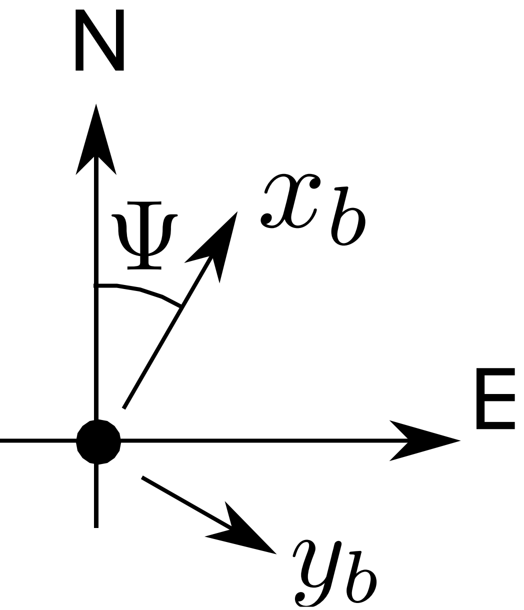
Determinação de atitude e filtro de Kalman estendido

Introdução

Sistemas de referência

- Também conhecido como sistema de coordenadas ou eixos coordenados
- Usado para descrever os mais diversos vetores e propriedades:
    - Posição, velocidade, aceleração
    - Força, torque
    - Momentos de inércia
- Os sistemas mecânicos podem ser descritos em qualquer sistema de referência
- Alguns serão mais convenientes que outros
- Informações podem ser convertidas de um sistema para outro
- Sistemas podem se mover e/ou rotacionar em relação a outros

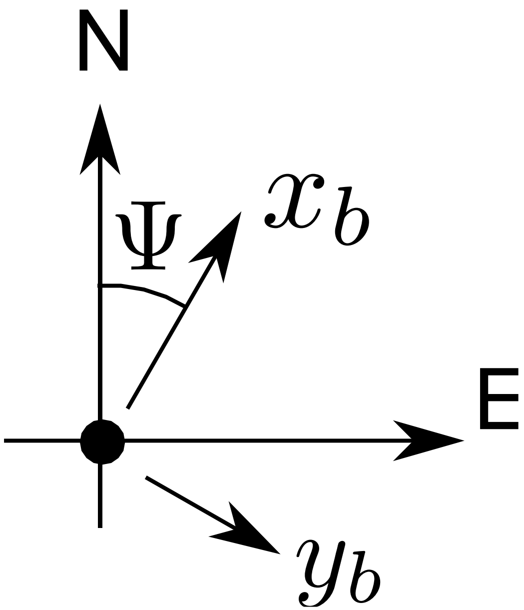
Exemplo simples em duas dimensões



Na ilustração:

- As direções norte e leste definem um sistema de referência S_{NED}.
  - S: letra usada para representar sistemas de referência
  - N: north (norte)
  - E: east (leste)
  - D: down (vertical para baixo, omitido)
- A bolinha preta é uma pessoa (ou veículo).
- A direção frontal e lateral definem um sistema de referência do corpo S_b
  - x_b é a frente
  - y_b é a lateral direita
- Ambos os eixos são dextrogiros (regra da mão direita), e os eixos de referência são ortogonais e de norma unitária (ortonormais)
- Ψ é o ângulo de rotação entre os sistemas

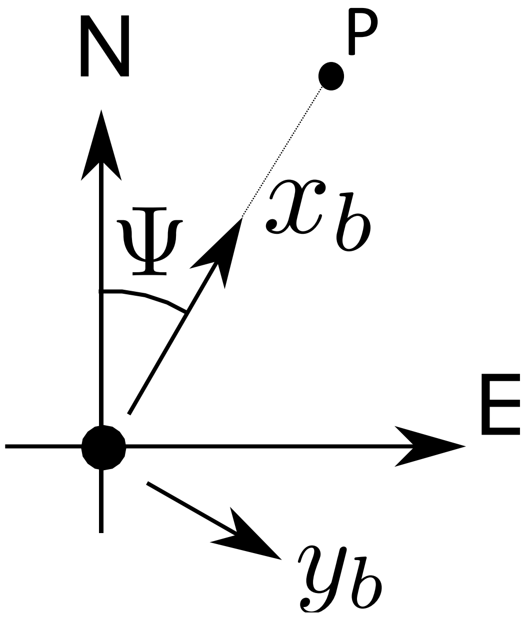
Exemplo simples em duas dimensões



Se a pessoa diz: estou vendo um ponto 10 m à minha frente, e se $\Psi = 30°$, qual a coordenada desse ponto no sistema S_{NED} ?

Atenção: na definição que estamos usando, a coordenada possui formato (N,E), sendo o contrário do usual (ou seja, o “eixo x”, ou primeiro eixo, está para cima no desenho).

Exemplo simples em duas dimensões



Por trigonometria:

$$p_N = 10\cos 30° \approx 8{,}66$$
$$p_E = 10\sin 30° = 5$$

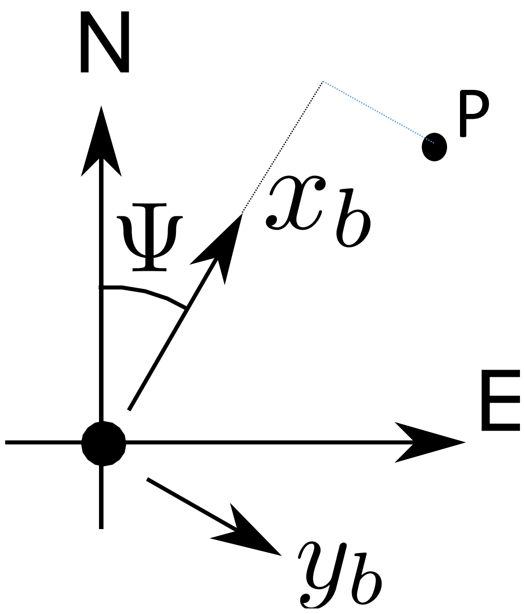
Assim: $\boldsymbol{p}_{\mathrm{NED}} = \begin{bmatrix} 8{,}66 \\ 5 \end{bmatrix}$. Veja que $\boldsymbol{p}_b = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

O subscrito NED ou b indicam qual o sistema de referência utilizado para descrever $\boldsymbol{p}$

Veja que $\|\boldsymbol{p}_{\mathrm{NED}}\| = \|\boldsymbol{p}_{\mathrm{b}}\| = 10$

Veja também que p_N e p_E são o produto interno (projeção) de $\boldsymbol{P}$ com respectivamente $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{E}$

Exemplo simples em duas dimensões

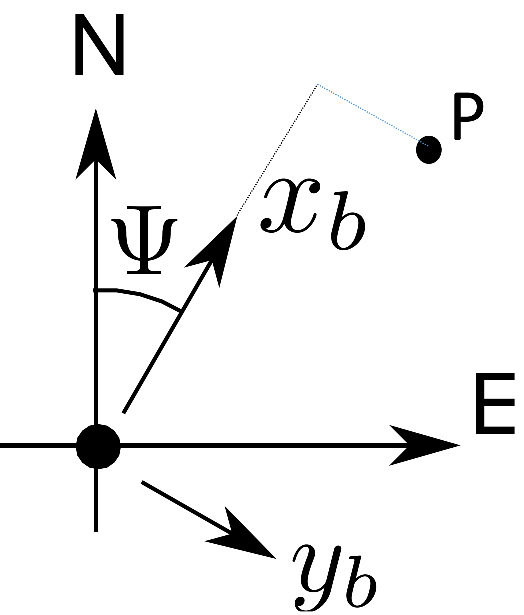


Agora o ponto está 10 metros à frente, e 3 metros à direita da pessoa. Ou seja:

$$\boldsymbol{p}_b = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Qual a coordenada no sistema S_{NED}?

Exemplo simples em duas dimensões



Agora o ponto está 10 metros à frente, e 3 metros à direita da pessoa. Ou seja:

$$\boldsymbol{p}_b = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Qual a coordenada no sistema S_{NED}?

Solução:

Os efeitos das distâncias podem ser tratados de modo separado e somados ao final. Assim:

$$p_N = 10\cos 30° - 3\sin 30° \approx 7{,}16$$
$$p_E = 10\sin 30° + 3\cos 30° \approx 7{,}60$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} p_N \\ p_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi \\ \sin\Psi & \cos\Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{p}_{NED} = \boldsymbol{D}_{NED}^{b} \boldsymbol{p}_b$$

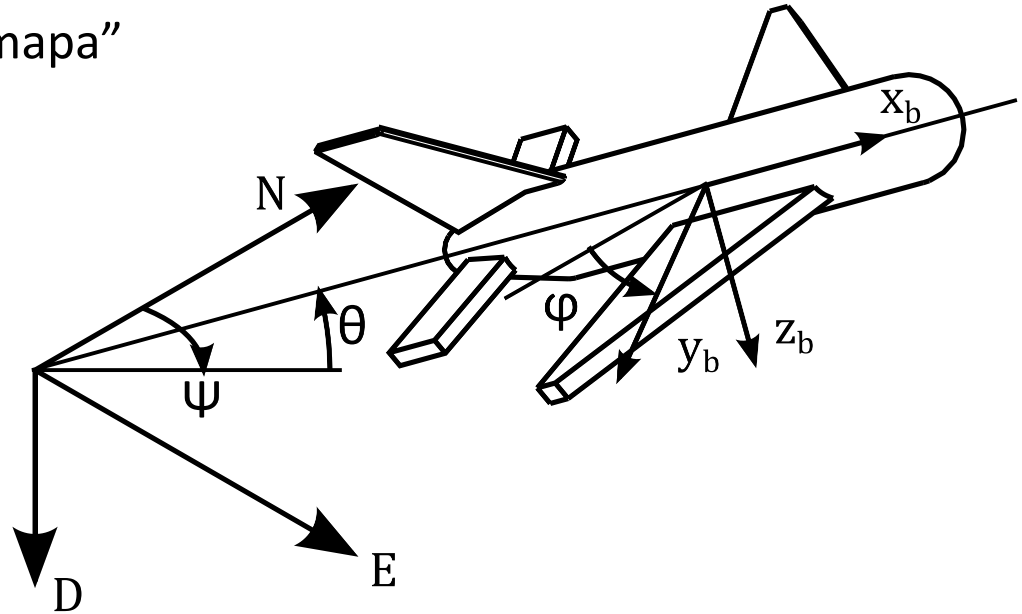
Atitude

Atitude:

- Orientação, ou pose, entre algo (pessoa, robô, avião, celular) e um local (horizonte, estrelas, outro objeto)
- Relação angular entre dois sistemas de referência
  - Em um mundo **2D**, é necessário apenas **1 ângulo**.
  - Em um mundo **3D**, são necessários **3 ângulos**.

Sistema NED S_{NED} e sistema do corpo S_b

- S_{NED}: coordenadas "de um mapa"
  - Norte/sul
  - leste/oeste
  - "constante"
- S_b: coordenada do objeto
  - Frente/trás
  - Esquerda/direita
  - Varia com o tempo



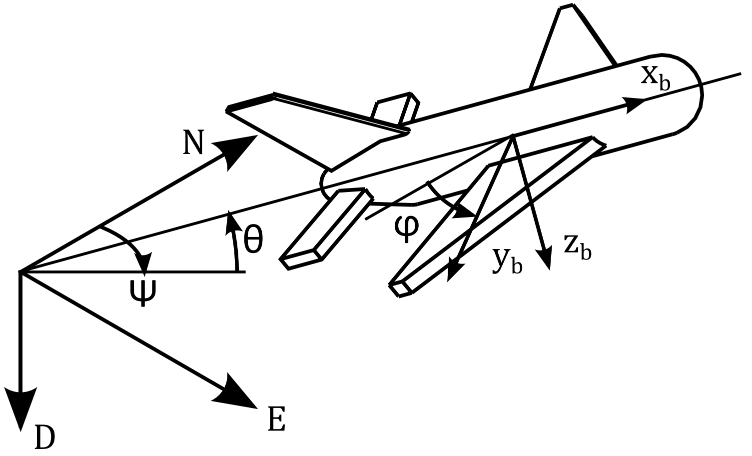
Matriz de rotação

Matriz de rotação rotaciona vetor de NED para sistema do corpo:

$$\boldsymbol{D}_b^{\mathrm{NED}} = \boldsymbol{D}_1(\phi)\boldsymbol{D}_2(\theta)\boldsymbol{D}_3(\psi) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$



Matriz de rotação

Matriz que rotaciona do sistema do corpo para NED:

$$\boldsymbol{D}^{b}_{\mathrm{NED}} = \left[\boldsymbol{D}^{\mathrm{NED}}_{b}\right]^{-1} = \left[\boldsymbol{D}^{\mathrm{NED}}_{b}\right]^{T}$$

Matriz ortogonal e normal: ortonormal

- Inversa igual transposta
- Linhas/colunas são vetores unitários

Ordem da rotação $(\psi \to \theta \to \phi)$ / (3-2-1) / (guinada, arfagem, rolamento) é importante

- Verifique com um livro e rotações de $90°$
- Problema de singularidade (*gimbal-lock*).
  - Exemplo: avião em voo vertical
  - Foguetes, por exemplo, usam outra sequência de rotação
- Ângulos de rotação são também conhecidos por **ângulos de Euler**

Problema de determinação de atitude

Determinação (estimação) de atitude: calcular ou estimar parâmetros que definam completamente a orientação/atitude do objeto. Possibilidades:

Ângulos de Euler 3 parâmetros Representação mínima Singularidade/descontinuidade Natural para humanos	**Matriz de rotação** 9 parâmetros Precisa garantir ortonormalidade Não singular
Quatérnions 4 parâmetros Precisa garantir norma unitária Não singular	**Outras opções** Usualmente com 3 parâmetros e local da singularidade ajustável

- Usualmente feito a partir de dados de dois ou mais sensores tri-axiais (sensores que medem em 3 eixos).
- Soluções que consideram ou não o ruído

Exemplos de uso de determinação de atitude

- Inclinação do celular serve como comando para o jogo
- Imagem do jogo pode rotacionar no sentido contrário para manter horizonte na horizontal

- Sistema de controle mantém a atitude da câmera (em relação ao horizonte) constante

Sensores

Nomenclatura: Inertial measurement unit – IMU:

- Conjunto de **acelerômetro** + **girômetro** – conjunto suficiente para realização de navegação inercial

Sensores de baixo custo (ex: celular, autopiloto para aeromodelos):

- Tecnologia: MEMS (Microelectromechanical systems) - Sistemas microeletromecânicos
- Baixa precisão (ruído, viés), mas baixo custo
- Inclui acelerômetro, girômetro e, frequentemente, **magnetômetro**, em um único chip de silício
    - Fabricantes costumam chamar de IMU o chip com os 3 sensores
    - Preciosismo de nomenclatura: mesmo que seja um único chip, é mais correto chamar de IMU com magnetômetro

Sensores

Sensores utilizados na estimação de atitude:

- Medida vetorial
  - 3 medidas por sensor
  - Medidas são componentes do vetor, descritas em S_b
- Vetor é assumido conhecido em S_{NED}
- Relação entre vetor conhecido (ex: campo magnético aponta para o norte) e valor medido (ex: pelo magnetômetro/bússola preso ao corpo) é dada pelos ângulos de Euler

$$\boldsymbol{v}_b(t) = \boldsymbol{D}_b^{\mathrm{NED}}(\phi, \theta, \psi)\boldsymbol{v}_{\mathrm{NED}}(t)$$

- Assumiremos, por simplificação, que $\boldsymbol{v}_b$ e $\boldsymbol{v}_{\mathrm{NED}}$ são descritos em unidade de medida em que vetores possuem naturalmente norma unitária (ex: aceleração da gravidade medida em g)
  - Ruído de sensor pode fazer com que norma deixe de ser unitária

Sensores

Magnetômetro: mede direção do norte magnético. Por simplificação, assumiremos aqui que coincide com o norte geográfico. Assumiremos também aqui que a medida foi pré-normalizada. Sensor está preso ao corpo (avião, por exemplo), compartilhando seu sistema de referência. Sensor possui ruído. Modelo:

$$\boldsymbol{m}_b = \boldsymbol{D}_b^{\text{NED}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}$$

Acelerômetro: assumindo objeto que não acelera, força de Coriolis desprezível, sensor instalado muito próximo ao CG do objeto, ele mede a reação à gravidade. Assumindo medida normalizada:

$$\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{D}_b^{\text{NED}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}$$

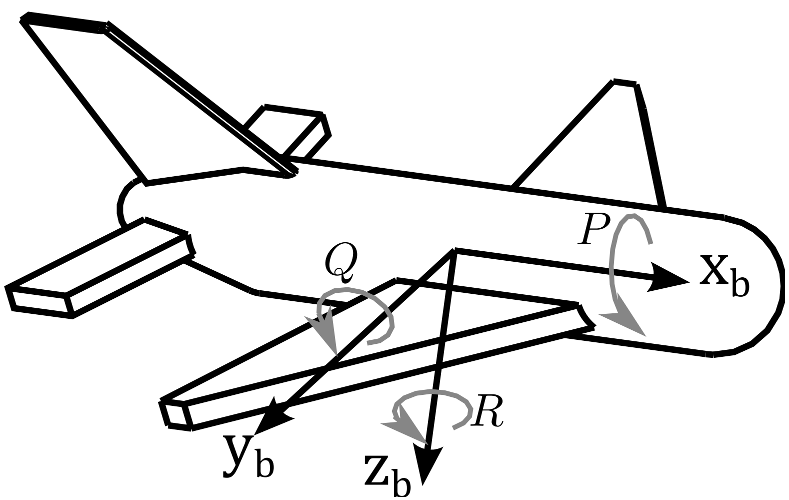
Sensores

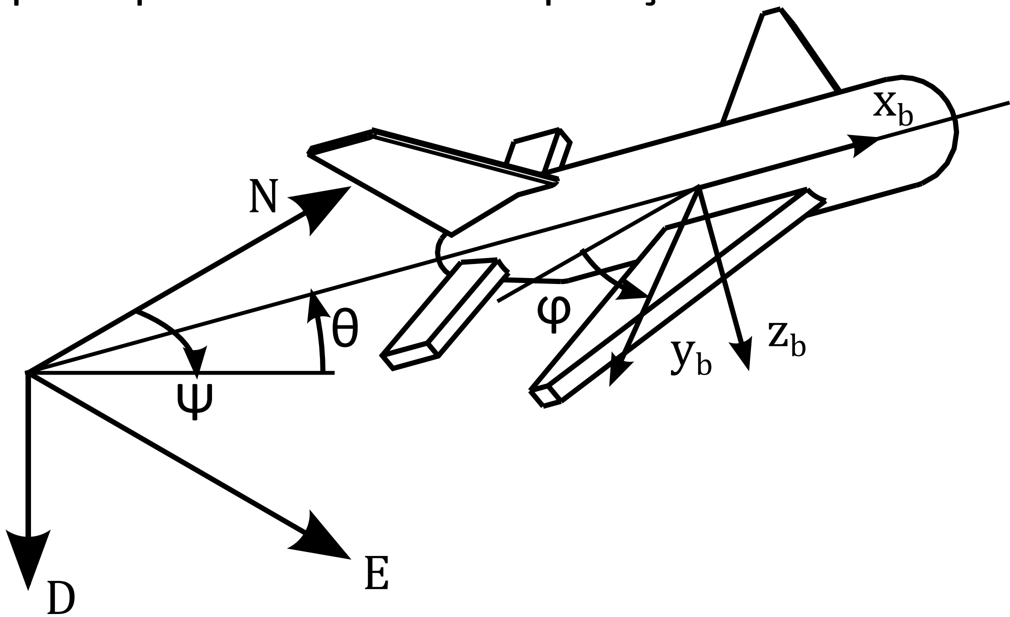
Outros sensores – solução geral:

$$\boldsymbol{v}_b(t) = \boldsymbol{D}_b^{\mathrm{NED}}(\phi, \theta, \psi)\boldsymbol{v}_{\mathrm{NED}}(t) + \boldsymbol{w}$$

- Exemplos: câmera que aponta objeto com coordenada conhecida, star tracker (satélites), magnetômetro quando o campo magnético não está alinhado com o norte

Girômetro (gyro): mede velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_b = [P\ Q\ R] + \boldsymbol{w}$. É importante salientar que velocidade angular **não é** a derivada dos ângulos de atitude. Veja também que aqui não é uma comparação entre vetores v_b e v_{NED}.





Modelo dinâmico não-linear da atitude

Relação entre atitude e velocidade angular:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\phi\\ \theta\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -s\Theta\\ 0 & c\Phi & c\Theta s\Phi\\ 0 & -s\Phi & c\Theta c\Phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\Phi}\\ \dot{\Theta}\\ \dot{\Psi}\end{bmatrix}$$

Discussão

Desejamos fazer um estimador de atitude. Ou seja, queremos estimar ψ, θ e ϕ.

Considerando $x = [\psi\ \theta\ \phi]$, veja que, nos slides anteriores, foi dado:

a) Equação dinâmica não-linear $\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

b) Medidas de sensores $y(t) = h\big(x(t)\big)$

$$\boldsymbol{m}_b = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_b = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

Discussão

Pode-se resolver o problema de estimação de atitude por 3 caminhos distintos:

a) Assumir medidas perfeitas
   - TRIAD (triaxial attitude determination)
   - Outras soluções analíticas
   - Solução exige apenas dois sensores (acc e mag, por exemplo)

b) Assumir medidas ruidosas (imprecisas), mas desconsiderar estimativas anteriores
   - QUEST (quaternion estimator)
   - Exige dois sensores e o conhecimento da matriz de covariância do ruído de cada sensor

c) Assumir medidas ruidosas, considerar modelo dinâmico
   - Problema não linear: FK não funciona
     - Soluções: EKF (FK estendido) e UKF (FK unscented)
   - Precisa de 3 sensores, incluindo girômetro

TRIAD

Triaxial Attitude Determination

TRIAD

Propriedade: a matriz de rotação $\mathbf{D}_y^x$ (x, y sistemas de coordenadas quaisquer) é composta pelos vetores-base de x descritos em y

Exemplo:

$$\boldsymbol{D}_{NED}^{b} = \begin{bmatrix}[\boldsymbol{x}_b]_{NED} & [\boldsymbol{y}_b]_{NED} & [\boldsymbol{z}_b]_{NED}\end{bmatrix}$$

Em que:

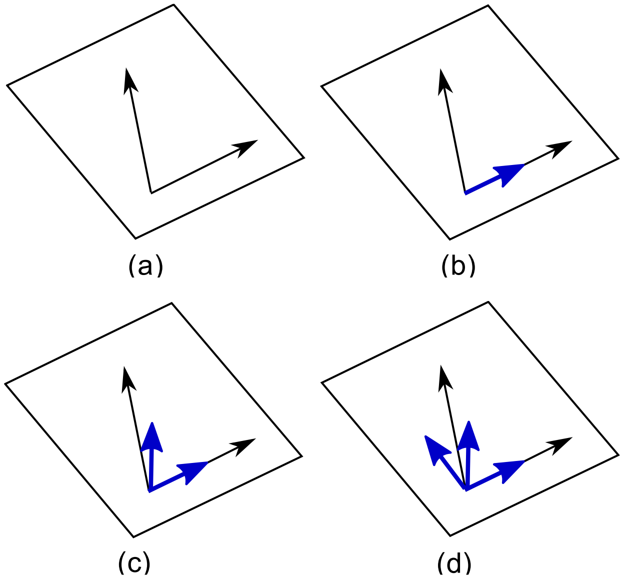
$$[\boldsymbol{x}_b]_{NED} = \boldsymbol{D}_{NED}^{b}\boldsymbol{x}_b, = \boldsymbol{D}_{NED}^{b}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

E $[\boldsymbol{y}_b]_{NED}$ e $[\boldsymbol{z}_b]_{NED}$ definidos de modo similar. Veja que a igualdade acima pode ser verificada verdadeira pela própria definição.

TRIAD

TRIAD:

- Utilizando dois vetores quaisquer conhecidos em NED, gerar 3 vetores ortonormais. No exemplo: campos magnético e gravitacional



$$[\boldsymbol{x}_{\text{int}}]_{\text{NED}} = \frac{\boldsymbol{g}_{\text{NED}}}{||\boldsymbol{g}_{\text{NED}}||}$$

$$[\boldsymbol{y}_{\text{int}}]_{\text{NED}} = \frac{\boldsymbol{g}_{\text{NED}} \times \boldsymbol{m}_{\text{NED}}}{||\boldsymbol{g}_{\text{NED}} \times \boldsymbol{m}_{\text{NED}}||}$$

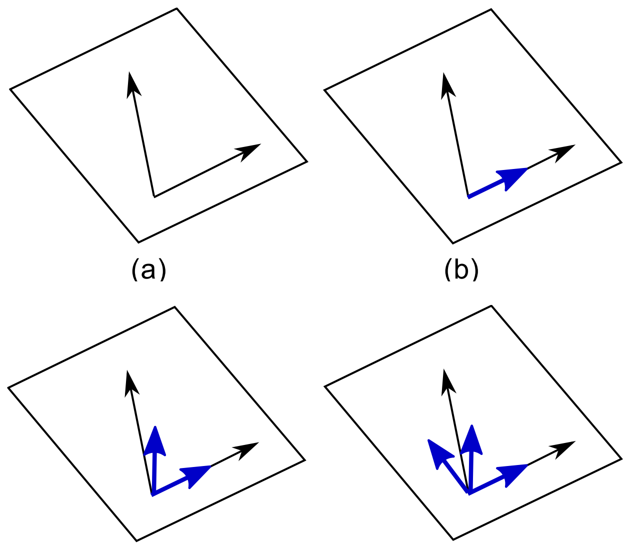
$$[\boldsymbol{z}_{\text{int}}]_{\text{NED}} = [\boldsymbol{x}_{\text{int}}]_{\text{NED}} \times [\boldsymbol{y}_{\text{int}}]_{\text{NED}}$$

- Vetores definem um sistema de coordenadas intermediário S_{int}

$$\boldsymbol{D}_{\text{NED}}^{\text{int}} = \left[[\boldsymbol{x}_{\text{int}}]_{\text{NED}} \quad [\boldsymbol{y}_{\text{int}}]_{\text{NED}} \quad [\boldsymbol{z}_{\text{int}}]_{\text{NED}} \right]$$

TRIAD

Repete para os mesmos vetores, mas em S_b, ou seja, medidos em sensores afixados ao corpo:



$$[\boldsymbol{x}_{\mathrm{int}}]_{\mathrm{b}} = \frac{\boldsymbol{g}_{\mathrm{b}}}{||\boldsymbol{g}_{\mathrm{b}}||},$$

$$[\boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}]_{\mathrm{b}} = \frac{\boldsymbol{g}_{\mathrm{b}} \times \boldsymbol{m}_{\mathrm{b}}}{||\boldsymbol{g}_{\mathrm{b}} \times \boldsymbol{m}_{\mathrm{b}}||},$$

$$[\boldsymbol{z}_{\mathrm{int}}]_{\mathrm{b}} = [\boldsymbol{x}_{\mathrm{int}}]_{\mathrm{b}} \times [\boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}]_{\mathrm{b}}.$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{int}} = \left[[\boldsymbol{x}_{\mathrm{int}}]_{\mathrm{b}} \quad [\boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}]_{\mathrm{b}} \quad [\boldsymbol{z}_{\mathrm{int}}]_{\mathrm{b}}\right].$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{NED}} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{int}} \left[\boldsymbol{D}_{\mathrm{NED}}^{\mathrm{int}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Os ângulos de Euler podem ser obtidos de $\boldsymbol{D}_b^{NED}$ (ver exemplo Simulink)

Estimação não-linear

EKF

Introdução

O filtro de Kalman só funciona para sistemas lineares.

Uma solução mais grosseira é linearizar o modelo em torno de um ponto de operação, o que fornece um sistema linear. Então, projetar um filtro de Kalman para sistema linearizado.

- Exemplo: em mecânica do voo, mostra-se que o modelo não linear da aeronave pode ser linearizado. A ideia seria aplicar o FK no sistema linear (ex: modelo longitudinal)

Uma solução mais elegante é desenvolver uma solução que funcione em sistemas não lineares.

Infelizmente o problema não linear é mais amplo que o linear, e não existe uma solução ótima que funcione em todos os casos. Algumas soluções não ótimas foram propostas:

- Filtro de Kalman estendido: lineariza problema em torno da estimativa para calcular covariância. Lineariza a cada iteração.
- Filtro de Kalman unscented / filtro de partículas: gera vários pontos. Usa estatística para ver como pontos se comportam na função não linear.

EKF – Filtro de Kalman Estendido

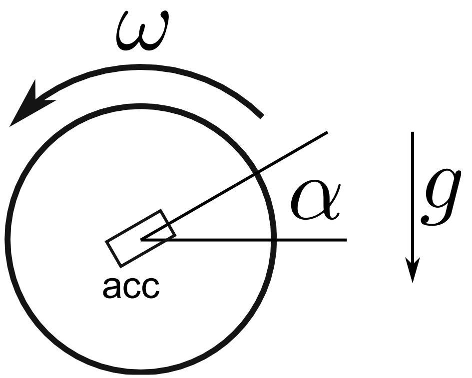
- A propagação de $\boldsymbol{x}_{k|k} \to \boldsymbol{x}_{k+1|k}$ é feita usando a função não linear:
$$\boldsymbol{x}_{k+1|k} = f(\boldsymbol{x}_{k|k}, \boldsymbol{u}_k)$$
- A estimativa da medida de sensor também é feita utilizando a função não-linear:
$$\widehat{\boldsymbol{y}}_{k+1} = h(\boldsymbol{x}_{k+1|k})$$
- Para o cálculo das covariâncias e ganho, é necessário calcular Jacobianos (derivadas)

$$\boldsymbol{F}_k = \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k} \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_k}}, \boldsymbol{G}_k = \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k} \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_k}}, \boldsymbol{H}_{k+1} = \left.\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{k+1|k}}$$

- Equações do EKF idênticas às do KF, mas usando as matrizes Jacobianas
- Veja que, se problema linear, a Jacobiana é a própria matriz $\boldsymbol{F}_k$, $\boldsymbol{G}_k$, $\boldsymbol{H}_{k+1}$

EKF - Exemplo

Suponha um estimador de atitude, unidimensional. Vimos em slide anterior (Filtro de Kalman linear). Entretanto, ao invés de potenciômetro, utilizaremos um acelerômetro



$$x_k = \alpha_k$$
$$u_k = \omega_k$$

Propagação (linear):

$$x_{k+1} = x_k + Tu_k + Tw_{u,k}, \qquad E\left[w_{u,k}w_{u,j}\right] = q_u\delta_{kj}$$

Medição:

$$y_k = \sin x_k$$

EKF - Exemplo

Assim, a parte da predição é exatamente o que usamos no FK linear:

$$\boldsymbol{F}_k = 1, \boldsymbol{G}_k = T$$

E na atualização:

$$\boldsymbol{H}_{k+1} = \cos \hat{x}_{k+1|k}$$

Ver simulação disponibilizada. Prestar atenção nas equações dentro de cada bloco. Ver resultados.

EKF - Exemplo

Discussão:

- $\boldsymbol{H}_{k+1}$ muda a cada iteração
- $\boldsymbol{H}_{k+1}$ seria calculado com mais precisão utilizando x_k ao invés de $\hat{x}_{k+1|k}$ mas, por definição, não temos acesso ao valor verdadeiro
- Veja que, se $\hat{x}_{k+1|k} = \frac{\pi}{2}$ rad, $\boldsymbol{H}_{k+1} = 0$
    - Isso significa que sensor não trás informação (por que?)
    - Veja que um sistema não-linear pode alternar entre observável e não-observável conforme estado, mesmo sem mudar modelo ou sensores
    - Problema de observabilidade pode ser resolvido usando dois acelerômetros perpendiculares:

$$\boldsymbol{y}_k = \begin{bmatrix} \sin x_k \\ \cos x_k \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \sin \hat{x}_{k+1|k} \\ \cos \hat{x}_{k+1|k} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{H}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos \hat{x}_{k+1|k} \\ -\sin \hat{x}_{k+1|k} \end{bmatrix}$$

- Pode-se estimar viés de girômetro (ver exemplo disponibilizado)

EKF – Exemplo 2

Agora, considerando um sistema em 3 dimensões. Sensores

- Girômetro triaxial; magnetômetro triaxial; acelerômetro triaxial

Modelo:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\phi \\ \theta \\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta \sin\phi & \tan\theta \cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

Não é trivial discretizar. Solução: integral numérica. Por exemplo, integral numérica de primeira ordem*

$$\begin{bmatrix}\phi_{k+1} \\ \theta_{k+1} \\ \psi_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_{k} \\ \theta_{k} \\ \psi_{k}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta_k \sin\phi_k & \tan\theta_k \cos\phi_k \\ 0 & \cos\phi_k & -\sin\phi_k \\ 0 & \dfrac{\sin\phi_k}{\cos\theta_k} & \dfrac{\cos\phi_k}{\cos\theta_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} T$$

*É mais interessante utilizar integral de ordem maior (ex: Runge-Kutta)

EKF – Exemplo 2

A propagação da covariância é calculada mais facilmente via integral numérica da propagação contínua:

$$\dot{P} = AP + PA + Q$$

Mas, se quisermos utilizar a propagação discreta do slide anterior:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & 1 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{11} = 1 + \tan\theta_k \cos\phi_k \, q_k T - \tan\theta_k \sin\phi_k \, r_k T$$

$$F_{12} = \sec^2\theta_k \sin\phi_k \, q_k T + \sec^2\theta_k \cos\phi_k \, r_k T$$

$$F_{21} = -\sin\phi_k \, q_k T - \cos\phi_k \, r_k T$$

$$F_{31} = \frac{\cos\phi_k}{\cos\theta_k} q_k T - \frac{\sin\phi_k}{\cos\theta_k} r_k T$$

$$F_{32} = \sin\phi_k \sec\theta_k \tan\theta_k \, q_k T + \cos\phi_k \sec\theta_k \tan\theta_k \, r_k T$$

EKF – Exemplo 2

A matriz G é bem mais fácil de encontrar, visto que a entrada $\boldsymbol{u}$ está separada da matriz:

Função não linear:

$$\begin{bmatrix}\phi_{k+1}\\ \theta_{k+1}\\ \psi_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_k\\ \theta_k\\ \psi_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & \tan\theta_k \sin\phi_k & \tan\theta_k \cos\phi_k\\ 0 & \cos\phi_k & -\sin\phi_k\\ 0 & \dfrac{\sin\phi_k}{\cos\theta_k} & \dfrac{\cos\phi_k}{\cos\theta_k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}T$$

Jacobiana:

$$\boldsymbol{G}_k = \begin{bmatrix}1 & \tan\theta_k \sin\phi_k & \tan\theta_k \cos\phi_k\\ 0 & \cos\phi_k & -\sin\phi_k\\ 0 & \dfrac{\sin\phi_k}{\cos\theta_k} & \dfrac{\cos\phi_k}{\cos\theta_k}\end{bmatrix}T$$

EKF – Exemplo 2

Magnetômetro:

$$\boldsymbol{m}_b = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_{mb} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\psi\sin\theta & -\sin\psi\cos\theta \\ H_{21} & \cos\psi\cos\theta\sin\phi & H_{23} \\ H_{31} & \cos\psi\cos\theta\cos\phi & H_{33} \end{bmatrix}$$

$$H_{21} = \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi$$

$$H_{23} = -\sin\psi\sin\theta\sin\phi - \cos\psi\cos\phi$$

$$H_{31} = -\cos\psi\sin\theta\sin\phi + \sin\psi\cos\phi$$

$$H_{33} = -\sin\psi\sin\theta\cos\phi + \cos\psi\sin\phi$$

EKF – Exemplo 2

Acelerômetro:

$$\boldsymbol{a}_b = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix}$$

Ver exemplo Simulink

EKF – Exemplo 2

Obs: as medidas dos sensores são do tipo $\boldsymbol{v}_b = \boldsymbol{D}_b^{NED}\boldsymbol{v}_{\text{NED}}$. Assumindo $\boldsymbol{v}_{\text{NED}}$ independente do vetor de estados, pode-se calcular

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}_b^{NED}}{\partial \phi}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{D}_b^{NED}}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{D}_b^{NED}}{\partial \psi}$$

E, assim:

$$\boldsymbol{H}_{vb} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{D}_b^{NED}}{\partial \phi}\boldsymbol{v}_{\text{NED}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{D}_b^{NED}}{\partial \theta}\boldsymbol{v}_{\text{NED}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{D}_b^{NED}}{\partial \psi}\boldsymbol{v}_{\text{NED}} \end{bmatrix}$$

Veja que isso é necessário, por exemplo, quando se considera campo magnético com declinação e inclinação (campo magnético não aponta para o norte geográfico) ou, por exemplo, usando câmera e visão computacional.