Espaço de Estados

Controlabilidade e observabilidade

Revisão de álgebra linear

Vetores linearmente (in)dependentes:

Um conjunto de vetores $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m\} \in \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se existem números reais $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, não todos nulos, tal que:

$$\beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots \beta_m \boldsymbol{x}_m = \mathbf{0}$$

Se um conjunto é linearmente dependente, alguns dos vetores podem ser obtidos a partir da combinação linear de outros vetores.

Por outro lado, se a única solução para a equação acima for

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$$

Temos um conjunto linearmente independente.

Em um espaço vetorial de dimensão n, pode-se encontrar um conjunto de até n vetores linearmente independentes

Revisão de álgebra linear

Sistemas de equações algébricas lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= y_m, \end{aligned}$$

Pode ser reescrito como

$$Ax = y$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Claramente $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e $y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

Definição 1.2. A *imagem* de A ($\mathrm{Im}(A)$) é definida como todas as combinações lineares possíveis de todas as colunas de A.

Teorema 1.2. A imagem da transformação linear A é um subespaço de $\mathbb{R}^m$

Revisão de álgebra linear

Definição 1.3. O *posto* de A, posto(A), é definido como a dimensão da imagem do espaço, ou em outras palavras, como o número de colunas linearmente independentes de A.

Exemplo 1.2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix},$$

onde a_i denota a i-ésima coluna de A. Claramente a_1 e a_2 são linearmente independentes. A terceira coluna é a soma das duas primeiras, ou $a_1 + a_2 - a_3 = 0$. A última coluna é o dobro da segunda, ou $2a_2 - a_4 = 0$. Assim, A tem duas colunas linearmente independentes e tem posto 2. O conjunto $\{a_1, a_2\}$ pode ser usado como base da imagem de A.

Teorema 1.3. Considere o sistema $Ax = y$, onde a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mapeia $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$.

1. Dada A e um vetor y em $\mathbb{R}^m$, existe um vetor x tal que $Ax = y$ se e somente se o vetor y é um elemento de $\mathrm{Im}(A)$, ou

$$\text{posto}(A) = \text{posto}(\left[\; A \;\middle|\; y \;\right])$$

2. Dada A, para todo y em $\mathbb{R}^m$, existe um vetor x tal que $Ax = y$ se e somente se $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$, que equivale a posto$(A) = m$.

Revisão de álgebra linear

O posto de uma matriz **A** é *c* se e somente se:

- Existe ao menos uma submatriz de **A** com dimensão *c* x *c* cujo determinante é não nulo.
- Toda submatriz de **A** de ordem superior a *c* possui determinante nulo.

De acordo com a definição acima, o posto *c* de uma matriz retangular A de dimensão *m* x *n* é, no máximo, igual à menor dimensão da matriz:

$$c \leq \min(m, n)$$

Revisão de álgebra linear

Teorema 1.4. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Então

$$\text{posto}(A) + \dim(\ker(A)) = n.$$

Corolário 1.1. O número de soluções linearmente independentes de $Ax = 0$ é igual a $n - \text{posto}(A)$, onde n é o número de colunas de A e $\text{posto}(A)$ é o número de colunas linearmente independentes de A.

Este corolário segue diretamente do teorema 1.4 e da definição de espaço nulo de A. É claro que se $\text{posto}(A) = n$, então a única solução de $Ax = 0$ é $x = 0$, que é chamada solução trivial. Se $\text{posto}(A) < n$, então podemos sempre encontrar um vetor não nulo x tal que $Ax = 0$. Em particular, se A é uma matriz quadrada, então $Ax = 0$ tem uma solução não trivial se e somente se $\text{posto}(A) < n$, que equivale a $\det(A) = 0$.

Revisão de álgebra linear

Matriz simétrica: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$

Matriz Hermitiana: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$

Matriz $\boldsymbol{M}$ *definida positiva*: $\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} > 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$

Matriz $\boldsymbol{M}$ *semidefinida positiva*: $\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$

Matriz $\boldsymbol{M}$ (*semi)definida negativa*:$-\boldsymbol{M}$ é (semi)definida positiva

Se qualquer uma das condições abaixo for satisfeita, a matriz Hermitiana $\boldsymbol{M}$ $n \times n$ é (semi)definida positiva:

- Todos os autovalores de $\boldsymbol{M}$ são positivos (não negativos)
- $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^* \boldsymbol{N}$ em que
  - $\boldsymbol{N}$ é uma matriz não singular $n \times n$
  - ($\boldsymbol{N}$ é uma matriz singular $n \times n$)
  - ($\boldsymbol{N}$ é uma matriz $\mathrm{m} \times n$, em que $m < n$)

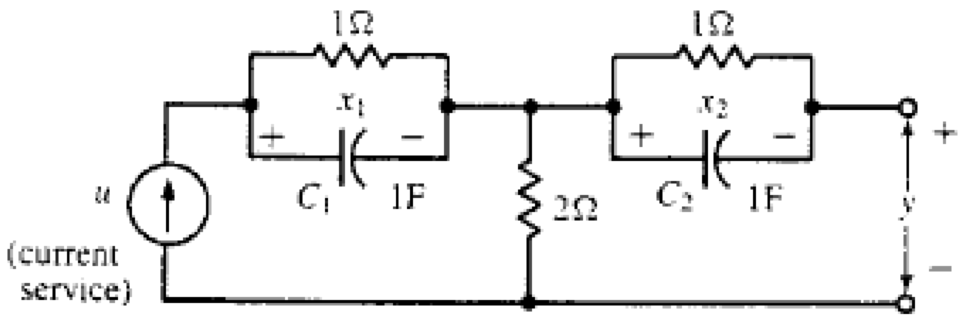
Controlabilidade

Um sistema é dito controlável no instante t_0 se for possível, através da aplicação de um vetor de controle não-restrito, transferir o sistema de qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ para qualquer outro estado num intervalo de tempo finito.

Exemplo: em um sistema mecânico (por exemplo massa-mola-amortecedor), cujas variáveis de estado são posição e velocidade, é possível, através da aplicação de força adequada, sair de um estado qualquer (ex: $x(0) = 0$ m, $\dot{x}(0) = 0$ m/s) e colocar o sistema em um estado desejado (ex: $x(10) = 10$ m, $\dot{x}(10) = -1$ m/s).

Controlabilidade – Exemplo

No circuito abaixo, as tensões nos capacitores C_1 e C_2 são variáveis de estado, a corrente u é a entrada e a tensão y é a saída. Como a saída está em aberto, a corrente u passa integralmente pelo resistor de 2Ω, de forma que é impossível de se alterar a tensão x_2 através de u. O sistema abaixo não é controlável.

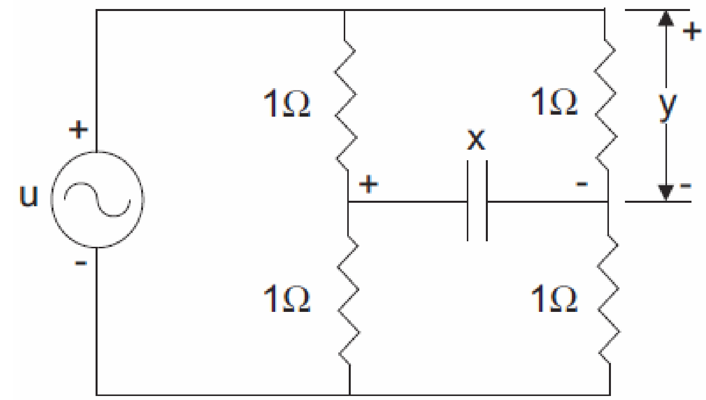


Controlabilidade - Exemplo

Exemplo:

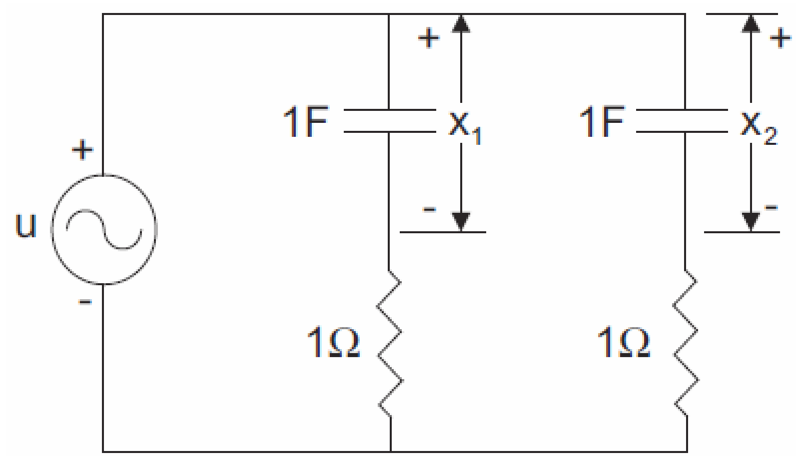
A tensão *x* não pode ser alterada através de *u*.

O sistema é, então, não controlável.



Exemplo:

Não é possível ajustar x_1 e x_2 de forma independente. Assim, o sistema também é não controlável.



Controlabilidade

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

Em que:

x = vetor de estados (vetor *n*)
u = sinal de entrada (escalar)
A = matriz de estados (matriz *n* x *n*)
B = matriz de controle (matriz *n* x 1)

Suponha que se deseje chegar em $\boldsymbol{x}(t_1) = 0$ para $\boldsymbol{x}(0) \neq \mathbf{0}$ e arbitrário ($\boldsymbol{x}(0)$ pode ter qualquer valor), sendo t um valor de tempo definido.
Sabe-se que:

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(\mathrm{t}_1-\tau)}\mathbf{B}\mathrm{u}(\tau)d\tau$$

Então

$$\mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(\mathrm{t}_1-\tau)}\mathbf{B}\mathrm{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathrm{u}(\tau)d\tau$$

Controlabilidade

Sabendo que:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\boldsymbol{A}^i$$

Tem-se:

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i\,\mathbf{B}\int_0^{t_1} \alpha_i(t)\mathrm{u}(\tau)d\tau$$

Cada uma das n integrais dá um valor escalar diferente, que chamaremos de β_i:

$$\beta_i = \int_0^{t_1} \alpha_i(t)\mathrm{u}(\tau)d\tau$$

Então

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i\,\mathbf{B}\beta_i$$

Controlabilidade

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i\,\mathbf{B}\beta_i$$

Transformando o somatório em produto interno de vetores:

$$\mathbf{x}(0) = -[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Em que a barra "|" indica concatenação de matrizes.

Veja que:

- A dimensão de $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ é $n \times n$
- A dimensão do vetor de β_i é $n \times 1$
- A dimensão de $\mathbf{x}(0)$ é $n \times 1$
- Para que se implemente uma transformação $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o posto (rank) de $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ deve ser n

Controlabilidade

Controlabilidade completa de estado para sistemas com **uma entrada**: ocorre se a matriz *n* x *n* abaixo tiver posto *n*

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Sistema com **r entradas**: **u** tem dimensão *r* e **B** tem dimensão $n \times r$. É possível mostrar que a controlabilidade completa de estado ocorre se a matriz $n \times nr$ abaixo tiver posto *n*.

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Veja que, por ter mais colunas, é "mais fácil" um sistema com r entradas ter controlabilidade completa de estados

Espaço de estados

Exemplo – verifique se o sistema abaixo é de estado completamente controlável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Resposta:

A matriz **A** é 2 x 2, então n = 2:

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É possível ver que o posto é 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad |1| = 1$$

Dessa forma, o sistema não é de estado completamente controlável.

Obs: uma forma rápida de se verificar isso é perceber que o estado x_2 depende apenas dele mesmo (ou seja, não depende de x_1), e que só é possível controlar diretamente x_1 (observar matriz **B**).

Obs2: o raciocínio acima não vale no sentido oposto, ou seja, x_2 depender de x_1 ou u afetar também x_2 não garantiria controlabilidade.

Espaço de estados

Exemplo – verifique se o sistema abaixo é de estado completamente controlável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Resposta:

A matriz **A** é 2 x 2, então *n* = 2:

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

É possível ver que o posto é 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Dessa forma, o sistema é de estado completamente controlável.

Espaço de estados

Forma alternativa da condição de controlabilidade completa de estado

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Em que:

x = vetor de estados (vetor *n*)
u = sinal de entrada (vetor r)
A = matriz de estados (matriz *n* x *n*)
B = matriz de controle (matriz *n* x r)

Se **A** for uma matriz diagonal, basta ver se existe, em cada linha de **B**, ao menos um elemento não nulo.

Se A não for diagonal, mas puder ser diagonalizável, pode-se aplicar a transformação linear abaixo:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

E verificar se, para cada linha de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, se existe ao menos um elemento não-nulo.

Espaço de estados

Exemplo:

O sistema abaixo é de estado completamente controlável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

O sistema abaixo não é de estado completamente controlável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Condição de controlabilidade completa de estado no plano s

Pode-se provar que uma função de transferência é controlável se e somente se não ocorrerem cancelamentos de pólos. Caso ocorra cancelamento, o pólo cancelado não é controlável.

Exemplo – Considere o sistema abaixo:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s + 2{,}5}{(s + 2{,}5)(s - 1)}$$

Como o fator (s + 2,5) é cancelado, o sistema não é de estado completamente controlável (perde-se um grau de liberdade).

Reescrevendo o sistema na forma de equação de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2{,}5 & -1{,}5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Pode-se verificar a controlabilidade:

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

O posto da matriz acima é 1, o que ressalta a perda de um grau de liberdade. O sistema não é de estado completamente controlável.

Espaço de estados

Controlabilidade de saída

Muitas vezes deseja-se controlar a(s) saída(s) do sistema, e não seus estados internos. A controlabilidade completa de um sistema não é condição necessária nem suficiente para controlar a saída do sistema.

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Em que:

x = vetor de estados (vetor *n*)
u = sinal de entrada (vetor *r*)
y = vetor de saída (vetor *m*)
A = matriz de estados (matriz *n* x *n*)
B = matriz de controle (matriz *n* x r)
C = matriz de saída (matriz *m* x *n*)
D = matriz de transmissão direta (matriz *m* x *r*)

O sistema é de saída completamente controlável se e somente se a matriz *m* x (*n* + 1)*r* tiver posto *m*.

$$[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \ldots \mid \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \mid \mathbf{D}]$$

Observe que a matriz **D** sempre ajuda a estabelecer a controlabilidade de saída.

Controlabilidade

Demonstração para r entradas, critério alternativo de controlabilidade (Chen – Linear System Theory and Design)

Teorema – O sistema será controlável se a matriz abaixo for não-singular (invertível) para qualquer $t > 0$ e, se o sistema é controlável, então a matriz é não singular

$$\boldsymbol{W}_c(t) = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\, e^{\boldsymbol{A}^T\tau}d\tau$$

Veja que $\boldsymbol{W}_c(t)$ é positiva (semi) definida e que, se invertível, é positiva definida. Quando $t \to \infty$, $\boldsymbol{W}_c$ é chamado Gramiano de controlabilidade.

Demonstração 1 – se não singular, então controlável:

Seja:

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(\mathrm{t}_1-\tau)}\mathbf{B}\mathrm{u}(\tau)d\tau$$

Defina:

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T(t_1-t)}\boldsymbol{W}_c^{-1}(t_1)\left[e^{\boldsymbol{A}t_1}\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{t_1}\right]$$

Controlabilidade

Assim:

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) - \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(\mathrm{t}_1-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T(t_1-t)} d\tau \boldsymbol{W}_c^{-1}(t)\left[e^{\boldsymbol{A}t_1}\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{t_1}\right]$$

Pode-se mostrar que:

$$\boldsymbol{W}_c(t) = \int_0^{t} e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\, e^{\boldsymbol{A}^T\tau} d\tau = \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(\mathrm{t}_1-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T(t_1-t)} d\tau$$

Assim:

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) - \boldsymbol{W}_c(t)\boldsymbol{W}_c^{-1}(t)\left[e^{\boldsymbol{A}t_1}\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{t_1}\right]$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_{t_1}$$

Ou seja, se $\boldsymbol{W}_c(t)$ for invertível, então $\mathbf{x}(t_1)$ é capaz de atingir um valor arbitrário

Controlabilidade

Demonstração 2 – Se controlável, então não singular

Prova por absurdo. Imagine que seja controlável e que $\boldsymbol{W}_c(t)$ é singular para algum valor t_1.

Se $\boldsymbol{W}_c(t)$ é singular para algum t_1, existe $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{W}_c(t_1)\boldsymbol{v} = 0 \rightarrow$$

$$\int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T e^{\boldsymbol{A}(t_1-\tau)} \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T(t_1-\tau)} \boldsymbol{v} d\tau = \int_0^{t_1} \left\| \boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T(t_1-\tau)} \boldsymbol{v} \right\|^2 d\tau = 0$$

O que implica em:

$$\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T(t_1-\tau)} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ ou } \boldsymbol{v}^T e^{\boldsymbol{A}(t_1-\tau)} \boldsymbol{B} = \mathbf{0} \text{ para } 0 < \tau < t_1$$

Escolhendo $\boldsymbol{x}(t_1) = 0$ e $\boldsymbol{x}(0) = e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{v}$, então,

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{v} + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B}\mathrm{u}(\tau) d\tau$$

Controlabilidade

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{v} + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(\mathrm{t}_1-\tau)}\mathbf{B}\mathrm{u}(\tau)d\tau$$

Pré-multiplicando por $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$

$$0 = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} + \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} e^{\mathbf{A}(\mathrm{t}_1-\tau)}\mathbf{B}\mathrm{u}(\tau)d\tau \ = \|\boldsymbol{v}\|^2 + 0 = 0$$

A equação acima só é válida se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, o que contradiz hipótese inicial

Demonstração 3 - o posto (rank) de $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ deve ser n

Se $\boldsymbol{W}_c(t)$ é não singular, então não existe $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\boldsymbol{v}^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$$

Ou seja, $e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}$ também é não singular (se quadrado) ou tem posto de linha cheio (posto = número de linhas = n) se retangular. Substituindo $e^{\boldsymbol{A}t}$ por sua definição:

$$\boldsymbol{v}^T[\beta_0\mathbf{B} \mid \beta_1\mathbf{AB} \mid \ldots \mid \beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{0}$$

Que pode ser reescrito como: $\boldsymbol{v}^T[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{0}$

Exemplo

Exemplo do uso de $\boldsymbol{W}_c(t)$:

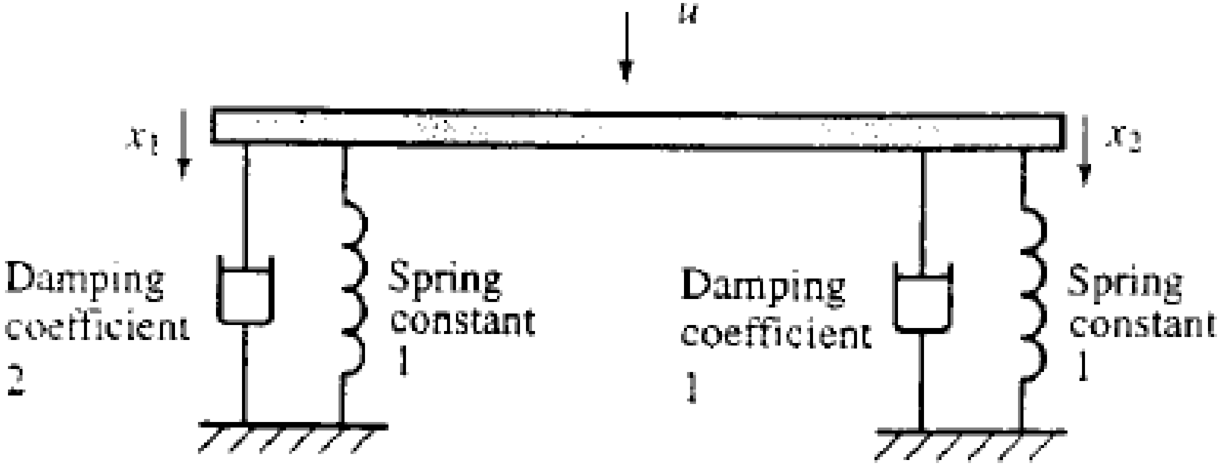
Seja o sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Obs: sistema com massa desprezível – somatório de forças é nulo.

Projetar um sinal de controle que faça o sistema entrar em equilíbrio em $t = 2$

Veja que sistema entra em equilíbrio sozinho, mas apenas em $t \to \infty$



Exemplo

$$\rho([\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}]) = \rho\begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

Controlável

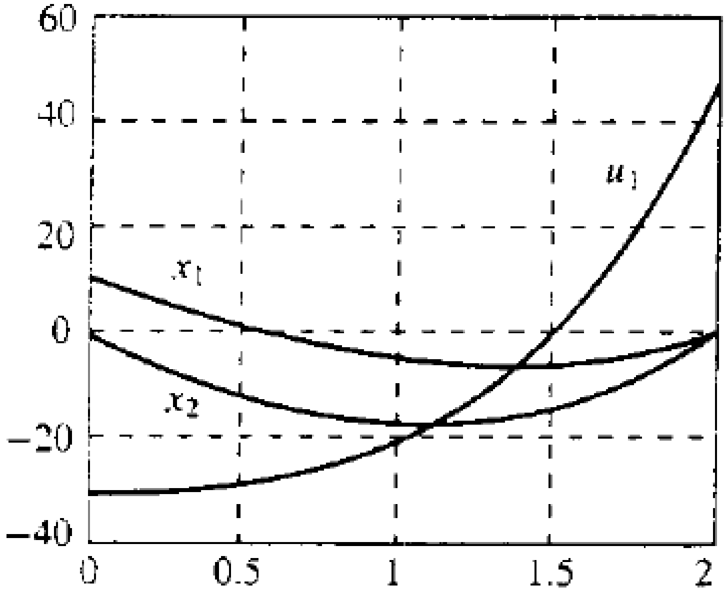
$$\mathbf{W}_c(2) = \int_0^2 \left(\begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} [0.5\ \ 1] \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \right) d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2162 & 0.3167 \\ 0.3167 & 0.4908 \end{bmatrix}$$

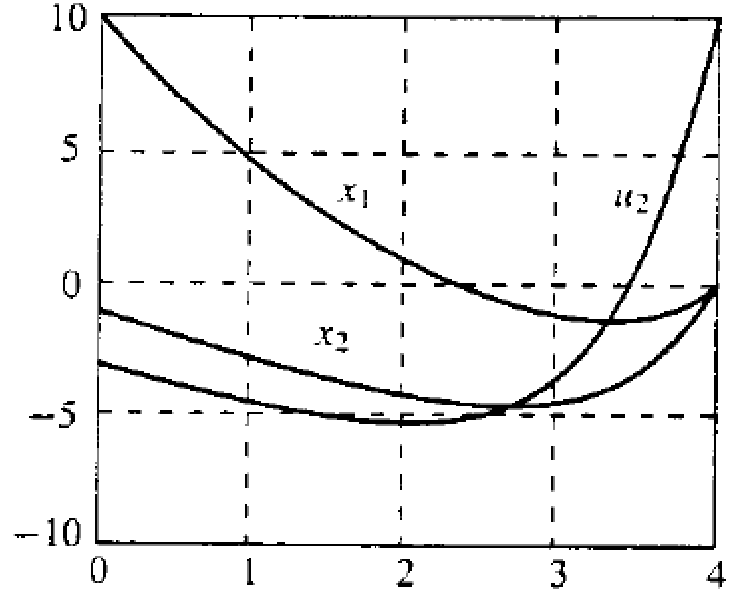
$$u_1(t) = -[0.5\ \ 1] \begin{bmatrix} e^{-0.5(2-t)} & 0 \\ 0 & e^{-(2-t)} \end{bmatrix} \mathbf{W}_c^{-1}(2) \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= -58.82e^{0.5t} + 27.96e^{t}$$

Exemplo



$t_1 = 2$ segundos



$t_1 = 4$ segundos

Menos tempo, controlador mais agressivo

Controlabilidade

Theorem

The controllability property is invariant under any equivalence transformation.

Proof: Consider the pair $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ with controllability matrix

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \;\; \mathbf{AB} \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

and its equivalent pair $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ with $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$ and $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}$, where $\mathbf{P}$ is a nonsingular matrix. The controllability matrix of $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ is

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{C}} &= [\bar{\mathbf{B}} \;\; \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \;\; \cdots \;\; \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] \\
&= [\mathbf{PB} \;\; \mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{PB} \;\; \cdots \;\; \mathbf{PA}^{n-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PB}] \\
&= [\mathbf{PB} \;\; \mathbf{PAB} \;\; \cdots \;\; \mathbf{PA}^{n-1}\mathbf{B}] \\
&= \mathbf{P}[\mathbf{B} \;\; \mathbf{AB} \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{P}\mathcal{C}
\end{aligned}$$

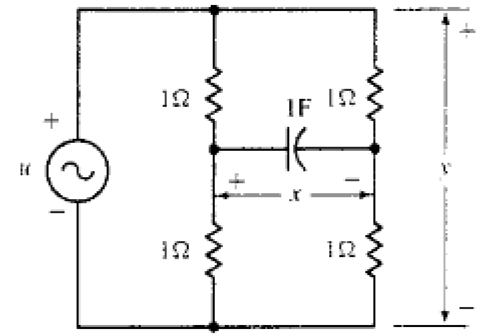
Because $\mathbf{P}$ is nonsingular, we have $\rho(\mathcal{C}) = \rho(\bar{\mathcal{C}})$ (see Equation (3.62)). This establishes Theorem 6.2. Q.E.D.

Observabilidade

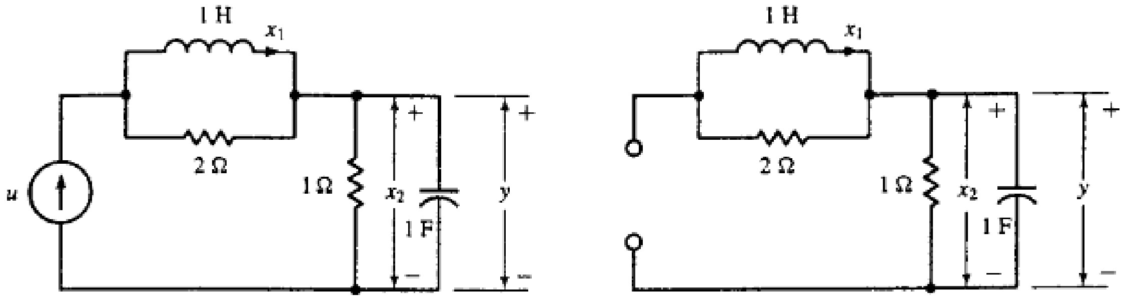
Um sistema é dito observável no instante t_0 se, com o sistema num estado $\mathbf{x}(t_0)$ qualquer, for possível determinar este estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito.

Exemplo: no sistema mecânico do exemplo anterior, suponha que á saída disponível é a posição. Ao observar a variação da posição em um determinado intervalo de tempo, é possível determinar a velocidade.

Exemplo:
Suponha u = 0. A saída y será nula independentemente da variável de estado x. O sistema é não observável.



Exemplo:
Suponha $u = 0$ e $x_2 = 0$. A saída y será nula independentemente da variável de estado x_1. O sistema é não observável.



Observabilidade

Avaliando a observabilidade:

Sabe-se que:

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau \ + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

Por hipótese, conhecem-se a entrada $\boldsymbol{u}(t)$ e a saída $\boldsymbol{y}(t)$. Pode-se trabalhar com

$$\bar{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{C}\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau \ + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

(ou, equivalentemente, estudar o caso em que $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0}$)

Assim:

$$\bar{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

É possível demonstrar que, da forma que está escrita a equação, avaliando instantaneamente a saída, ela sempre apresenta solução **não única**. Entretanto, quer-se o valor correto de $\boldsymbol{x}(0)$

Observabilidade

$$\overline{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

Define-se então:

$$\boldsymbol{W}_o(t) = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}^T\tau}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\, e^{\boldsymbol{A}\tau}d\tau$$

E multiplicando ambos dos lados $\overline{\boldsymbol{y}}(t)$ por $e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{C}^T$ e integrando de 0 a t_1:

$$\left(\int_0^{t_1} e^{\boldsymbol{A}^T\tau}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\, e^{\boldsymbol{A}\tau}d\tau\right)\boldsymbol{x}(0) = \int_0^{t_1} e^{\boldsymbol{A}^T\tau}\boldsymbol{C}^T\overline{\boldsymbol{y}}(\tau)\boldsymbol{d}\tau \qquad (1)$$

Então:

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{W}_o^{-1}(t_1)\int_0^{t_1} e^{\boldsymbol{A}^T\tau}\boldsymbol{C}^T\overline{\boldsymbol{y}}(\tau)\boldsymbol{d}\tau$$

Se $\boldsymbol{W}_o^{-1}(t_1)$ existe, $\boldsymbol{W}_o(t_1)$ é definida positiva. Veja que só há uma solução para $\boldsymbol{x}(0)$.

É possível mostrar que, se $\boldsymbol{W}_o(t_1)$ é singular (semidefinida positiva), existe mais de um $\boldsymbol{x}(0)$ que satisfaz a equação (1).

Teorema da dualidade

Teorema: O par de matrizes $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ é controlável se e somente se o par $(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{B}^T)$ é observável.

Demonstração – comparação entre

$$\boldsymbol{W}_c(t) = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T\tau} d\tau$$

e

$$\boldsymbol{W}_o(t) = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}^T\tau}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\, e^{\boldsymbol{A}\tau} d\tau$$

Isso demonstra que os resultados obtidos para a controlabilidade podem ser aplicados para a observabilidade

Observabilidade

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Em que:

x = vetor de estados (vetor *n*)
u = sinal de entrada (vetor *r*)
y = vetor de saída (vetor *m*)
A = matriz de estados (matriz *n* x *n*)
B = matriz de controle (matriz *n* x r)
C = matriz de saída (matriz *m* x *n*)
D = matriz de transmissão direta (matriz *m* x *r*)

É possível mostrar que o sistema é completamente observável se a matriz *nm* x *n* abaixo tiver posto *n*.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ou, equivalentemente, se a matriz *n* x *nm* abaixo tiver posto *n*.

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \ldots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

Observabilidade

Exemplo – verifique se o sistema abaixo é de estado completamente controlável, de saída completamente controlável e observável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Resposta:

Controlabilidade de estados:

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

É possível ver que o posto é 2 = *n*. Dessa forma, o sistema é de estado completamente controlável.

Controlabilidade da saída:

$$[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O posto da matriz é 1 = *m*, então o sistema é de saída completamente controlável.

Observabilidade:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O posto da matriz é 2 = *n*. Dessa forma, o sistema é completamente observável.

Observabilidade

Condição de observabilidade completa de estado no plano s

Função de transferência: observável se e somente se não ocorrerem cancelamentos de pólos.

Ocorrendo cancelamento: pólo cancelado não é observável.

Destaca-se que as condições de observabilidade e controlabilidade no plano *s* são idênticas.

Veja que funções de transferência “usuais”, em que não ocorrem cancelamentos entre numerador e denominador, são controláveis e observáveis. Isso é claro quando, ao se fazer a expansão em frações parciais, se percebe que a entrada afeta todos os polos, e todos os polos afetam a saída

Observabilidade

Exemplo – verifique se o sistema abaixo é de estado completamente observável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad \mathrm{y(t)} = [4\ 5\ 1]\mathbf{x}$$

Observabilidade

Exemplo – verifique se o sistema abaixo é de estado completamente observável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad \mathrm{y(t)} = [4\ 5\ 1]\mathbf{x}$$

Resposta:

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid (\mathbf{A}^*)^2\ \mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

É possível ver que o posto é menor que 3:

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Dessa forma, o sistema não é completamente observável.

Caso se altere a representação do sistema para função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Pode-se ver que os fatores (s + 1) se cancelam.

Observabilidade

Veja que o exemplo anterior pode ser visto como um sistema cujos estados são posição, velocidade e aceleração, e a entrada fornece derivada de aceleração (jerk).

Assim, é óbvio que, se a posição é medida, é possível estimar velocidade e aceleração. Veja:

- Mantenha a definição de A
- Defina $C = [1\ 0\ 0]$
- Calcule a matriz de observabilidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cujo posto, obviamente, é 3

Observabilidade

Veja que, se for medido velocidade e/ou aceleração, apesar de inicialmente menos óbvio, também é possível estimar os 3 estados:

Ex: velocidade

```
A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
C = [0 1 0];
Ob = ctrb(A',C')
```

$\rightarrow$

```
Ob =

     0     0    -6
     1     0   -11
     0     1    -6
```

O motivo é que, com a velocidade x_2 se obtém a aceleração x_3, e x_3 depende de x_1 (primeiro "-6" da última linha de A)

Veja que, se trocarmos o "-6" por zero, a primeira linha de Ob se torna inteira nula, diminuindo para 2 o posto da matriz.

Veja também que, se trocarmos "-6" por um número muito pequeno, a matriz de observabilidade se torna mal-condicionada (determinante muito próximo de zero, mas diferente de zero), o que significa dizer que, apesar da posição ser observável, é de "difícil observação".

Observabilidade

Forma alternativa da condição de observabilidade completa de estado

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Em que:

x = vetor de estados (vetor *n*)
u = sinal de entrada (vetor *r*)
y = vetor de saída (vetor *m*)
A = matriz de estados (matriz *n* x *n*)
B = matriz de controle (matriz *n* x r)
C = matriz de saída (matriz *m* x *n*)
D = matriz de transmissão direta (matriz *m* x *r*)

Se **A** for uma matriz diagonal, basta ver se existe, em cada coluna de **C**, ao menos um elemento não nulo.

Se **A** não for diagonal, mas puder ser diagonalizável, pode-se aplicar a transformação linear abaixo:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

E verificar se, para cada coluna de **CP**, se existe ao menos um elemento não-nulo.

Observabilidade

Exemplo:

O sistema abaixo é completamente observável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad y = [1 \quad 3]\mathbf{x}$$

O sistema abaixo não é completamente observável :

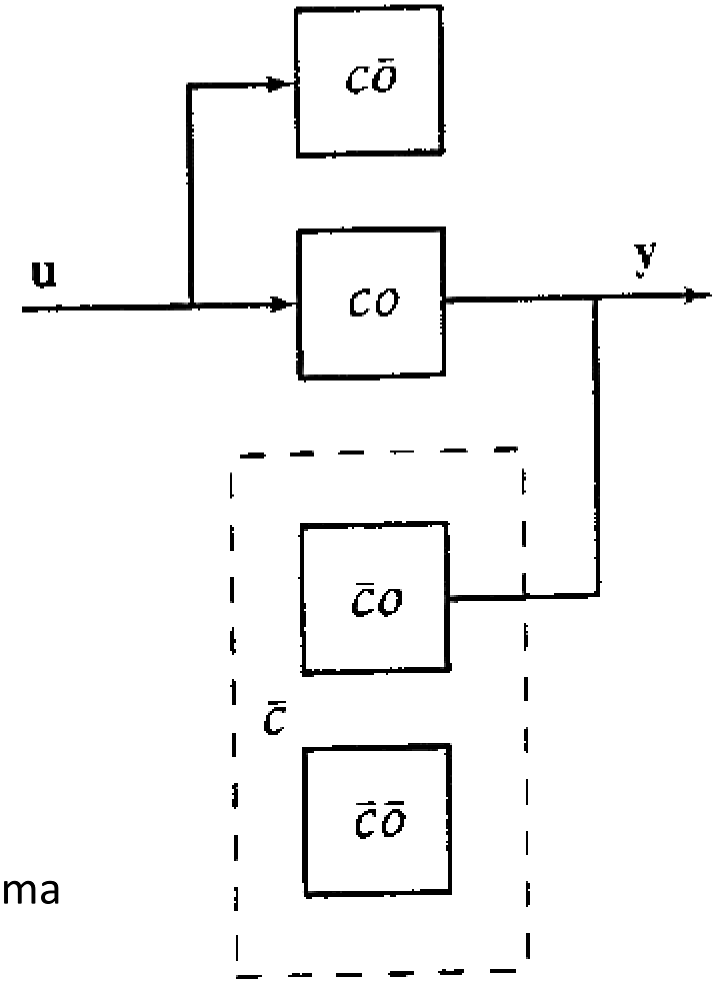
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad y = [0 \quad 1]\mathbf{x}$$

Decomposição de Kalman

Todo modelo em espaço de estados pode ser transformado na seguinte forma canônica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{o}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{co} \\ \bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{co} \\ \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_{co} \;\; \mathbf{0} \;\; \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}o} \;\; \mathbf{0}]\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$



A função de transferência desse sistema depende apenas dos elementos relacionados ao sub bloco controlável e observável, ou seja:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} &= \bar{\mathbf{A}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \bar{\mathbf{B}}_{co}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \mathbf{D}\mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{G}}(s) &= \bar{\mathbf{C}}_{co}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{co})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_{co} + \mathbf{D} \end{aligned}\right\} \text{Realização mínima}$$

Decomposição de Kalman

Separando a parte controlável:

Seja $\mathcal{C} = [\mathbf{B} \;\; \mathbf{AB} \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$, $\rho(\mathcal{C}) = m < n$

Constrói-se $\boldsymbol{P}^{-1}$ cujas m primeiras colunas são m vetores linearmente independentes de $\mathcal{C}$, e outras $(n-m)$ colunas são vetores quaisquer, desde que sejam linearmente independentes dos demais. Definindo $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_c \;\; \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

O posto da matriz de controlabilidade indica quantos dos estados são controláveis. Ou seja, m estados são controláveis.

Raciocínio similar se aplica à observabilidade.