

hiho 挑战赛 Solution

jcvb

August 30, 2017

1 Numbers

这是一道非常容易的题目。

相当于用 k 条线段去覆盖所有点。把所有点排序，然后把相邻两个点的间距都拿出来，从短到长取 $n - k$ 段连接上就可以了。

复杂度 $O(n \log n)$ 。

2 Sequence

这是一道比较容易的 DP 题。

凸的序列是先递减后递增的，所以可以从最小值的位置开始，在两边按从小到大的顺序添加。 $f[i][j][k][l]$ 表示左端的两个数是 i 和 j ，右端的是 k 和 l 的方案数，这样就可以转移了。对于重复元素需要判一下，最小值有 k 个重复则乘上 $k!$ 。非最小值至多只能有 2 次重复。

这个 DP 是 $O(n^4)$ 的。

3 Inversions

假设 $s = t_1 \cdots t_k$ ， $k \geq 4$ ，其中 t_i 都是好串，且 k 取到最小值。则 t_1 有奇数个 1，否则 $t_1 t_2 t_3$ 的逆序对数和 $t_2 t_3$ 的逆序对数的奇偶性不同。所以 t_2 有偶数个 0，否则 $t_1 t_2$ 可以合并。同理， t_2 有奇数个 1， t_3 有偶数个 0。于是 $t_1 t_2 t_3$ 的逆序对数为奇数，矛盾。因此最小的 $k \leq 3$ 。

然后 DP 套 DP，状态是最右一段含有的 1 数量的奇偶性和逆序对数的奇偶性（共 4 种），分别记录最小段数就可以了。

4 Tree

一道计数题。

首先可以考虑一下怎么做 $k = 1$ 的情形，即要求同色点都不相邻。这个可以容斥，将结点划分成若干小组，每个小组内都是同色点，并且要求小组里的点连成一个子树，然后再把这些小子树连起来成为整棵树。因为是容斥，一个小组内如果有奇数条边（偶数个点）就要乘上一个 (-1) 。这里有个小结论，如果 n 个点被拆成小块的大小分别是 $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ ，那么连成树的方案数是 $n^{k-2} a_1 a_2 \cdots a_n$ ，可以用 Prüfer 序列证明。这样只要 DP 如何分组，然后状态里再多记一维当前有几组，就可以了。

然后再看 $k > 1$ ，如果预先分好组使得每组形成一个不超过 k 的同色连通块，那么上面的这个容斥还是可以用的。所以只要在里面再套一层分组就可以了，相当于要多跑一次 DP。

直接写的复杂度是 $O(n^3)$ 的，已经可以 AC 了。