Filtragem de Kalman linear

Sistema de determinação de posição e sistema de determinação de atitude simplificados para uma dimensão

Introdução

Objetivo da aula:

- Explicar filtragem de Kalman em modelo linear
- Exemplo motivador – sistema inercial auxiliado, simplificado para uma dimensão e separado em determinação de posição e determinação de atitude (orientação angular)
- Explicação inicial e motivação em filtragem de Kalman:

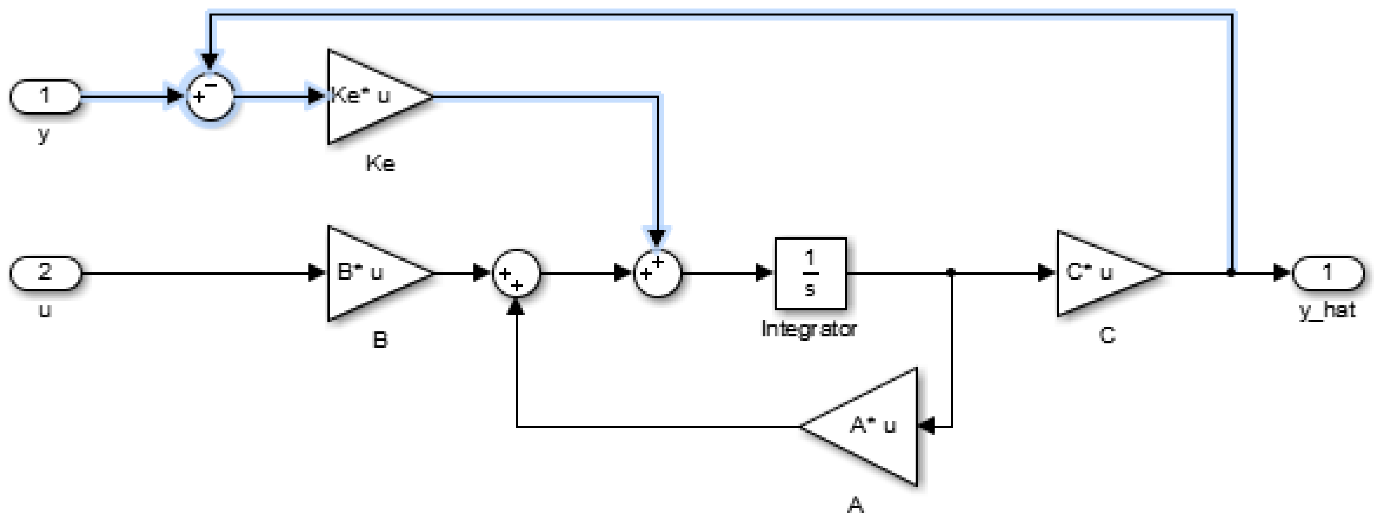
ftp://labattmot.ele.ita.br/ele/jacques/CursoNaveg/ApostilaNavegacao/CAP6_22setembro2010.pdf

Obtido do servidor de FTP:

ftp://labattmot.ele.ita.br/ele/jacques/CursoNaveg/ApostilaNavegacao/

Observador de estados

Observador de estados contínuo



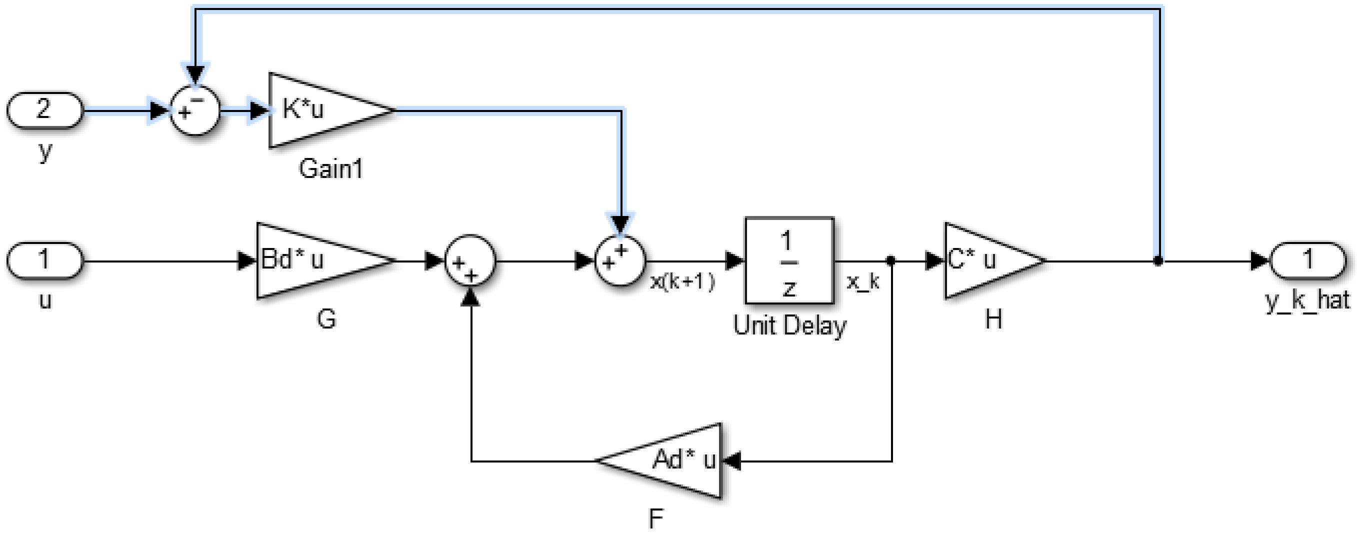
Em preto: modelo original - preditor

Em azul: correção obtida via comparação entre saída predita e medida

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})$$

Observador de estados

Observador de estados discreto:



$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})$$

Pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1}^{-} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_k & \text{(predição } - \text{ preto)} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_{k+1}^{-} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) & \text{(atualização } - \text{ azul)} \end{cases}$$

Filtro de Kalman

Filtro de Kalman:

- Observador discreto com ganho $\boldsymbol{K}_k$ variável no tempo
- Usado quando há incertezas (medida de sensores, modelo/entrada)
- Incerteza: representada pela covariância de uma variável aleatória
- Ganho $\boldsymbol{K}_k$: equilibra entre incerteza do modelo e incerteza da medida
- Resultado ótimo:
    - Estimativa não enviesada (média das estimativas é o valor verdadeiro)
    - Menor covariância possível

Aplicações

Fonte (alguns exemplos):

https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter#Applications

Orientação/atitude/pose:

- Attitude and heading reference system (AHRS) – horizonte artificial
- Jogos e realidade virtual que “usam giroscópio”

Rastreio/detecção de posição de alvos/posição própria:

- Visão computacional: rastreio de alvos na imagem
- Radar e monitoramento do espaço aéreo
- Estimação de órbita
- GPS (calcular posição a partir da recepção de sinais de satélite)

Aplicações

Navegação (posicionamento + orientação)

- Autopiloto
- Sistema de navegação inercial (INS) auxiliada
    - Avião
    - Carro
    - Submarino
- Robôs limpadores de tubulações (ex: petróleo)

Eletrônica

- Estimação de carga da bateria (State of Charge – SoC)
- Driver de controle de frequência variável para motores AC

Outros:

- Economia
- Processamento de imagens em medicina nuclear

Modelo discreto estocástico e variante no tempo

Modelo discreto estocástico (com variáveis aleatórias):

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{G}_{w,k} \boldsymbol{w}_k$$

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{H}_{w,k} \boldsymbol{v}_k$$

$\boldsymbol{w}_k$: ruído (incerteza) na entrada ou no modelo

$\boldsymbol{v}_k$: ruído (incerteza) na medida provinda de sensor

$\boldsymbol{G}_{w,k}$, $\boldsymbol{H}_{w,k}$: matrizes que distribuem o ruído entre os estados/medidas. Modelo usualmente é reescrito de forma a omitir essas matrizes

$\boldsymbol{F}_k$, $\boldsymbol{G}_k$, $\boldsymbol{H}_k$: já foram explicadas antes na aula sobre sistemas discretos

Por hipótese, $\boldsymbol{w}_k$ e $\boldsymbol{v}_k$ são desconhecidos e não podem ser previamente mensurados. As estatísticas dessas incertezas são definidas como

$$E\left[\boldsymbol{w}_k^T \boldsymbol{w}_j\right] = \boldsymbol{Q}_k \delta_{kj} \rightarrow \begin{cases} E\left[\boldsymbol{w}_k^T \boldsymbol{w}_k\right] = \boldsymbol{Q}_k \\ E\left[\boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{w}_j\right] = \boldsymbol{0}, \qquad \text{se } i \neq j \qquad \text{(ruído branco)} \end{cases}$$

$$E\left[\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_j\right] = \boldsymbol{R}_k \delta_{kj}$$

Equações do filtro de Kalman

Predição:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \boldsymbol{F}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} + \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{u}_k$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1|k} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{P}_{k|k} \boldsymbol{F}_k^T + \boldsymbol{G}_{w,k} \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{G}_{w,k}^T$$

Atualização:

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k+1} = \boldsymbol{H}_{k+1} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1} = \boldsymbol{y}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1}$$

$$\boldsymbol{S}_{k+1} = \boldsymbol{H}_{k+1} \boldsymbol{P}_{k+1|k} \boldsymbol{H}_{k+1}^T + \boldsymbol{R}_k$$

$$\boldsymbol{K}_{k+1} = \boldsymbol{P}_{k+1|k} \boldsymbol{H}_{k+1}^T \boldsymbol{S}_{k+1}^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} + \boldsymbol{K}_{k+1} \tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1|k+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_{k+1} \boldsymbol{H}_{k+1}) \boldsymbol{P}_{k+1|k}$$

Novo instante de tempo:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} \leftarrow \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k+1}$$
$$\boldsymbol{P}_{k|k} \leftarrow \boldsymbol{P}_{k+1|k+1}$$

Equações do filtro de Kalman

Definições:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} - \boldsymbol{x}_k$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = E\left[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}^T \tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}\right]$$

$$\boldsymbol{S}_k = E\left[\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \tilde{\boldsymbol{y}}_k\right]$$

Inicialização:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} \leftarrow \hat{\boldsymbol{x}}_0, \qquad \boldsymbol{P}_{k|k} \leftarrow \boldsymbol{P}_0$$

Hipóteses:

- Ruído branco – valor da variável aleatória em um instante é independente do valor em outro instante:

$$E\left[\boldsymbol{w}_k^T \boldsymbol{w}_j\right] = \boldsymbol{Q}_k \delta_{kj}$$

$$E\left[\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_j\right] = \boldsymbol{R}_k \delta_{kj}$$

- Fontes de incerteza não correlacionadas:

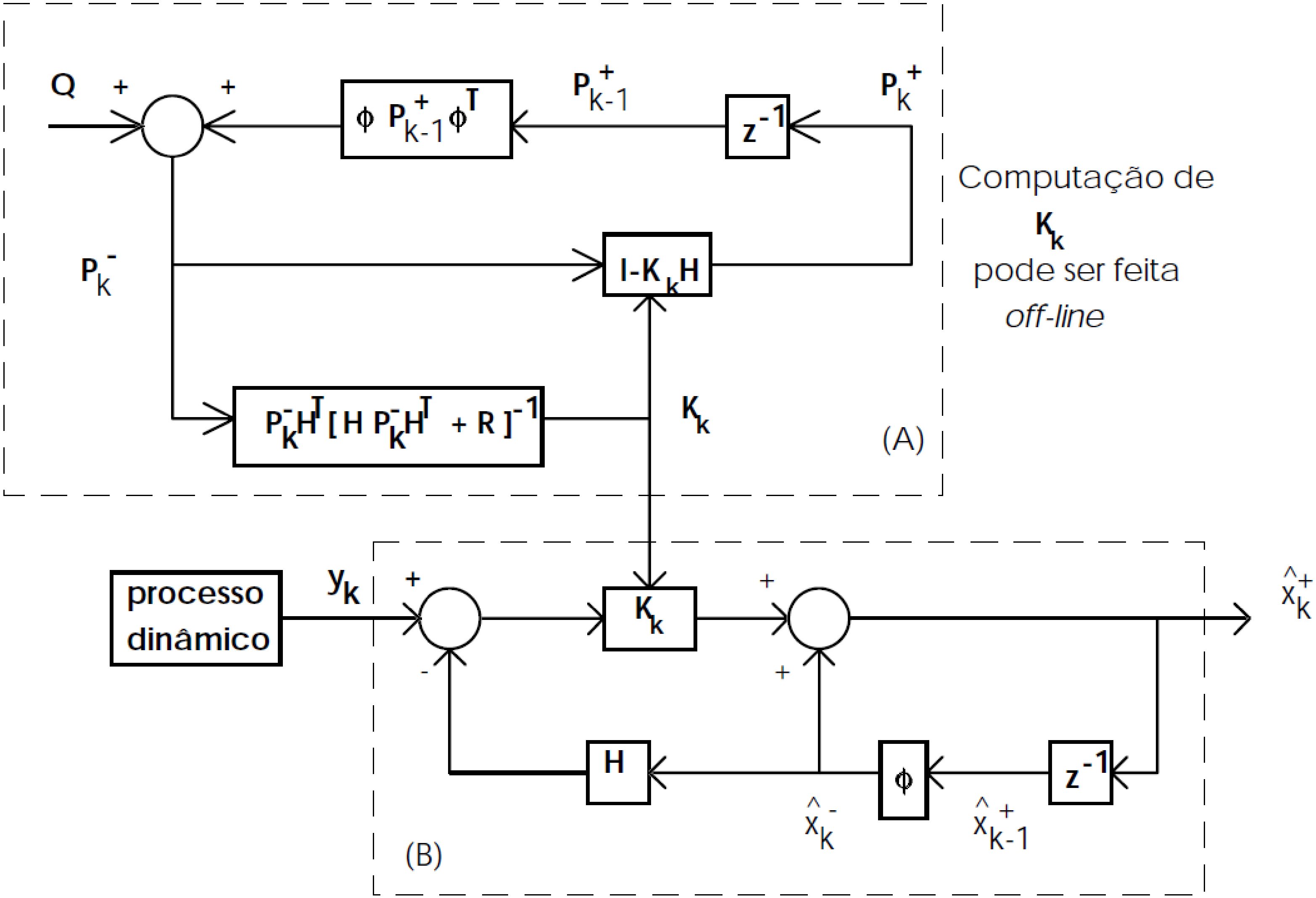
$$E\left[\boldsymbol{w}_k^T \boldsymbol{v}_j\right] = \boldsymbol{0}, \qquad E\left[\tilde{\boldsymbol{x}}_0^T \boldsymbol{v}_j\right] = \boldsymbol{0}, \qquad E\left[\tilde{\boldsymbol{x}}_0^T \boldsymbol{w}_j\right] = \boldsymbol{0}$$

Usando o filtro de Kalman

Supondo o filtro já implementado, o que um "usuário" deve fornecer de informações:

- Modelo (determinístico): $\boldsymbol{F}_k, \boldsymbol{G}_k, \boldsymbol{H}_k$
    - Uma única vez, se invariante no tempo.
    - A cada iteração, se variável
- Modelo (parte estocástica): $\boldsymbol{G}_{w,k}$, $\boldsymbol{H}_{w,k}$, $\boldsymbol{Q}_k$, $\boldsymbol{R}_k$
    - Uma única vez, se invariante no tempo.
    - A cada iteração, se variável
- Inicialização: $\hat{\boldsymbol{x}}_0$, $\boldsymbol{P}_0$
    - Uma única vez. Inicia algoritmo iterativo.
    - Exemplo: pode ser medido com sensor, ou informado por um operário que utiliza o equipamento que contém o filtro
- Medidas de sensores: $\boldsymbol{y}_k$
    - Sempre que disponíveis / a cada iteração

Usando o filtro de Kalman

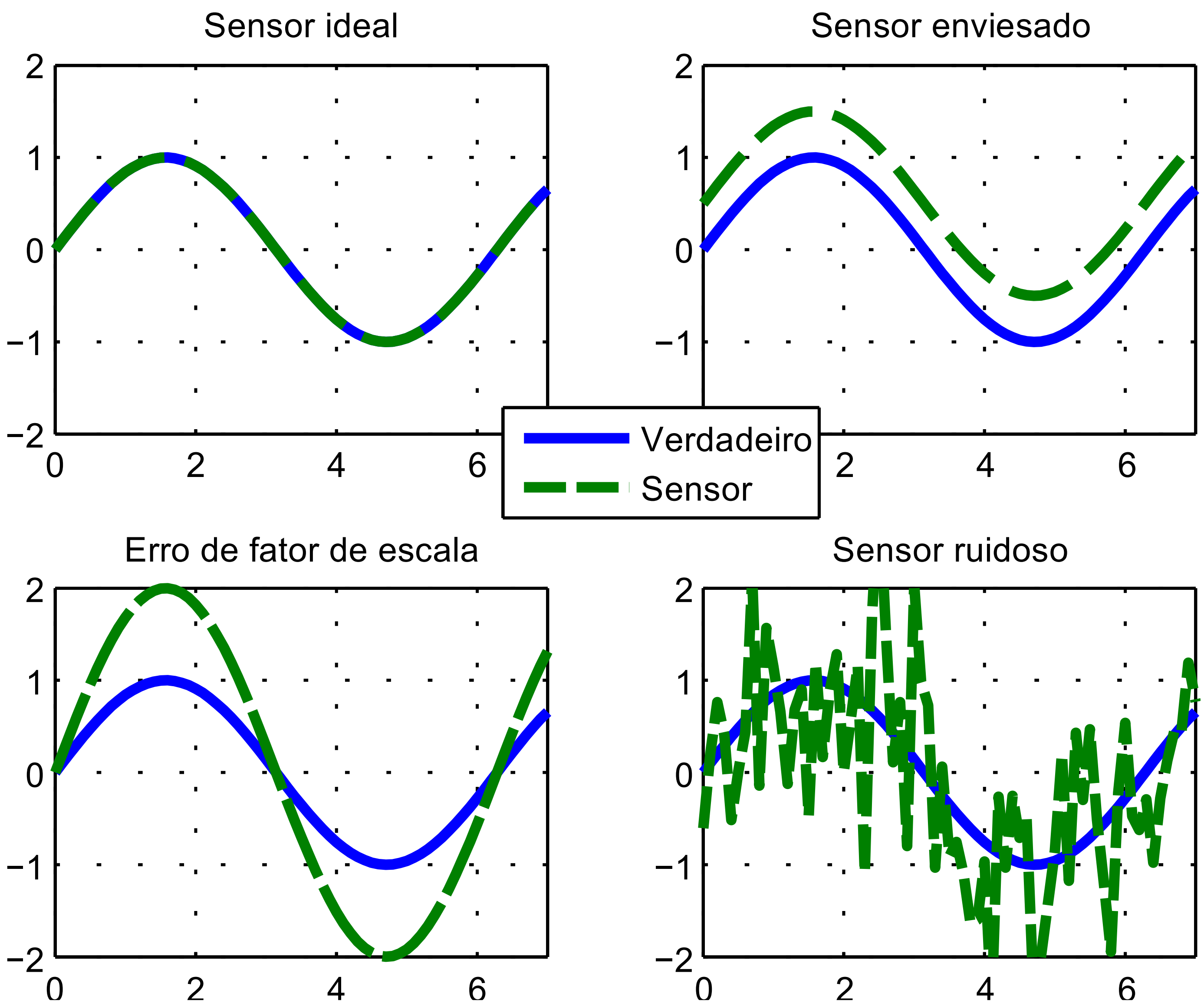


Computação de K_k pode ser feita *off-line*

Sensores

Modelo mais realista

Sensores não ideais



Sensor não ideal

Modelo de medida – sensor com ruído e viés

$$y_{m,k} = y_k + b_{y,k} + v_{y,k}, \qquad b_{y,k+1} = b_{y,k} + v_{by,k}$$

y_m: valor medido

b_y: viés de medição – erro constante / varia pouco no tempo

v_y: ruído branco de média nula e variância r_y

v_{by}: ruído branco de média nula e variância r_{by}.

- Efeito: viés faz “passeio aleatório”

Outras fontes de erro, que não estudaremos:

- Fator de escala: $y_m = (1 + a)y_k$
- Efeito de outros estados na medida $y_{m,k}$. Por exemplo, um sensor de medida de aceleração ser afetado por velocidade angular ou temperatura.
- v_y é ruído colorido ao invés de branco

Sensor não ideal

Modelo do sensor:

$$y_{m,k} = y_k + b_{y,k} + v_{y,k}$$
$$b_{y,k+1} = b_{y,k} + v_{by,k}$$

Se sensor de boa qualidade e bem calibrado, $b_{y,k}$ e $v_{y,k}$ são capazes de embutir indiretamente outras fontes de erro.

Estudaremos inicialmente o caso mais simples (medida não enviesada):

$$y_{m,k} = y_k + v_{y,k}$$

E, depois, medida com viés:

$$y_{m,k} = y_k + b_{y,k} + v_{y,k}$$

- Constante: $b_{y,k+1} = b_{y,k}$
- Passeio aleatório: $b_{y,k+1} = b_{y,k} + v_{by,k}$

Exemplo de aplicação

Modelo duplo integrador

Estimação de posição

Modelo duplo integrador

Suponha que queremos saber a posição de um carro em um trajeto retilíneo (o carro não rotaciona, não faz curvas, não capota).

Possibilidade 1:

Modelo complicado, envolvendo intensidade que pedal é apertado, marcha, rotação do motor, peso do carro, resistência aerodinâmica, etc, que irá resultar em uma força resultante aplicada para frente (ou para trás), que por sua vez é convertida em aceleração, que pode ser integrada em velocidade e posição.

Possibilidade 2:

Utilizar acelerômetro: um sensor capaz medir acelerações. Medida do sensor é integrada duas vezes para obter posição.

Modelo duplo integrador

A **aceleração**, medida por **acelerômetro**, é considerada **entrada** do sistema. Ou seja, o acelerômetro fornece

$$\hat{u}_k = u_k + w_{u,k}$$

- $w_{u,k}$ é ruído branco e não enviesado, em que a covariância do ruído é:

$$E\left[w_{u,k} w_{u,j}\right] = q_u \delta_{kj}, \qquad \delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$$

- Veja que isso é um caso especial. Sensores usualmente fornecem y_k, enquanto que u_k é assumido conhecido
  - Exemplo: na possibilidade 1, computador de bordo sabe o quanto acionou o pedal
- Nesse caso especial, o ruído de sensor será considerada fonte de erro do modelo (matriz **Q**)
  - Em outros sistemas, o erro provém de linearizações, discretizações, incertezas de parâmetros, etc.

Modelo duplo integrador

Propagação:

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} (u_k + w_{u,k})$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \boldsymbol{G}\, u_k + \boldsymbol{G}_w\, w_{u,k}$$

Seja

$$\bar{\boldsymbol{w}}_{u,k} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} w_{u,k}$$

$$E\left[\bar{\boldsymbol{w}}_{u,k} \bar{\boldsymbol{w}}_{u,j}^T\right] = \boldsymbol{G}_w E\left[w_{u,k} w_{u,j}\right] \boldsymbol{G}_w^T = \boldsymbol{G}_w q_u \boldsymbol{G}_w^T \delta_{kj} = \boldsymbol{Q} \delta_{kj}$$

Então

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \boldsymbol{G} u_k + \bar{\boldsymbol{w}}_{u,k}$$

Modelo duplo integrador

Medição:

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + v_{y,k}, \qquad E\left[v_{y,k} v_{y,j}\right] = r_y \delta_{kj}$$

A medida pode ser provinda, por exemplo, de um GPS ruidoso sem viés (na prática, todo GPS é enviesado e seu ruído é colorido, mas estamos ignorando esses efeitos aqui)

Veja também que se costuma assumir que os ruídos de cada sensor são independentes, o que implica em $E\left[w_{u,k} v_{u,j}\right] = 0$.

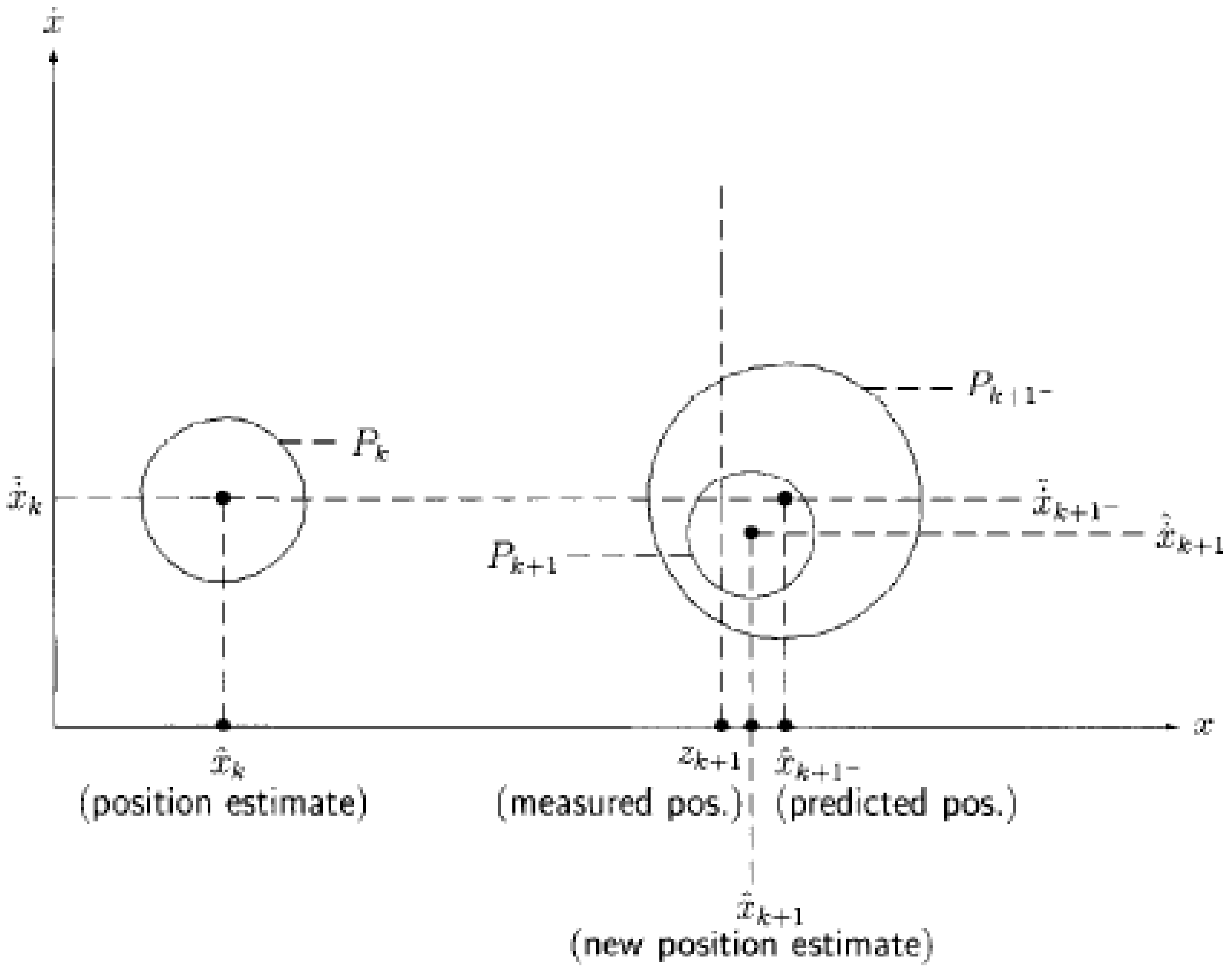
Avaliaremos também:

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_{y,k}, \qquad E\left[\boldsymbol{v}_{y,k} \boldsymbol{v}_{y,j}\right] = \begin{bmatrix} r_{y1} & 0 \\ 0 & r_{y2} \end{bmatrix} \delta_{kj} = \boldsymbol{R} \delta_{kj}$$

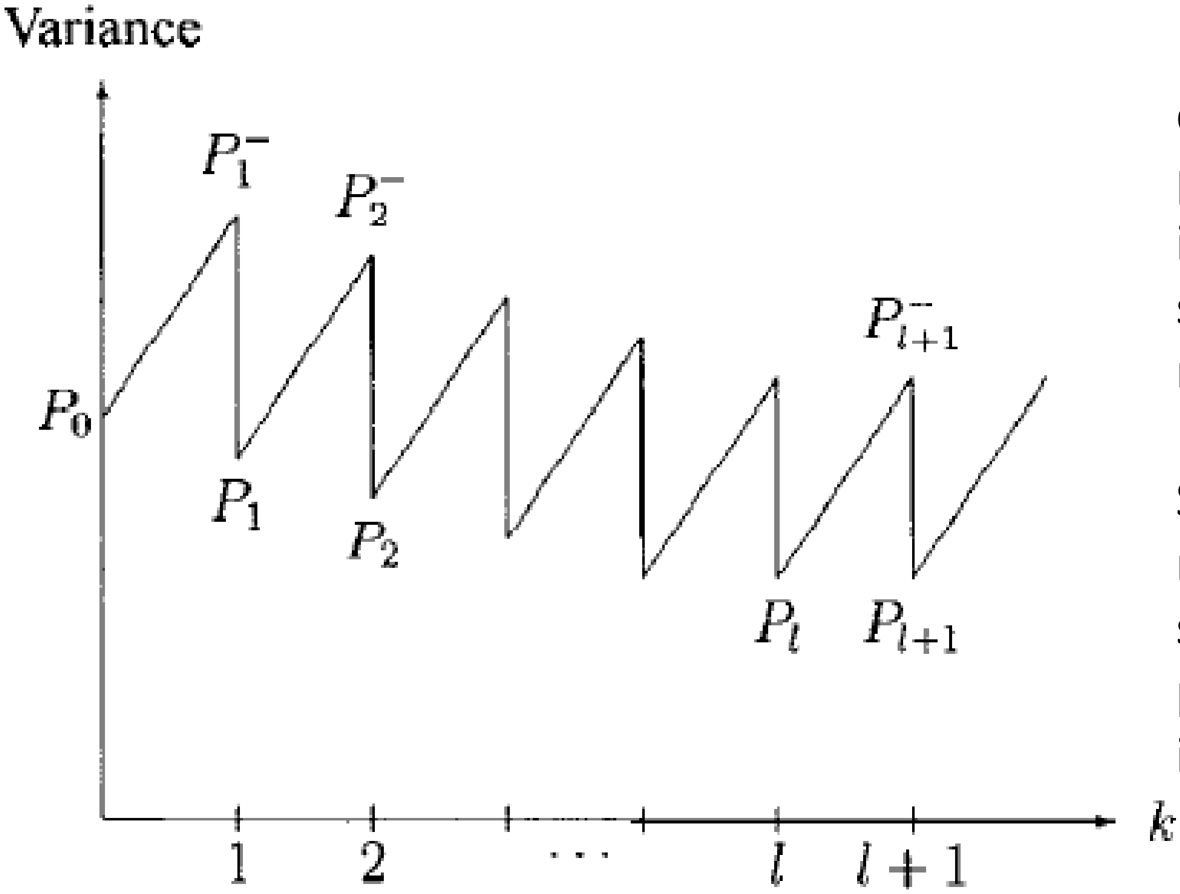
(Exemplos e explicações dadas em sala, via exemplo no Simulink)

- Comparar com observador de estados

Exemplo predição/atualização – Bar-Shalom (2004)



Exemplo predição/atualização – Bar-Shalom (2004)



No duplo integrador com erro de modelo, a etapa de predição sempre aumenta a incerteza, mas isso nem sempre ocorre com outros modelos.

Se A tem autovalores negativos e Q é suficientemente pequeno, a predição pode reduzir incerteza.

Sensores com taxa de amostragem diferentes

A etapa de atualização pode funcionar com

- Todos os sensores,
- Apenas alguns,
- Nenhum (nesse caso ela não faz nada)

Para isso, basta implementar a atualização utilizando matrizes R e H adequadas

Ver exemplo Simulink mostrado em sala

Sensores com viés

O filtro de Kalman pode estimar viés de sensores se viés for inserido no modelo.

Deve-se verificar, entretanto, se modelo continua observável após ser aumentado para estimar viés.

Ver exemplo em sala, via Simulink.

Modelo aumentado:

$$\begin{bmatrix} p_{k+1} \\ v_{k+1} \\ b_{a,k+1} \\ b_{p,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & -T^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ v_k \\ b_{a,k} \\ b_{p,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{u,k} \\ w_{a,k} \\ w_{p,k} \end{bmatrix}$$

Medição:

$$\boldsymbol{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_{y,k}, E[\boldsymbol{v}_{y,k} \boldsymbol{v}_{y,j}] = \begin{bmatrix} r_{y1} & 0 \\ 0 & r_{y2} \end{bmatrix} \delta_{kj} = \boldsymbol{R} \delta_{kj}$$

Veja que exemplo mostra **dois casos**: viés no modelo e na medida

Estimação de atitude unidimensional

Nos exemplos anteriores, foi utilizado um acelerômetro, sensor que mede aceleração linear, para estimar posição linear: modelo duplo integrador.

Numa analogia em sistemas que rotacionam, utiliza-se um girômetro (ou giro), que é um sensor que mede **velocidade** angular. Com isso, tem-se um modelo de integrador simples.

Nessa aula, filtragem de Kalman linear, assumiremos que um potenciômetro ou *encoder* mede a posição angular. Também assumiremos, para simplificação, que $0° \neq 360°$

Propagação:

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + Tu_k + Tw_{u,k}, \qquad E\left[w_{u,k}w_{u,j}\right] = q_u\delta_{kj}$$

Medição:

$$y_k = x_{1,k} + v_{y,k}, \qquad E\left[v_{y,k}v_{y,j}\right] = r_y\delta_{kj}$$

(Exemplo em Simulink, incluindo giro com viés)

Estimação de atitude unidimensional

Observação: há uma confusão na nomenclatura. A palavra giroscópio (gyroscope), que normalmente é mais usada que girômetro/giro, pode significar dois equipamentos completamente distintos

- Girômetro (gyro): sensor que mede rotação angular. Por exemplo, recentemente o satélite Hubble teve um problema em seu girômetro e, por isso, sua estimação de atitude ficou prejudicada (não sabia para onde estava apontando)

http://hubblesite.org/news_release/news/2018-50

- Roda de reação (reaction wheel): mecanismo que armazena momento de rotação em um disco. Pode ser utilizado como sensor de posição angular, ou como atuador em satélites. Por exemplo, o satélite Kepler teve sua roda de reação danificada. Ele sabe para aonde está apontando, mas não consegue apontar exatamente para onde quer (missão K2) - comparar versão em inglês com português

https://pt.wikipedia.org/wiki/Kepler_(sonda_espacial)

https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_(spacecraft)

Consistência estatística

Fontes:

Slides de aula:

ftp://labattmot.ele.ita.br/ele/jacques/CursoNaveg/ApostilaNavegacao/CAP7_Simula%E7%E3oMonteCarlo_TestesConsist%EAnciaEstat%EDstica_11Junho2010.pdf

Livro:

Bar-Shalom, Yaakov, X. Rong Li, and Thiagalingam Kirubarajan. *Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software*. John Wiley & Sons, 2004.

Consistência estatística

Se:

1) Sistema linear,
2) Modelo do sistema completamente acurado,
3) Ruídos brancos e gaussianos

Então a seguinte hipótese nula H_0 é válida: erro de estimativa $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ é uma variável gaussiana, com média nula (não enviesada) e variância dada por $\boldsymbol{P}_{k|k}$.

Critério NEES (*normalized estimation error squared):*

Seja:

$$\varepsilon_k = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}$$

Se H_0 é válida, então ε_k é chi-quadrado, ou seja, $\varepsilon_k \sim \chi^2_{n_x}$, em que n_x é o número de estados. Então

$$E[\varepsilon_k] = n_x$$

Consistência estatística

Critério NEES (*normalized estimation error squared):*

$$\varepsilon_k = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} \qquad H_0: \varepsilon_k \sim \chi_{n_x}^2$$

Seja α a taxa de falso alarme

Teste estatístico – intervalo unilateral:

$$r = \left(\chi_{n_x}^2\right)^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$P\{\varepsilon_k < r | H_0\} = 1 - \alpha$$

- Hipótese nula é rejeitada se covariância verdadeira é maior que a estimada (filtro erra mais do que ele diz errar)

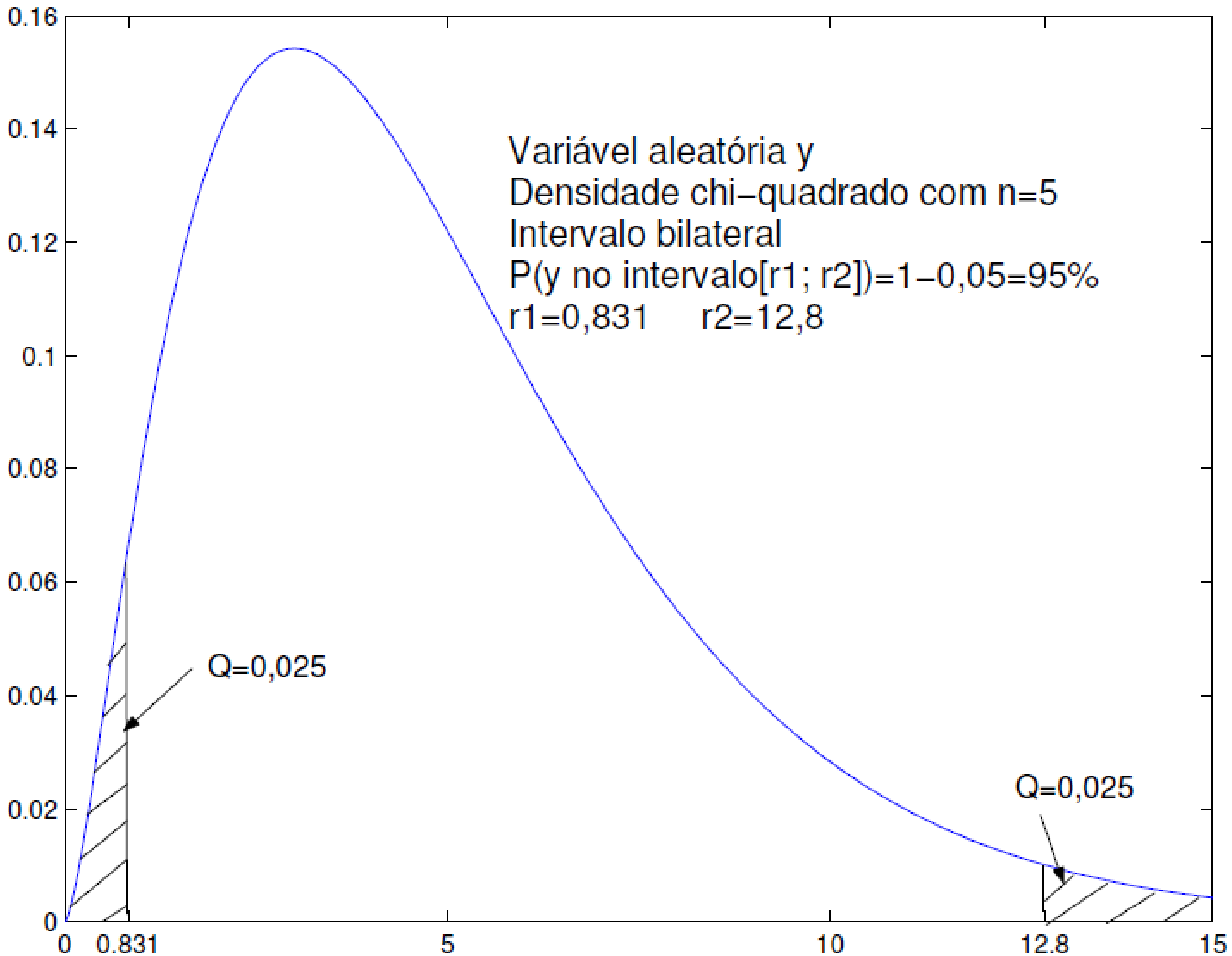
Teste estatístico – intervalo bilateral:

$$r_1 = \left(\chi_{n_x}^2\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad r_2 = \left(\chi_{n_x}^2\right)^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

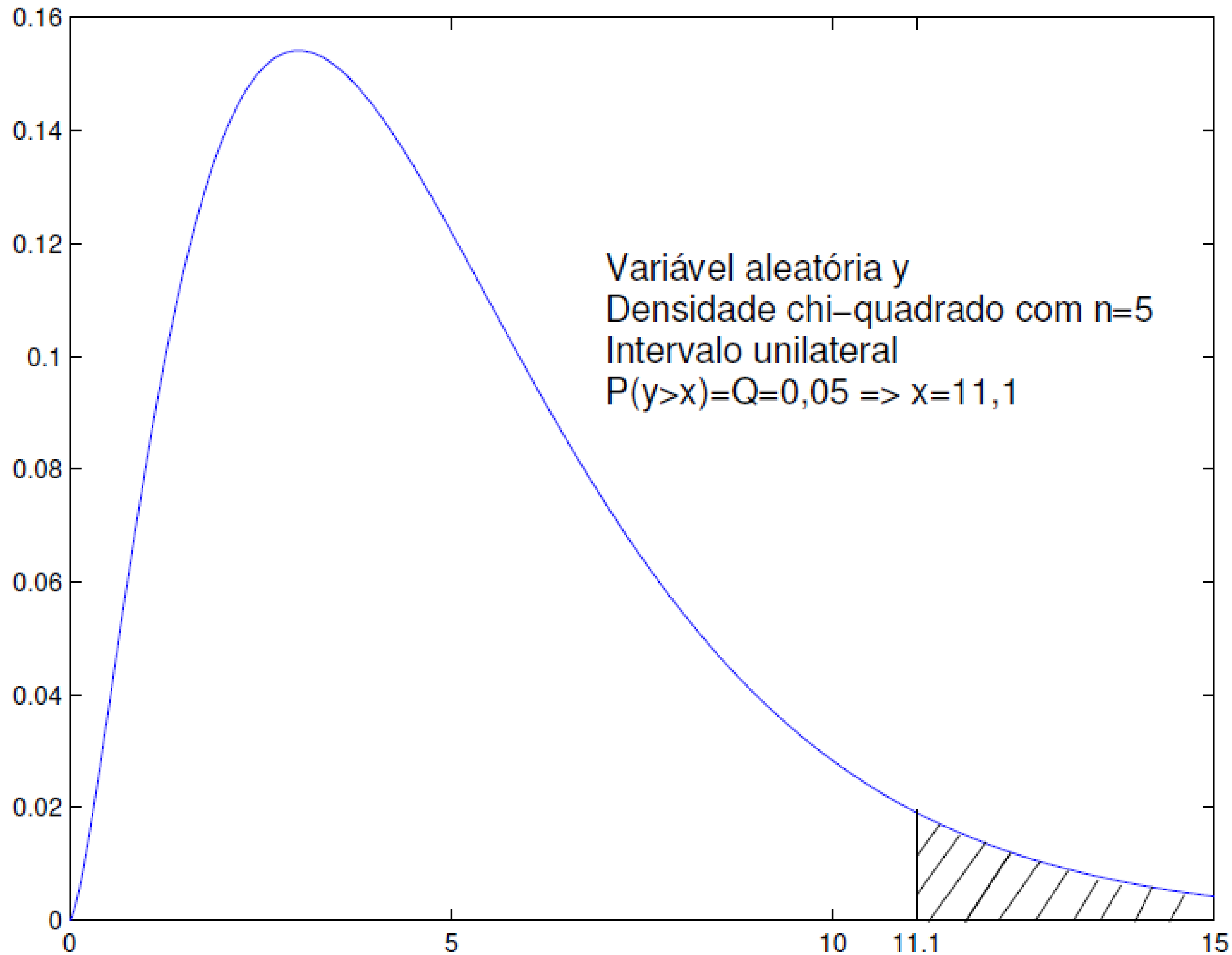
$$P\{\varepsilon_k \in [r_1; r_2] | H_0\} = 1 - \alpha$$

- Avalia-se aqui também o caso em que o filtro erra menos do que ele informa errar. Importante para sintonia do filtro (ajuste de $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$)

Consistência estatística

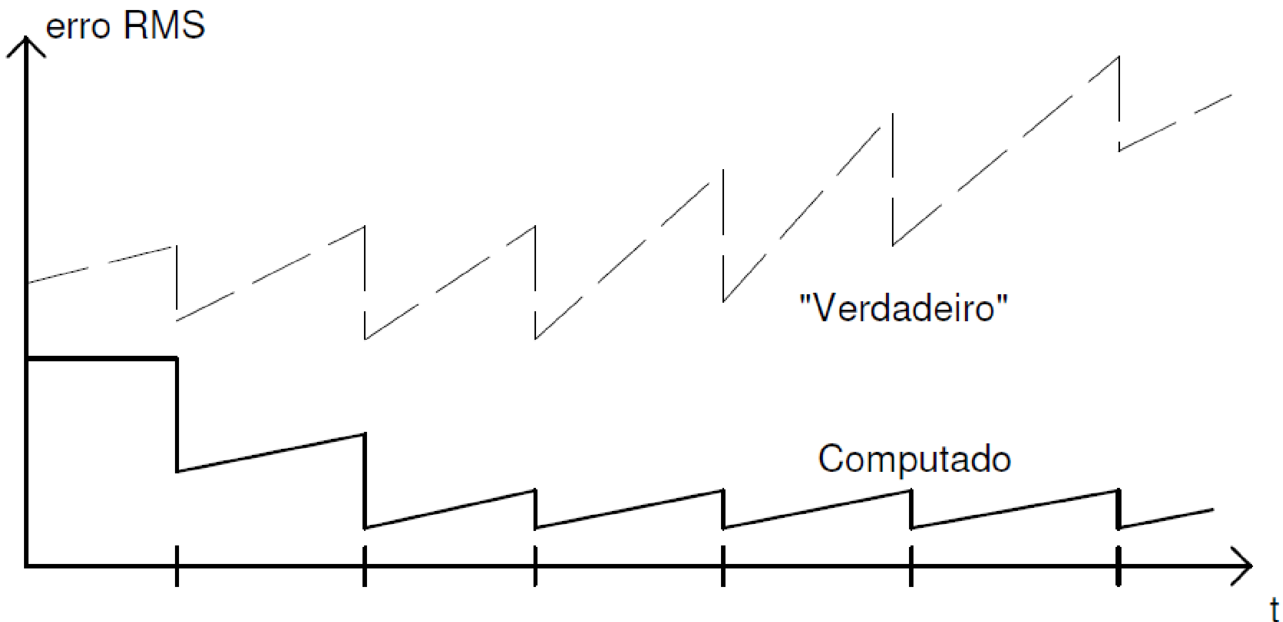


Consistência estatística



Consistência estatística

Caso capturado ao utilizar intervalos unilateral ou bilateral

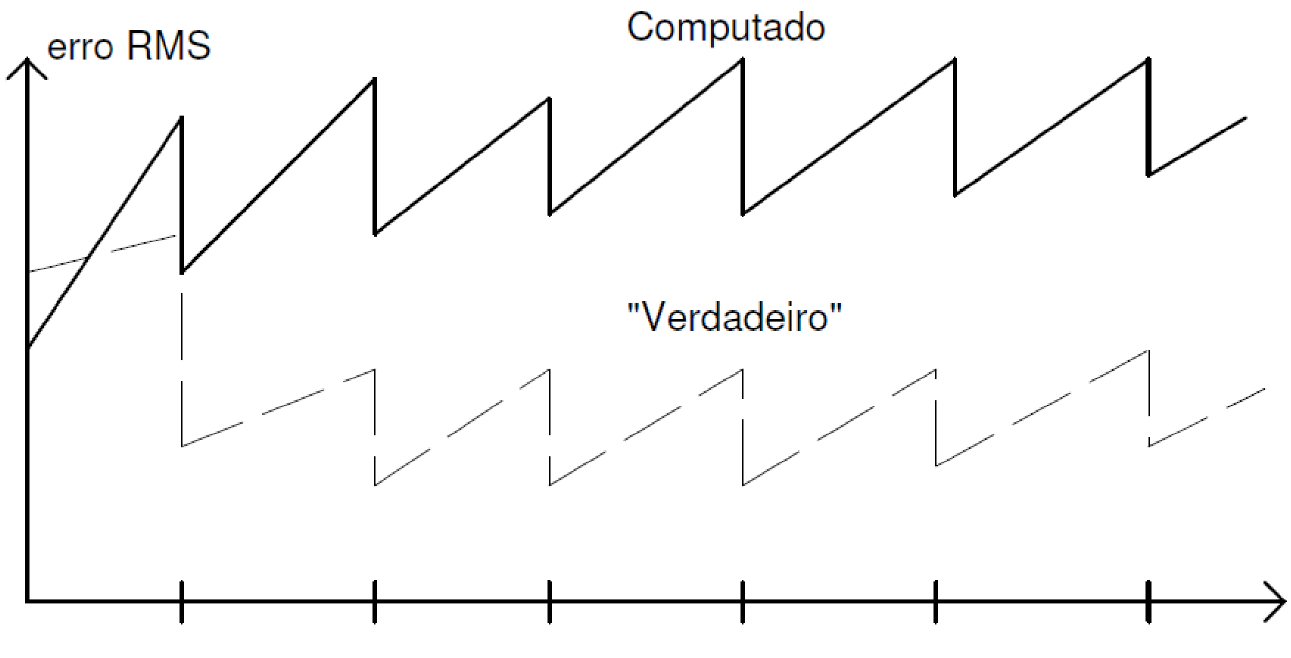


(a) Filtro subestima seus erros, implicando em computação de elementos com magnitude diminuta na matriz de ganho $\mathbf{K}_k$. Como resultado, as medidas são ignoradas e o erro "verdadeiro" de estimação torna-se significativamente maior do que o previsto pelo filtro no respectivo elemento de $\mathbf{P'}_k$. A este fenômeno chama-se divergência do filtro. Convém aumentar a magnitude de elementos na matriz $\mathbf{Q'}$.

Hipótese nula rejeitada

Consistência estatística

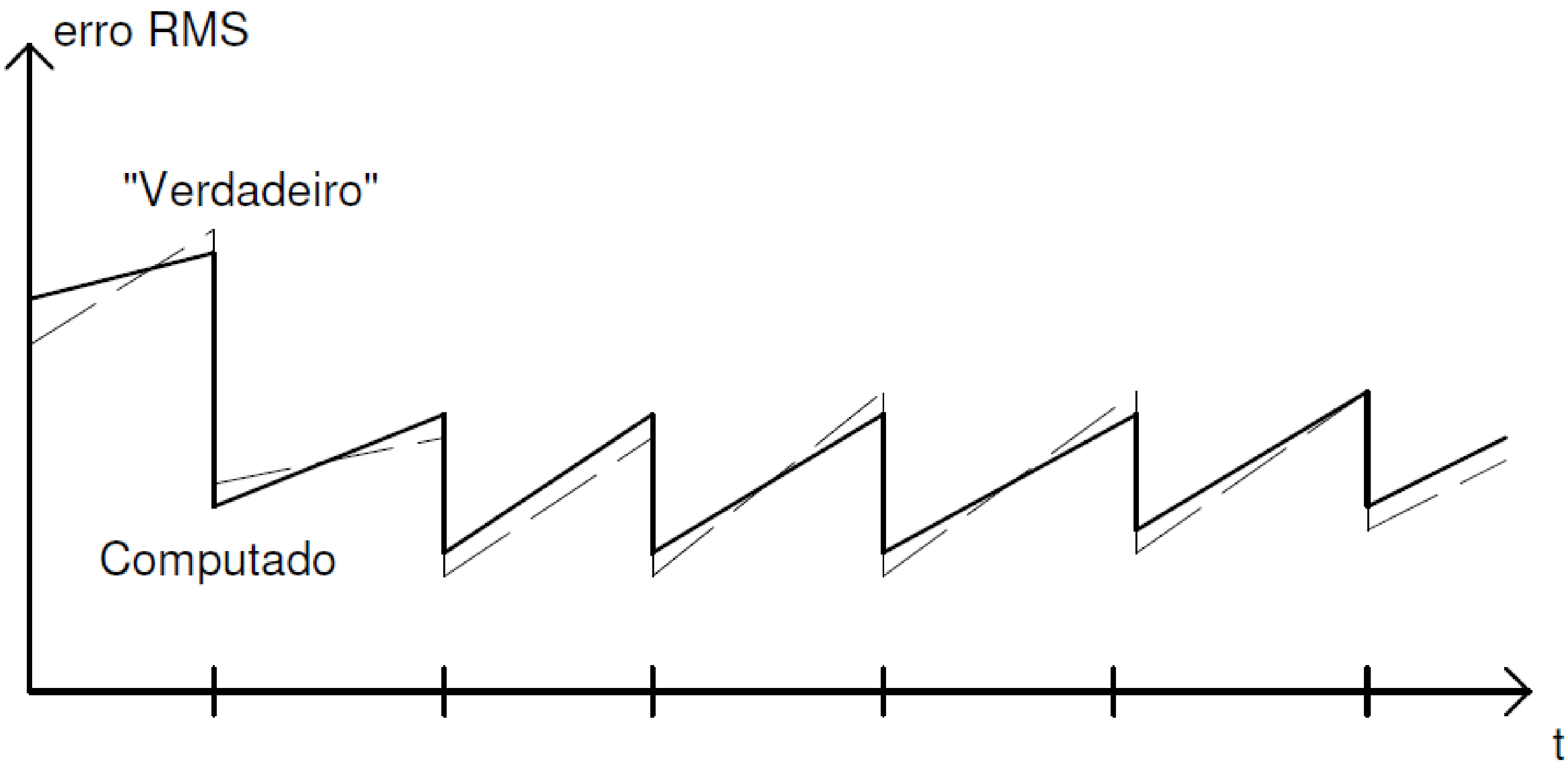
Caso capturado apenas ao utilizar intervalo **bilateral**



(b) Filtro superestima seu erro de estimação, o que implica em computação de elementos com magnitude elevada na matriz de ganho $\mathbf{K_k}$. Como resultado, o peso excessivo colocado nas medidas acarreta rastreio do ruído de medida e o filtro apresenta desempenho deficiente. Convém reduzir a magnitude de elementos na matriz $\mathbf{Q}'$.

Hipótese nula rejeitada (intervalo bilateral), aceita (intervalo unilateral)

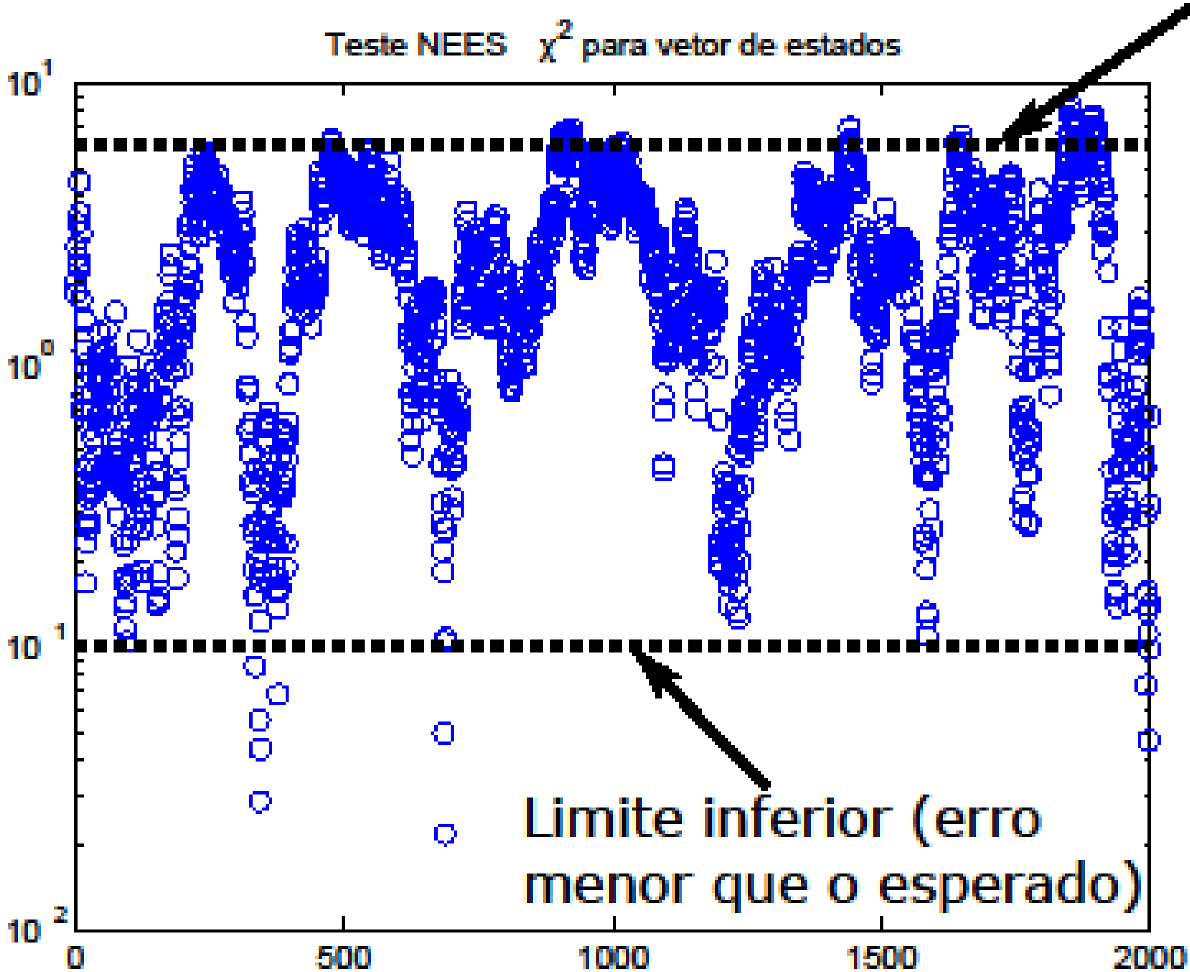
Consistência estatística



c) Filtro adequadamente sintonizado

Hipótese nula aceita

Consistência estatística



Limite superior (erro maior que o esperado)

Veja que erro não é bem modelado por ruído branco, ou seja, há correlação entre erros em instantes distintos. Isso é o esperado para o vetor de estados

Exemplo de filtro de Kalman que passou no teste NEES de consistência estatística

Consistência estatística

Comentários sobre o teste NEES:

- É necessário conhecer $\boldsymbol{x}_k$ (valor verdadeiro) para calcular $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}$
  - Trivial em uma simulação de computador
  - Quase impossível na vida real
- Obtendo $\boldsymbol{x}_k$ em experimentos reais
  - Fazer um experimento em ambiente bastante controlado
  - Utilizar um sistema de qualidade significativamente melhor que o avaliado
- No filtro de Kalman, existe correlação entre $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ e $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k+1}$. Veja, então, que $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ é Gaussiano, mas $\tilde{\boldsymbol{x}}$ não é ruído branco. Então, se somados $\tilde{\boldsymbol{x}}_{0|0} + \tilde{\boldsymbol{x}}_{1|1} + \cdots + \tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}$, não será obtido uma variável aleatória com distribuição χ^2_{nx}
  - Problema pode ser resolvido via simulações de Monte Carlo

Consistência estatística

Considere as mesmas condições anteriores, mas agora avaliando medida e medida estimada

Critério NIS (*normalized inovation squared):*

Seja

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k|k-1} \qquad \mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$$

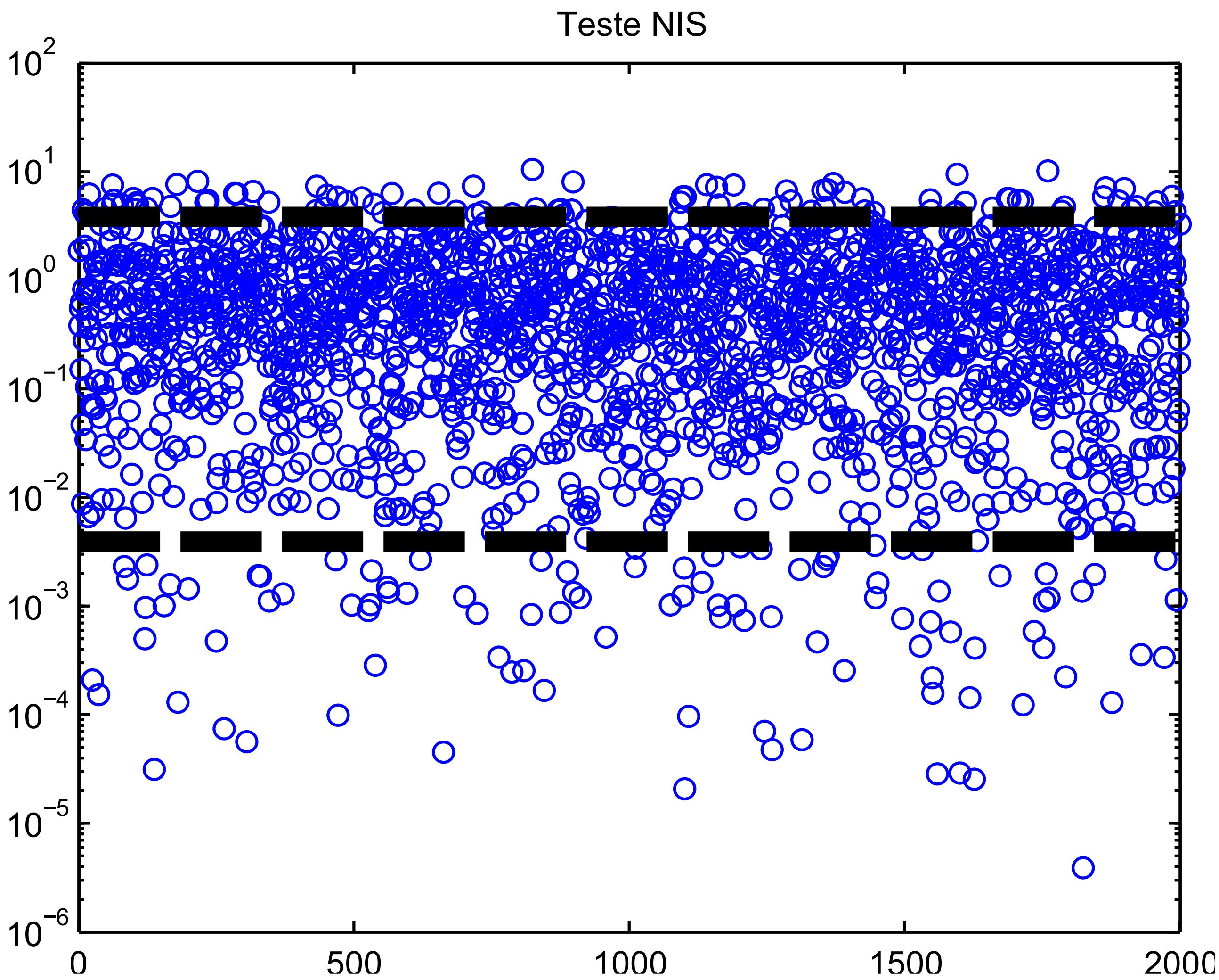
Hipótese nula: $\boldsymbol{z}_k$ é Gaussiano com média nula. Então:

$$\varepsilon_{v,k} = \mathbf{z}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{z}_k \qquad E\left[\varepsilon_{v,k}\right] = n_z$$

$$r_1 = \left(\chi^2_{n_z}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad r_2 = \left(\chi^2_{n_z}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$P\left\{\varepsilon_{v,k} \in [r_1; r_2] \middle| H_0\right\} = 1 - \alpha$$

Consistência estatística



Exemplo consistente:

- Valor fica, na maior parte das vezes, dentro da faixa. Assim, a estimativa da variância está adequada.
- Tende a se parecer com ruído branco, se $\boldsymbol{R}$ é muito maior que $\boldsymbol{HPH}^T$

Consistência estatística

Comentários sobre o teste NIS

- Pode ser feito em experimento, ou mesmo durante uso do sistema em tempo real, pois todas as variáveis estão disponíveis.
- Funciona relativamente bem mesmo para simulação única
- Problemas:
  - Quando sistema converge $\boldsymbol{S}_k \approx \boldsymbol{R}_k$. Nesse caso, se está avaliando mais o sensor que o filtro de Kalman
  - A hipótese não nula (há um erro no filtro) é confirmada quando erro já está grande demais
  - Exemplo de erro que teste NIS não captura: sensor enviesado que corrompeu estimativa do FK. O filtro de Kalman estima um valor errado, e sensor mede valor com mesmo erro. Como não há diferença entre estimado e medido, o erro não é detectado.

Consistência estatística

Avaliando individualmente cada erro de estimação de estado e cada medida. Hipótese nula: são gaussianos.

NMEE, *normalized mean estimation error*

$$H_0\colon\ \mu_{i,k} = \frac{\tilde{x}_{i,k|k}}{\sqrt{P_{ii,k|k}}} \sim N(0,1)$$

$$r_1 = G^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad r_2 = G^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$P\{\mu_{i,k} \in [r_1; r_2] \big| H_0\} = 1 - \alpha$$

NMI, *normalized mean innovation*

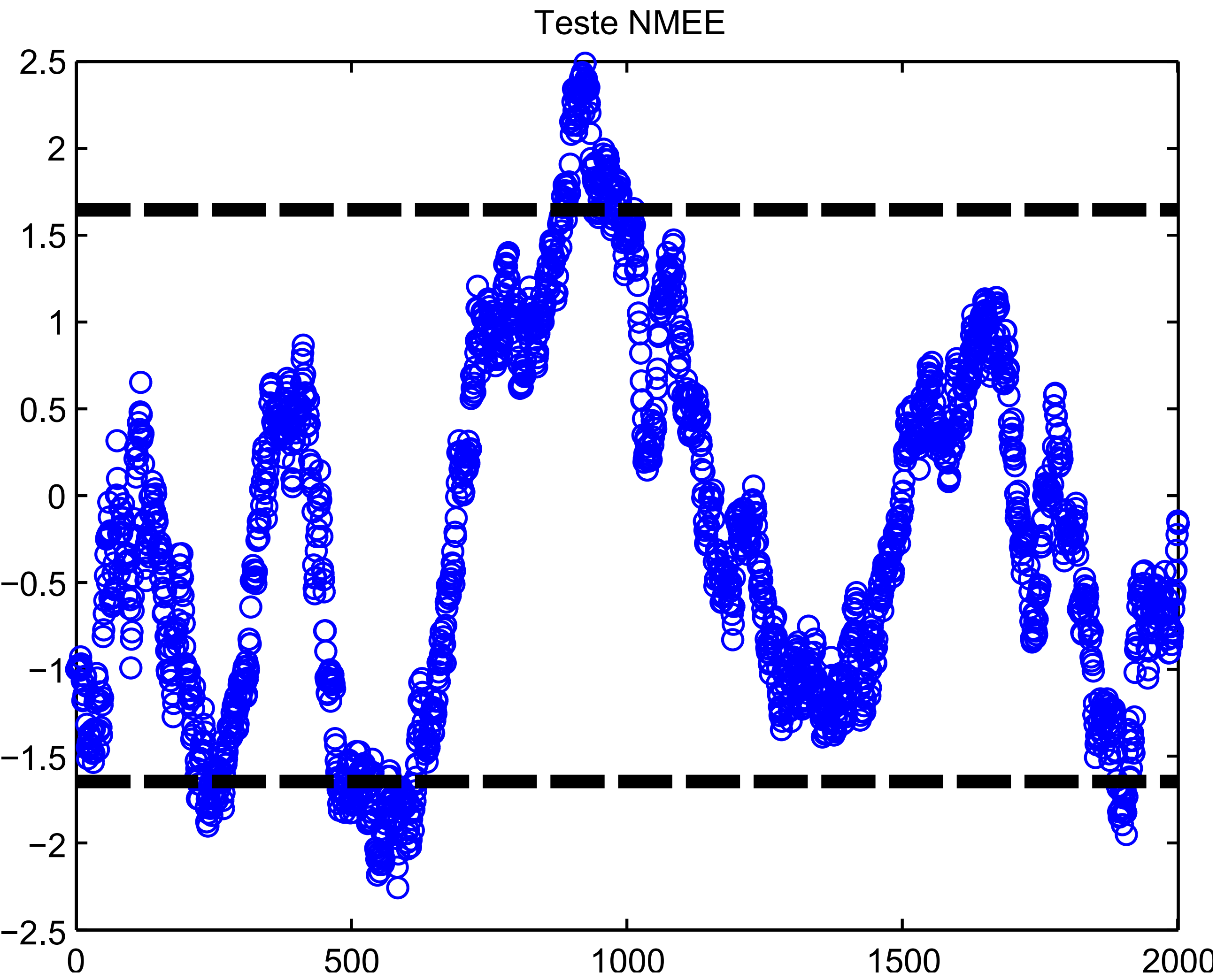
$$H_0\colon\ \mu_{v,i,k} = \frac{z_{i,k|k}}{\sqrt{S_{ii,k}}} \sim N(0,1)$$

$$r_1 = G^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad r_2 = G^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$P\{\mu_{v,i,k} \in [r_1; r_2] \big| H_0\} = 1 - \alpha$$

Objetivo: detectar vieses e avaliar estados/medidas independentemente

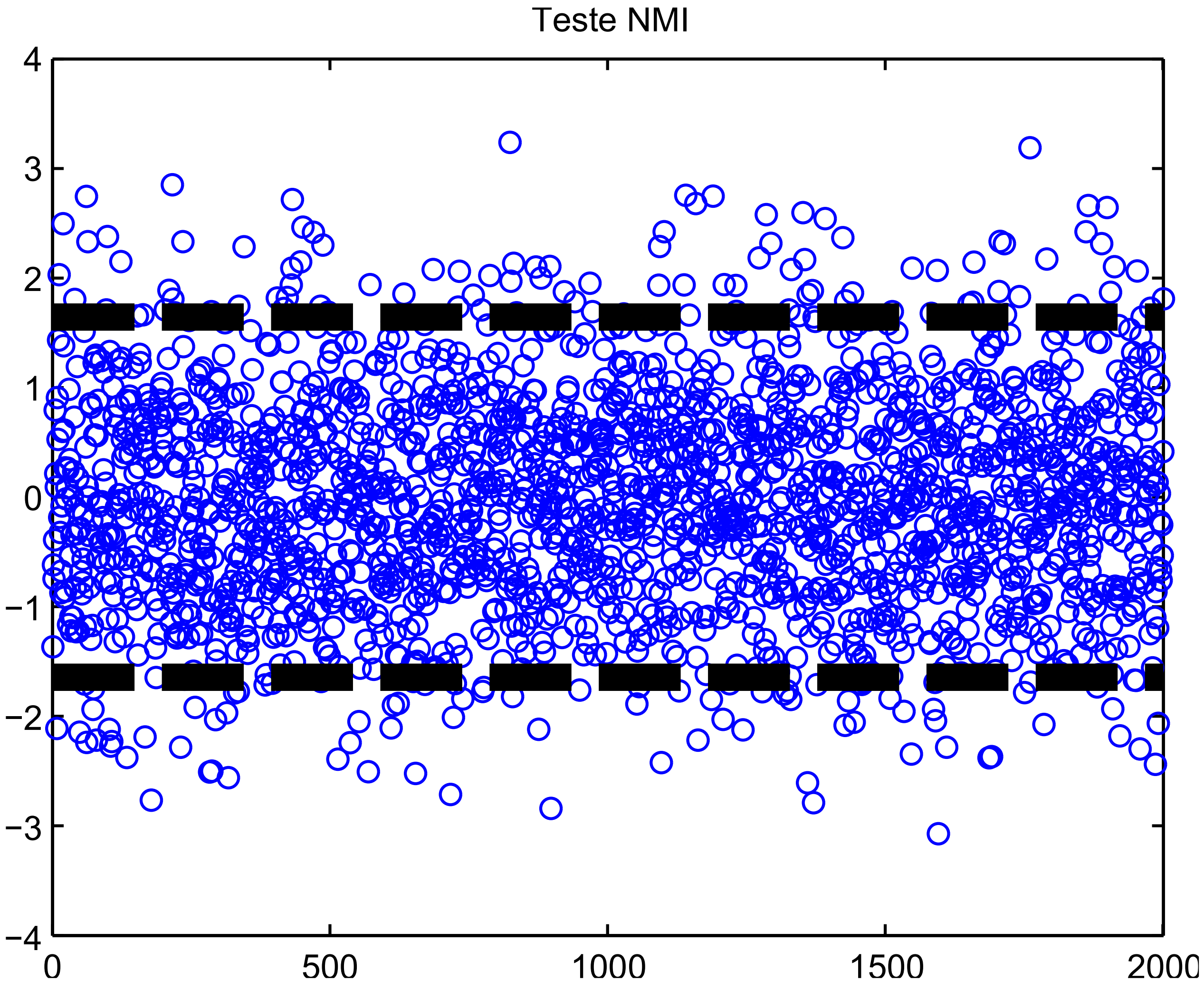
Consistência estatística



Exemplo consistente:

- Valor fica, na maior parte das vezes, dentro da faixa. Assim, a estimativa da variância está adequada.
- Erra-se para mais e para menos em igual proporção. Não há viés.
- Erro no vetor de estados não é ruído branco

Consistência estatística

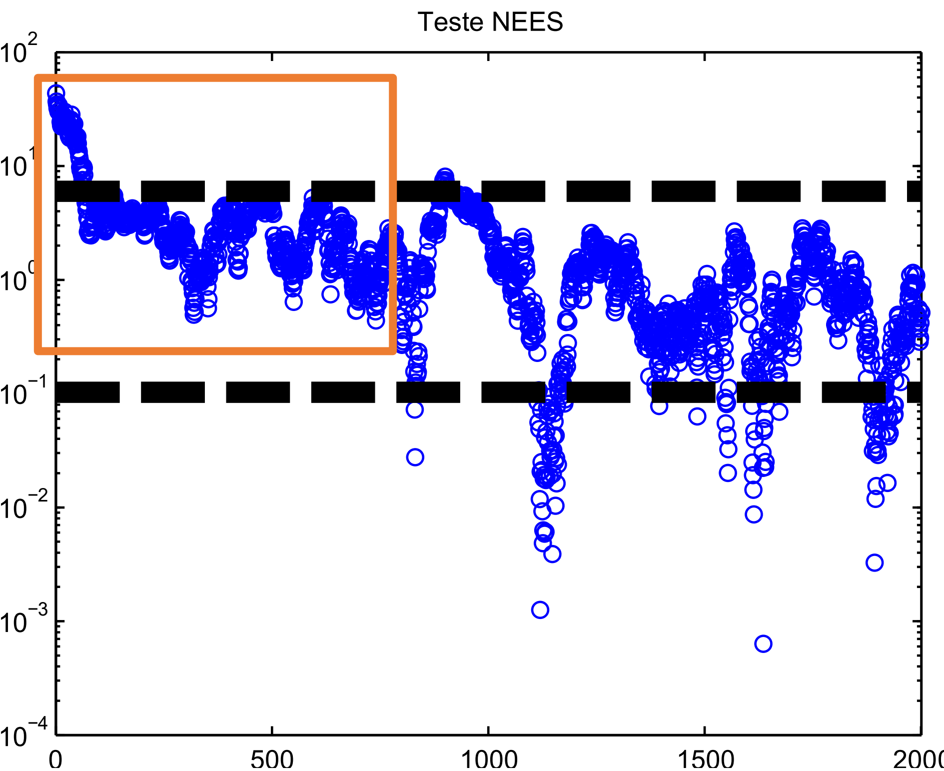


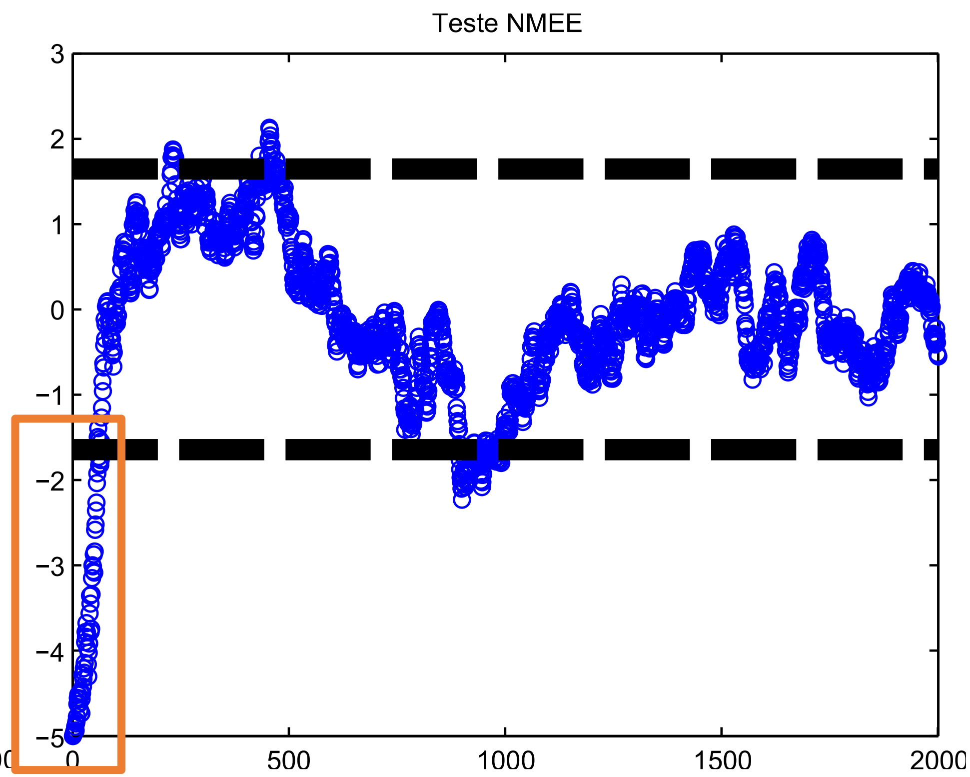
Exemplo consistente:

- Valor fica, na maior parte das vezes, dentro da faixa. Assim, a estimativa da variância está adequada.
- Erra-se para mais e para menos em igual proporção. Não há viés.
- Tende a se parecer com ruído branco, se $\boldsymbol{R}$ é muito maior que $\boldsymbol{HPH}^T$

Consistência estatística

Erro detectado: $\boldsymbol{P}_0$ subestima incerteza na inicialização





Consistência estatística

Exemplos feitos em sala – estudar em casa:

- $\boldsymbol{P}_0$ muito pequeno (slide anterior) ou muito grande, em um ou dois estados
- $\boldsymbol{Q}$ muito pequeno ou muito grande, em um ou dois estados
- $\boldsymbol{R}$ muito pequeno ou muito grande
- Sensor com viés

Simulações de Monte Carlo

O que é:

- Simular um mesmo cenário uma grande quantidade de vezes
  - Na filtragem de Kalman, como existem variáveis aleatórias, o resultado é distinto a cada simulação
- Obtém-se médias, desvios padrão, e outras características que possam ser interessantes para análise

Importância:

- Verifica se estimador sempre funciona, ou foi “sorte” ter funcionado bem quando a pessoa testou
- Fornece o comportamento médio
- Permite comparar duas ou mais abordagens. A comparação de desempenho é um teste de hipótese. Mais simulações, menos chance da abordagem ruim ganhar por “sorte”
- Testes de consistência estatísticos NESS/NIS/NMEE/NMI mais corretos

Consistência estatística – Monte Carlo

Primeiramente, gerar N simulações. Então:

NESS

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\varepsilon_k$$

$$r_1 = \frac{1}{N}\left(\chi^2_{n_x}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad r_2 = \frac{1}{N}\left(\chi^2_{n_x}\right)^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$P\{\bar{\varepsilon}_k \in [r_1; r_2] | H_0\} = 1-\alpha$$

NMEE

$$\bar{\mu}_{i,k} = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\mu_{i,k}$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}G^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad r_2 = \frac{1}{\sqrt{N}}G^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$P\{\mu_{i,k} \in [r_1; r_2] \big| H_0\} = 1-\alpha$$

NIS e NMI sofrem modificações similares