# Compensadores – projeto via LGR

## Compensadores de avanço

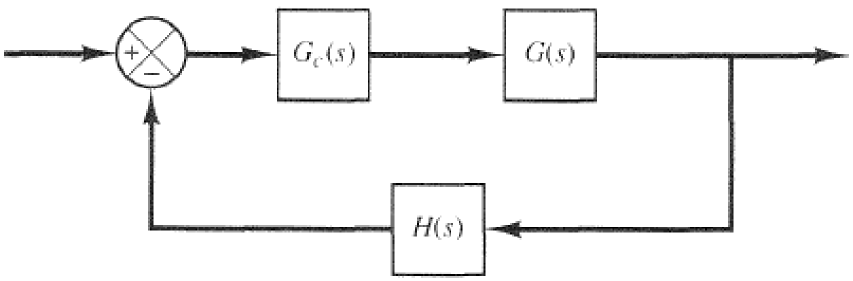
## Introdução

Deve-se, primeiramente definir qual o desempenho desejado

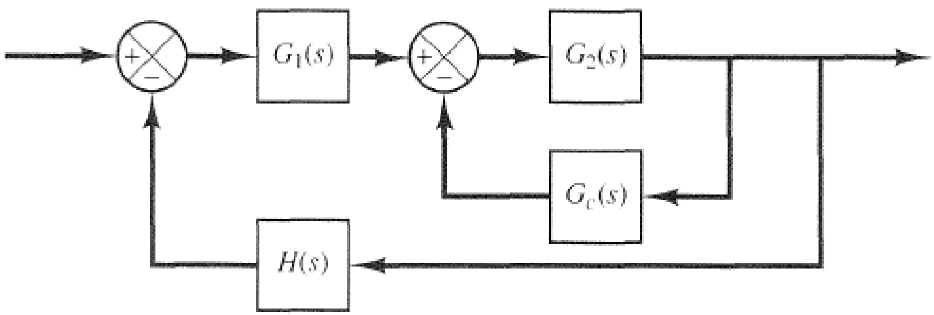
- Evitar propor desempenho melhor que o necessário, pois acarreta em custos extras:
  - Atuadores mais rápidos ou potentes
  - Maior consumo de energia
  - Desgaste prematuro de componentes
- Ajuste de ganho, sozinho, pode não ser o suficiente:
  - Impossibilidade de melhorar vários critérios ao mesmo tempo, presença de trade-offs indesejados
  - Desempenho geral é ruim

# Compensadores

- Compensadores
  - Dispositivo inserido com o objetivo de melhorar o desempenho dinâmico
  - Inclui os compensadores de atraso-avanço de fase (objeto de estudo dessa aula) e os controladores PID
  - Podem ser inseridos em
    - Série: projeto mais simples, custo com amplificadores
    - Paralelo: projeto mais complicado, custo menor




Série



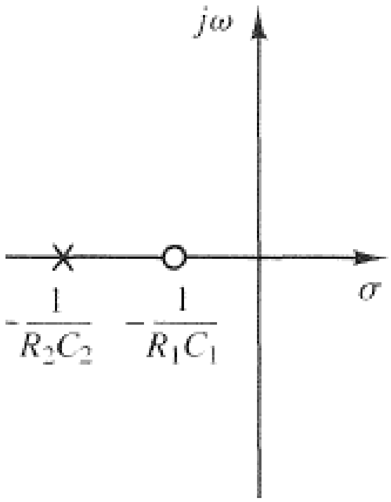

Paralelo

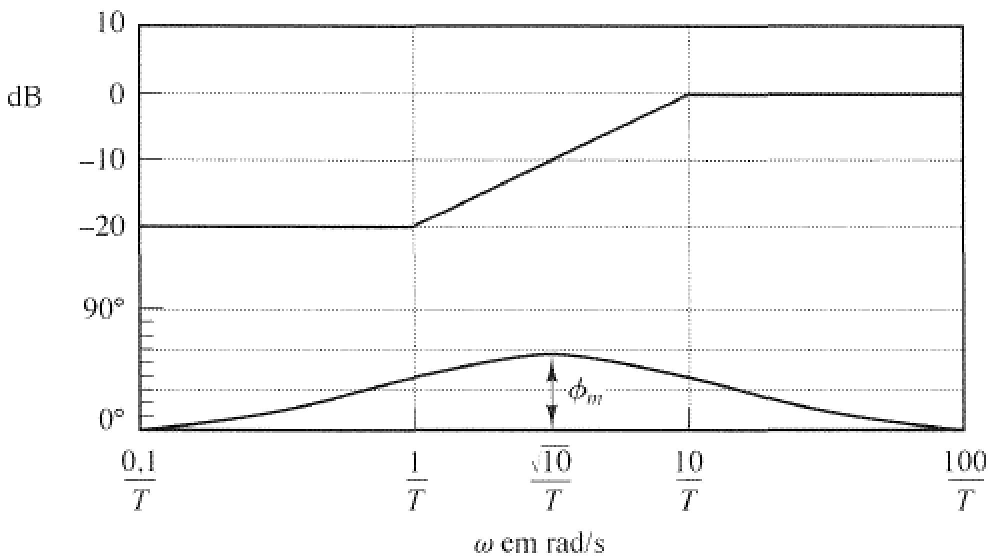
Compensadores de atraso e avanço de fase

Compensadores avanço de fase:

- Filtro passa alta
- Adiciona fase positiva em alta frequência
- Aumenta margem de fase do conjunto: melhora resposta transitória
- Não afeta significativamente desempenho em regime permanente
- Aumenta em um a ordem do sistema

$$K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}, 0 < \alpha < 1$$



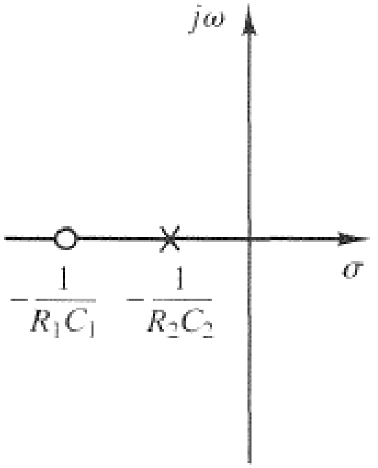



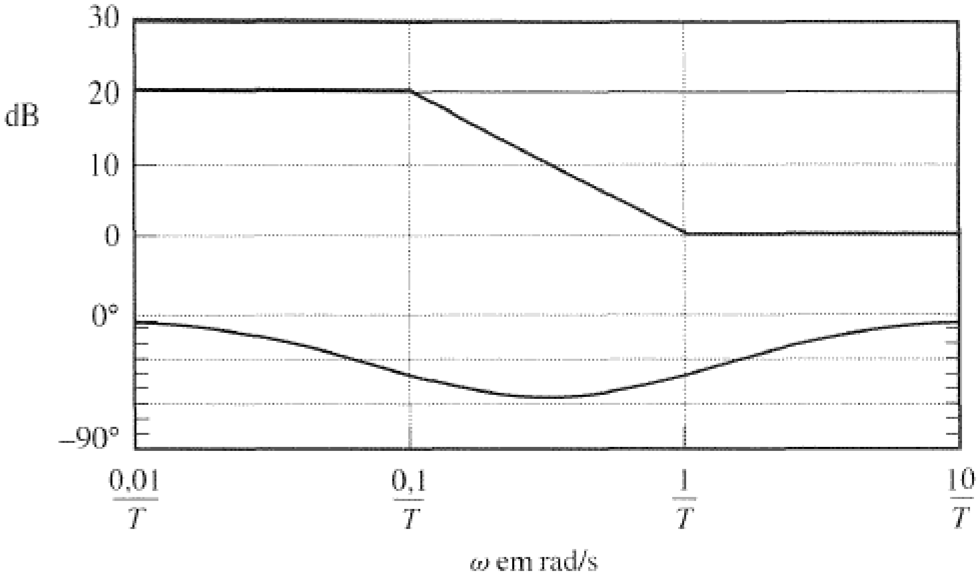
## Compensadores de atraso e avanço de fase

Compensadores atraso de fase:

- Filtro passa baixa – aumenta ganho DC e de baixa frequência
- Adiciona fase negativa em baixa frequência – mudança não afeta significativamente margem de fase / desempenho transitório
- Ganho de baixa frequência: melhora regime permanente
- Aumenta em um a ordem do sistema

$$K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}, \; \beta > 1$$

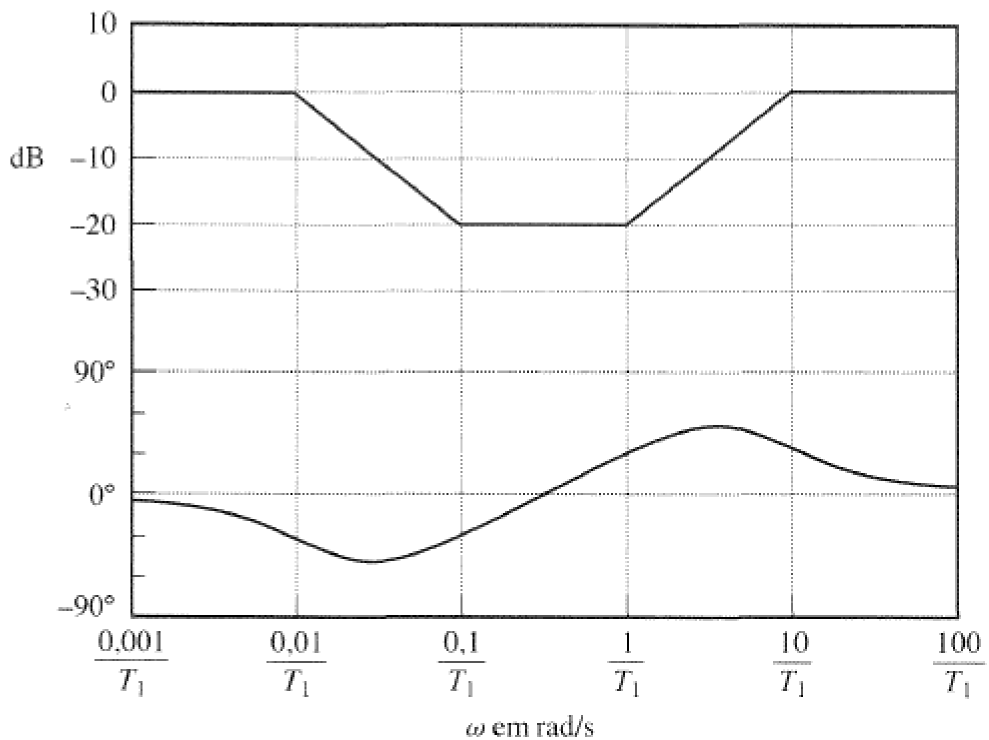


Compensadores de atraso e avanço de fase

Compensadores atraso/avanço de fase:

- Filtro rejeita faixa
- Une benefício de ambos os compensadores
- Aumenta em dois a ordem do sistema



## Compensadores de atraso e avanço de fase

Compensadores e LGR:

- Fórmula do ângulo e posição das assíntotas do LGR:

$$\text{ângulo das assíntotas} = \frac{\pm 180°(2k+1)}{n-m}$$

$$s = \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n-m}$$

- $n$: quantidade de polos, $m$: quantidade de zeros
- Se $n - m \geq 3$, assíntotas vão para a direita

Adição de polos:

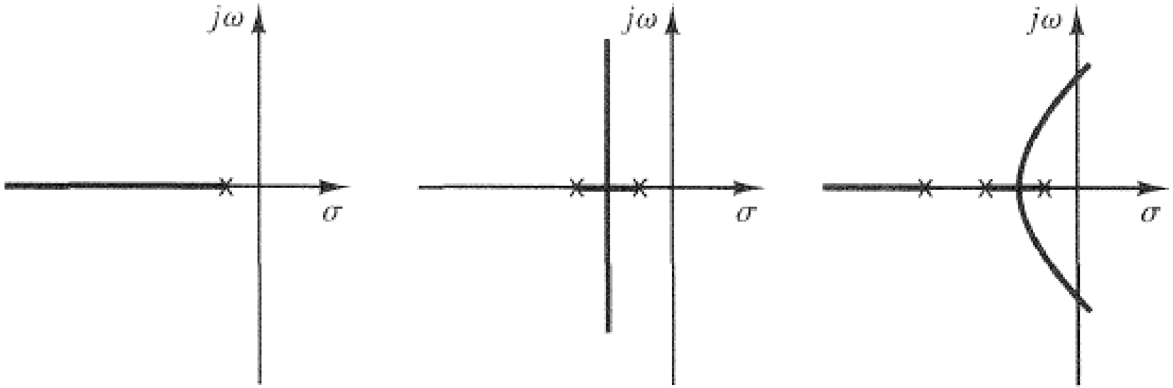
- Desloca ramos para a direita
- Reduz estabilidade relativa
- Acomodação (setling time) mais lenta

Adição de zeros:

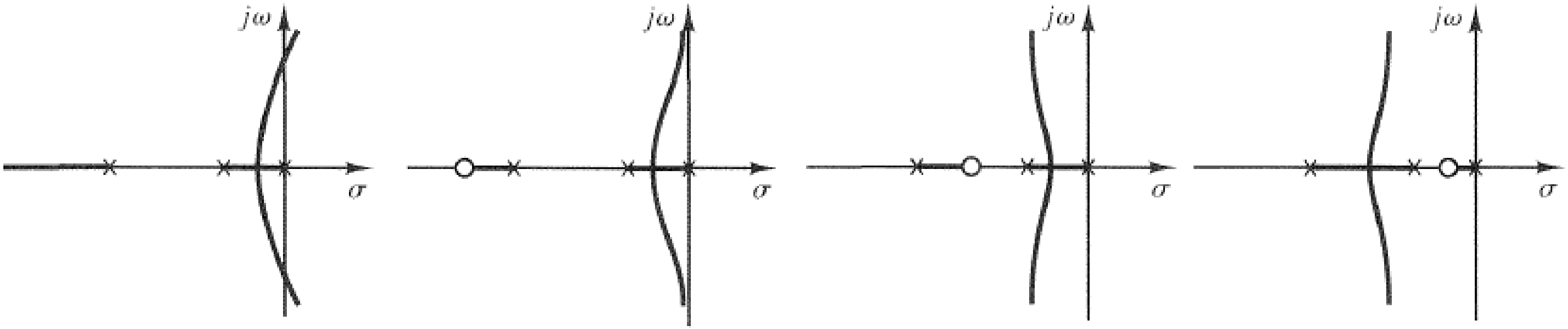
- Efeito contrário

Compensadores de atraso e avanço de fase

## Adição de polos:



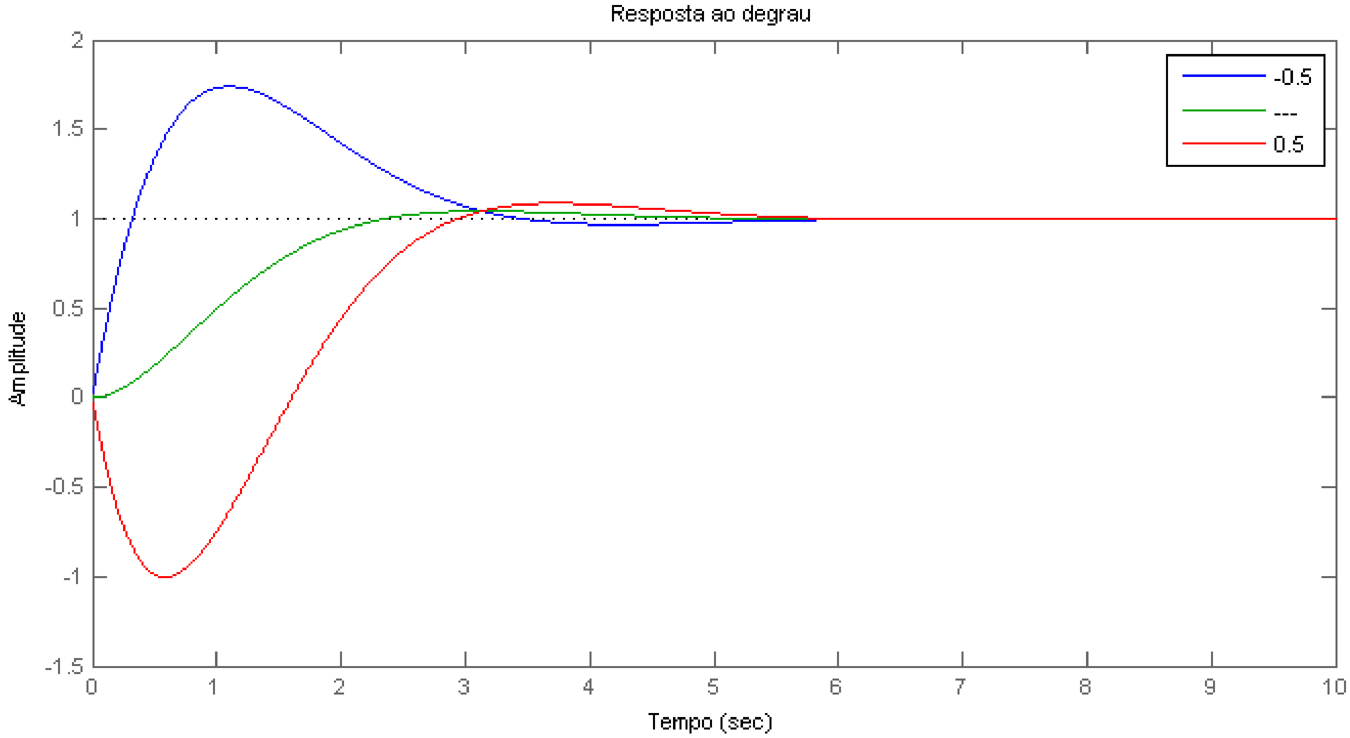

## Adição de zeros:



Compensadores de atraso e avanço de fase

Veja que sistemas com zeros e/ou com mais de dois polos não possuem necessariamente um comportamento padrão. Exemplo:

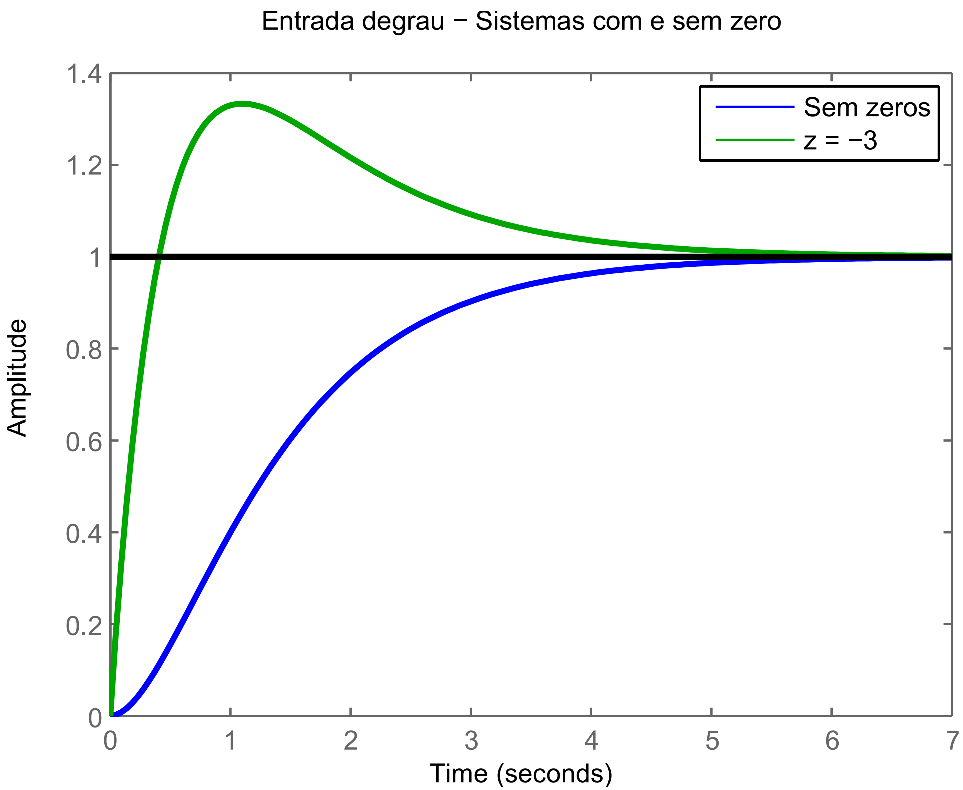
$$\frac{4(s+0.5)}{(s+1+j)(s+1-j)}, \frac{2}{(s+1+j)(s+1-j)}, \frac{-4(s-0.5)}{(s+1+j)(s+1-j)}$$




Solução: projetar com par de polos dominantes.

# Compensadores de atraso e avanço de fase

Veja, por exemplo, que sistema com dois polos reais e um zero apresenta sobressinal, apesar de ser superamortecido. Entretanto, não é o sobressinal usual, mas sim um sobressinal sem oscilações, e de "cauda" alongada (decaimento exponencial exclusivo)




```
G1 = zpk([], [-1 -2], 2);
G2 = zpk(-0.5, [-1 -2], 4);

step(G1);
hold on
step(G2);

legend('Sem zeros', 'z = -3');
title('Entrada degrau -
Sistemas com e sem zero');
```

## Compensadores de atraso e avanço de fase

Relembrando a base teórica do LGR:

Função de transferência de malha fechada :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Pólos de malha fechada são as raízes da equação abaixo:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Que pode ser reescrita como:

$$G(s)H(s) = -1$$

Sabendo que:

$$-1 = 1\underline{/180^\circ}$$

Temos que:

Condição angular: $\underline{/G(s)H(s)} = \pm 180^\circ(2k+1)$

Condição modular: $|G(s)H(s)| = 1$

# Compensador de avanço de fase

Compensador de avanço de fase

Objetivo: posicionar polo em posição inalcançável via ajuste de ganho

Passos:

1. Definir posição dos polos conforme desempenho ou valores de $\zeta$ e $\omega_n$ desejados

2. Esboce o LGR. O polo é alcançável apenas com ajuste de ganho? Se sim, o problema não exige compensador. Se não, continue.

3. Coloque um ponto de teste na posição desejada. Qual o ângulo obtido? Qual a deficiência angular $\phi$, ou seja, quanto falta para que a condição de ângulo seja satisfeita? Ou seja,$\phi = \angle G(s) - 180°$ Obs: veja que a etapa 2 é opcional, e desnecessariamente trabalhosa se a pessoa não possui um computador à disposição. Caso o polo seja alcançável, ele cumpre a condição angular, e obtém-se $\phi = 0°$ na etapa 3.

Compensador de avanço de fase

4. Sabendo que a função de transferência do compensador é

$$G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}, 0 < \alpha < 1$$

ajuste $T$ e $\alpha$ para que $\angle G_c(s) = \phi$, ou seja, para que $\angle G_c(s)G(s) = 180°$

Veja que existem infinitas soluções, sendo que, de modo geral, quanto maior $\alpha$, melhor o desempenho em regime permanente. Isso será discutido no exemplo.

5. Ajuste $K_C$ para que o conjunto cumpra a condição modular.

6. Verifique se a resposta está adequada. Veja que a resposta só será parecida com o esperado se o polo projetado for dominante (outros polos significativamente mais à esquerda). Zeros próximos à origem também influenciam resposta final.

Compensador de avanço de fase

## 7. Sugestões para melhorar o desempenho

- Esboce o LGR sem compensador. Veja se existe, para alguma faixa de valores, um par de polos dominantes. Use o compensador para alterar, de forma não muito acentuada, o par de polos dominantes. Veja que o compensador altera todos os polos indiscriminadamente, e mudanças muito intensas podem fazer um polo não dominante ganhar relevância.
- Use o zero do compensador para cancelar um polo da planta. Com isso, evita-se o aumento da ordem do sistema planta + controlador. Veja que, quanto maior a ordem, mais complicada é a dinâmica do sistema.

# Exemplo 1

Seja a função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Deseja-se um polo com as seguintes características:

$$\zeta = 0.5, \qquad \omega_n = 4\ \mathrm{rad/s}$$

## Exemplo 1

Seja a função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Deseja-se um polo com as seguintes características:

$$\zeta = 0.5, \qquad \omega_n = 4 \text{ rad/s}$$

Solução:

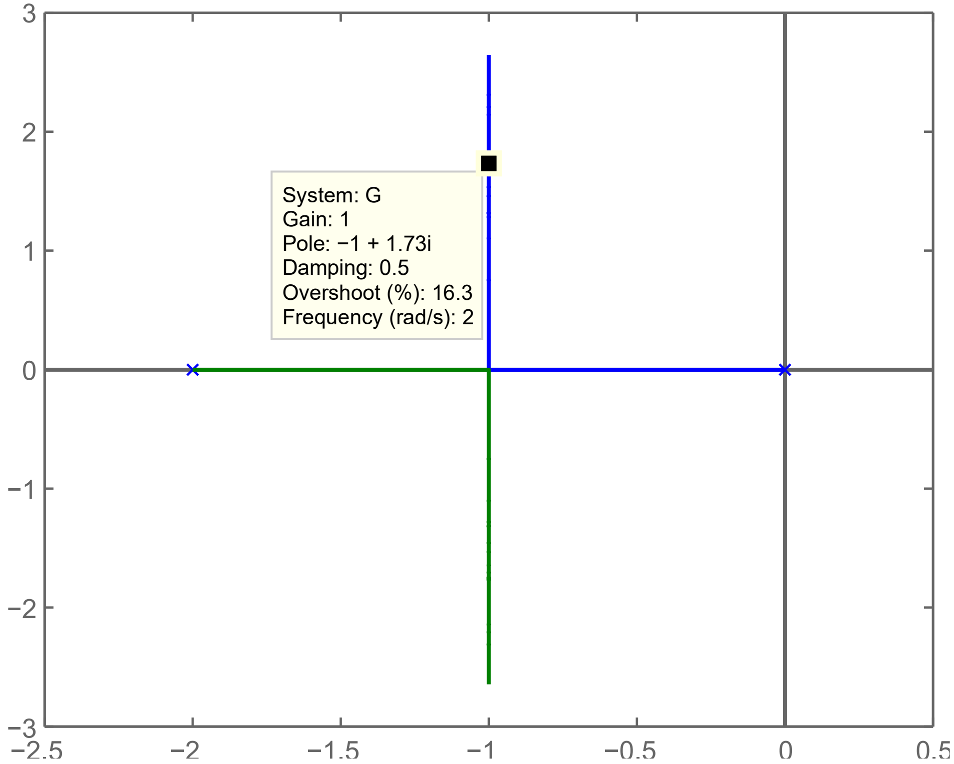
1.

$$\sigma = \zeta\omega_n = 2$$
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4\sqrt{0.75} = 2\sqrt{3}$$

$$p = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

# Exemplo 1

## 2. Esboço inicial do LGR




```
G = zpk([],[0 -2], 4)
rlocus(G,[0:0.001:2])
```

Veja que $\zeta$, $\omega_n$ não podem ser atendidos ao mesmo tempo. Exemplo escolhido cumpre apenas $\zeta$

Veja que certamente

$$p = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

está fora de qualquer ramo do LGR

Exemplo 1

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

3. Medindo $\angle G(s)|_{s=-2+j2\sqrt{3}}$ :

Opção 1: com material de desenho

- Ligar polos e zeros ao ponto de teste
- Medir ângulos
- $\sum \angle \text{zeros} - \sum \angle \text{polos}$

Opção 2:

Ponto de teste: polo desejado

$$s_p = -2 + j2\sqrt{3}$$

$$\angle G(s)\Big|_{s=s_p} = \angle 4 - \underbrace{\left(\angle s\Big|_{s=s_p} + \angle(s+2)\Big|_{s=s_p}\right)}_{\text{Polos, denominador (subtrair)}}$$

Ganho: não afeta ângulo

$$= 0° - 120° - 90° = -210° \rightarrow \phi = -210° - (-180°) = -30°$$

Exemplo 1

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

$$s_p = -2 + j2\sqrt{3}$$

4.

$$G_c = \angle K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = 30°$$

Solução 1: arbitrando que o zero do controlador é $z = -2$, pois assim cancela o polo $p = -2$ $(T = 0.5)$ da planta:

$$\angle K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = \angle K_c \frac{s+2}{s + \frac{2}{\alpha}} = 0 + 90° - \angle\left(s + \frac{2}{\alpha}\right)\Big|_{s=s_p} = 30°$$

Exemplo 1

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

$$s_p = -2 + j2\sqrt{3}$$

$$-\angle\left(s + \frac{2}{\alpha}\right)\Big|_{s=s_p} = -60°$$

$$\text{atan}\,\frac{2\sqrt{3}}{-2 + 2/\alpha} = 60°$$

$$\frac{\sqrt{3}}{-1 + 1/\alpha} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{1}{\alpha} = 2 \rightarrow \alpha = 0{,}5$$

Assim:

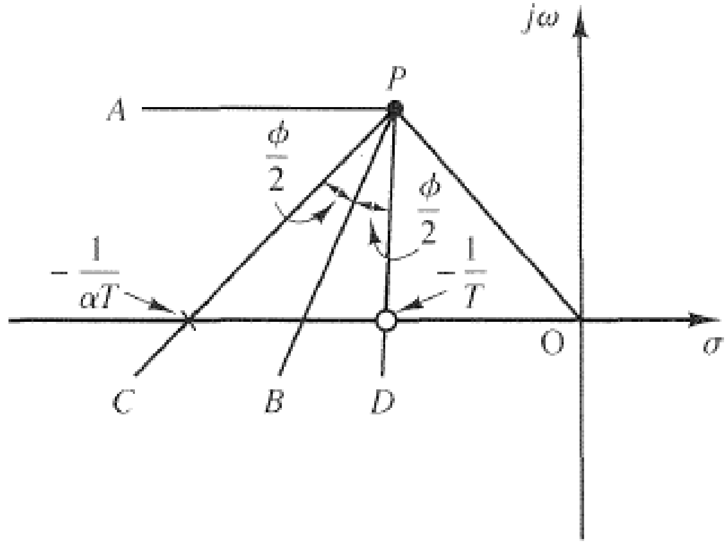
$$G_c(s) = K_c\frac{s+2}{s+4} \rightarrow G_c(s)G(s) = K_c\frac{4}{s(s+4)}$$

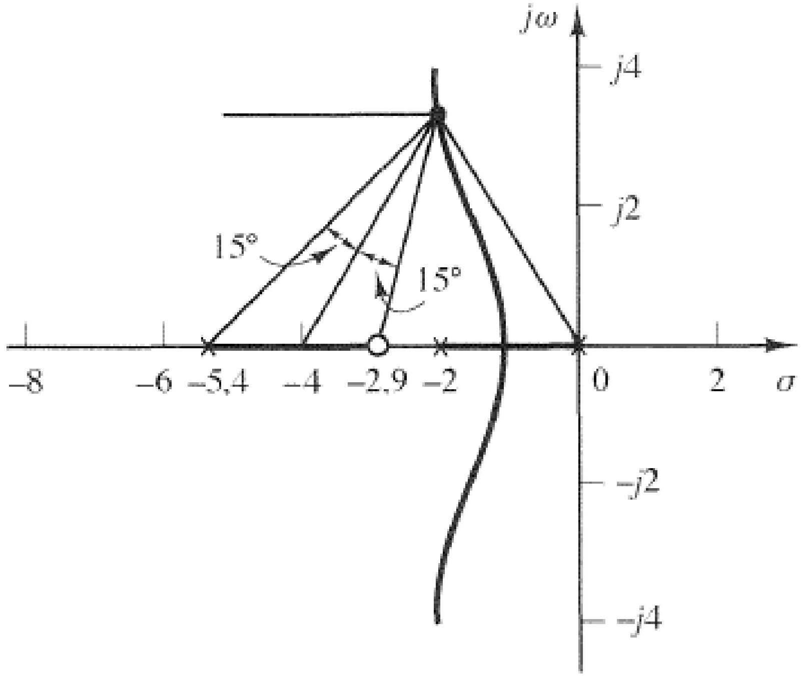
Veremos como calcular $K_c$ em breve

Exemplo 1

4. Solução 2 – tentar maximizar $\alpha$

Obs: como $0 < \alpha < 1$, maximizar $\alpha$ significa aproximar o polo do zero




PA: linha horizontal

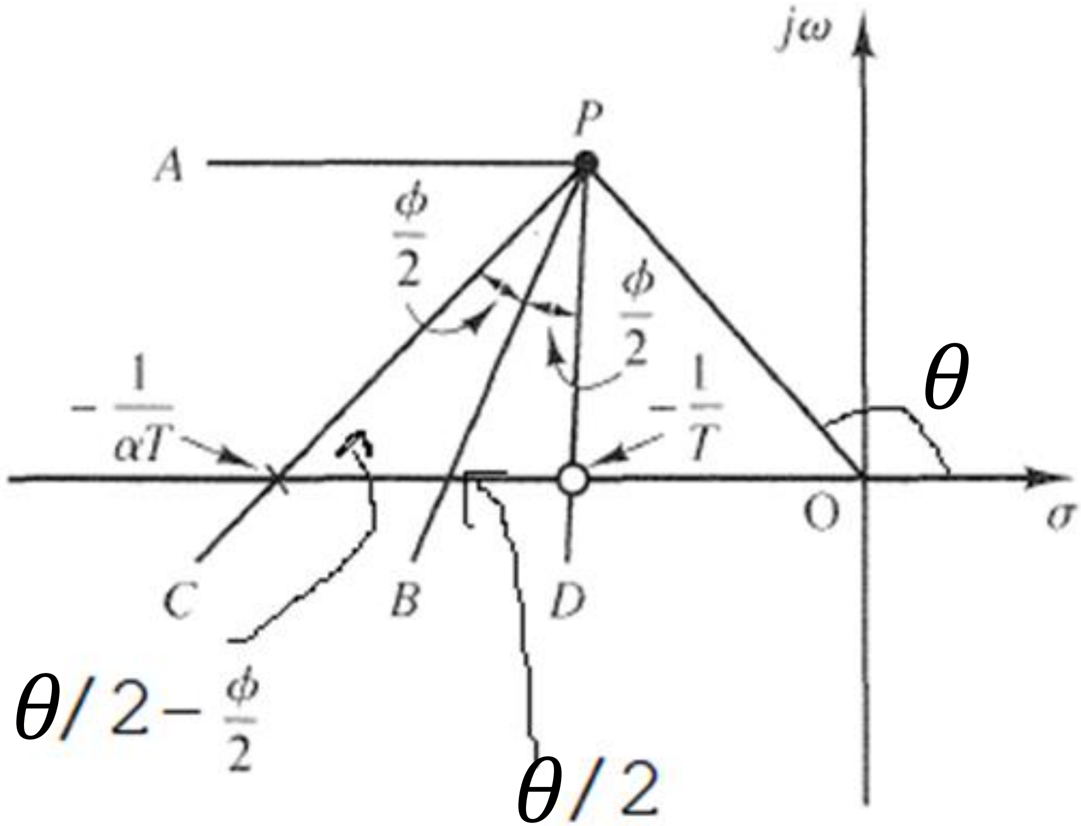
PB: bissetriz entre PO e PA

Polo e zero obtidos respectivamente pela intersecção das linhas PC e PD

# Exemplo 1

Sugestão: resolver com ferramentas de desenho

Solução sem usar material de desenho:



# Exemplo 1

$$\theta = \angle(PO) = \angle\left(-2 + j2\sqrt{3}\right) = 120° \rightarrow \frac{\theta}{2} = 60°$$

$$\angle(s+a)\Big|_{s=P=-2+j2\sqrt{3}} = \frac{\theta}{2} - \frac{\phi}{2} = 45°$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{-2+a} = 1 \rightarrow a = 2\left(1+\sqrt{3}\right) = 5{,}4 \rightarrow p = -5{,}4$$

$$\angle(s+b)\Big|_{s=P=-2+j2\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\phi}{2} = 75°$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{-2+a} = \tan 75° \rightarrow b = 2{,}9 \rightarrow z = -2{,}9$$

# Exemplo 1

Para esse valores de $z$ e $p$:

$$T = \frac{1}{2,9} = 0.345, \qquad \alpha = \frac{1}{5.4\,T} = 0,537$$

Função de transferência de malha aberta:

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{s + 2.9}{s + 5.4} \frac{4}{s(s + 2)}$$

Exemplo 1

5. Calculando $K_c$ via condição de módulo

Solução 1:

$$\left|K_c\frac{4}{s(s+4)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}}=1\rightarrow K_c=\frac{\left|-2+j2\sqrt{3}\right|\left|2+j2\sqrt{3}\right|}{4}=4$$

Solução 2:

$$\left|K_c\frac{s+2.9}{s+5.4}\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}}=4{,}68$$

Observação: quanto maior o $\alpha$, usualmente maior é a constante de erro estático de velocidade $K_v$, o que significa que o erro em regime permanente para uma rampa será menor. Verificando:

Solução 1:

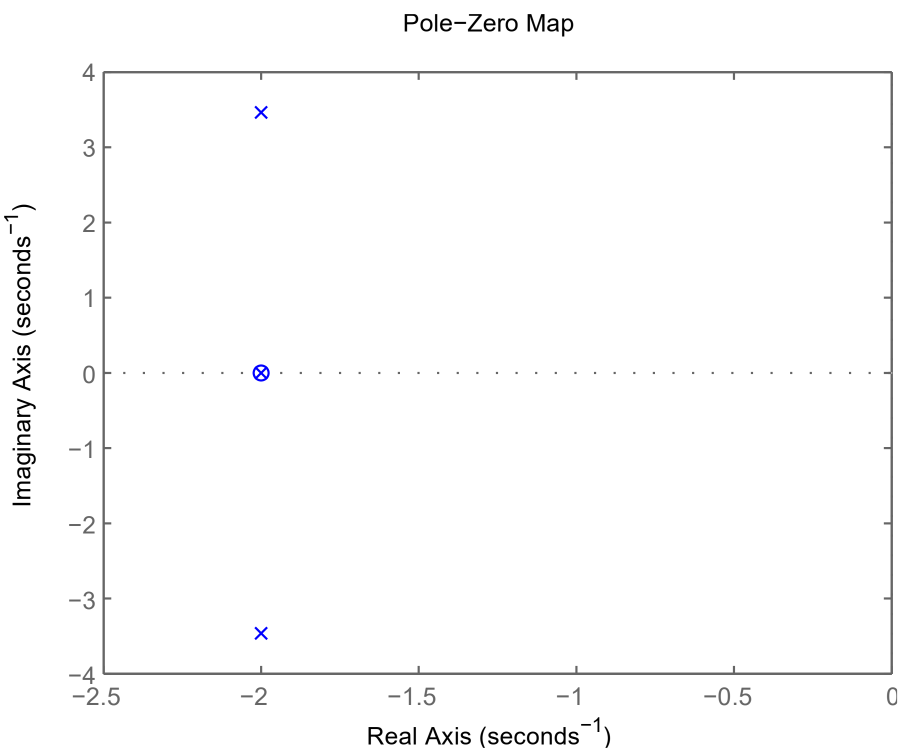
$$\lim_{s\rightarrow 0} sG_c(s)G(s)=4\rightarrow e_{ss}=\frac{1}{4}=0.25$$

Solução 2:

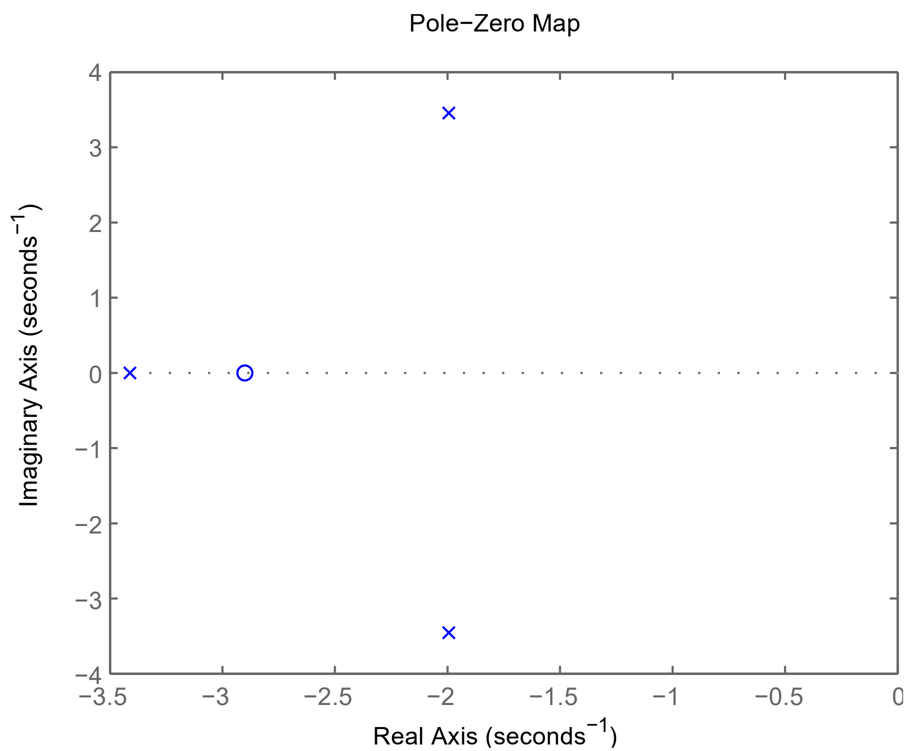
$$\lim_{s\rightarrow 0} sG_c(s)G(s)=5.02\rightarrow e_{ss}=0.20$$

# Exemplo 1

Posição dos polos de malha fechada:

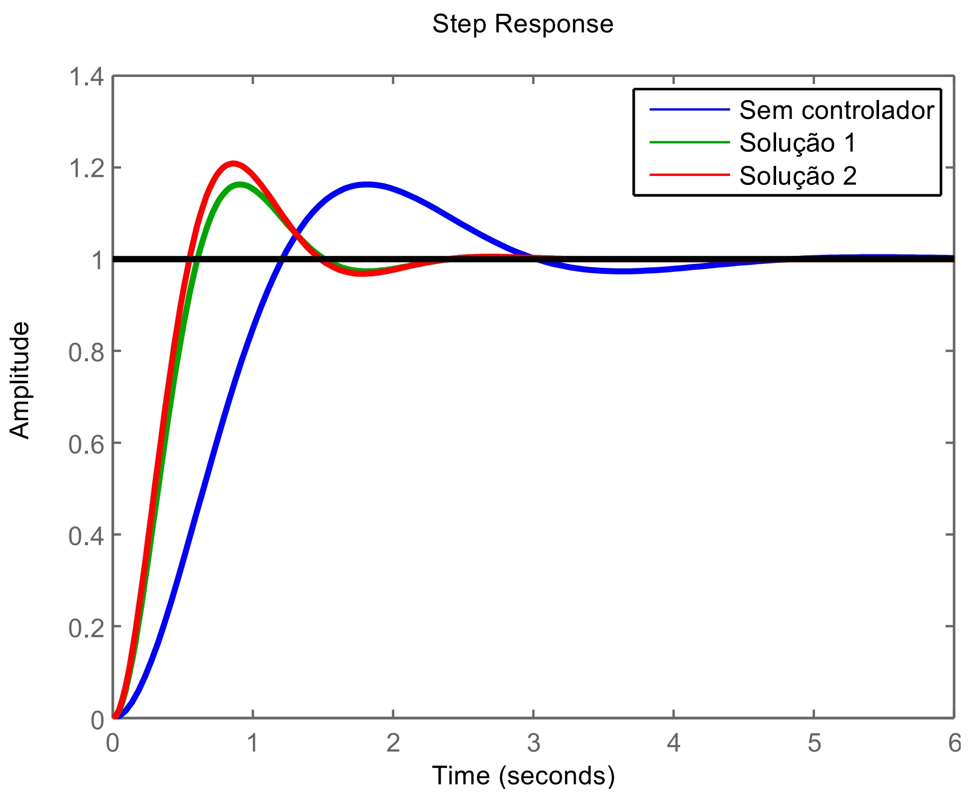



Solução 1




Solução 2

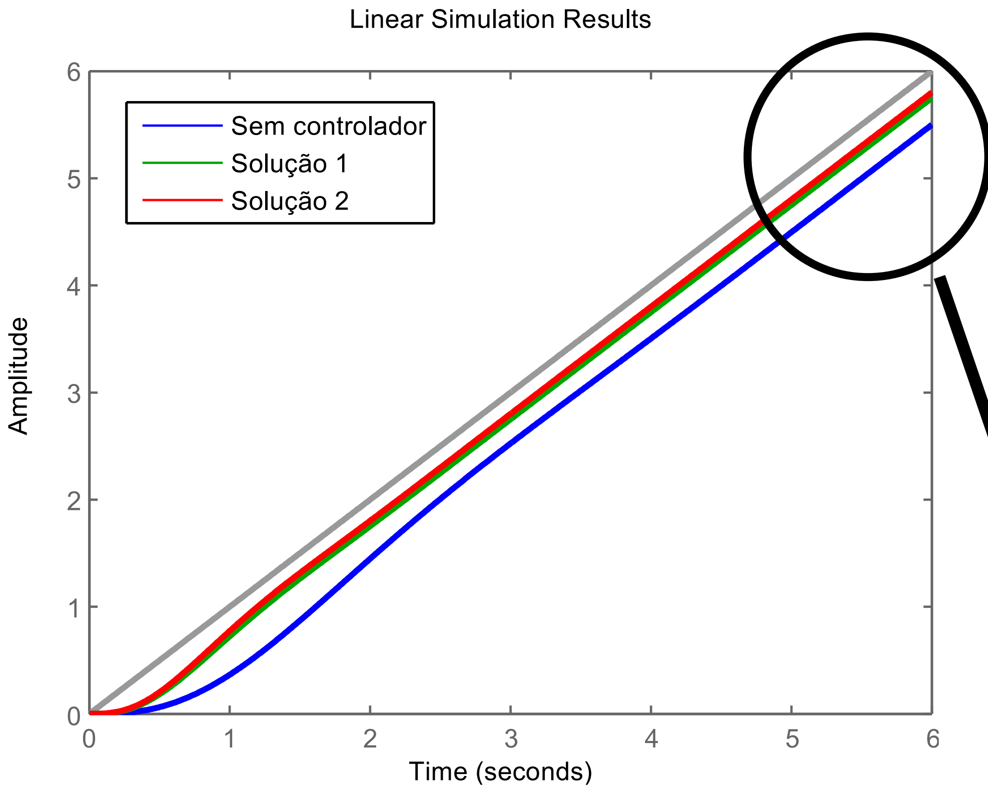
# Exemplo 1



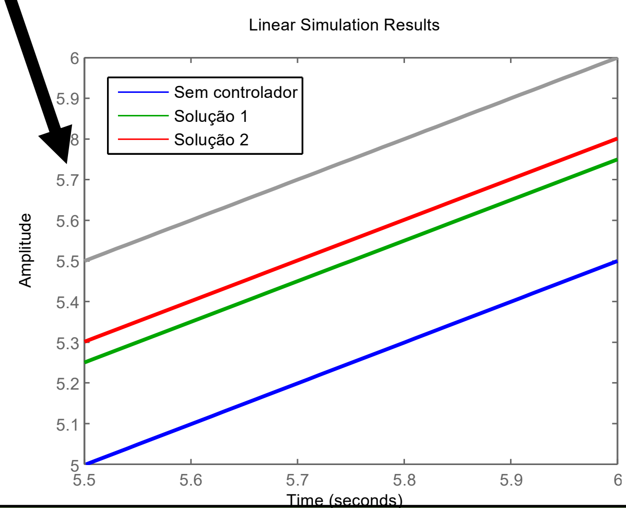

```
G = zpk([],[0 -2], 4);
Gc1 = zpk(-2,-4,4);
Gc2 = zpk(-2.9,-5.4,4.68);
G_f0 = feedback(G,1);
G_f1 = feedback(Gc1*G,1);
G_f2 = feedback(Gc2*G,1);
step(G_f0);
hold on
step(G_f1);
step(G_f2);
legend('Sem controlador',
'Solução 1', 'Solução 2')
```

Obs: G_f0 possui mesmo $\zeta$, mas $\omega_n$ distinto de G_f1 e G_f2

# Exemplo 1

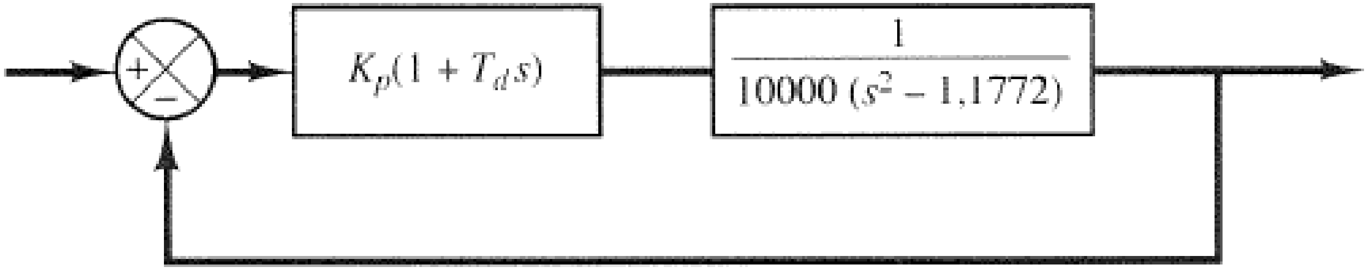



```
U = 0:0.01:6;
T = U;
lsim(G_f0,U,T);
hold on
lsim(G_f1,U,T);
lsim(G_f2,U,T);
legend('Sem controlador',
'Solução 1', 'Solução 2')
```



# Exemplo 2

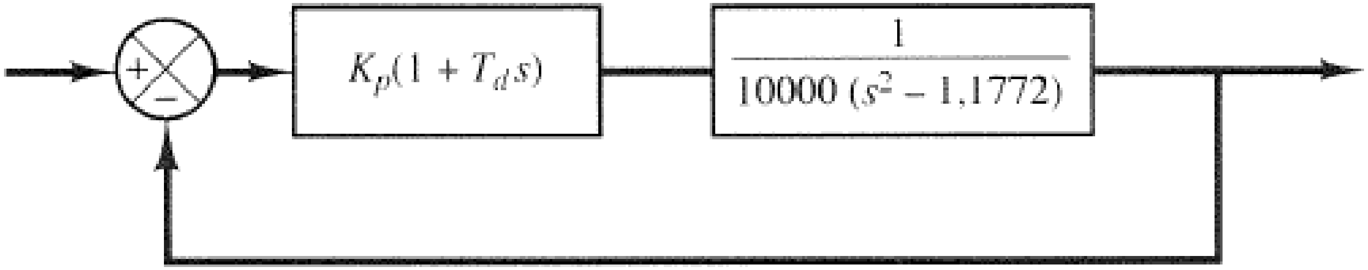
A.7.6.




$$\zeta = 0.7, \omega_n = 0.5$$

## Exemplo 2

A.7.6.




$$\zeta = 0.7, \omega_n = 0.5$$

Solução:

$$\sigma = \zeta\omega_n = 0.35, \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 0.357, p = -0.35 \pm 0.357j$$

$$\phi = 180° + \angle\frac{1}{10000} - \angle\left(s-\sqrt{1.1772}\right)\Big|_{s=p} - \angle\left(s+\sqrt{1.1772}\right)\Big|_{s=p}$$

$$= 180° + 0 - 166° - 26° = -12°$$

Então:

$$\angle(s+1/T_d)\Big|_{s=p} = 12°$$

Exemplo 2

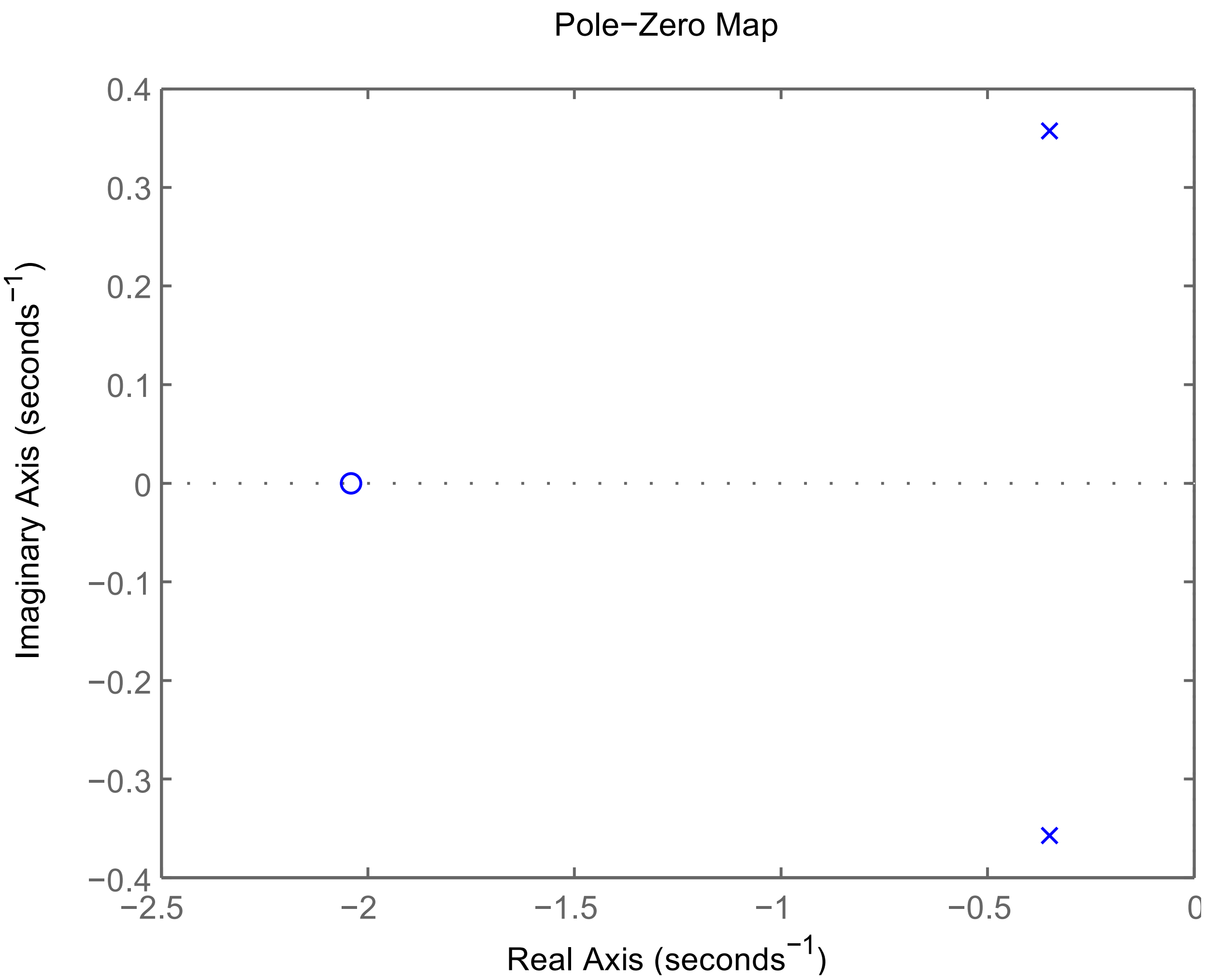
$$\angle\left(-0.35+\frac{1}{T_d}+j0.357\right) = 12°$$

$$\frac{0.357}{-0.35+1/T_d} = \tan 12° \rightarrow \frac{1}{T_d} = 2.03 \rightarrow T_d = 0.49$$

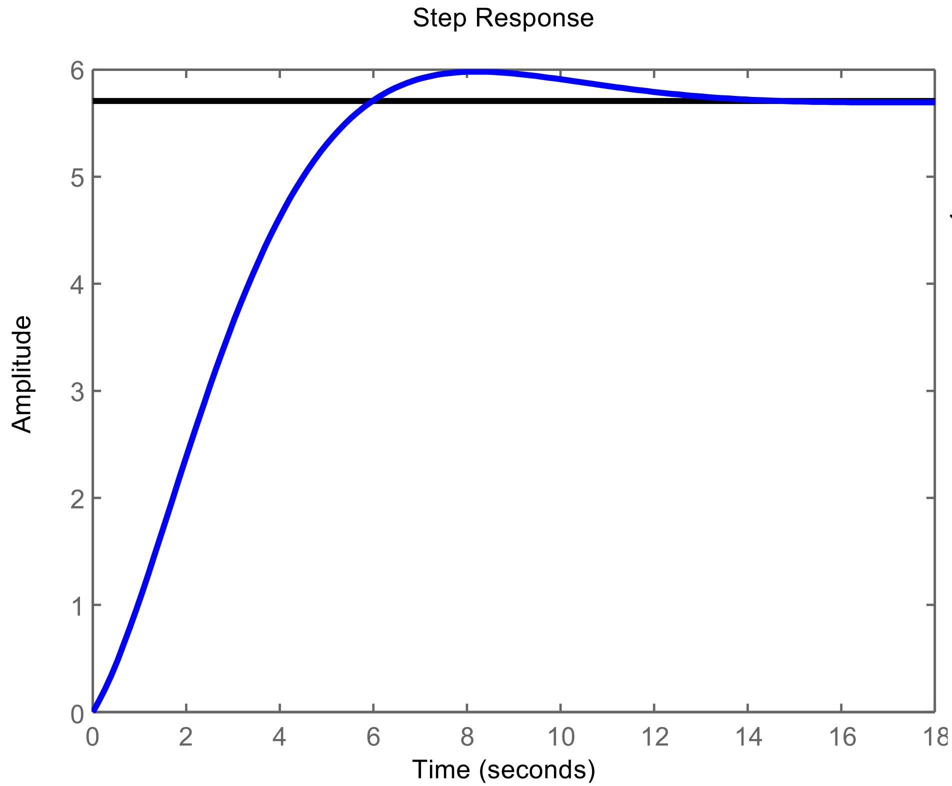
Ajustando $K_p$ via condição de módulo:

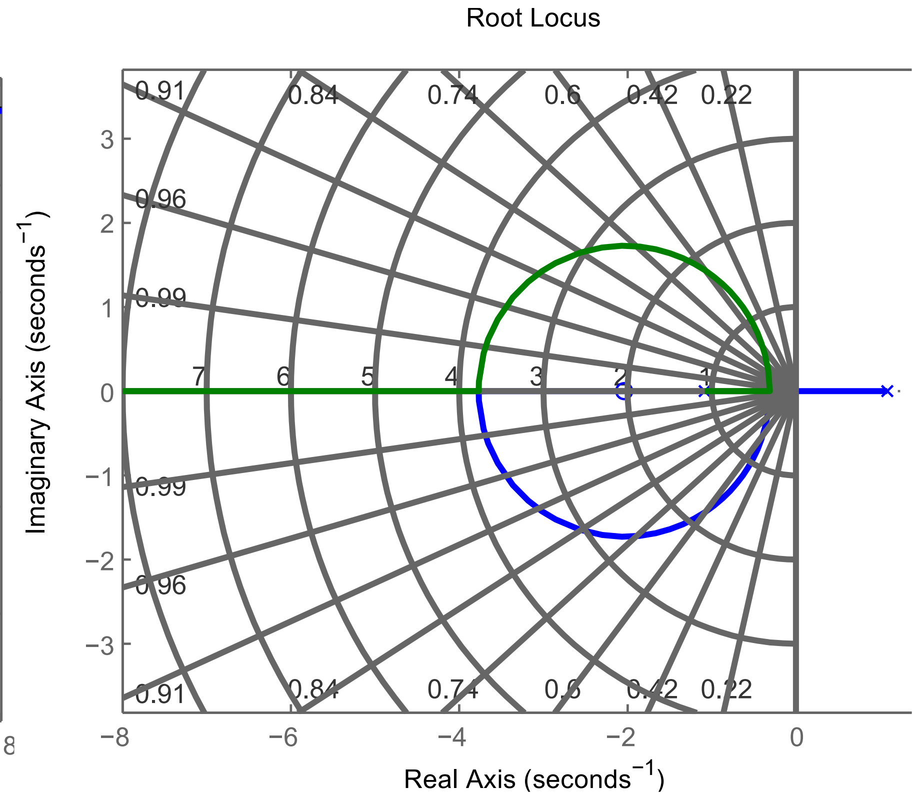
$$\left|\frac{K_p(1+0.49s)}{10000(s^2-1.1772)}\right|_{s=-0.35+j0.357} = 1 \rightarrow K_p = 14273$$

# Exemplo 2


Pole−Zero Map
Imaginary Axis (seconds$^{-1}$)
Real Axis (seconds$^{-1}$)
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0

# Exemplo 2

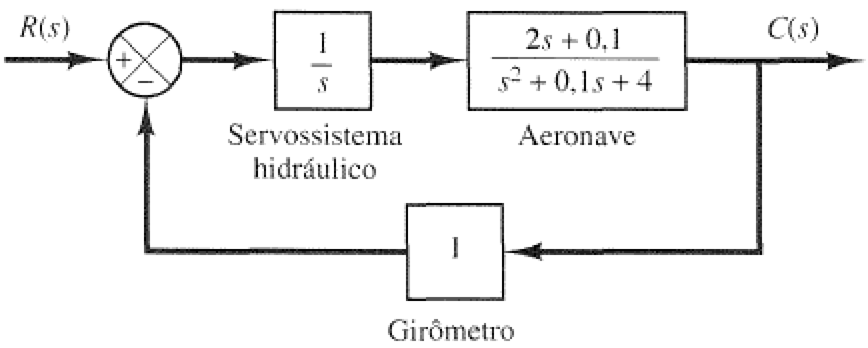


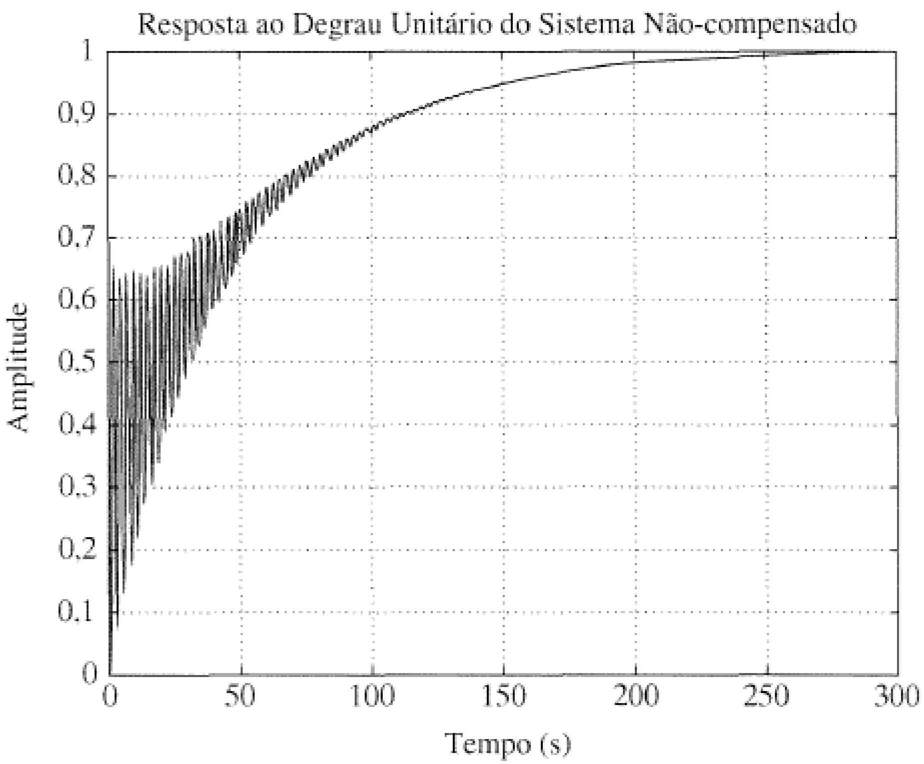




$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 11.4\ s, \qquad t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = 6{,}6, \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 8{,}8$$

# Exemplo 3

A.7.10 –




$$G(s) = \frac{2s + 0,1}{s^3 + 0.1s^2 + 4s}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 0,1}{s^3 + 0,1s^2 + 6s + 0,1}$$

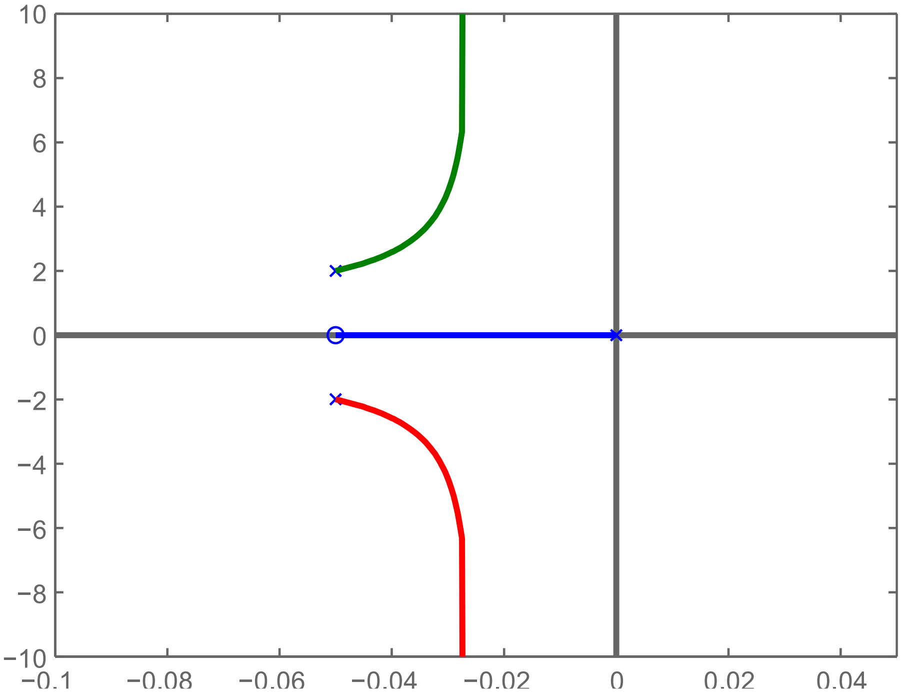
$$= \frac{2(s + 0,05)}{(s + 0,0417 + j2,4489)(s + 0,0417 - j2,4489)(s + 0,0167)}$$

# Exemplo 3

Objetivo: melhorar desempenho. Sugestão do livro: polo dominante é

$$p = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

LGR do sistema sem compensação:




Três polos sempre lentos e dominantes.

Zero perto da origem “segura” ramos na região.

## Exemplo 3

Solução:

a) Inserir um compensador inicial que troque o zero problemático por um zero distante da origem.

$$G_{c1}(s) = \frac{s+4}{2s+0{,}1}$$

$$G_{c1}(s)G(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{s}+4}{s^3+0.1s^2+4s} \approx \frac{s+4}{s(s+0.05+j2)(s+0.05-j2)}$$

b) Calcular deficiência angular:

Do livro: $\phi = -133°$

Veja que a deficiência é muito grande. Então são necessários dois compensadores:

$$G_{c2} = K_C\left(\frac{s+s_z}{s+s_p}\right)^2$$

Exemplo 3

Arbitra-se que $s_z = 2$. Então:

$$\angle(s+2)\Big|_{s=p} - \angle(s+s_p)\Big|_{s=p} = \frac{133°}{2} = 66{,}5°$$

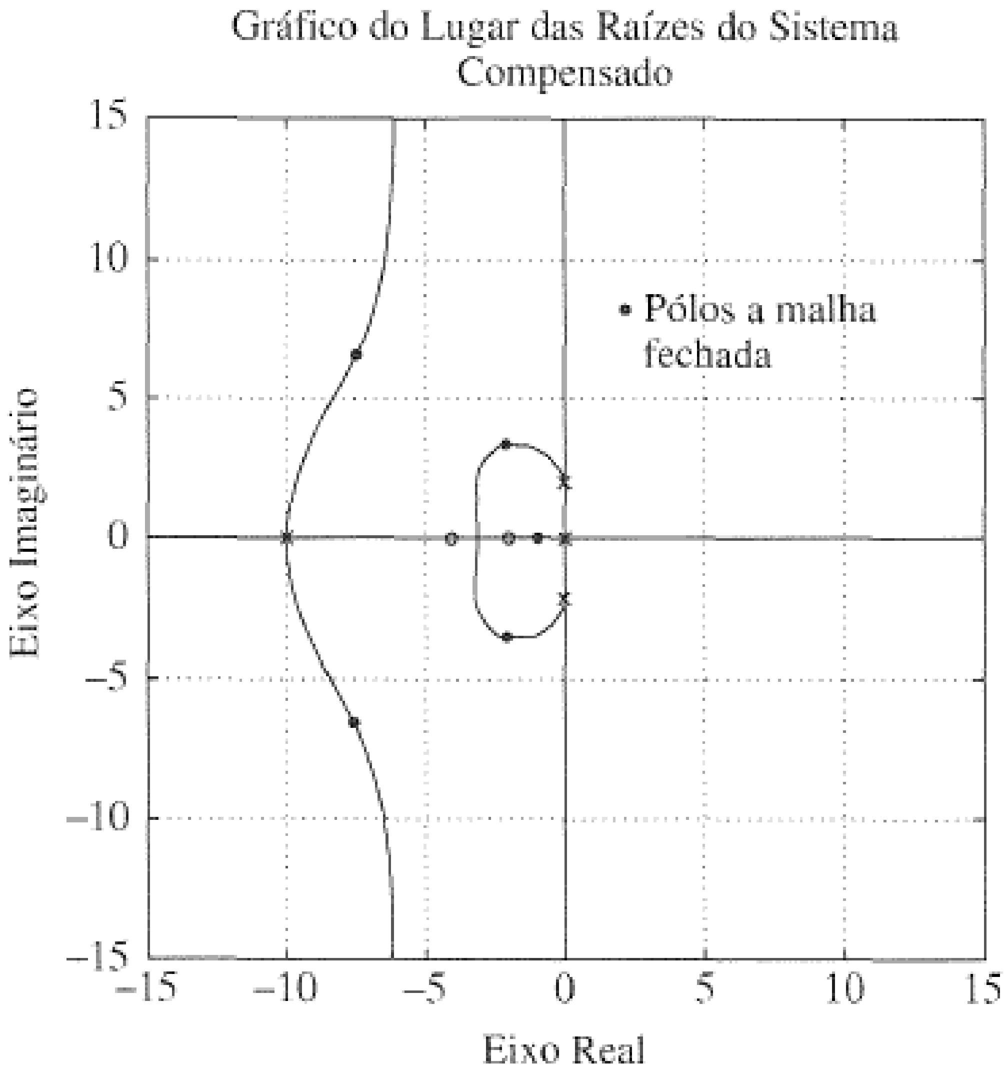
$$90° - \operatorname{atan}\frac{2\sqrt{3}}{s_p - 2} = 66{,}5°$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{s_p - 2} = \tan 23.5° \rightarrow s_p = 9.9158$$

Via condição de módulo:

$$K_c = \left|\frac{(s+9.9158)s(s^2+0.1s+4)}{(s+2)^2(s+4)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 88$$

# Exemplo 3

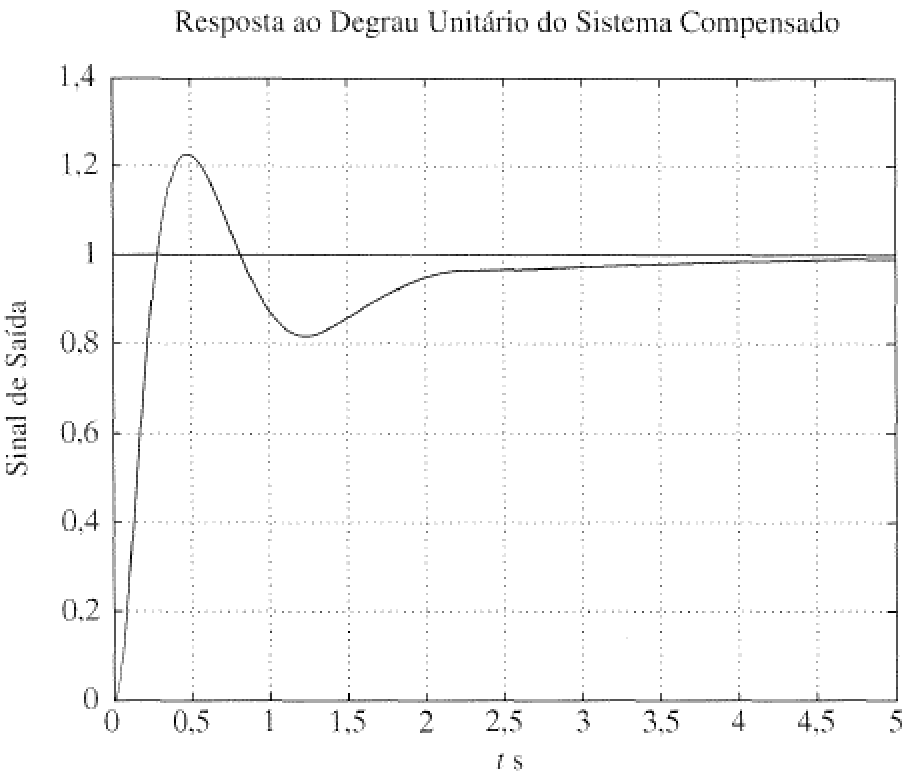


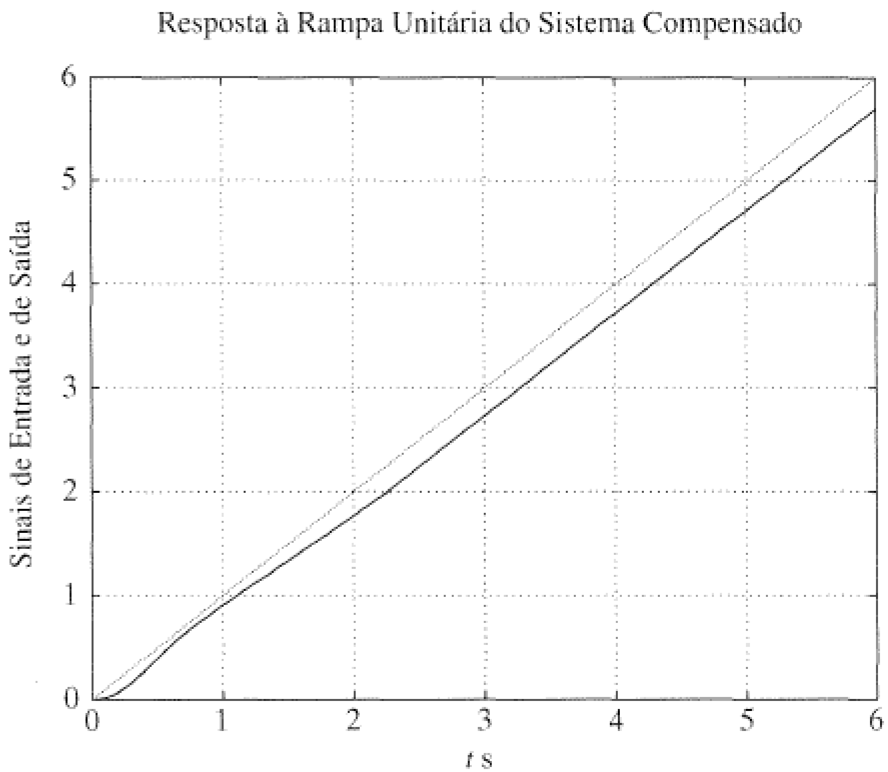

$s = -2{,}0000 \pm j3{,}4641$

$s = -7{,}5224 \pm j6{,}5326$

$s = -0{,}8868$

# Exemplo 3


Resposta ao Degrau Unitário do Sistema Compensado
Sinal de Saída
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,5
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
t s


Resposta à Rampa Unitária do Sistema Compensado
Sinais de Entrada e de Saída
6
5
4
3
2
1
0
t s