

Unesp – Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho”

Engenharia de Controle e Automação

Campus de Sorocaba

CONTROLE MULTIVARIÁVEL

Prof. Henrique C. Ferreira

1º Semestre
2008

Conteúdo

1	Álgebra linear	1
1.1	Introdução	1
1.2	Dependência linear, bases e coordenadas	1
1.2.1	Mudança de base	2
1.3	Transformação linear	4
1.3.1	Representação matricial de uma transformação linear	4
1.3.2	Transformação de similaridade	5
1.4	Sistemas de equações algébricas lineares	6
1.4.1	Determinante e inversa de matrizes quadradas	9
1.5	Autovalores e autovetores	10
1.5.1	Diagonalização	10
1.6	Funções de matrizes quadradas	12
1.6.1	Potência de uma matriz	12
1.6.2	Função de uma matriz	13
1.6.3	O teorema de Cayley-Hamilton	14
1.6.4	Polinômio mínimo	14
1.6.5	Funções usando séries de potência	15
2	Descrição matemática de sistemas	17
2.1	Introdução	17
2.2	Sistemas lineares	18
2.2.1	Descrição no espaço de estados	19
2.3	Sistemas lineares invariantes no tempo	20
2.3.1	Solução da equação de estados	20
2.3.2	Exemplos	21
2.3.3	Estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo	24
2.3.4	Linearização	25
2.4	Sistemas a tempo discreto	26
2.4.1	Discretização	26
2.4.2	Solução das equações a tempo discreto	27
2.4.3	Estabilidade de equações de estado a tempo discreto	28
2.5	Equações de estado equivalentes	29
3	Controlabilidade e observabilidade	32
3.1	Controlabilidade	32
3.2	Observabilidade	34
3.3	Princípio da dualidade	38
3.4	Decomposição canônica	39

4	Representações no espaço de estados	46
4.1	Realização e formas canônicas	46
4.1.1	Forma canônica controlável	46
4.1.2	Forma canônica observável	49
4.1.3	Realizações de funções de transferência não estritamente próprias	51
4.2	Decomposição de Kalman	52
4.3	Realização de ordem mínima	52
4.4	Realização de matrizes de transferência	54
4.4.1	Algoritmo de realização por colunas	55
4.4.2	Algoritmo de realização por linhas	58
5	Realimentação de estados	59
5.1	Introdução	59
5.2	Realimentação de estados – Caso SISO	60
5.2.1	Função de transferência do sistema em malha fechada	66
5.3	Regulação e rastreamento	66
5.3.1	Rastreamento robusto e rejeição de perturbação	67
5.3.2	Estabilização	68
5.4	Realimentação de estados – Caso multivariável	70
5.4.1	Projeto cíclico	71
5.5	Controle ótimo linear quadrático	73
5.5.1	Realimentação completa dos estados	74
5.5.2	O princípio do máximo	74
5.5.3	Solução do regulador linear quadrático	75
6	Observadores de estado e realimentação da saída	79
6.1	Observadores de estado	79
6.1.1	Detectabilidade	81
6.2	Realimentação de estados estimados	82
7	Descrição polinomial de sistemas	86
7.1	Descrição de sistemas	86
7.2	Matrizes polinomiais	87
7.2.1	Matrizes unimodulares e operações elementares	88
7.2.2	Máximo divisor comum à direita (MDCd)	90
7.2.3	Matrizes primas à direita	92
7.2.4	Matrizes estáveis	93
7.2.5	Aplicações em sistemas	94
7.2.6	Forma de Hermite e forma de Smith	94
7.3	Matrizes de funções racionais	99
7.3.1	Forma de Smith-MacMillan	99
7.3.2	Descrição matricial fracionária	101
7.3.3	DMF's Irredutíveis	102
7.3.4	Pólos e zeros	106
7.3.5	DMF's próprias	107

Capítulo 1

Álgebra linear

1.1 Introdução

Sejam A , B , C e D matrizes reais $n \times m$, $m \times r$, $l \times n$ e $r \times p$, respectivamente. Sejam a_i a i -ésima coluna de A e b_j a j -ésima linha de B . Então temos

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m,$$

$$CA = C \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ca_1 & Ca_2 & \dots & Ca_m \end{bmatrix}$$

e

$$BD = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_1 D \\ b_2 D \\ \vdots \\ b_m D \end{bmatrix}.$$

Note que $a_i b_i$ é uma matriz $n \times r$; é o produto de um vetor coluna $n \times 1$ por um vetor linha $1 \times r$.

1.2 Dependência linear, bases e coordenadas

Considere um espaço vetorial real de dimensão n , denotado por \mathbb{R}^n . Todo vetor em \mathbb{R}^n é uma n -upla de números reais tais que

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

O conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in \mathbb{R}^n$ é dito ser *linearmente dependente* se existem números reais $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, não todos nulos, tais que

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m = 0. \tag{1.1}$$

Se o único conjunto de β_i 's para o qual (1.1) é válida for $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$, então o conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ é dito ser *linearmente independente*.

Se o conjunto de vetores em (1.1) é linearmente independente, então existe pelo menos um β_i , digamos, β_1 , que é diferente de zero. Então de (1.1), temos

$$x_1 = -\frac{1}{\beta_1}(\beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_m x_m) = \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \dots + \gamma_m x_m,$$

onde $\gamma_i = -\beta_i/\beta_1$. Tal expressão é chamada *combinação linear*.

A *dimensão* de um espaço vetorial pode ser definida como o máximo número de vetores linearmente independentes no espaço. Assim, em \mathbb{R}^n podemos encontrar no máximo n vetores linearmente independentes.

Um conjunto de vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n é chamado *base* se todo vetor em \mathbb{R}^n puder ser escrito como uma única combinação linear deste conjunto. Em \mathbb{R}^n , qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes pode ser usado como uma base. Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tal conjunto. Todo vetor x pode ser expresso de forma única como

$$\begin{aligned} x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \alpha \end{aligned} \quad (1.2)$$

Chamamos $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$ de *coordenadas* ou *representação* do vetor x com relação à base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Associamos ao \mathbb{R}^n a seguinte *base ortonormal*

$$i_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad i_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Em relação a esta base, temos

$$x = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = I_n \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Em outras palavras, a representação de qualquer vetor x em relação a base ortonormal em (1.3) é o próprio vetor.

1.2.1 Mudança de base

A figura 1.1 mostra dois sistemas de coordenadas para \mathbb{R}^2 , um relativo à base $\{e_1, e_2\}$ e outro relativo à base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

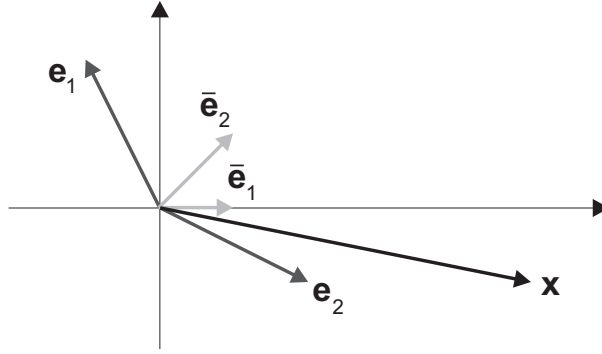


Figura 1.1: Coordenadas do vetor x em bases distintas

As coordenadas do vetor x com respeito às bases $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ são β e $\bar{\beta}$, respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} x &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = [e_1 \ e_2] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = [e_1 \ e_2] \beta \\ &= \bar{\beta}_1 \bar{e}_1 + \bar{\beta}_2 \bar{e}_2 = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2] \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{bmatrix} = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2] \bar{\beta}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Escrevendo e_1 e e_2 em termos de \bar{e}_1 e \bar{e}_2 , obtemos

$$\begin{aligned} e_1 &= p_{11} \bar{e}_1 + p_{21} \bar{e}_2 = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2] \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = E p_1, \\ e_2 &= p_{12} \bar{e}_1 + p_{22} \bar{e}_2 = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2] \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = E p_2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $p_1 = [p_{11} \ p_{21}]^T$ e $p_2 = [p_{12} \ p_{22}]^T$ são as coordenadas de e_1 e e_2 com respeito à base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ e $E = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2]^T$. Usando notação matricial, escrevemos

$$[e_1 \ e_2] = [E p_1 \ E p_2] = E [p_1 \ p_2] = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2] P. \quad (1.6)$$

Substituindo (1.6) em (1.4), obtemos

$$x = [e_1 \ e_2] \beta = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2] \beta = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2] \bar{\beta}. \quad (1.7)$$

Como a representação de x com respeito à base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ é única, de (1.7) temos

$$\bar{\beta} = P \beta. \quad (1.8)$$

Isto estabelece a relação entre $\bar{\beta}$ e β . Em (1.5), se escrevermos \bar{e}_i com relação à base β , vamos obter

$$\beta = Q \bar{\beta}, \quad (1.9)$$

onde a i -ésima coluna de Q é a representação de \bar{e}_i com relação à base $\{e_1, e_2\}$.

Dadas duas bases, se as coordenadas de um vetor com relação a uma das bases é conhecida, as coordenadas do mesmo vetor com relação a outra base pode ser calculada usando (1.8) ou (1.9). Como $\bar{\beta} = P \beta$ e $\beta = Q \bar{\beta}$, temos $\bar{\beta} = P Q \bar{\beta}$, para todo $\bar{\beta}$. Assim concluímos que

$$PQ = I \quad \text{ou} \quad P = Q^{-1}.$$

1.3 Transformação linear

Dados dois conjuntos X e Y , se associarmos a cada elemento de X um único elemento de Y , então a lei de associação é chamada *função*. As funções que estudaremos estão restritas a uma classe de funções chamada *funções lineares*, *operadores lineares*, *mapas lineares* ou *transformações lineares*. Os conjuntos associados com transformações lineares que vamos estudar são espaços vetoriais X e Y . Uma transformação linear é denotada por $T : X \rightarrow Y$, isto é, T mapeia X para Y .

Definição 1.1. Uma função T que mapeia X para Y é dita ser uma transformação linear se e somente se

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$$

para quaisquer vetores $x_1, x_2 \in X$ e quaisquer escalares α_1, α_2 .

Exemplo 1.1. Sejam \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m espaços vetoriais, seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e seja $T : X \rightarrow Y$ definida por

$$y = Ax, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

É fácil verificar, usando propriedades de matrizes, que T é uma transformação linear.

1.3.1 Representação matricial de uma transformação linear

Teorema 1.1. Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão n e m , respectivamente. Seja x_1, x_2, \dots, x_n um conjunto de vetores linearmente independentes de X . Então a transformação linear $T : X \rightarrow Y$ é determinada unicamente por n funções $y_i = T(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Além disso, com relação à base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de X e uma base $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ de Y , T pode ser representada por uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A i -ésima coluna de A é a representação de y_i com relação à base $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Demonstração. Seja x um vetor arbitrário em X . Como x_1, x_2, \dots, x_n são linearmente independentes, este conjunto de vetores forma uma base. Conseqüentemente, o vetor x pode ser expresso unicamente como $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. Pela linearidade de L , temos

$$\begin{aligned} T(x) &= T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \\ &= \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \dots + \alpha_n T(x_n) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n, \end{aligned}$$

que implica que para qualquer vetor x em X , $T(x)$ é unicamente determinado por $y_i = T(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Isto prova a primeira parte do teorema.

Seja $[a_{1i} \ a_{2i} \ \dots \ a_{mi}]^T$ as coordenadas de y_i com relação à $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, isto é,

$$y_i = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m] \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Vamos escrever, como em (1.6),

$$\begin{aligned}
 T \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix} A.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Note que a i -ésima coluna de A é a representação de y_i com relação à base de Y . Com relação à base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de X e à base $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ de Y , a transformação linear $y = T(x)$ pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix} \beta = T \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \alpha, \tag{1.11}$$

onde $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_m]^T$ e $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$ são as coordenadas de x e y , respectivamente. Substituindo (1.10) em (1.11), obtemos

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix} A \alpha,$$

que juntamente com a unicidade da representação, implica que

$$\beta = A \alpha. \tag{1.12}$$

Assim concluímos que se as bases X e Y são escolhidas, a transformação linear pode ser representada por uma matriz com coeficientes em \mathbb{R} .

□

1.3.2 Transformação de similaridade

Vamos estudar a seguir uma importante subclasse de transformações lineares que vão de um espaço vetorial X para ele mesmo, isto é, $L : X \rightarrow X$. Neste caso, a mesma base é usada para esses dois espaços vetoriais. Se uma base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de X é escolhida, então a representação matricial A da transformação linear T pode ser obtida de acordo com o teorema 1.1. Para uma base diferente $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, obtemos uma diferente representação \bar{A} da mesma transformação linear T . Seja x um vetor arbitrário em X . Sejam α e $\bar{\alpha}$ as coordenadas de x com relação às bases $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, respectivamente. Sejam β e $\bar{\beta}$ as coordenadas do vetor $y = T(x)$ com relação às bases escolhidas, que também podem ser encontradas. As representações matriciais A e \bar{A} podem ser determinadas usando o teorema 1.1. As relações entre α e $\bar{\alpha}$ e entre β e $\bar{\beta}$ foram estabelecidas em (1.8). Elas estão relacionadas por $\bar{\alpha} = P\alpha$ e $\bar{\beta} = P\beta$, onde P é uma matriz não singular com coeficientes em \mathbb{R} e a i -ésima coluna de P é uma representação de e_i com relação à base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$. De (1.11), temos

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha & \xrightarrow{A} & \beta (= A\alpha) \\
 \uparrow Q & & \uparrow Q = P^{-1} \\
 P \downarrow & & P \downarrow \\
 \bar{\alpha} & \xrightarrow{\bar{A}} & \bar{\beta} (= \bar{A}\bar{\alpha})
 \end{array}$$

$$\bar{\beta} = \bar{A}\bar{\alpha} \quad \text{e} \quad \bar{\beta} = P\beta = PA\alpha = PAP^{-1}\bar{\alpha}.$$

Assim, pela unicidade da representação com relação a uma base específica, temos $\bar{A}\bar{\alpha} = PAP^{-1}\bar{\alpha}$. Como a relação vale para qualquer $\bar{\alpha}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{A} &= PAP^{-1} = Q^{-1}AQ, \\ A &= P^{-1}\bar{A}P = Q\bar{A}Q^{-1}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde $Q = P^{-1}$.

Duas matrizes A e \bar{A} são ditas *similares* se existe uma matriz não singular P satisfazendo (1.13). A transformação definida em (1.13) é chamada *transformação de similaridade*.

1.4 Sistemas de equações algébricas lineares

Considere o conjunto de equações lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= y_m, \end{aligned}$$

onde $a_{ij}, y_i \in \mathbb{R}$ são conhecidos e $x_i \in \mathbb{R}$ são incógnitas. Este conjunto de equações pode ser escrito na forma matricial como

$$Ax = y \tag{1.14}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Claramente $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

Definição 1.2. A *imagem* de A ($\text{Im}(A)$) é definida como todas as combinações lineares possíveis de todas as colunas de A .

Teorema 1.2. A imagem da transformação linear A é um subespaço de \mathbb{R}^m

Demonstração. Se $y_1, y_2 \in \text{Im}(A)$, então por definição existem vetores $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $y_1 = Ax_1$ e $y_2 = Ax_2$. Para qualquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \text{Im}(A)$. Pela linearidade de A é fácil mostrar que $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, e portanto, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathbb{R}^n$. Assim, a imagem $\text{Im}(A)$ é um subespaço de \mathbb{R}^m . \square

Seja a i -ésima coluna de A denotada por a_i , ou seja, $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$. Então, o sistema (1.14) pode ser escrito como

$$y = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n, \tag{1.15}$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, são os componentes de x . A imagem $\text{Im}(A)$ é, por definição, o conjunto de y tal que $y = Ax$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Isso é o mesmo que dizer que $\text{Im}(A)$ é o conjunto de y com x_1, x_2, \dots, x_n em (1.15) varrendo todos os valores possíveis. Portanto, concluímos que $\text{Im}(A)$ é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas de A . Como $\text{Im}(A)$ é um espaço vetorial, sua dimensão é definida como sendo o máximo número de vetores linearmente independentes em $\text{Im}(A)$. Assim, a dimensão de $\text{Im}(A)$ é máximo número de colunas linearmente independentes de A .

Definição 1.3. O *posto* de A , $\text{posto}(A)$, é definido como a dimensão da imagem do espaço, ou em outras palavras, como o número de colunas linearmente independentes de A .

Exemplo 1.2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4],$$

onde a_i denota a i -ésima coluna de A . Claramente a_1 e a_2 são linearmente independentes. A terceira coluna é a soma das duas primeiras, ou $a_1 + a_2 - a_3 = 0$. A última coluna é o dobro da segunda, ou $2a_2 - a_4 = 0$. Assim, A tem duas colunas linearmente independentes e tem posto 2. O conjunto $\{a_1, a_2\}$ pode ser usado como base da imagem de A .

Teorema 1.3. Considere o sistema $Ax = y$, onde a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mapeia \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m .

1. Dada A e um vetor y em \mathbb{R}^m , existe um vetor x tal que $Ax = y$ se e somente se o vetor y é um elemento de $\text{Im}(A)$, ou

$$\text{posto}(A) = \text{posto}([A \mid y])$$

2. Dada A , para todo y em \mathbb{R}^m , existe um vetor x tal que $Ax = y$ se e somente se $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$, que equivale a $\text{posto}(A) = m$.

Demonstração.

1. Segue imediatamente da definição de imagem de A . Se o vetor y não for um elemento de $\text{Im}(A)$, o sistema $Ax = y$ não tem solução e é dito ser *inconsistente*.
2. O posto de A , $\text{posto}(A)$, é por definição a dimensão de $\text{Im}(A)$. Como $\text{Im}(A)$ é um subespaço de \mathbb{R}^m , se $\text{posto}(A) = m$, então $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$. Se $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$, então para qualquer y em \mathbb{R}^m , existe um vetor x tal que $Ax = y$. Se $\text{posto}(A) < m$, existe pelo menos um vetor não nulo y em \mathbb{R}^m , mas não em $\text{Im}(A)$, para o qual não há x tal que $Ax = y$.

□

Definição 1.4. Um vetor x é chamado *vetor nulo* de A se $Ax = 0$. O *núcleo* (ou *espaço nulo*) de A , $\ker A$, é o espaço que contém todos os vetores nulos. A dimensão do núcleo é definida como o número máximo de vetores linearmente independentes de A .

Exemplo 1.3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que mapeia \mathbb{R}^5 para \mathbb{R}^3 . É fácil verificar que as últimas três colunas de A são linearmente dependentes das duas primeiras. Assim, o posto de A , $\text{posto}(A)$, é igual a 2. Seja $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$. Então

$$\begin{aligned} Ax &= x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= (x_1 + x_3 + x_5) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Como os vetores $[0 \ 1 \ 2]^T$ e $[1 \ 2 \ 0]^T$ são linearmente independentes, concluímos de (1.16) que um vetor x satisfaz $Ax = 0$ se e somente se

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Note que o número de equações é igual ao posto de A , $\text{posto}(A)$. A solução x de $Ax = 0$ tem cinco componentes mas é dada somente por duas equações. Assim, três dos cinco componentes podem ser arbitrariamente escolhidos. Sejam $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Então $x_1 = -1$ e $x_2 = -1$. Sejam $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. Então, $x_1 = 0$ e $x_2 = -2$. Sejam $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$. Então $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Está claro que os três vetores

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

são linearmente independentes e que toda solução de $Ax = 0$ deve ser uma combinação linear destes três vetores. Portanto, este conjunto de vetores forma uma base de $\ker(A)$ e $\dim(\ker(A)) = 3$.

Vimos neste exemplo que o número de equações que os vetores de $\ker(A)$ devem obedecer é igual a $\text{posto}(A)$ e que existem n componentes em todos os vetores de $\ker(A)$. Portanto, $n - \text{posto}(A)$ componentes dos vetores de $\ker(A)$ podem ser arbitrariamente escolhidos. Conseqüentemente, há $n - \text{posto}(A)$ vetores linearmente independentes em $\ker(A)$. Assim, concluímos que $n - \text{posto}(A) = \dim(\ker(A))$.

Teorema 1.4. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então

$$\text{posto}(A) + \dim(\ker(A)) = n.$$

Corolário 1.1. O número de soluções linearmente independentes de $Ax = 0$ é igual a $n - \text{posto}(A)$, onde n é o número de colunas de A e $\text{posto}(A)$ é o número de colunas linearmente independentes de A .

Este corolário segue diretamente do teorema 1.4 e da definição de espaço nulo de A . É claro que se $\text{posto}(A) = n$, então a única solução de $Ax = 0$ é $x = 0$, que é chamada solução trivial. Se $\text{posto}(A) < n$, então podemos sempre encontrar um vetor não nulo x tal que $Ax = 0$. Em particular, se A é uma matriz quadrada, então $Ax = 0$ tem uma solução não trivial se e somente se $\text{posto}(A) < n$, que equivale a $\det(A) = 0$.

1.4.1 Determinante e inversa de matrizes quadradas

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Se a i -ésima linha e a j -ésima coluna são apagadas, as $(n - 1)$ linhas e as $(n - 1)$ colunas podem ser usadas para formar outra matriz M_{ij} chamada de *menor* de a_{ij} . O *cofator* de a_{ij} é definido como $(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

Por exemplo, considere A uma matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

o menor do elemento a_{23} é

$$M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

e o cofator de a_{23} é

$$c_{23} = (-1) \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right).$$

Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ arbitrária, seja c_{ij} o cofator de a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. O determinante pode ser definido recursivamente com

$$\det A = \sum_i^n a_{ij} c_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.17)$$

O posto pode ser definido como a maior ordem de um menor de A com determinante não nulo. Em outras palavras, se A tem posto r , então existe pelo menos um menor de ordem r com determinante não nulo e todo menor de ordem maior que r tem determinante nulo. Uma matriz quadrada é dita ser *não singular* se seu determinante é não nulo. Assim uma matriz quadrada não singular tem posto completo e todas suas colunas (linhas) são linearmente independentes.

A *inversa* de uma matriz $A = [a_{ij}]$ não singular é denotada por A^{-1} e é tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Seja c_{ij} o cofator de a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, para uma matriz A e seja C a matriz formada pelos cofatores de A , isto é, $C = [c_{ij}]$. A matriz C^T é chamada *adjunta* de A e é denotada por $\text{adj}(A)$. É fácil verificar que

$$A \cdot [\text{adj}(A)] = [\text{adj}(A)] \cdot A = [\det(A)] \cdot I \quad (1.18)$$

de onde segue que

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det A} = \frac{1}{\det A} [c_{ij}]^T.$$

Se A é 2×2 , então temos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

1.5 Autovalores e autovetores

Definição 1.5. Seja A uma transformação linear que mapeia \mathbb{C}^n nele mesmo. Então um escalar λ em \mathbb{C} é chamado *autovalor* de A se existe um vetor não nulo x em \mathbb{C}^n tal que $Ax = \lambda x$. Qualquer vetor x não nulo satisfazendo $Ax = \lambda x$ é chamado *autovetor* de A associado com o autovalor λ .

A figura 1.2 mostra esta definição de autovetores. Se Ax não for colinear com x depois da transformação, como na figura 1.2(a), x não será um autovetor. Se Ax for colinear com x depois da transformação, como na figura 1.2(b), x será um autovetor.

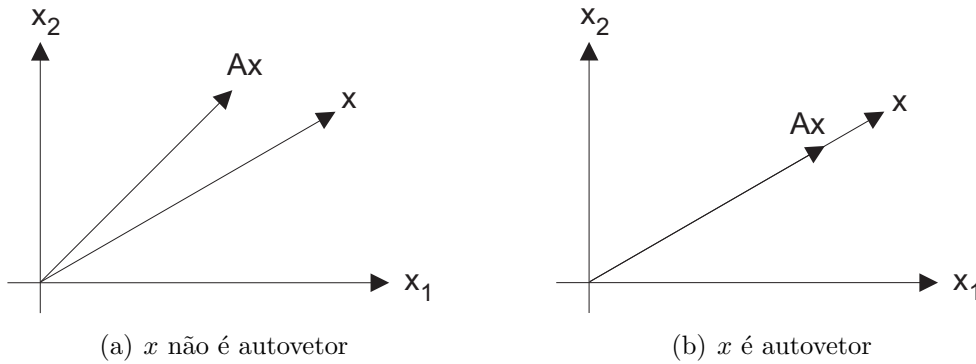


Figura 1.2:

Para encontrar os autovalores de A , escrevemos $Ax = \lambda x = \lambda Ix$, como

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (1.19)$$

onde I é a matriz identidade de ordem n . A matriz $(A - \lambda I)$ é uma matriz quadrada $n \times n$. Do corolário 1.1 sabemos que a equação (1.19) tem uma solução não trivial se e somente se $\det(\lambda I - A) = 0$. Um escalar λ é um autovalor de A se e somente se for uma solução de

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

$\Delta(\lambda)$ é um polinômio mônico de grau n em λ com coeficientes reais e é chamado de *polinômio característico* de A . Um polinômio é *mônico* quando o coeficiente do termo de maior grau é 1. Como $\Delta(\lambda)$ tem grau n , a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem n autovalores (não necessariamente distintos).

1.5.1 Diagonalização

Suponha que todos os autovalores de uma matriz A $n \times n$ sejam distintos. Sejam x_1, x_2, \dots, x_n os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Seja

$$P = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n].$$

Então

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \dots & Ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & x_n \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = P\hat{A} \end{aligned}$$

onde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Como P tem n colunas linearmente indendentes, P é não singular e P^{-1} existe. Portanto

$$\hat{A} = P^{-1}AP.$$

P é chamada matriz de diagonalização ou matriz de autovetores e \hat{A} é chamada matriz de autovetores.

Exemplo 1.4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 6\lambda + 8, \end{aligned}$$

de onde resultam os autovalores $\lambda = -2$ e $\lambda = -4$. Os autovetores associados a $\lambda = -2$ é uma solução não nula de

$$(2I - A)x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0,$$

de onde $\alpha_1 = \alpha_2$. Portanto,

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Usando o outro autovalor, $\lambda = -4$, temos

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Uma escolha de autovetores é

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A representação de A em relação à $\{x_1, x_2\}$ é

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz diagonal com os autovalores na diagonal. Essa matriz pode ser também obtida calculando

$$\hat{A} = P^{-1}AP$$

com

$$P = [x_1 \ x_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.6 Funções de matrizes quadradas

1.6.1 Potência de uma matriz

Definimos potência de uma matriz A $n \times n$

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ termos}} \\ A^0 &= I. \end{aligned}$$

Pode-se verificar facilmente por multiplicação direta que, se

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

então,

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Se P diagonalizar A , isto é

$$P^{-1}AP = \hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

então, ela também diagonaliza A^k , isto é

$$P^{-1}A^kP = \hat{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix},$$

pois

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) &= P^{-1}A^2P = \hat{A}^2 \\ (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) &= P^{-1}A^3P = \hat{A}^3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

1.6.2 Função de uma matriz

Considere uma função de λ definida por

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\lambda^i.$$

A uma função qualquer como essa, podemos associar uma função da matriz A $n \times n$ dada por

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_iA^i. \quad (1.22)$$

Se A for uma matriz diagonal D como na equação (1.20), então, usando a equação (1.21), temos

$$\begin{aligned}f(D) &= a_0I + a_1D + a_2D^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_iD^i \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} a_id_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} a_id_2^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} a_id_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(d_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(d_n) \end{bmatrix} \quad (1.23)\end{aligned}$$

Se P diagonalizar A , isto é

$$P^{-1}AP = \hat{A},$$

então temos

$$A = P\hat{A}P^{-1}$$

e

$$\begin{aligned}A^2 &= (P\hat{A}P^{-1})(P\hat{A}P^{-1}) = P\hat{A}^2P^{-1} \\ A^3 &= (P\hat{A}^2P^{-1})(P\hat{A}P^{-1}) = P\hat{A}^3P^{-1} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$f(A) = Pf(\hat{A})P^{-1}.$$

Substituindo D por \hat{A} na equação (1.23), obtemos

$$f(A) = P \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix},$$

onde λ_i são os autovalores de A .

1.6.3 O teorema de Cayley-Hamilton

Seja o polinômio característico $\Delta(\lambda)$ de uma matriz A $n \times n$ dado por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n.$$

O teorema de Cayley-Hamilton afirma que a matriz A satisfaz a sua própria equação característica, isto é,

$$\Delta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0. \quad (1.24)$$

Exemplo 1.5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então seu polinômio característico é

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

e

$$\Delta(A) = A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Reescrevendo a equação (1.24), temos

$$A^n = -\alpha_n I - \alpha_{n-1} A - \dots - \alpha_1 A^{n-1}. \quad (1.25)$$

Multiplicando ambos os lados por A , substituindo A^n no lado direito resultante pela expressão (1.25) e rearranjando os termos, obtemos

$$A^{n+1} = a_n I + a_{n-1} A + \dots + a_1 A^{n-1}.$$

Continuando esse processo, podemos expressar qualquer potência inteira e positiva de A como uma combinação linear de I, A, \dots, A^{n-1} . Assim, $f(A)$ definida pela equação (1.22) pode ser representada por

$$f(A) = \beta_n I + \beta_{n-1} A + \dots + \beta_1 A^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A_i. \quad (1.26)$$

1.6.4 Polinômio mínimo

O polinômio mínimo $m(\lambda)$ de uma matriz A $n \times n$ é o polinômio de menor grau quem tem 1 como coeficiente no termo de maior grau, tal que $m(A) = 0$. Como A satisfaz a sua própria equação característica, o grau de $m(\lambda)$ não é superior a n .

Exemplo 1.6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha \end{bmatrix} \right) = (\lambda - \alpha)^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2$$

e o polinômio mínimo é

$$m(\lambda) = \lambda - \alpha$$

pois

$$m(A) = A - \alpha I = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Pode-se mostrar que $m(\lambda)$ pode ser determinado por

$$m(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)},$$

onde $d(\lambda)$ é o máximo divisor comum (mdc) de todos os elementos de $\text{adj}(\lambda I - A)$.

Exemplo 1.7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 5 & 6 & 6 \\ 1 & \lambda - 4 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \right) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$$\text{adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} (\lambda + 2)(\lambda - 2) & -6(\lambda - 2) & -6(\lambda - 2) \\ -(\lambda - 2) & (\lambda + 1)(\lambda - 2) & 2(\lambda - 2) \\ 3(\lambda - 2) & -6(\lambda - 2) & (\lambda - 2)(\lambda - 7) \end{bmatrix}.$$

Assim, $d(\lambda) = \lambda - 2$ e

$$m(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

e

$$m(A) = (A - I)(A - 2I) = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.6.5 Funções usando séries de potência

A função de A foi definida usando um polinômio de grau finito. Uma outra definição pode ser dada usando séries de potências infinitas. Suponha que $f(\lambda)$ possa ser expressa pela série de potências

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \lambda^i.$$

Então $f(A)$ pode ser definida como

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i A^i.$$

A função de A mais importante é a função exponencial e^{At} . Como a série de Taylor

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \dots$$

converge para todo λ e t finitos, temos

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k. \quad (1.27)$$

Vamos apresentar algumas propriedades importantes de e^{At} . Usando (1.27), podemos verificar as duas próximas igualdades

$$e^0 = I \quad (1.28)$$

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} \quad (1.29)$$

$$[e^{At}]^{-1} = e^{-At}. \quad (1.30)$$

Para mostrar (1.30), fazemos $t_2 = -t_1$. Então de (1.29) e (1.28), temos

$$e^{At_1} e^{-At_1} = e^{A \cdot 0} = e^0 = I,$$

que implica (1.30). Então a inversa de e^{At} pode ser obtida trocando o sinal de t . Derivando (1.27) termo a termo, temos

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k = A \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \right) A.$$

Então, temos

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A. \quad (1.31)$$

Lembramos que

$$e^{(A+B)t} \neq e^{At} e^{Bt}.$$

A igualdade só é válida se $AB = BA$. Isso pode ser verificado por substituição direta em (1.27).

A transformada de Laplace de uma função $f(\lambda)$ é definida como

$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Como $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$, aplicando a transformada de Laplace em (1.31), temos

$$s\mathcal{L}[e^{At}] - e^0 = A\mathcal{L}[e^{At}] \Rightarrow (sI - A)\mathcal{L}[e^{At}] = e^0 = I.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$$

e assim,

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}.$$

Capítulo 2

Descrição matemática de sistemas

2.1 Introdução

A classe de sistemas que vamos estudar tem terminais de entrada e de saída como mostrado na figura 2.1. Assumimos que se uma excitação ou sinal de entrada é aplicada no terminal de entrada, uma única resposta ou sinal de saída pode ser medida no terminal de saída. Esta relação de unicidade entre excitação e resposta, entrada e saída, ou causa e efeito é essencial na definição de um sistema. Um sistema pode ter uma única entrada e uma única saída (SISO¹), duas ou mais entradas e duas ou mais saídas (MIMO²) e uma única entrada e duas ou mais saídas (SIMO³).

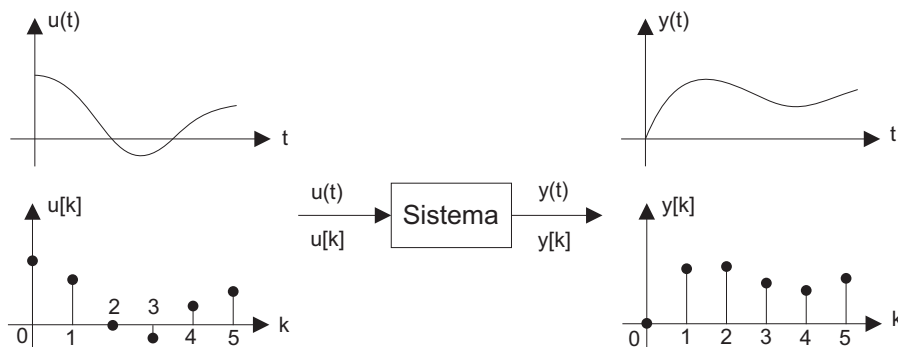


Figura 2.1: Sistema

Um sistema é dito ser a *tempo contínuo* se aceita sinais contínuos no tempo em suas entradas e gera sinais contínuos em sua saída. A entrada será denotada por $u(t)$. Se o sistema tem m terminais de entrada, então $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ou $u(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$. Do mesmo modo, a saída será denotada por $y(t)$. O tempo t é assumido pertencer ao intervalo $-\infty$ a $+\infty$.

Um sistema é dito ser a *tempo discreto* se aceita sinais discretizados no tempo como entrada e gera sinais discretizados no tempo como saída. Assumiremos que todos os sinais discretizados tem período de amostragem T . A entrada e a saída serão denotadas por $u[k] = u(kT)$ e $y[k] = y(kT)$, onde k denota o índice da amostra do sinal discretizado e é um número inteiro variando de $-\infty$ a ∞ . Eles podem estar em negrito para múltiplas entradas e múltiplas saídas.

¹Single-input single-output

²Multi-input multi-output

³Single-input multi-output

Um sistema é dito ser *sem memória* se sua saída $y(t_0)$ depende somente da entrada aplicada em t_0 ; independe da entrada aplicada antes de t_0 . Um circuito que possui somente resistores é um sistema sem memória.

A maioria dos sistemas, contudo, tem memória. Isso significa que a saída em t_0 depende de $u(t)$ para $t < t_0$, $t = 0$ e $t > 0$. Isto é, a saída atual de um sistema com memória pode depender de entradas passadas, presentes e futuras.

Um sistema é chamado *causal* ou *não antecipatório* se a saída atual depende de entradas passadas e presentes, mas não de entradas futuras. Se um sistema é não causal, então sua saída atual dependerá de entradas futuras. Em outras palavras, um sistema não causal pode prever ou antecipar o que será aplicado no futuro. Nenhum sistema físico tem essa capacidade.

Saídas presentes de um sistema causal são afetadas por entradas passadas. Quão atrasada no tempo uma entrada passada pode afetar a saída atual? Deveríamos considerar o tempo a partir de $-\infty$. Em outras palavras, a entrada de $-\infty$ até t tem efeito em $y(t)$. Conhecer $u(t)$ desde $t = -\infty$ é, se não impossível, muito inconveniente. O conceito de estado pode ser útil neste problema.

Definição 2.1. O estado $x(t_0)$ de um sistema no instante t_0 é a informação em t_0 que, juntamente com a entrada $u(t)$, para $t \geq t_0$, determina de forma única a saída $y(t)$ para todo $t \geq t_0$.

2.2 Sistemas lineares

Um sistema é chamado de *sistema linear* se para todo t_0 e quaisquer dois conjuntos estado-entrada-saída

$$\left. \begin{array}{l} x_i(t_0) \\ u_i(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_i(t), \quad t \geq t_0,$$

para $i = 1, 2$, tivermos

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ u_1(t) + u_2(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_1(t) + y_2(t), \quad t \geq t_0$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x_1(t_0) \\ \alpha u_1(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha y_1(t), \quad t \geq t_0,$$

para qualquer constante real α . A primeira propriedade é chamada *aditividade* e a segunda é chamada *homogeneidade*. Essas duas propriedades podem ser combinadas como

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) \\ \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \quad t \geq t_0,$$

para quaisquer constantes α_1 e α_2 , e é chamada de propriedade da *superposição*. Um sistema é chamado de sistema não linear se não obedece a propriedade da superposição.

Se uma entrada $u(t)$ é identicamente zero para $t \geq t_0$, então a saída será excitada somente pelo estado inicial $x(t_0)$. Essa saída é chamada *resposta a entrada zero* ou *resposta livre* e será denotada por y_{zi} ou

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t) \equiv 0, \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_{zi}(t), \quad t \geq t_0.$$

Se o estado inicial $x(t_0)$ for zero, então a saída será excitada somente pela entrada. Esta saída é chamada de *resposta ao estado zero* ou *resposta forçada* e será denotada por y_{zs} ou

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) = 0 \\ u(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_{zs}(t), \quad t \geq t_0.$$

A propriedade da aditividade implica

$$\begin{aligned} \text{Saída devido a } \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right. &= \text{saída devido a } \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t) \equiv 0, \quad t \geq t_0 \end{array} \right. \\ &+ \text{saída devido a } \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = 0 \\ u(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

ou

$$\text{Resposta} = \text{resposta a entrada zero} + \text{resposta ao estado zero}.$$

2.2.1 Descrição no espaço de estados

O conjunto de equações que descrevem a relação entre entrada, saída e estado é chamado de *sistema dinâmico*. Estudaremos sistemas dinâmicos na forma

$$\dot{x}(t) = h(x(t), u(t), t) \quad (\text{Equação de estado}) \quad (2.1)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (\text{Equação de saída}) \quad (2.2)$$

ou mais explicitamente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2 &= h_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= h_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_1(t) &= g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned}$$

onde $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ é o vetor de estados, $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_p(t)]^T$ é o vetor das saídas e $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_m(t)]^T$ é o vetor das entradas. A expressão (2.1) consiste de um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem. O sistema (2.2) consiste em p equações algébricas.

Se o sistema dinâmico (2.1) – (2.1) for linear, poderá ser descrito por um sistema do tipo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.3)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (2.4)$$

onde $A : X \rightarrow X$, $B : U \rightarrow X$, $C : X \rightarrow Y$, $D : U \rightarrow Y$ são transformações lineares representadas por matrizes variantes no tempo $n \times n$, $m \times n$, $n \times p$ e $m \times p$, respectivamente, X , U e Y são espaços vetoriais de dimensão n , m e p , respectivamente. O espaço vetorial X é chamado espaço de estados, U é o espaço das entradas e Y é o espaço das saídas.

2.3 Sistemas lineares invariantes no tempo

Um sistema é dito ser *invariante no tempo* se para todo conjunto estado-entrada-saída

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y(t), \quad t \geq t_0,$$

e qualquer T , tivermos

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0 + T) \\ u(t - T), \quad t \geq t_0 + T \end{array} \right\} \rightarrow y(t - T), \quad t \geq t_0 + T.$$

Isso significa que se o estado inicial for deslocado para $t_0 + T$ e a mesma entrada for aplicada a partir de $t_0 + T$ ao invés de t_0 , então a saída será a mesma exceto que começará a partir de $t_0 + T$. Em outras palavras, se o estado inicial e a entrada forem os mesmos, não importa quando eles aplicados, a saída será sempre a mesma.

Em um sistema linear invariante no tempo, as matrizes A , B , C e D em (2.3)–(2.4) são independentes do tempo e o sistema reduz-se a

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.6)$$

A figura 2.2 mostra a representação em diagrama de blocos do sistema definido pelas equações (2.5) e (2.5).

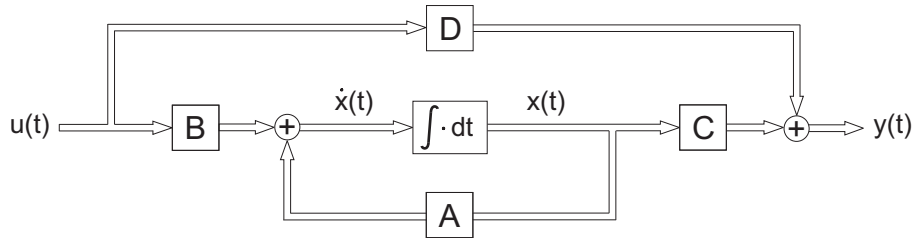


Figura 2.2: Diagrama de blocos do SLIT de tempo contínuo no espaço de estados

2.3.1 Solução da equação de estados

Queremos encontrar a solução do sistema (2.5) excitado pelo estado inicial $x(0)$ e pela entrada $u(t)$. A solução depende da função exponencial de A estudada na seção 1.6. Em particular, precisamos da propriedade dada por (1.31)

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

para desenvolver a solução. Pré multiplicando os dois lados de (2.5) por e^{-At} , temos

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t),$$

que implica em

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t).$$

Integrando de 0 a t , temos

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^t = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

Portanto, temos

$$e^{-At}x(t) - e^0x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau. \quad (2.7)$$

Devido a inversa de e^{-At} ser e^{At} e $e^0 = I$, como visto em (1.30) e (1.28), (2.7) implica

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (2.8)$$

Essa é a solução de (2.5).

Substituindo (2.8) em (2.6), temos

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (2.9)$$

Esta solução e (2.8) são calculadas diretamente no domínio do tempo. Podemos também calcular a solução aplicando a transformada de Laplace em (2.5) e (2.6)

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s), \end{aligned}$$

que implica em

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (2.10)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s), \quad (2.11)$$

que são equações algébricas. Dado $x(0)$ e $U(s)$, $X(s)$ e $Y(s)$ podemos calculá-las algebricamente a partir de (2.10) e (2.11). Sua anti transformada de Laplace fornece a resposta no tempo de $x(t)$ e $y(t)$. As equações também mostram que a resposta de um sistema linear pode ser decomposta em resposta ao estado zero e resposta a entrada zero. Se o estado inicial $x(0)$ for zero, então (2.11) reduz-se a

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s). \quad (2.12)$$

A descrição entrada-saída definida como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad (2.13)$$

é a *matriz de transferência* do sistema.

2.3.2 Exemplos

Exemplo 2.1. Considere o circuito mostrado na figura 2.3. Atribuímos aos capacitores C_i tensões x_i , $i = 1, 2$ e ao indutor, corrente x_3 . Suas correntes e tensões são, respectivamente $C_1\dot{x}_1$, $C_2\dot{x}_2$, e $L\dot{x}_3$ com as polaridades indicadas. Desta figura, podemos ver que a tensão através do resistor é $u - x_1$ com as polaridades mostradas. Assim, a corrente é $(u - x_1)/R$. Aplicando a lei de Kirchhoff no nó A, temos $C_2\dot{x}_2 = x_3$. No nó B, temos

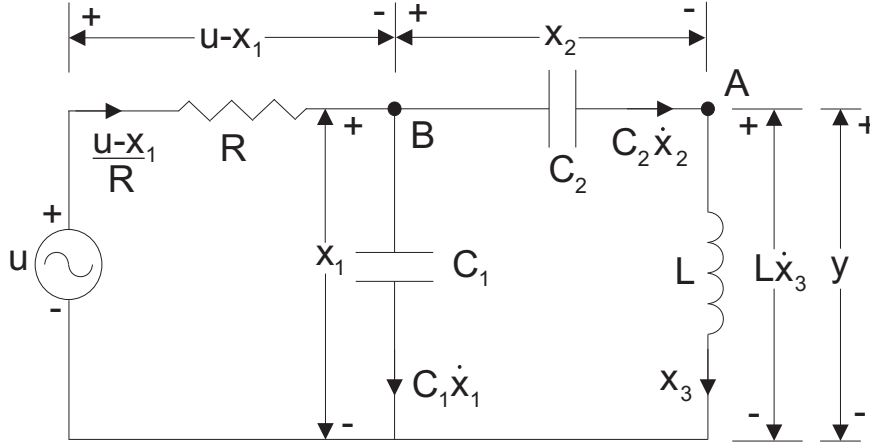


Figura 2.3: Circuito

$$\frac{u - x_1}{R} = C_1 \dot{x}_1 + C_2 \dot{x}_2 = C_1 \dot{x}_1 + x_3$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{x_1}{RC_1} - \frac{x_3}{C_1} + \frac{u}{RC_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C_2} x_3. \end{aligned}$$

Aplicando a lei de Kirchhoff na malha direita temos $L\dot{x}_3 = x_1 - x_2$ ou

$$\dot{x}_3 = \frac{x_1 - x_2}{L}.$$

A saída y é dada por

$$y = L\dot{x}_3 = x_1 - x_2.$$

Elas podem ser combinadas na forma matricial como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1/RC_1 & 0 & -1/C_1 \\ 0 & 0 & 1/C_2 \\ 1/L & -1/L & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/RC_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -1 \quad 0] x + 0 \cdot u. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Considere o sistema mostrado na figura 2.4. Ele consiste de dois blocos, com massas m_1 e m_2 , conectados por molas com constantes k_1 e k_2 . Para simplificar, assumimos que não há atrito entre os blocos e o chão. A força aplicada u_1 deve superar as forças das molas e o restante é usado para acelerar o bloco. Portanto, temos

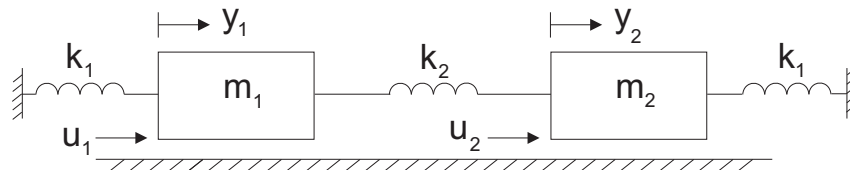


Figura 2.4: Sistema massa mola

$$u_1 - k_1 y_1 - k_2 (y_1 - y_2) = m_1 \ddot{y}_1,$$

ou

$$\ddot{y}_1 = -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_2 + \frac{1}{m_1} u_1. \quad (2.14)$$

Para o segundo bloco, temos

$$u_2 - k_1 y_2 + k_2 (y_1 - y_2) = m_2 \ddot{y}_2,$$

ou

$$\ddot{y}_2 = \frac{k_2}{m_2} y_1 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_2} y_2 + \frac{1}{m_2} u_2. \quad (2.15)$$

Vamos definir

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \dot{y}_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = \dot{y}_2.$$

Então obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_3 + \frac{1}{m_1} u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_2} x_3 + \frac{1}{m_2} u_2 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned}$$

que podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{(k_1 + k_2)}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

Essa é a equação de estados de duas entradas e duas saídas do sistema estudado.

Para desenvolver a relação entrada-saída, aplicamos a transformada de Laplace em (2.14) e (2.15) assumindo condição inicial nula

$$\begin{aligned} s^2 Y_1(s) &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} Y_1(s) + \frac{k_2}{m_1} Y_2(s) + \frac{1}{m_1} U_1(s) \\ s^2 Y_2(s) &= \frac{k_2}{m_2} Y_1(s) - \frac{(k_1 + k_2)}{m_2} Y_2(s) + \frac{1}{m_2} U_2(s). \end{aligned}$$

Dessas duas equações, podemos obter facilmente

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_2 s^2 + k_1 + k_2}{D(s)} & \frac{k_2}{D(s)} \\ \frac{k_2}{D(s)} & \frac{m_1 s^2 + k_1 + k_2}{D(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix},$$

onde

$$D(s) = (m_1 s^2 + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + k_1 + k_2) - k_2^2.$$

Exemplo 2.3. Considere a equação

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Sua solução é

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

A função matricial e^{At} é transformada inversa de Laplace de $(sI - A)$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (s+2)/(s+1)^2 & -1/(s+1)^2 \\ 1/(s+1)^2 & s/(s+1)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então temos

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & -\frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

e

$$x(t) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} -\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \\ \int_0^t [1-(t-\tau)]e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo

Definição 2.2. Uma equação de estado é dita ser estável a entrada limitada e saída limitada (BIBO⁴) se para uma entrada limitada tivermos uma resposta ao estado zero limitada. Mais precisamente, dado um t_0 e $u(t)$ satisfazendo $\|u(t)\| \leq \delta$ para $t \geq t_0$, onde δ é uma constante positiva finita, há uma constante positiva finita ε tal que a resposta ao estado zero correspondente satisfaz $\|y(t)\| \leq \varepsilon$ para $t \geq t_0$.

Teorema 2.1. Um sistema multivariável com matriz de transferência racional própria $G(s) = [g_{ij}(s)]$ é BIBO estável se e somente se todo polo de $g_{ij}(s)$ tem parte real negativa.

⁴Bounded-input bounded-output

Agora discutiremos a estabilidade BIBO das equações de estado. Considere (2.5) e (2.6) e sua matriz de transferência (2.13). Assim a resposta ao estado zero da equação (2.5) é BIBO estável se e somente se todo polo de $G(s)$ tem parte real negativa.

Discutiremos a relação entre os pólos de $G(s)$ e os autovalores de A . Como G é dada por

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} C[\text{adj}(sI - A)]B + D, \quad (2.16)$$

todo polo de G é um autovalor de A . Portanto, se todo autovalor de A tem parte real negativa, então todo polo tem parte real negativa e (2.5) é BIBO estável. Por outro lado, como é possível haver cancelamentos em (2.16), nem todo autovalor é polo. Assim, mesmo que A tenha alguns autovalores com parte real positiva ou nula, (2.5) pode ser BIBO estável.

Definição 2.3. A resposta a entrada zero de (2.5) ou da equação $\dot{x} = Ax$ é *marginalmente estável* se todo estado inicial x_0 finito produz uma saída limitada. É *assintoticamente estável* se todo estado inicial finito produz uma saída limitada que, além disso, tende a 0 para $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.2.

1. A equação $\dot{x} = Ax$ é marginalmente estável se e somente se todos os autovalores de A tem parte real nula ou negativa.
2. A equação $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A tem parte real negativa.

2.3.4 Linearização

A maioria dos sistemas físicos são não lineares e variantes no tempo. Alguns deles podem ser descritos por uma equação diferencial não linear na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= h(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= f(x(t), u(t), t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde h e f são funções não lineares.

Algumas equações não lineares podem ser aproximadas por equações lineares sob certas condições. Suponha que para alguma entrada $u_0(t)$ e algum estado inicial, $x_0(t)$ é a solução de (2.17), isto é

$$\dot{x}_0(t) = h(x_0(t), u_0(t), t) \quad (2.18)$$

Agora suponha que a entrada é ligeiramente perturbada, ficando $u_0(t) + \bar{u}(t)$ e o estado inicial também é ligeiramente perturbado. Para algumas equações não lineares, a solução correspondente pode diferir ligeiramente de $x_0(t)$. Nesse caso, a solução pode ser expressa como $x_0(t) + \bar{x}(t)$ com $\bar{x}(t)$ pequeno para todo t . Sob essa condição, podemos expandir (2.17) como

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) + \dot{\bar{x}}(t) &= h(x_0(t) + \bar{x}(t), u_0(t) + \bar{u}(t), t) \\ &= h(x_0(t) + u_0(t), t) + \frac{\partial h}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial h}{\partial u} \bar{u} + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde, para $h = [h_1 \ h_2 \ h_3]^T$, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ e $u = [u_1 \ u_2]^T$,

$$A(t) = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \partial h_1 / \partial x_1 & \partial h_1 / \partial x_2 & \partial h_1 / \partial x_3 \\ \partial h_2 / \partial x_1 & \partial h_2 / \partial x_2 & \partial h_2 / \partial x_3 \\ \partial h_3 / \partial x_1 & \partial h_3 / \partial x_2 & \partial h_3 / \partial x_3 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \frac{\partial h}{\partial u} = \begin{bmatrix} \partial h_1 / \partial u_1 & \partial h_1 / \partial u_2 \\ \partial h_2 / \partial u_1 & \partial h_2 / \partial u_2 \\ \partial h_3 / \partial u_1 & \partial h_3 / \partial u_2 \end{bmatrix}.$$

Usando (2.18) e desprezando potências maiores de \bar{x} e \bar{u} , (2.19) pode ser reduzida a

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t).$$

Essa é uma equação de estados linearizada. A equação $y(t) = f(x(t), u(t), t)$, pode ser similarmente linearizada. Essa técnica de linearização é freqüentemente usada na prática para obter equações lineares.

2.4 Sistemas a tempo discreto

A maioria dos conceitos de sistemas a tempo contínuo podem ser aplicados diretamente em sistemas a tempo discreto. A entrada e a saída de todo sistema a tempo discreto serão assumidas ter o mesmo período de amostragem T e serão denotadas por $u[k] = u(kT)$, $y[k] = y(kT)$, onde k é um número inteiro variando de $-\infty$ a $+\infty$. Um sistema a tempo discreto é causal se a saída atual depende somente das entradas atuais e passadas. O estado no tempo k_0 , denotado por $x[k_0]$, é a informação no instante k_0 , que juntamente com $u[k]$, $k \geq k_0$, determina de forma única a saída $y[k]$, $k \geq k_0$. Os elementos de x são chamados variáveis de estado. Se o número de variáveis de estado é finito, o sistema a tempo discreto é a parâmetros concentrados; caso contrário, é dito ser a parâmetros distribuídos.

Um sistema a tempo discreto é linear se as propriedades de aditividade e homogeneidade forem válidas. A resposta de todo sistema a tempo discreto linear pode ser decomposta como

$$\text{Resposta} = \text{resposta ao estado zero} + \text{resposta a entrada zero}.$$

2.4.1 Discretização

Considere a equação de estados de tempo contínuo invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.20)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (2.21)$$

Se uma entrada $u(t)$ é gerada por um computador digital seguido por um conversor digital-analógico, então $u(t)$ é constante entre dois instantes de amostragem. Seja

$$u(t) = u(kT) = u[k] \quad \text{para} \quad kT \leq t \leq (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

A entrada muda de valor somente em instantes de tempo discreto. Para essa entrada, a solução de (2.20) é a mesma de (2.8). Calculando (2.8) em $t = kT$ e $t = (k+1)T$, temos

$$x[k] = x(kT) = e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.23)$$

e

$$x[k+1] = x((k+1)T) = e^{A((k+1)T)}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (2.24)$$

A equação (2.24) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x[k+1] &= e^{AT} \left[e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right] \\ &\quad + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

que torna-se depois de substituirmos (2.22) e (2.23) e introduzirmos uma nova variável $\alpha = kT + T - \tau$,

$$x[k+1] = e^{AT}x[k] + \left(\int_0^T e^{A\alpha}d\alpha \right) Bu[k].$$

Assim, se uma entrada muda de valor somente em instantes de tempo discretos kT e se calcularmos somente as respostas em $t = kT$, então (2.20) e (2.21) ficam

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_dx[k] + B_du[k] \\ y[k] &= C_dx[k] + D_du[k], \end{aligned} \quad (2.25)$$

com

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \left(\int_0^T e^{A\tau}d\tau \right), \quad C_d = C, \quad D_d = D.$$

2.4.2 Solução das equações a tempo discreto

Considere a equação do espaço de estados a tempo discreto

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

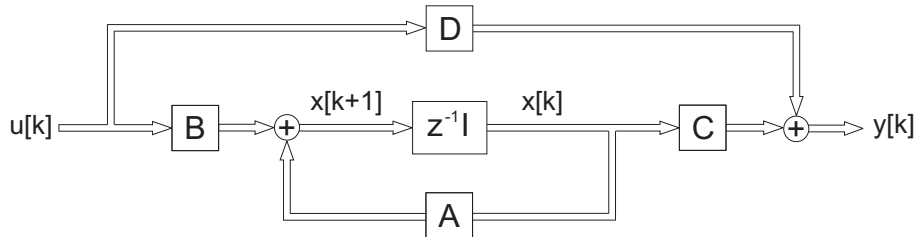


Figura 2.5: Diagrama de blocos do SLIT de tempo discreto no espaço de estados

A figura 2.5 mostra a representação no espaço de estados do sistema em tempo discreto (2.26). Vamos desenvolver a forma geral da solução. Calculamos

$$\begin{aligned}x[1] &= Ax[0] + Bu[0] \\x[2] &= Ax[1] + Bu[1].\end{aligned}$$

Continuando o processo, podemos facilmente obter, para $k > 0$,

$$\begin{aligned}x[k] &= A^k x[0] + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} Bu[m] \\y[k] &= CA^k x[0] + \sum_{m=0}^{k-1} CA^{k-1-m} Bu[m] + Du[k].\end{aligned}\tag{2.27}$$

Seja $X(z)$ a transformada z de $x[k]$ definida por

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[k]] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}.$$

Então temos

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x[k+1]] &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k+1] z^{-k} = z \sum_{k=0}^{\infty} x[k+1] z^{-(k+1)} \\&= z \left[\sum_{l=1}^{\infty} x[l] z^{-l} + x[0] - x[0] \right] = z(X(z) - x[0]).\end{aligned}$$

Aplicando a transformada z em (2.26), temos

$$\begin{aligned}zX(z) - zx[0] &= AX(z) + BU(z) \\Y(z) &= CX(z) + DU(z).\end{aligned}$$

que implica em

$$X(z) = (zI - A)^{-1} zx[0] + (zI - A)^{-1} BU(z) \tag{2.28}$$

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} zx[0] + C(zI - A)^{-1} BU(z) + DU(z). \tag{2.29}$$

Se $x[0] = 0$, então (2.29) reduz-se a

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1} B + D]U(z).$$

A matriz de transferência do sistema é uma descrição entrada-saída, definida como

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1} B + D. \tag{2.30}$$

Esta é a contrapartida discreta de (2.13).

2.4.3 Estabilidade de equações de estado a tempo discreto

Definição 2.4. Uma equação de estado a tempo discreto é dita ser estável a entrada limitada e saída limitada (BIBO) se para uma entrada limitada tivermos uma resposta ao estado zero limitada. Mais precisamente dado um k_0 e $u[k]$ satisfazendo $\|u[k]\| \leq \delta$ para $k \geq k_0$, onde δ é uma constante positiva finita, há uma constante positiva finita ε tal que a resposta ao estado zero correspondente satisfaz $\|y[k]\| \leq \varepsilon$ para $k \geq k_0$.

Teorema 2.3. Um sistema multivariável a tempo discreto com matriz de transferência racional própria $G(z) = [g_{ij}(z)]$ é BIBO estável se e somente se todo polo de $g_{ij}(z)$ tem módulo menor que 1.

Agora discutiremos a estabilidade BIBO das equações de estado. Considere (2.26) e sua matriz de transferência (2.30). Assim, a resposta ao estado zero da equação (2.5) é BIBO estável se e somente se todo polo de $G(s)$ tem módulo menor que 1.

Discutiremos a relação entre os pólos de $G(z)$ e os autovalores de A . Como G é dada por

$$G(z) = \frac{1}{\det(zI - A)} C[\text{adj}(zI - A)]B + D, \quad (2.31)$$

todo polo de $G(z)$ é um autovalor de A . Portanto, se todo autovalor de A tem módulo menor que 1, então (2.26) é BIBO estável. Por outro lado, mesmo que (2.31) tenha alguns autovalores módulo maior ou igual a 1, então (2.26) pode, como no caso de tempo contínuo, ser BIBO estável.

Definição 2.5. A resposta a entrada zero da equação $x[k+1] = Ax[k]$ é *marginalmente estável* se todo estado inicial x_0 finito produz uma saída limitada. É *assintoticamente estável* se todo estado inicial finito produz uma saída limitada que, além disso, tende a 0 para $k \rightarrow \infty$.

Teorema 2.4.

1. A equação $x[k+1] = Ax[k]$ é marginalmente estável se e somente se todos os autovalores de A tem módulo menor ou igual a 1 e aqueles que são iguais a 1 são raízes simples do polinômio mínimo de A .
2. A equação $x[k+1] = Ax[k]$ é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A tem módulo menor que 1.

2.5 Equações de estado equivalentes

Exemplo 2.4. Considere o circuito mostrado na figura 2.6. Ele consiste de um capacitor, um indutor, um resistor e uma fonte de tensão. Primeiro selecionamos a corrente do indutor x_1 e a tensão do capacitor x_2 como variáveis de estado. A tensão sobre o indutor é \dot{x}_1 e a corrente através do capacitor é \dot{x}_2 . Claramente, temos $x_1 = x_2 + \dot{x}_2$ e $\dot{x}_1 + x_2 - u = 0$. Assim, o circuito é descrito pela seguinte equação de estado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Se as correntes de malha \bar{x}_1 e \bar{x}_2 forem escolhidas como variáveis de estado, então a tensão sobre o indutor é $\dot{\bar{x}}_1$ e a tensão sobre o resistor é $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \cdot 1$. No lado esquerdo da malha, temos

$$u = \dot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \quad \text{ou} \quad \dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + u.$$

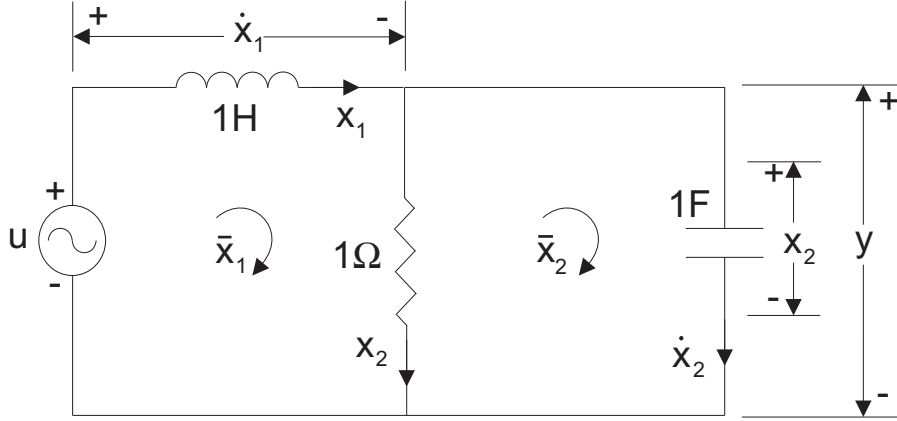


Figura 2.6: Circuito com dois diferentes conjuntos de variáveis de estado

A tensão sobre o capacitor é a mesma que sobre o resistor, que é $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Então a corrente através do capacitor é $\dot{\bar{x}}_1 - \dot{\bar{x}}_2$, que é igual a \bar{x}_2 ou

$$\dot{\bar{x}}_2 = \dot{\bar{x}}_1 - \bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + u.$$

Assim, o circuito também pode ser descrito pela equação de estado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -1] \bar{x}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

As equações de estado em (2.32) e (2.33) descrevem o mesmo circuito. Portanto, elas devem estar relacionadas.

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde $A : X \rightarrow X$, $B : U \rightarrow X$, $C : X \rightarrow Y$, $D : U \rightarrow Y$ são transformações lineares, X , U e Y são espaços vetoriais de dimensão n , m e p , respectivamente. Fixadas as bases $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de X , $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ de U e $\{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ de Y , os vetores $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ e $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p]^T$, representam, respectivamente, os vetores de estado, entrada e saída escritos nestas bases.

A escolha das bases de U e Y em geral não é livre porque as entradas e saídas estão relacionadas aos atuadores e sensores do sistema. Embora a escolha da base do espaço de estados X possa também estar relacionada com grandezas físicas, muitas vezes esta escolha pode “esconder” propriedades estruturais internas do sistema, que poderiam ser reveladas em uma base mais adequada. Assim, se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a base original de X e $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ é a nova base em que desejamos escrever o vetor de estado, de acordo com a equação (1.8), podemos escrever

$$x(t) = P\bar{x}(t) \quad (2.35)$$

onde \bar{x} é a representação do vetor x na base $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Note que P é uma matriz de mudança de base formada pelos vetores coluna $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ escritos na base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Assim, a matriz P transforma vetores escritos na base $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ em vetores escritos na base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Substituindo $x(t) = P\bar{x}(t)$ e $\dot{x}(t) = P\dot{\bar{x}}(t)$ em (2.34), temos

$$\begin{aligned} P\dot{\bar{x}}(t) &= AP\bar{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= CP\bar{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= P^{-1}AP\bar{x}(t) + P^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= CP\bar{x}(t) + Du(t) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t), \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}B, \quad \bar{C} = CP, \quad \bar{D} = D. \quad (2.37)$$

Note que as equações acima representam o mesmo sistema (2.34) em uma base diferente. A substituição de $x = P\bar{x}$ em (2.34), mudou como na equação (1.8), a base do espaço de estados para uma base formada pelas colunas de P . Para ser preciso, seja $P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$. Então a i -ésima coluna de \bar{A} é, como discutido na seção 1.3.2, a representação de Ap_i com relação a base $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Considere novamente o circuito mostrado na figura (2.6), que pode ser descrito por (2.32) e (2.33). Mostraremos que as duas equações são equivalentes. Da figura (2.6), temos $x_1 = \bar{x}_1$. Como a tensão sobre o resistor é x_2 , a corrente é $x_2/1$ e igual a $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Então temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Mostraremos que (2.34) e (2.36) tem o mesmo conjunto de autovalores e a mesma função (ou matriz) de transferência. Usando o fato que $\det(P^{-1})\det(P)=1$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\lambda) &= \det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \det[P^{-1}(\lambda I - A)P] \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) = \det(\lambda I - A) = \Delta(\lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{G}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} = CP[P^{-1}(sI - A)P]^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1}B + D = C(sI - A)^{-1}B + D = G(s). \end{aligned}$$

Portanto, as equações de estados equivalentes tem o mesmo polinômio característico e, conseqüentemente, o mesmo conjunto de autovalores e a mesma função (ou matriz) de transferência. De fato, todas as propriedades de (2.34) são preservadas ao passar por uma transformação de equivalência.

Capítulo 3

Controlabilidade e observabilidade

3.1 Controlabilidade

Considere a equação de estado com n estados e m entradas

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Como a saída não influencia na controlabilidade, vamos desconsiderar a equação da saída neste estudo.

Definição 3.1. O sistema (3.1), ou o par (A, B) , é dito ser *controlável* se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e qualquer estado final x_1 , existe uma entrada que transfere x_0 para x_1 em um tempo finito. Caso contrário (3.1), ou (A, B) , é dito ser *não controlável*.

Esta definição requer somente que uma entrada seja capaz de mover qualquer estado no espaço de estados para qualquer outro estado em um intervalo de tempo finito. Qual trajetória o estado deve seguir não é especificada. Além disso, não há restrições impostas na entrada. Sua magnitude pode ser tão grande quanto desejada.

Exemplo 3.1. Considere o circuito mostrado na figura 3.1(a). Sua variável de estado x é a tensão sobre o capacitor. Se $x(0) = 0$, então $x(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ não importa que entrada é aplicada. Devido a simetria do circuito, a entrada não tem efeito na tensão sobre o capacitor. Assim o sistema, ou mais precisamente, a equação de estado que descreve o sistema é não controlável.

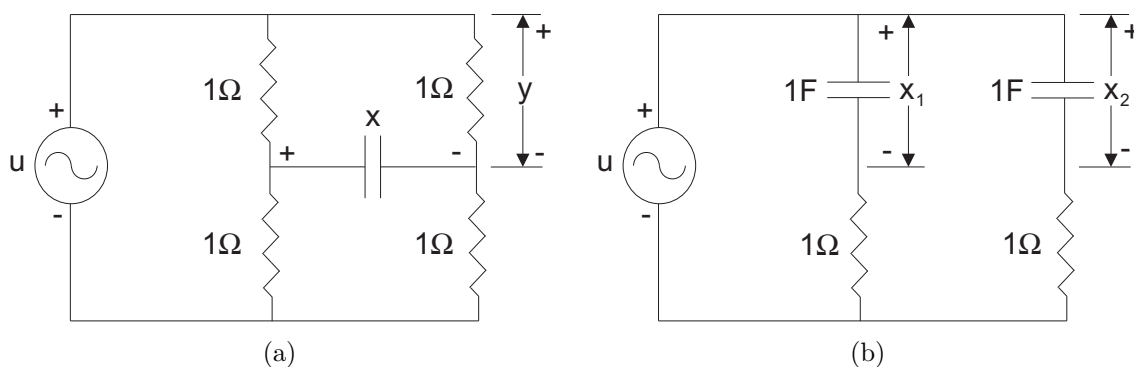


Figura 3.1: Circuitos não controláveis

Vamos considerar o circuito mostrado na figura 3.1(b) com variáveis de estado x_1 e x_2 . A entrada pode transferir x_1 ou x_2 para qualquer valor; mas não pode transferir x_1 e x_2

para qualquer valor. Por exemplo, se $x_1(0) = x_2(0) = 0$, então não importa qual entrada é aplicada, $x_1(t)$ é sempre igual a $x_2(t)$ para todo $t \geq 0$. Assim a equação de estado que descreve o circuito não é controlável.

Teorema 3.1. Seja $\dot{x} = Ax + Bu$ com $x \in \mathbb{R}^n$. Este sistema é controlável se e somente se $\text{posto}(\mathcal{C}) = n$ onde $\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ é a matriz de controlabilidade do sistema.

Demonstração. Este teorema é válido tanto para tempo contínuo para tempo discreto. A prova é um pouco mais fácil para tempo discreto. Considere o seguinte modelo de tempo discreto

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] \end{aligned} \quad (3.2)$$

A solução deste sistema para $k = n$ foi obtida em (2.27)

$$\begin{aligned} x[n] &= A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m] \\ &= A^n x[0] + A^{n-1} Bu[0] + A^{n-2} Bu[1] + \dots + Bu[n-1], \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$x[n] - A^n x[0] = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \vdots \\ u[0] \end{bmatrix}.$$

Do teorema 1.3 concluímos que para qualquer $x[0]$ uma sequência de entrada existe se e somente se

$$x[n] - A^n x[0] \in \text{Im}([B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B])$$

ou, equivalentemente

$$\text{posto}([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) = n. \quad (3.3)$$

Assim, existe n vetores linearmente independentes na matriz \mathcal{C} que formam uma base do espaço de estados. Note que todos os estados que podem ser alcançados a partir da origem são gerados pela combinação linear das colunas da matriz de controlabilidade.

Para provar que $\text{posto}(\mathcal{C}) = n$ é uma condição necessária para a controlabilidade, vamos assumir que

$$\text{posto}([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) < n.$$

Então, usando o teorema de Cayley-Hamilton, podemos provar que para um i arbitrário, $A^i B$ pode ser expresso como com uma combinação linear de $B, AB, \dots, A^{n-1}B$. Consequentemente, temos para qualquer i

$$\text{posto}([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{i-1}B]) < n$$

e portanto, os vetores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ não podem gerar o espaço de estados de dimensão n . Assim, para qualquer x_1 , não é possível ter $x[i] = x_1$ para qualquer i . Então, a condição (3.3) é necessária.

□

Exemplo 3.2. Considere o sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Como

$$\mathcal{C} = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é singular, o sistema não é controlável.

Exemplo 3.3. Seja o sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Para este caso,

$$\mathcal{C} = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é não singular. O sistema é, portanto, controlável.

Teorema 3.2. A controlabilidade é invariante sob qualquer transformação de equivalência.

Demonstração. Considere o par (A, B) com matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

e seu par equivalente (\bar{A}, \bar{B}) com $\bar{A} = P^{-1}AP$ e $\bar{B} = P^{-1}B$. A matriz de controlabilidade de (\bar{A}, \bar{B}) é

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}} &= [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \\ &= [P^{-1}B \quad P^{-1}APP^{-1}B \quad \dots \quad P^{-1}A^{n-1}PP^{-1}B] \\ &= [P^{-1}B \quad P^{-1}AB \quad \dots \quad P^{-1}A^{n-1}B] \\ &= P^{-1}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = P^{-1}\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Como P é não singular, temos que $\text{posto}(\mathcal{C}) = \text{posto}(\bar{\mathcal{C}})$. Isso prova o teorema 3.2

□

3.2 Observabilidade

O conceito de observabilidade é dual ao conceito de controlabilidade. Grosseiramente falando, a controlabilidade estuda a possibilidade de conduzir o estado a partir da entrada; a observabilidade estuda a possibilidade de estimar o estado a partir da saída. Considere o sistema descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Definição 3.2. O sistema (3.4) é dito ser *observável* se para qualquer estado inicial $x(0)$ desconhecido, existe um tempo finito $t_1 > 0$ tal que o conhecimento da entrada u e da saída y no intervalo de tempo $[0, t_1]$ é suficiente para determinar de forma única o estado inicial $x(0)$. Caso contrário, o sistema é dito ser *não observável*.

Exemplo 3.4. Considere o circuito mostrado na figura 3.2. Se a entrada é zero, não importa qual a tensão inicial sobre o capacitor, a saída é identicamente nula devida a simetria dos quatro resistores. Conhecemos a entrada e a saída (ambas identicamente nulas), mas não podemos determinar o estado inicial de forma única. Assim, o circuito ou, mais precisamente, a equação de estado que descreve o circuito é não observável.

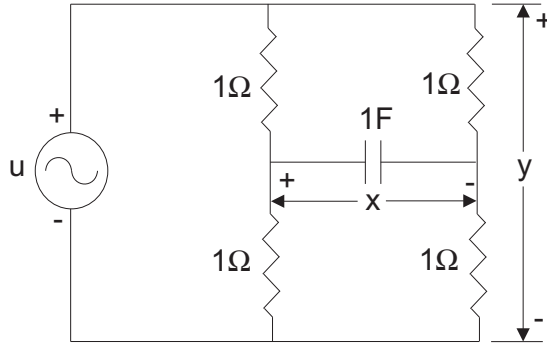


Figura 3.2: Circuito não observável

Exemplo 3.5. Considere o circuito mostrado na figura 3.3(a). O circuito tem duas variáveis de estado: a corrente x_1 através do indutor e a tensão x_2 sobre o capacitor. A entrada u é uma fonte de corrente. Se $u = 0$, o circuito se reduz ao circuito mostrado na figura 3.3(b). Se $x_1(0) = a \neq 0$ e $x_2 = 0$, então a saída é identicamente nula. Para qualquer $x(0) = [a \ 0]^T$ e $u(t) \equiv 0$ temos a mesma saída $y(t) \equiv 0$. Assim, não há como determinar o estado inicial $[a \ 0]^T$ de forma única e a equação que descreve o circuito é não observável.

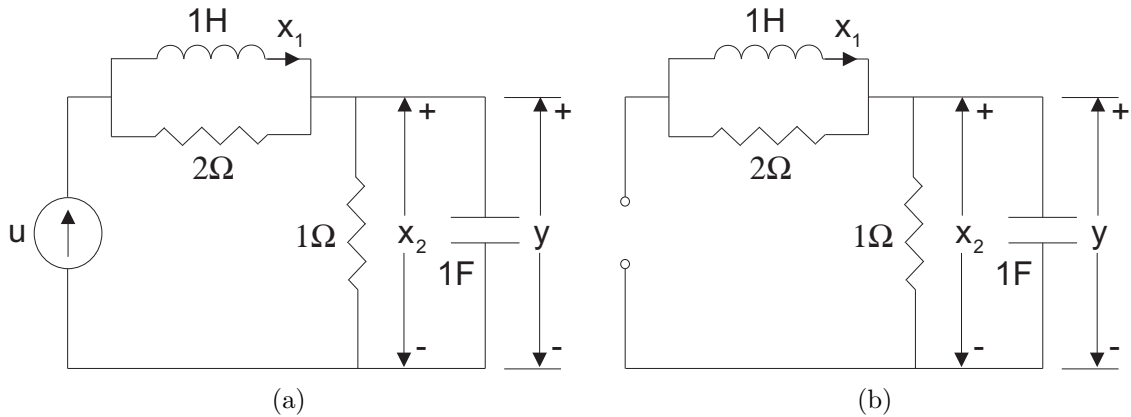


Figura 3.3: Circuitos não observáveis

A resposta de (3.4) excitado pela condição inicial $x(0)$ e pela entrada $u(t)$ foi derivada em (2.9) como

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (3.5)$$

No estudo da observabilidade, a saída y e a entrada u são assumidas conhecidas. Então podemos escrever (3.5) como

$$Ce^{At}x(0) = \bar{y}(t) \quad (3.6)$$

onde

$$\bar{y}(t) = y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau - Du(t)$$

é uma função conhecida. Assim, o problema de observabilidade se reduz a resolver $x(0)$ de (3.6). Se $u = 0$, então $\bar{y}(t)$ se reduz a resposta a entrada nula $Ce^{At}x(0)$. Portanto, a definição 3.2 pode ser modificada para: O sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

é observável se e somente se um estado inicial $x(0)$ pode ser determinado de forma única a partir do conhecimento da resposta $y(t)$ em um intervalo de tempo finito.

Teorema 3.3. Seja o sistema (3.7) com $x \in \mathbb{R}^n$. Este sistema é observável se e somente se

$$\text{posto}(\mathcal{O}) = n, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Este teorema é válido tanto para tempo contínuo para tempo discreto. A prova é um pouco mais fácil para tempo discreto. Para entrada zero, a solução (2.27) para (3.2) pode ser escrita como

$$y[k] = CA^k x[0].$$

Para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ temos

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x[0]. \quad (3.8)$$

Um sistema é observável se e somente se a solução $x[0]$ for única, isto é, se ela é a única condição inicial que, juntamente a sequência de entrada dada, pode gerar a sequência de saída observada. Da teoria de sistemas lineares (1.1), (3.8) tem solução única $x[0]$ se e somente se o espaço nulo de \mathcal{O} é constituído somente pelo vetor nulo, isto é, $\ker(\mathcal{O}) = \{0\}$, ou equivalentemente, se e somente se o único $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz

$$\mathcal{O}x = 0 \quad (3.9)$$

é o vetor nulo. Isto é verdade se e somente se $\text{posto}(\mathcal{O}) = n$. Qualquer vetor de estado não nulo $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz (3.9) é dito ser um estado não observável e $\ker(\mathcal{O})$ é dito ser o espaço não observável.

□

Exemplo 3.6. Considere o sistema descrito por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esse sistema é controlável e observável?

Como o posto da matriz

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é igual a 2, o sistema é controlável.

Para testar a condição de observabilidade, será determinado o posto da matriz de observabilidade. Como

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

o posto de \mathcal{O} é 2. Logo o sistema é observável.

Exemplo 3.7. Mostrar que o seguinte sistema é não observável

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned}$$

em que

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que a lei de controle u não afeta a observabilidade do sistema. Para examinar a observabilidade podemos simplesmente fazer $u = 0$. Para esse sistema, temos

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\det \mathcal{O} = 0.$$

Assim, o posto da matriz \mathcal{O} é menor que 3. Em consequência, o sistema é não observável.

Teorema 3.4. A observabilidade é invariante sob qualquer transformação de equivalência.

Demonstração. Considere o par (A, C) com matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

e seu par equivalente (\bar{A}, \bar{C}) com $\bar{A} = P^{-1}AP$ e $\bar{C} = CP$. A matriz de observabilidade de (\bar{A}, \bar{C}) é

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP \\ CPP^{-1}AP \\ \vdots \\ CPP^{-1}A^{n-1}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP \\ CAP \\ \vdots \\ CA^{n-1}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P = \mathcal{O}P.$$

Como P é não singular, temos que $\text{posto}(\mathcal{O}) = \text{posto}(\bar{\mathcal{O}})$. Isso prova o teorema 3.4 \square

3.3 Princípio da dualidade

Será discutida agora a relação existente entre controlabilidade e observabilidade. Faremos uma introdução ao princípio da dualidade para elucidar analogias evidentes entre controlabilidade e observabilidade.

Seja o sistema S_1 descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

onde x , u e y são, respectivamente os vetores de estado com dimensão n , de entrada com dimensão m e de saída com dimensão p , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e o sistema dual S_2 definido por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned}$$

em que \tilde{x} , \tilde{u} e \tilde{y} são, respectivamente os vetores de estado com dimensão n , de entrada com dimensão p e de saída com dimensão m e \tilde{A} , \tilde{B} e \tilde{C} são matrizes dadas por

$$\tilde{A} = A^T \quad \tilde{B} = C^T \quad \tilde{C} = B^T.$$

O princípio da dualidade estabelece que o sistema S_1 é controlável se e somente se o sistema S_2 for observável.

Para verificar este princípio, vamos escrever as condições necessárias e suficientes para a controlabilidade e observabilidade dos dois sistemas.

Para o sistema S_1 , temos

1. Uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade é que o posto da matriz $n \times nm$

$$\mathcal{C}_1 = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

seja n .

2. Uma condição necessária e suficiente para a observabilidade é que o posto da matriz $np \times n$

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

seja n .

Para o sistema S_2 , temos

1. Uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade é que o posto da matriz $np \times n$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] = [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T] \\ &= [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}_1 \end{aligned}$$

seja n

2. Uma condição necessária e suficiente para a observabilidade é que o posto da matriz $n \times nm$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ AB \\ \vdots \\ A^{n-1}B \end{bmatrix}^T \\ &= [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = \mathcal{C}_1 \end{aligned}$$

seja n

Comparando estas condições, a veracidade deste princípio se torna evidente. Através do uso deste princípio é possível testar a observabilidade de uma dado sistema por meio do teste de controlabilidade de seu dual.

3.4 Decomposição canônica

Nesta seção discutimos a decomposição canônica das equações de estado. Este é um resultado fundamental para estabelecer a relação entre a descrição no espaço de estados e a descrição por matriz de transferência. Considere

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Seja $\bar{x} = P^{-1}x$, Então a equação de estado

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u\end{aligned}\quad (3.11)$$

com $\bar{A} = P^{-1}AP$, $\bar{B} = P^{-1}B$, $\bar{C} = CP$, e $\bar{D} = D$ é equivalente a (3.10). Todas as propriedades de (3.10), incluindo estabilidade, controlabilidade e observabilidade são preservadas em (3.11). Também temos que

$$\bar{C} = P^{-1}C, \quad \bar{O} = OP.$$

Teorema 3.5. Considere a equação de estados com n variáveis de estado em (3.10) com

$$\text{posto}(\mathcal{C}) = \text{posto}([B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]) = r \leq n.$$

Montamos uma matriz $n \times n$

$$P = [p_1 \ \dots \ p_r \ p_{r+1} \ \dots \ p_n]$$

onde as r primeiras colunas p_1, \dots, p_r são colunas linearmente independentes de \mathcal{C} e as colunas restantes p_{r+1}, \dots, p_n são escolhidas de modo que P seja não singular. Então existe uma transformação de equivalência $x = P\bar{x}$ ou $\bar{x} = P^{-1}x$ que transforma (3.10) em

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [\bar{C}_c \ \bar{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du\end{aligned}\quad (3.12)$$

onde \bar{A}_c é $r \times r$ e $\bar{A}_{\bar{c}}$ é $(n-r) \times (n-r)$, e a subequação de (3.12) com r estados,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_c &= \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u \\ y &= \bar{C}_c \bar{x}_c + Du\end{aligned}\quad (3.13)$$

é controlável e tem a mesma matriz de transferência de (3.10). Uma interpretação deste resultado pode ser visto na figura 3.4.

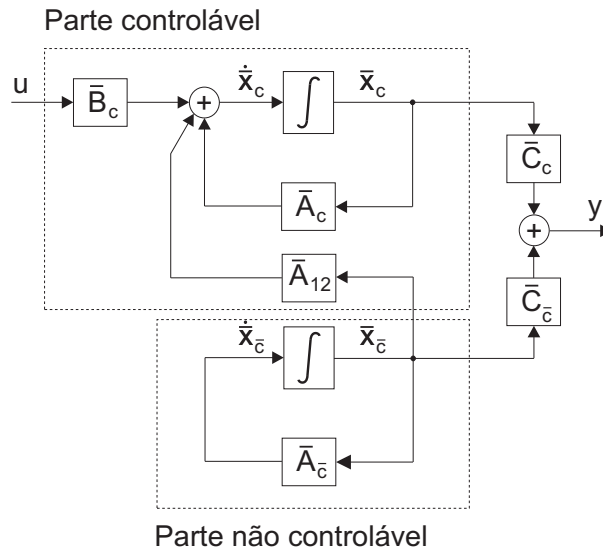


Figura 3.4: Decomposição da equação de estado com relação a controlabilidade

Demonstração. Defina $\bar{B} = P^{-1}B$, ou equivalentemente, $P\bar{B} = B$. A j -ésima coluna de B é dada pelo produto de P pela j -ésima coluna de \bar{B} , em outras palavras, pela combinação linear das colunas de P com os coeficientes dados pela j -ésima coluna de \bar{B} .

$$P\bar{B} = B \Rightarrow P \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \dots & \bar{b}_j & \dots & \bar{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_j & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

$$P\bar{b}_j = b_j \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_r & p_{r+1} & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_{1,j} \\ \vdots \\ \bar{b}_{r,j} \\ \bar{b}_{r+1,j} \\ \vdots \\ \bar{b}_{n,j} \end{bmatrix} = b_j$$

Como a j -ésima coluna de B pode ser escrita como uma combinação linear de p_1, \dots, p_r , e as colunas de P são linearmente independentes, os últimos $n - r$ elementos da j -ésima coluna de \bar{B} devem ser nulos. Este argumento é aplicado para $j = 1, \dots, m$, e portanto $\bar{B} = P^{-1}B$ tem a forma desejada.

Agora seja $\bar{A} = P^{-1}AP$ tal que

$$P\bar{A} = AP \Rightarrow P \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_j & \dots & \bar{a}_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_j & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

$$P\bar{a}_j = Ap_j \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_r & p_{r+1} & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,j} \\ \vdots \\ \bar{a}_{r,j} \\ \bar{a}_{r+1,j} \\ \vdots \\ \bar{a}_{n,j} \end{bmatrix} = Ap_j$$

Como cada coluna de $A^k B$, $k \geq 0$, pode ser escrita como uma combinação linear de p_1, \dots, p_r , os vetores coluna Ap_1, \dots, Ap_r podem ser escritos como combinação linear de p_1, \dots, p_r . Assim, um argumento similar ao argumento para \bar{B} resulta que as primeiras r colunas de \bar{A} devem ter zeros nos últimos $n - r$ elementos. Portanto, \bar{A} tem a forma desejada.

Seja $\bar{\mathcal{C}}$ a matriz de controlabilidade de (3.12). Então temos que $\text{posto}(\mathcal{C}) = \text{posto}(\bar{\mathcal{C}}) = r$. É fácil verificar que

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c & \bar{A}_c \bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^r \bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n-1} \bar{B}_c \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{C}}_c & \bar{A}_c^r \bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n-1} \bar{B}_c \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

onde $\bar{\mathcal{C}}_c$ é a matriz de controlabilidade de (\bar{A}_c, \bar{B}_c) . Como as colunas de $\bar{A}_c^k \bar{B}_c$ são linearmente dependentes das colunas de $\bar{\mathcal{C}}_c$ para $k \geq r$, a condição $\text{posto}(\mathcal{C}) = r$ implica $\text{posto}(\bar{\mathcal{C}}) = r$. Portanto a equação de estado (3.13) é controlável.

Vamos mostrar que (3.13) tem a mesma matriz de transferência de (3.10). Como (3.10) e (3.12) tem a mesma matriz de transferência, precisamos mostrar somente que (3.12) e (3.13) tem a mesma matriz de transferência. Por verificação direta, podemos mostrar que

$$\begin{bmatrix} sI - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (sI - \bar{A}_c)^{-1} & M \\ 0 & (sI - \bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \end{bmatrix},$$

onde

$$M = (sI - \bar{A}_c)^{-1} \bar{A}_{12} (sI - \bar{A}_{\bar{c}})^{-1}.$$

Então a matriz de transferência de (3.12) é

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} + D \\ = & \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - \bar{A}_c)^{-1} & M \\ 0 & (sI - \bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} + D = \bar{C}_c (sI - \bar{A}_c)^{-1} \bar{B}_c + D \end{aligned}$$

que é função de transferência de (3.13). Isto completa a prova do teorema (3.5)

□

Exemplo 3.8. Considere a equação de estado com 3 variáveis de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x. \quad (3.14)$$

Como

$$\text{posto}(\mathcal{C}) = \text{posto}(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 < 3$$

a equação de estado (3.14) não é controlável. Vamos escolher

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As duas primeiras colunas de P são as duas primeiras colunas linearmente independentes de \mathcal{C} ; a última coluna é escolhida arbitrariamente de modo que P seja não singular. Seja $\bar{x} = P^{-1}x$. Então

$$\begin{aligned} \bar{A} = P^{-1}AP &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{array} \right], \\ \bar{B} = P^{-1}B &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \bar{B}_c \\ 0 \end{array} \right], \\ \bar{C} = CP &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que a submatriz \bar{A}_{21} 1×2 de \bar{A} e $\bar{B}_{\bar{c}}$ são nulas, como esperado. A submatriz \bar{A}_{12} é nula mas poderia ser não nula. A parte superior de \bar{B} é uma matriz identidade pois as colunas de B estão nas duas primeiras colunas de P . Portanto, (3.14) pode ser reduzida para

$$\dot{\bar{x}}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_c + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{x}_c.$$

Esta equação é controlável e tem a mesma matriz de transferência de (3.14).

Teorema 3.6. Considere a equação de estados com n variáveis de estado em (3.10) com

$$\text{posto}(\mathcal{O}) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = r \leq n.$$

Montamos uma matriz $n \times n$

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \\ q_{r+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

onde as r primeiras linhas q_1, \dots, q_r são linhas linearmente independentes de \mathcal{O} e as linhas restantes q_{r+1}, \dots, q_n são escolhidas de modo que P seja não singular. Então existe uma transformação de equivalência $\bar{x} = P^{-1}x$ que transforma (3.10) em

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \bar{C}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde \bar{A}_o é $r \times r$ e $\bar{A}_{\bar{o}}$ é $(n-r) \times (n-r)$, e a subequação de com r variáveis de estado de (3.15),

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_o &= \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o u \\ y &= \bar{C}_o \bar{x}_o + Du \end{aligned}$$

é observável e tem a mesma matriz de transferência de (3.10). Uma interpretação desse resultado pode ser visto na figura 3.5.

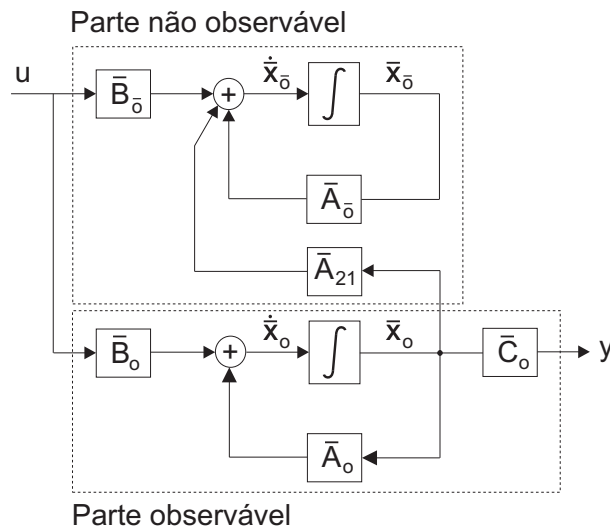


Figura 3.5: Decomposição da equação de estado com relação a observabilidade

Demonstração. Defina $\bar{C} = CP$, ou equivalentemente, $\bar{C}Q = C$, como $Q = P^{-1}$. A j -ésima linha de C é dada pelo produto de P pela j -ésima linha de \bar{C} , em outras palavras, pela combinação linear das linhas de Q com os coeficientes dados pela j -ésima linha de \bar{C} .

$$\bar{C}Q = C \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_j \\ \vdots \\ \bar{c}_p \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_j Q = c_j \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{c}_{1,j} & \dots & \bar{c}_{r,j} & \bar{c}_{r+1,j} & \dots & \bar{c}_{n,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \\ q_{r+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = c_j$$

Como a j -ésima linha de C pode ser escrita como uma combinação linear de q_1, \dots, q_r , e as linhas de Q são linearmente independentes, os últimos $n - r$ elementos da j -ésima linha de \bar{C} devem ser nulos. Este argumento é aplicado para $j = 1, \dots, p$, e portanto $\bar{C} = CP$ tem a forma desejada.

Agora seja $\bar{A} = P^{-1}AP = QAQ^{-1}$ tal que

$$\bar{A}Q = QA \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_j \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} A.$$

$$\bar{a}_j Q = q_j A \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,j} & \dots & \bar{a}_{r,j} & \bar{a}_{r+1,j} & \dots & \bar{a}_{n,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \\ q_{r+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = q_j A$$

Como cada coluna de CA^k , $k \geq 0$, pode ser escrita como uma combinação linear de q_1, \dots, q_r , os vetores linha $q_1 A, \dots, q_r A$ podem ser escritos como combinação linear de q_1, \dots, q_r . Assim, um argumento similar ao argumento para \bar{C} resulta que as primeiras r linhas de \bar{A} devem ter zeros nos últimos $n - r$ elementos. Portanto, \bar{A} tem a forma desejada.

Para os demais resultados, aplique o teorema 3.5 para o par dual $(A, B) = (A^T, C^T)$. \square

Exemplo 3.9. Considere a equação de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \quad (3.16)$$

Como

$$\text{posto}(\mathcal{O}) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 < 3,$$

a equação de estado (3.16) não é observável. Montamos a matriz P^{-1} da seguinte maneira. Suas duas primeiras linhas, são linhas linearmente independentes de \mathcal{O} e a terceira linha é escolhida de modo que a matriz P seja não singular. Assim, temos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad P = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 & -1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \bar{A} &= P^{-1}AP = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_o & 0 \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{array} \right] \\ \bar{B} &= P^{-1}B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \bar{B}_o \\ \hline \bar{B}_{\bar{o}} \end{array} \right] \\ \bar{C} &= CP = [1 \ 0 \ 0] = [\bar{C}_o \ 0]. \end{aligned}$$

Note que a submatriz \bar{A}_{12} 2×1 de \bar{A} e $\bar{C}_{\bar{o}}$ são nulas, como esperado. Portanto, (3.16) pode ser reduzida para

$$\dot{\bar{x}}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \bar{x}_o + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] \bar{x}_o.$$

Esta equação é observável e tem a mesma matriz de transferência de (3.16).

Capítulo 4

Representações no espaço de estados

4.1 Realização e formas canônicas

Todo SLIT possui uma descrição entrada-saída

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

e se o sistema também for a parâmetros concentrados, possui uma descrição no espaço de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$

Se a equação de estado é conhecida, a matriz de transferência é dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e o conjunto $\{A, B, C, D\}$ é chamado realização de $G(s)$. Um SLIT a parâmetros distribuídos pode ser descrito por uma matriz de transferência, mas não tem uma equação de estado de dimensão finita. Assim, nem toda $G(s)$ é realizável. Se $G(s)$ é realizável, então há infinitas realizações, não necessariamente com a mesma dimensão. Portanto, o problema de realização é bastante complexo.

A seguir estudaremos as *formas canônicas controlável e observável* de sistemas SISO. Tais formas canônicas permitem resolver de forma simples o problema de realização dessa classe de sistemas.

4.1.1 Forma canônica controlável

Suponhamos que queremos determinar uma realização para a função de transferência

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}. \quad (4.1)$$

Podemos manipular o numerador e o denominador separadamente, reescrevendo (4.1) como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{Z(s)}, \quad (4.2)$$

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}, \quad (4.3)$$

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3. \quad (4.4)$$

Multiplicando (4.3) em cruz resulta

$$(s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3)Z(s) = U(s).$$

Fazendo a anti-transformada de Laplace com condições iniciais nulas, temos

$$z^{(iii)} + \alpha_1 \ddot{z} + \alpha_2 \dot{z} + \alpha_3 z = u. \quad (4.5)$$

Escolhendo como variáveis de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \dot{z} \\ x_3 &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Então podemos a equação diferencial de terceira ordem (4.5) como um sistema de 3 equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\alpha_3 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_1 x_3 + u. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A equação da saída é

$$z = x_1.$$

Multiplicando (4.4) em cruz, temos

$$Y(s) = (\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3)Z(s),$$

que corresponde a seguinte equação diferencial

$$y = \beta_1 \ddot{z} + \beta_2 \dot{z} + \beta_3 z.$$

Escrevendo a equação de saída em função das variáveis de estado definidas por 4.6, temos

$$y = \beta_1 x_3 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1. \quad (4.8)$$

Portanto, a realização da função de transferência (4.1) é dada por (4.7) e (4.8) que correspondem ao diagrama da figura 4.1.

É possível mostrar que a realização (4.7) e (4.8), chamada de realização canônica controlável, é sempre controlável. Ela pode ser reescrita na forma matricial como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [\beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que esta realização tem como polinômio característico

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = \det \left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & s + \alpha_1 \end{bmatrix} \right) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3.$$

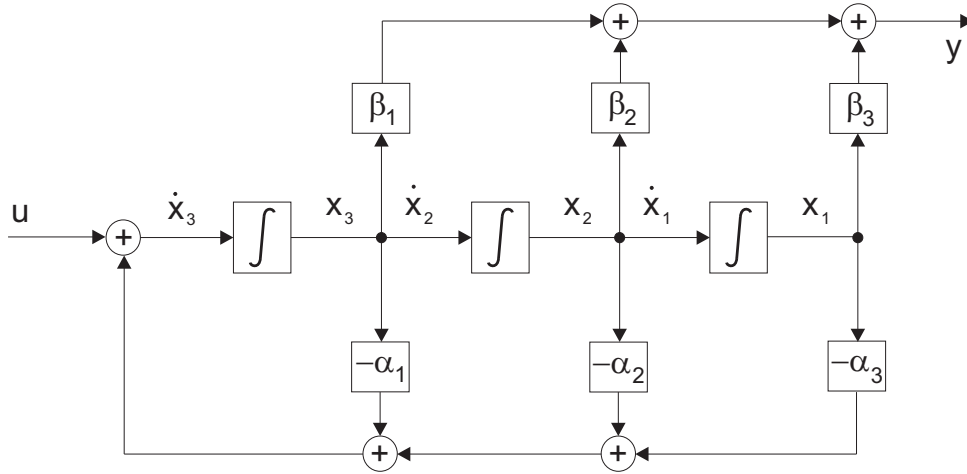


Figura 4.1: Forma canônica controlável

Podemos generalizar essas idéias para sistemas de ordem diferente de 3. Em geral, a forma canônica controlável correspondente à função de transferência

$$g(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n},$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \dots \ \beta_2 \ \beta_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix},$$

que tem como polinômio característico

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n.$$

A função de transferência de tempo discreto

$$g(z) = \frac{\beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n} = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}}$$

pode ser colocada na forma canônica controlável

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k],$$

$$y[k] = [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \dots \ \beta_1] \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix},$$

que tem como polinômio característico

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n \\ \Delta(z^{-1}) &= 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n} \end{aligned}$$

4.1.2 Forma canônica observável

Consideraremos novamente o problema de fornecer uma realização para a função de transferência (4.1). Dividindo todos os termos do numerador e do denominador pela maior potência de s , s^3 , temos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{\beta_1}{s} + \frac{\beta_2}{s^2} + \frac{\beta_3}{s^3}}{1 + \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \frac{\alpha_3}{s^3}}.$$

Multiplicando em cruz, resulta

$$\left(1 + \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \frac{\alpha_3}{s^3}\right) Y(s) = \left(\frac{\beta_1}{s} + \frac{\beta_2}{s^2} + \frac{\beta_3}{s^3}\right) U(s),$$

e portanto

$$Y(s) = -\left(\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \frac{\alpha_3}{s^3}\right) Y(s) + \left(\frac{\beta_1}{s} + \frac{\beta_2}{s^2} + \frac{\beta_3}{s^3}\right) U(s). \quad (4.9)$$

Note que a equação (4.9) corresponde ao diagrama da figura 4.2. Deste diagrama, podemos definir

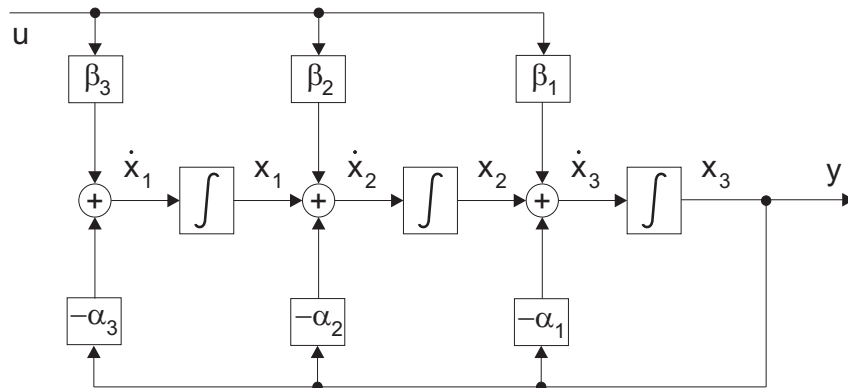


Figura 4.2: Forma canônica observável

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\alpha_3 x_3 + \beta_3 u \\
\dot{x}_2 &= x_1 - \alpha_2 x_3 + \beta_2 u \\
\dot{x}_3 &= x_2 - \alpha_1 x_3 + \beta_1 u \\
y &= x_3
\end{aligned}$$

que podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u, \\
y &= [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

com polinômio característico

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 & \alpha_3 \\ -1 & s & \alpha_2 \\ 0 & -1 & s + \alpha_1 \end{bmatrix} \right) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3.$$

Podemos mostrar que tal sistema é sempre observável. Em geral a forma canônica observável correspondente a função de transferência

$$g(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n}$$

é dada por

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u, \\
y &= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

que tem como polinômio característico

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n.$$

A função de transferência de tempo discreto

$$g(z) = \frac{\beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n} = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}}$$

pode ser colocada na forma canônica observável

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u[k],$$

$$y[k] = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix},$$

que tem como polinômio característico

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n \\ \Delta(z^{-1}) &= 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n} \end{aligned}$$

4.1.3 Realizações de funções de transferência não estritamente próprias

Prova-se que $g(s)$ é realizável se e somente se $g(s)$ for uma função polinomial racional estritamente própria, ou seja, o grau do polinômio do numerador é estritamente menor que o grau do polinômio do denominador. No caso em que $g(s) = n(s)/d(s)$ é própria, mas não é estritamente própria, devemos fazer a divisão $n(s) = Dd(s) + r(s)$, sendo D o quociente (necessariamente de grau zero) e $r(s)$, o polinômio resto, necessariamente de grau menor que o grau de $d(s)$. Assim podemos escrever

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{Dd(s) + r(s)}{d(s)} = D + \frac{r(s)}{d(s)}.$$

Note que $r(s)/d(s)$ é estritamente próprio e, portanto, pode ser realizado em uma forma canônica das seções anteriores. Se $\{A, B, C\}$ é uma realização de $r(s)/d(s)$ então $\{A, B, C, D\}$ será uma realização de $g(s)$.

Exemplo 4.1. Seja

$$g(s) = \frac{s+3}{s+1} = \frac{2}{s+1} + 1 = \frac{\beta_1}{s+\alpha_1} + D.$$

Portanto, a realização canônica controlável de $g(s)$ é

$$A = -\alpha_1 = -1, \quad B = 1, \quad C = \beta_1 = 2, \quad D = 1.$$

Exemplo 4.2. Seja

$$g(s) = \frac{s^2 + 5s + 8}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s+5}{s^2 + 4s + 3} + 1 = \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} + D.$$

Daí

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\beta_2 \quad \beta_1] = [5 \quad 1], \quad D = 1,$$

é uma realização canônica controlável de $g(s)$.

4.2 Decomposição de Kalman

Teorema 4.1. Toda equação de estado pode ser transformada, por uma transformação de equivalência, na seguinte forma canônica

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.10)$$

$$y = [\bar{C}_{co} \quad 0 \quad \bar{C}_{\bar{c}o} \quad 0] \bar{x} + Du,$$

onde o vetor \bar{x}_{co} é controlável e observável, $\bar{x}_{c\bar{o}}$ é controlável mas não observável, $\bar{x}_{\bar{c}o}$ é observável mas não controlável e $\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ é não controlável e não observável. Além disso, a equação de estado da parte controlável e observável

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{co} &= \bar{A}_{co}\bar{x}_{co} + \bar{B}_{co}u \\ y &= \bar{C}_{co}\bar{x}_{co} + Du \end{aligned}$$

tem a mesma matrix de transferência de (4.10), dada por

$$G(s) = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D.$$

Este teorema pode ser simbolicamente ilustrado pela figura 4.3. A equação é primeiro decomposta, usando o teorema 3.5, em parte controlável e não controlável. Então decomponemos cada subequação, usando o teorema 3.6, em parte observável e não observável. Na figura podemos ver que somente a parte controlável e observável está conectada com os terminais de entrada e saída. Assim, a matriz de transferência descreve somente esta parte do sistema. Por esta razão que a descrição por matriz de transferência e por espaço de estado não são necessariamente equivalentes. Por exemplo, se alguma matriz A cuja submatriz \bar{A}_{co} tem algum autovalor com a parte real positiva, então alguma variável de estado pode crescer indefinidamente e o sistema saturar. Este fenômeno, contudo, não pode ser detectado pela matriz de transferência.

4.3 Realização de ordem mínima

Dada uma realização de dimensão n

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

da matriz de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, essa realização é chamada *realização mínima* se não existir realização com dimensão menor que n .

pode ser controlável e observável. Portanto, por absurdo, uma realização controlável e observável é minimal.

Agora suponha que (4.11) é uma realização mínima de dimensão n de $G(s)$ mas que seja não controlável. Então existe um vetor $n \times 1$, $q \neq 0$, tal que

$$q^T [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = 0.$$

De fato, pelo teorema de Cayley-Hamilton $q^T A^k B = 0$ para todo $k \geq 0$. Seja P^{-1} uma matriz inversível $n \times n$ com q^T sendo sua última linha, e seja $\bar{x} = P^{-1}x$. A equação de estado do sistema fica

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

que também é uma realização de dimensão n de $G(s)$. As matrizes em (4.12) podem ser particionadas como

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = P^{-1}B \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CP = [\bar{C}_c \ \bar{C}_{\bar{c}}],$$

onde \bar{A}_c é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$, \bar{B}_c é $(n-1) \times 1$ e \bar{C}_c é $1 \times (n-1)$. Em termos dessas partições, sabemos pela construção de P que $\bar{A}\bar{B} = P^{-1}AB$ tem a forma

$$\bar{A}\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c\bar{B}_c \\ \bar{A}_{21}\bar{B}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c\bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, como a última linha de $P^{-1}A^k B$ é zero para todo $k \geq 0$,

$$\bar{A}^k \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c^k \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \geq 0.$$

Então \bar{A}_c , \bar{B}_c e \bar{C}_c definem uma realização com dimensão $n-1$ de $G(s)$.

$$\bar{C}_c e^{\bar{A}_c t} \bar{B}_c = [\bar{C}_c \ \bar{C}_{\bar{c}}] \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{A}_c^k \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} = \bar{C}_c e^{\bar{A}_c t} \bar{B}_c,$$

contraria a hipótese que (4.11) é uma realização mínima. Um argumento similar leva a uma contradição similar se assumirmos que a realização mínima de (4.11) é não observável. Portanto, uma realização mínima é controlável e observável. □

4.4 Realização de matrizes de transferência

Há muitas maneiras de realizar uma matriz de transferência. Seja $G_{ci}(s)$ a i -ésima coluna de $G(s)$ e seja u_i o i -ésimo elemento do vetor entrada u . Então $Y(s) = G(s)U(s)$ pode ser expresso como

$$Y(s) = G_{c1}(s)U_1(s) + G_{c2}(s)U_2(s) + \dots + G_{cm}(s)U_m(s) = Y_{c1} + Y_{c2} + \dots + Y_{cm} \quad (4.13)$$

como mostrado na figura 4.4(a). Portanto, podemos realizar cada coluna de $G(s)$ e combiná-las para obter uma realização de $G(s)$. Seja $G_{ri}(s)$ a i -ésima linha de $G(s)$ e

seja y_i o i -ésimo componente do vetor saída y . Então $Y(s) = G(s)U(s)$ pode ser expresso como

$$Y_i(s) = G_{ri}(s)U(s)$$

como mostrado na figura 4.4(b). Portanto, podemos realizar cada linha de $G(s)$ e então combiná-las para obter uma realização de $G(s)$.

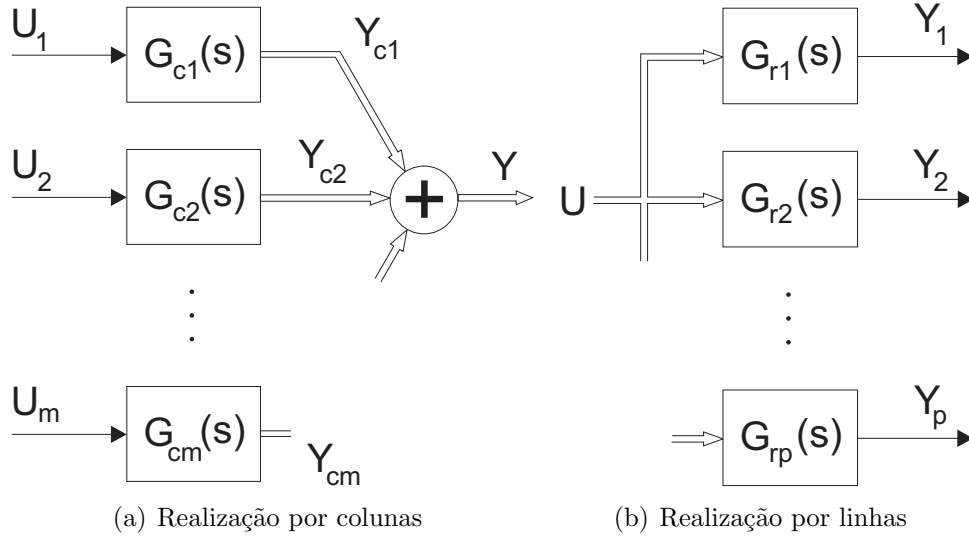


Figura 4.4: Realizações de $G(s)$

4.4.1 Algoritmo de realização por colunas

Dada uma matriz racional própria $G(s)$, $m \times p$, apresentaremos uma técnica de síntese de uma realização $\{A, B, C, D\}$ controlável para $G(s)$. Seja $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$ a função de transferência da i -ésima linha e j -ésima coluna. Seja $d_j(s)$ o denominador comum da coluna j , isto é, o denominador comum dos $G_{ij}(s)$ para $i = 1, \dots, p$. Multiplicando o numerador e o denominador comum dos $G_{ij}(s)$ por um polinômio adequado, podemos sempre escrever (após fazer uma divisão conforme descrito na seção 4.1.3)

$$G_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_j(s)} + d_{ij},$$

onde d_{ij} é uma constante e $n_{ij}(s)/d_j(s)$ é estritamente próprio com $d_j(s)$ e $n_{ij}(s)$ podendo ser escritos como

$$\begin{aligned} d_j(s) &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n \\ n_{ij}(s) &= \beta_{i,1} s^{n-1} + \dots + \beta_{i,n}, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Uma realização controlável para $G_{ij}(s)$, é dada por

$$\begin{aligned} A_j &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, & B_j &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_{ij} &= [\beta_{i,n} \quad \beta_{i,n-1} \quad \dots \quad \beta_{i,2} \quad \beta_{i,1}], & D_{ij} &= d_{ij}. \end{aligned}$$

como foi visto na seção 4.1.1. Note que as matrizes A_j e B_j , não dependem da linha i . Assim, a realização da j -ésima coluna pode ser dada por

$$G_{cj} = \begin{bmatrix} C_{1,j}(sI - A_j)^{-1}B_j + d_{1,j} \\ \vdots \\ C_{p,j}(sI - A_j)^{-1}B_j + d_{p,j} \end{bmatrix} = C_j(sI - A_j)^{-1}B_j + D_j,$$

com

$$C_j = \begin{bmatrix} C_{1,j} \\ \vdots \\ C_{p,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,n} & \beta_{1,n-1} & \dots & \beta_{1,2} & \beta_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{p,n} & \beta_{p,n-1} & \dots & \beta_{p,2} & \beta_{p,1} \end{bmatrix}, \quad D_j = \begin{bmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{p,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1,j} \\ \vdots \\ d_{p,j} \end{bmatrix}.$$

De acordo com a equação (4.13), a matriz de transferência $G(s)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} G(s) &= [G_{c1} \ G_{c2} \ \dots G_{cm}] \\ &= \begin{bmatrix} C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1 & C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2 & \dots \\ C_m(sI - A_m)^{-1}B_m + D_m \end{bmatrix} = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m], \quad \tilde{D} = [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_m]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Portanto, obtemos uma realização $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ controlável de $G(s)$ ao combinar as realizações controláveis (A_j, B_j, C_j, D_j) de cada coluna G_{cj} .

Como uma realização mínima é controlável e observável como mostrado no teorema 4.2 e a realização que obtivemos é controlável, para obtermos uma realização mínima, basta extrairmos a parte sua parte observável. Assim, colocando a realização obtida na forma

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad [\bar{C}_o \ 0], \quad \tilde{D},$$

e fazendo $A = A_o$, $B = B_o$, $C = C_o$ e $D = \tilde{D}$, temos que (A, B, C, D) é uma realização mínima de $G(s)$.

Exemplo 4.3. Dada

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s+1} & \frac{s+3}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{s^2+5s+8}{s^2+4s+3} \end{bmatrix},$$

queremos determinar uma realização mínima de $G(s)$.

Para a primeira coluna, temos

$$G_{c1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{\frac{s+1}{2}} \\ \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} + 1 \\ \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{11}}{s+\alpha_1} + d_{11} \\ \frac{\beta_{21}}{s+\alpha_1} + d_{21} \end{bmatrix}$$

Portanto, a realização canônica controlável desta coluna é

$$A_1 = -\alpha_1 = -1, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para a segunda coluna, temos

$$\begin{aligned} G_{c2} &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{\frac{(s+3)(s+2)+2}{(s+1)(s+3)}} \\ \frac{(s+3)(s+2)+2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+3)^2}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{(s+3)(s+2)+2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+3)} + 1 \\ \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2s+6}{s^2+4s+3} + 1 \\ \frac{s+5}{s^2+4s+3} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{11}s+\beta_{12}}{s^2+\alpha_1s+\alpha_2} + d_{11} \\ \frac{\beta_{21}s+\beta_{22}}{s^2+\alpha_1s+\alpha_2} + d_{21} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, a realização canônica controlável desta coluna é

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} \beta_{12} & \beta_{11} \\ \beta_{22} & \beta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma realização controlável da matriz de transferência $G(s)$ é

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{array} \right], \quad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \\ \tilde{C} &= [C_1 | C_2] = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 1 \end{array} \right], \quad \tilde{D} = [D_1 | D_2] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Vamos extrair a parte observável desta realização. Sua matriz de observabilidade é

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & -6 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

Como $\text{posto}(\mathcal{O}) = 2 < n$, o sistema é não observável. Montamos a matriz P de modo que as duas primeiras linhas de P^{-1} sejam formadas por linhas linearmente independentes de \mathcal{O} e as linhas restantes para formar a matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sejam escolhidas de tal modo que P^{-1} (e portanto P) seja não singular. Assim, obtemos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0,25 & 0,5 & -0,5 \\ 1,25 & -1,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

A nova representação do sistema será

$$\begin{aligned}
\bar{A} = P^{-1}\tilde{A}P &= \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_o & 0 \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_o \end{array} \right] \\
\bar{B} = P^{-1}\tilde{B} &= \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \bar{B}_o \\ \hline \bar{B}_o \end{array} \right], \\
\bar{C} = \tilde{C}P &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] = [\bar{C}_o \mid 0].
\end{aligned}$$

Fazendo $A = \bar{A}_o$, $B = \bar{B}_o$, $C = \bar{C}_o$ e $D = \tilde{D}$, obtemos uma realização mínima de $G(s)$.

4.4.2 Algoritmo de realização por linhas

Transpondo a matriz $G(s)$ podemos encontrar uma realização (A_1, B_1, C_1, D_1) de $G^T(s)$ usando a mesma metodologia descrita na seção anterior. Depois podemos determinar uma realização de (A, B, C, D) de $G(s)$ através do sistema dual $A = A_1^T$, $B = C_1^T$, $C = B_1^T$ e $D = D_1^T$.

Uma outra abordagem seria realizar as linhas de $G(s)$ diretamente através de realizações observáveis, agregá-las de maneira dual ao que foi feito no algoritmo de realização por colunas e depois extrair a parte controlável.

Capítulo 5

Realimentação de estados

5.1 Introdução

A maioria dos sistemas de controle pode ser esquematizado como na figura 5.1, onde a *planta* e o sinal de referência $r(t)$ são dados. A entrada $u(t)$ da planta é chamada *sinal atuante* ou *sinal de controle*. A saída $y(t)$ da planta é chamada *saída da planta* ou *sinal controlado*. O problema é projetar um sistema tal que a saída da planta siga tão próximo quanto possível o sinal de referência $r(t)$. Há dois tipos de controle. Se o sinal atuante $u(t)$ depende somente do sinal de referência e não depende da saída da planta, o controle é chamado de controle em *malha aberta*. Se o sinal atuante depende do sinal de referência e da saída da planta, o controle é chamado de controle em *malha fechada* ou *realimentado*. O controle em malha aberta é, em geral, não satisfatório se há variação dos parâmetros da planta ou há ruído ou perturbações ao redor do sistema. Um sistema de controle em malha fechada bem projetado, por outro lado, pode reduzir o efeito da variação de parâmetros e atenuar ruídos e perturbações. Portanto, o controle em malha fechada é mais usado na prática.

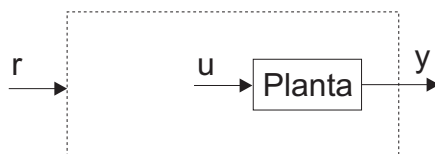


Figura 5.1: Projeto de sistemas de controle

Considere uma planta descrita por (A, b, c) . Se todos os autovalores de A estiverem dentro do setor mostrado na figura (5.2(a)) para um sistema em tempo contínuo ou dentro do setor mostrado na figura 5.2(b) para um sistema em tempo discreto, então a resposta causada por qualquer condição inicial cairá rapidamente para zero e nenhuma realimentação de estado é necessária. Se A é estável mas algum dos autovalores estiver fora do setor, então o decaimento pode ser mais lento ou oscilatório. Se A é instável, então a resposta causada por qualquer condição inicial não nula irá crescer ilimitadamente. Nestes dois últimos casos, podemos introduzir uma realimentação de estados para melhorar o comportamento do sistema. Os resultados apresentados neste capítulo aplicam-se no caso de sistemas em tempo discreto sem qualquer modificação. A única diferença é que a região na figura (5.2(a)) deve ser substituída pela da figura (5.2(b)), que é obtida pela transformação $z = e^s$.

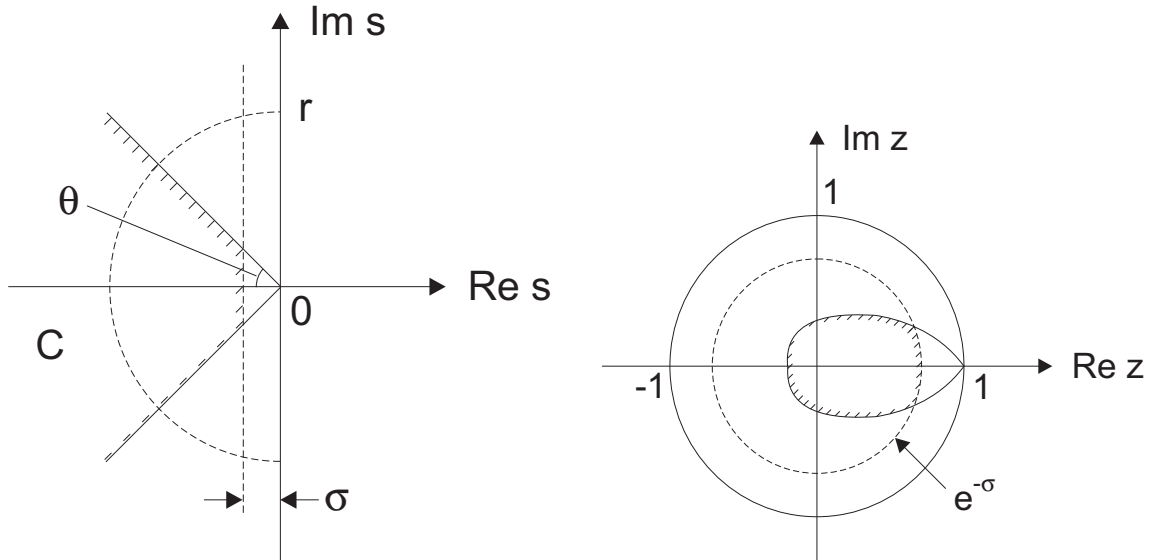


Figura 5.2: Posição desejada dos autovalores

5.2 Realimentação de estados – Caso SISO

Considere o sistema de uma entrada e uma saída com n variáveis de estado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde estamos assumindo $d = 0$ para simplificar a discussão. Na realimentação de estado, a entrada u é dada por

$$u = r - kx = r - [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]x = r - \sum_{i=1}^n k_i x_i\tag{5.2}$$

como mostrado na figura 5.3. Cada ganho k_i é uma constante real. Substituindo (5.2) em (5.1), temos

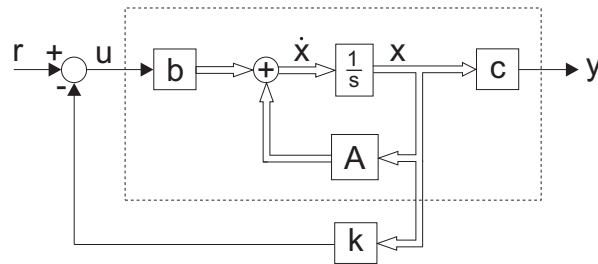


Figura 5.3: Realimentação de estados

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - bk)x + br \\ y &= cx.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Teorema 5.1. O par $(A - bk, b)$, para qualquer vetor $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, é controlável se e somente se (A, b) for controlável.

Demonstração. Vamos provar o teorema para $n = 4$. Sejam

$$\mathcal{C} = [\ b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b \]$$

e

$$\mathcal{C}_f = [\ b \quad (A - bk)b \quad (A - bk)^2b \quad (A - bk)^3b \]$$

as matrizes de controlabilidade de (5.1) e (5.3). É fácil verificar que,

$$\mathcal{C}_f = \mathcal{C} \begin{bmatrix} 1 & -kb & -k(A - bk)b & -k(A - bk)^2b \\ 0 & 1 & -kb & -k(A - bk)b \\ 0 & 0 & 1 & -kb \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Note que $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Portanto, kb é escalar; assim é todo elemento da matriz a direita de (5.4). Como essa matriz é não singular para qualquer k , o posto de \mathcal{C}_f é igual ao posto de \mathcal{C} . Então (5.3) é controlável se e somente se (5.1) for controlável.

Este teorema também pode ser provado diretamente da definição de controlabilidade. Seja x_0 e x_1 dois estados arbitrários. Se (5.1) for controlável, existe uma entrada u_1 que transfere x_0 para x_1 em um intervalo finito. Agora, se escolhermos $r_1 = u_1 + kx$, então a entrada r_1 do sistema em malha fechada irá transferir x_0 para x_1 . Portanto, concluímos que se (5.1) for controlável, então (5.3) também é.

Vemos na figura 5.3 que a entrada r não controla o estado x diretamente; é gerado u para controlar x . Portanto, se u não controla x , r também não controla.

□

Embora a controlabilidade seja invariante para qualquer realimentação de estado, a observabilidade não é. Isso é mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 5.1. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [\ 1 \quad 2 \] x. \end{aligned}$$

Podemos mostrar facilmente que o sistema é controlável e observável. Agora introduzimos a realimentação de estados

$$u = r - [\ 3 \quad 1 \] x.$$

Então o sistema fica

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - bk)x + br = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= cx = [\ 1 \quad 2 \] x. \end{aligned}$$

A matriz de controlabilidade é

$$\mathcal{C}_f = [\ b \quad (A - bk)b \] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que é não singular. Portanto, o sistema é controlável. A matriz de observabilidade é

$$\mathcal{O}_f = \begin{bmatrix} c \\ c(A - bk) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que é singular. Assim, o sistema é não observável. A razão pela qual a observabilidade não é preservada na realimentação de estados será dada mais tarde.

Usaremos um exemplo para discutir o que pode ser obtido por uma realimentação de estados.

Exemplo 5.2. Considere uma planta descrita por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

O polinômio característico do sistema é

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^2 - 2s - 8 = (s - 4)(s + 2).$$

Assim, os autovalores são 4 e -2. O sistema é instável. Podemos mostrar que esse sistema é controlável. Vamos introduzir uma realimentação de estados $u = r - [k_1 \ k_2]x$. Então o sistema em malha fechada é descrito por

$$\dot{x} = (A - bk)x + br = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 3 - k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r.$$

O novo polinômio característico do sistema é

$$\Delta_f(s) = \det(sI - A + bk) = (s - 1 + k_1)(s - 1) - 3(3 - k_2) = s^2 + (k_1 - 2)s + (3k_2 - k_1 - 8).$$

Escolhendo adequadamente k_1 e k_2 , podemos alocar os autovalores da matriz $A - bk$ em uma posição qualquer. Por exemplo, se quisermos que os autovalores estejam em $-1 \pm j2$, o polinômio característico deve ser $(s + 1 + j2)(s + 1 - j2) = s^2 + 2s + 5$. Fazendo $k_1 - 2 = 2$ e $3k_2 - k_1 - 8 = 5$, temos $k_1 = 4$ e $k_2 = 17/3$. Assim o ganho de realimentação de estados $[4 \ 17/3]$ levará os autovalores de 4 e -2 para $-1 \pm j2$.

Este exemplo mostra que a realimentação de estados pode ser usada para colocar os autovalores em qualquer posição. Além disso, o ganho de realimentação pode ser calculado por substituição direta. Este método, contudo, fica muito complicado para sistemas com três ou mais estados. Pior ainda, este método não revela como a condição de controlabilidade entra no projeto. Portanto, um método mais sistemático é desejável. Antes, precisaremos do seguinte teorema. O teorema será mostrado para $n = 4$, contudo, ele é válido para todo n inteiro positivo.

Teorema 5.2. Considere o sistema (5.1) com $n = 4$ e polinômio característico

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4. \quad (5.5)$$

Se (5.1) for controlável, então existe uma transformação $\bar{x} = P^{-1}x$ com

$$P = [b \ Ab \ A^2b \ A^3b] \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

que leva o sistema à forma canônica controlável

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \bar{c}\bar{x} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4] \bar{x}.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Além disso, a função de transferência do sistema (5.1) é dada por

$$g(s) = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}. \quad (5.8)$$

Demonstração. Sejam \mathcal{C} e $\bar{\mathcal{C}}$ as matrizes de controlabilidade de (5.1) e (5.7). No caso SISO, ambas são quadradas. Se (5.1) é quadrada ou \mathcal{C} é não singular, então $\bar{\mathcal{C}}$ é não singular e as duas matrizes são relacionados por $\bar{\mathcal{C}} = P^{-1}\mathcal{C}$. Assim

$$P^{-1} = \bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1} \quad \text{ou} \quad P = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}.$$

A matriz de controlabilidade $\bar{\mathcal{C}}$ de (5.7) é

$$\bar{\mathcal{C}} = [\bar{b} \ \bar{A}\bar{b} \ \bar{A}^2\bar{b} \ \bar{A}^3\bar{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 \\ 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 & -\alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 \end{bmatrix}$$

e a sua inversa é dada por

$$\bar{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Substituindo (5.9) em $P = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}$, temos (5.6). Como mostrado na seção 4.1.1, o sistema em (5.7) é uma realização de (5.8). Portanto, a função de transferência de (5.7) e, conseqüentemente, de (5.1), é igual a (5.8). Isso prova o teorema. \square

Com este teorema, podemos discutir a alocação de autovalores por realimentação de estados.

Teorema 5.3. Se o sistema (5.1) de dimensão n for controlável, então com uma realimentação de estados $u = r - kx$, onde $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, os autovalores de $A - bk$ podem ser alocados arbitrariamente, desde que autovalores complexos apareçam em pares complexo conjugados.

Demonstração. Vamos considerar novamente $n = 4$. Se o sistema (5.1) for controlável, então pode ser colocado na forma canônica controlável (5.7). Sejam \bar{A} e \bar{b} as matrizes de (5.7). Então temos $\bar{A} = P^{-1}AP$ e $\bar{b} = P^{-1}b$. Substituindo $\bar{x} = P^{-1}x$ na realimentação de estados

$$u = r - kx = r - kP\bar{x} = r - \bar{k}\bar{x},$$

onde $\bar{k} = kP$. Como $\bar{A} - \bar{b}\bar{k} = P^{-1}AP - P^{-1}bkP = P^{-1}(A - bk)P$, as matrizes $(A - bk)$ e $(\bar{A} - \bar{b}\bar{k})$ têm os mesmos autovalores. Daí

$$\begin{aligned}\Delta_f(s) &= \det(sI - A + bk) = \det(sI - \bar{A} + \bar{b}\bar{k}) = \det \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\bar{k}_4 \quad \bar{k}_3 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_1] \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ \alpha_4 + \bar{k}_4 & \alpha_3 + \bar{k}_3 & \alpha_2 + \bar{k}_2 & s + \alpha_1 + \bar{k}_1 \end{bmatrix} \right) \\ &= s^4 + (\alpha_1 + \bar{k}_1)s^3 + (\alpha_2 + \bar{k}_2)s^2 + (\alpha_3 + \bar{k}_3)s + \alpha_4 + \bar{k}_4.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Especificados os autovalores do sistema em malha fechada, o polinômio característico do sistema em malha fechada pode ser escrito como

$$\Delta_f(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4) = s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4.\tag{5.11}$$

Igualando (5.10) e (5.11) temos que $\bar{k}_i = \bar{\alpha}_i - \alpha_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Portanto, a realimentação \bar{k} deve ser escolhida como

$$\bar{k} = [\bar{\alpha}_4 - \alpha_4 \quad \bar{\alpha}_3 - \alpha_3 \quad \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1].\tag{5.12}$$

O ganho de realimentação k pode ser calculado de

$$k = \bar{k}P^{-1},$$

com \bar{k} dado por (5.12) e P dada por (5.6).

□

Algoritmo 5.1. Para alocar arbitrariamente os autovalores em um par (A, b) controlável com uma entrada, devemos seguir os seguintes passos

1. Calcular o polinômio característico da matriz A

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n.$$

2. Escolher o conjunto de autovalores desejados em malha fechada (p_1, p_2, \dots, p_n) e determinar os coeficientes do polinômio característico $\Delta_f(s)$ correspondente

$$\Delta_f(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n.$$

3. Calcular os elementos de $\bar{k} = [\bar{k}_n \quad \bar{k}_{n-1} \quad \dots \quad \bar{k}_1]$ dados por

$$\bar{k} = [\bar{\alpha}_n - \alpha_n \quad \bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1} \quad \dots \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1],$$

4. Encontrar a matriz P

$$P = \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que coloca o sistema na forma canônica controlável.

5. A realimentação de estados que aloca os autovalores nas posições especificadas é dada por

$$k = \bar{k}P^{-1}$$

Exemplo 5.3. Considere o sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Podemos verificar que esse sistema é controlável. Então seus autovalores podem ser alocados arbitrariamente. O polinômio característico da matriz A é

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^2(s^2 - 5) = s^4 + 0s^3 - 5s^2 + 0s + 0 = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4.$$

Considere que os autovalores desejados sejam $-1, 5 \pm j0, 5$ e $-1 \pm j$. Então o polinômio característico de malha fechada desejado é

$$\begin{aligned} \Delta_f(s) &= (s + 1, 5 - j0, 5)(s + 1, 5 + j0, 5)(s + 1 - j)(s + 1 + j) \\ &= s^4 + 5s^3 + 10, 5s^2 + 11s + 5 = s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4. \end{aligned}$$

Então, usando (5.12), temos

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} 5 - 0 & 11 - 0 & 10, 5 + 5 & 5 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 15, 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Agora vamos calcular a matriz P que coloca o sistema (5.13) na forma canônica controlável. Usando (5.6), temos

$$P = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$k = \bar{k}P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{103}{12} & -\frac{13}{3} \end{bmatrix}.$$

5.2.1 Função de transferência do sistema em malha fechada

Considere a planta descrita por (A, b, c) . Se (A, b) for controlável, (A, b, c) pode ser colocado na forma controlável (5.7) e sua função de transferência pode ser, para $n = 4$, escrita como

$$g(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}. \quad (5.14)$$

Após fechar a malha, o sistema fica $(A - bk, b, c)$ e está ainda na forma canônica controlável como mostrado em (5.10). Assim, a função de transferência de malha fechada de r para y é

$$g_f(s) = c(sI - A + bk)^{-1}b = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4}. \quad (5.15)$$

Vemos que os numeradores de (5.14) e (5.15) são os mesmos. Em outras palavras, a realimentação de estados não afeta os zeros da função de transferência da planta. Esta é, de fato, uma propriedade de geral da realimentação: a realimentação pode alocar os pólos de uma planta mas não tem efeito sobre os zeros.

5.3 Regulação e rastreamento

Considere o sistema realimentado da figura (5.3). Suponha que o sinal de referência r é zero e a resposta do sistema é causada somente por uma condição inicial não nula. O problema é encontrar uma realimentação de estado tal que a resposta irá para zero a uma taxa desejada. Este é o chamado *problema de regulação*. Suponha que o sinal de referência r é constante ou $r(t) = a$, para $t \geq 0$. O problema é projetar um sistema tal que $y(t)$ tente a $r(t)$ para t tendendo ao infinito. Este é o chamado *rastreamento assintótico* de uma referência degrau. É claro que se $r(t) = a = 0$, o problema de rastreamento é reduzido ao problema de regulação.

O problema de rastreamento é um pouco mais complicado. Em geral, a realimentação de estados precisa incluir um ganho p *feedforward*

$$u(t) = pr(t) - kx.$$

Então a função de transferência de r para y difere de (5.15) somente pelo ganho p . Portanto, temos

$$g_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = p \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4}.$$

Se (A, b) for controlável, todos os autovalores de $(A - bk)$ ou, equivalentemente, todos os pólos de $g_f(s)$ podem ser arbitrariamente alocados. Nesta condição, se a referência é uma função degrau com magnitude a , então a saída $y(t)$ para $t \rightarrow \infty$ será

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s g_f(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s g_f(s) \frac{a}{s} = g_f(0) \cdot a.$$

Assim, para $y(t)$ rastrear assintoticamente qualquer referência degrau, precisamos

$$1 = g_f(0) = p \frac{\beta_4}{\bar{\alpha}_4}, \quad \text{ou} \quad p = \frac{\bar{\alpha}_4}{\beta_4}, \quad \beta_4 \neq 0. \quad (5.16)$$

De (5.14) e (5.15), notamos que β_4 é o termo constante do numerador da função de transferência da planta. Então $\beta_4 \neq 0$ se e somente se a função de transferência da planta $g(s)$ não tem zero em $s = 0$. Concluindo, se $g(s)$ tem um ou mais zeros $s = 0$, o rastreamento não é possível. Se $g(s)$ não tem zero em $s = 0$, introduzimos um ganho *feedforward* como em (5.16). Então o sistema resultante irá rastrear assintoticamente qualquer referência degrau.

5.3.1 Rastreamento robusto e rejeição de perturbação

A equação de estados e a função de transferência desenvolvidos para descrever uma planta pode mudar devido mudanças de carga, ambiente e desgaste. Então os parâmetros da planta freqüentemente variam na prática. O modelo da planta usado para projeto é freqüentemente chamado de *planta nominal*. O ganho *p feedforward* em (5.16), calculado para a função de transferência da planta nominal, pode não ter $g_f(0) = 1$ para uma função de transferência da planta não nominal. Então a saída não rastreará assintoticamente qualquer referência degrau. Tal rastreamento é dito ser *não robusto*.

Considere uma planta descrita por (5.1). Vamos assumir que uma perturbação constante w com magnitude desconhecida atua na entrada na planta como na figura 5.4. Assim o sistema será modificado para

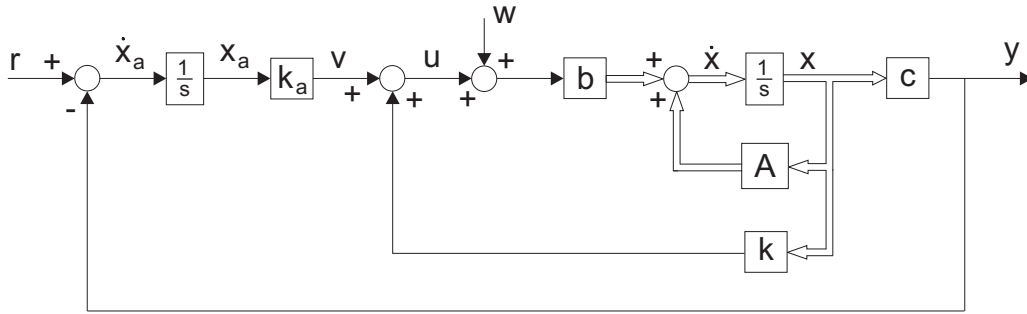


Figura 5.4: Realimentação de estados com modelo interno

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + bw \\ y &= cx. \end{aligned} \quad (5.17)$$

O problema é projetar um controle tal que a saída $y(t)$ irá rastrear assintoticamente qualquer referência degrau mesmo na presença de uma perturbação $w(t)$ e com variação dos parâmetros da planta. Isto é chamado *rastreamento robusto e rejeição de perturbação*. Para alcançar este objetivo, além de introduzir uma realimentação de estados, vamos introduzir um integrador e uma realimentação unitária da saída, como mostrado na figura 5.4. Seja a saída do integrador $x_a(t)$ uma variável de estado aumentada. Então o sistema tem o vetor de estados aumentado $[x^T \ x_a]^T$. Da figura 5.4, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= r - y = r - cx \\ u &= kx + k_a x_a = [k \ k_a] \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por conveniência, o estado é realimentado positivamente para u , como mostrado. Substituindo isto em (5.17), temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + bk & bk_a \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} w \\ y &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.3.2 Estabilização

Se a equação de estados for controlável, todos os autovalores podem ser arbitrariamente alocados pela introdução de uma realimentação de estados. Vamos discutir o caso quando a equação de estados não for controlável. Todo sistema não controlável pode ser transformado em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (5.19)$$

onde (\bar{A}_c, \bar{b}_c) é controlável (teorema 3.5). Como a matriz \bar{A} é bloco triangular, os autovalores da matriz A original é a união dos autovalores de \bar{A}_c e $\bar{A}_{\bar{c}}$. Se introduzirmos a realimentação de estados

$$u = r - kx = r - \bar{k}\bar{x} = r - \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix},$$

onde particionamos \bar{k} como em \bar{x} , então (5.19) fica

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{b}_c \bar{k}_1 & \bar{A}_{12} - \bar{b}_c \bar{k}_2 \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad (5.20)$$

Note que $\bar{A}_{\bar{c}}$ e, conseqüentemente, seus autovalores não são afetados pela realimentação de estados. Portanto, concluímos que a condição de controlabilidade de (A, b) no teorema 5.3 não é somente suficiente mas também necessária para alocação de *todos* autovalores de $(A - bk)$ para qualquer posição desejada.

Considere novamente o sistema em (5.19). Se $\bar{A}_{\bar{c}}$ for estável, e se (\bar{A}_c, \bar{b}_c) for controlável, então (5.19) é *estabilizável*. A condição de controlabilidade para rastreamento e rejeição de perturbação pode ser substituída pela condição mais fraca de estabilizabilidade. Mas neste caso, não temos completo controle da taxa de rastreamento e rejeição. Se os autovalores estáveis não controláveis tem partes imaginárias grandes ou estão próximos do eixo imaginário, então o rastreamento e a rejeição de perturbações podem não ser satisfatórios.

Algoritmo 5.2. Se o par (A, b) for estabilizável

1. Encontre a matriz P que coloca o sistema como em (3.12). Aplique o algoritmo 5.1 no subsistema (\bar{A}_c, \bar{b}_c) controlável para determinar a realimentação \bar{k}_1 dos estados controláveis x_c .
2. Determine

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a escolha de \bar{k}_2 não influi nos pólos de malha fechada, como pode ser visto em (5.20). Podemos escolher, portanto, $\bar{k}_2 = 0$.

3. A realimentação a ser implementada no par (A, b) para impor os pólos desejados em sua parte controlável é dada por

$$k = \bar{k}P^{-1}$$

Exemplo 5.4. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Sua matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathcal{C} = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\text{posto}(\mathcal{C}) = 2 < 3 = n$, o sistema é não controlável. Determinaremos uma transformação de variável $\bar{x} = P^{-1}x$ com

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

formada pelas duas primeiras colunas linearmente independentes de \mathcal{C} e com a terceira coluna escolhida de modo que P seja não singular. O par (\bar{A}, \bar{b}) fica

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \hline 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{array} \right] \quad \bar{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos $\bar{A}_{\bar{c}} = -3$. Portanto, a parte não controlável do sistema é estável e o sistema é estalizável. Vamos impor os pólos $\{-1, -2\}$ na parte controlável do sistema (\bar{A}_c, \bar{b}_c) . O polinômio característico de \bar{A}_c é

$$\Delta(s) = \det(sI - \bar{A}_c) = s^2 - s - 2 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

e para os autovalores desejados, o polinômio característico é

$$\Delta_f(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 = s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_2.$$

A matriz P_c que coloca (\bar{A}_c, \bar{b}_c) na forma canônica controlável é

$$P_c = [\bar{b}_c \quad \bar{A}_c \bar{b}_c] \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A realimentação da parte controlável (\bar{A}_c, \bar{b}_c) na base canônica controlável é

$$\tilde{k}_1 = [\bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1] = [4 \quad 4]$$

e a realimentação de (\bar{A}_c, \bar{b}_c) é

$$\bar{k}_1 = \tilde{k}_1 P_c^{-1} = [4 \quad 8].$$

Para o sistema (\bar{A}, \bar{b}) a realimentação é

$$\bar{k} = [\bar{k}_1 \quad 0] = [4 \quad 8 \mid 0].$$

Finalmente, a realimentação do sistema (A, b) é

$$k = \bar{k} P^{-1} = [0 \quad -4 \quad 0].$$

5.4 Realimentação de estados – Caso multivariável

Considere a planta descrita pelo sistema com n estados e m entradas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Na realimentação de estados, a entrada u é dada por

$$u = r - Kx, \tag{5.22}$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e r é o sinal de referência. Substituindo (5.22) em (5.21), temos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Br \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Teorema 5.4. O par $(A - BK, B)$, para qualquer matriz K real constante, é controlável se e somente se (A, B) for controlável.

A prova deste teorema é similar a prova do teorema 5.1. A única diferença é que devemos modificar (5.4) para

$$\mathcal{C}_f = \mathcal{C} \begin{bmatrix} I_m & -KB & -K(A - KB)B & -K(A - BK)^2 B \\ 0 & I_m & -KB & -K(A - BK)B \\ 0 & 0 & I_m & -KB \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix},$$

onde \mathcal{C}_f e \mathcal{C} são as matrizes de controlabilidade $n \times np$ com $n = 4$ e I_m é a matriz identidade de ordem m . Como a matriz $4m \times 4m$ a direita é não singular, \mathcal{C}_f tem posto n se e somente se \mathcal{C} tiver posto n . Assim, a propriedade de controlabilidade é preservada para qualquer realimentação de estados. No caso SISO, a propriedade de observabilidade, contudo, não pôde ser preservada. Vamos estender o teorema 5.3 para o caso matricial.

Teorema 5.5. Todos os autovalores de $(A - BK)$ podem ser arbitrariamente alocados (desde que autovalores complexos apareçam em pares complexo conjugados) pela seleção de K real constante se e somente se (A, B) for controlável.

Se (A, B) é não controlável, então (A, B) pode ser transformado na forma mostrada em (5.19) e todos os autovalores de \bar{A}_c não podem ser alterados por nenhuma realimentação de estados. Isto mostra a necessidade do teorema. A suficiência será mostrada na próxima subseção

5.4.1 Projeto cíclico

Neste projeto, transformamos o problema multivariável em um problema SISO e aplicamos o teorema 5.3. A matriz A é chamada *cíclica* se seu polinômio característico é igual ao seu polinômio mínimo (a realização é mínima).

Teorema 5.6. Se o par (A, B) for controlável e A for cíclica, então para quase todo vetor $v \in \mathbb{R}^m$, o par (A, Bv) com uma entrada é controlável.

Teorema 5.7. Se (A, B) for controlável, então para quase toda matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a matriz $(A - BK)$ tem somente autovalores distintos, e conseqüentemente é cíclica.

Com estes dois teoremas (que não serão demonstrados neste texto), podemos encontrar K para alocar todos os autovalores de $(A - BK)$ em qualquer posição desejada. Se A não for cíclica, introduzimos $u = w - K_1x$, como mostrado na figura 5.5, tal que $\bar{A} = A - BK_1$ em

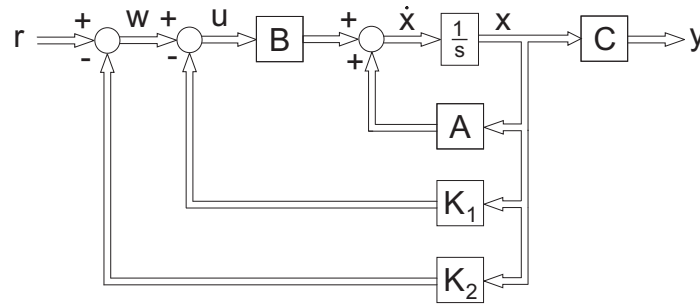


Figura 5.5: Realimentação de estados por projeto cíclico

$$\dot{x} = (A - BK_1)x + Bw = \bar{A}x + Bw \quad (5.23)$$

seja cíclica. Como (A, B) é controlável, (\bar{A}, B) também é. Assim, existe um vetor real $v \in \mathbb{R}^m$ tal que (\bar{A}, Bv) é controlável¹. Introduziremos outra realimentação de estados $w = r - K_2x$ com $K_2 = vk$, onde $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Então (5.23) fica

$$\dot{x} = (\bar{A} - BK_2)x + Br = (\bar{A} - Bvk)x + Br.$$

Como o par (\bar{A}, Bv) é controlável, os autovalores de $(\bar{A} - Bvk)$ podem ser alocados arbitrariamente pela seleção de k (teorema 5.3). Combinando as duas realimentações de estados $u = w - K_1x$ e $w = r - K_2x$ como

$$u = r - (K_1 + K_2)x = r - Kx$$

obtemos um $K = K_1 + K_2$ que impõem os autovalores desejados. Isso prova a suficiência do teorema 5.5.

Algoritmo 5.3. Para alocar os autovalores do par (A, B) controlável com $m > 1$ entradas aplicamos os seguintes passos

1. Escolha $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $v \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ tal que o par (\bar{A}, Bv) , $\bar{A} = A - BK_1$, seja controlável.

¹A escolha de K_1 e v não é única. Elas podem ser escolhidas arbitrariamente com probabilidade 1 de atenderem os requerimentos

2. Determine a realimentação de estados k que coloque autovalores do par (\bar{A}, Bv) SISO nas posições desejadas aplicando o algoritmo 5.1
3. A realimentação que coloca os autovalores do sistema (A, B) nas posições desejadas é dada por

$$K = K_1 + K_2 = K_1 + vk$$

Observação 5.1. A redução de um sistema de várias entradas a um sistema de uma entrada apenas é uma péssima política na prática porque tende a gerar desperdício de energia nas leis de controle. A própria idéia de imposição de pólos é discutível como técnica de projeto. As técnicas de otimização das teorias de controle ótimo/robusto permitem realizar projetos muito mais efetivos nas aplicações.

Algoritmo 5.4. Se o par (A, B) for estabilizável

1. Encontre a matriz P que coloca o sistema como em (3.12). Aplique o algoritmo 5.3 no subsistema (\bar{A}_c, \bar{B}_c) controlável para determinar a realimentação \bar{K}_1 dos estados controláveis x_c .
2. Determine

$$\bar{K} = [\bar{K}_1 \mid 0].$$

3. A realimentação a ser implementada no par (A, B) para impor os pólos desejados em sua parte controlável é dada por

$$K = \bar{K}P^{-1}$$

Exemplo 5.5. Determinar uma realimentação de estados que coloque os pólos em $\{-1, -1-j, -1+j\}$ para o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 28 \\ 6 & 6 & 34 \\ 6 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 5 & -4 & 5 & -5 & 5 & 23 \\ -6 & 5 & -6 & -6 & -6 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right].$$

Como $\text{posto}(\mathcal{C}) = 3 = n$, o sistema é controlável.

Escolhemos

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de modo que (\bar{A}, \bar{b}) , com

$$\bar{A} = A - BK_1 = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 28 \\ 6 & 6 & 34 \\ 6 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad e \quad \bar{b} = Bv,$$

seja controlável.

O polinômio característico de \bar{A} é

$$\Delta(s) = \det(sI - \bar{A}) = s^3 + 2s^2 - s - 2 = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3$$

e o polinômio característico da matriz com os autovalores desejados é

$$\Delta_f(s) = (s+1)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = s^3 + \bar{\alpha}_1 s^2 + \bar{\alpha}_2 s + \bar{\alpha}_3.$$

A matriz P que coloca o sistema na forma canônica controlável é

$$P = [\bar{b} \quad \bar{A}\bar{b} \quad \bar{A}^2\bar{b}] \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 28 \\ -1 & 0 & 34 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 2 & 1 \\ 35 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A realimentação para o sistema na forma canônica controlável é

$$\bar{k} = [\bar{\alpha}_3 - \alpha_3 \quad \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1] = [4 \quad 5 \quad 1]$$

e a realimentação para (\bar{A}, \bar{b}) é dada por

$$k = \bar{k}P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} & \frac{10}{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a realimentação para o sistema (A, B) é

$$K = K_1 + vk = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} & \frac{10}{3} & 3 \\ \frac{13}{3} & \frac{10}{3} & 3 \end{bmatrix}$$

5.5 Controle ótimo linear quadrático

Consideraremos um sistema de controle na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{5.24}$$

onde o vetor entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e o vetor $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Como vimos, se o sistema for controlável, é possível impor pólos livremente através de realimentação de estado. Se o sistema não for controlável, é possível pelo menos impor pólos na parte controlável do sistema. Do ponto de vista das aplicações práticas, a imposição de pólos pode gerar leis de controle que desperdiçam energia, já que nenhum critério de otimização é acrescentado ao problema. Podemos dizer que, determinada a realimentação K que impõe um certo conjunto de pólos, a única característica que podemos garantir que o sistema em malha fechada possui é o conjunto de pólos impostos. Não há nada que garanta que outra lei de controle em malha fechada não forneça o desempenho desejado, mas com uma economia de energia considerável. É claro também que os atuadores possuem limitações físicas e que leis de controle mal projetadas podem levar o sistema a saturações e, como consequência, instabilidades causadas por estas não linearidades. O controle ótimo linear quadrático produz realimentações estabilizantes que otimizam um funcional que leva em conta duas ponderações

- A integral de uma medida quadrática do estado.
- A integral de uma medida quadrática da entrada.

Para isso definimos o seguinte problema de controle ótimo.

Definição 5.1 (Problema de controle ótimo linear quadrático). Dada a condição inicial x_0 para o sistema, queremos encontrar a entrada $u^*(.)$ que minimiza o funcional

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (5.25)$$

sujeito à restrição (5.24). Em (5.25), as matrizes Q e R são simétricas, $Q \geq 0$ e $R > 0$

Observação 5.2. Note que se existir uma função de controle $u^*(t)$ que minimize o funcional (5.25), estaremos gerando uma entrada que leva o sistema para a origem e ainda leva em conta ponderações e compromissos entre a energia despendida pelos “esforços” de controle. Para que (5.25) seja minimizado é preciso que a norma de $x(t)$ seja a menor possível através da aplicação do menor esforço possível $u(t)$.

5.5.1 Realimentação completa dos estados

Para obtenção do regulador linear quadrático, assumimos que a planta está escrita no espaços de estados na forma $\dot{x} = Ax + Bu$ e que todos os n estados de x estão disponíveis para realimentação. O ganho da realimentação está na matriz K , implementada como $u = K(x - r)$. A dinâmica do sistema em malha fechada pode ser escrita como

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKr,$$

onde r representa o vetor dos estados desejados e serve como uma entrada externa para o sistema em malha fechada.

5.5.2 O princípio do máximo

Primeiro vamos desenvolver um procedimento geral para resolver problemas de controle ótimo, usando cálculo das variações. Começaremos assumindo um tempo final fixo t_f .

$$\begin{aligned} \text{Encontre } u(t) \text{ que minimize } J &= \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \\ \text{Sujeito à } \dot{x} &= f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

onde $\psi(x(t_f))$ é o custo terminal; o custo total J é a soma do custo terminal e uma integral ao longo da trajetória. Assumimos que $L(x(t), u(t), t)$ é não negativo. O primeiro passo é aumentar o funcional usando o vetor coestado $\lambda(t)$:

$$\bar{J} = \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} (L + \lambda^T(f - \dot{x}))dt.$$

Claramente, $\lambda(t)$ pode ser qualquer, pois multiplica $f - \dot{x} = 0$. Ao longo da trajetória ótima, variações em J e portanto, em \bar{J} devem sumir. Isso segue do fato que J é escolhido para ser contínuo em x , u e t . Escrevemos as variações como

$$\delta \bar{J} = \psi_x(x(t_f))\delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [L_x\delta x + L_u\delta u + \lambda^T f_x\delta x + \lambda^T f_u\delta u - \lambda^T \delta \dot{x}]dt,$$

onde os subscritos denotam derivadas parciais. O último termo pode ser calculado usando integração por partes

$$- \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \delta \dot{x} dt = -\lambda^T(t_f)\delta x(t_f) + \lambda^T(t_0)\delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x dt,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \delta \bar{J} &= \psi_x(x(t_f))\delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (L_u + \lambda^T f_u)\delta u dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} (L_x + \lambda^T f_x + \dot{\lambda}^T)\delta x dt - \lambda^T(t_f)\delta x(t_f) + \lambda^T(t_0)\delta x(t_0). \end{aligned}$$

O último termo é zero, pois não podemos variar a condição inicial do estado – este valor é fixo. A forma de escrever \bar{J} deixa claro que há três componentes da variação que devem ser independentemente nulos (pois podemos variar x , u ou $x(t_f)$):

$$L_u + \lambda^T f_u = 0 \quad (5.26)$$

$$L_x + \lambda^T f_x + \dot{\lambda}^T = 0 \quad (5.27)$$

$$\psi_x(x(t_f)) - \lambda^T(t_f) = 0. \quad (5.28)$$

De (5.27) e (5.28) encontramos

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^T &= -L_x - \lambda^T f_x \\ \lambda^T(t_f) &= \psi_x(x(t_f)). \end{aligned}$$

5.5.3 Solução do regulador linear quadrático

No caso do regulador linear quadrático (com custo terminal nulo), temos $\psi = 0$ e

$$L = \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u,$$

onde o requerimento que $L \geq 0$ implicam que Q e R devem ser positivos definidos. No caso da planta com dinâmica linear, temos

$$\begin{aligned} L_x &= x^T Q \\ L_u &= u^T R \\ f_x &= A \\ f_u &= B, \end{aligned}$$

tal que

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \dot{\lambda} &= -Qx - A^T \lambda \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \lambda(t_f) &= 0 \\ Ru + B^T \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Como o sistema é claramente linear, vamos tentar uma solução do tipo $\lambda = Px$. Substituindo em (5.30), usando (5.29) e substituindo u de (5.31), obtemos

$$PAx + A^T Px + Qx - PBR^{-1}B^T Px + \dot{P}x = 0,$$

que é válida para todo x . Esta equação matricial é chamada equação de Riccati. Sua solução para o estado estacionário é

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0.$$

A solução P desta equação é necessária para calcular a realimentação ótima K . Da equação (5.31), temos

$$u = -R^{-1}B^T Px$$

Observação 5.3. As vantagens do controle ótimo linear quadrático são:

- Robustez: Margem de ganho $[1/2, \infty)$ e margem de fase $\pi/3$ radianos;
- Permite a geração de realimentações de estado estabilizantes que levam em conta o “custo do controle”;
- Permitem uma certa ação “controlada” sobre os pólos de malha fechada. Para isso é preciso entender os princípios de escolha das matrizes Q e R ;
- Algoritmos de solução da equação de Riccati numericamente estáveis e implementados do MATLAB estão disponíveis.

Exemplo 5.6. Considere o sistema da figura 5.6(a). Assumindo que o sinal de controle seja

$$u(t) = -Kx(t),$$

determine o ganho ótimo de realimentação K tal que o seguinte índice de performance seja minimizado

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^2) dt,$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mu \geq 0.$$

Da figura 5.6(a), encontramos a equação de estados do sistema

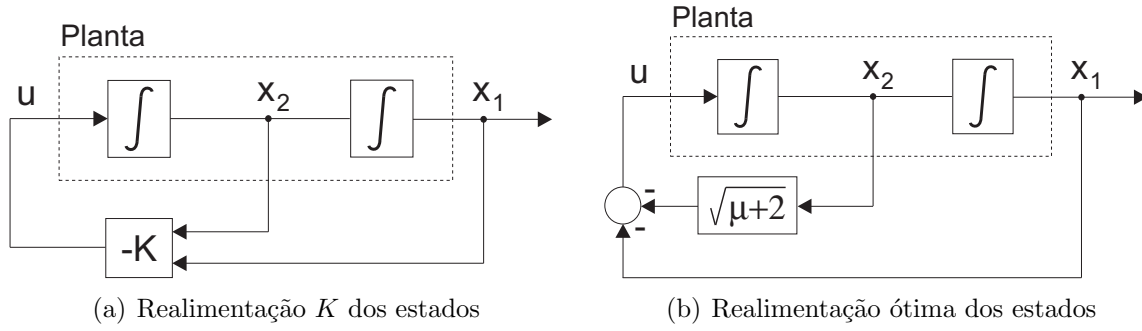


Figura 5.6: Controle ótimo de uma planta

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos resolver a equação de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Observando que a matriz A é real e a matriz Q é real simétrica, concluímos que a matriz P é real simétrica. Assim, podemos escrever a equação de Riccati como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta equação pode ser simplificada para

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de onde podemos obter as três seguintes equações

$$\begin{aligned} 1 - p_{12}^2 &= 0 \\ p_{11} - p_{12}p_{22} &= 0 \\ \mu + 2p_{12} - p_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo simultaneamente estas três equações para p_{11} , p_{12} e p_{22} , de modo que P seja positiva definida, obtemos

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}.$$

O ganho de realimentação ótimo K é dado por

$$K = R^{-1}B^T P = [1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}.$$

Assim, a lei de controle ótimo é

$$u = -Kx = -x_1 - \sqrt{\mu+2}x_2.$$

A figura 5.6(b) é um diagrama de blocos deste sistema.

Como o polinômio característico é

$$\det(sI - A + BK) = s^2 + \sqrt{\mu+2}s + 1 = 0,$$

se $\mu = 1$, os pólos do sistema em malha fechada estão alocados em

$$s = -0,866 + j, \quad s = -0,866 - j.$$

Capítulo 6

Observadores de estado e realimentação da saída

6.1 Observadores de estado

No capítulo anterior, vimos que a realimentação de estados poderia alocar os pólos de malha fechada arbitrariamente. Frequentemente, no entanto, nem todas as variáveis de estado estão disponíveis para conexão direta ou sua medida depende de sensores caros ou não disponíveis. Neste caso, para aplicar a realimentação de estados, devemos projetar um sistema chamado *estimador ou observador de estados*, tal que sua saída é uma estimação dos estados.

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.1)$$

$$y = Cx, \quad (6.2)$$

onde A , B e C são dados e a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ podem ser medidas. O estado x , contudo, não pode ser medido e o estado inicial x_0 é desconhecido. O problema é estimar x a partir de u e y , conhecendo A , B e C .

Admita que o estado x possa ser aproximado pelo estado \hat{x} do sistema

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu + Hy, \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0. \quad (6.3)$$

Dizemos que esse sistema é um observador de estados se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

onde $e(t)$ é o erro de observação, definido por

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t). \quad (6.4)$$

Derivando (6.4) e substituindo (6.1) e (6.3), obtemos

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + Hy(t) - Ax(t) - Bu(t). \quad (6.5)$$

Substituindo (6.2) em (6.5), obtemos

$$\dot{e} = F\hat{x}(t) - (A - HC)x(t) + (G - B)u(t).$$

Escolhendo $G = B$ e $F = A - HC$ e substituindo em (6.3) e (6.5), temos que

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC)\hat{x} + Bu + Hy \quad (6.6)$$

$$\dot{e}(t) = (A - HC)e(t) \quad (6.7)$$

A equação do observador (6.6) pode ser representada pelo diagrama da figura 6.1.

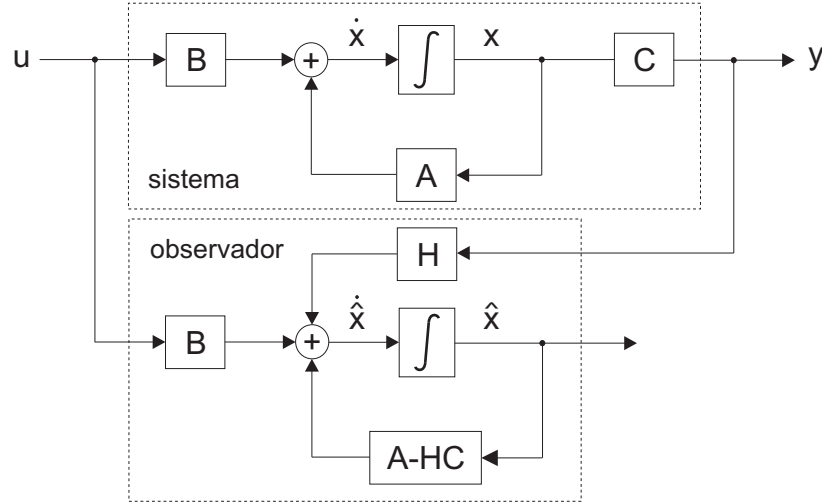


Figura 6.1: Observador de estados

Se todos os autovalores de $(A - HC)$ puderem ser arbitrariamente alocados, então o erro de estimação dado por (6.7) tende para zero, ou equivalentemente, o estado estimado tende para o estado atual. Por exemplo, se todos os autovalores de $(A - HC)$ tem parte real negativa menor que $-\sigma$, então todos os elementos de e irão tender a zero a taxas maiores que $e^{-\sigma t}$. Portanto, mesmo se houver um grande erro entre \hat{x}_0 e x_0 no instante inicial t_0 , os estados estimados tenderão aos estados atuais rapidamente. Assim, não é necessário calcular o estado inicial do sistema original. Além disso, se um observador for usado na realimentação de estados, então os autovalores do observador devem ser mais rápidos que os autovalores desejados para a realimentação de estados.

Teorema 6.1. Considere o par (A, C) . Todos os autovalores de $(A - HC)$ podem ser arbitrariamente alocados selecionando um vetor real constante H se e somente se (A, C) for observável.

Este teorema pode ser provado diretamente ou indiretamente usando a dualidade. O par (A, C) é observável se e somente se (A^T, C^T) for controlável. Se (A^T, C^T) for controlável, todos os autovalores de $(A^T - C^T K)$ podem ser arbitrariamente alocados selecionando um ganho constante K . O transposto de $(A^T - C^T K)$ é $(A - K^T C)$. Assim temos que $H = K^T$. Concluindo, o procedimento para calcular o ganho da realimentação de estados pode ser usado para calcular o ganho H do observador.

Algoritmo 6.1. Para alocar arbitrariamente os autovalores em um par (A, C) observável, devemos seguir os seguintes passos

1. Faça $A_1 = A^T$, $B_1 = C^T$.

2. Determine K tal que $A_1 - B_1K$ tenha os autovalores desejados. Para isso, aplique o algoritmo 5.1 no par (A_1, B_1) se o sistema for SISO ou o algoritmo 5.3 for MIMO.
3. Faça $H = K^T$

Observação 6.1. O observador que foi apresentado é chamado de *observador de ordem plena*. Ele é projetado para estimar todas as variáveis de estado. Na prática, algumas variáveis de estado podem ser medidas com exatidão e não precisam ser estimadas. Nesse caso é possível projetar *observadores de ordem reduzida*. Se a medição das variáveis de saída envolver ruídos significativos e for relativamente inexata, a utilização de um observador de ordem plena pode resultar em melhor desempenho do sistema. Nesse curso não será discutido o projeto de observadores de ordem reduzida.

Observação 6.2. Podemos determinar uma injeção da saída H pela teoria de controle ótimo, apresentada na seção 5.5, procedendo da seguinte forma

1. Determine o sistema dual $A_1 = A^T$ e $B_1 = C^T$.
2. Escolhemos as matrizes Q e R de modo que $(A_1 + B_1K)$, onde $K = -R^{-1}B^TP$, tenha diversas propriedades desejadas.
3. Faça $H = K^T$.

6.1.1 Detectabilidade

Se o sistema for observável, todos os autovalores de $(A - HC)$ podem ser arbitrariamente alocados pela introdução de uma injeção da saída. Vamos discutir o caso quando o sistema não for observável. Todo sistema não observável pode ser transformado em

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CP = [\bar{C}_o \quad 0],$$

onde (\bar{A}_o, \bar{C}_o) é observável. Seja H uma injeção da saída arbitrária. Escrevendo H na nova base, teremos

$$\bar{H} = P^{-1}H = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\bar{A} - \bar{H}\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o - \bar{H}_1\bar{C}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} - \bar{H}_2\bar{C}_o & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix}.$$

Da forma bloco triangular da matriz $(\bar{A} - \bar{H}\bar{C})$ segue que seus autovalores são dados pela união dos autovalores de $\bar{A}_{\bar{o}}$ e $(\bar{A}_o - \bar{H}_1\bar{C}_o)$. Em outras palavras, os autovalores da parte não observável $\bar{A}_{\bar{o}}$ sempre estão presentes no conjunto de autovalores de $(\bar{A} - \bar{H}\bar{C})$. Por outro lado, os autovalores de $(\bar{A}_o - \bar{H}_1\bar{C}_o)$ podem ser impostos livremente pela escolha de \bar{H}_1 , já que o par (\bar{A}_o, \bar{C}_o) é observável.

Concluindo, um sistema (A, C) é detectável se e somente se sua parte não observável $\bar{A}_{\bar{o}}$ for estável. Além disso, o sistema dual (A_1, B_1) é estabilizável, onde $A_1 = A^T$ e $B_1 = C^T$.

Algoritmo 6.2. Se o par (A, C) for detectável

1. Faça $A_1 = A^T$, $B_1 = C^T$
2. Determine K que impõe os autovalores desejados na parte controlável de A_1 . Para isso, aplique o algoritmo 5.2 no par (A_1, B_1) se o sistema for SISO ou o algoritmo 5.4 se o sistema for MIMO.
3. Calcule a injeção da saída $H = K^T$ que impõe os autovalores na parte observável de A .

6.2 Realimentação de estados estimados

Considere uma planta descrita pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Se (A, B) for controlável, a realimentação de estados $u = r - Kx$ pode alocar os autovalores de $(A - BK)$ em qualquer posição desejada. Se as variáveis de estado não estão disponíveis para realimentação, podemos projetar um observador de estados. Se (A, C) for observável, um observador de estados com autovalores arbitrários pode ser construído. Considere o observador de estados

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC)\hat{x} + Bu + Hy.\tag{6.9}$$

O estado estimado em (6.9) pode tender ao estado atual em (6.8) com qualquer taxa pela seleção da matriz H .

A realimentação de estado é projetada para o estado em (6.8). Se x não está disponível, é natural aplicar o ganho de realimentação para o estado estimado, ou seja,

$$u = r - K\hat{x},\tag{6.10}$$

como mostrado na figura 6.2. A conexão é chamada configuração *observador-controlador*. Três questões podem ser levantadas sobre esta conexão:

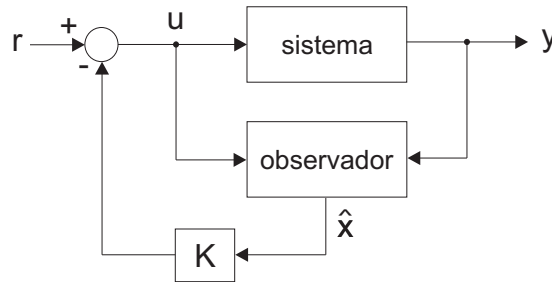


Figura 6.2: Configuração observador-controlador

1. Os autovalores de $(A - BK)$ foram obtidos de $u = r - Kx$. Teremos ainda o mesmo conjunto de autovalores usando $u = r - K\hat{x}$?
2. Os autovalores do observador serão afetados pela conexão?
3. Qual o efeito do observador na função de transferência de r para y ?

Para responder estas questões, devemos desenvolver uma equação de estados para descrever o sistema da figura 6.2. Substituindo (6.10) em (6.8) e (6.9), temos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BK\hat{x} + Br \\ \dot{\hat{x}} &= (A - HC)\hat{x} + B(r - K\hat{x}) + HCx.\end{aligned}$$

Elas podem ser combinadas como

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - HC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r \\ y &= [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Esta equação de estados de dimensão $2n$ descreve o sistema realimentado da figura 6.2. Não é fácil responder as questões propostas a partir desta equação. Vamos introduzir a seguinte transformação de equivalência:

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}.$$

Calculando P^{-1} , que é a própria matriz P , e usando (2.37), podemos obter a seguinte equação de estado equivalente:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

A matriz “ A ” em (6.12) é bloco triangular; portanto seus autovalores é dos autovalores de $(A - BK)$ e $(A - HC)$. Assim, colocar um observador de estados não afeta os autovalores da realimentação de estados original; nem os autovalores do observador de estado são afetados pela conexão. Então o projeto da realimentação de estados e o projeto do observador de estados podem ser feitos independentemente. Este é o chamado *princípio da separação*.

A equação de estado em (6.12) está na forma apresentada em (3.12); assim, (6.12) não é controlável e a função de transferência de (6.12) é igual a função de transferência da equação reduzida

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Br \\ y &= Cx\end{aligned}$$

ou

$$G_f(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$$

(teorema 3.5). Esta é a função de transferência do sistema com realimentação de estados sem usar um observador de estados. Portanto, o observador é completamente cancelado na função de transferência de r para y . Isto tem uma explicação simples. No cálculo da função de transferência, todos os estados iniciais são assumidos nulos. Conseqüentemente, temos $x(0) = \hat{x}(0) = 0$, que implica $x(t) = \hat{x}(t)$ para todo t . Assim, não há diferença na função de transferência de r para y se um observador de estados é empregado ou não.

Observação 6.3. O princípio da separação determinística parece nos dizer que não há desvantagem alguma em não podermos realimentar o estado. Isso porque na sua dedução,

não há nenhuma consideração sobre a robustez do esquema de controle. Em geral, a realimentação de estado tem robustez muito maior que o esquema de controle observador-controlador.

Observação 6.4. Considere uma perturbação não conhecida $w(t)$ como entrada e $y(t)$ como saída (fazendo $v(t) = 0$), como mostrado na figura 6.3. Então, a matriz de transferência $G(s)$ tal que $Y(s) = G(s)W(s)$ conterá os pólos de $(A - BF)$ e de $(A - HC)$.

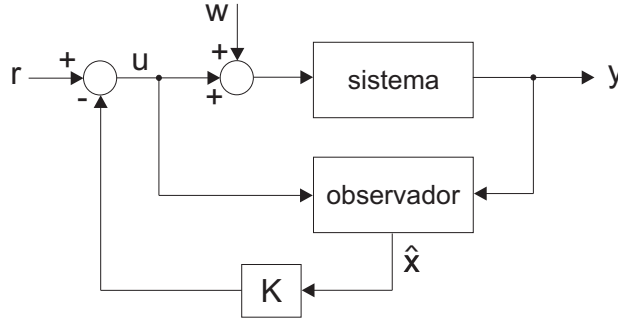


Figura 6.3: Perturbação desconhecida

Exemplo 6.1. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 28 \\ 6 & 6 & 34 \\ 6 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

No exemplo 5.5 foi determinada uma realimentação de estados K que impunha os pólos $\{-1, -1 - j, -1 + j\}$ no sistema em malha fechada. Supondo agora que apenas as saídas y_1 e y_2 são medidas, vamos determinar um observador de estados com pólos também em $\{-1, -1 - j, -1 + j\}$. Para isso, vamos determinar uma realimentação de estados que imponha estes pólos para o sistema dual em malha fechada

A matriz de observabilidade do par (A, C) é dada por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & -2 \\ 11 & 9 & 0 \\ -12 & -10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $\text{posto}(\mathcal{O}) = 3 = n$, o sistema é observável. Assim, podemos aplicar o algoritmo 6.1. O sistema dual é

$$A_1 = A^T = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -5 & 6 & 5 \\ 28 & 34 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = C^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolhemos \hat{K}_1 e v como

$$\hat{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

para que o par

$$\hat{A}_1 = A_1 - B_1 \hat{K}_1 = A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -5 & 6 & 5 \\ 28 & 34 & -3 \end{bmatrix}, \quad \hat{b}_1 = B_1 v = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

seja controlável

$$\mathcal{C}_1 = [\hat{b}_1 \quad \hat{A}_1 \hat{b}_1 \quad \hat{A}_1^2 \hat{b}_1] = \begin{bmatrix} 5 & 11 & -13 \\ 4 & 9 & -11 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{posto}(\mathcal{C}_1) = 3 = n.$$

O polinômio característico de \hat{A}_1 é

$$\Delta(s) = \det(sI - \hat{A}_1) = s^3 + 2s^2 - s - 2 = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3,$$

e o polinômio característico desejado para a malha fechada é

$$\Delta_f(s) = (s+1)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = s^3 + \bar{\alpha}_1 s^2 + \bar{\alpha}_2 s + \bar{\alpha}_3.$$

A realimentação que impõe os pólos desejados para o sistema em dual na forma canônica controlável em malha fechada é

$$\hat{k}_1 = [\bar{\alpha}_3 - \alpha_3 \quad \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1] = [4 \quad 5 \quad 1].$$

A matriz que coloca o sistema na forma canônica controlável é

$$P = \mathcal{C}_1 \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & -13 \\ 4 & 9 & -11 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 21 & 5 \\ 3 & 17 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A realimentação que impões os pólos para o sistema (\hat{A}_1, \hat{b}_1)

$$k_1 = \hat{k}_1 P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{43}{3} & -\frac{52}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

A realimentação para o sistema (A_1, B_1) é

$$K_1 = \hat{K}_1 + v k_1 = \begin{bmatrix} \frac{43}{3} & -\frac{52}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{43}{3} & -\frac{52}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Concluindo, a injeção da saída H que impõe os autovalores de $A - HC$ é

$$H = K_1^T = \begin{bmatrix} \frac{43}{3} & \frac{43}{3} \\ -\frac{52}{3} & -\frac{52}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Capítulo 7

Descrição polinomial de sistemas

7.1 Descrição de sistemas

Considere o circuito mostrado na figura 7.1. Se escolhermos a tensão no capacitor e a corrente no indutor como variáveis de estado, podemos descrever o circuito através de uma equação de estados. Existe, contudo, outros métodos para desenvolver equações matemáticas para descrever o circuito. Por exemplo, se escolhermos as correntes de malha $\xi_1(t)$ e $\xi_2(t)$ como mostrado na figura e usar análise de malhas, podemos obter

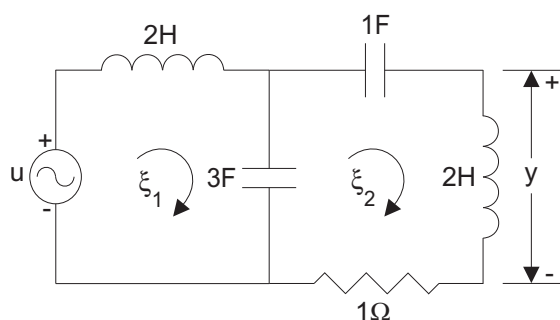


Figura 7.1: Circuito

$$\begin{aligned} \left(2s + \frac{1}{3s}\right) \hat{\xi}_1(s) - \frac{1}{3s} \hat{\xi}_2(s) &= \hat{u}(s) \\ -\frac{1}{3s} \hat{\xi}_1(s) + \left(\frac{1}{3s} + \frac{1}{s} + 2s + 1\right) \hat{\xi}_2(s) &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 6s^2 + 1 & -1 \\ -1 & 6s^2 + 3s + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(s) \\ \hat{\xi}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u}(s),$$

para descrever o circuito. A saída y é igual a $\hat{y}(s) = 2s\hat{\xi}_2(s)$ ou

$$\hat{y}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(s) \\ \hat{\xi}_2(s) \end{bmatrix} + 0 \cdot \hat{u}(s).$$

Este conjunto de equações pode ser escrito em uma forma geral como

$$T(s)\hat{\xi}(s) = U(s)\hat{u}(s) \quad (7.1)$$

$$\hat{y}(s) = V(s)\hat{\xi}(s) + W(s)\hat{u}(s), \quad (7.2)$$

onde $T(s)$, $U(s)$, $V(s)$ e $W(s)$ são, respectivamente, matrizes polinomiais $r \times r$, $r \times m$, $l \times r$ e $l \times m$; $\hat{u}(s)$ é o vetor das entradas $m \times 1$ e $\hat{y}(s)$ é o vetor das saídas $l \times 1$. A variável $\hat{\xi}(s)$ é um vetor $r \times 1$ e será chamada *pseudo-estado*. Para garantir uma solução única de (7.1)–(7.2), a matriz $T(s)$ é assumida ser não singular. O sistema de equações (7.1)–(7.2) é chamado descrição polinomial de um sistema. No domínio do tempo, este sistema de equações fica

$$T(p)\xi(t) = U(p)u(t)$$

$$y(t) = V(p)\xi(t) + W(p)u(t),$$

onde p representa d/dt e p^i representa d^i/dt^i . De (7.1) temos que $\hat{\xi}(s) = T^{-1}(s)U(s)\hat{u}(s)$. Substituindo em (7.2), temos

$$\hat{y}(s) = [V(s)T^{-1}(s)U(s) + W(s)]\hat{u}(s).$$

Assim, a matriz de transferência de (7.1)–(7.2) de u para y é

$$G(s) = V(s)T^{-1}(s)U(s) + W(s).$$

Disto, podemos ver que a equação de estado é um caso especial de (7.1)–(7.2) se fizermos $V(s) = C$, $T(s) = sI - A$, $U(s) = B$ e $W(s) = D$. A fração $G(s) = N(s)D(s)^{-1}(s)$ é um caso especial de (7.1)–(7.2) se fizermos $V(s) = N(s)$, $T(s) = D(s)$, $U(s) = I$ e $W(s) = 0$. A fração $G(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s)$ é também um caso especial de (7.1)–(7.2) se fizermos $V(s) = I$, $T(s) = D_l(s)$, $U(s) = N_l(s)$ e $W(s) = 0$. Assim esta descrição é mais geral que a descrição de estados.

Assumiremos ao longo do texto sistemas contínuos no tempo, com $G(s)$ sendo uma matriz $l \times m$ de funções racionais de s estritamente próprias. A interpretação para sistemas de tempo discreto requer nada mais que substituir todo s da transformada de Laplace por z da transformada- z .

7.2 Matrizes polinomiais

Uma matriz $P(s)$ $l \times m$ cujos elementos $p_{ij}(s)$ são polinômios em s com coeficientes reais é dita *matriz polinomial* em s . Uma matriz $Q(s)$ $l \times m$ cujos elementos $q_{ij}(s) = a_{ij}(s)/b_{ij}(s)$ ¹ são funções polinomiais racionais na variável s é dita *matriz racional* em s . A teoria que desenvolveremos a seguir é geral, podendo a variável s ser substituída, por exemplo, pela variável de Laplace “ s ” ou pelo operador “ p ” de diferenciação.

Seja $\mathbb{K}(s)$ o conjunto das funções racionais sobre s e $\mathbb{K}^n(s)$ o conjunto das n -uplas de elementos de $\mathbb{K}(s)$. Uma matriz polinomial $T(s)$ $n \times m$ pode ser considerada como uma transformação linear de $\mathbb{K}^m(s)$ em $\mathbb{K}^n(s)$. O *posto* de $T(s)$ será o número de vetores linha (ou coluna) linearmente independentes. Note que o posto será determinado pela maior ordem de um determinante menor não nulo. Por exemplo, sejam as matrizes

¹ $a_{ij}(s)$ e $b_{ij}(s)$ são polinômios em s com $b_{ij}(s)$ sendo um polinômio não nulo

$$P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+3 \\ s^2+3s+3 & s^2+5s+4 \end{bmatrix}, \quad Q(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+3 \\ s^2+3s+2 & s^2+5s+6 \end{bmatrix}.$$

Note que $\det P(s) = -2(s+1)$ e portanto, o posto de $P(s)$ é igual a 2. Por outro lado, $\det Q(s) = 0$ e portanto, o posto de $Q(s)$ é igual a 1, já que $(s+1)$ é um menor não nulo. Seja $T(s)$ polinomial com m linhas e n colunas. Note que $\text{posto } T(s) \leq \min\{n, m\}$. Dizemos que uma matriz polinomial $T(s)$ possui *posto pleno* quando $\text{posto } P(s) = \min\{n, m\}$. Dizemos que uma matriz polinomial $T(s)$ $n \times m$ possui *posto pleno para todo s* se para todo $s_0 \in \mathbb{C}$, $T(s)$ tem posto pleno. Por exemplo, a matriz $P(s)$ não possui posto pleno para todo s pois para $s_0 = -1$, temos que determinante de $P(-1)$ é nulo. No entanto, $P(s)$ possui posto pleno. A matriz

$$R(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & s+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possui posto pleno para todo s pois os dois determinantes menores $(s+1)$ e $-(s+2)$, extraídos respectivamente, das duas primeiras colunas e das duas últimas colunas, não se anulam simultaneamente. Já a matriz

$$V(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & (s+1)(s+2) \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não possui posto pleno para todo s pois todos os determinantes menores de ordem 2 se anulam para $s = 1$. No entanto, $V(s)$ possui posto pleno. Em geral, se $T(s)$ é uma matriz polinomial $n \times m$ com $\rho = \min\{n, m\}$ e $\{p_1(s), \dots, p_r(s)\}$ é o conjunto de determinantes menores de ordem ρ , podemos dizer que

- (i) $T(s)$ possui posto pleno se houver algum polinômio $p_i(s)$ não nulo.
- (ii) $T(s)$ possui posto pleno para todo s se os polinômios $\{p_1(s), \dots, p_r(s)\}$ são primos entre si (não se anulam simultaneamente para nenhum $s_0 \in \mathbb{C}$).

Uma matriz polinomial quadrada é dita ser *unimodular* se seu determinante for um polinômio constante não nulo. Note que uma matriz quadrada possui posto pleno para todo s se e somente se ela for unimodular (um polinômio não constante possui pelo menos uma raiz). Um exemplo de matriz $T(s)$ unimodular é

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ s+2 & 1 \end{bmatrix},$$

já que $\det T(s) = -1$.

7.2.1 Matrizes unimodulares e operações elementares

Nesta subseção mostraremos que toda matriz unimodular pode ser obtida da matriz identidade (e vice-versa) a partir de operações elementares de linha e coluna. São consideradas operações elementares:

- (i) Troca entre a linha (coluna) i e a linha (coluna) j .
- (ii) Multiplicação da linha (coluna) i por um número real não nulo α .

(iii) Adição a uma linha (coluna) i de um múltiplo polinomial de uma linha (coluna) j .

Note que as operações elementares não acrescentam raízes ao polinômio $\det T(s)$. De fato, a operação (i) troca o sinal do determinante, a operação (ii) multiplica o determinante por uma constante α real não nula e a operação (iii) não altera o determinante. As operações elementares de linhas (colunas) (i), (ii) e (iii) são, respectivamente, denotadas por

$$(i) \quad l_i \leftarrow l_j \quad (c_i \leftarrow c_j).$$

$$(ii) \quad l_i \leftarrow \alpha l_i \quad (c_i \leftarrow \alpha c_i).$$

$$(iii) \quad l_i \leftarrow l_i + p(s)l_j \quad (c_i \leftarrow c_i + p(s)c_j).$$

É fácil verificar que cada operação elementar de linha (coluna) equivale à multiplicação à esquerda (direita) por matrizes unimodulares adequadas. Por exemplo, no caso em que as matrizes são 2×2 é fácil ver que as operações (i), (ii) e (iii) são realizadas pela multiplicação à esquerda pelas seguintes matrizes:

$$(i) \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ troca entre a primeira e a segunda linhas.}$$

$$(ii) \quad E_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ multiplica a primeira linha por } \alpha.$$

$$(iii) \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & p(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ soma à primeira linha o produto de } p(s) \text{ pela segunda linha.}$$

Proposição 7.1. As seguintes afirmativas são equivalentes para uma matriz polinomial quadrada $W(s)$

- (i) $W(s)$ pode ser obtida da identidade por um número finito de operações elementares.
- (ii) $\det W(s)$ é um polinômio constante não nulo (número real não nulo).
- (iii) $W^{-1}(s)$ é uma matriz polinomial.

Demonstração.

(i) \Rightarrow (ii) Lembremos que cada operação elementar equivale a multiplicar a matriz por uma outra matriz W_i cujo determinante é um número real. Como o determinante do produto é o produto dos determinantes, segue-se que (ii) é verdadeiro.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Como $W^{-1}(s) = \text{adj}[W(s)] / \det[W(s)]$ e $\text{adj } W(s)$ é uma matriz polinomial, é claro que (ii) \Rightarrow (iii). Se $W^{-1}(s)$ é polinomial, segue-se que para todo $s_0 \in \mathbb{C}$ temos que $W^{-1}(s_0)$ é bem definida e é a inversa de $W(s_0)$. Logo $\det W(s)$ não pode se anular para nenhum $s \in \mathbb{C}$ e portanto, (iii) \Rightarrow (ii).

(ii) \Rightarrow (i) Consequência do fato da forma de Smith de $W(s)$ ser igual a identidade, como veremos adiante.

□

7.2.2 Máximo divisor comum à direita (MDCd)

Os divisores comuns matriciais são úteis para caracterização de observabilidade e controlabilidade de descrições polinomiais. Tal conceito generaliza a noção de máximo divisor comum (mdc) de polinômios para matrizes polinomiais. Nesta subseção fixaremos as idéias no que diz respeito aos MDCd. Não é difícil obter os resultados duais relativos ao MDCe pela troca da palavra *direita* por *esquerda*, *linha* por *coluna* e a ordem de algumas multiplicações matriciais. Na prática podemos obter os resultados análogos para o MDCe de um par de matrizes $A(s)$ e $B(s)$ se aplicarmos os resultados sobre o MDCd para o par de matrizes $A^T(s)$ e $B^T(s)$.

Definição 7.1. Sejam $N(s)$ e $D(s)$ um par de matrizes polinomiais, respectivamente, $l \times m$ e $m \times m$. Um *máximo divisor comum à direita* (MDCd) é uma matriz quadrada $R(s)$ $m \times m$, tal que

- (i) $R(s)$ é um *divisor comum à direita*, isto é

$$\begin{aligned} N(s) &= \bar{N}(s)R(s) \\ D(s) &= \bar{D}(s)R(s) \end{aligned}$$

onde $\bar{N}(s)$ e $\bar{D}(s)$ são matrizes polinomiais, respectivamente, $l \times m$ e $m \times m$.

- (ii) Se $R_1(s)$ for um outro divisor comum à direita, então $R_1(s)$ é divisor de $R(s)$, isto é, existe $W(s)$ polinomial tal que

$$R(s) = W(s)R_1(s).$$

Teorema 7.1. Suponha que $N(s)$ seja uma matriz polinomial $l \times m$ e que $D(s)$ seja uma matriz polinomial $m \times m$. Se uma matriz polinomial unimodular $U(s)$ $(l+m) \times (l+m)$ e uma matriz polinomial $R(s)$ $m \times m$ forem tais que

$$U(s) \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

então $R(s)$ é o maior divisor comum à direita de $N(s)$ e $D(s)$.

Demonstração. Particionando $U(s)$ na forma

$$U(s) = \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Então a matriz polinomial $U^{-1}(s)$ pode ser similarmente particionada como

$$U^{-1}(s) = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1}(s) & U_{12}^{-1}(s) \\ U_{21}^{-1}(s) & U_{22}^{-1}(s) \end{bmatrix}.$$

Usando esta notação para reescrever (7.3), temos

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1}(s) & U_{12}^{-1}(s) \\ U_{21}^{-1}(s) & U_{22}^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$D(s) = U_{11}^{-1}(s)R(s), \quad N(s) = U_{21}^{-1}(s)R(s).$$

Portanto, $R(s)$ é um divisor comum à direita de $N(s)$ e $D(s)$. Mas de (7.3) e (7.4),

$$R(s) = U_{11}D(s) + U_{12}(s)N(s), \quad (7.5)$$

Assim, se R_1 for outro divisor comum à direita, isto é, se $N(s) = N_1(s)R_1(s)$ e $D(s) = D_1(s)R_1(s)$, segue-se que

$$R(s) = U_{11}D_1(s)R_1(s) + U_{12}(s)N_1(s)R_1(s) = (U_{11}(s)D_1(s) + U_{12}(s)N_1(s))R_1(s), \quad (7.6)$$

logo $R(s) = W(s)R_1(s)$, onde $W(s) = U_{11}(s)D_1(s) + U_{12}(s)N_1(s)$. Assim, $R_1(s)$ é um divisor de $R(s)$ e portanto, $R(s)$ é um MDCd.

□

Note que $R(s)$ não é único (um MDCd não possui unicidade). No entanto, se $R_1(s)$ e $R_2(s)$ forem MDCd's, existem matrizes polinomiais $W_1(s)$ e $W_2(s)$ tais que

$$\begin{aligned} R_1(s) &= W_1(s)R_2(s) \\ R_2(s) &= W_2(s)R_1(s). \end{aligned}$$

Em geral não podemos afirmar que $W_1(s)$ é inversa de $W_2(s)$ ou que $W_1(s)$ e $W_2(s)$ são unimodulares. No entanto, tal fato é verdadeiro no caso em que pudermos exibir um MDCd não singular.

Proposição 7.2. Sejam $R_1(s)$, $R_2(s)$ MDCd's de um par $N(s)$, $D(s)$. Então, se $R_1(s)$ for não singular, $R_2(s)$ também o é:

$$R_2(s) = W(s)R_1(s),$$

onde $W(s)$ é uma matriz unimodular. Em outras palavras, os MDCd's diferem por fatores unimodulares à esquerda.

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} R_1(s) &= W_1(s)R_2(s) \\ R_2(s) &= W_2(s)R_1(s), \end{aligned}$$

portanto,

$$R_1(s) = W_1(s)W_2(s)R_1(s). \quad (7.7)$$

Assim, multiplicando-se a equação (7.15) à esquerda pela matriz racional $R_1^{-1}(s)$ teremos que $W_1(s)W_2(s) = I$. Logo a inversa de $W_1(s)$, $W_1^{-1}(s) = W_2(s)$, é polinomial e vice-versa. Portanto, $W_1(s)$ e $W_2(s)$ são unimodulares.

□

Observação 7.1. Os casos mais importantes que estudaremos serão casos onde a matriz $D(s)$ do par $N(s)$, $D(s)$ é não singular, isto é, $\det D(s)$ é um polinômio não nulo. Nesse caso, se $R(s)$ for um MDCd de $N(s)$, $D(s)$, a equação $D(s) = \bar{D}(s)R(s)$ implica que $\det D(s) = \det \bar{D}(s) \det R(s)$. Logo $\det R(s)$ não pode ser nulo e o resultado da proposição 7.2 poderá ser aplicado.

Proposição 7.3. Se $R(s)$ possui posto pleno, onde

$$R(s) = \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}.$$

Então todos os MDCd's são não singulares e diferem por fatores unimodulares à esquerda.

Demonstração. Seja $U(s)$ uma matriz unimodular tal que

$$U(s) \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Do teorema 7.1, temos que $R(s)$ é um MDCd. Como $U(s)$ é não singular ($U(s)$ é unimodular), segue-se da álgebra linear que o posto de $U(s)T(s)$ é pleno. Logo $R(s)$ é não singular e da proposição 7.2 teremos o resultado desejado. \square

7.2.3 Matrizes primas à direita

Nesta subseção estudaremos o conceito de matrizes primas à direita como uma generalização do conceito de polinômios primos entre si.

Definição 7.2. Dizemos que um par de matrizes polinomiais $N(s)$, $D(s)$, respectivamente, $l \times m$ e $m \times m$ é *primo à direita* quando todos os seus MDCd's são unimodulares.

Observação 7.2. Pela proposição 7.2, se um MDCd é unimodular, todos os outros o serão.

Teorema 7.2. Para uma matriz polinomial $N(s)$ e uma matriz polinomial $D(s)$ não singular $m \times m$, as seguintes afirmações são equivalentes.

- (i) As matrizes polinomiais $N(s)$ $l \times m$ e $D(s)$ são primas à direita.
- (ii) Existe uma matriz polinomial $X(s)$ $m \times l$ e uma matriz polinomial $Y(s)$ $m \times m$ que satisfazem a chamada *identidade de Bezout*

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m. \quad (7.8)$$

- (iii) Para todo número complexo s_0 ,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} D(s_0) \\ N(s_0) \end{bmatrix} = m. \quad (7.9)$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que (i) implica (ii). Se $N(s)$ e $D(s)$ forem primas à direita, então a redução para a forma linha de Hermite como em (7.3) resulta matrizes polinomiais $U_{11}(s)$ e $U_{12}(s)$ tais que

$$U_{11}(s)D(s) + U_{12}(s)N(s) = I_m,$$

e esta tem a forma de (7.8).

Para provar que (ii) implica (iii), escrevemos a condição (7.8) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = I_m.$$

Se s_0 for um número complexo tal que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} D(s_0) \\ N(s_0) \end{bmatrix} < m,$$

então temos uma contradição.

Para mostrar que (iii) implica (i), suponha que (7.9) seja válida e $R(s)$ seja um divisor comum de $N(s)$ e $D(s)$. Então para alguma matriz polinomial $\bar{N}(s)$ $l \times m$ e alguma matriz polinomial $\bar{D}(s)$ $m \times m$,

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}(s) \\ \bar{N}(s) \end{bmatrix} R(s).$$

Se $\det R(s)$ for um polinômio de grau pelo menos 1 e s_0 for uma raiz deste polinômio, então $R(s_0)$ é uma matriz complexa com posto incompleto. Então temos a contradição

$$\text{posto} \begin{bmatrix} D(s_0) \\ N(s_0) \end{bmatrix} \leq \text{posto } R(s_0) < m.$$

Portanto, $\det R(s)$ é uma constante não nula, isto é, $R(s)$ é unimodular. Isto prova que $N(s)$ e $D(s)$ são primos à direita. □

7.2.4 Matrizes estáveis

Esta subseção se destina somente à definição de matrizes estáveis e estavelmente primas. Tal definição servirá para a caracterização de estabilizabilidade e detectabilidade de descrições polinomiais.

Definição 7.3. Um polinômio $p(s)$ é dito ser *estável* se as suas raízes estão no semiplano complexo de parte real estritamente negativa. Note que um polinômio constante não nulo é considerado estável.

Definição 7.4. Uma matriz quadrada polinomial $T(s)$ é dita ser *estável* se seu determinante $\det T(s)$ for um polinômio estável.

Definição 7.5. Duas matrizes polinomiais $D(s)$, $N(s)$, respectivamente, $m \times m$, $l \times m$ são ditas *estavelmente primas* à direita se todos os seus MDCd's forem estáveis.

É claro que, se existir um MDCd estável, ele será não singular. Assim, pela proposição 7.2 é fácil mostrar que todos os outros MDCd's também são estáveis. De fato, seja $R(s)$ um MDCd estável. Logo $\det R(s)$ não pode ser um polinômio nulo e assim $R(s)$ é não singular. Logo, se $R_1(s)$ é um outro MDCd, existe uma matriz unimodular $W(s)$ tal que $R(s) = W(s)R_1(s)$. Logo teremos $\det R(s) = \det W(s) \det R_1(s)$. Como $\det W(s)$ é uma constante não nula, segue-se que os polinômios $\det R(s)$ e $\det R_1(s)$ possuem as mesmas raízes.

7.2.5 Aplicações em sistemas

Seja o sistema polinomial

$$\begin{aligned} T(p)\xi(t) &= U(p)u(t) \\ y(t) &= V(p)\xi(t) + W(p)u(t), \end{aligned}$$

e suponha que $T(p)$ e $V(p)$ não são primas à direita, e seja $R(p)$ um MDCd de $T(p)$, $V(p)$ (lembramos que $R(p)$ não é unimodular e, portanto, $\det R(p) = 0$ tem raízes finitas). Assim

$$\begin{aligned} T(p) &= \bar{T}(p)R(p) \\ V(p) &= \bar{V}(p)R(p). \end{aligned}$$

Logo, a função de transferência será dada por

$$\begin{aligned} G(s) &= V(s)T^{-1}(s)U(s) + W(s) = \bar{V}(s)R(s)[\bar{T}(s)R(s)]^{-1}U(s) + W(s) \\ &= \bar{V}(s)R(s)R^{-1}(s)\bar{T}^{-1}(s)U(s) + W(s) = \bar{V}(s)\bar{T}^{-1}(s)U(s) + W(s). \end{aligned}$$

Note que os pólos do sistema são as raízes de $\det T(s) = \det \bar{T}(s) \det R(s)$. Portanto, as raízes do determinante de $R(s)$ são os pólos do sistema que não aparecerão, devido ao cancelamento, como pólos da matriz de transferência. Note que as raízes de $\det R(s)$ são exatamente os valores de s para os quais o posto da matriz $\begin{bmatrix} T(s) & V(s) \end{bmatrix}^T$ não é pleno. Assim, as raízes de $\det R(s)$ são denominadas *zeros desacoplados da saída* ou ainda *modos não observáveis*.

Um fenômeno análogo é observado quando as matrizes $T(p)$ e $U(p)$ não são primas à esquerda, isto é, $T(p) = W(p)\bar{T}(p)$ e $U(p) = W(p)\bar{U}(p)$, onde $W(p)$ não é unimodular. Neste caso, as raízes de $\det W(s)$ coincidem com os valores de s que baixam o posto de $\begin{bmatrix} T(s) & U(s) \end{bmatrix}$. Tais valores de s são denominados *modos não controláveis* ou *zeros desacoplados da entrada*.

7.2.6 Forma de Hermite e forma de Smith

Primeiramente lembramos que um polinômio escalar é *mônico* se o coeficiente da potência de maior grau de s é unitário, que o *grau* de um polinômio é a maior potência de s com coeficiente não nulo e que o grau de um polinômio nulo é, por convenção, $-\infty$.

Teorema 7.3 (Forma de Hermite). Suponha que $N(s)$ seja uma matriz polinomial $l \times m$ e $D(s)$ seja uma matriz polinomial $m \times m$ não singular. Então operações elementares de linha podem ser usadas para transformar

$$T(s) = \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

na *forma linha de Hermite* descrita como a seguir. Para $k = 1, \dots, r$, todos os elementos da k -ésima coluna abaixo do elemento k, k são nulos, e o elemento k, k é não nulo e mônico com maior grau que todos os elementos acima nesta coluna k . (Se o elemento k, k é unitário, então todos os elementos acima são nulos.)

Demonstração. A forma linha de Hermite pode ser calculada por um algoritmo que é similar ao processo de redução de linha para matrizes constantes.

Passo 1: Na primeira coluna de $T(s)$ use a troca de linhas para trazer para a primeira linha o elemento de menor grau entre todos os elementos entre todos os elementos não nulos da primeira coluna. (Pela não singularidade de $D(s)$, há um elemento não nulo na primeira coluna.)

Passo 2: Multiplique a primeira linha por um número real tal que o primeiro elemento da coluna seja mônico.

Passo 3: Para cada elemento $t_{i1}(s)$ abaixo da primeira linha na primeira coluna, use a divisão polinomial para escrever

$$t_{i1}(s) = q_i(s)t_{11}(s) + r_{i1}(s), \quad i = 2, \dots, l+m,$$

onde cada resto é tal que $\deg r_{i1}(s) < \deg t_{11}(s)$. (Se $t_{11}(s)$, ou seja, $\deg t_{11}(s) = -\infty$, fazemos $q_i(s) = r_{i1}(s) = 0$, então pelo passo 1, $\deg t_{11} = 0$. Portanto, $\deg q_i(s) = 0$ e $\deg r_{i1} = -\infty$, isto é, $r_{i1}(s) = 0$.)

Passo 4: Para $i = 2, \dots, l+m$, adicione a i -ésima linha o produto de $-q_i(s)$ pela primeira linha. Os elementos resultantes na primeira coluna, abaixo da primeira linha, são $r_{21}(s), \dots, r_{l+m,1}(s)$, todos com grau menor que $\deg t_{11}(s)$.

Passo 5: Repita os passos 1 a 5 até que todos os elementos da primeira coluna sejam nulos exceto o primeiro elemento. Como os graus dos elementos abaixo do primeiro elemento são diminuídos de pelo menos 1 em cada iteração, um número finito de operações é necessário.

Vá para segunda coluna de $T(s)$ e repita os passos acima enquanto ignora a primeira linha. Isto resulta um elemento mônico, não nulo $t_{22}(s)$, com todos elementos abaixo nulos. Se $t_{12}(s)$ não tem grau menor que o grau de $t_{22}(s)$, então faça a divisão polinomial de $t_{12}(s)$ por $t_{22}(s)$ como no passo 3 e com uma operação elementar de linha como no passo 4, substitua $t_{12}(s)$ por um polinômio de grau menor que $\deg t_{22}(s)$. Repita o processo para a terceira coluna de $T(s)$, enquanto ignora as duas primeiras linhas. Continuando o processo, temos a forma requerida ao final das colunas de $T(s)$.

□

Para completar a conexão entre matrizes unimodulares e operações elementares de linha, suponha no teorema 7.3 que $l = 0$ e que $D(s)$ seja unimodular. É claro que a forma linha de Hermite resultante é triangular superior. Os elementos da diagonal devem ser unitários. Caso contrário, para um elemento da diagonal de grau positivo teríamos um determinante de grau positivo, contradizendo a unimodularidade. Os elementos acima da diagonal devem ter grau $-\infty$. Então a forma linha de Hermite para uma matriz unimodular é a matriz identidade. Em outras palavras, para uma matriz polinomial unimodular $U(s)$ há uma seqüência de operações elementares de linha, $E_1, E_2, E_3(s), \dots, E_2$, tais que

$$[E_1 E_2 E_3(s) \cdots E_2] U(s) = I.$$

Isto obviamente dá $U(s)$ como uma seqüência de operações elementares de linha na matriz identidade dada por

$$U(s) = [E_2^{-1} \cdots E_3^{-1}(s)E_2^{-1}E_1^{-1}]I,$$

e a pré-multiplicação de uma matriz pela matriz $U(s)$ então corresponde a aplicação de uma seqüência de operações elementares de linha. Portanto, o teorema 7.1 pode ser reiniciado, para o caso de $D(s)$ não singular, em termos de operações elementares de linha ao invés da pré-multiplicação por uma matriz unimodular $U(s)$. Se a redução para a forma linha de Hermite for usada e implementada em (7.3), então o MDCd $R(s)$ será uma matriz polinomial triangular superior. Além disso, se $N(s)$ e $D(s)$ são primos à direita, então o teorema 7.3 mostra que há uma matriz unimodular $U(s)$ tal que (7.3) é satisfeita para $R(s) = I_m$.

Exemplo 7.1. Para

$$D(s) = \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 & s + 1 \\ s^2 - 3 & 2s - 2 \end{bmatrix}, \quad N(s) = \begin{bmatrix} s + 2 & 1 \end{bmatrix},$$

calcule o MDCd usando o teorema 7.1 e uma seqüência de operações elementares de linha. (Cada seta representa um tipo de operação.)

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 & s + 1 \\ s^2 - 3 & 2s - 2 \\ s + 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ s^2 - 3 & 2s - 2 \\ s^2 + s + 1 & s + 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ (s - 2)(s + 2) + 1 & 2s - 2 \\ (s - 1)(s + 2) + 3 & s + 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ 1 & s \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & s \\ s + 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & -s^2 - 2s + 1 \\ 0 & -3s + 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & -3s + 2 \\ 0 & -s^2 - 2s + 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & s - 2/3 \\ 0 & -s^2 - 2s + 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & s - 2/3 \\ 0 & -7/9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \\ 0 & s - 2/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Este cálculo mostra que o MDC é a matriz identidade e $N(s)$ e $D(s)$ são primas à direita.

Exemplo 7.2. Encontre o MDCd das seguinte matrizes polinomiais

$$D(s) = \begin{bmatrix} s & 3s + 1 \\ -1 & s^2 + s - 2 \end{bmatrix}, \quad N(s) = \begin{bmatrix} -1 & s^2 + 2s - 1 \end{bmatrix}.$$

Considere

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 3s + 1 \\ -1 & s^2 + s - 2 \\ -1 & s^2 + 2s - 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} -1 & s^2 + s - 2 \\ s & 3s + 1 \\ -1 & s^2 + 2s - 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & -s^2 - s + 2 \\ 0 & s^3 + s^2 + s + 1 \\ 0 & s + 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & -s^2 - s + 2 \\ 0 & s + 1 \\ 0 & s^3 + s^2 + s + 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 1 & -s^2 - s + 2 \\ 0 & s + 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s + 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

No primeiro passo, trocamos a primeira e a segunda linhas. Isto é obtido pela multiplicação de $T(s)$ por uma matriz elementar denotada por 1 no final deste parágrafo. No segundo passo, multiplicamos a primeira linha por -1 , adicionamos o produto da primeira linha por s à segunda linha e adicionamos o produto da primeira linha por -1 à terceira linha. Isto é obtido pela matriz denotada por 2. No terceiro passo, trocamos a segunda e terceira linhas. Então adicionamos o produto da segunda linha por $-(s^2 + 1)$ à terceira linha no passo 4. No último passo, adicionamos o produto da segunda linha por s à primeira linha tal que o grau de $t_{12}(s)$ fosse menor que o de $t_{11}(s)$. As matrizes elementares correspondentes são

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(s^2 + 1) & 1 \end{bmatrix}}_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_1.$$

O produto destas cinco matrizes é

$$\begin{bmatrix} 0 & -s-1 & s \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & s^2 + s + 1 & -(s^2 + 1) \end{bmatrix}.$$

Assim temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -s-1 & s \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & s^2 + s + 1 & -(s^2 + 1) \end{array} \right] \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então o MDCd de $N(s)$ e $D(s)$ é

$$R(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

que não é uma matriz unimodular. Portanto, $N(s)$ e $D(s)$ não são primos à direita.

Teorema 7.4 (Forma de Smith). Para qualquer matriz polinomial $P(s)$ $l \times m$ podemos encontrar operações elementares de linha e coluna, ou matrizes unimodulares correspondentes $\{U(s), V(s)\}$, tais que

$$U(s)P(s)V(s) = \Lambda(s)$$

onde

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(l-r) \times r} & 0_{(l-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}, \quad \Gamma(s) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix}, \quad r = \text{posto } P(s),$$

e os polinômios $\lambda_i(s)$ são mônicos únicos tais que λ_i divide λ_{i+1} .

Demonstração.

- (i) Traga o elemento de menor grau da matriz $P(s)$ para a posição $(1, 1)$.
- (ii) Por operações elementares de linha, faça todos os elementos abaixo deste, na primeira coluna, ficarem nulos, como na construção da forma de Hermite.
- (iii) Por operações de coluna, faça todos os elementos na primeira linha serem zero, com exceção do primeiro. Durante essas operações, elementos não nulos podem reaparecer na primeira coluna e devemos repetir o passo (ii) até finalmente obtermos todos os elementos da primeira linha e da primeira coluna nulos, com exceção do elemento $(1, 1)$.
- (iv) Se o elemento $(1, 1)$ não divide todos os outros elementos da matriz, multiplicando uma linha (ou coluna) por um polinômio e adicionando o resultado a outra linha (ou coluna), podemos trazer o elemento de menor grau para a posição $(1, 1)$ e então voltamos para o passo (ii) para zerar todos os outros elementos na primeira linha e na primeira coluna. Procedendo desta forma, teremos uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & P_1(s) & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \text{ divide todo elemento de } P(s).$$

- (v) Agora repita as operações acima para $P_1(s)$. Procedendo desta forma teremos a forma de Smith $\Lambda(s)$.

□

De fato, os polinômios $\lambda_i(s)$ podem ser obtidos aplicando os seguintes passos

1. Calcule todos os determinantes menores de $P(s)$.
2. Defina $\Delta_i(s)$ como o maior divisor comum (mônico) de todos os determinantes menores $P(s)$. Faça $\Delta_0(s) = 1$.
3. Calcule os polinômios $\lambda_i(s)$ como

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}.$$

Observação 7.3. Note que um processo de obter as matrizes U e V que transformam $\Lambda = UPV$ é aplicar operações elementares à matriz

$$\begin{bmatrix} I_l & P \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

e obter ao final

$$\begin{bmatrix} U & \Lambda \\ 0 & V \end{bmatrix}.$$

7.3 Matrizes de funções racionais

Nesta seção estudaremos as matrizes de funções racionais. A importância desse estudo na teoria de controle linear se deve principalmente ao fato de que as matrizes de transferência de sistemas lineares invariantes no tempo são matrizes desse tipo.

Uma das dificuldades na teoria de controle multivariável é o entendimento do significado dos zeros e pólos. Através da forma de Smith-MacMillan é possível fornecer uma definição coerente de pólos e zeros para sistemas multivariáveis.

7.3.1 Forma de Smith-MacMillan

Uma aplicação direta do teorema 7.4 leva ao seguinte resultado, que dá uma forma diagonal para a matriz de transferência racional.

Seja $G(s) = [G_{ik}(s)]$ uma matriz de transferência $l \times m$, onde $G_{ik}(s)$ são funções de transferências racionais escalares:

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)}, \quad (7.10)$$

onde $N(s)$ é uma matriz polinomial $m \times m$ com posto r e $d(s)$ é o menor múltiplo comum dentre todos os denominadores dos elementos de $G_{ik}(s)$. Seja $\Lambda(s)$ a forma de Smith de $N(s)$ e sejam $L(s)$ e $S(s)$ matrizes polinomiais unimodulares tais que

$$\Lambda(s) = S(s)N(s)L(s),$$

onde

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(l-r) \times r} & 0_{(l-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}, \quad \Gamma(s) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix}.$$

Seja a matriz racional $M(s)$ definida por

$$M(s) = S(s)G(s)L(s) = S(s)\frac{N(s)}{d(s)}L(s) = \frac{\Lambda(s)}{d(s)}.$$

Então temos que

$$M(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(l-r) \times r} & 0_{(l-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}$$

onde

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1}{\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_2}{\phi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\epsilon_r}{\phi_r} \end{bmatrix}, \quad \frac{\epsilon_i}{\phi_i} = \frac{\lambda_i}{d(s)}.$$

Além disso, ϵ_i divide ϵ_{i+1} e ϕ_i é divisível por ϕ_{i+1} para $i = 1, 2, \dots, r$.

Definição 7.6. A Matriz $M(s)$ obtida segundo o procedimento descrito é denominada *forma de Smith-MacMillan* de $G(s)$. O *grau de MacMillan* de $G(s)$, denotado por $\nu[G(s)]$, é a soma dos graus dos denominadores da forma de Smith-MacMillan, isto é $\nu[G(s)] = \sum_{i=1}^r \deg \phi_i$.

Exemplo 7.3. Considere a seguinte matriz de transferência

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s-3} & \frac{1}{(s-1)(s+2)} \\ \frac{s}{s-1} & \frac{1}{(s-1)(s-3)} \end{bmatrix}.$$

Podemos expressá-la na forma (7.10) como

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)}, \quad N(s) = \begin{bmatrix} s(s-1)(s+2) & s-3 \\ s(s-3)(s+2) & s+2 \end{bmatrix}, \quad d(s) = (s-3)(s-1)(s+2).$$

Montando a matriz

$$\begin{bmatrix} I_l & N \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & s(s-1)(s+2) & s-3 \\ 0 & 1 & s(s-3)(s+2) & s+2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

e fazendo seguindo os passos do algoritmo obtido no teorema 7.4, obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7}(s+2) & -\frac{1}{7}(s-3) & 0 & s(s+2)(s-\frac{11}{7}) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5}s(s+2) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} S & \Lambda \\ 0 & L \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s(s+2)(s-\frac{11}{7}) \end{bmatrix}, \quad S(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{7}(s+2) & -\frac{1}{7}(s-3) \end{bmatrix}, \\ L(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{5}s(s+2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$M(s) = \frac{\Lambda(s)}{d(s)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-3)(s-1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s(s+2)(s-11/7)}{(s-3)(s-1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-3)(s-1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s(s-11/7)}{(s-3)(s-1)} \end{bmatrix}.$$

Note que o grau de MacMillan é igual a 5. Se tivéssemos interesse apenas na matriz $\Lambda(s)$, poderíamos obtê-la, primeiro calculando os maiores divisores comuns de $N(s)$

$$\begin{aligned} \Delta_0(s) &= 1 \\ \Delta_1(s) &= \text{mdc}\{s(s-1)(s+2); (s-3); s(s-3)(s+2); (s+2)\} = 1 \\ \Delta_2(s) &= \text{mdc}\{s(s-1)(s+2)^2 - s(s-3)^2(s+2)\} = s(s+2) \left(s - \frac{11}{7} \right) \end{aligned}$$

que levam para

$$\lambda_1(s) = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta_0} = 1; \quad \lambda_2(s) = \frac{\Delta_2(s)}{\Delta_1(s)} = s(s+2) \left(s - \frac{11}{7} \right).$$

Daí, a forma de Smith-McMillan é dada por

$$M = \frac{\Lambda(s)}{d(s)}, \quad \Lambda(s) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente.

7.3.2 Descrição matricial fracionária

Seja $G(s)$ uma matriz de racional $l \times m$. A seguinte definição matricial corresponde a generalização do fato de definirmos uma função racional como razão de polinômios.

Definição 7.7. Seja $G(s)$ uma matriz racional $l \times m$. Seja $\{N_e(s), D_e(s)\}$ um par de matrizes polinomiais com $D_e(s)$ não singular ($\det D_e(s)$ é um polinômio não nulo), com $N_e(s)$ $l \times m$ e $D_e(s)$ $l \times l$. Então $\{N_e(s), D_e(s)\}$ é dita ser uma *descrição matricial fracionária à esquerda* (DMFe) se $G(s) = D_e^{-1}(s)N_e(s)$. Analogamente, seja $\{N_d(s), D_d(s)\}$ um par de matrizes polinomiais com $D_d(s)$ não singular, com $N_d(s)$ $l \times m$ e $D_d(s)$ $m \times m$. Então $\{N_d(s), D_d(s)\}$ é dita ser uma *descrição matricial fracionária à direita* (DMFd) se $G(s) = N_d(s)D_d^{-1}(s)$.

Note que, como o produto de matrizes não é comutativo no caso geral, há necessidade de especificarmos se a multiplicação é feita pelo lado esquerdo ou direito.

Agora vamos mostrar que toda matriz $G(s)$ racional possui uma DMFd e uma DMFe gerada a partir de (7.10). De fato, suponha $G(s) = N(s)/d(s)$ obtida de maneira única com em (7.10). Sejam

$$D_e(s) = d(s)I_l = \begin{bmatrix} d(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d(s) \end{bmatrix},$$

$$D_d(s) = d(s)I_m = \begin{bmatrix} d(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d(s) \end{bmatrix}.$$

Então é fácil ver que

$$G(s) = D_e^{-1}(s)N(s) \tag{7.11}$$

$$G(s) = N(s)D_d^{-1}(s) \tag{7.12}$$

definem, respectivamente, uma DMFe e uma DMFd de $G(s)$.

Para o caso de funções racionais $q(s) = a(s)/b(s)$ podemos sempre cancelar os fatores comuns de $a(s)$ e $b(s)$, ou em outras palavras, podemos sempre obter $a(s)$ e $b(s)$ primos entre si tais que $q(s) = a(s)/b(s)$. Para uma DMFe (DMFd) veremos que tal idéia pode

ser generalizada utilizando-se o conceito de matrizes primas à esquerda (direita). De fato, suponha que $\{N_e(s), D_e(s)\}$ é uma DMFe de $G(s)$, mas que $N_e(s)$ e $D_e(s)$ não são primos entre si. Então, dos resultados da subseção 7.2.2, existe uma matriz polinomial $\bar{R}(s)$ $l \times l$ não singular tal que $\bar{R}(s)$ não é unimodular e

$$\begin{aligned} N_e(s) &= \bar{R}(s)\bar{N}_e(s) \\ D_e(s) &= \bar{R}(s)\bar{D}_e(s). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Logo,

$$\begin{aligned} G(s) &= D_e^{-1}(s)N_e(s) = (\bar{R}(s)\bar{D}_e^{-1}(s))^{-1}(\bar{R}(s)\bar{N}_e(s)) \\ &= \bar{D}_e^{-1}(s)\bar{R}^{-1}(s)\bar{R}(s)\bar{N}_e(s) = \bar{D}_e^{-1}(s)\bar{N}_e(s). \end{aligned}$$

Assim, devido ao cancelamento do fator comum $\bar{R}(s)$, podemos dizer que $\{N_e(s), D_e(s)\}$ é uma DMFe de $G(s)$. Então $\{N_e(s), D_e(s)\}$ é dita ser uma *DMFe irreduzível* se $N_e(s)$ e $D_e(s)$ forem primas à esquerda. Analogamente, seja $\{N_d(s), D_d(s)\}$ uma DMFd de $G(s)$. Então $\{N_d(s), D_d(s)\}$ é dita ser uma *DMFd irreduzível* se $N_d(s)$ e $D_d(s)$ forem primas à direita.

O seguinte algoritmo para encontrarmos uma DMFe ou uma DMFd irreduzível é uma consequência imediata dos resultados da subseção 7.2.2.

Algoritmo 7.1. Obtenha uma DMFe (7.11) a partir da equação (7.10). Obtenha o MDCe $\bar{R}(s)$ de $N_e(s)$ e $D_e(s)$. Então $\bar{N}_e(s) = \bar{R}^{-1}(s)N_e(s)$ e $\bar{D}_e(s) = \bar{R}^{-1}(s)D_e(s)$ formam uma DMFe irreduzível. (idem para DMFd trocando-se “e” por “d” e fazendo-se $\bar{N}_d(s) = N_d(s)\bar{R}^{-1}(s)$ e $\bar{D}_d(s) = D_d(s)\bar{R}^{-1}(s)$).

7.3.3 DMF's Irreduzíveis

Nesta subseção apresentaremos algumas propriedades das DMF's irreduzíveis. Todas as deduções são feitas para DMFd's. Para obter as versões a esquerda, devemos substituir “direita” por “esquerda” e trocar a ordem de multiplicação das matrizes em lugares convenientes.

Proposição 7.4. Suponha que $\{N_1(s), D_1(s)\}$ e $\{N_2(s), D_2(s)\}$ sejam duas DMFd's irreduzíveis. Então existe $U(s)$ polinomial unimodular tal que

$$\begin{aligned} D_1(s) &= D_2(s)U(s) \\ N_1(s) &= N_2(s)U(s). \end{aligned}$$

Em outras palavras, DMFd's diferem entre si por matrizes unimodulares à direita.

Demonstração. Temos

$$N_1(s)D_1^{-1}(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s) = G(s).$$

Multiplicando-se à direita por $D_1(s)$, temos

$$N_1(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)D_1(s).$$

Seja $U(s) = D_2^{-1}(s)D_1(s)$. Segue-se que $D_1(s) = D_2(s)U(s)$. Portanto, resta mostrar que $U(s)$ é polinomial e unimodular. Para isso mostraremos que $U^{-1}(s)$ é polinomial. De fato, como $N_1(s)$, $D_1(s)$ são primas à direita, pelo teorema 7.2, temos que existem matrizes $X_1(s)$, $Y_1(s)$ polinomais tais que

$$X_1(s)N_1(s) + Y_1(s)D_1(s) = I_m.$$

Logo

$$X_1(s)N_2(s)D_2^{-1}(s)D_1(s) + Y_1(s)D_2(s)D_2^{-1}(s)D_1(s) = I_m.$$

Assim,

$$(X_1(s)N_2(s) + Y_1(s)D_2(s))D_2^{-1}(s)D_1(s) = I_m.$$

Portanto $U^{-1}(s) = X_1(s)N_2(s) + Y_1(s)D_2(s)$ e assim $U^{-1}(s)$ é polinomial. Por raciocínio análogo a partir de $N_2(s)$ e $D_2(s)$ podemos mostrar que $U(s) = X_2(s)N_1(s) + Y_2(s)D_1(s)$ sendo $U(s)$, portanto, polinomial. □

Proposição 7.5. Se $\{N(s), D(s)\}$ é uma DMFd qualquer de $G(s)$ e $\{\bar{N}(s), \bar{D}(s)\}$ é uma DMFd irreduzível, então existe $R(s)$ polinomial (que será unimodular somente se $\{N(s), D(s)\}$ também for irreduzível) tal que

$$\begin{aligned} N(s) &= \bar{N}(s)R(s) \\ D(s) &= \bar{D}(s)R(s). \end{aligned}$$

Demonstração. Pela proposição anterior só precisamos considerar o caso onde $\{N(s), D(s)\}$ não é uma DMFd irreduzível. Se $N(s)$, $D(s)$ não são matrizes primas à direita, seja $R_1(s)$ um MDCd de $N(s)$ e $D(s)$. Teremos

$$\begin{aligned} N(s) &= N_1(s)R_1(s) \\ D(s) &= D_1(s)R_1(s), \end{aligned}$$

onde $N_1(s)$ e $D_1(s)$ são primas à direita. Segue-se que $\{N_1(s), D_1(s)\}$ é uma DMFd irreduzível de $G(s)$. Pela proposição anterior, existe $U(s)$ unimodular tal que $N_1(s) = \bar{N}(s)U(s)$ e $D_1(s) = \bar{D}(s)U(s)$. Logo podemos tomar $R(s) = U(s)R_1(s)$. De fato, note que

$$\begin{aligned} N(s) &= N_1(s)R_1(s) = \bar{N}(s)U(s)R_1(s) \\ D(s) &= D_1(s)R_1(s) = \bar{D}(s)U(s)R_1(s). \end{aligned}$$

□

O seguinte resultado é uma consequência direta das proposições anteriores.

Proposição 7.6. $\{N(s), D(s)\}$ é uma DMF irreduzível de uma matriz racional $G(s)$ se e somente se o grau do polinômio $\det D(s)$ for o menor possível. Em particular, para todas as DMFd's de $G(s)$ o polinômio $\det D(s)$ possui o mesmo grau.

A demonstração do resultado a seguir é muito importante de ser compreendida porque ela estabelece uma segunda técnica de se obter DMFd's irredutíveis, dessa vez a partir da forma de Smith-MacMillan.

Proposição 7.7. $\{N(s), D(s)\}$ é uma DMFd irredutível de uma matriz racional $G(s)$ se e somente se $\deg \det D(s) = \nu[G(s)]$ (grau de MacMillan de $G(s)$).

Demonstração. Seja $M(s)$ a forma de Smith-MacMillan de $G(s)$ e sejam $L(s)$ e $S(s)$ matrizes polinomiais unimodulares tais que

$$G(s) = L(s)M(s)S(s) \quad (7.14)$$

onde

$$M(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(l-r) \times r} & 0_{(l-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}, \Delta(s) = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1}{\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_2}{\phi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\epsilon_r}{\phi_r} \end{bmatrix}.$$

Se definirmos

$$N_1(s) = \begin{bmatrix} \Gamma_1(s) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(l-r) \times r} & 0_{(l-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1(s) = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon_r \end{bmatrix}$$

$$D_1(s) = \begin{bmatrix} \Gamma_2(s) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(l-r) \times r} & I_{m-r} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2(s) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_r \end{bmatrix},$$

teremos então (note que $D_1(s)$ foi completada com I_{m-r} para tornar-se uma matriz quadrada inversível)

$$M(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)$$

e portanto, vemos que devido ao fato de $\epsilon_i(s)$ e $\phi_i(s)$ serem polinômios primos entre si para $i = 1, \dots, r$, eles não se anulam simultaneamente para nenhum valor s complexo. Segue-se que a matriz polinomial $T(s)$ dada por

$$T(s) = \begin{bmatrix} N_1(s) \\ D_1(s) \end{bmatrix}$$

possui posto pleno para todo $s \in \mathbb{C}$. Portanto, $\{N_1(s), D_1(s)\}$ é uma DMFd irredutível de $M(s)$ de grau igual ao grau de MacMillan de $G(s)$. Fazendo-se

$$\begin{aligned} \bar{N}(s) &= L(s)N_1(s) \\ \bar{D}(s) &= S^{-1}(s)D_1(s), \end{aligned} \quad (7.15)$$

provemos que $\{\bar{N}(s), \bar{D}(s)\}$ é uma DMFd irredutível de $G(s)$. Note inicialmente de (7.14) que $G(s) = \bar{N}(s)\bar{D}^{-1}(s)$. Resta mostrar que $\bar{N}(s), \bar{D}(s)$ são primas à direita. Para

mostras tal fato, vamos mostrar que todo divisor comum à direita de $\bar{N}(s)$ e $\bar{D}(s)$ é unimodular. Suponha que $R(s)$ seja um divisor comum à direita, isto é

$$\begin{aligned}\bar{N}(s) &= \bar{\bar{N}}(s)R(s) \\ \bar{D}(s) &= \bar{\bar{D}}(s)R(s).\end{aligned}$$

Logo, de (7.15) vemos que

$$\begin{aligned}N_1(s) &= L^{-1}(s)\bar{N}(s) = (L^{-1}(s)\bar{\bar{N}}(s))R(s) \\ D_1(s) &= S(s)\bar{D}(s) = (S(s)\bar{\bar{D}}(s))R(s).\end{aligned}$$

Logo $R(s)$ é um divisor à direita de $N_1(s)$ e $D_1(s)$. Segue-se do fato de $N_1(s)$ e $D_1(s)$ serem primos à direita que $R(s)$ é uma matriz unimodular. Logo $\{N_1(s), D_1(s)\}$ é uma DMFd irreduzível de $G(s)$ e $\deg \det D(s) = \nu[G(s)]$. Pela proposição 7.6, todas as DMFd's de $G(s)$ terão esta propriedade se e somente se forem irreduzíveis. □

Proposição 7.8. Seja $\{N(s), D(s)\}$ uma DMFd irreduzível de uma matriz racional $G(s)$. Então todos os numeradores $N(s)$ possuem a mesma forma de Smith. (Idem para os denominadores $D(s)$)

Demonstração. Como na demonstração anterior, construa a DMFd irreduzível $\{\bar{N}(s), \bar{D}(s)\}$. Se $\{N(s), D(s)\}$ é outra DMF irreduzível, note da proposição 7.4 que existe uma matriz $U(s)$ unimodular tal que

$$\begin{aligned}\bar{N}(s) &= N(s)U(s) \\ \bar{D}(s) &= D(s)U(s).\end{aligned}$$

Assim, de (7.15) teremos

$$\begin{aligned}N_1(s) &= L^{-1}(s)N(s)U(s) \\ D_1(s) &= S(s)D(s)U(s).\end{aligned}$$

Logo tais matrizes diferem por produtos de matrizes unimodulares à esquerda e à direita e portanto, possuem a mesma forma de Smith. Em particular, as formas de Smith de $N(s)$ e de $D(s)$ são respectivamente dadas pelas matrizes $N_1(s)$ e $D_1(s)$ da demonstração da proposição 7.7. □

Observação 7.4. Dada uma matriz racional $G(s)$ encarada como uma matriz de transferência de um sistema linear, podemos sempre obter uma descrição polinomial em que não haja zeros desacoplados da entrada e nem da saída. Para isso, seja $\{N(s), D(s)\}$ uma DMFd irreduzível de $G(s)$. Então

$$\begin{aligned}D(p)\xi(t) &= Iu(t) \\ y(t) &= N(p)\xi(t)\end{aligned}\tag{7.16}$$

é uma descrição polinomial de um sistema cuja função de transferência de $G(s)$. Note que tal descrição polinomial não possui zeros desacoplados da saída porque o par de matrizes $N(s)$, $D(s)$ é primo à direita. Por outro lado, não há zeros desacoplados da entrada, pois o par I , $D(s)$ é primo à esquerda. É fácil mostrar que uma descrição polinomial baseada em uma DMFe irreduzível $\bar{N}(s)$, $\bar{D}(s)$ possui propriedades análogas. Para isso, construa a descrição polinomial

$$\begin{aligned}\bar{D}(p)\xi(t) &= \bar{N}(p)u(t) \\ y(t) &= I\xi(t)\end{aligned}\tag{7.17}$$

e mostre que ela não possui zeros desacoplados à direita nem à esquerda.

7.3.4 Pólos e zeros

A forma de Smith-McMillan pode ser utilizada para definir pólos e zeros no caso multivariável.

Definição 7.8. Considere a matriz de transferência $G(s)$.

1. Os polinômios $\mu(s) = \epsilon_1(s)\epsilon_2(s)\cdots\epsilon_r(s)$ e $\pi(s) = \phi_1(s)\phi_2(s)\cdots\phi_r(s)$ são chamados *zero polinomial* e *pólo polinomial* de $G(s)$, onde $\epsilon_i(s)$ e $\phi_i(s)$ são polinômios da forma de Smith-McMillan $M(s)$ para $G(s)$.
2. Os zeros da matriz de transferência $G(s)$ são definidos como as raízes de $\mu(s)$ e os pólos de $G(s)$ são definidos como as raízes de $\pi(s)$.

Exemplo 7.4. Considere um sistema multivariável 2×2 com a seguinte matriz de transferência

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{(s+1)(s+2)} & -\frac{0,5}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}.$$

Calculando a forma de Smith-MacMillan através de operações elementares de linha e coluna, obtemos

$$M(s) = S(s)G(s)L(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s^2+3s+18}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix},$$

com

$$S(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -2(s+1) & 8 \end{bmatrix}, \quad L(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s+2}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As partes observável e controlável do sistema tem zeros e pólos polinomiais dados por

$$\mu(s) = s^2 + 3s + 18, \quad \pi(s) = (s+1)^2(s+2)^2$$

que implica que há dois zeros de transmissão, localizados em $-1, 5 \pm j3, 97$, e quatro pólos, localizados em -1, -1, -2 e -2.

Usamos a proposição 7.7 para obtermos uma DMFd irreduzível para o sistema.

$$N_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 3s + 18 \end{bmatrix}, \quad D_1(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} \bar{N}(s) = L(s)N_1(s) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{s+2}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 3s + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ s+1 & \frac{s^2+3s+18}{8} \end{bmatrix}, \\ \bar{D}(s) = S^{-1}(s)D_1(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -2(s+1) & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & \frac{(s+1)(s+2)^2}{8} \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{N}(s)$, $\bar{D}(s)$ é uma DMFd irredutível.

7.3.5 DMF's próprias

Há uma consideração técnica adicional que complica a representação de uma matriz de transferência estritamente própria por uma descrição matricial fracionária. Primeiro vamos introduzir uma terminologia para matrizes polinomiais que está relacionada com a noção de grau de um polinômio escalar. Novamente convencionamos que o grau de uma constante não nula é zero e o grau do polinômio nulo é $-\infty$.

Definição 7.9. Para uma matriz polinomial $P(s)$ $p \times r$, o grau do polinômio de maior grau na j -ésima coluna da $P(s)$, escrito como $c_j[P]$, é chamado de *j -ésimo grau de coluna de $P(s)$* . A *matriz dos coeficientes dos graus de coluna de $P(s)$* , escrita como P_{hc} , é uma matriz real $p \times r$ com o elemento i, j dado pelo coeficiente de $s^{c_j[P]}$ no elemento i, j de $P(s)$. Se $P(s)$ for uma matriz quadrada não singular, então ela é chamada *coluna reduzida* se

$$\deg[\det P(s)] = c_1[P] + \dots + c_p[P]. \quad (7.18)$$

Se $P(s)$ for quadrada, então a expansão de Laplace do determinante em colunas mostra que o grau do $\det P(s)$ não pode ser maior que $c_1[P] + \dots + c_p[P]$, mas pode ser menor.

A questão que precisa atenção envolve os graus de coluna de $D(s)$ em uma DMFd para matrizes de transferência racionais estritamente próprias. É claro que no caso $m = p = 1$ o grau de coluna tem uma importante função na realização, por exemplo. O mesmo é válido no caso multivariável e a complicação é que o grau de coluna de $D(s)$ pode ser artificialmente alto, e pode mudar no processo de pós-multiplicação por uma matriz unimodular. Portanto duas DMFd irredutíveis para $G(s)$, como na proposição 7.4, podem ser tais que $D(s)$ e $D_a(s)$ tem diferentes graus de coluna, mesmo que os graus de coluna dos polinômios $\det D(s)$ e $\det D_a(s)$ sejam os mesmos.

Exemplo 7.5. A DMFd irredutível para

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s-3}{s^2-1} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

é dada por

$$N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ s-1 & 1 \end{bmatrix}$$

com $c_1[D] = 1$ e $c_2[D] = 1$. Escolhendo a matriz unimodular

$$U(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^2 - s + 1 & 1 \end{bmatrix},$$

outra DMFd irreduzível para $G(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} N_a &= N(s)U(s) = \begin{bmatrix} 2s^2 - 2s + 3 & 2 \end{bmatrix} \\ D_a(s) &= D(s)U(s) = \begin{bmatrix} s^3 + 1 & s+1 \\ s^2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Claramente $c_1[D_a] = 3$ e $c_2[D_a] = 1$, no entanto $\det D_a(s) = \det D(s)$.

O primeiro passo na investigação desta situação é caracterizar matrizes polinomiais coluna reduzidas de uma forma que não envolva o cálculo do determinante. Usando a definição 7.9 é conveniente escrever uma matriz polinomial $P(s)$ $p \times p$ na forma

$$P(s) = P_{hc} \begin{bmatrix} s^{c_1[P]} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{c_2[P]} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{c_p[P]} \end{bmatrix} + P_l(s), \quad (7.20)$$

onde $P_l(s)$ é uma matriz polinomial $p \times p$ em que cada elemento da j -ésima coluna tem grau estritamente menor que $c_j[P]$. (Usamos esta notação somente quando $P(s)$ é não singular, tal que $c_1[P], \dots, c_p[P] \geq 0$.)

Teorema 7.5. Se $P(s)$ for uma matriz polinomial $p \times p$ não singular, então $P(s)$ é coluna reduzida se e somente se P_{hc} for invertível.

Demonstração. Podemos escrever, usando a representação (7.20),

$$\begin{aligned} s^{-c_1[P]} \dots s^{-c_p[P]} \cdot \det[P(s)] &= \det[P(s) \cdot \text{diagonal } \{s^{-c_1[P]}, \dots, s^{-c_p[P]}\}] \\ &= \det[P_{hc} + P_l(s) \cdot \text{diagonal } \{s^{-c_1[P]}, \dots, s^{-c_p[P]}\}] \\ &= \det[P_{hc} + \bar{P}(s^{-1})], \end{aligned}$$

onde $\bar{P}(s^{-1})$ é uma matriz com elementos que são polinômios em s^{-1} que não tem termos constantes, isto é, não tem termos s^0 . O fato chave na argumentação restante é que, vendo s como real e positivo, fazendo $s \rightarrow \infty$, temos $\bar{P}(s^{-1}) \rightarrow 0$. Também o determinante da matriz é uma função contínua dos elementos da matriz, então o limite e o determinante podem ser trocados. Em particular, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [s^{-c_1[P]} \dots s^{-c_p[P]} \cdot \det[P(s)]] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \det[P_{hc} + \bar{P}(s^{-1})] \\ &= \det\left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} [P_{hc} + \bar{P}(s^{-1})] \right\} \\ &= \det P_{hc}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Usando (7.18), o lado direito de (7.21) é uma constante não nula se e somente se $P(s)$ for coluna reduzida, e assim a prova está completa. \square

Considere uma DMFd irredutível $N(s)D^{-1}(s)$, onde $D(s)$ não é coluna reduzida. Vamos mostrar que operações elementares de coluna em $D(s)$ (pós-multiplicação por uma matriz unimodular $U(s)$) podem ser usadas para reduzir os graus de coluna individuais, e assim, calcular uma nova DMFd irredutível

$$\bar{N}(s) = N(s)U(s), \quad \bar{D}(s) = D(s)U(s), \quad (7.22)$$

onde $\bar{D}(s)$ é coluna reduzida. É claro que $U(s)$ não precisa ser construído explicitamente – que simplesmente realiza a mesma seqüência de operações elementares de coluna tanto em $N(s)$ com em $D(s)$ para obter $\bar{N}(s)$ junto com $\bar{D}(s)$.

Para descrever os cálculos necessários, suponha que os graus de coluna da matriz polinomial $D(s)$ $m \times m$ satisfazem $c_1[D] \geq c_2[D] \geq \dots \geq c_m[D]$, que podem ser obtidos pela troca de colunas. Usando a notação

$$D(s) = D_{hc}\Delta(s) + D_l(s),$$

existe um vetor não nulo z $m \times 1$ tal que $D_{hc}z = 0$, pois $D(s)$ não é coluna reduzida. Suponha que o primeiro elemento não nulo em z seja z_k e definindo um vetor polinomial correspondente como

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_k \\ z_{k+1} \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \rightarrow z(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_k \\ z_{k+1}s^{c_k[D]-c_{k+1}[D]} \\ \vdots \\ z_ms^{c_k[D]-c_m[D]} \end{bmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} D(s)z(s) &= D_{hc}\Delta(s)z(s) + D_l(s)z(s) \\ &= D_{hc}zs^{c_k[D]} + D_l(s)z(s) \\ &= D_l(s)z(s) \end{aligned}$$

e todos os elementos de $D_l(s)z(s)$ tem grau de coluna maior que $c_k[D] - 1$. Escolhendo a matriz unimodular

$$U(s) = [e_1 \quad \dots \quad e_{k-1} \quad z(s) \quad e_{k+1} \quad \dots \quad e_m],$$

onde e_i denota a i -ésima coluna de I_m , segue que $\bar{D} = D(s)U(s)$ tem grau de coluna satisfazendo

$$c_k[\bar{D}] < c_k[D]; \quad D_j[\bar{D}] = c_j[D], \quad j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m.$$

Se $\bar{D}(s)$ não for coluna reduzida, então o processo é repetido, começando com a reordenação das colunas para obter graus de coluna não crescentes. Um número finito destas

repetições constrói uma matriz $U(s)$ unimodular tais que $\bar{D}(s)$ em (7.22) é coluna reduzida.

Outro aspecto do grau de coluna envolve determinar quando $N(s)$ e $D(s)$ são tais que $N(s)D^{-1}(s)$ é uma matriz de transferência racional estritamente própria. O graus de coluna relativos de $N(s)$ e $D(s)$ são importantes para isso, mas não são tão simples quanto o caso SISO sugere.

Exemplo 7.6. Considere

$$M(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s^2+2s+1 & 2 \\ 2s-1 & -2s^2+1 & 2 \\ -s & 5s^2-2s & 1 \end{bmatrix}.$$

Os graus de colunas são 1, 2 e 0. A matriz dos coeficientes dos graus de coluna é

$$M_{hc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

que é não singular. Portanto, $M(s)$ não é coluna reduzida.

Exemplo 7.7. Suponha que uma DMFd seja dada por

$$N(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} s^3+1 & s+1 \\ s^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$c_1[N] = 2, \quad c_2[N] = 0, \quad c_1[D] = 3, \quad c_2[D] = 1$$

e os graus de coluna de $N(s)$ são menores que os respectivos graus de coluna de $D(s)$. Contudo, um cálculo fácil mostra que $N(s)D^{-1}(s)$ não é uma matriz de funções racionais estritamente próprias. Este fenômeno é explicado novamente pelo fato que

$$D_{hc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível.

Teorema 7.6. Se a DMFd $N(s)D^{-1}(s)$ for uma função racional estritamente própria, então $c_j[N] < c_j[D]$, $j = 1, \dots, m$. Se $D(s)$ for coluna reduzida e $c_j[N] < c_j[D]$, $j = 1, \dots, m$, então $N(s)D^{-1}(s)$ é uma função racional estritamente própria.

Demonstração. Suponha que $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$ seja estritamente próprio. Então $N(s) = G(s)D(s)$, e em particular

$$N_{ij}(s) = \sum_{k=1}^m G_{ik}(s)D_{kj}(s), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m.$$

Então para qualquer valor fixo de j ,

$$N_{ij}(s)s^{-c_j[D]} = \sum_{k=1}^m G_{ik}(s)D_{kj}(s)s^{-c_j[D]}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Quando $s \rightarrow \infty$ (real), cada função racional $G_{ik}(s)$ estritamente própria tende a zero, e cada $D_{kj}(s)s^{-c_j[D]}$ tende a uma constante finita, possivelmente zero. Em qualquer caso isto dá

$$\lim_{s \rightarrow \infty} N_{ij}(s)s^{-c_j[D]} = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Portanto, $\deg N_{ij}(s) < c_j[D]$, $i = 1, \dots, p$, que implica $c_j[N] < c_j[D]$.

Agora suponha que $D(s)$ seja coluna reduzida, e $c_j[N] < c_j[D]$, $j = 1, \dots, m$. Podemos escrever

$$\begin{aligned} N(s)D^{-1}(s) &= [N(s) \cdot \text{diagonal } \{s^{-c_1[D]}, \dots, s^{-c_m[D]}\}] \\ &\quad \cdot [D(s) \cdot \text{diagonal } \{s^{-c_1[D]}, \dots, s^{-c_m[D]}\}]^{-1} \end{aligned} \quad (7.23)$$

e como $c_j[N] < c_j[D]$, $j = 1, \dots, m$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [N(s) \cdot \text{diagonal } \{s^{-c_1[D]}, \dots, s^{-c_m[D]}\}] = 0.$$

A fórmula ($D^{-1} = \text{adj } D / \det D$) implica que todo elemento de uma matriz inversa é uma função contínua dos elementos da matriz. Então o limite pode ser trocado com a inversão matricial,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [D(s) \cdot \text{diagonal } \{s^{-c_1[D]}, \dots, s^{-c_m[D]}\}]^{-1} \\ = \left[\lim_{s \rightarrow \infty} (D(s) \cdot \text{diagonal } \{s^{-c_1[D]}, \dots, s^{-c_m[D]}\}) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Escrevendo $D(s)$ na forma de (7.20), temos o limite D_{hc}^{-1} . Então, de (7.23),

$$\lim_{s \rightarrow \infty} N(s)D^{-1}(s) = 0 \cdot D_{hc}^{-1} = 0$$

que implica $N(s)D^{-1}(s)$ estritamente próprio.

□