

יהיו $x, y \in 2 \cdot \mathbb{N}$ כך ש $x > y$
נסמן

$$w_i = x^{n-i} y^i \cdot e_i$$

נבחר בסיס

$$b_1 = x^n \cdot e_1$$

$$\forall 1 < i : b_i = w_i + \frac{1}{2} w_{i-1}$$

נשים לב כי

$$2|x, y \Rightarrow 2|x^{n-i} y^i \Rightarrow \frac{1}{2} x^{n-i} y^i \in \mathbb{N}$$

כעת נקבל כי

$$\tilde{b}_i = w_i$$

ולכן

$$\mu_{i,i+1} = \frac{\langle b_{i+1}, \tilde{b}_i \rangle}{\langle \tilde{b}_i, \tilde{b}_i \rangle} = \frac{\frac{1}{2} x^{n-i} y^i \cdot x^{n-i} y^i}{x^{n-i} y^i} = \frac{1}{2}$$

וכמו כן

$$\frac{\left\| \tilde{b}_{i+1} \right\|^2}{\left\| \tilde{b}_i \right\|^2} = \left(\frac{x^{n-i-1} y^{i+1}}{x^{n-i} y^i} \right)^2 = \left(\frac{y}{x} \right)^2$$

ולבסוף

$$\|b_1\| = x^n$$

$$\lambda_1 \geq \min_i \left\| \tilde{b}_i \right\| = \left\| \tilde{b}_n \right\| = y^n$$

ולכן

$$\|b_1\| \leq \lambda_1 \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^n$$

כעת לכל $\epsilon > 0$ נוכל לבחור x, y שיקיימו

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{y}{x} \leq \epsilon + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ואם נסמן $\epsilon' := \frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ כלומר $\epsilon > \epsilon' > 0$ ונקבל כי

$$\frac{\|\tilde{b}_{i+1}\|^2}{\|\tilde{b}_i\|^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \geq \frac{1}{2} + \epsilon' > \left(\frac{3}{4} - \mu_{i,i+1}\right)$$

ובנוסף

$$\lambda_1 \geq \|b_1\| \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^n = \|b_1\| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon'\right)^n = \|b_1\| \cdot \frac{c_\epsilon}{2^{\frac{n}{2}}}$$

כאשר c_ϵ תלוי בבחירת ϵ ומקתיים