=x=l*dir[1]+w*dir[2]+h*dir[0]$（$l,w,h$为输入时假定的长宽高）。

同理我们当物体放在左侧时，令$next=[1，0，0]$，放在后面时，$next=[0，1，0]$，放在下面时，$next=[0，0，1]$。于是第二个纸箱各顶点的位置就可以确定。

同时，通过这样的表示方式，我们可以遍历两样物品叠加时的所有情况（其他情况都是某种情况的旋转变种，不影响需要的快递箱的表面积）。最后我们只需要比较各情况下，得到的组合体的最大长度，宽度，和高度，组成的长方体快递箱的表面积即可。

6.2 三物品的装箱问题

接着，我们将这种想法延伸到三个物品的情况，我们可以将最大的那件物品先固定，然后分别与两个较小的物品组成结果，最后拼在一起，得到一种求解法（需要注意的是，当两件较小物体在同一侧时，要避免重叠）。

另外我们也可以考虑把这些物品按大小依次放进一个坐标系内，用(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)分别表示三个物体的左、下、后方的坐标，我们确定了每个物品的摆放方式和相对位置后，(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)可以唯一确定。同时，我们令整个快递箱的左、后、下方坐标为（0，0，0），箱子长宽高分别为 L,W,H。我们只需要考虑如下的一个优化问题：

$$\min \quad L\cdot W+L\cdot H+W\cdot H$$

$$\begin{cases} x_3-x_2+L\cdot next_2[0]\le L-l_3 & (1)\\ y_3-y_2+W\cdot next_2[1]\le W-w_3 & (2)\\ z_3-z_2+H\cdot next_2[2]\le H-\hbar_3 & (3)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\le x_3\le L-l_3 & (4)\\ 0\le y_3\le W-w_3 & (5)\\ 0\le z_3\le H-\hbar_3 & (6)\end{cases}$$

其中l_3，w_3，$\hbar_3$为第三个物件的长宽高。$next_2$表示第三个物件相对于第二个物

件的位置。(1),(2),(3)式保证了物件之间没有重叠，(4),(5),(6)式保证了箱子容纳了所有物品。我们尝试了用 cvxpy 解这个优化问题，但其不支持使用最大值函数，因而没能成功，希望我们能在未来的学习过程中，找到一个合适的算法来处理这个问题。

6.3 若干个物品的装箱问题及未来展望

同样用以上的原理，我们可以把这一问题推广到任意多个物品。我们依然考虑把这些物品按大小依次放进一个坐标系内，用(x_i, y_i, z_i),表示每个物体的左、下、后方的坐标。这次，我们用s_{ij}=1 表示第 i 个物品在第 j 个物品的左边，u_{ij}=1 表示第 i 个物品在第 j 个物品的下边，b_{ij}=1 表示第 i 个物品在第 j 个物品的后边。δ_{i1}=1 表示物品 i 的摆放朝向为正面朝上，δ_{i2}=1 表示物品 i 正面朝下，δ_{i3}=1 表示物品 i 侧面朝上，δ_{i4}=1 表示物品 i 侧面朝下，δ_{i5}=1 表示物品底面朝上，δ_{i6}=1 表示物品底面朝下。

从而，我们只需求解以下的优化问题：

$$min\ \ L{\cdot}W + L{\cdot}H + W{\cdot}H$$

$$s.t.\ \ s.t.\begin{cases} s_{ij} + u_{ij} + b_{ij} = 1 & (1) \\ \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3} + \delta_{i4} + \delta_{i5} + \delta_{i6} = 1 & (2) \\ x_i - x_j + L \cdot s_{ij} \le L - \hat{l}_i & (3) \\ y_i - y_j + W \cdot u_{ij} \le W - \hat{w}_i & (4) \\ z_i - z_j + H \cdot b_{ij} \le H - \hat{h}_i & (5) \\ 0 \le x_i \le L - \hat{l}_i & (6) \\ 0 \le y_i \le W - \hat{w}_i & (7) \\ 0 \le z_i \le H - \hat{h}_i & (8) \\ \hat{l}_i = \delta_{i1} l_i + \delta_{i2} l_i + \delta_{i3} w_i + \delta_{i4} w_i + \delta_{i5} h_i + \delta_{i6} h_i & (9) \\ \hat{w}_i = \delta_{i1} w_i + \delta_{i2} h_i + \delta_{i3} l_i + \delta_{i4} h_i + \delta_{i5} l_i + \delta_{i6} w_i & (10) \\ \hat{h}_i = \delta_{i1} h_i + \delta_{i2} w_i + \delta_{i3} h_i + \delta_{i4} l_i + \delta_{i5} w_i + \delta_{i6} l_i & (11) \\ s_{ij}, u_{ij}, b_{ij} \in \{0,1\} & (12) \\ \delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4}, \delta_{i5}, \delta_{i6} \in \{0,1\} & (13) \end{cases}$$

其中约束条件中的(9),(10)，(11)表示物品在不同的朝向情况下占用的空间的长宽高;约束条件(1),(3).(4),(5)表示物品之间没有重叠，(6),(7),(8)保证了箱子能够容纳所有物品。

但是，很可惜，我们暂时还没有找到合适的用代码实现求解该优化问题的方法，希望在未来的学习生活中，我们能对这个问题有更深刻的认知。

参 考 文 献

[1] 宫佩珊.集装箱递阶优化装箱方法[J].青岛大学学报(工程技术版),1997,(04):90-92.

[2] 梅志虎,唐志波.求解三维装箱问题的启发式搜索算法[J].中国水运,2023,No.746(03):92-94.DOI:10.13646/j.cnki.42-1395/u.2023.03.037.

[3] 林云鹏,宋爽,江志斌等.电商物流背景下基于空间矩阵的三维装箱算法[J].工业工程,2022,25(05):128-136+152.

[4] 世界级难题：把不同物品装进箱子，如何使箱子表面积最小？https://blog.csdn.net/alitech2017/article/details/80131229