Filtro de Kalman unscented

Introdução

Filtro de Kalman unscented: calcula médias e variâncias avaliando a estatística de uma “nuvem de pontos” (pontos sigma, σ-pontos)

Efeito de funções não lineares avaliados pela transformação unscented

Transformação unscented:

- Entrada: média e variância de uma PDF, função não linear
- Saída: média e variância resultantes ao se aplicar a função na PDF
- Método: pontos sigma

$$\xrightarrow{\bar{x},\, P_x} \boxed{y = f(x)} \xrightarrow{\bar{y},\, P_y}$$

Introdução

Etapas da transformação unscented:

- A partir da média e variância, gerar $2n + 1$ pontos-sigma
- Transformar os pontos utilizando a função não-linear
- Obtém-se a média e a variância dos pontos transformados

UKF calcula, via transformação unscented, a média e variância

- Do estado propagado (etapa de predição)
- Da medida predita (etapa de atualização)

Uso de transformação unscented ao invés das técnicas do EKF:

- Usualmente mais preciso
- Evita o cálculo de Jacobianas
- É capaz de modelar o efeito da média da transformação ser diferente da transformação da média
- Custo computacional pode ser bem maior ou similar ao EKF, conforme aplicação

Transformação unscented

Gerando pontos sigma

$$\boldsymbol{\chi}_k = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_k & \hat{\boldsymbol{x}}_k & \dots & \hat{\boldsymbol{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times 1} & \sqrt{\kappa \boldsymbol{P}_k} & -\sqrt{\kappa \boldsymbol{P}_k} \end{bmatrix}$$

κ é o fator de espalhamento, dado por $\kappa = \lambda + n$

Em que n é o número de estados e λ, um parâmetro de projeto ajustado pelo projetista, é o peso dado ao ponto sigma inicial (veremos melhor mais à frente). Usualmente $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3 - n$.

$\sqrt{\kappa \boldsymbol{P}_k}$ é obtido, usualmente, aplicando a fatoração de Cholesky na matriz. O resultado é uma matriz $n \times n$.

Veja que $\boldsymbol{\chi}_k$ é uma matriz $n \times (2n + 1)$. Cada *i*-ésima coluna de $\boldsymbol{\chi}_k$ é um ponto sigma $\boldsymbol{\chi}_k(i)$

Transformação unscented

Transformação (propagação):

$$\boldsymbol{\chi}_k(i) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{\chi}_{k-1}(i), \boldsymbol{u}, k]$$

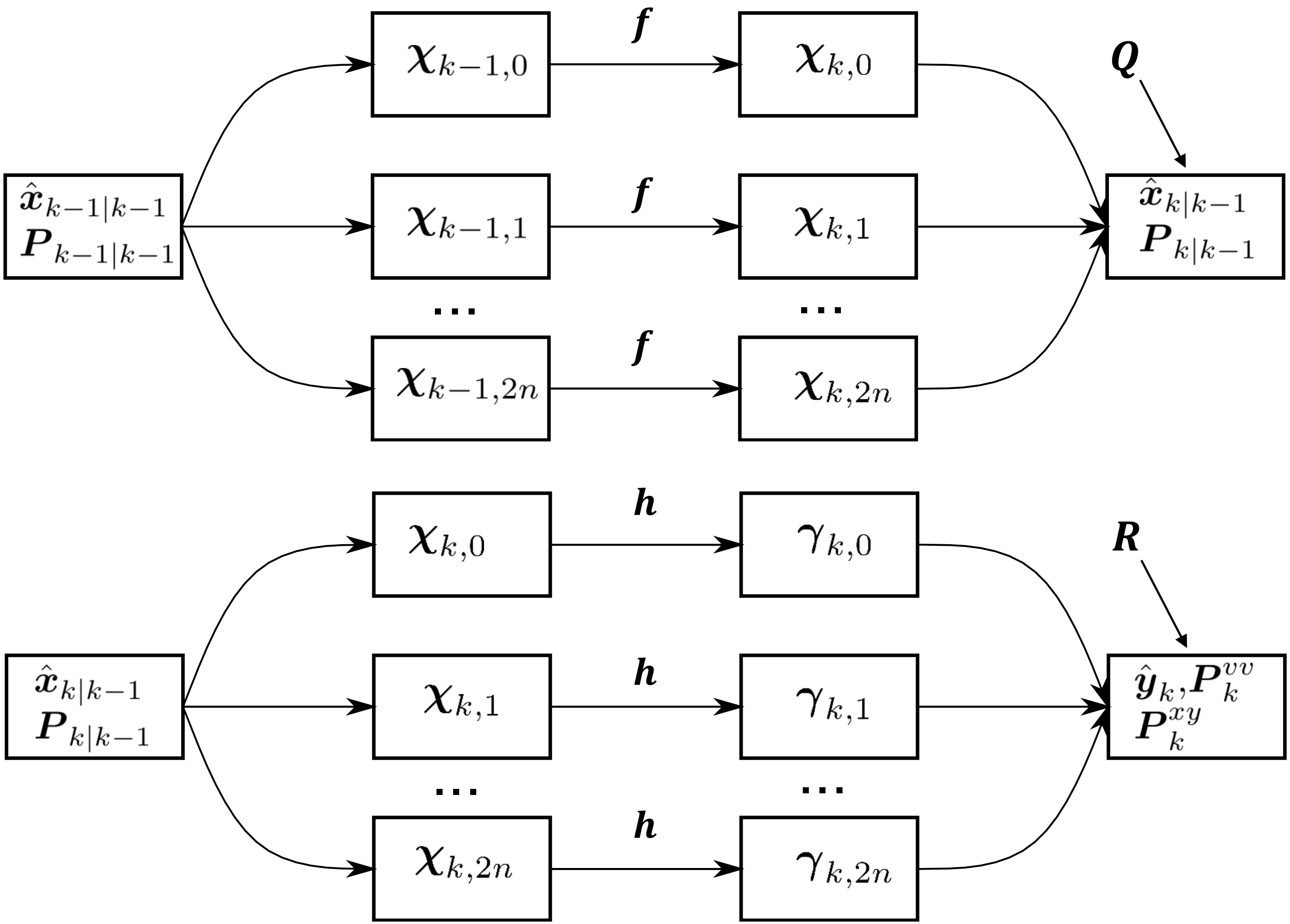
Média e variância:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{\kappa}\left\{\lambda\boldsymbol{\chi}_k(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_\chi - 1}\boldsymbol{\chi}_k(i)\right\}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = \frac{1}{\kappa}\left\{\lambda\left[\boldsymbol{\chi}_k(0) - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{\chi}_k(0) - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^T + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_\chi - 1}\left[\boldsymbol{\chi}_k(i) - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{\chi}_k(i) - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^T\right\} + \boldsymbol{Q}_{d,k}$$

Incerteza no modelo $\boldsymbol{Q}_{d,k}$ (ou ruído de sensor $\boldsymbol{R}_{d,k}$) é uma fonte extra de incerteza, e é adicionado ao final

Transformação unscented na predição e atualização



Equações extras da etapa de atualização

Transformação unscented para atualização

$$\boldsymbol{\gamma}_k(i) = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{\chi}_k(i), k]$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_k = \frac{1}{\kappa}\left\{\lambda\boldsymbol{\gamma}_k(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\boldsymbol{\gamma}_k(i)\right\}$$

$$\boldsymbol{P}_k^{vv} = \frac{1}{\kappa}\left\{\lambda\left[\boldsymbol{\gamma}_k(0) - \hat{\boldsymbol{y}}_k\right]\left[\boldsymbol{\gamma}_k(0) - \hat{\boldsymbol{y}}_k\right]^T + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_\chi - 1}\left[\boldsymbol{\gamma}_k(i) - \hat{\boldsymbol{y}}_k\right]\left[\boldsymbol{\gamma}_k(i) - \hat{\boldsymbol{y}}_k\right]^T\right\} + \boldsymbol{R}_k$$

Equações extras:

$$\boldsymbol{P}_k^{xy} = \frac{1}{\kappa}\left\{\lambda\left[\boldsymbol{\chi}_k(0) - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{\gamma}_k(0) - \hat{\boldsymbol{y}}_k\right]^T + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\left[\boldsymbol{\chi}_k(i) - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{\gamma}_k(i) - \hat{\boldsymbol{y}}_k\right]^T\right\}$$

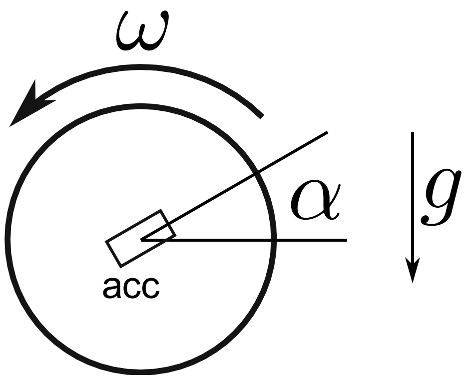
$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^{xy}(\boldsymbol{P}_k^{vv})^{-1}$$

$$\boldsymbol{x}_{k|k} = \boldsymbol{x}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k(\tilde{\boldsymbol{y}}_k - \hat{\boldsymbol{y}}_k)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = \boldsymbol{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_k^{vv}\boldsymbol{K}_k^T$$

UKF - Exemplo

Suponha um estimador de atitude, unidimensional. Vimos em slide anterior (Filtro de Kalman linear). Entretanto, ao invés de potenciômetro, utilizaremos um acelerômetro



$$x_k = \alpha_k$$
$$u_k = \omega_k$$

Propagação (linear):

$$x_{k+1} = x_k + Tu_k + Tw_{u,k}, \qquad E\left[w_{u,k}w_{u,j}\right] = q_u\delta_{kj}$$

Medição:

$$y_k = \sin x_k$$

Ver exemplo disponibilizado no Moodle