

元素独立随机向量

朱梦

初稿于 2025-06-13, 修改于 2025-06-15

为什么高维下会有随机向量“近似正交归一化”的直觉？不妨设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 的分量都是从均值为 0, 方差为 $1/n$ 的随机分布中独立重复采样出来的, 那么有:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \left(n \times \frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n u_i v_i \\ &\approx n \times \mathbb{E}_{u_i \sim f_{\text{PDF}}(x), v_i \sim f_{\text{PDF}}(x)}[u_i v_i] \\ &= n \times \mathbb{E}_{u_i \sim f_{\text{PDF}}(x)}[u_i] \times \mathbb{E}_{v_i \sim f_{\text{PDF}}(x)}[v_i] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \left(n \times \frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n u_i^2 \\ &\approx n \times \mathbb{E}_{u_i \sim f_{\text{PDF}}(x)}[u_i^2] \\ &= n \times (\mu^2 + \sigma^2) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$