Espaço de Estados

Introdução

Controle clássico

Abordagem no domínio da frequência complexa:

- Transformada de Laplace;
- Função de transferência e F.T. senoidal.
- Posição de pólos complexos
- Análise da resposta em frequência.

Características:

- Principais resultados: 1860-1950 (“pré-computador”).
- Intuitivo. Por exemplo, é “fácil” avaliar o efeito de reposicionamento de polos.
- Equações algébricas (Laplace). Mais simples que equações diferenciais.
- Métodos gráficos: esboçados rapidamente, sem a ajuda de computadores.
- Em resumo, permite um projeto com qualidade razoável sem depender de ferramentas computacionais.

Controle clássico

Limitações – controle clássico só pode ser usado em:

- Sistemas de única entrada e única saída (SISO - *Single Input Single Output*).
- Sistemas lineares e invariantes no tempo.

Contra exemplos:

- Sistema MIMO (Multiple Input Multiple Output): avião
  - Diversos atuadores (sinais de entrada): ailerons, profundor, leme, motor(es). Atuam ao mesmo tempo por comando do piloto ou auto piloto.
  - Diversos parâmetros (saídas): guinada, arfagem, rolamento, posição, velocidade. Os parâmetros são acoplados, ou seja, ao mudar um dos ângulos, outro ângulo, e velocidade podem ser alterados.
- Sistemas variantes no tempo ou não lineares:
  - Foguete: massa varia ao consumir combustível.
  - Satélite em órbita elíptica: força da gravidade dependente do inverso do quadrado da distância.

Controle moderno: Espaço de Estados

Surgimento do controle moderno:

- Tarefas e sistemas mais complexos:
  - Planta com muitos polos e/ou zeros.
  - Sistemas MIMO, não lineares e/ou variantes no tempo.
- Exigência de maior precisão.
  - Imprecisões nos modelos.
  - Sensores com ruído.
- Acesso fácil a computadores.

Controle moderno:

- Análise no domínio do tempo
- Conceito de estados:
  - Conceito já existente na época, mas que não era prático antes da existência de computadores.

Espaço de estados – sistemas lineares

Equações espaço de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

A: matriz de estado, $n \times n$

B: matriz de entrada, $n \times r$

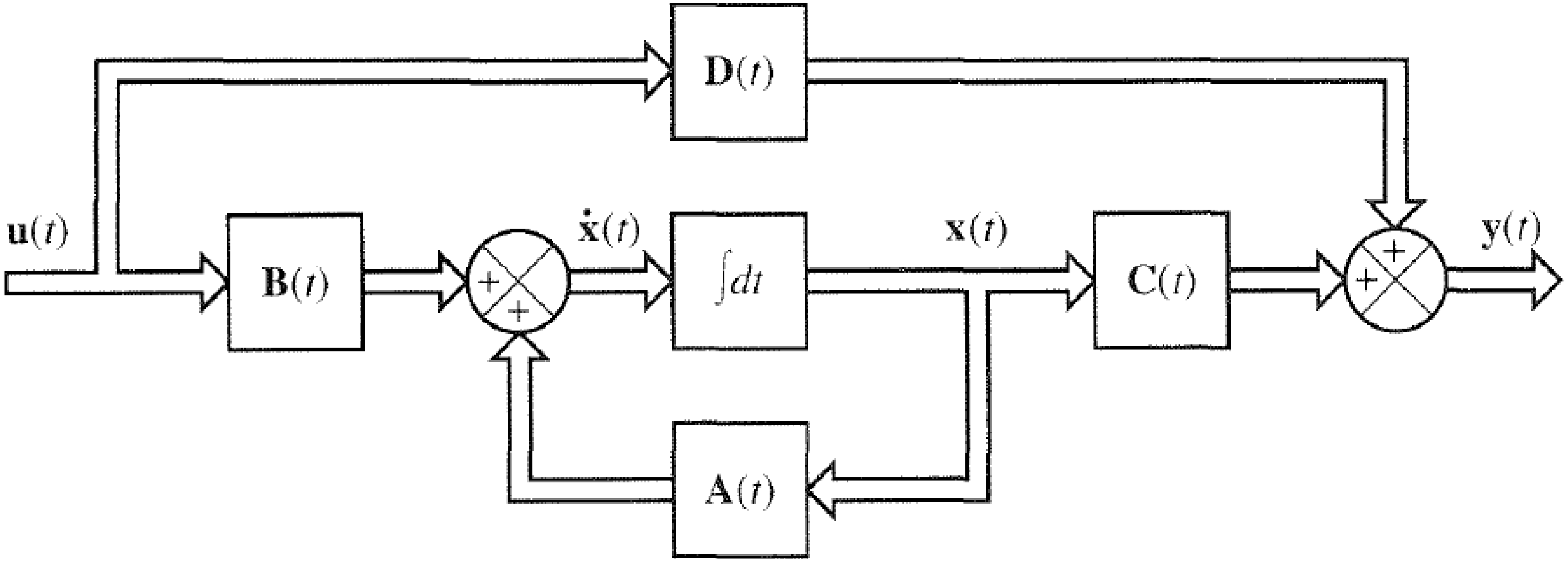
C: matriz de saída, $m \times n$

D: matriz de transmissão direta, $m \times r$

$\mathbf{x}(t)$: vetor de estados, $n \times 1$

$\mathbf{u}(t)$: vetor de entrada, $r \times 1$

$\mathbf{y}(t)$: vetor de saída, $m \times 1$



Definições

Variáveis de estado: constituem o menor conjunto de variáveis capaz de determinar o estado **dinâmico** de um sistema. Se um sistema que precisa de, no mínimo, n variáveis de estados (x_1, x_2, ... x_n) para descrever todo o seu comportamento dinâmico, então essas n variáveis formam um conjunto de variáveis de estado.

Existe uma infinidade de possibilidades para se definir as variáveis de estado, inclusive opções em que as variáveis não são mensuráveis/ observáveis ou até que não possuam um significado físico direto.

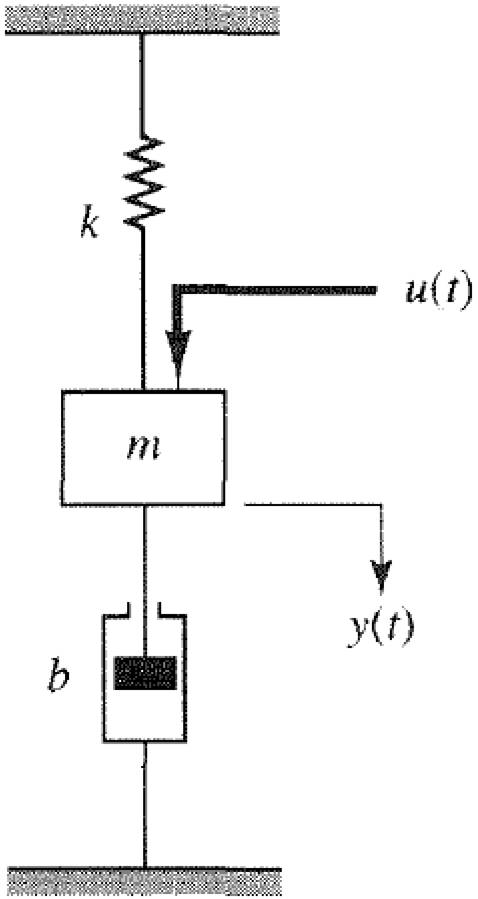
Estado: o valor, em determinado instante de tempo, de todas as variáveis de estado. Se o estado é conhecido em $t = t_0$, e as entradas conhecidas para $t \geq t_0$, o estado do sistema fica determinado para $t \geq t_0$.

Vetor de estados: vetor contendo as n variáveis de estado.

Espaço de estados: Espaço n-dimensional, formado pelos eixos de x_1, x_2, ... x_n. Um estado é representado como um ponto no espaço de estados.

Exemplo

Variáveis de estado: $\begin{cases} x_1: \text{posição} \\ x_2: \text{velocidade} \end{cases}$



Exemplo

Variáveis de estado: $\begin{cases} x_1 : \text{posição} \\ x_2 : \text{velocidade} \end{cases}$

A equação do sistema ao lado é:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

É um sistema de segunda ordem, ou seja, que possui dois integradores. Pode-se definir as variáveis de estado como:

$$x_1 = y, \qquad x_2 = \dot{y}$$

Então, obtemos:

$$\dot{x}_1 = \dot{y}, \qquad \dot{x}_2 = \ddot{y}$$

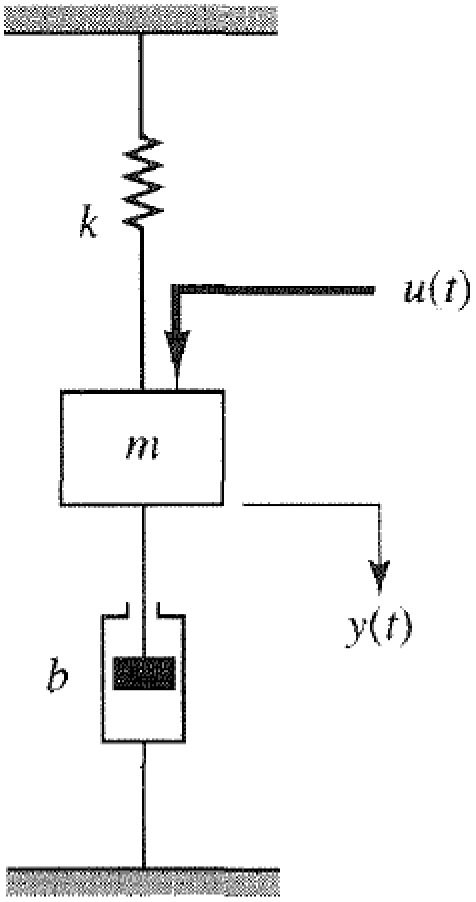
Como:

$$\dot{y} = x_2$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \rightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{1}{m}u$$

Temos:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$



Exemplo

A equação de saída é:

$$y = y(t) = x_1$$

Escrevendo em forma vetorial-matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Escrevendo na forma-padrão:

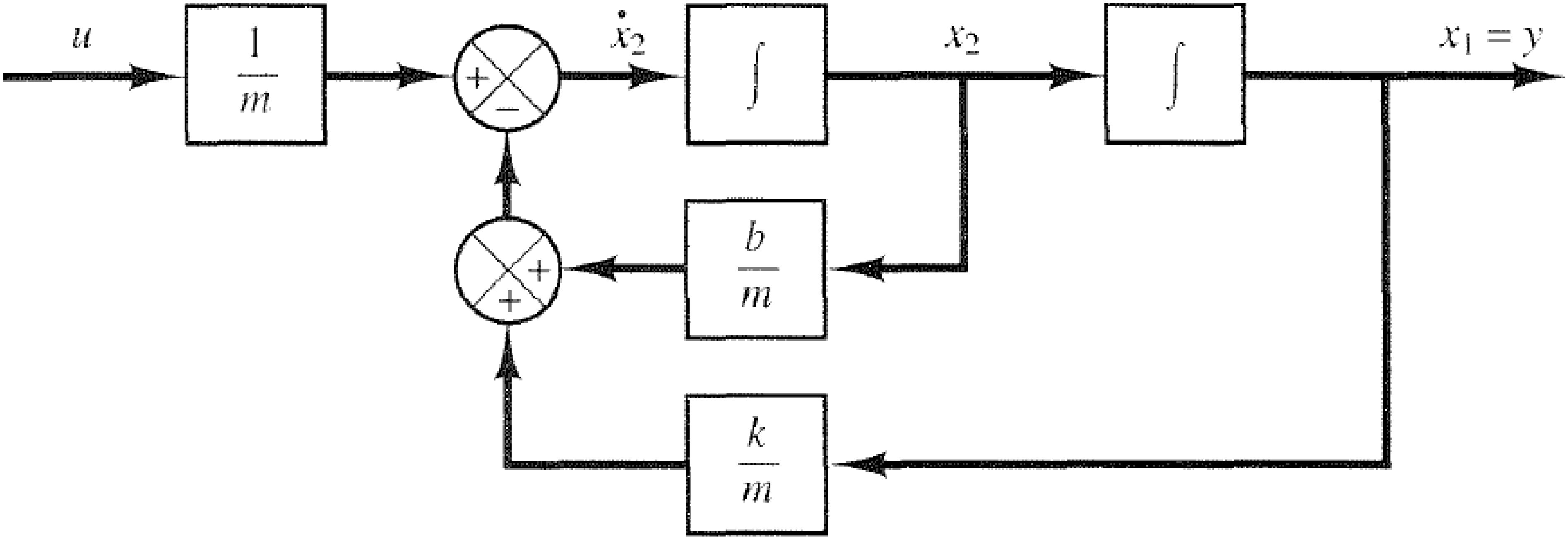
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

Onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

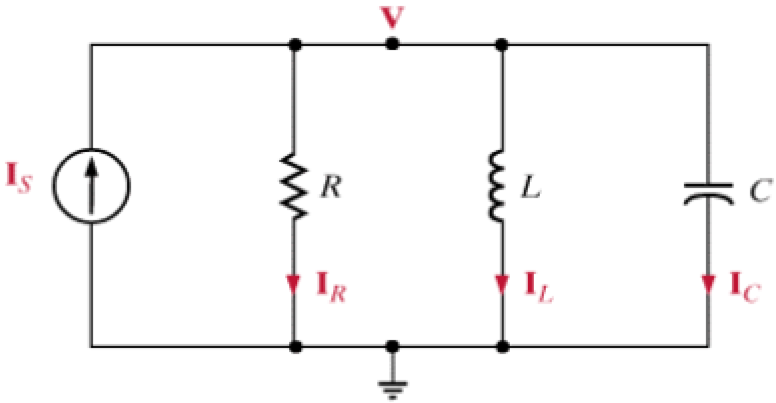
No próximo slide o diagrama de blocos do sistema (no domínio do tempo).

Exemplo



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Exemplo



Variáveis de estado:

- Escolha intuitiva:
  - Tensão no capacitor e corrente no indutor.
- Outras escolhas possíveis:
  - Tensão e corrente no capacitor.
  - Corrente no resistor e corrente no indutor.
  - Infinitas outras opções, que não necessariamente possuem significado físico

Obs:

- Tensão no capacitor: $\frac{1}{C}\int i_c(t)dt \rightarrow \dot{v}_c = \frac{1}{C} i_c$
- Corrente no indutor: $\frac{1}{L}\int v_L(t)dt \rightarrow \frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} v_L$

Exemplo

Espaço de estados para primeiro caso:

Sabendo que:

$$\frac{di_i}{dt} = \frac{1}{L}v_i, \qquad \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_c$$

E que:

$$v_i = v_c, \qquad i_c = i_S - i_L - i_R$$

Pode-se encontrar:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} i_S$$

$$y = [0\ 1]\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

Exemplo

Outra solução possível:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R}{L} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ i_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} i_S$$

$$y = [0 \; R]\begin{bmatrix} i_L \\ i_C \end{bmatrix}$$

Exemplo

Verificando (grosseiramente) a equivalência de ambas as modelagens via MATLAB

```
L = 1, R = 2, C = 3;
A_1 = [0 1/L; -1/C -1/(R*C)];
B_1 = [0; 1/C];
C_1 = [0 1];
G_ss_1 = ss(A_1,B_1,C_1,0)
G_tf_1 = tf(G_ss_1)
```

```
G_tf_1 =

      0.3333 s
  ----------------------
  s^2 + 0.1667 s + 0.3333
```

```
A_2 = [0 R/L; -1/(R*C) -1/(R*C)];
B_2 = [0; 1/(R*C)];
C_2 = [0 R];
G_ss_2 = ss(A_2,B_2,C_2,0)
G_tf_2 = tf(G_ss_2)
```

```
G_tf_2 =

      0.3333 s
  ----------------------
  s^2 + 0.1667 s + 0.3333
```

Exemplo

Rascunho da dedução dos modelos:

Modelo 1:

$$\frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} v_C$$

$$\frac{d}{dt} v_C = \frac{i_C}{C} = \frac{1}{C}(i_S - i_R - i_L) = \frac{i_S}{C} - \frac{v_c}{RC} - \frac{i_L}{C}$$

Modelo 2:

$$\frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} v_C = \frac{R}{L} i_R$$

$$\frac{d}{dt} i_R = \frac{d}{dt} \frac{v_C}{R} = \frac{i_C}{RC} = \frac{1}{RC}(i_S - i_R - i_L)$$

Laplace (por exemplo, via impedância equivalente):

$$\frac{V_c}{I_S} = \frac{\frac{1}{C} s}{s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}}$$

Representação no espaço de estados de sistemas cuja função de entrada não possui derivadas

Considere o seguinte sistema de ordem *n*:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

Sabe-se que, conhecendo-se a entrada $u(\mathrm{t})$ para t ≥ 0 e conhecendo-se $y(0)$, $\dot{y}(0)$, ..., $\overset{(n-1)}{y}(t)$, determina-se completamente o comportamento futuro.

Dessa forma, pode-se considerar $y(\mathrm{t})$, $\dot{y}(\mathrm{t})$, ..., $\overset{(n-1)}{y}(0)$ como um conjunto de *n* variáveis de estado. Matematicamente é uma escolha satisfatória, mas na prática pode ser inviável, pois derivadas de ordem elevada amplificam o ruído em demasia.

Definindo:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \cdots, \quad x_n = \overset{(n-1)}{y}$$

A equação de estados é definida como:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \cdots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + u$$

Representação no espaço de estados de sistemas cuja função de entrada não possui derivadas

Ou, em forma vetorial-matricial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \qquad y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

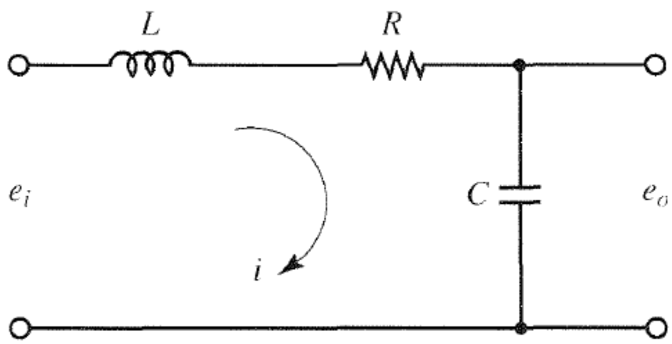
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

Esse mesmo sistema, representado como uma função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Exemplo



O circuito ao lado pode ser modelado da seguinte forma:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_o$$

A partir da segunda equação, obtemos:

$$\int i\,dt = Ce_o \rightarrow i = C\dot{e}_o \rightarrow \frac{di}{dt} = C\ddot{e}_o$$

Substituindo na primeira equação:

$$LC\ddot{e}_o + RC\dot{e}_o + e_o = e_i \rightarrow \ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

Pode-se obter a equação diferencial do sistema de forma alternativa, usando Laplace:

Espaço de estados

$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$

$$(s^2LC + sRC + 1)E_0 = E_i \rightarrow LC\ddot{e}_o + RC\dot{e}_o + e_o = e_i$$

Definindo as variáveis de estado: $x_1 = e_0,\ x_2 = \dot{e}_0$

E definindo as variáveis de entrada e saída: $u = e_i,\ y = e_0 = x_1$

Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Veja que o exemplo gerou um modelo em espaço de estados correto, mas que é pouco intuitivo: um dos estados é a derivada da voltagem. A técnica de usar saídas e derivadas funciona melhor com sistemas massa-mola.

Revisão: álgebra linear

Autovalores e autovetores:

Considere uma matriz quadrada **A**, um vetor não nulo **v** e um número λ. Se a equação abaixo for verdade:

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$$

v e λ são respectivamente um autovetor e um autovalor de **A**.

Polinômio característico:

Pode-se reescrever a equação de autovalor e autovetor:

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{Av} - \lambda\mathbf{v} = 0 \rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

Como o autovetor é não nulo, a solução acima só pode ser nula se:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

O polinômio característico é obtido ao se efetuar o cálculo do determinante

Revisão: álgebra linear

Encontrando autovalores e autovetores – exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Revisão: álgebra linear

Encontrando autovalores e autovetores – exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$$

Polinômio característico

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0} \rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4$$

Achando $\boldsymbol{v}_1$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{v}_1 = 0 \rightarrow (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\boldsymbol{v}_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, que pode ser, por exemplo, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

De modo similar:

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I})\boldsymbol{v}_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Revisão: álgebra linear

Matriz inversa – Seja **A** uma matriz invertível. Seu determinante é não-nulo. A inversa de **A** é representada como $\mathbf{A}^{-1}$. O produto de **A** e $\mathbf{A}^{-1}$ é a matriz identidade **I**:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

A matriz inversa é calculada conforme abaixo:

- Calculam-se os menores M_{ij} de **A**. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & -9 & 11 \end{bmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \\ & & \\ -1 & 9 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 13$$

- Calculam-se os cofatores de **A** a partir dos menores de **A**, e monta-se a matriz de cofatores **C**.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{i1} & \cdots & C_{ij} \end{bmatrix}$$

- Matriz adjunta:

$$adj(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^T$$

- Inversa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$$

Revisão: álgebra linear

Método alternativo de inversão: eliminação de Gauss-Jordan.
(http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Jordan_elimination).
Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right]$$

Matrizes 2x2 possuem uma forma fácil de se calcular a inversa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Espaço de estados e função de transferência

Conversão de espaço de estados para função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \mathbf{C}(s\boldsymbol{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

Sabendo que:

$$(s\boldsymbol{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\boldsymbol{I} - \mathbf{A})} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

$G(s)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

Onde $Q(s)$ é um polinômio em s.

Conclusão: equivalência entre autovalores de $\mathbf{A}$ e polos de $G(s)$. Assim, por exemplo:

- Autovalores com parte real positiva: instabilidade.
- Autovalores complexos: sistemas subamortecidos.

Não existe uma propriedade tão direta para obtenção dos zeros

Mais revisão de álgebra linear

Matrizes semelhantes:

Sejam as matrizes $\boldsymbol{A}$,$\widehat{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{P}$, todas de dimensão $n \times n$ e $\boldsymbol{P}$ invertível. Se

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

As matrizes $\boldsymbol{A}$, $\widehat{\boldsymbol{A}}$ são semelhantes e a equação acima é uma transformação de similaridade. Veja que pode-se fazer o caminho inverso:

$$\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{A}$$

Duas matrizes semelhantes:

- Possuem mesmo determinante
- Possuem mesma equação característica
- Possuem mesmo autovalores, com mesma multiplicidade

O conceito de matriz semelhante está relacionado com o conceito de mudança de base de um vetor

Mais revisão de álgebra linear

Demonstração de invariância dos autovalores após transformação de similaridade:

Autovalores de $\boldsymbol{A}$: $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$

Autovalores de $\widehat{\boldsymbol{A}}$: $\det\,(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})$

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det(\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{P})$$

Determinante do produto é igual ao produto dos determinantes:

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{P}) \\
&= \det\mathbf{P}^{-1}\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\det\mathbf{P} \\
&= \det\mathbf{P}^{-1}\det\boldsymbol{P}\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) \\
&= \det\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) \\
&= \det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})
\end{aligned}$$

Perceba que **P** é uma matriz invertível **qualquer**, ou seja, existem **infinitas** transformações de similaridade

Espaço de estados: infinitos modelos equivalentes

Definindo

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}$$

A equação de espaço de estados pode ser reescrita:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{u} \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\boldsymbol{u}$$

Multiplicando-se à esquerda por $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{u}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{u}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{u}$$

A equação de saída também precisa se modificada:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{u} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\boldsymbol{u} \rightarrow \mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\boldsymbol{u}$$

Em que $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$

Espaço de estados: infinitos modelos equivalentes

Conclusão:

Partindo de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{u}$$

Existem infinitas representações alternativas:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \widehat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{B}}\boldsymbol{u}$$
$$\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\boldsymbol{u}$$

Que se comportam **exatamente igual** ao primeiro modelo: ao receber a mesma entrada $\boldsymbol{u}$, fornecem a mesma saída $\mathbf{y}$, que possui as mesmas características dinâmicas (autovalores)

Dessa forma, o espaço de estados pode ser reescrito de modo a facilitar algo que o projetista tenha interesse. Algumas formas bastante utilizadas são chamadas de representações canônicas.

Forma canônica diagonal

Considere uma função de transferência que contenha apenas polos distintos. A função pode ser escrita como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

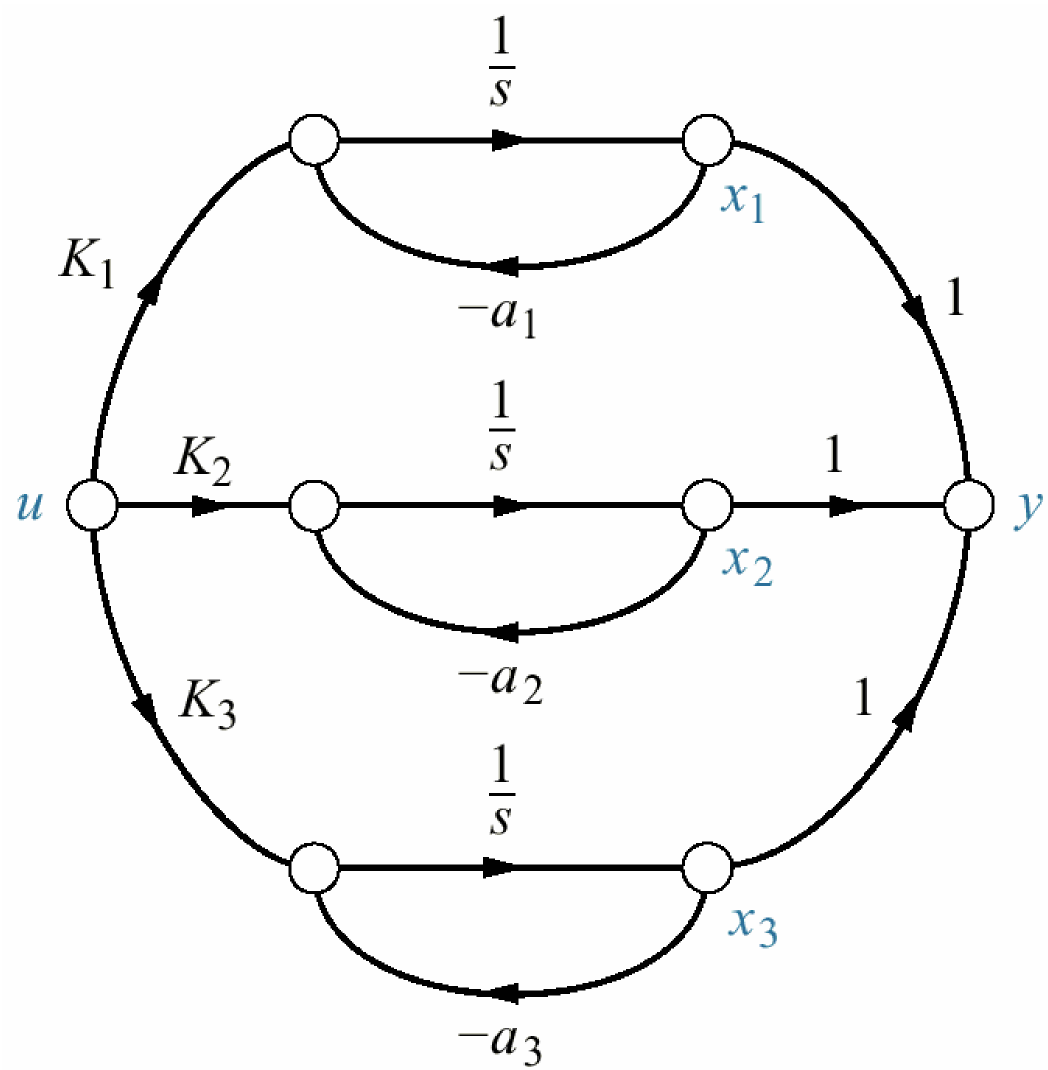
$$Y(s) = b_0 U(s) + \frac{c_1}{s+p_1}U(s) + \frac{c_2}{s+p_2}U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}U(s)$$

A representação na forma canônica diagonal é:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, \qquad D = b_0$$

Forma canônica diagonal



Forma canônica diagonal

Estados totalmente desacoplados entre si: equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{x}_1 = -p_1 x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = -p_2 x_2 + u$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = -p_n x_n + u$$

Solução da EDO se torna bastante simples. Por exemplo, se $u = 0$:

$$x_1(t) = e^{-p_1 t} x_1(0)$$
$$x_2(t) = e^{-p_2 t} x_2(0)$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = e^{-p_n t} x_n(0)$$

Saída $y(t)$, por definição, é obtida algebricamente a partir dos estados. Por exemplo, assumindo $u = 0$:

$$y(t) = c_1 e^{-p_1 t} x_1(0) + \cdots + c_n e^{-p_n t} x_n(0)$$

A canônica diagonal permite obter a solução temporal analiticamente de forma mais fácil e numericamente com menor custo computacional.

Forma canônica controlável

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \qquad y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

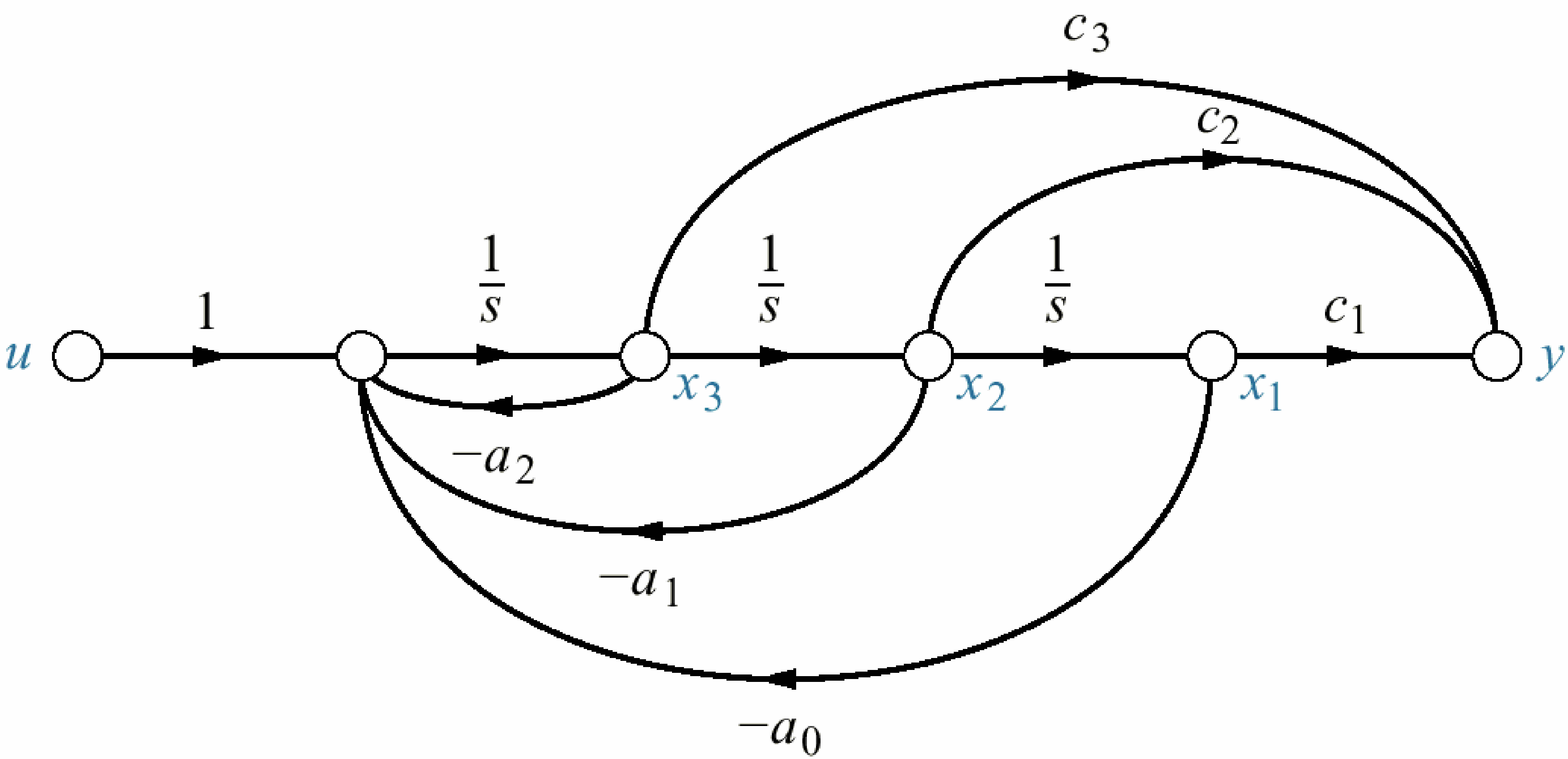
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \dots \mid b_1 - a_1 b_0], \qquad D = b_0$$

Útil para projeto de controlador via alocação de polos

Uma dedução informal dessa forma pode ser encontrada em: http://www.lac.usp.br/~paulo/cap4_8.pdf

Forma canônica controlável



Forma canônica observável

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \qquad y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = b_0$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}}$$

Uma dedução informal dessa forma pode ser encontrada em:
http://www.lac.usp.br/~paulo/cap4_8.pdf

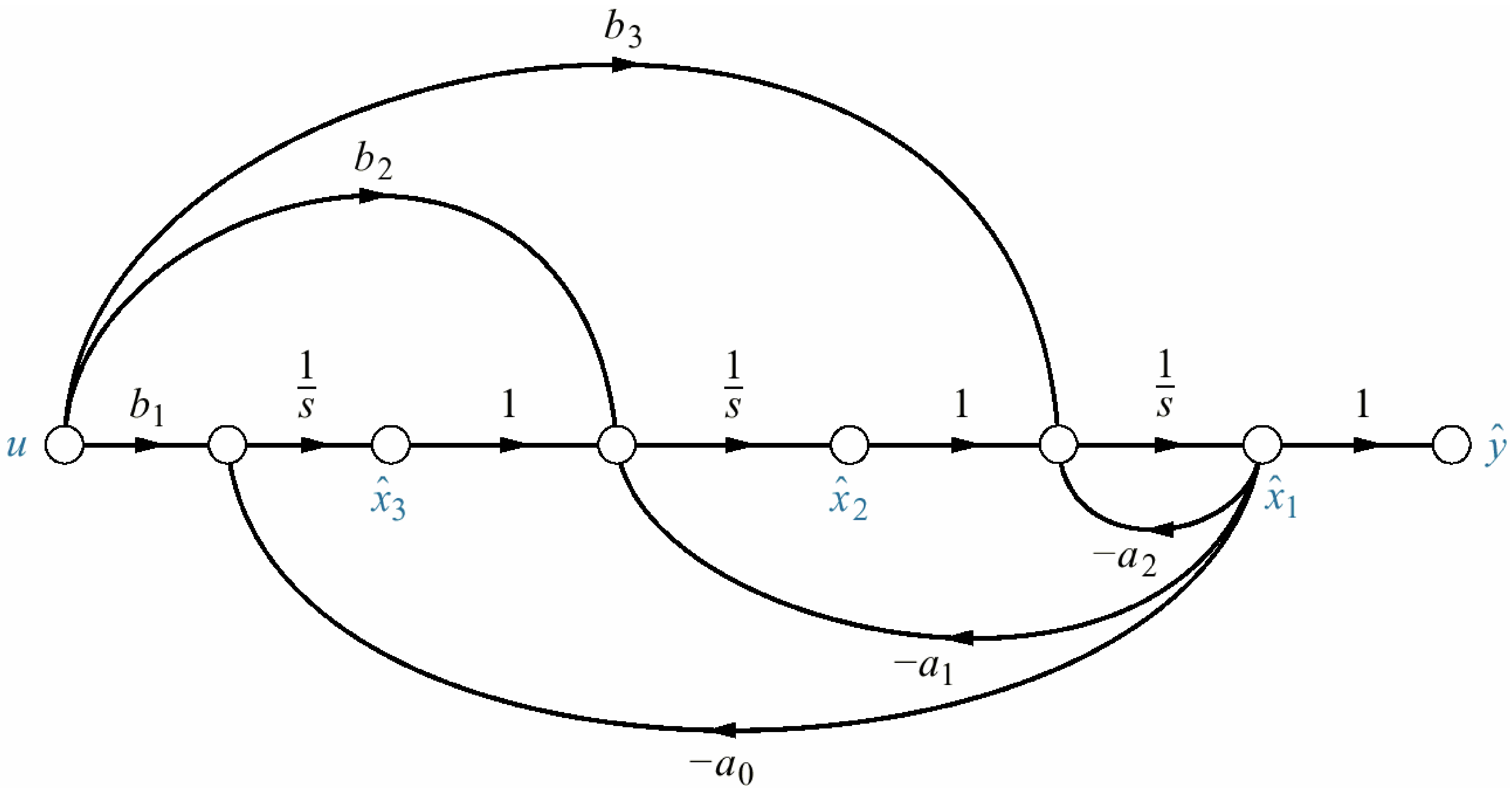
Veja que a forma canônica observável está relacionada com a forma canônica controlável:

$$\mathbf{A}_{obs} = \mathbf{A}^*_{cont}, \qquad \mathbf{B}_{obs} = \mathbf{C}^*_{cont}, \qquad \mathbf{C}_{obs} = \mathbf{B}^*_{cont}$$

*: Transposta conjugada

Obs: foi possível transformar facilmente da forma controlável para a observável porque espaço de estados se originou de função de transferência.

Forma canônica observável



Diagonalização de A

Para se converter entre as diferentes representações, deve-se achar uma matriz de transformação $\boldsymbol{P}$ adequada.

Para diagonalização, é possível mostrar que

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{v}_1 \ \dots \boldsymbol{v}_n] \quad (\boldsymbol{v}_i\text{: autovetor } i)$$

Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

É possível mostrar que, se $\mathbf{A}$ tem o formato da canônica controlável e os autovalores são distintos:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

```
>> A = [-3 1; 1 -3];
>> P = [1 1; 1 -1];
>> P\A*P
ans =
   -2    0
    0   -4
>> eig(A)
ans =
   -4
   -2
```

Exemplo

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Escreva o modelo na forma canônica diagonal.

Exemplo

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Escreva o modelo na forma canônica diagonal.

Resposta: primeiramente, é necessário calcular os autovalores de **A**. Para isso, calcula-se o polinômio característico:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & -11 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 6 - 11\lambda = 0$$

As raízes do polinômio (ou seja, os autovalores de **A** são):

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = -3$$

Exemplo

A partir dos autovalores, obtém-se a matriz **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (-1)^1 & (-2)^1 & (-3)^1 \\ (-1)^2 & (-2)^2 & (-3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{P})}\operatorname{adj}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} 3 & 2{,}5 & 0{,}5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Aplica-se então a transformação **x** = **Pz** na equação de estados:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 3 & 2{,}5 & 0{,}5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 3 & 2{,}5 & 0{,}5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

(Observe que não é necessário calcular o produto $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$, pois o resultado é conhecido)

A equação de saída também deve ser transformada:

$$y = \mathbf{CPz} + Du$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{z} + 0u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

Forma canônica de Jordan

Considere uma função de transferência que contenha pólos múltiplos. Como exemplo, suponha uma função com 3 primeiros pólos repetidos, e outros pólos distintos:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

A representação na forma canônica de Jordan é:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & | & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & | & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & | & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & -p_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n], \qquad D = b_0$$

Espaço de estados

Quando existem pólos múltiplos, a diagonalização é impossível.

Forma canônica de Jordan: forma capaz de representar o sistema que mais se assemelha com uma matriz diagonal.

Em cada bloco de Jordan, ou seja, em cada "submatriz" quadrada contendo pólos repetidos, os elementos logo acima da diagonal principal possuem o valor 1.

A forma canônica de Jordan muitas vezes é obtida através da transformação linear de uma matriz qualquer, ou seja, nem sempre se obtém diretamente de uma função de transferência. Nesse caso, podem surgir blocos de Jordan distintos que possuam o mesmo autovalor/pólo. Ou seja, não é regra que todos os autovalores múltiplos fiquem agrupados em um único bloco de Jordan.

Mais informações:

http://pt.wikipedia.org/wiki/Forma_can%C3%B4nica_de_Jordan

http://www.ime.usp.br/~enmarcos/Cursos/A%20forma%20can%F4nica%20de%20Jordan.pdf

http://www.ief.ita.br/~rrpela/downloads/MAT27-2011-Aula-Jordan.pdf

Resultados úteis na análise vetorial-matricial

Se A é diagonalizável pela matriz P:

$$P^{-1}AP = \hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

P também diagonaliza A^k:

$$P^{-1}A^kP = \hat{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Pois:

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) &= P^{-1}A^2P = \hat{A}^2 \\ (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) &= P^{-1}A^3P = \hat{A}^3 \end{aligned}$$

Veja que:

$$\begin{aligned} A^2 &= (P\hat{A}P^{-1})(P\hat{A}P^{-1}) = P\hat{A}^2P^{-1} \\ A^3 &= (P\hat{A}^2P^{-1})(P\hat{A}P^{-1}) = P\hat{A}^3P^{-1} \end{aligned}$$

Resultados úteis na análise vetorial-matricial

Seja uma função escalar definida por:

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\lambda^i$$

Pode-se definir uma função matricial:

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$$

Para uma matriz diagonal D:

$$\begin{aligned} f(D) &= a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i D^i \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} a_i d_1^i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} a_i d_2^i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sum_{i=0}^{\infty} a_i d_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(d_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f(d_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & f(d_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conclui-se então que:

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P} f(\widehat{\boldsymbol{A}}) \boldsymbol{P}^{-1}$$

Revisão: álgebra linear

Teorema de Cayley-Hamilton: a matriz **A** satisfaz sua própria equação característica.

Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Equação característica:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

Veja que:

$$\boldsymbol{A}^2 + 6\boldsymbol{A} + 8\boldsymbol{I} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resultados úteis na análise vetorial-matricial

Seja o polinômio característico $\Delta(\lambda)$ de uma matriz A $n \times n$ dado por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n.$$

O teorema de Cayley-Hamilton afirma que a matriz A satisfaz a sua própria equação característica, isto é,

$$\Delta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0. \qquad (1.24)$$

Reescrevendo a equação (1.24), temos

$$A^n = -\alpha_n I - \alpha_{n-1} A - \ldots - \alpha_1 A^{n-1}. \qquad (1.25)$$

Multiplicando ambos os lados por A, substituindo A^n no lado direito resultante pela expressão (1.25) e rearranjando os termos, obtemos

$$A^{n+1} = a_n I + a_{n-1} A + \ldots + a_1 A^{n-1}.$$

Resultados úteis na análise vetorial-matricial

Continuando esse processo, podemos expressar qualquer potência inteira e positiva de A como uma combinação linear de $I, A, \ldots, A^{n-1}$. Assim, $f(A)$ definida pela equação (1.22) pode ser representada por

$$f(A) = \beta_n I + \beta_{n-1} A + \ldots + \beta_1 A^{n-1}$$

ATENÇÃO: Veja que a função $f(A)$, calculada como uma soma finita possui coeficientes diferentes da mesma função sendo calculada via série de Taylor

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$$

Resultados úteis na análise vetorial-matricial

Polinômio mínimo

Pode existir um polinômio de menor ordem que o polinômio característico em que $f(A) = 0$. Do ponto de vista de controle, pode ser entendido como um caso em que zeros cancelam alguns dos polos do polinômio característico.

Lembrando que:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \mathbf{C}(s\boldsymbol{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

e:

$$(s\boldsymbol{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\boldsymbol{I} - \mathbf{A})} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

Se $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ tem uma ou mais raízes em comum em todos os seus elementos, e essa raiz cancela com uma ou mais raízes de $\det(s\boldsymbol{I} - \mathbf{A})$, o polinômio característico é alterado, reduzindo sua ordem

Resultados úteis na análise vetorial-matricial

Exemplo 1.7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-5 & 6 & 6 \\ 1 & \lambda-4 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda+4 \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$\operatorname{adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} (\lambda+2)(\lambda-2) & -6(\lambda-2) & -6(\lambda-2) \\ -(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-2) & 2(\lambda-2) \\ 3(\lambda-2) & -6(\lambda-2) & (\lambda-2)(\lambda-7) \end{bmatrix}.$$

Veja $(\lambda - 2)$ aparece em todos os termos

Assim, $d(\lambda) = \lambda - 2$ e

$$m(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)} = (\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

e

$$m(A) = (A - I)(A - 2I) = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução das equações de estado de sistemas invariantes no tempo

Seja a equação diferencial vetorial-matricial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Onde **x** é um vetor *n*-dimensional e **A** uma matriz *n* x *n*.

Admite-se que a solução esteja na forma vetorial de uma série de potências em *t*, em que $\mathbf{b}_k$ é um vetor *n*-dimensional:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots$$

Substituindo a solução na equação diferencial:

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \cdots + k \cdot \mathbf{b}_k t^{k-1} + \cdots$$
$$= \mathbf{A}\left(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots\right)$$

Igualando os coeficientes:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0$$

Solução das equações de estado de sistemas invariantes no tempo

O valor de $\mathbf{b}_0$ pode ser obtido substituindo t = 0:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$$

Reescrevendo a solução:

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots\right)\boldsymbol{x}(0)$$

Como a matriz **A** e suas potências possuem dimensão *n* x *n*, o resultado da soma infinita dentro do parênteses é uma matriz *n* x *n*.

Devido à similaridade da expressão com a série de potências da exponencial, a expressão é definida como exponencial matricial, e se escreve:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kt^k}{k!}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!}$$

Então: $\boldsymbol{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{x}(0)$

Propriedades da exponencial matricial

A série de potências converge, de forma absoluta, para todos os valores finitos de t. Isso significa que a exponencial pode ser calculada numericamente através da série de potência truncada.

A convergência absoluta também permite derivar termo a termo:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3 t^2 \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^{k+1} t^k + \cdots$$
$$= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots\right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$
$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots\right]\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$$

Destaca-se que a derivada da exponencial matricial se assemelha à derivada da exponencial escalar. Provou-se que a constante matricial **A** pode multiplicar à esquerda ou à direita.

Pode-se provar também que:

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$$

Propriedades da exponencial matricial

Em particular, se $s = -t$:

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}$$

Portanto, a inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ é $e^{-\mathbf{A}t}$. Como a inversa sempre existe, $e^{\mathbf{A}t}$ é não singular.

Por outro lado:

$$\begin{aligned} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &= e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{se } \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &\neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{se } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \end{aligned}$$

Solução homogênea via transformada de Laplace

Seja o caso escalar abaixo:

$$\dot{x} = ax$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$sX(s) - x(0) = aX(s)$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1}x(0)$$

Aplicando a transformada inversa:

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

Estendendo à equação de estado homogênea:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

Multiplicando à esquerda por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Solução homogênea via transformada de Laplace

Aplicando a transformada inversa:

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\,\mathbf{x}(0)$$

Comparando com a solução obtida anteriormente:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Conclui-se que:

$$e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

A importância da equação acima reside no fato de que ela propicia uma forma conveniente de se obter a solução, sob forma fechada, da exponencial matricial.

Matriz de transição de estados

A solução da equação de estado homogênea do sistema linear e invariante no tempo abaixo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Pode ser escrita, de forma geral, como:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0)$$

Onde $\boldsymbol{\phi}(t)$ é uma matriz *n* x *n* e é solução única de:

$$\boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{I}, \quad \text{pois } \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\phi}(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{I}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(t), \quad \text{pois } \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{\phi}}\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathrm{t})$$

Matriz de transição de estados

Dos slides anteriores, fica claro que:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Note que:

$$\boldsymbol{\phi}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \boldsymbol{\phi}(-t)$$

Constata-se que a solução da equação diferencial vetorial-matricial é simplesmente uma transformação da condição inicial.

Obs: nesta disciplina, usaremos $\boldsymbol{\phi}(t)$ e $e^{\mathbf{A}t}$ como sinônimos. Entretanto, deve ficar claro que $\boldsymbol{\phi}(t)$ (matriz de transição de estados) é uma nomenclatura mais geral, indicando que se está falando do cálculo da solução homogênea do sistema, enquanto que $e^{\mathbf{A}t}$ é função propriamente dita que soluciona para um sistema linear e invariante no tempo. Sistemas variantes no tempo também possuem uma matriz $\boldsymbol{\phi}(t)$, mas nesse caso a matriz não é $e^{\mathbf{A}t}$, e não necessariamente possui as propriedades discutidas nessa disciplina.

Matriz de transição de estados

Relembrando que

$$f(D) = \begin{bmatrix} f(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(d_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(d_n) \end{bmatrix}$$

Caso a matriz **A** seja diagonal, então tem-se o caso especial abaixo:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Se **A** não é diagonal, mas é diagonalizável: $\widehat{\boldsymbol{A}} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{P}$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{P}e^{\widehat{\boldsymbol{A}}t}(t)\mathbf{P}^{-1}$$

Pois:

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}f\left(\widehat{\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{P}^{-1}$$

Matriz de transição de estados

Se a matriz **A** contém *n* autovalores distintos, λ_1, λ_2, ..., λ_n, $\boldsymbol{\phi}(t)$ conterá as exponenciais:

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

(basta lembrar que o conceito de autovalor, para sistemas de controle, é análogo ao conceito de pólo).

No caso de autovalores múltiplos com multiplicidade *n*, a matriz $\boldsymbol{\phi}(t)$ conterá exponenciais multiplicadas por t, t^2, ..., $t^{(n-1)}$. Por exemplo, se os autovalores são λ_1, λ_1, λ_1, λ_4 e λ_5, $\boldsymbol{\phi}(t)$ conterá os termos:

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_4 t}, e^{\lambda_5 t}$$

(relembre o conceito de pólos múltiplos)

Matriz de transição de estados

Propriedades das matrizes de transição de estados para **sistemas lineares invariantes no tempo**:

1. $\boldsymbol{\phi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$
2. $\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \left(e^{-\mathbf{A}t}\right)^{-1} = [\boldsymbol{\phi}(-t)]^{-1} \rightarrow \boldsymbol{\phi}^{-1}(t) = \boldsymbol{\phi}(-t)$
3. $\boldsymbol{\phi}(t_1 + t_2) = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2} = \boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{\phi}(t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2)\boldsymbol{\phi}(t_1)$
4. $[\boldsymbol{\phi}(t)]^n = \boldsymbol{\phi}(nt)$
5. $\boldsymbol{\phi}(t_2 - t_1)\boldsymbol{\phi}(t_1 - t_0) = \boldsymbol{\phi}(t_2 - t_0) = \boldsymbol{\phi}(t_1 - t_0)\boldsymbol{\phi}(t_2 - t_1)$

Cálculo de $\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$

Método numérico – A série de Taylor da exponencial matricial pode ser usada:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!}$$

Trunca-se a série conforme o tamanho do intervalo de tempo e precisão desejada.

Método analítico 1 (transformada inversa de Laplace) – Pode-se usar a transformada inversa de Laplace:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Método analítico 2 (diagonalização) – Se a matriz $\hat{\mathbf{A}}$ for diagonal, a solução da exponencial matricial é facilmente obtida:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Espaço de estados

Se **A** não é diagonal, mas seus autovalores são todos distintos, pode-se diagonalizar **A**:

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{P}$$

Então

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{P}e^{\widehat{\boldsymbol{A}}t}(t)\mathbf{P}^{-1}$$

Método analítico 3 – interpolação de Sylvester. Vimos que:

$$f(\boldsymbol{A}) = \alpha_0\boldsymbol{I} + \alpha_1\boldsymbol{A} + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}$$

Que vale para qualquer função, inclusive para $f(\boldsymbol{A}) = e^{\boldsymbol{A}t}$, ou seja:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \alpha_0\boldsymbol{I} + \alpha_1\boldsymbol{A} + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\boldsymbol{A}^i$$

Então, a exponencial pode ser calculada por um somatório finito. Entretanto, os coeficientes α_i são inicialmente desconhecidos.

Espaço de estados

O livro demonstra que os coeficientes α_i podem ser encontrados calculando o determinante abaixo (autovalores distintos):

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & e^{\lambda_2 t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & e^{\mathbf{A}t} \end{vmatrix} = 0$$

Veja que a última linha, apesar de ser composta por matrizes, é considerada composta por escalares para o cálculo do determinante. É possível mostrar que:

$$\begin{gathered} \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} = e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_2^{m-1} = e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} = e^{\lambda_m t} \end{gathered}$$

Espaço de estados

Se existem autovalores múltiplos – exemplo λ_1 com multiplicidade 3

$$
\begin{array}{r c l}
\dfrac{d^2}{d\lambda^2} \rightarrow & & \leftarrow \dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{d\lambda^2} \\
\dfrac{d}{d\lambda} \rightarrow & & \leftarrow \dfrac{1}{1!}\dfrac{d}{d\lambda} \\
& \left|\begin{matrix}
0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-3} & \boxed{\dfrac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t}} \\
0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & \boxed{te^{\lambda_1 t}} \\
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\
1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \cdots & \lambda_4^{m-1} & e^{\lambda_4 t} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\
\mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}^3 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & e^{\mathbf{A}t}
\end{matrix}\right| = \mathbf{0} &
\end{array}
$$

Espaço de estados

$$\alpha_2(t) + 3\alpha_3(t)\lambda_1 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-3} = \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + 3\alpha_3(t)\lambda_1^2 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-2} = te^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} = e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_4 + \alpha_2(t)\lambda_4^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_4^{m-1} = e^{\lambda_4 t}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} = e^{\lambda_m t}$$

Espaço de estados

Exemplo – obter a matriz de transição de estados $\boldsymbol{\phi}(t)$ do sistema abaixo. Obtenha também $\boldsymbol{\phi}^{-1}(t)$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Espaço de estados

Exemplo – obter a matriz de transição de estados $\boldsymbol{\phi}(t)$ do sistema abaixo. Obtenha também $\boldsymbol{\phi}^{-1}(t)$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Método 1 – A matriz de transição de estados é obtida a partir de:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Espaço de estados

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Para obter $\boldsymbol{\phi}^{-1}(t)$ basta calcular $\boldsymbol{\phi}(-t)$:

$$\boldsymbol{\phi}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & e^{t} - e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -e^{t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Método 2 – diagonalização de **A**:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = (-1)\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{diag} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$tem solução simples quando **A** é diagonal.

$$\boldsymbol{\phi}_{diag}(t) = e^{\mathbf{A}_{diag}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Espaço de estados

A solução é:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{P}\boldsymbol{\phi}_{diag}(t)\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Método 3A – interpolação de Sylvester via determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & e^{\lambda_1} \\ 1 & \lambda_2 & e^{\lambda_2} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & e^{\boldsymbol{A}t} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & e^{-1} \\ 1 & -2 & e^{-2} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & e^{\boldsymbol{A}t} \end{vmatrix} = 0$$

$$-2e^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I}e^{-2t} + \boldsymbol{A}e^{-t} + 2\boldsymbol{I}e^{-t} + e^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{A}e^{-2t} = 0$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = (2\boldsymbol{I} + \mathbf{A})e^{-t} - (\boldsymbol{I} + \mathbf{A})e^{-2t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Espaço de estados

Método 3B – interpolação de Sylvester via sistema de equações

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1\lambda_1=e^{\lambda_1 t}\\ \alpha_0+\alpha_1\lambda_2=e^{\lambda_2 t}\\ \alpha_0\boldsymbol{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}=e^{\boldsymbol{A}t}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha_0-\alpha_1=e^{-t} & (1)\\ \alpha_0-2\alpha_1=e^{-2t} & (2)\\ \alpha_0\boldsymbol{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}=e^{\boldsymbol{A}t} & (3)\end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1):

$$\alpha_1=e^{-t}-e^{-2t}$$

Usando a resposta em (1):

$$\alpha_0=2e^{-t}-e^{-2t}$$

Assim:

$$e^{\boldsymbol{A}t}=(2e^{-t}-e^{-2t})\boldsymbol{I}+(e^{-t}-e^{-2t})\boldsymbol{A}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Espaço de estados

Solução das equações de estado não-homogêneas

Considere agora a equação de estado não-homogênea descrita por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

É possível mostrar que:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(\mathrm{t}-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Ou:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

$\boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0)$: efeito das condições iniciais

$\int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$: efeito da entrada

Espaço de estados

Exemplo – obter a resposta temporal do seguinte sistema, em que *u*(t) é um degrau unitário aplicado em t = 0:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Espaço de estados

Exemplo – obter a resposta temporal do seguinte sistema, em que *u*(t) é um degrau unitário aplicado em t = 0:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Resposta – A matriz de transição de estados $\boldsymbol{\phi}(t)$ já foi obtida em slide anterior:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A resposta a um degrau unitário pode então ser calculada:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

$$\int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$
$$= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] d\tau$$

Espaço de estados

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}_0^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -1 + 1 + e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Se, por exemplo, as condições iniciais são nulas, ou seja, se **x**(0) = **0**:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$