# Revisão para Prova 1

Atenção: slide não contém conteúdo completo.
Estudar também usando o livro e slides anteriores.

Compensador por atraso-avanço via Bode

Exemplo A.9.9 do livro texto

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

Desempenho desejado:

$$K_v = 10, \qquad \gamma = 50°, \qquad \|K_g\|_{dB} \geq 10\ dB$$

Utilize compensador por atraso e avanço:

$$G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}} \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}, \qquad \beta > 1, \qquad K_c = 1$$

Exemplo A.9.9

Solução:

- Projeto da resposta em regime permanente:

Sistema já possui integrador (tipo 1). Então

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = 10$$

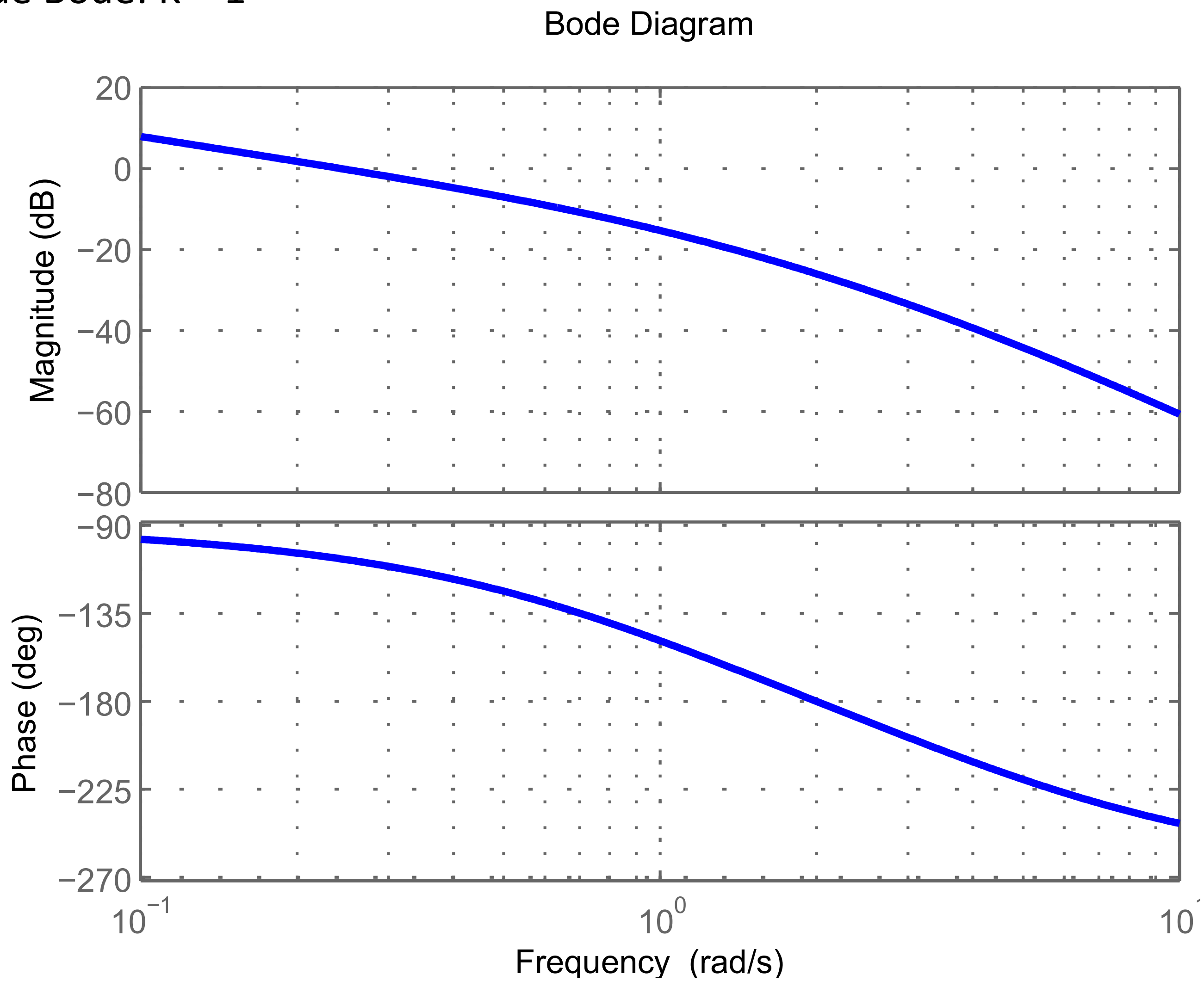
Assim:

$$10 = \lim_{s \to 0} s \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

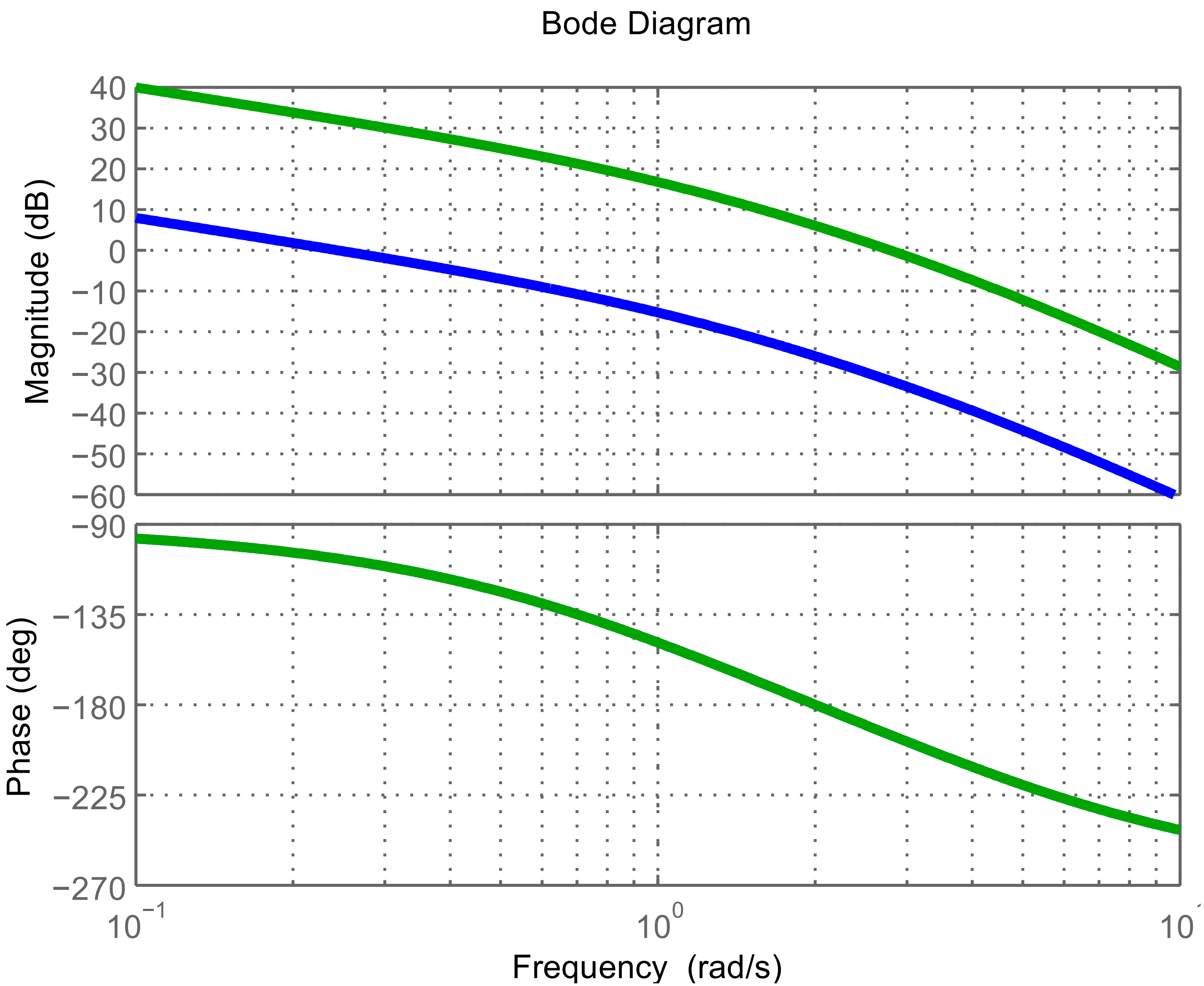
$$10 = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{1}{T_1}}{\frac{\beta}{T_1}} \frac{\frac{1}{T_2}}{\frac{1}{\beta T_2}} \frac{K}{4} \quad \to \quad K = 40$$

# Exemplo A.9.9

Diagrama de Bode: K = 1



# Exemplo A.9.9

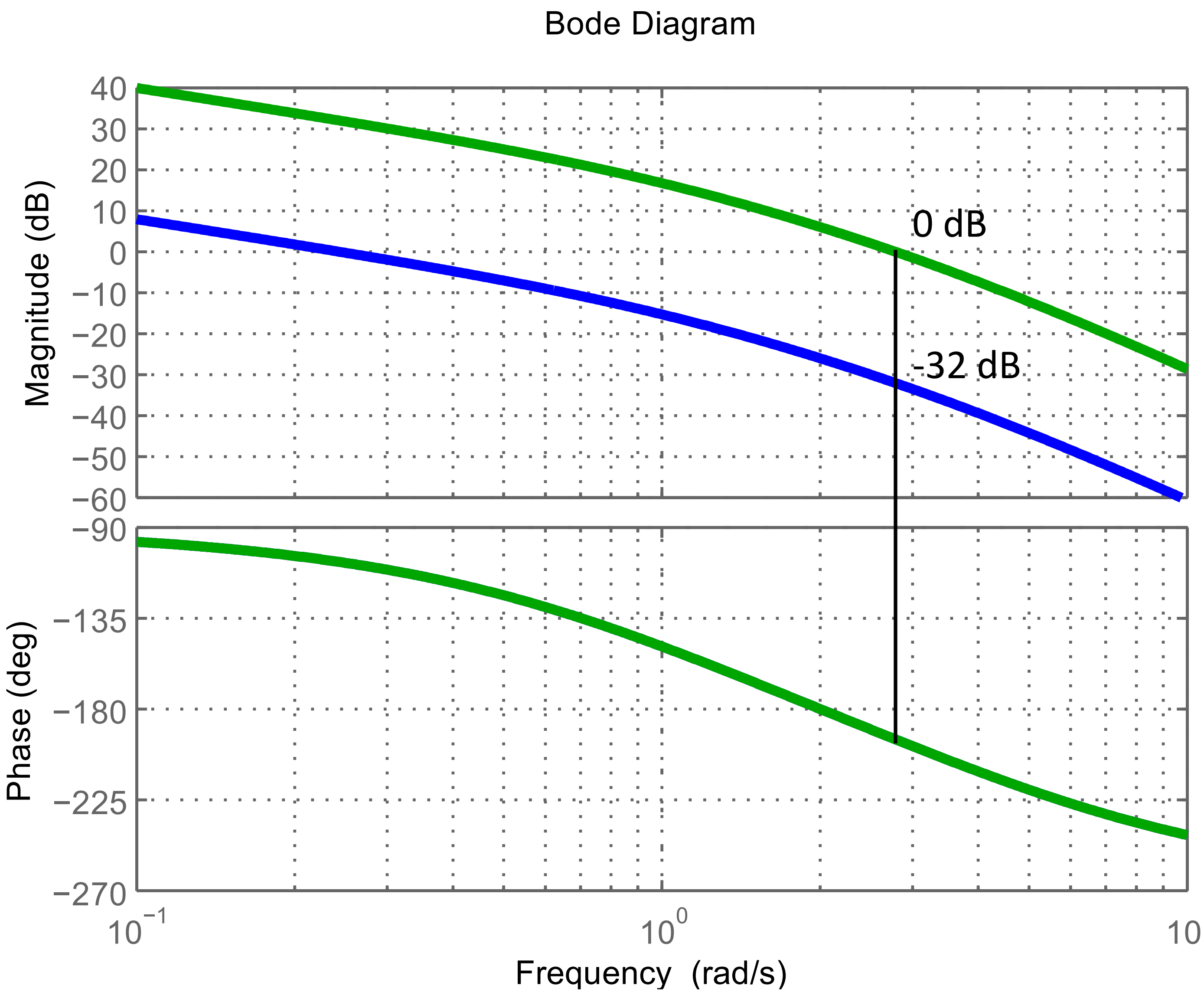



$K = 1$ e $K = 40$

Ganho de

$20\log_{10} 40 = 32\text{ dB}$

# Exemplo A.9.9




$K = 1$ e $K = 40$
Ganho de
$20 \log_{10} 40 = 32$ dB

Margem de fase:

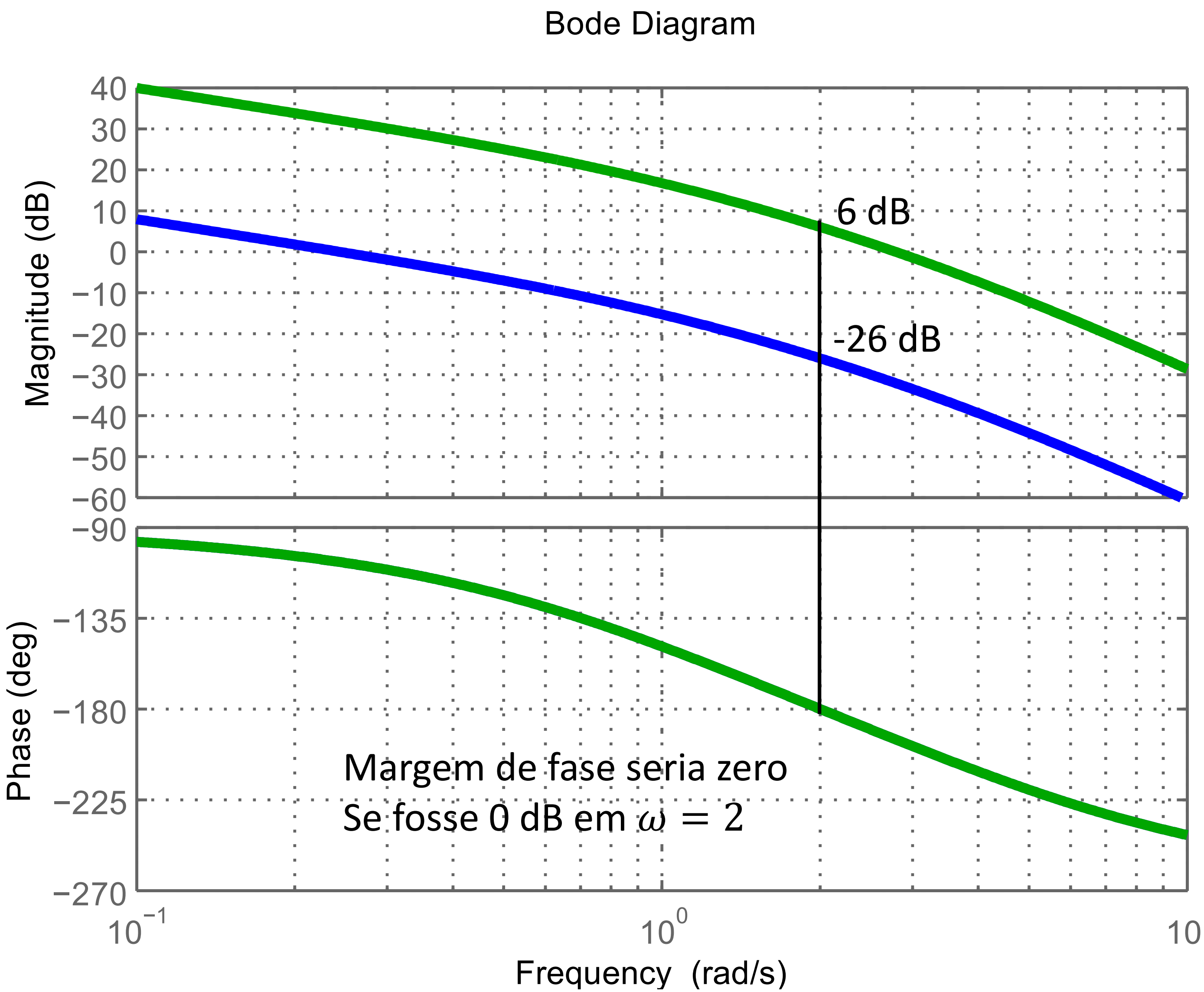
$$-16°$$

Incremento total para obter margem desejada:

$$50° + 16° = 66°$$

Dividir incremento entre compensador por avanço e compensador por atraso

# Exemplo A.9.9




Definindo, de forma arbitrária, que o compensador por atraso removerá 16°

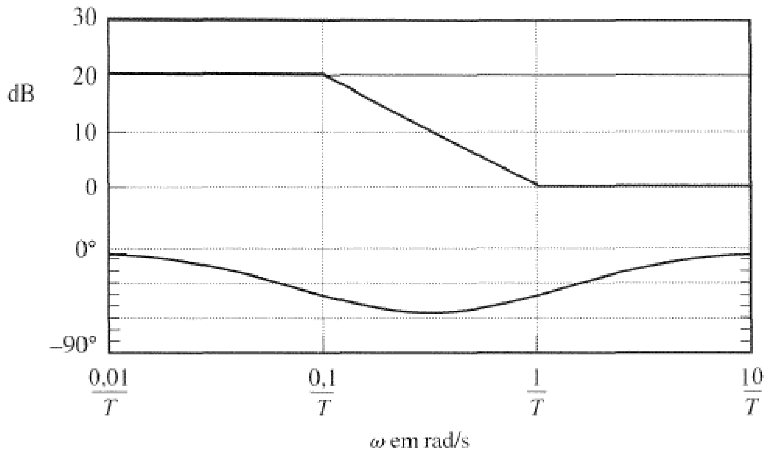
Assim, na frequência $\omega = 2\,rad/s$ o ganho deverá ser de 0 dB

Insere-se então uma atenuação em baixa frequência. Ela, entretanto, não pode afetar (significativamente) a fase em alta frequência.

# Exemplo A.9.9

Compensador por atraso:

$$\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}$$




Escolhendo "final" do efeito do filtro uma década abaixo da frequência $\omega = 2$:

$$s+\frac{1}{T_2}=s+0.2$$

Ainda é necessário escolher o valor de

$$s+\frac{1}{\beta T_2}, \qquad \beta > 1$$

mas esse valor só será definido no compensador por avanço.

# Exemplo A.9.9

Assumindo que o compensador por atraso e avanço consiga definir a magnitude em 0 dB para $\omega = 2$, ainda é necessário subir a fase em $50°$ nessa frequência para se obter a margem de fase desejada.

Para isso, utiliza-se o compensador por avanço

$$\sin 50° = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \rightarrow \beta \approx 10$$

Escolhendo $\beta = 10$, o compensador por atraso fica definido:

$$\frac{s + 0.2}{s + 0.02}$$

Verificando o gráfico em slide anterior, há um excesso de 6 dB que precisa ser removido.

# Exemplo A.9.9

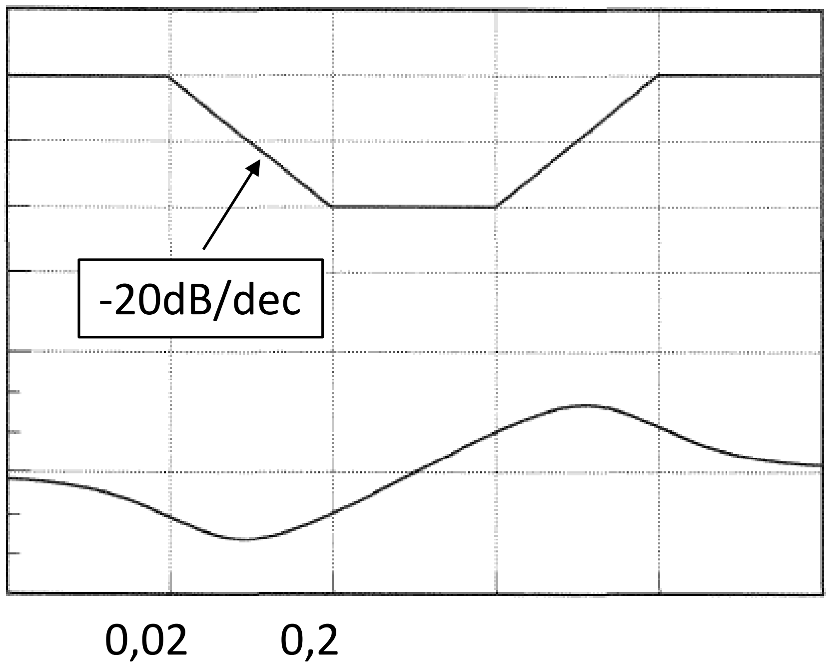
Achando as frequências de corte do compensador por avanço:

Veja que:

- Existe um ganho de 6 dB que precisa ser atenuado
- Compensador por atraso provê atenuação, compensador por avanço “desfaz” a atenuação
- Veja que, como $\beta = 10$, a diferença entre polo e zero é de uma década exata. Por isso, **nesse caso em particular**, a atenuação total é de 20 dB
- Assim, o compensador por avanço tem que recuperar de volta:

$$-20 + 6 = 14 \text{ dB}$$

- Livro resolve graficamente



Exemplo A.9.9

Solução não gráfica:

Reescrever o zero $s + \frac{1}{T_1}$ como $sT_1 + 1$ para deixar na forma padrão. Assim, os 14 dB de ganho serão exclusivos pela subida de +20 dB do zero.

$$20\log(|j\omega_1 T_1 + 1|)_{\omega_1 = 2} = 14$$

$$\log\left(\sqrt{4T_1^2 + 1}\right) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$\log(4T_1^2 + 1) = \frac{7}{5}$$

$$4T_1^2 = 10^{\frac{7}{5}} - 1 \rightarrow T_1 \approx 2.5$$

Assim:

$$G_c = \frac{s + 0.4}{s + 4}\frac{s + 0.2}{s + 0.02}$$

## Espaço de estados – matriz de transição de estados

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Obtenha a matriz de transição de estados $\boldsymbol{\phi}(t)$.

b) Considerando as condições iniciais abaixo, e considerando entrada nula, obtenha $\mathbf{x}(t)$.

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Considerando que $u(t)$ é uma entrada degrau, ou seja, $u(t) = 1$ para $t \geq 0$, e considerando condições iniciais nulas, obtenha $\mathbf{x}(t)$.

d) Considerando as condições iniciais do item *b* e a entrada do item *c*, obtenha $y$(t).

# Espaço de estados – matriz de transição de estados

a) $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 6 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_3 = -3$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-3+2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Espaço de estados – matriz de transição de estados

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

# Espaço de estados – matriz de transição de estados

b) $$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} - e^{-3t} \\ -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

c) $$x(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{-2\tau} - 2e^{-3\tau} \\ -6e^{-2\tau} + 6e^{-3\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}e^{-2\tau} + \frac{2}{3}e^{-3\tau} \\ +3e^{-2\tau} - 2e^{-3\tau} \end{bmatrix}_0^t = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{5}{6} \\ 3e^{-2t} - 2e^{-3t} - 1 \end{bmatrix}$$

# Espaço de estados – matriz de transição de estados

d) $$y(t) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= 6\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$$

$$+\ 6\left(-\frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{5}{6}\right) + 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + 1$$

$$= (6 - 2 - 9 \overset{+3}{}) e^{-2t} + (-6 + 3 + 4 - 2) e^{-3t} + 5 + 1$$

$$= -2e^{-2t} - 3e^{-3t} + 4$$

Espaço de estados – Controlabilidade e observabilidade

Um sistema é dito controlável no instante $t_0$ se for possível, através da aplicação de um vetor de controle não-restrito, transferir o sistema de qualquer estado inicial **x**($t_0$) para qualquer outro estado num intervalo de tempo finito.

Demonstração geral, que que pode inclusive ser expandida para sistemas variantes no tempo: Gramiano

$$\boldsymbol{W}_c(t) = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\, e^{\boldsymbol{A}^T\tau} d\tau$$

Solução mais simples e específica para sistemas lineares e invariantes no tempo, obtido a partir do teorema acima: Matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Sistema com ***r*** entradas: **B** tem dimensão $n \times r$. A controlabilidade completa de estado ocorre se a matriz $\mathcal{C}$ de dimensão $n \times nr$ tiver posto *n*

Espaço de estados – Controlabilidade e observabilidade

Dualidade entre controlador/observador:

Equações relacionadas à controlabilidade podem ser utilizadas para observabilidade utilizando $A^T$ e $C^T$ no lugar de $A$ e C:

$$\mathcal{O} = [\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \dots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, posto deve ser $n$

Espaço de estados – Controlabilidade e observabilidade

Verifique se o sistema abaixo é:

a) De estado completamente controlável

b) Completamente observável.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

# Espaço de estados – Controlabilidade e observabilidade

a) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \cdot B = A \cdot (A \cdot B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det M = 3 - 1 - 1 = 1 \neq 0$$

É de est. compl. controlável

Espaço de estados – Controlabilidade e observabilidade

b) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$ $\det M = 0$ não observável

# Alocação de polos

Exemplo A.12.5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alocar polos em $-3, -5$

Alocação de polos

Exemplo A.12.5

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alocar polos em $-3, -5$

Solução:

Primeiro, verificar controlabilidade:

$\mathcal{C} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ →Controlável (ver determinante, por exemplo)

Equação característica original:

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Equação característica desejada:

$$(\lambda + 3)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 8\lambda + 15$$

Se sistema estivesse na forma canônica controlável:

$$\boldsymbol{K}' = [13 \quad 5]$$

# Alocação de polos

Sistema não está na forma canônica pois

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformação para canônica controlável:

$$\boldsymbol{T} = \mathcal{C}\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{T^{-1}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Observação:

Veja que se definirmos

$$\boldsymbol{B}u = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u'$$

O sistema está na forma controlável. Projetando $\boldsymbol{K}' = \begin{bmatrix} 13 & 5 \end{bmatrix}$

A realimentação de estados é $u' = -\boldsymbol{K}'\boldsymbol{x} \rightarrow 2u = -\begin{bmatrix} 13 & 5 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

$$u = -\begin{bmatrix} 6.5 & 2.5 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \rightarrow u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

## Alocação de polos

Método alternativo:

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}| = \lambda^2 + 8\lambda + 15$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 + 2K_1 & \lambda + 3 + 2K_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 15$$

$$\lambda^2 + (3 + 2K_2)\lambda + 2 + 2K_1 = \lambda^2 + 8\lambda + 15$$

Por comparação:

$$\boldsymbol{K} = [6.5 \quad 2.5]$$