Espaço de Estados

Reguladores quadráticos lineares

(LQR – linear quadratic regulator)

LQR: Forma alternativa à alocação de polos para projetar um controlador no formato $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, baseada em otimização/minimização.

Problema de regulação: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{0}$.

- $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{x}(t)$

Critério de desempenho:

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right)dt$$

$\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$:

- Matrizes de ponderação constantes, definidas pelo projetista
- $\boldsymbol{R}$ é definida positiva e $\boldsymbol{Q}$ é (semi) definida positiva
    - Quadradas, simétricas (hermitianas), de dimensões adequadas.
    - $\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) \geq 0$ e $\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) \geq 0$.
    - Assim, $J \geq 0$, sendo que J é um escalar.

Assumindo o sinal de controle como:

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

Tem-se que

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$$

e:

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t))dt = \int_0^\infty \boldsymbol{x}^T(t)(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)dt$$

Minimizar J é um **problema de otimização**, logo controlador obtido é um **controlador ótimo** (sob o critério em que foi otimizado)

A minimização é obtida ao escolher o valor de $\boldsymbol{K}$ que fornece o menor J possível. Problema possui solução analítica (veremos em breve).

Pode-se também utilizar o MATLAB:

K = lqr(A,B,Q,R)

Exemplo: para $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_n$ e $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}_r$:

$$J = \int_0^\infty (\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 + \|\boldsymbol{u}(t)\|^2)dt$$

- J é a integral da soma do quadrado do erro com o quadrado do sinal de controle.
- Exemplo:
  - Sinal de controle é uma voltagem aplicada a um atuador com resistência constante,
  - u^2 é uma medida proporcional à potência consumida.
  - Minimizar J é minimizar a integral da soma do erro quadrático com a potência consumida
    - Obs: assuma que a matriz identidade contém correção de dimensões, para tornar a soma possível.
  - Solução encontrada é um equilíbrio entre velocidade de resposta e energia consumida.

Exemplo

Seja o sistema abaixo:

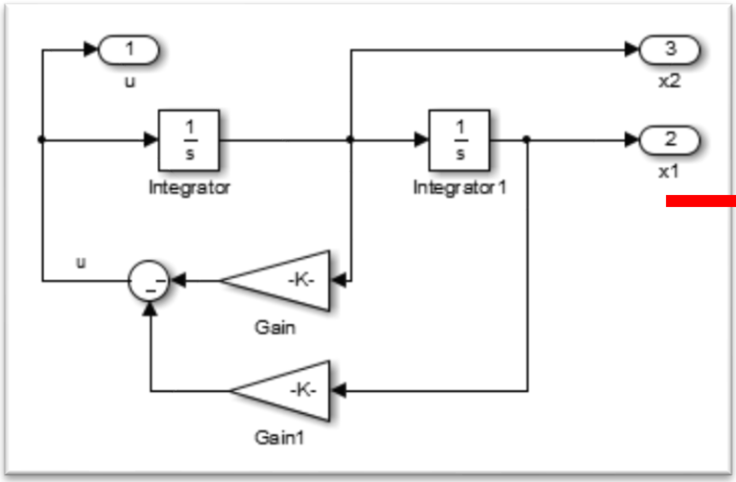
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

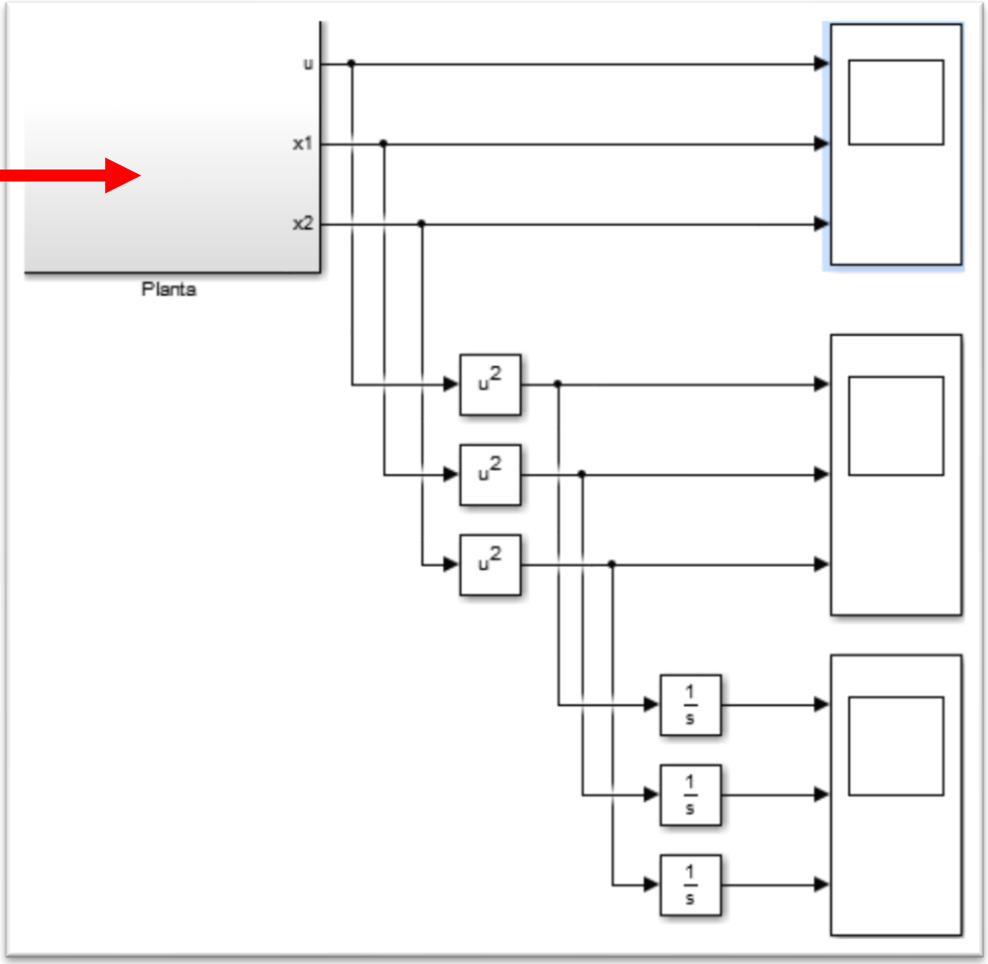
E as matrizes de ponderação:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

Projete um controlador ótimo utilizando o MATLAB

Exemplo

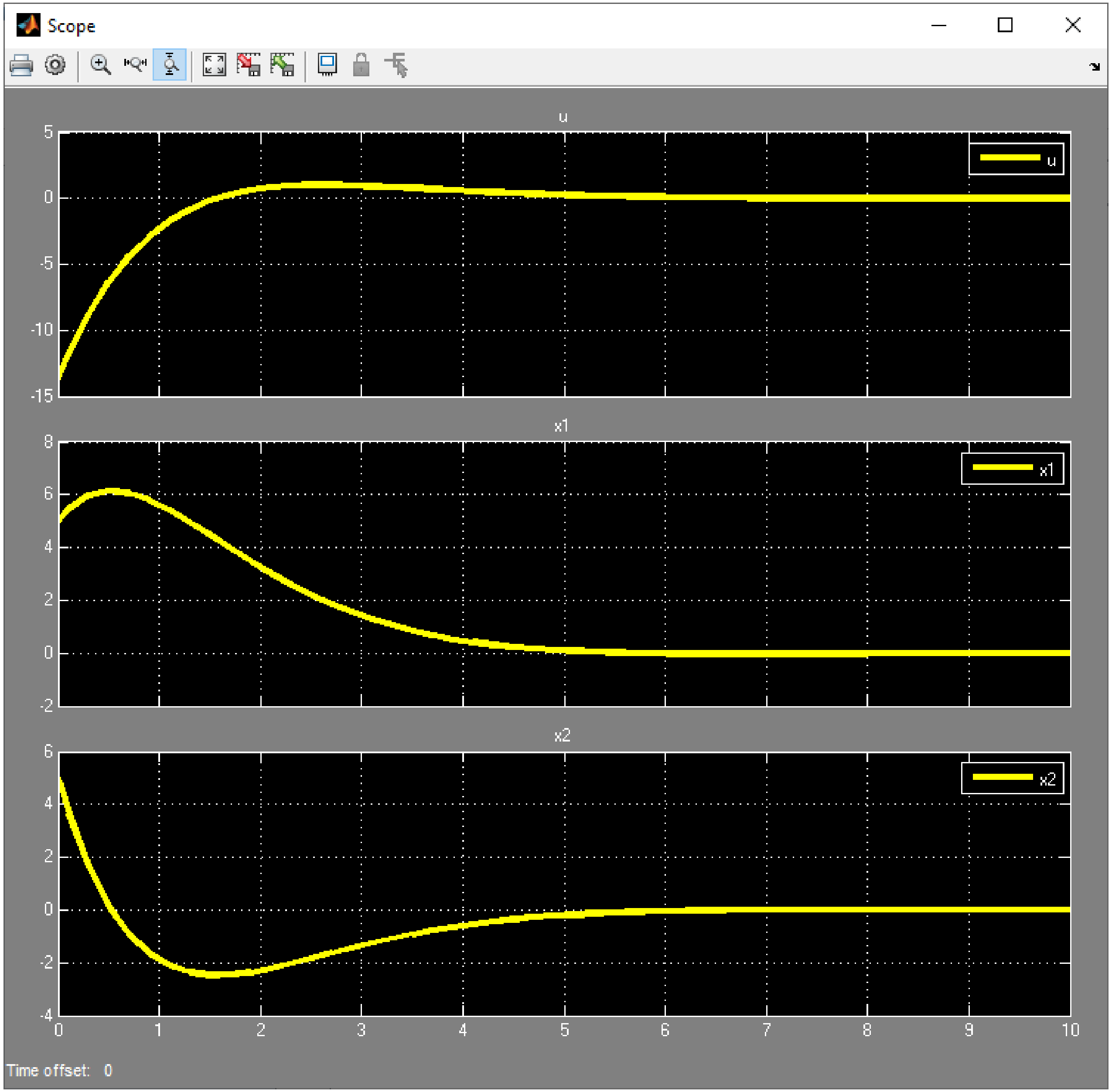





```
A = [0 1; 0 0];
B = [0;1];
Q = [1 0; 0 1];
R = 1;
K = lqr(A,B,Q,R)
eig(A-B*K)
```

```
A = [0 1; 0 0];
B = [0;1];
Q = [1 0; 0 1];
R = 1;
K = lqr(A,B,Q,R)
eig(A-B*K)


>> Aula8
K =
    1.0000    1.7321
ans =
  -0.8660 + 0.5000i
  -0.8660 - 0.5000i
```



Outro exemplo: $\boldsymbol{Q} = \alpha \boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{R} = \beta \boldsymbol{I}_r$

$$J = \int_0^{\infty} (\alpha \|\boldsymbol{x}(t)\|^2 + \beta \|\boldsymbol{u}(t)\|^2) dt$$

- Permite colocar pesos distintos entre estado e sinal de controle
- O que significa escolher um peso α maior que β?
- O que significa escolher um peso β maior que α?
- Faz sentido aumentar, ao mesmo tempo, os pesos α e β?

Outro exemplo: $\boldsymbol{Q} = \alpha \boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{R} = \beta \boldsymbol{I}_r$

$$J = \int_0^\infty (\alpha \|\boldsymbol{x}(t)\|^2 + \beta \|\boldsymbol{u}(t)\|^2) dt$$

- Permite colocar pesos distintos entre estado e sinal de controle
- O que significa escolher um peso α maior que β?

  - É mais importante que o estado convirja rápido para zero
- O que significa escolher um peso β maior que α?

  - É mais importante que o sinal de atuação **não seja** agressivo.
- Faz sentido aumentar, ao mesmo tempo, os pesos α e β?

  - Não. O valor absoluto de J não é relevante. Escolher valores grandes de α e β muda J, mas não o ponto de mínimo

A = [0 1; 0 0];

B = [0;1];

Q = 10 * [1 0; 0 1];

R = 1;

K = lqr(A,B,Q,R)

eig(A-B*K)

>> Aula8

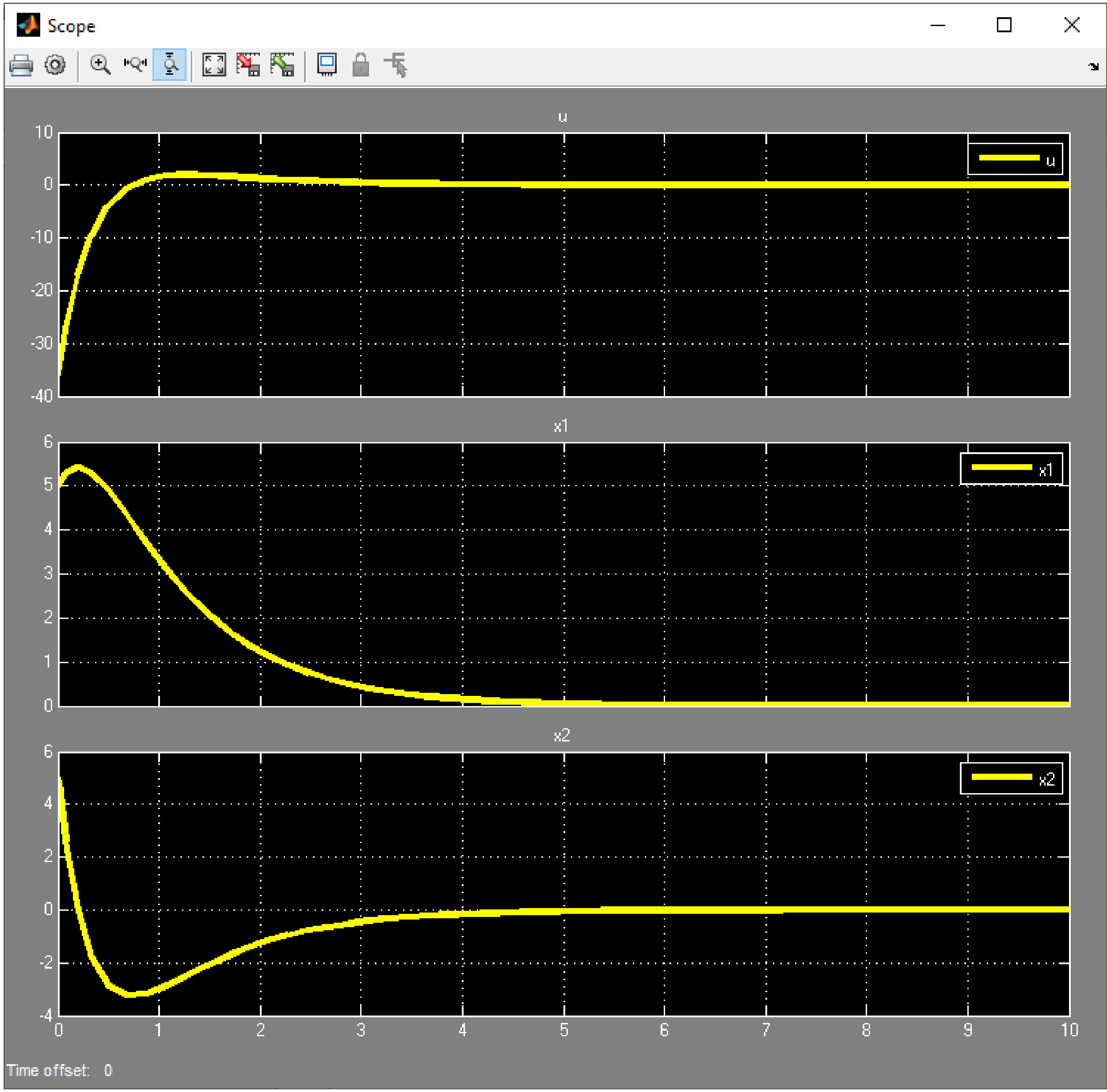
K =

3.1623 4.0404

ans =

-1.0616

-2.9788



A = [0 1; 0 0];

B = [0;1];

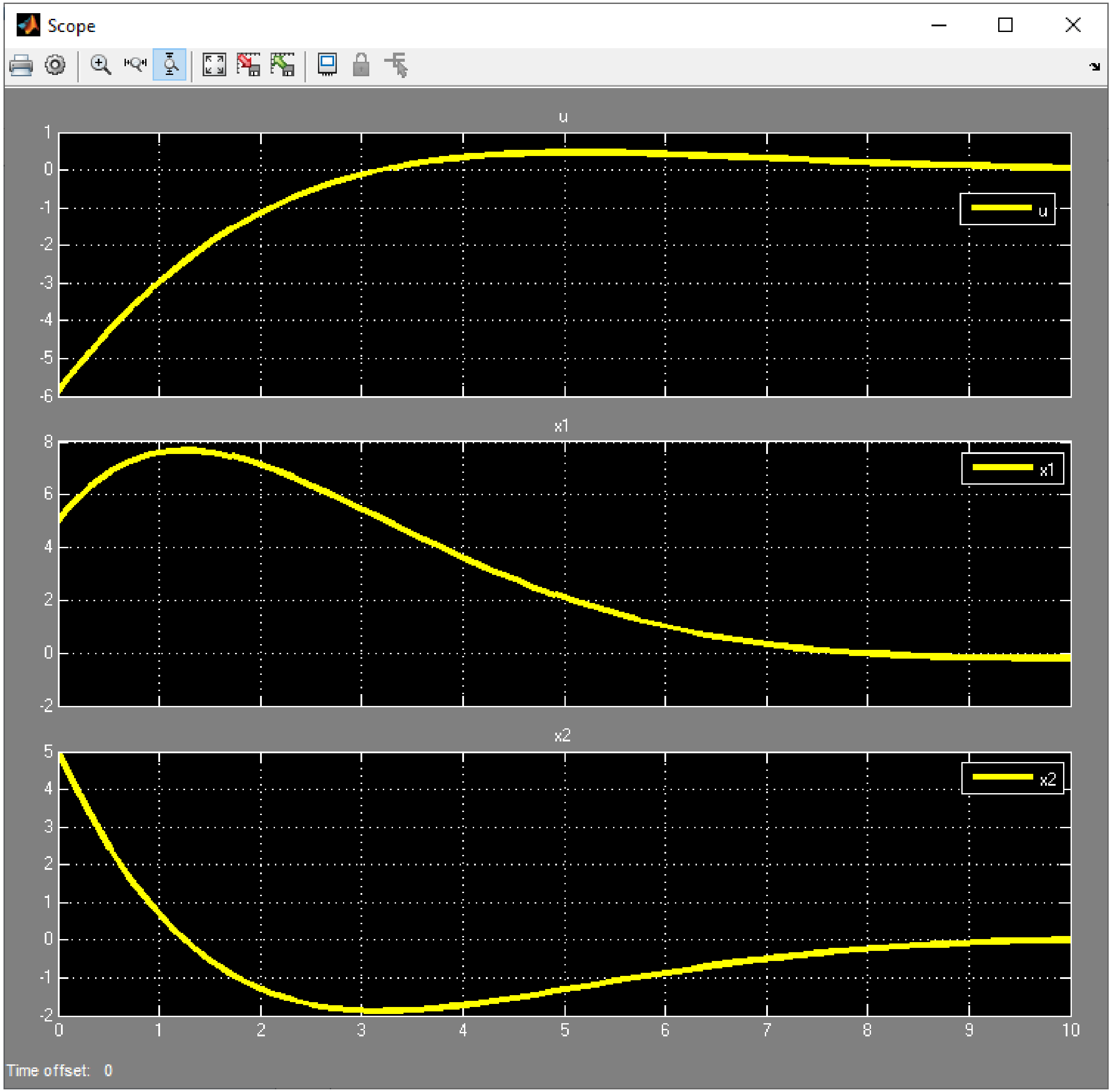
Q = [1 0; 0 1];

R = 10;

K = lqr(A,B,Q,R)

eig(A-B*K)

```
>> Aula8
K =
    0.3162    0.8558
ans =
  -0.4279 + 0.3648i
  -0.4279 - 0.3648i
```



A = [0 1; 0 0];

B = [0;1];

Q = 10*[1 0; 0 1];

R = 10;

K = lqr(A,B,Q,R)

eig(A-B*K)

>> Aula8

K =

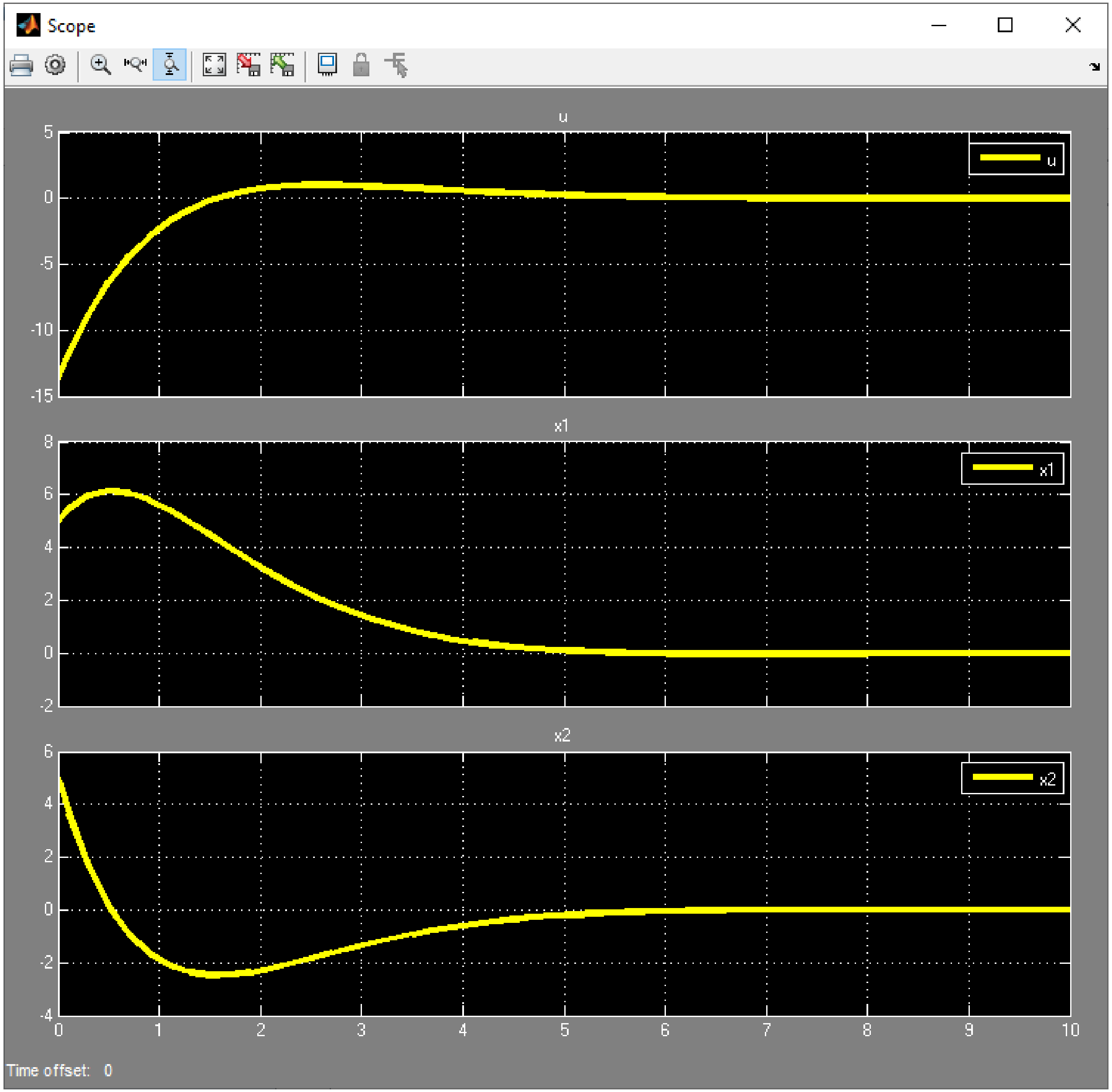
1.0000 1.7321

ans =

-0.8660 + 0.5000i

-0.8660 - 0.5000i

(veja que é igual ao caso inicial)



Outro exemplo: $\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}(r_1, r_2, \dots, r_r)$

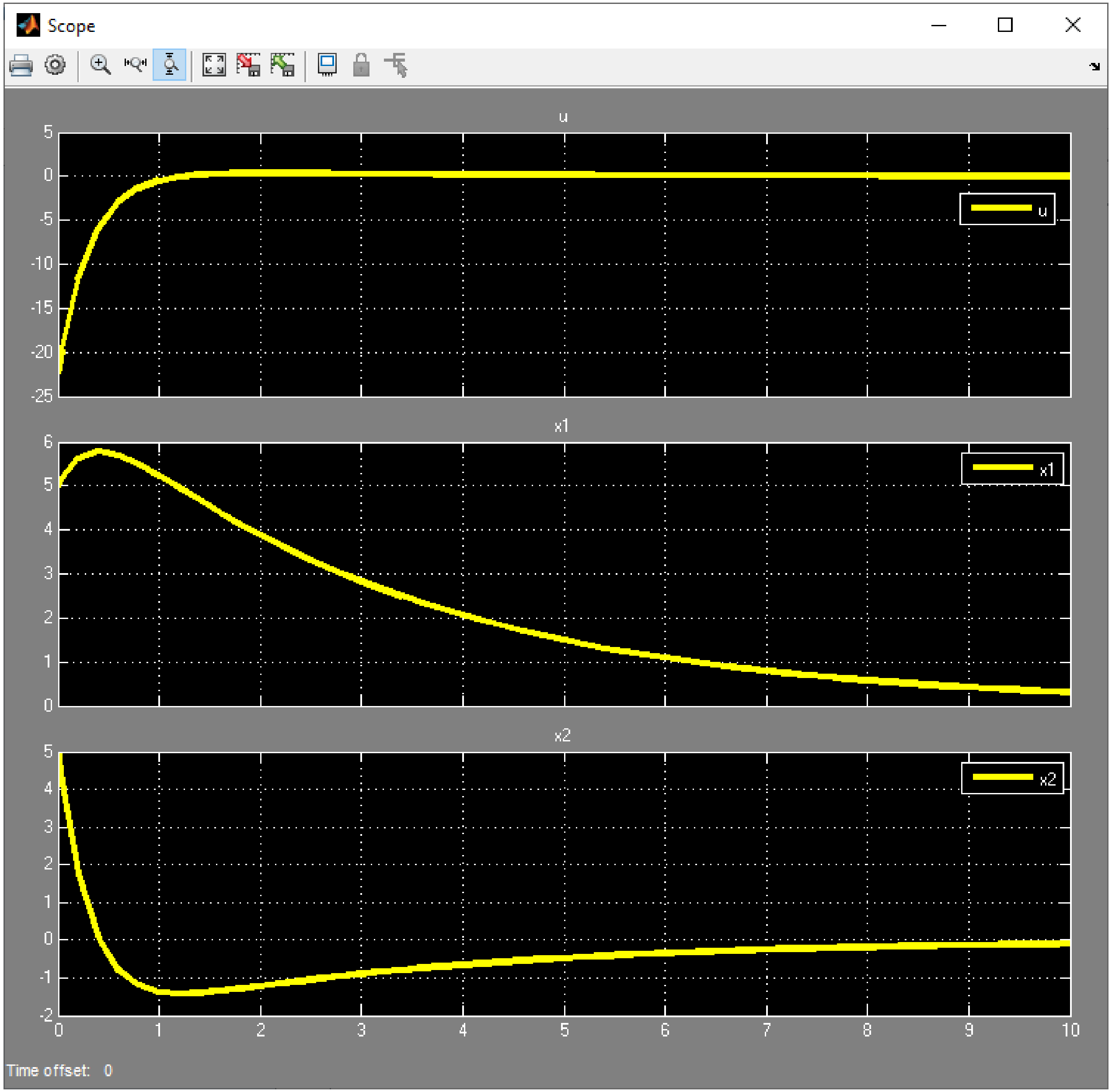
- Permite ponderar os estados entre si
  - Exemplo: em um avião, pode ser mais importante controlar a orientação do que altitude
- Permite ponderar os sinais de controle entre si
  - Exemplo: em um avião, pode ser preferível utilizar o aileron do que o leme para fazer curvas

Outro exemplo: $\boldsymbol{Q}$ e/ou $\boldsymbol{R}$ com elementos fora da diagonal

- Permite inserir relações cruzadas.
- Exemplo: penalidade extra se dois sinais de controle são acionados ao mesmo tempo com sinais opostos.
- Exemplo: penalizar dois estados errando com mesma intensidade para mesma direção. Por exemplo: posição e velocidade acima do esperado.

```
A = [0 1; 0 0];
B = [0;1];
Q = [1 0; 0 10];
R = 1;
K = lqr(A,B,Q,R)
eig(A-B*K)

>> Aula8
K =
    1.0000    3.4641
ans =
   -0.3178
   -3.1463
```



Exemplo

Comentários sobre as simulações:

- Simular com valor inicial não nulo
- Aumentar ganho do estado x_1 faz a posição chegar a zero mais rapidamente, ao custo de uma velocidade maior.
- Aumentar ganho do estado x_2 faz a velocidade se manter pequena rapidamente, mas posição demora a convergir.
- Aumentar R diminui sinal de atuação, prejudicando a convergência de ambos os estados
- Exemplo simples: controlador não é afetado se inserido um peso cruzado entre estados. Efeito cruzado será mostrado em aula futura (sistemas MIMO).

Solução analítica - Demonstração

É possível mostrar que

$$J = \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)$$

Em que $\boldsymbol{P}$ é uma matriz **definida positiva** a ser encontrada. A matriz $\boldsymbol{P}$ que, ao mesmo tempo, gera uma solução estável e que minimiza J é obtida resolvendo a equação abaixo(equação matricial reduzida de Ricatti):

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$$

Achando $\boldsymbol{P}$, a matriz $\boldsymbol{K}$ é obtida via

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}$$

Solução completa via MATLAB:

K = lqr(A,B,Q,R,N)

Que inclui um critério extra de efeito cruzado entre estados e entradas

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) + 2\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(t)\right)dt$$

Exemplo

Seja o sistema abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E as matrizes de ponderação:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad \mu \geq 0, \qquad R = 1$$

Projete um controlador ótimo

Exemplo

Seja o sistema abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E as matrizes de ponderação:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad \mu \geq 0, \qquad R = 1$$

Projete um controlador ótimo

Solução:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1][0\ 1]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}[p_{12} \quad p_{22}] + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - p_{12}^2 & p_{11} - p_{12}p_{22} \\ p_{11} - p_{12}p_{22} & \mu + 2p_{12} - p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Obtém-se então as 3 equações:

$$\begin{cases} 1 - p_{12}^2 = 0 \\ p_{11} - p_{12}p_{22} = 0 \\ \mu + 2p_{12} - p_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$p_{12} = 1, \qquad \mathrm{p}_{11} = \mathrm{p}_{22}, \qquad \mu + 2 - p_{22}^2 = 0 \rightarrow p_{22} = \sqrt{\mu + 2}$$

Assim:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu + 2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu + 2} \end{bmatrix}$$

E:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = [0\ 1]\begin{bmatrix} \sqrt{\mu + 2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu + 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\mu + 2} \end{bmatrix}$$

Comentários finais

- Estrutura do controlador é idêntica à da solução de alocação de polos. Tudo o que foi estudado em aulas anteriores pode ser utilizado:
    - Rastreador
    - Observador de estados
- Exemplos de aulas passadas podem ser revistos utilizando o regulador quadrático
- Dado que se está implementando um controlador, o sistema deve ser controlável
- É possível usar $y(t)$ ao invés de $x(t)$ na função custo:

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{y}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right)dt$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right)dt$$

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right)dt$$