Compensadores – projeto via LGR

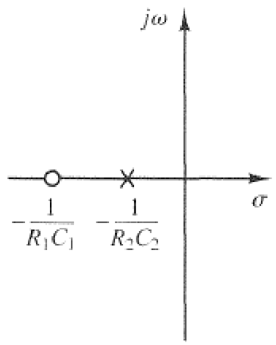
Compensadores por atraso, atraso e avanço e compensadores em paralelo

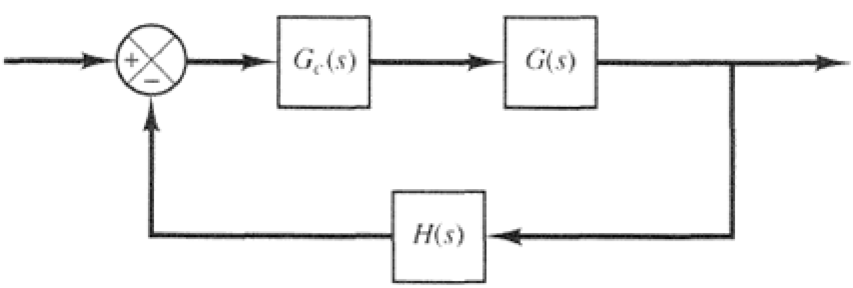
Compensadores por atraso de fase

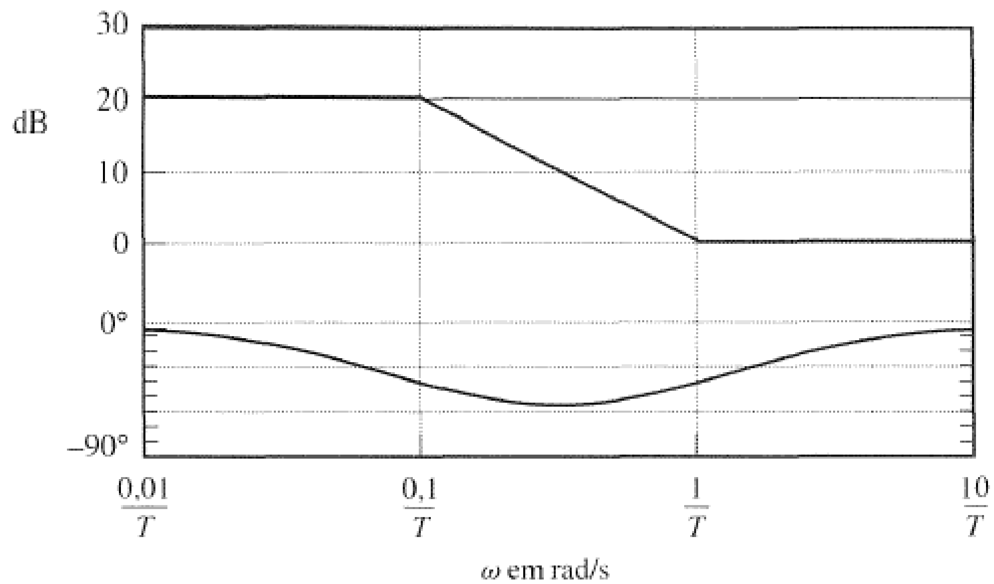
Relembrando: Compensadores atraso de fase

- Filtro passa baixa – aumenta ganho DC e de baixa frequência
- Adiciona fase negativa em baixa frequência – mudança não afeta significativamente margem de fase / desempenho transitório
- Ganho de baixa frequência: **melhora regime permanente**
- Aumenta em um a ordem do sistema

$$K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}, \ \beta > 1$$







Compensador por atraso de fase

Objetivo: Aumentar ganho de malha aberta K (aumentar a constante de erro estático) sem alterar significativamente os polos dominantes escolhidos previamente via ajuste de ganho (LGR)

Seja:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}, \qquad \beta > 1$$

Veja que, por exemplo, a constante de erro estático de velocidade é dada por:

$$K_V = \lim_{s \to 0} s G_c(s) G(s) = K_{V,\text{ini}} \cdot \lim_{s \to 0} G_c(s) = K_{V,\text{ini}} \cdot (K_C \beta)$$

Percebe-se que, sob esse critério, tem-se que $K_C \beta > 1$ e que deve ser elevado para melhorar o desempenho. Veja que, do ponto de vista de Bode, $K_C \beta$ é o ganho DC ($s = j\omega = 0$) do compensador

Compensador por atraso de fase

Por outro lado, deseja-se **não alterar** o LGR original perto do polo dominante s_p previamente escolhido

Se o projetista escolhe T e β tal que $|s_p| \gg \frac{1}{T} > \frac{1}{\beta T}$ e $K_c \approx 1$:

$$|G_c(s_p)| = \left| K_c \frac{s_p + \frac{1}{T}}{s_p + \frac{1}{\beta T}} \right| \approx \left| K_c \frac{s_p}{s_p} \right| = K_c \approx 1$$

Pode-se, por outro lado, projetar T e β tal que:

$$-5° < \angle\left(s_p + \frac{1}{T}\right) - \angle\left(s_p + \frac{1}{\beta T}\right) < 0$$

Conseguindo ambos, perceba que magnitude e fase não são alteradas próximo de s_p, mantendo o LGR quase inalterado no local desejado.

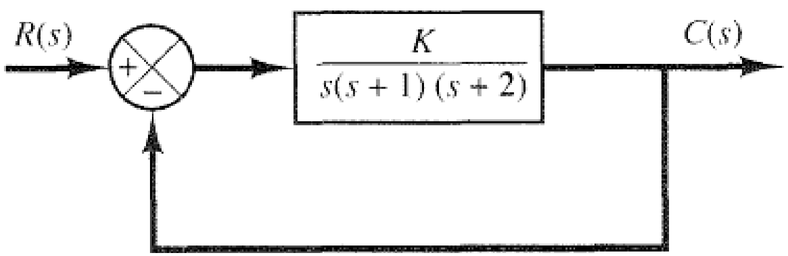
Ambos os critérios são atingidos posicionando polo e zero perto da origem.

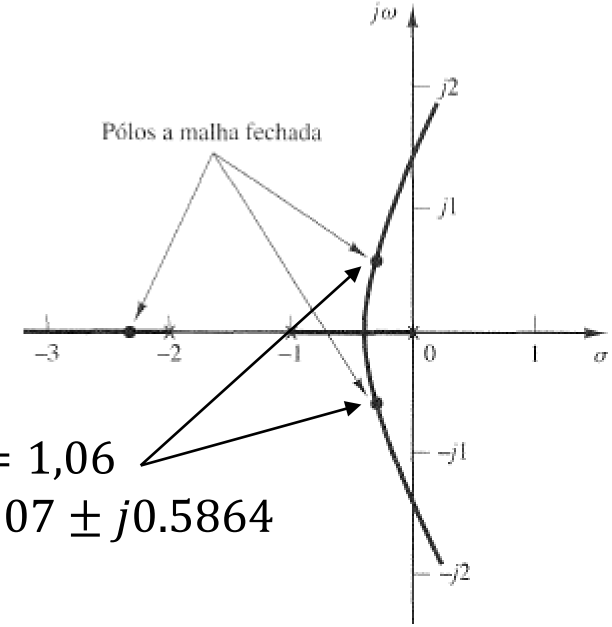
Etapas

1. Esboce o LGR do sistema original, e escolha um valor de ganho que forneça o comportamento transitório adequado.
2. Calcule a constante de erro estático apropriada: de posição (K_p), velocidade (K_v), de aceleração (K_a), ...
3. Determine o incremento necessário para se obter a constante de erro desejada:
$$K_{des} = K_{ini} \cdot (K_c\beta) \rightarrow K_c\beta = \frac{K_{des}}{K_{ini}} \xrightarrow{K_c \approx 1} \beta = \frac{K_{des}}{K_{ini}}$$
4. Escolha um polo e um zero adequados escolhendo T. Verifique a fase. Valores pequenos de T gerarão mudança de fase significativa. Valores grandes de T farão polo e zero se aproximar demais da origem, além de ser mais custoso de fazer (componentes de maior qualidade)
5. Desenhe o novo LGR para obter novo s_p. Se a mudança de fase foi pequena no item 4, a mudança será pouco significativa. Em uma aproximação grosseira, assumir que s_p original ainda pode ser escolhido (o que poupa redesenhar LGR).
6. Escolha K_c para cumprir a condição de módulo.

Exemplo 1

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$





$K = 1{,}06$

$s_p = -0.3307 \pm j0.5864$

Polo de malha fechada previamente escolhido segundo algum critério de desempenho. Polos dominantes: $\zeta = 0.491$, $\omega_n = 0{,}673$ rad/s

Requisitos:

- $K_v = 5$
- Zero do compensador em 0.05 (ou seja, $T = 20$)

Pergunta: por que o problema escolheu K_v, e não K_p ou K_a?

Exemplo 1

Resolução:

1. Já foi fornecido pelo problema (LGR e polo desejado)
2. Calcular K_v:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{1.06}{2} = 0.53$$

3. Ganho desejado:

$$\beta = \frac{5}{0.53} = 9.4 \approx 10$$

4. Se $1/\mathrm{T} = 0.05$, então $\frac{1}{\beta T} = 0.005$, ou seja:

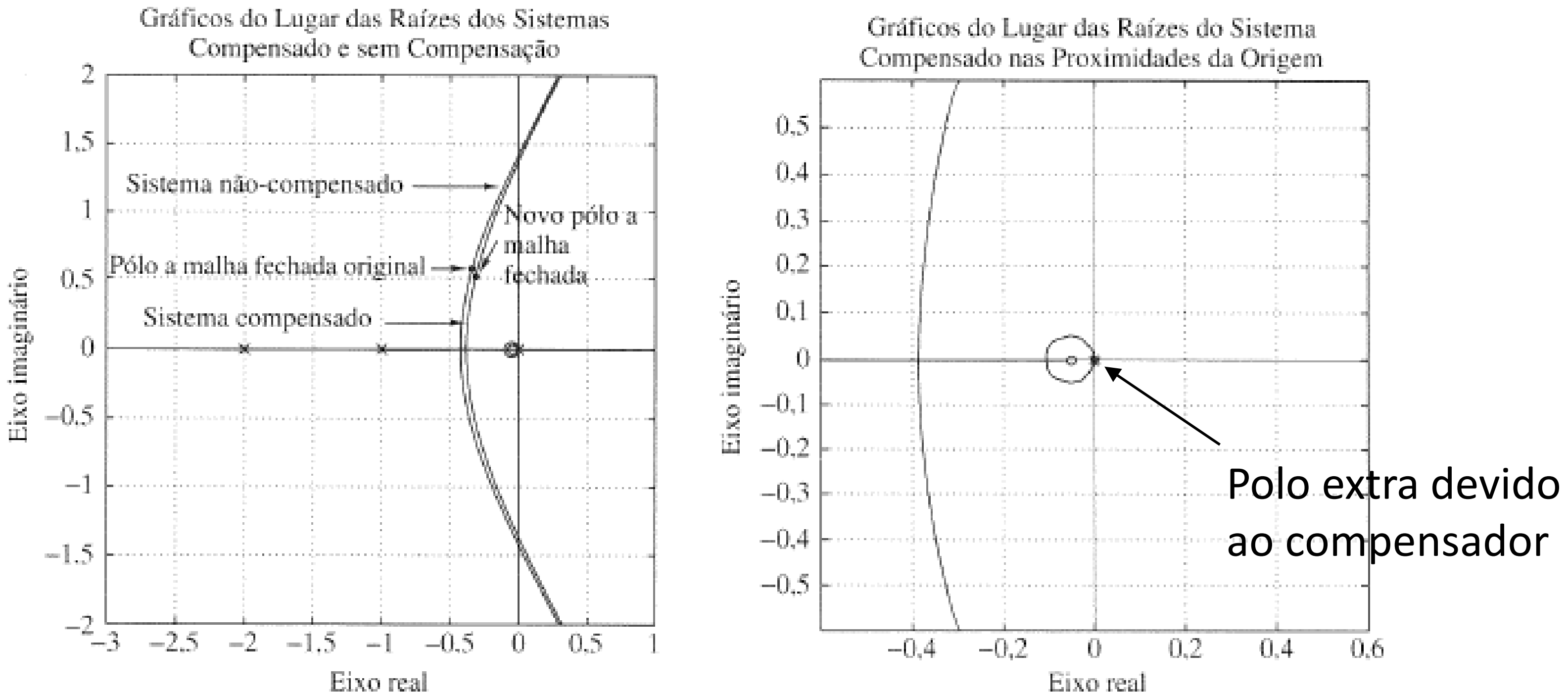
$$G_c(s) = K_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

$$\angle G_c(s)|_{s=s_p} \approx -4° \text{ (um pouco elevada)}$$

Exemplo 1

5. (resolução grosseira) suponha $s_p = -0.3307 \pm j0.5864$ e pule esse item

5. (resolução sofisticada): redesenhe o LGR e escolha ponto com características similares de desempenho transitório. Por exemplo, com mesmo ζ, tem-se $s_p = -0.31 \pm j0.55$:



Exemplo 1

6. Calcule K_c:

$$\left| K_c \frac{s+0.05}{s+0.005} \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \right|_{s=s_p} = 1$$

Se $s_p = -0.3307 + j0.5864$, sabemos que

$$\left| \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \right|_{s=s_p} = 1$$

Então:

$$\left| K_c \frac{s+0.05}{s+0.005} \right|_{s=s_p} = 1 \rightarrow K_c = 0.9692$$

Se $s_p = -0.31 \pm j0.55$:

$$K_c = \left| \frac{s+0.005}{s+0.05} \frac{s(s+1)(s+2)}{1.06} \right|_{s=s_p} = 0.9656$$

Exemplo 1

Comparando os sistemas:

Original:

- Polos: $-0.3307 \pm j0.5864, -2.3386,$
- $\zeta = 0.491, \; \omega_n = 0{,}673$ rad/s
- $K_v = 0.53$

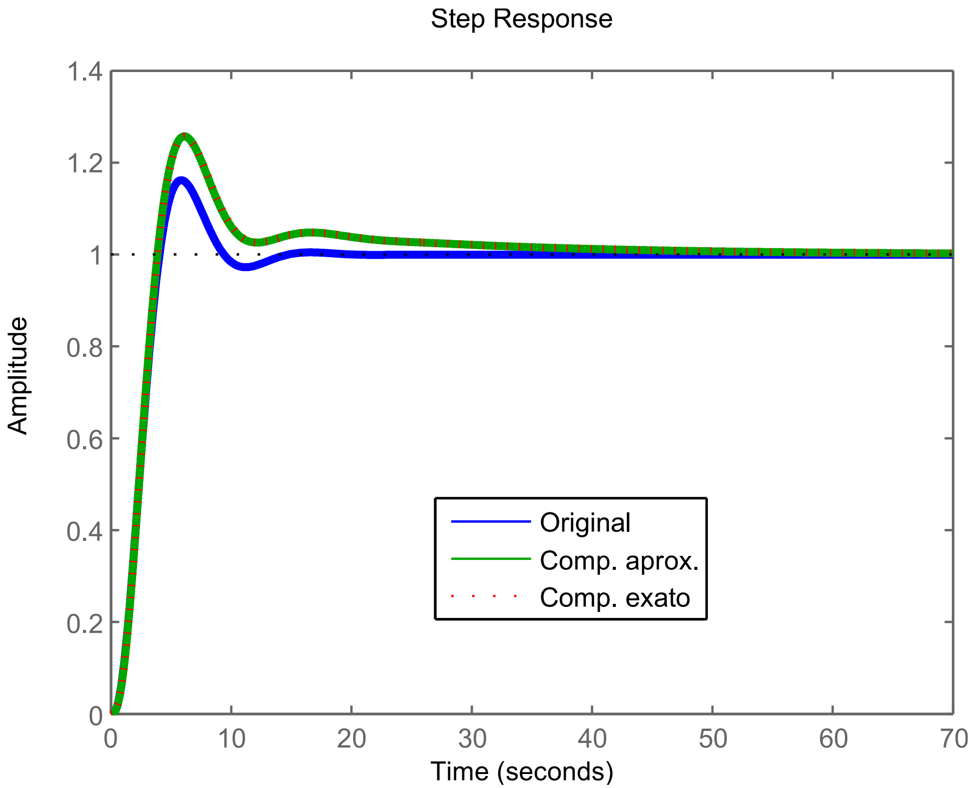
Compensado (resolução grosseira – $K_c = 0.9692$)

- Polos: $-0.312 \pm j0.552, -2.33, -0.0549$
- $\zeta = 0.492 \;\; \omega_n = 0{,}634$ rad/s
- $K_v = \; \beta K_c K_{v,ini} = 9.692 \cdot 0.53 = 5.13 \rightarrow e_{ss} = 0.195$

Compensado (resolução mais sofisticada – $K_c = 0.9656$)

- Polos: $-0.312 \pm j0.551, -2.33, -0.0549$
- $\zeta = 0.493, \; \omega_n = 0{,}633$ rad/s
- $K_v = \; \beta K_c K_{v,ini} = 9.656 \cdot 0.53 = 5.12 \rightarrow e_{ss} = 0.195$

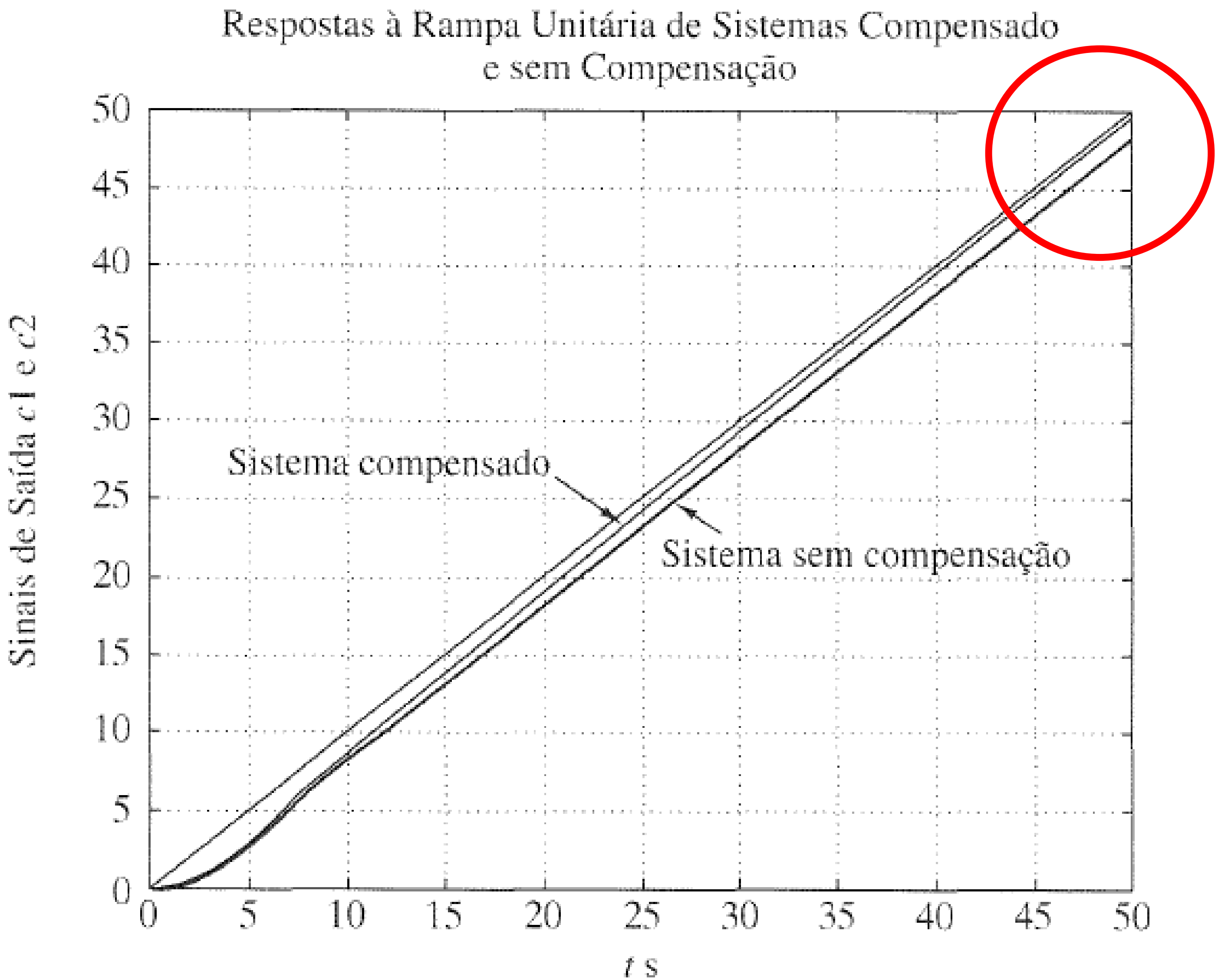
Exemplo 1




```
s_p = -.3307+0.5864j
Kc_1 = abs(s_p+0.05)/abs(s_p+0.005)

G = zpk([],[0 -1 -2], 1.06);
%Kc_1 = 0.9692;
Kc_2 = 0.9656;
Gc = tf([1 0.05],[1 0.005]);

CR_0 = feedback(G,1)
CR_1 = feedback(Kc_1*Gc*G,1)
CR_2 = feedback(Kc_2*Gc*G,1)

disp('Aproximada')
damp(CR_1)
disp('Mais exata')
damp(CR_2)

step(CR_0)
hold on
step(CR_1)
step(CR_2);
legend('Original', 'Comp. aprox.',
'Comp. exato');
```

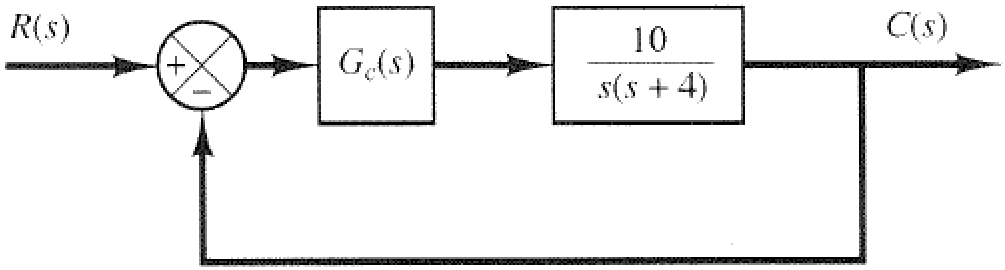
Zero e polo extras geram cauda alongada, sobressinal mais elevado. Sistema compensado apresenta resposta transitória degradada.

Exemplo 1


Respostas à Rampa Unitária de Sistemas Compensado
e sem Compensação
Sinais de Saída c1 e c2
t s
Sistema compensado
Sistema sem compensação
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

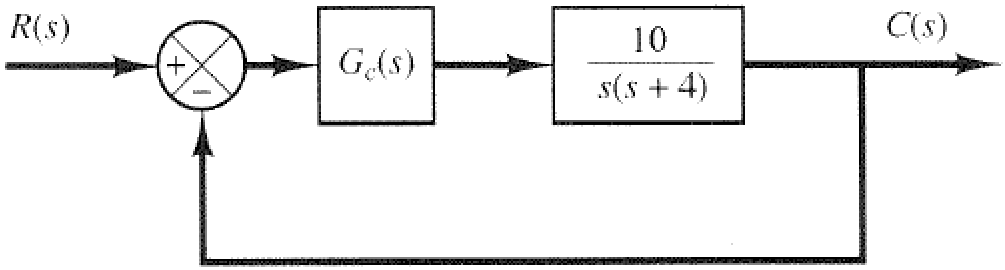
Exemplo 2

A.7.7.: $K_v = 50$, manter polos próximos à $s = -2 \pm j\sqrt{6}$



Exemplo 2

A.7.7.: $K_v = 50$, manter polos próximos à $s = -2 \pm j\sqrt{6}$



Resolução:

1. Polo e ganho original já fornecidos pelo problema
2. Calcular K_v:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{10}{4} = 2.5$$

3. Ganho desejado:

$$\beta = \frac{50}{2.5} = 20$$

Exemplo 2

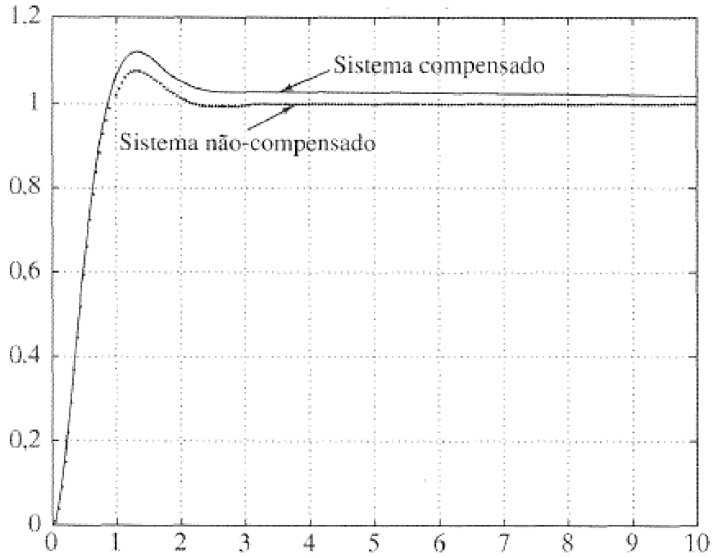
4. Escolha, por exemplo, $T = 10$. Então:

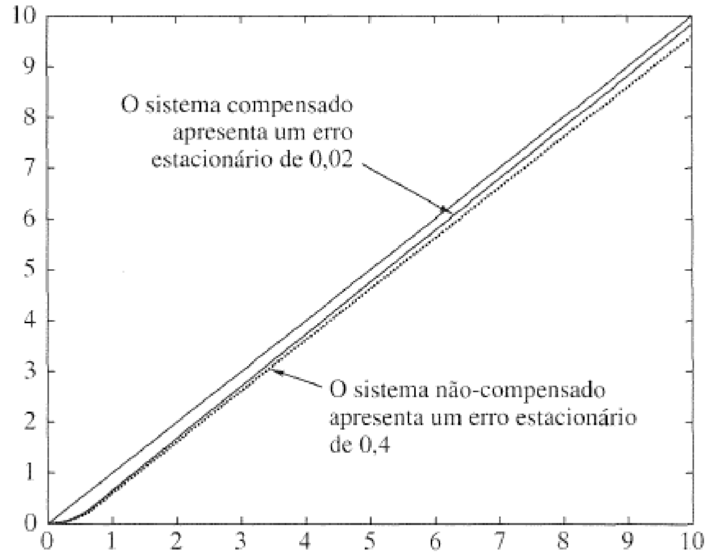
$$G_c(s) = K_c \frac{s + 0.1}{s + 0.005}$$

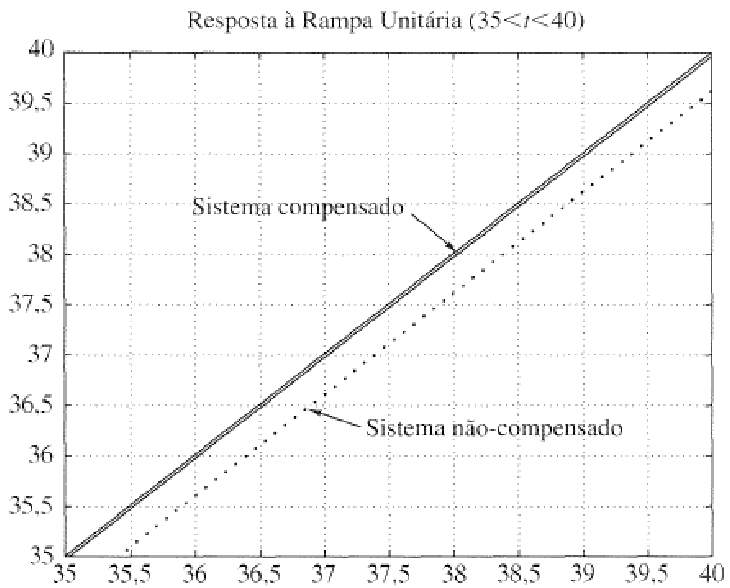
$\angle G_c(s)|_{s=-2+j\sqrt{6}} \approx -1{,}4°$ (valor pequeno – modifica pouco o LGR)

5. Dado que a modificação é pequena, assumir que polo dominante continua em $s_p = -2 + j\sqrt{6}$
6. Assumir que podemos considerar $K_c = 1$

Exemplo 2


Sistema compensado
Sistema não-compensado
1.2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


O sistema compensado apresenta um erro estacionário de 0,02
O sistema não-compensado apresenta um erro estacionário de 0,4
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


Resposta à Rampa Unitária (35<t<40)
Sistema compensado
Sistema não-compensado
40 39,5 39 38,5 38 37,5 37 36,5 36 35,5 35
35 35,5 36 36,5 37 37,5 38 38,5 39 39,5 40

Compensadores por atraso e avanço

Para obter uma melhoria tanto em resposta transitória quanto em regime permanente, deve-se utilizar ambos os compensadores

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}, \qquad \beta > 1, \qquad \gamma = \frac{1}{\alpha} > 1$$

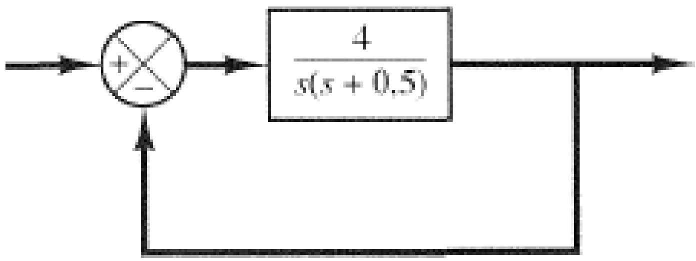
Passos (caso $\gamma \neq \beta$):

1. Projetar compensador por avanço de fase de modo usual, como se não existisse o compensador por atraso de fase
2. Projetar o compensador por atraso de fase considerando o conjunto planta + compensador por avanço.

Obs: o livro ensina um segundo caso, $\gamma = \beta$, que não estudaremos

Exemplo 1

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0{,}5)}$$

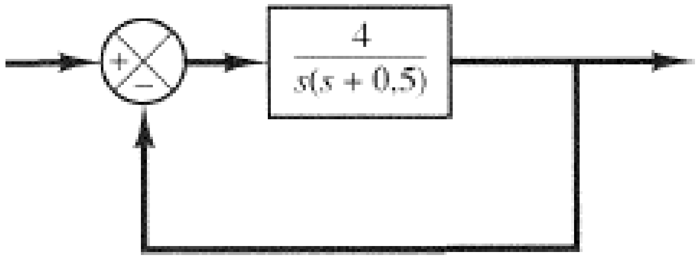


Em malha fechada: $s = -0{,}25 + j1{,}9843 \rightarrow \omega_n = 2, \zeta = 0{,}125, K_v = 8$

Objetivo: $\omega_n = 5, \zeta = 0{,}5, K_v = 80$. Use um dos zeros do compensador por avanço para cancelar um dos polos.

Exemplo 1

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0{,}5)}$$



Em malha fechada: $s = -0{,}25 + j1{,}9843 \rightarrow \omega_n = 2, \zeta = 0{,}125, K_v = 8$

Objetivo: $\omega_n = 5, \zeta = 0{,}5, K_v = 80$. Use um dos zeros do compensador por avanço para cancelar um dos polos.

Solução:

Polo dominante desejado:

$$s_p = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.5 \pm j4.33$$

Fase em $s = s_p$:

$$\angle G(s_p) = -\big(\angle(-2.5 + j4.33) + \angle(-2 + j4.33)\big) = -235°$$

Fase que deve ser fornecida pelo compensador por avanço:

$$-(\pm 180° - 235°) = 55°$$

Exemplo 1

A pedido do enunciado, define-se $s + \frac{1}{T_1} = s + 0{,}5$. Obs: veja que ele não especificou qual polo cancelar, mas cancelar o polo na origem muda o sistema de tipo 1 para tipo 0.

Sabendo que:

$$\angle(s + 0{,}5)\Big|_{s=s_p} - \angle\left(s + \frac{\gamma}{T_1}\right)\Big|_{s=s_p} = 55°$$

$$-\angle(s + a)\Big|_{s=s_p} = 55° - 115° = -60° \qquad \text{obs:} \left(a = \frac{\gamma}{T_1}\right)$$

$$\frac{4.33}{-2.5 + a} = \tan 60° \rightarrow a = 5$$

Exemplo 1

Condição modular:

$$K_c \left| \frac{s+0.5}{s+5} \frac{4}{s(s+0,5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 1$$

$$K_c \left| \frac{4}{s(s+5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 1$$

$$K_c = \left| \frac{s(s+5)}{4} \right|_{s=-2.5+j4.33} \rightarrow K_c = 6.25$$

Assim, o compensador de avanço é definido como:

$$G_{c1}(\mathrm{s}) = 6.25 \frac{\mathrm{s}+0.5}{s+5}$$

Exemplo 1

Agora projetando a compensação por atraso:

$$K_v = \beta\, K_{v,\mathrm{ini}} \cdot \lim_{s\to 0} G_{c1}(s) = 8 \cdot 0.625 \cdot \beta = 80 \to \beta = 16$$

Deve-se escolher T_2 suficientemente grande de modo a não afetar a fase demasiadamente. Por sugestão do livro: $T_2 = 5$

Calculando a fase:

$$\angle\left(s_p + \frac{1}{5}\right) - \angle\left(s_p + \frac{1}{16 \cdot 5}\right) = -1.9°$$

Então:

$$G_{c2}(s) = \frac{s + 0.2}{s + 1/80}$$

Projeto concluído, agora visualizar resultados

Exemplo 1

$$G_c(s)G(s) = \frac{25{,}04(s + 0{,}2)}{s(s + 5{,}0)(s + 0{,}01247)}$$

Gráfico do Lugar das Raízes do Sistema Compensado

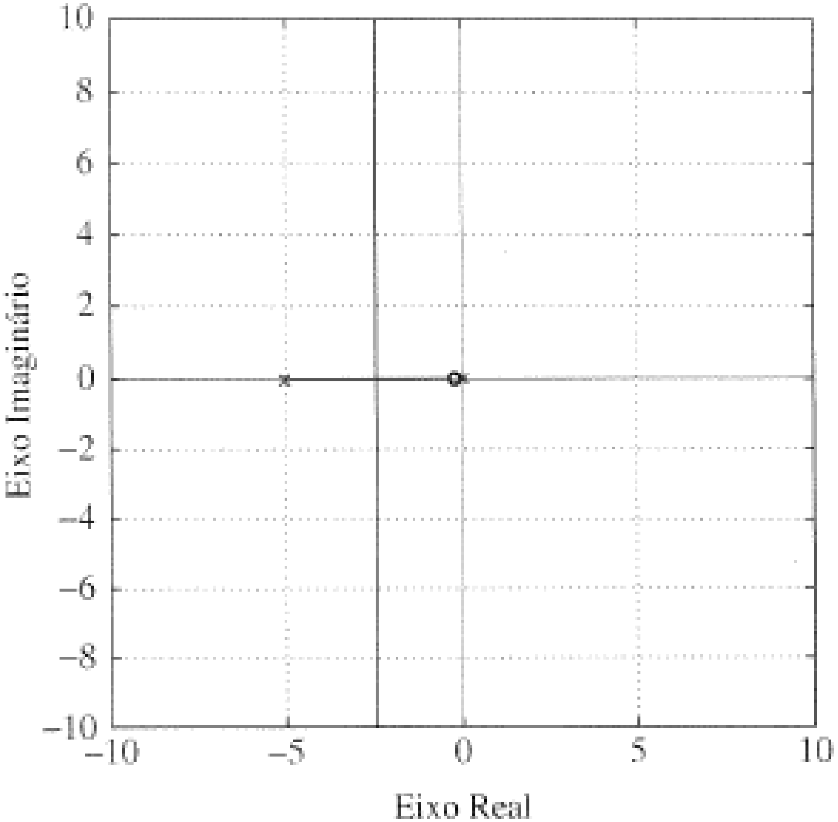
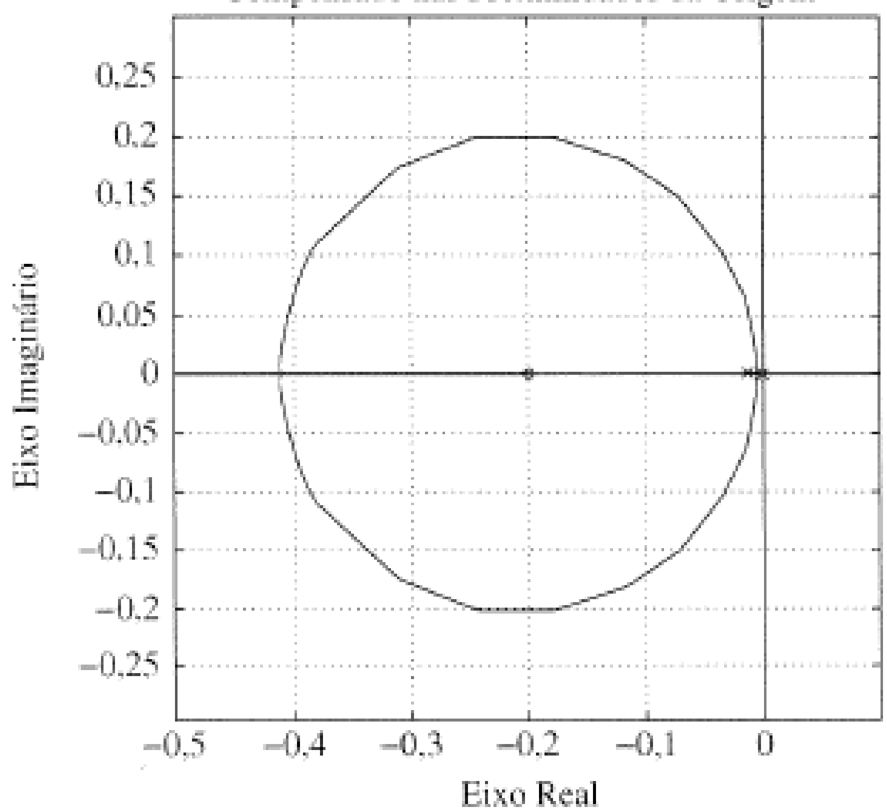
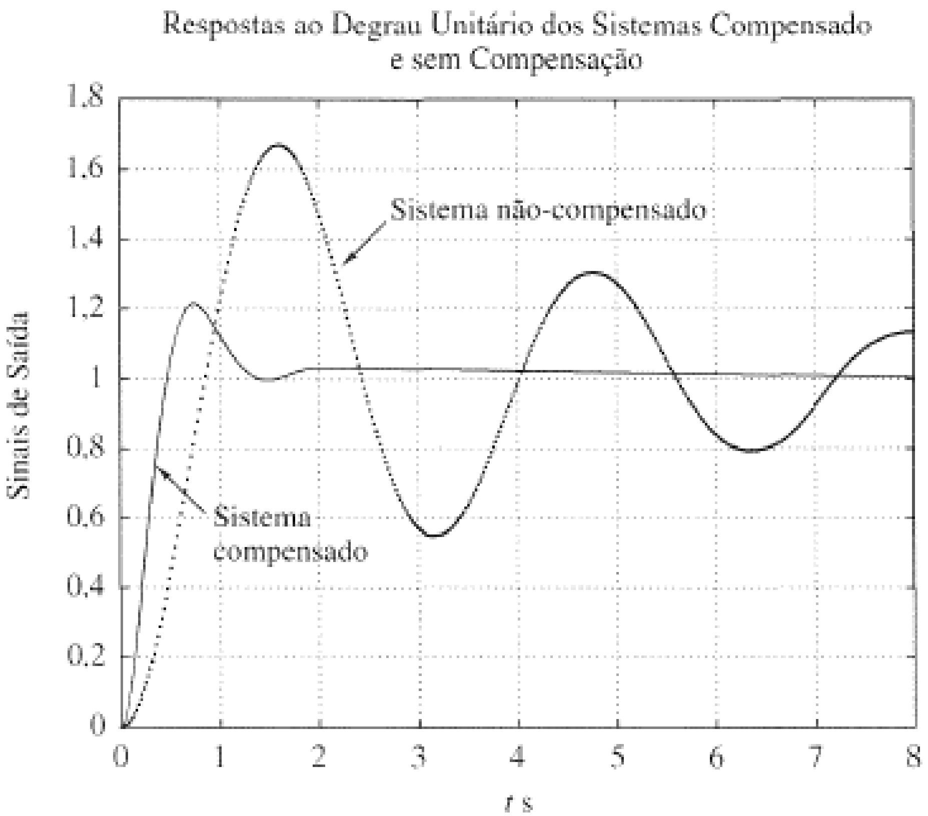
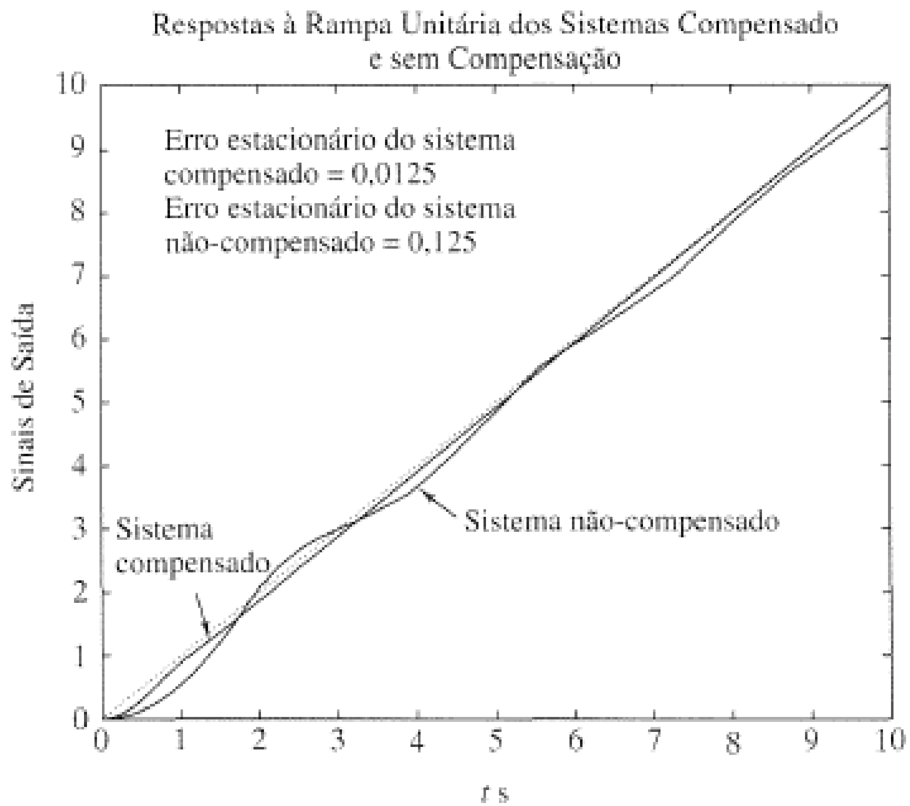


Gráfico do Lugar das Raízes do Sistema Compensado nas Proximidades da Origem

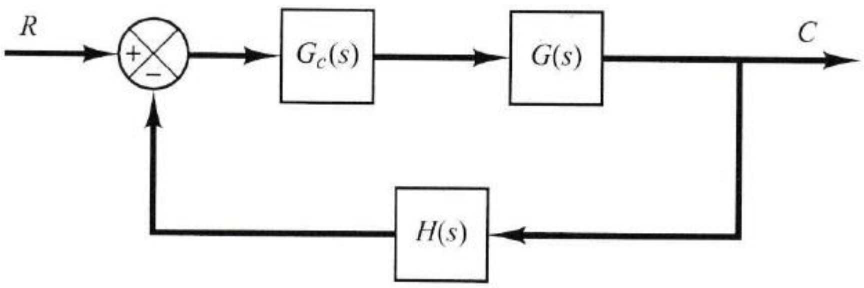


Exemplo 1

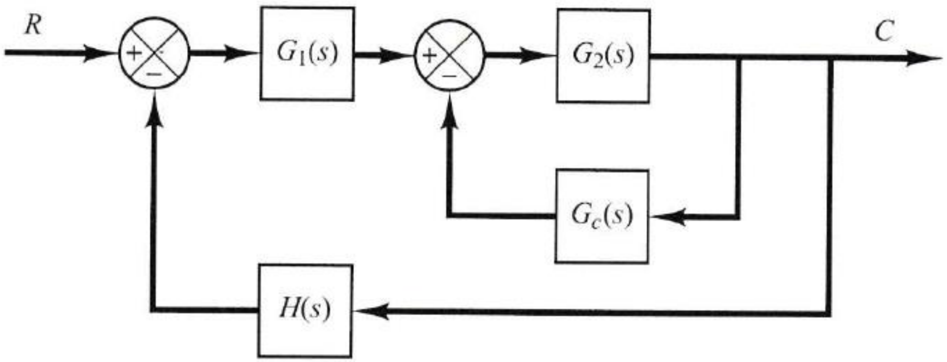

Respostas ao Degrau Unitário dos Sistemas Compensado e sem Compensação
Sistema não-compensado
Sistema compensado
Sinais de Saída
t s
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8


Respostas à Rampa Unitária dos Sistemas Compensado e sem Compensação
Erro estacionário do sistema compensado = 0,0125
Erro estacionário do sistema não-compensado = 0,125
Sistema compensado
Sistema não-compensado
Sinais de Saída
t s
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Compensadores em paralelo



(a)



(b)

Seja o compensador em série (a) que estamos estudando até agora, e um exemplo de compensador em paralelo (b).

Sabemos que, em (a):

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G}{1 + G_c G H} = \frac{K_c G_c' G}{1 + K_c G_c' G H}$$

Dessa equação obtemos a equação característica:

$$1 + K_c G_c' G H = 0$$

Da qual obtemos:

$$K_c G_c'(GH) = -1 = 1\angle 180°$$

Compensadores em paralelo

Já no caso (b), após manipulações:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_c + G_1 G_2 H}$$

Veja que a equação característica é diferente:

$$1 + G_2 G_c + G_1 G_2 H = 0$$

Se pudermos escrever do mesmo “estilo”, podemos usar as técnicas de esboço de LGR que conhecemos.

Para isso, isolamos os termos que contém G_c (ou K_c) dos que não contém. Após, aplicamos uma divisão para que o termo que não contém G_c se torne -1. Por exemplo:

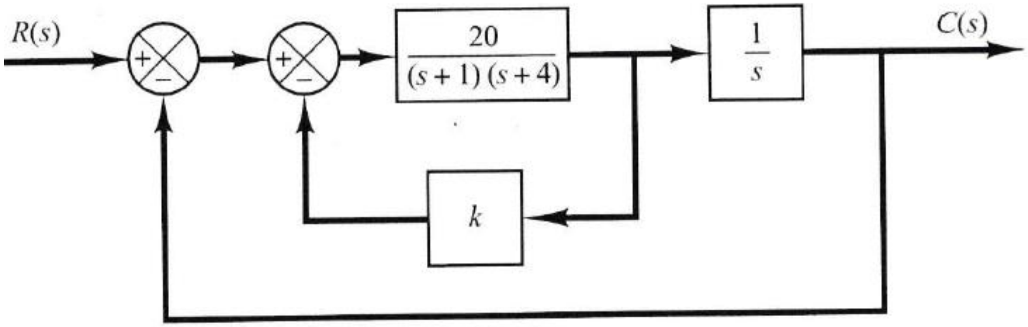
$$G_2 G_c = -(1 + G_1 G_2 H)$$

$$\frac{G_2 G_c}{1 + G_1 G_2 H} = -\frac{1 + G_1 G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} \rightarrow K_c G_c' \left(\frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} \right) = -1$$

Assim, temos um controlador de ganho ajustável multiplicando uma F.T. de “malha aberta”.

Exemplo 1

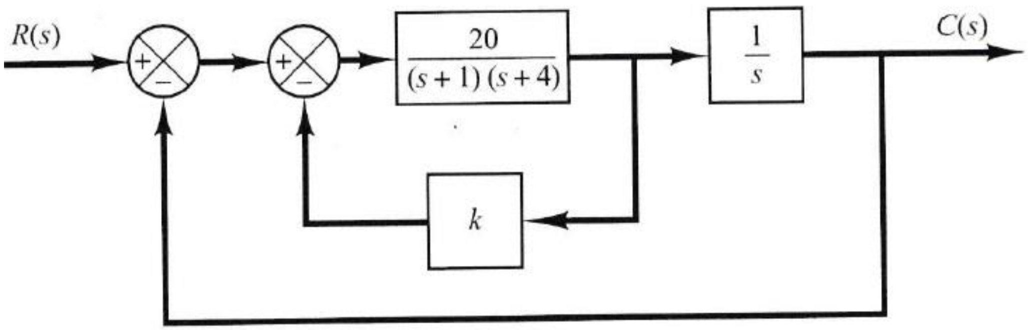
Seja o sistema com realimentação de velocidade:



Use o LGR para ajustar o ganho k de forma que o par de polos complexo conjugados dominante tenha fator de amortecimento $\zeta = 0.4$

Exemplo 1

Seja o sistema com realimentação de velocidade:



Use o LGR para ajustar o ganho k de forma que o par de polos complexo conjugados dominante tenha fator de amortecimento $\zeta = 0.4$

Solução:

Primeiramente, obter função de transferência de malha fechada:

$$\frac{C}{R} = \frac{20}{s(s+1)(s+4) + 20ks + 20} = \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20ks + 20}$$

Exemplo 1

A equação característica é:

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20ks + 20 = 0$$

Reescrevendo:

$$\frac{20ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = -1$$

Com isso, pode-se esboçar o LGR com as técnicas usuais (exemplo – via MATLAB)

Exemplo 1

Duas possibilidades de polos com fator de amortecimento desejado, P e Q.

P obtido com $k = 0.449$

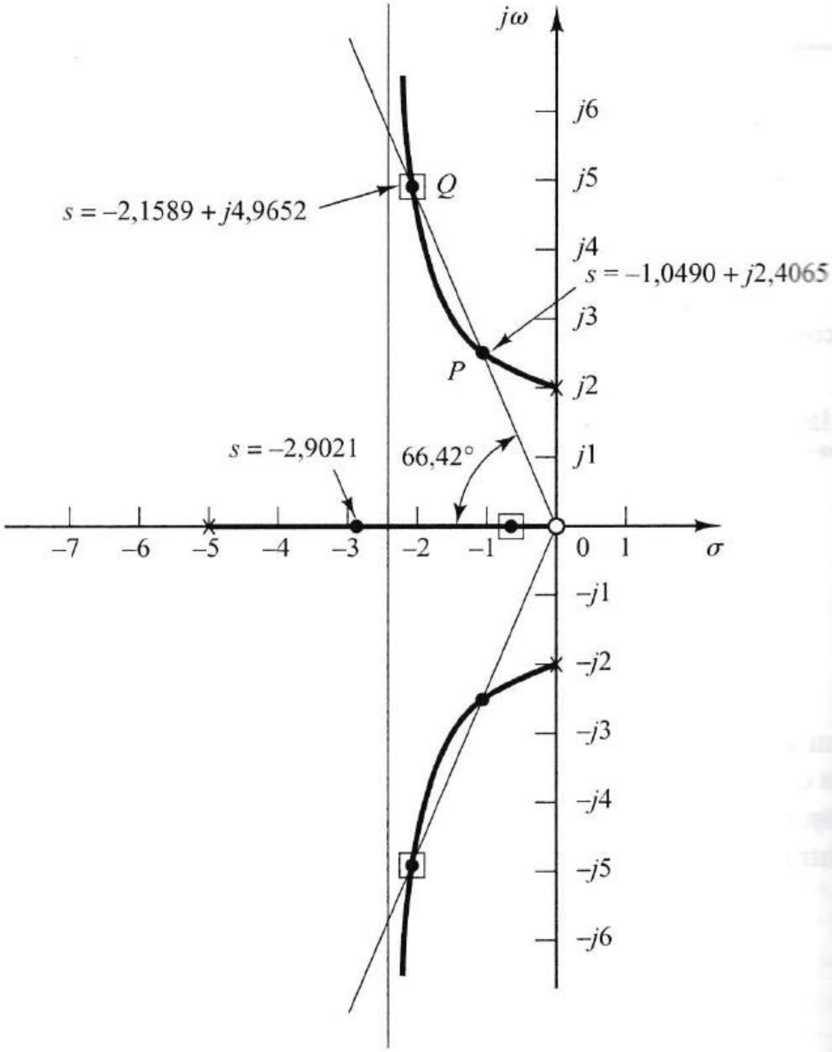
Q obtido com $k = 1.413$

Qual deles escolher?

Uma dica: o zero de malha aberta na origem não é um zero de malha fechada. Ele é resultado da manipulação para que fosse possível esboçar o LGR:

$$\frac{C}{R} = \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20ks + 20}$$

(Veja, não tem zero)



Exemplo 1

$k = 0.449$ é a melhor escolha, pois apresenta como polos **dominantes** o par de polos com características desejadas. $k = 1.413$ apresenta um polo real como polo dominante.