冬令营 Day 2 讲题

Tangjz

中国梦游协会

2019 年 1 月 21 日

情况概览

Problem	Solved (Div. 1)	Solved (Div. 2)
A. Erase Numbers I	—	33/422
B. Erase Numbers II	—	125/1204
C. Fibonacci Strikes Back	0/0	0/2
D. Honeycomb	0/4	0/0
E. Power of Function	1/18	0/11
F. Square Subsequences	0/6	0/11
G. Cosmic Cleaner	51/167	69/208
H. Quicksort	3/7	0/9
I. Linear Congruential Generator	—	0/0
J. Square Substrings	0/2	0/0
K. Sticks	25/370	12/387
L. Pyramid	3/37	0/15
M. Erase Nodes	0/1	—
N. Erase Numbers III	3/43	—
O. Routes	0/2	—

A. Erase Numbers I

- 最大化剩余数字，则需最小化删除数字的长度
- 枚举这样的两个数字，需要判断至多三段字符串拼接后的大小
- 后缀数组？

A. Erase Numbers I

- 最大化剩余数字，则需最小化删除数字的长度
- 枚举这样的两个数字，需要判断至多三段字符串拼接后的大小
- 后缀数组？
- 删除数字对字符串偏移量的影响 L 已知，预处理 LCP 即可，$lcp(i, i+L) \leftarrow lcp(i+1, i+L+1)$

B. Erase Numbers II

- 枚举留哪两个数字即可，$\mathcal{O}(n^2)$

B. Erase Numbers II

- 枚举留哪两个数字即可，$\mathcal{O}(n^2)$
- 枚举后面那个数就好了，$\mathcal{O}(n)$
- 爆 `long long`?

B. Erase Numbers II

- 枚举留哪两个数字即可，$\mathcal{O}(n^2)$
- 枚举后面那个数就好了，$\mathcal{O}(n)$
- 爆 `long long`? 答案最大 $10^{19} + 10^9$ $(< 2^{64})$

C. Fibonacci Strikes Back

- 首先求出 $F_m \equiv F_{F_n} \pmod{10^k}$ 的通解 $m \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$
- 然后求出 $F_n \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$ 的通解 $n \equiv n' \pmod{L(L(10^k, P))}$

C. Fibonacci Strikes Back

- 首先求出 $F_m \equiv F_{F_n} \pmod{10^k}$ 的通解 $m \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$
- 然后求出 $F_n \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$ 的通解 $n \equiv n' \pmod{L(L(10^k, P))}$
- 解数不超过 32，原因？

C. Fibonacci Strikes Back

- 首先求出 $F_m \equiv F_{F_n} \pmod{10^k}$ 的通解 $m \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$
- 然后求出 $F_n \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$ 的通解 $n \equiv n' \pmod{L(L(10^k, P))}$
- 解数不超过 32，原因？一元二次同余方程解数少
- 可以从 $k-1$ 的解推到 k 的解，且解数不会爆炸式增长
- 需要注意 F_{F_n} 在模 10^k 意义下有前导零的情况
- $\mathcal{O}(SDk)$, $S = 32$, $D = 10$

D. Honeycomb

- 每个点度数不超过 6 的两两最小割
- 不存在特殊点到特殊点的路径经过非特殊点，故答案不超过 6
- 建最小割树，求两两路径最小值
- $\mathcal{O}(6n(n+3n))$

E. Power of Function

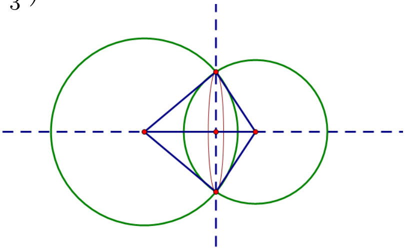
- $f^m(n) = 1$ 时 $(m+1)$ 等于 n 在 k 进制下的各位之和加上长度减一
- 使用数位 DP 的技巧划分区间分别构造最大 m 和相应唯一解，合并即可
- 分类讨论十种情况也可以通过
- $\mathcal{O}(\log_k n)$

F. Square Subsequences

- 枚举 len 考虑 $p_{\frac{m}{2}} \le len < p_{\frac{m}{2}+1}$ 的平方串子序列，转化为求两个字符串的最长公共子序列
- 令 $dp(i,j)$ 表示串 S 前 i 位与串 T 前 j 位的最长公共子序列长度，若 $S_i = T_j$ 则 $dp(i,j) = dp(i-1,j-1)+1$，否则 $dp(i,j) = \max(dp(i-1,j), dp(i,j-1))$
- $dp(i-1,j-1) \le dp(i,j-1)$, $dp(i-1,j) \le dp(i,j)$, $dp(i,j) \le dp(i-1,j-1)+1$，记 $f(i,j) = dp(i,j) - dp(i,j-1)$，利用位运算加速 DP 过程
- $\sum_{i=1}^{n} i(n-i) = \frac{n^3-n}{6}$, $\mathcal{O}(\frac{n^3}{6w})$, $w = 64$

G. Cosmic Cleaner

- 球体积公式：$V = \frac{4\pi}{3}R^3$
- 球缺体积公式：$V = \pi H^2(R - \frac{H}{3})$



H. Quicksort

- 自顶向下归纳证明，执行 `Quick(p, l, r, h)` 前，$p[\lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor]$ 取值为 $p[l], p[l+1], \cdots, p[r]$ 中第 k 大的概率均等，推出下一层执行 `Quick(p, l, k - 1, h - 1)` 时取值概率均等
- 逆序对的期望只与区间长度和深度有关，$\mathcal{O}(n^2)$
- $dp(len, 1) = \frac{len(len-1)}{4}$,
  $dp(len, h) = \frac{\sum_{k=1}^{len} dp(i-1,h-1)+dp(len-i,h-1)}{n}$

I. Linear Congruential Generator

- $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 中必然存在 $X_i = X_j$，且对于非负整数 k 有 $X_{i+k} = X_{j+k}$，故 X 的循环节长度不超过 m
- 在循环节前可能存在一部分不属于循环的内容
- $X_i \bmod (X_j + 1) = X_i - \left\lfloor \frac{X_i}{X_j+1} \right\rfloor (X_j + 1)$
- 枚举 $\left\lfloor \frac{X_i}{X_j+1} \right\rfloor$，枚举 $X_j + 1$，统计 X_i 即可
- $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{m} \frac{m}{i}) = \mathcal{O}(m \log m)$

J. Square Substrings

- 枚举平方串的长度 $2d$，在字符串上每隔 d 长度设置一个观察点，相邻两点间求后缀的最长公共前缀和前缀的最长公共后缀，如果覆盖长度达到 $2d$，则说明检查到一系列长度相等的平方串 (l, r, len)，对询问 (L, R) 产生的贡献是

  $$[len \leq R - L + 1](\max(r - R + 1, 0) - \max(l - L, 0))$$

- 平方串数量是 $\mathcal{O}(n)$ 的结论需要一系列证明，这里略去
- $\mathcal{O}((n + q) \log n)$

K. Sticks

- 枚举大小 12 的集合划分成 4 个元素大小 3 的集合所有方案，$\frac{12!}{3!3!3!3!4!} = 15400$
- 每个集合的贡献可以预处理

L. Pyramid

- 枚举一个顶点 (x, y)，枚举极角在 $[0, \frac{2\pi}{3})$ 的向量 $a + b\omega$ 表示一条边，$\omega^3 = 1$
- 若 (a, b) 有解，则解数为 $\binom{r-\max(a,b)-|a-b|+1}{2} - \binom{l-|a-b|}{2}$
- 对有解的 (a, b) 进行求和，答案是关于某些值的四次函数
- 前缀和 $\mathcal{O}(n)$，或者拉格朗日插值 $\mathcal{O}(1)$

M. Erase Nodes

- 树上的版本：(u,v) 产生贡献的概率是 $\frac{1}{dist(u,v)+1}$
- 外向树上的版本：(u,v) 产生贡献时至少有一条路径，

$\frac{1}{p+x+1}+\frac{1}{q+y+1}-\frac{1}{p+q+x+y}$

- 不走环的部分：树分治 + NTT
- 走环的部分：区间分治 + NTT
- $\mathcal{O}(n\log^2 n)$

N. Erase Numbers III

- 最大化剩余数字，则需最小化删除数字的长度
- 删除数字对字符串偏移量的影响已知，预处理 LCP
- $k = t + 1$ 最优解一定可以从 $k = t$ 的最优解得到
- $\mathcal{O}(n^2 D)$, $D = 10$

O. Routes

- 考虑团与团之间的最短路，团内点到其他团的距离不超过该最短路长度加一，点到点距离不超过团到团距离加二
- 点到点走团：枚举中间团，最短路长度只有 $2k$ 种，预处理高维前缀和之后利用容斥统计每种可能的长度对应的点对数量
- 点到点不走团：枚举铁路线
- $\mathcal{O}(nk + k^2 2^k)$