INSTITUT SAINT JEAN
Master 1 - Big Data & Business Analytics

Rapport de Travaux Pratiques
Simulation de la Croissance du Diamètre des Arbres par le Modèle de Gompertz Stochastique

Gilles Momeni

Janvier 2026

1 Introduction

L'étude des phénomènes de croissance biologique, tels que le diamètre des arbres, nécessite des modèles capables de capturer à la fois la saturation intrinsèque de la croissance et les perturbations environnementales aléatoires. Ce rapport présente l'implémentation et l'analyse de deux versions d'un modèle de Gompertz stochastique, où le bruit est modélisé par une loi exponentielle. L'objectif est de comparer la stabilité des trajectoires selon la mémoire du processus.

2 Formulation Mathématique

Le modèle de Gompertz est un modèle de croissance sigmoïde où le taux de croissance décroît exponentiellement avec le temps. Dans ce TP, nous discrétisons ce processus et y intégrons une composante stochastique multiplicative ε_k.

2.1 Modèle du second ordre (Version X_{k-2})

Dans cette version, la mémoire du processus s'étend sur deux périodes, lissant ainsi l'influence des valeurs passées par une moyenne arithmétique :

$$X_k = D^{(1-e^{-r})} \cdot \left(\frac{X_{k-1} + X_{k-2}}{2}\right)^{(e^{-r})} \cdot \varepsilon_{k-1}, \quad \forall k \geq 2 \tag{1}$$

Conditions Initiales :

- $X_0 = 15$ cm
- $X_1 = 17$ cm

2.2 Modèle du premier ordre (Version X_{k-1})

Cette version simplifiée ne dépend que de l'état immédiatement précédent, rendant le système plus sensible aux fluctuations instantanées :

$$X_k = D^{(1-e^{-r})} \cdot X_{k-1}^{(e^{-r})} \cdot \varepsilon_{k-1}, \quad \forall k \geq 1 \tag{2}$$

Condition Initiale :

- $X_0 = 15$ cm

2.3 Distribution du Bruit

Le terme de bruit ε_k suit une loi exponentielle de paramètre λ i.i.d (indépendant et identiquement distribué) :

- $\varepsilon_k \sim \text{Exp}(\lambda)$
- $E[\varepsilon_k] = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(\varepsilon_k) = \frac{1}{\lambda^2}$

3 Analyse des Paramètres

Symbole	Paramètre	Impact sur le processus
r	Taux de croissance	Vitesse de convergence vers l'asymptote D.
D	Diamètre asymptotique	Limite théorique moyenne du processus.
λ	Taux du bruit	Intensité et moyenne des chocs environnementaux.

Table 1: Description des paramètres du modèle.

4 Visualisation et Résultats

L'exécution des scripts produit des graphiques illustrant l'évolution du diamètre sur une période de 50 ans.

4.1 Analyse de la Version X_{k-2}

(Réf. graphique : gompertz_run_Xkminus2_r0.3_l0.7.png)
On observe une trajectoire plus "lissée". L'utilisation de la moyenne glissante agit comme un filtre passe-bas stochastique, réduisant l'impact immédiat des valeurs extrêmes de ε. La convergence vers D est stable malgré le bruit.

4.2 Analyse de la Version X_{k-1}

(Réf. graphique : gompertz_run_Xkminus1_r0.3_l0.7.png)
Cette version montre une volatilité accrue. Sans le lissage, chaque oscillation du bruit se traduit par un pic marqué. La trajectoire "saute" davantage autour de la ligne de référence.

5 Observations Critiques

- **Influence du taux r :** Pour de faibles valeurs (0.1), la croissance est lente. Proche de 0.98, le plateau est atteint quasi instantanément.
- **Rôle du paramètre λ :** Avec $\lambda = 0.7$, l'espérance du bruit est ≈ 1.42. Cela explique pourquoi les trajectoires fluctuent souvent au-dessus de D.

6 Conclusion

Le modèle X_{k-2} offre une représentation plus fidèle de l'inertie biologique d'un arbre, tandis que le modèle X_{k-1} illustre la sensibilité aux chocs externes.

Code source : GitHub - MAD4037 Gompertz TP