Espaço de Estados

Alocação de polos

Realimentação de estados

Seja o sistema dinâmico SISO (única entrada, única saída) abaixo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathrm{u}$$
$$\mathrm{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathrm{Du}$$

Propõe-se o seguinte sinal de controle:

$$u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

Em que $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (ou $r \times n$, se tivermos r sinais de controle)

Substituindo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\boldsymbol{K}\mathbf{x}) \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\mathbf{x} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \widetilde{\boldsymbol{A}}\mathbf{x}$$

Gera-se uma nova matriz de estados $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, com características dinâmicas possivelmente distintas de $\boldsymbol{A}$.

Teorema: se o conjunto $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ é controlável, podem-se escolher arbitrariamente todos os autovalores de $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ através do projeto de $\boldsymbol{K}$. Se o posto da matriz de controlabilidade é $m < n$, podem-se escolher apenas m dos autovalores, e $(m - n)$ autovalores ficarão inalterados.

Realimentação de estados

Comentários:

- A realimentação envolve todos os estados. Por exemplo, se é um sistema com 10 estados, são 10 realimentações, cada uma com um ganho k_i diferente
- É um caso mais geral que a realimentação de saída utilizada em controle via transformada de Laplace (LGR, Bode, por exemplo), que envolve apenas uma realimentação
- Há um custo extra da necessidade de se conhecer todos os estados:
  - Sensores extras, e/ou
  - Observador de estados
- Em um sistema não controlável, se os $(m - n)$ autovalores não controláveis são estáveis, e se os autovalores instáveis são controláveis, tem-se um sistema estabilizável
- Não há entrada externa - sistema de regulação:

$$\boldsymbol{x}(0) \neq 0, \qquad x_\infty \to 0$$

Projetando $\boldsymbol{K}$ – Forma canônica controlável

Suponha que o sistema está na sua forma controlável:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que a equação característica é:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Seja $\boldsymbol{K} = [k_n \; k_{n-1} \; \dots k_1]$, temos:

$$\boldsymbol{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_n & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & k_1 \end{bmatrix}$$

Projetando $\boldsymbol{K}$ – Forma canônica controlável

Então:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_n + k_n) & -(a_{n-1} + k_{n-1}) & -(a_{n-2} + k_{n-3}) & \dots & -(a_1 + k_1) \end{bmatrix}$$

Nova equação característica:

$$\lambda^n + (a_1 + k_1)\lambda^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + k_{n-1})\lambda + (a_n + k_n) = 0$$

Desejam-se os polos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Eles fornecem a equação característica abaixo:

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)\dots(\lambda - \mu_n) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

Comparando ambas as equações, obtém-se $\boldsymbol{K}$

$$a_i + k_i = \alpha_i$$

Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

Autovalores desejados (polos de malha fechada desejados):

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm j4, \qquad \lambda_3 = -10$$

(dois polos dominantes, um que pode ser desprezado)

Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u = -\boldsymbol{Kx}$$

Autovalores desejados (polos de malha fechada desejados):

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm j4, \qquad \lambda_3 = -10$$

(dois polos dominantes, um que pode ser desprezado)

Solução:

1) Verificar se o sistema é controlável. Sim, (forma canônica controlável).

2) Obter equação característica: $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 1$

3) Obter equação característica desejada:

$$(\lambda + 2 + j4)(\lambda + 2 - j4)(\lambda + 10) = \lambda^3 + 14\lambda^2 + 60\lambda + 200$$

4) Comparar equações características:

$$\lambda^3 + (6 + k_1)\lambda^2 + (5 + k_2)\lambda + 1 + k_3 = \lambda^3 + 14\lambda^2 + 60\lambda + 200$$

5) Solução: $K = [k_3\ k_2\ k_1] = [199\ 55\ 8]$

Projetando $\boldsymbol{K}$ – Todos os casos

Se $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ não está na forma canônica controlável, pode-se transformar o espaço de estados para essa forma.

A matriz que transforma $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ para para a forma canônica controlável $(\widehat{\boldsymbol{A}}, \widehat{\boldsymbol{B}})$ é $\boldsymbol{T}^{-1}$, em que

$$\boldsymbol{T} = \mathcal{C}\boldsymbol{W}$$

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\widehat{\boldsymbol{x}}, \qquad \widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \qquad \widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$$

E os coeficientes de $\boldsymbol{W}$ são os coeficientes da equação característica:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Projetando $\boldsymbol{K}$ – Todos os casos

Nem sempre é conveniente trabalhar na forma canônica controlável. É possível, por exemplo, que os estados da forma original estejam sendo medidos por sensores, enquanto que os estados da forma canônica controlável não possuam significado físico

Solução 1: projetar controlador na forma canônica controlável e, depois, transformar de volta para a forma inicial. Ou seja:

1) Projete $\widehat{\boldsymbol{K}}$ assumindo que o sistema está na forma canônica:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \widehat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\boldsymbol{K}}\hat{\mathbf{x}}$$

Atenção: para projetar $\widehat{\boldsymbol{K}}$, precisamos **apenas** da equação característica de $\widehat{\mathbf{A}}$ que é a mesma de $\boldsymbol{A}$. Não é necessário transformar o sistema original para a forma controlável.

2) Transformando o sistema acima de volta para a forma original:

$$\boldsymbol{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\mathbf{x} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\widehat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} - \boldsymbol{B}\widehat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\mathbf{x}, \qquad \boldsymbol{K} = \widehat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}^{-1}$$

Solução apropriada para resolução via computador

Projetando $\boldsymbol{K}$ – Todos os casos

Solução 2 – Substituição direta: iguale a equação característica do sistema realimentado com a equação desejada:

$$|\lambda \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})| = (\lambda - \mu_1) \dots (\lambda - \mu_n) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

Em que $\mu_1, \dots, \mu_n$ são os autovalores desejados. Solução apropriada para se resolver manualmente, e apenas quando $n \leq 3$, pois determinante simbólico (com variáveis ao invés de número) de matriz $n > 3$ é complicado.

Solução 3 – Fórmula de Ackermann

O livro demonstra que

$$\boldsymbol{K} = [0\ 0\ \dots 0\ 1]\mathcal{C}^{-1}\phi(\boldsymbol{A})$$

Em que $\phi(\cdot)$ é a equação característica desejada, ou seja,

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \mu_1) \dots (\lambda - \mu_n) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

E $\boldsymbol{A}$ é a matriz de estado original (não realimentada)

A solução 3 é apropriada para ser resolvida via computador, e é a solução utilizada pelo MATLAB.

Exemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u = -\boldsymbol{Kx}$$

Autovalores desejados (polos de malha fechada desejados):

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm j4, \qquad \lambda_3 = -10$$

(dois polos dominantes, um que pode ser desprezado)

Exemplo 1 – Solução 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u = -\boldsymbol{Kx}$$

Autovalores desejados (polos de malha fechada desejados):

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm j4, \qquad \lambda_3 = -10$$

(dois polos dominantes, um que pode ser desprezado)

Solução 2 –

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}| = \lambda^3 + 14\lambda^2 + 60\lambda + 200$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 5 & \lambda + 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 \end{bmatrix} \right| = \lambda^3 + 14\lambda^2 + 60\lambda + 200$$

$$\lambda^3 + (6 + k_1)\lambda^2 + (5 + k_2)\lambda + 1 + k_3 = \lambda^3 + 14\lambda^2 + 60\lambda + 200$$

$$K = [k_3 \; k_2 \; k_1] = [199 \; 55 \; 8]$$

Exemplo 1 – Solução 3

Solução 3 –

$$\boldsymbol{K} = [0\ 0\ 1]\mathcal{C}^{-1}\phi(\boldsymbol{A})$$

$$\phi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^3 + 14\boldsymbol{A}^2 + 60\boldsymbol{A} + 200\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = [0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} = [199\ 55\ 8]$$

Exemplo 2 – Solução 1

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.
\end{aligned}
$$

Autovalores desejados:

$\lambda_{1,2} = -1{,}5 \pm j0{,}5$

$\lambda_{3,4} = -1 \pm j$

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 + 10.5\lambda^2 + 11\lambda + 5$$

Exemplo 2 – Solução 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Autovalores desejados:
$\lambda_{1,2} = -1{,}5 \pm j0{,}5$
$\lambda_{3,4} = -1 \pm j$

Solução:

- Obter equação característica de A

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -5 & \lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -5 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda(\lambda^3 - 5\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 5) = \lambda^4 - 5\lambda^2$$

Obs: o sistema em malha aberta é estável ou não? Por que?

Exemplo 2 – Solução 1

$$\lambda^4 - 5\lambda^2$$

- Obter equação característica desejada

$$\begin{aligned}\Delta_f(s) &= (s+1,5-j0,5)(s+1,5+j0.5)(s+1-j)(s+1+j)\\ &= s^4+5s^3+10,5s^2+11s+5\end{aligned}$$

- Obter $\bar{\boldsymbol{K}}$ apropriado para a forma canônica controlável

$$\bar{k} = [\; 5-0 \quad 11-0 \quad 10,5+5 \quad 5-0 \;] = [\; 5 \quad 11 \quad 15,5 \quad 5 \;]$$

- Calcular $\boldsymbol{T} = \mathcal{C}\boldsymbol{W}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- Obter $\boldsymbol{K}$

$$k = \bar{k}P^{-1} = [\; -\frac{5}{3} \quad -\frac{11}{3} \quad -\frac{103}{12} \quad -\frac{13}{3} \;]$$

Rastreamento

Regulação: fazer estados irem para zero

Rastreamento: seguir uma entrada de referência $r(t)$ (ex: degrau, rampa)

Seja o sistema dinâmico SISO (única entrada, única saída) abaixo, com $D = 0$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathrm{u}$$
$$\mathrm{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Propõe-se o seguinte sinal de controle:

$$u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + r$$

Substituindo:

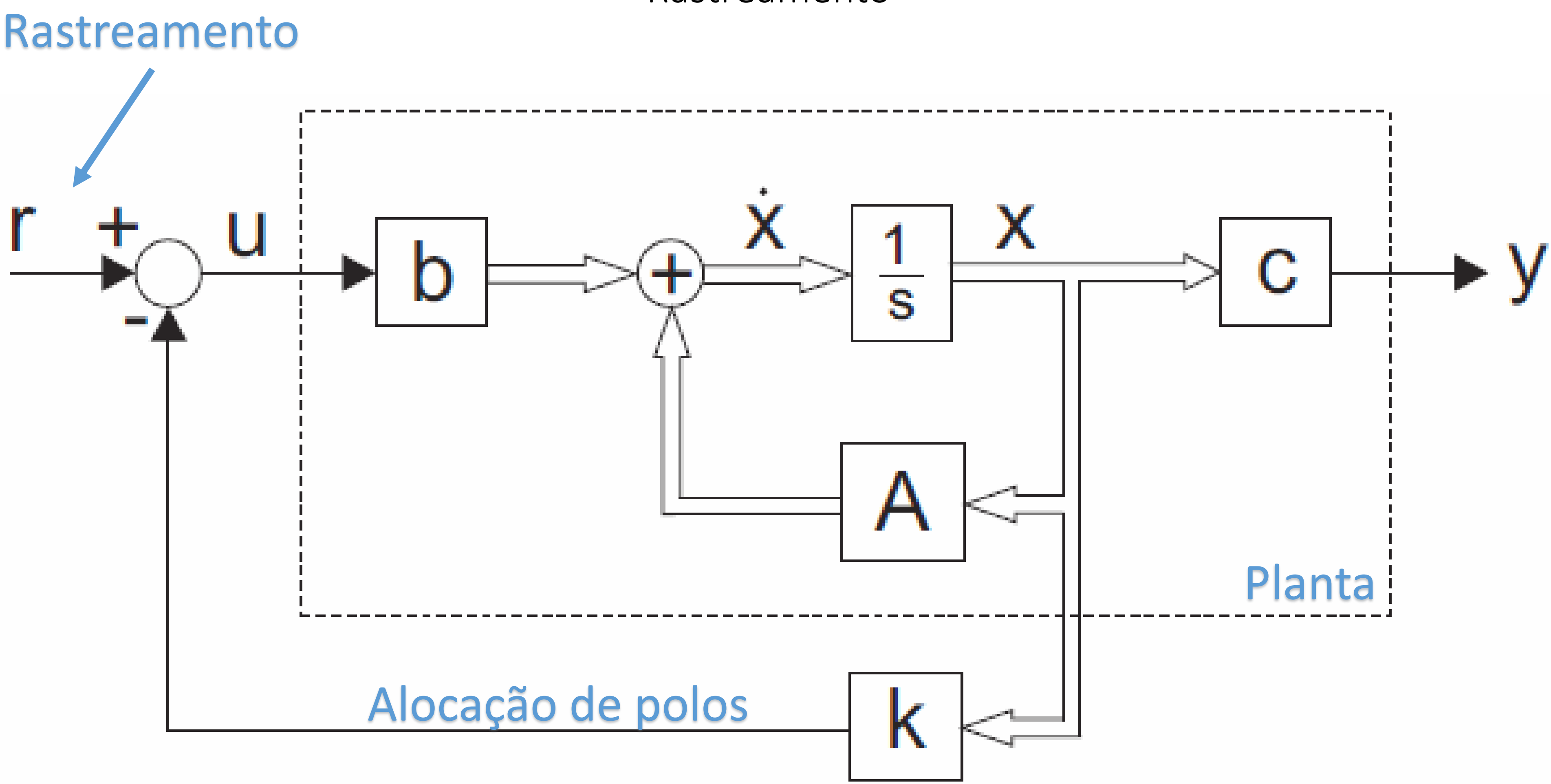
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\boldsymbol{K}\mathbf{x} + r) \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r$$

Obtém-se então:

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\boldsymbol{A}}\mathbf{x} + \mathbf{B}r$$
$$\mathrm{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Veja que tem-se um sistema igual ao inicial, mas com polos realocados.

Rastreamento



Rastreamento / zeros da função

Forma canônica controlável

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [b_n \;\; b_{n-1} \dots b_1], \qquad D = 0$$

Veja que:

A matriz $\boldsymbol{A}$ depende apenas dos polos. Isso independe de ser canônica.

A matriz $\boldsymbol{C}$ depende apenas dos zeros, na forma canônica.

Alocação de polos: mexe apenas na matriz $\boldsymbol{A}$. Resultado final mantém forma canônica controlável. Conclusão: zeros não são afetados por alocação de polos (ou qualquer tipo de realimentação de estados)

Rastreamento

Do slide anterior, vê-se que:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n}$$

Em que $s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$ é o polinômio característico do sistema realimentado.

Vê-se que a resposta transitória do rastreador é a mesma do regulador (mesmos polos, mesmos zeros)

Assumindo uma entrada de referência degrau unitário, a saída, em regime permanente, é:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{Y(s)}{R(s)}R(s) = \frac{b_n}{\alpha_n}$$

Veja que o erro, em regime permanente à uma referência degrau, é dado por:

$$e_{ss} = 1 - \frac{b_n}{\alpha_n}$$

Se $\frac{b_n}{\alpha_n} \neq 1$, $e_{ss} \neq 0$

Rastreamento

Para que seja possível atingir erro nulo, propõe-se o seguinte sinal de controle:

$$u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + pr = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \bar{r}$$

Assim

$$\frac{Y(s)}{\bar{R}(s)} = \frac{Y(s)}{pR(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n}$$

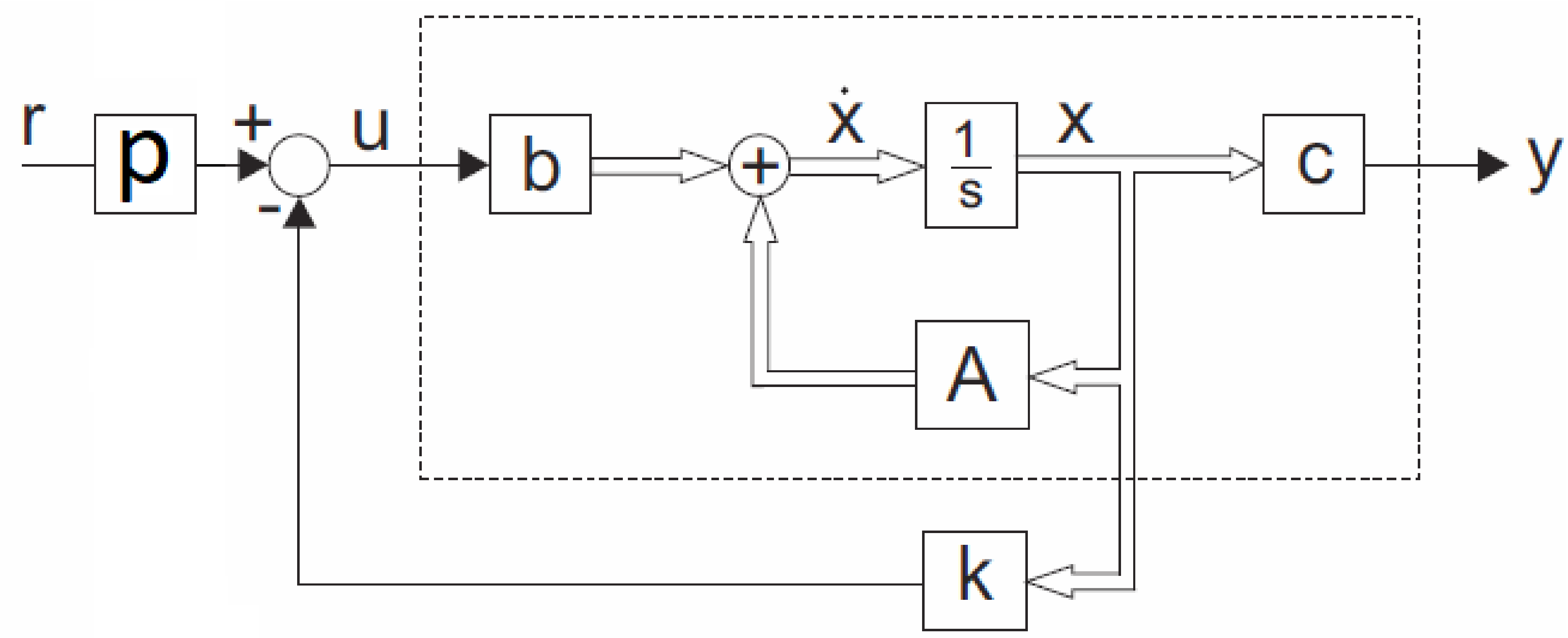
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = p\,\frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{Y(s)}{R(s)}R(s) = p\frac{b_n}{\alpha_n} = 1, \text{ se } p = \frac{\alpha_n}{b_n}$$

E, com isso, $e_{ss} = 1$

Entretanto, é necessário conhecer perfeitamente o valor de $\frac{b_n}{\alpha_n}$, e o valor tem que se manter constante mesmo com o desgaste de componentes, fatores externos e etc. Além disso, solução não é imune à perturbação.

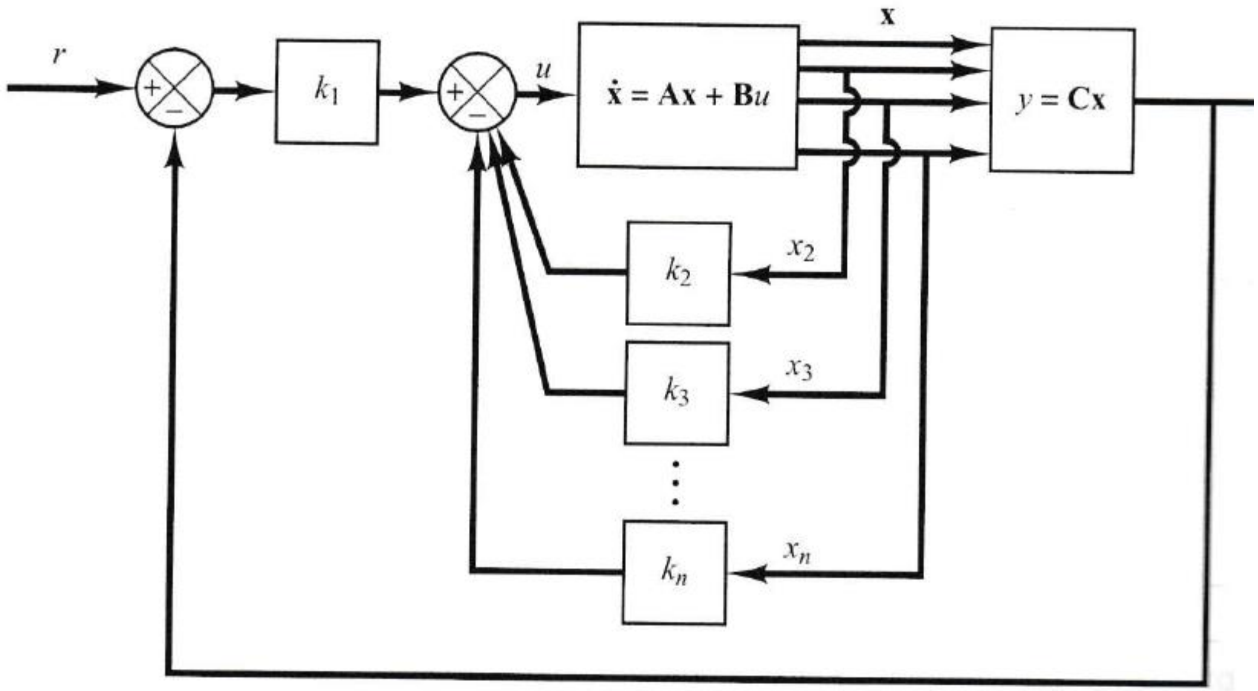
Rastreamento



Rastreamento

Veja que, se $p = k_1$ e $y = x_1$, tem-se na parte mais externa a realimentação usual do controle clássico

Perceba também que o modelo de segunda ordem do servomecanismo com realimentação tacométrica pode ser visto como uma um modelo com polos realocados.



$$u = -\begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1)$$

Rastreamento

Estudando regime permanente, viu-se que sistemas tipo 1 apresentam erro nulo ao serem realimentados. O mesmo efeito tem que acontecer em espaço de estados.

Como no slide anterior, sistema na forma canônica controlável, $y = x_1$, $p = k_1$

Se sistema é tipo 1, então equação característica:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

Tem $a_n = 0$

Assim:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1\ 0\ \ \dots 0], \qquad D = 0$$

Rastreamento

Sabe-se que a função de transferência do sistema realimentado é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = p\,\frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n}$$

Veja, porém, que:

$$b_n = 1, \qquad \alpha_n = 0 + k_1 = k_1, \qquad p = k_1$$

Veja que $\alpha_n = p = k_1$, de forma que, mesmo que haja variação no valor de k_1, $p/\alpha_n = 1$.

Comparada com a solução anterior $\left(p = \frac{\alpha_n}{b_n}\right)$, a solução atual é robusta à mudanças/incertezas de parâmetros. Além disso, não será demonstrado, mas viu-se em reposta em regime permanente que a presença do integrador ajuda o sistema a rejeitar perturbações constantes.

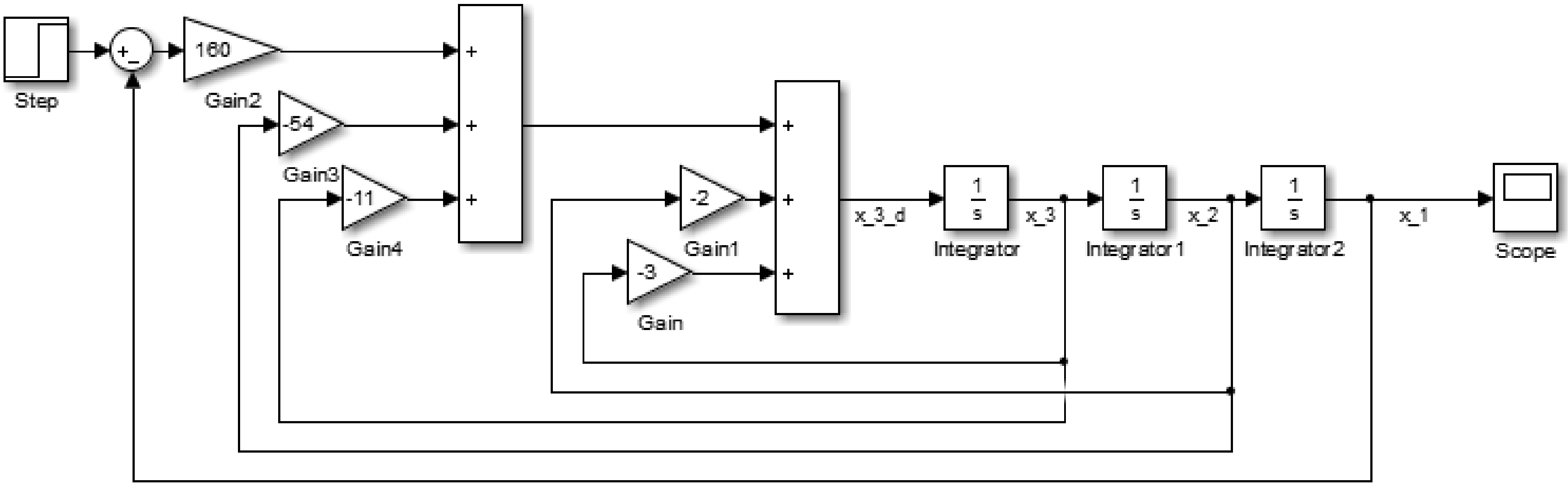
Exemplo

Exemplo via MATLAB (resolução em sala) – sistema tipo 1

```
% Sistema original
% lambda = 0, -1, -2
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -2 -3];
B = [0; 0; 1];
C = [1 0 0];
MA = ss(A,B,C,0);

% Projeto
% Polos desejados
J = [-2+2j*sqrt(3) -2-2j*sqrt(3)  -10];
K = acker(A,B,J);

A_novo = A - B*K;
B_novo = B * K(1);

MF = ss(A_novo,B_novo,C,0);
step(MF)
```

Exemplo

Exemplo via MATLAB (resolução em sala) – Sistema tipo 1



Exemplo

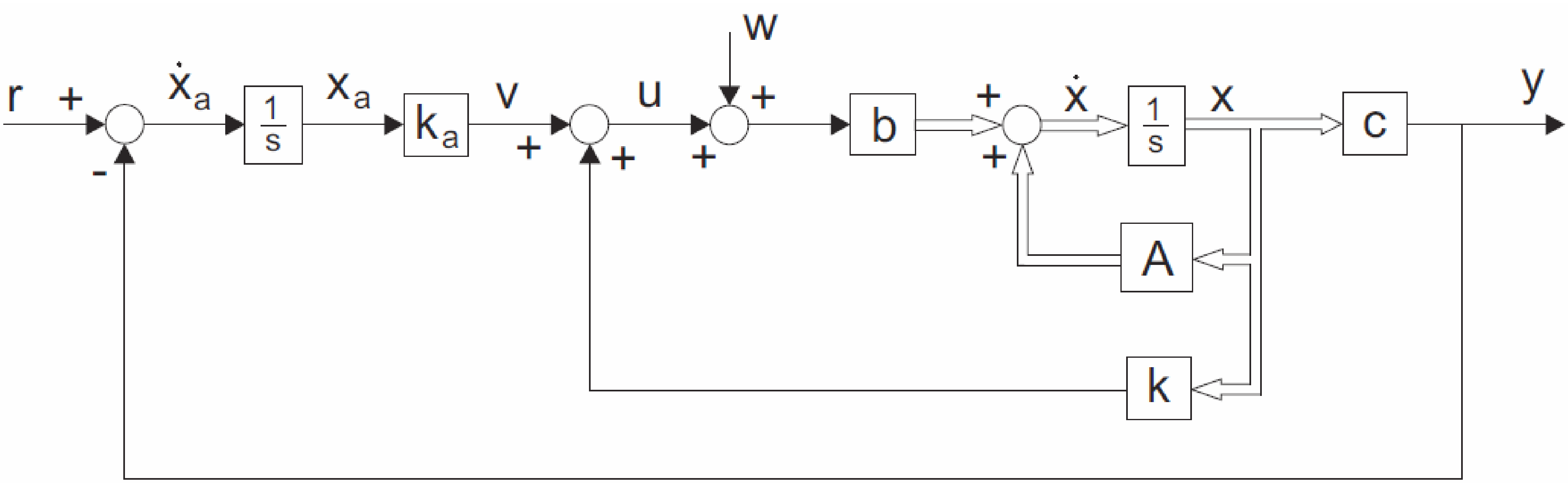
Exemplo via MATLAB (resolução em sala) – sistema tipo 0 – solução 1

```
% Sistema original
% lambda = -1, -2, -3
A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
B = [0; 0; 1];
C = [1 0 0];
MA = ss(A,B,C,0);

% Projeto
% Polos desejados
J = [-2+2j*sqrt(3) -2-2j*sqrt(3)  -10];
K = acker(A,B,J);

A_novo = A - B*K;
B_novo = B * K(1);

MF = ss(A_novo,B_novo,C,0);
step(MF)

B_novo_1 = -A_novo(3,1) * B;
MF_1 = ss(A_novo,B_novo_1,C,0);
step(MF_1)
```

Variável de estado aumentada

Pode-se transformar um sistema tipo zero em um sistema tipo 1 adicionando-se um integrador após $e = r - y$, da mesma forma que se faz com funções de transferência

Integrador extra, entretanto, aumenta ordem do sistema, de forma que é necessário adicionar um estado a mais: **variável de estado aumentada**



Variável de estado aumentada

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + bu \\
y &= cx \\
\dot{x}_a &= r - y = r - cx \\
u &= kx + k_a x_a = \begin{bmatrix} k & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\
y &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

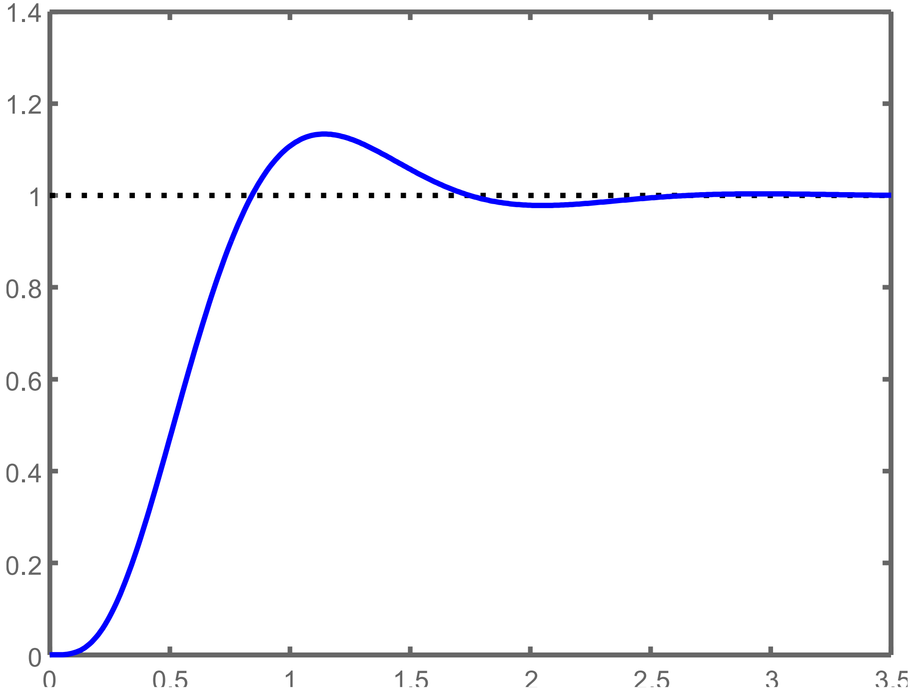
$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + bk & bk_a \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\
y &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo

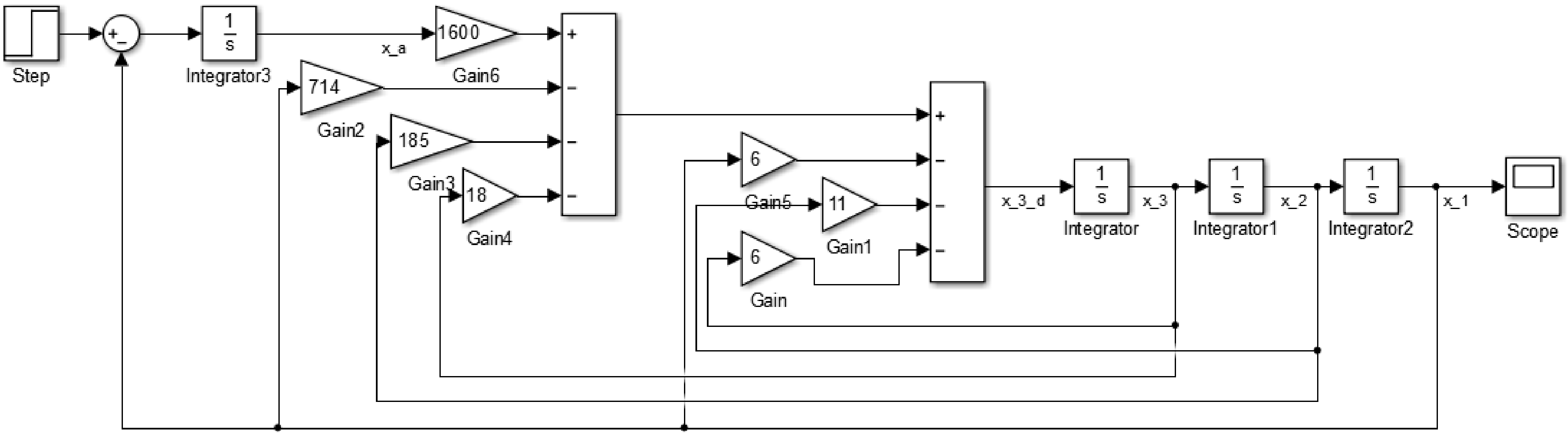
```
% Sistema original
% lambda = -1, -2, -3
A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
B = [0; 0; 1];
C = [1 0 0];
MA = ss(A,B,C,0);


% Projeto
A_aug = [A zeros(3,1);-C 0];
B_aug = [B; 0];
C_aug = [C 0];
% Polos desejados
J = [-2+2j*sqrt(3) -2-2j*sqrt(3)
-10 -10];
K = acker(A_aug,B_aug,J);
```

```
A_novo = A_aug - B_aug*K;
B_novo = [0;0;0;1];

MF = ss(A_novo_1,B_novo,C_aug,0);
step(MF)
```

K = [714   185   18 -1600]



Exemplo


Step
+
_
1
s
Integrator3
x_a
1600
Gain6
714
Gain2
185
Gain3
18
Gain4
+
-
-
-
6
Gain5
11
Gain1
6
Gain
+
-
-
-
x_3_d
1
s
Integrator
x_3
1
s
Integrator1
x_2
1
s
Integrator2
x_1
Scope