

Exercício Individual 4

Luiz Georg

15/0041390

Opção V

September 7, 2021

```
[1]: import sympy as sp
from IPython.display import display, Math

def math(t):
    return display(Math(t))
```

1 Exercício Individual 4

Vasos de pressão

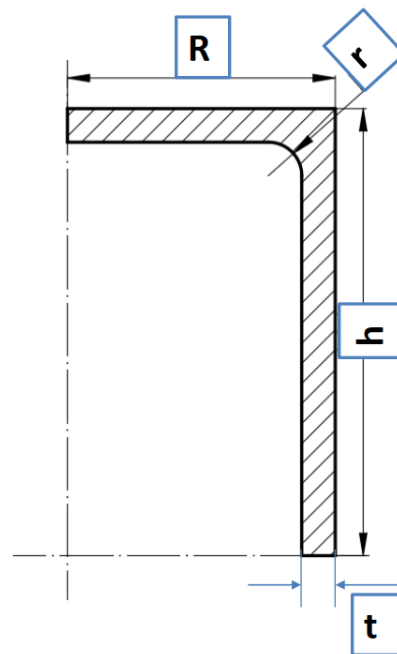
Find

- 1) the hoop, longitudinal and radial stress,
- 2) the hoop strain

in the cylindrical part of steel tank under pressure P . The $\frac{1}{4}$ of the longitudinal cross-section of the tank is shown in figure. Prove that numerical solution is the same as analytical one for thin-walled structures. Error must be less than 5%.

Determine

1. a tensão longitudinal, circunferencial (hoop) e radial
2. deformação específica circunferencial (hoop) para parte cilíndrica de tanque de aço com pressão interna P . A $\frac{1}{4}$ da seção longitudinal do tanque está mostrada embaixo. Compare os valores de tensões/deformações obtidos pelas simulações com cálculos analíticos para vasos de pressão com paredes finas. O erro não deve exceder 5%.



1.1 Cálculo analítico

Primeiro, vamos configurar os dados da questão:

```
[2]: # Valores que queremos encontrar
# s_long, s_hoop, s_r, e_r = sp.symbols("sigma_long, sigma_hoop, sigma_r, \u2192epsilon_r")

# Variáveis conhecidas do enunciado
R, h, t, r, P = sp.symbols("R, h, t, r, P")
# Módulo de Young, para calcular deformação
E, nu = sp.symbols("E, nu")

# Valores das variáveis conhecidas do enunciado (ver Opção)
opcao = { # Usar unidades consistentes; Aqui, vamos usar mm e MPa
    R: 160,
    h: 280,
    t: sp.Rational(55, 10), # fração ao invés de float para resultados exatos
    r: 10,
    P: 6,
    E: int(2e5), # Ansys Structural Steel
    nu: sp.Rational(3, 10), # Ansys Structural Steel
}
```

Para calcular as tensões, vamos utilizar as equações de vaso de pressão com paredes finas retiradas do livro:

$$\sigma_{hoop} = \frac{Pr}{t}$$

$$\sigma_{long} = \frac{Pr}{2t}$$

$$\sigma_{radi} = P$$

$$\epsilon_{hoop} = \frac{\sigma_{hoop}}{E} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

É importante notar, entretanto, que a derivação dessas fórmulas utilizou o valor do raio interno do vaso (equivalente à área na qual a pressão é aplicada). Em outras palavras, no nosso problema, $r = R - t$

```
[3]: s_hoop = P * (R - t) / t
math(
    r"\sigma_{hoop}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_hoop)}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_hoop.subs(opcao))}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_hoop.evalf(5, subs=opcao))}"
    r"\, \mathrm{MPa}"
)
```

$$\sigma_{hoop} = \frac{P(R-t)}{t} = \frac{1854}{11} = 168.55 \text{ MPa}$$

```
[4]: s_long = P * (R - t) / (2 * t)
math(
    r"\sigma_{long}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_long)}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_long.subs(opcao))}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_long.evalf(5, subs=opcao))}"
    r"\, \mathrm{MPa}"
)
```

$$\sigma_{long} = \frac{P(R-t)}{2t} = \frac{927}{11} = 84.273 \text{ MPa}$$

```
[5]: s_radi = P
math(
    r"\sigma_{radi}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_radi)}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_radi.subs(opcao))}"
    r" = "
    f"{sp.latex(s_radi.evalf(5, subs=opcao))}"
    r"\, \mathrm{MPa}"
)
```

$$\sigma_{radi} = P = 6 = 6.0 \text{ MPa}$$

```
[6]: e_hoop = s_hoop / E * (1 - nu / 2)
math(
    r"\epsilon_{hoop}"
    r" = "
    f"{sp.latex(e_hoop)}"
    r" = "
    f"{sp.latex(e_hoop.subs(opcao))}"
    r" = "
    f"{sp.latex(e_hoop.evalf(5, subs=opcao))}"
)
```

$$\epsilon_{hoop} = \frac{P(1 - \frac{\nu}{2})(R-t)}{Et} = \frac{15759}{22000000} = 0.00071632$$

1.2 Cálculo Numérico (Ansys)

Podemos também calcular os mesmos valores utilizando o método dos elementos finitos. Aqui vamos realizar esse cálculo com a ajuda do software Ansys.

Primeiramente, precisamos criar a geometria do problema. Aqui, vamos aproveitar as simetrias da geometria para diminuir o tamanho do problema; assim, dividimos a geometria ao longo dos 3 planos de simetria (escolhendo 2 planos de simetria radial perpendiculares). A geometria é mostrada na figura abaixo, e as dimensões foram configuradas de acordo com o desenho do enunciado da questão e a Opção V:

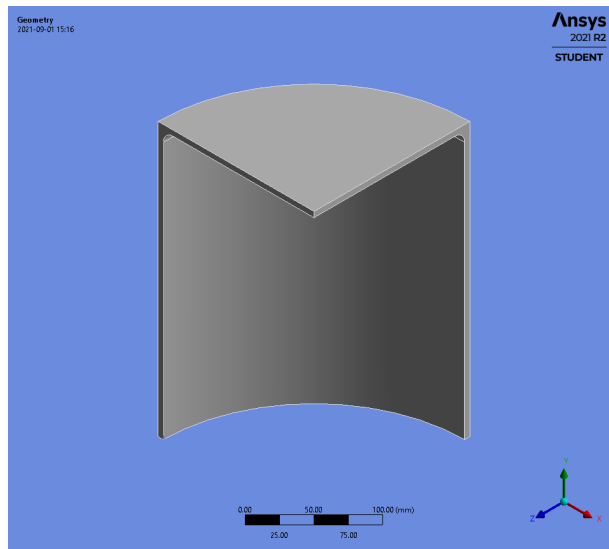
$$R = 160 \text{ mm}$$

$$h = 280 \text{ mm}$$

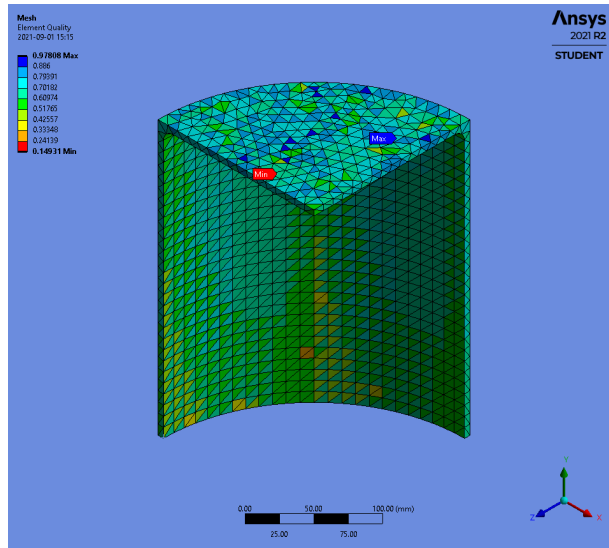
$$t = 5.5 \text{ MPa}$$

$$r = 10 \text{ mm}$$

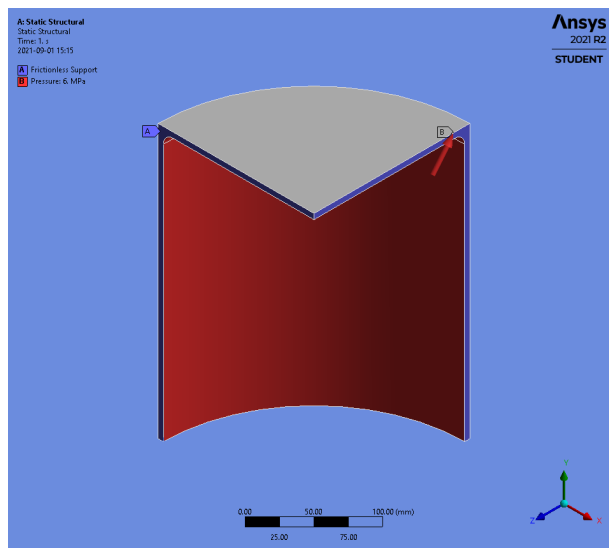
$$P = 6 \text{ MPa}$$



Então, utilizamos a geometria para gerar uma malha de elementos finitos. Na figura abaixo, podemos ver a malha resultante colorida pelo indicador Element Quality do software. Foram utilizadas as configurações de Face Meshing nas faces cilíndricas e Body Sizing (com tamanho igual à espessura t) para gerar a malha automaticamente.

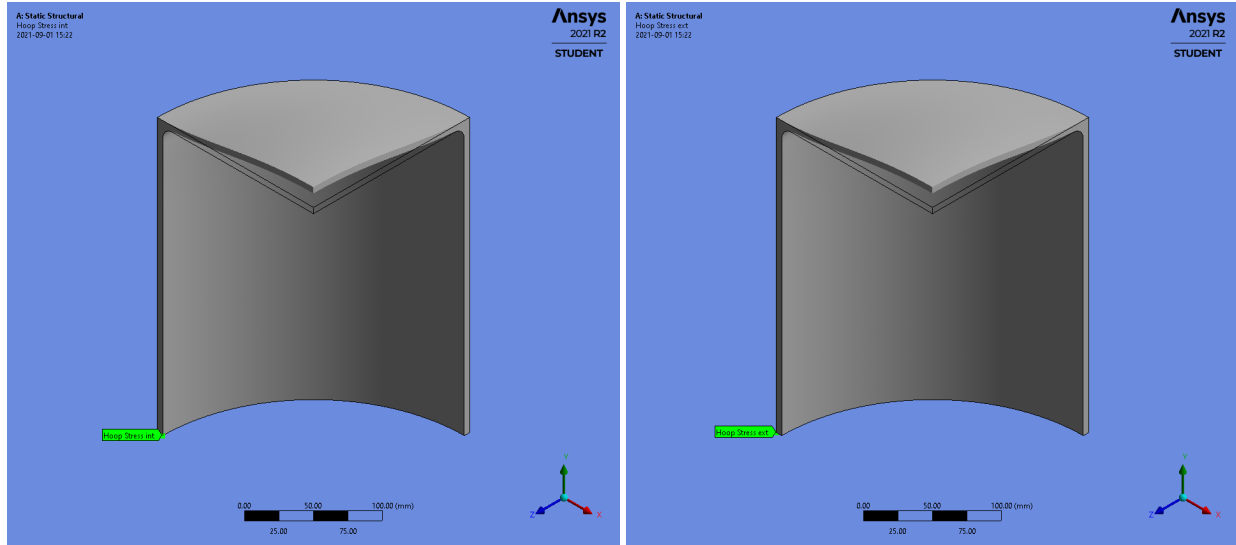


Com a malha pronta, vamos aplicar as condições de contorno para que o software resolva o problema. Precisamos aplicar as condições de simetria nas faces de corte, representando a impossibilidade de deformação ao longo das faces de simetria. No software, fazemos isso com a condição de Frictionless Support. Também precisamos aplicar a condição de pressão nas faces internas do vaso. Para isso, utilizamos a ferramenta Pressure. as condições aplicadas, então, podem ser vistas na figura abaixo (a condição de Frictionless Support também está aplicada na face de simetria inferior, não visível na figura).



O software então pode resolver o modelo para a malha e as condições de contorno configuradas. Para calcular os valores de tensões e de deformação relativa que queremos, precisamos investigar esses valores em um ponto específico da geometria/malha. Como queremos comparar nosso resultado com o método analítico das paredes finas, é interessante calcular esses valores ao longo da espessura t do vaso; entretanto, esses valores não são constantes ao longo da espessura. Para obter um resultado mais comparável à teoria, então, vamos calcular os valores em 2 pontos, um na face interna e outro na face externa do vaso. Os pontos escolhidos podem ser vistos nas figuras abaixo. A fim de obter um resultado final para comparar à teoria, vamos então calcular a média

desses valores, representando a aproximação de paredes finas que foi feita na teoria (σ_{radi} não será avaliada em média, pois a teoria supõe uma função descontínua; $\sigma_{radi} = P$ na face interna e $\sigma_{radi} = 0$ na face externa). Os resultados foram tabelados abaixo.



Ponto	σ_{hoop} [MPa]	σ_{long} [MPa]	σ_{radi} [MPa]	ϵ_{hoop} [mm/mm]
Exterior	165.53	82.779	0.033008	7.0343E-4
Interior	171.82	82.859	-6.1554	7.4402E-4
Média	168.67	82.819	-	7.2373E-4
Teoria	168.55	84.273	-6,0000	7.1632E-4

Para analisar a qualidade do resultado numérico, podemos calcular a margem de erro entre os valores encontrados e os valores teóricos calculados. Vamos analisar esse erro de 2 formas, utilizando o valor médio (mais condizente com a suposição de paredes finas) e utilizando o erro máximo (uma comparação mais real da utilidade da simplificação). Na tabela abaixo podemos ver esses erros para cada medida:

Erro	σ_{hoop} [%]	σ_{long}	σ_{radi}	ϵ_{hoop}
Médio	0.071	-1.725	-	1.034
Máximo	1.940	-1.773	2.590	3.867

Conforme pode ser visto na tabela de erros, os valores numéricos são extremamente próximos dos cálculos teóricos de paredes finas, validando nosso trabalho