Probabilidade

e processos estocásticos

Introdução

Bibliografia

http://www2.ene.unb.br/gaborges/disciplinas/efe/slides/fundamentos_probabilidade-4pp.pdf

https://pt.wikipedia.org/wiki/Vari%C3%A1vel_aleat%C3%B3ria

http://producao.virtual.ufpb.br/books/edusantana/estatistica-livro/livro/capitulos/cap5.pdf

Variável aleatória: Variável cujo resultado/valor depende de fatores aleatórios. Pode ser discreta, contínua ou mista. Na disciplina, veremos principalmente a **contínua**.

Exemplo: Altura de uma pessoa escolhida por sorteio

Nomenclatura

Ω: Espaço amostral. Conjunto de todos os resultados possíveis. Exemplo: todas as pessoas presentes em uma sala.

ω: Evento. Exemplo: a escolha de uma pessoa da sala via sorteio

$X(\omega)$: Variável aleatória. Função que mapeia um evento a um valor numérico real. Exemplo: medição da altura da pessoa escolhida em ω

Probablidade

Probabilidade: valor numérico que indica a possibilidade de um evento ocorrer. Varia de 0 (nunca ocorre) a 1 (ocorre sempre). Por exemplo, um evento que ocorra, em média, uma vez a cada 10 “sorteios”, tem probabilidade 1/10 = 0,1 de ocorrer. Representado pela letra P

Exemplos – altura de uma pessoa escolhida aleatoriamente:

$P(X(\omega) < 150)$ ou $P(X < 150)$: Probabilidade da pessoa escolhida ter até 150 cm de altura.

$P(100 < X(\omega) < 140)$ ou $P(100 < X < 140)$: Probabilidade da pessoa ter entre 100 e 140 cm de altura

Função distribuição acumulada

$$F_X(x) = P(X(\omega) < x)$$

É possível verificar que

- $F_X(x)$ é uma função monotônica não-decrescente
- $F_X(-\infty) = 0,\ \ F_x(\infty) = 1$
- $P(x_1 < X(\omega) < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \rightarrow P(X(\omega) > x) = 1 - F_X(x)$

Função distribuição acumulada

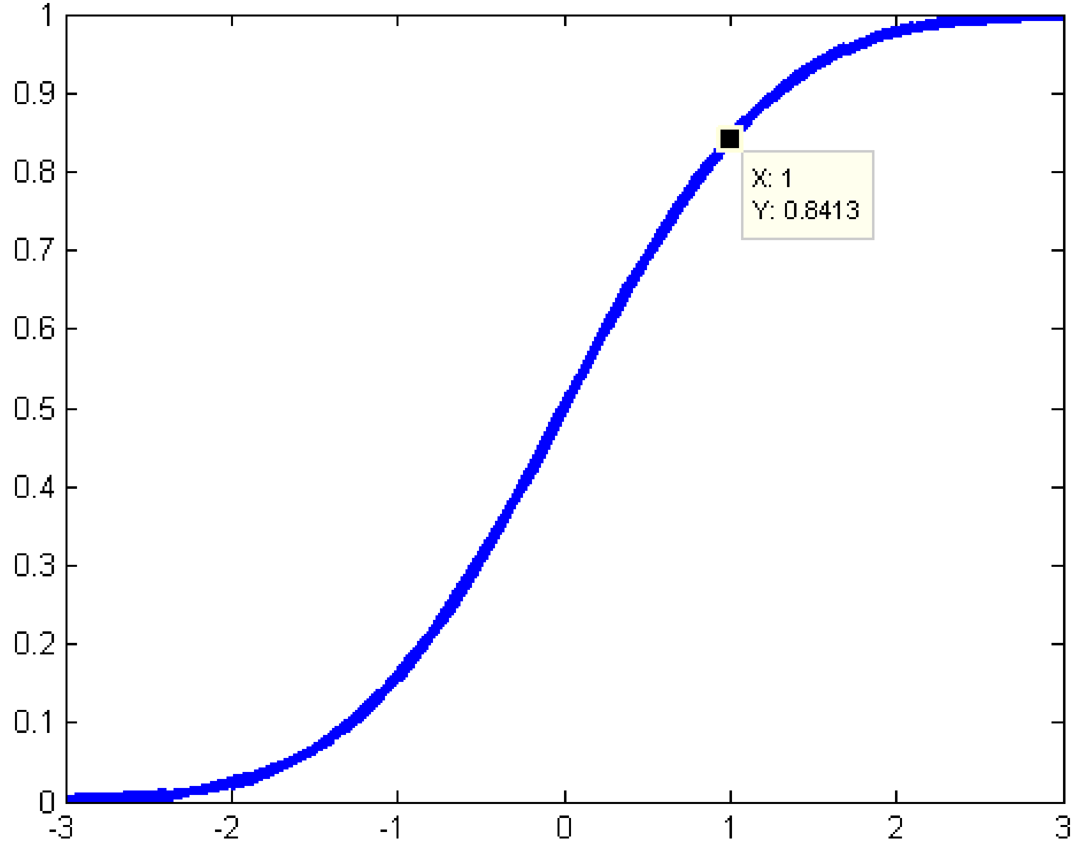
Exemplo:

Ao lado, a função distribuição acumulada indica que

$P(X(\omega) < 1) = 0.8413$

Verifique as propriedades:

- $F_X(x)$ é uma função monotônica não-decrescente
- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_x(\infty) = 1$



função distribuição acumulada da gaussiana (normal)

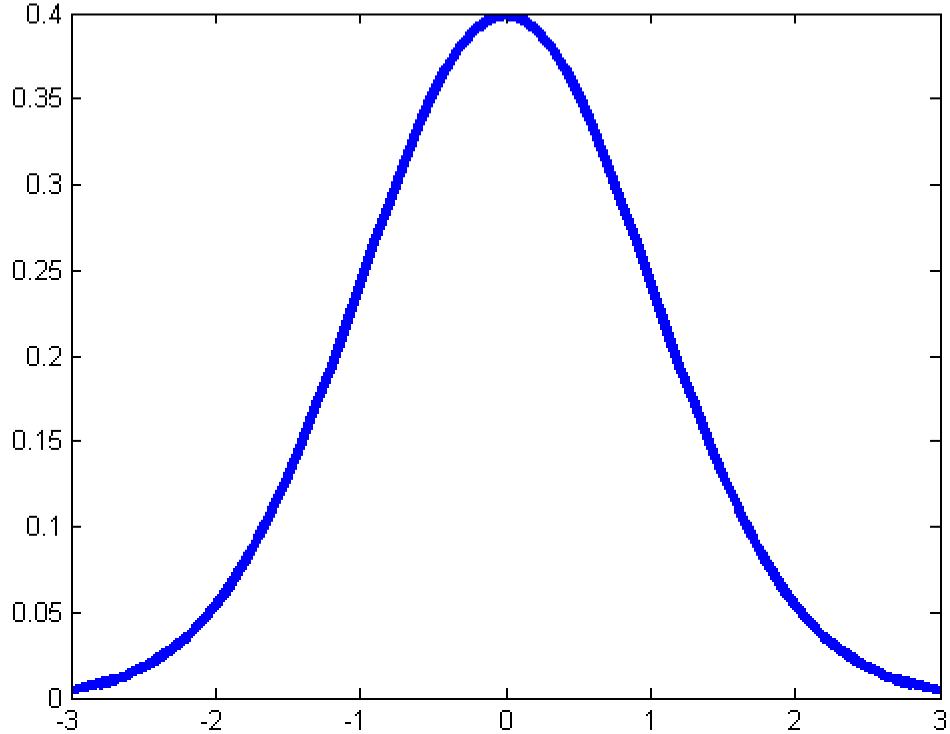
Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (FDP) é definida como:

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Pelas características da função distribuição acumulada:

- $p_X(x) \geq 0$
- $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} p_x(\xi)\, d\xi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, dx = 1$
- $p_X(-\infty) = p_X(\infty) = 0$

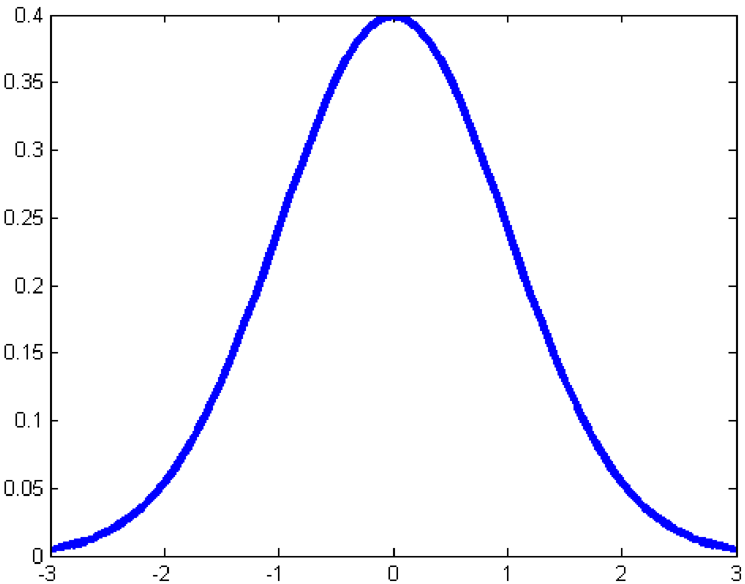


FDP da gaussiana (normal)

Funções de variáveis aleatórias

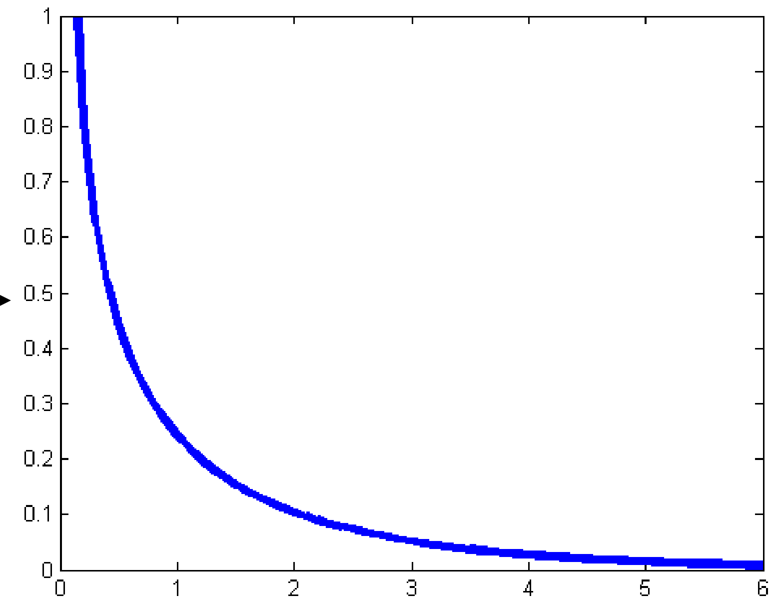
Funções podem ter variáveis aleatórias como entrada e saída. Ao passar uma função por uma função, sua FDP é alterada.

Exemplo: $Y = X^2$



FDP - gaussiana (normal) – $N(0,1)$

$Y = X^2$



FDP – Qui-quadrado – χ_1^2

$$p_Y(y) = p_X(f^{-1}(y)) \left|\frac{dy}{dx}\right|^{-1}_{x=f^{-1}(y)}$$

Momentos

Esperança (média)

$$E[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

A esperança/média é o "melhor palpite" para o valor de uma variável aleatória, no sentido de, ao efetuar várias realizações, o erro do palpite é "balanceado" e tem média zero.

Exemplo: a esperança ao jogar um dado é de 3,5. Esse número não existe no dado, mas a soma dos erros obtidos para cada face possível é zero.

Esperança de uma função

Seja $Y = f(X)$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) dx$$

Momentos

Caso especial – **função linear/afim**: $Y = aX + b$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)p_X(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx$$

$$E[Y] = aE[X] + b$$

Combinação de variáveis aleatórias distintas

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$$

n-ésimo momento

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x)dx$$

n-ésimo momento central

$$E[(X - E[X])^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^n p_X(x)dx$$

Momentos

2º momento central – **variância**

$$\mathrm{var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Desvio-padrão

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}[X]}$$

Variância de uma transformação afim

$$\mathrm{var}[aX + b] = \mathrm{var}[aX] + \mathrm{var}[b] = a^2\mathrm{var}[X]$$

A variância é um indicativo do quanto a variável aleatória pode se afastar da esperança. Maior variância, mais a variável aleatória pode se afastar.

Distribuição normal (gaussiana)

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

Notação

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Média e variância

$$E[X] = \mu$$
$$\mathrm{var}[X] = \sigma^2$$

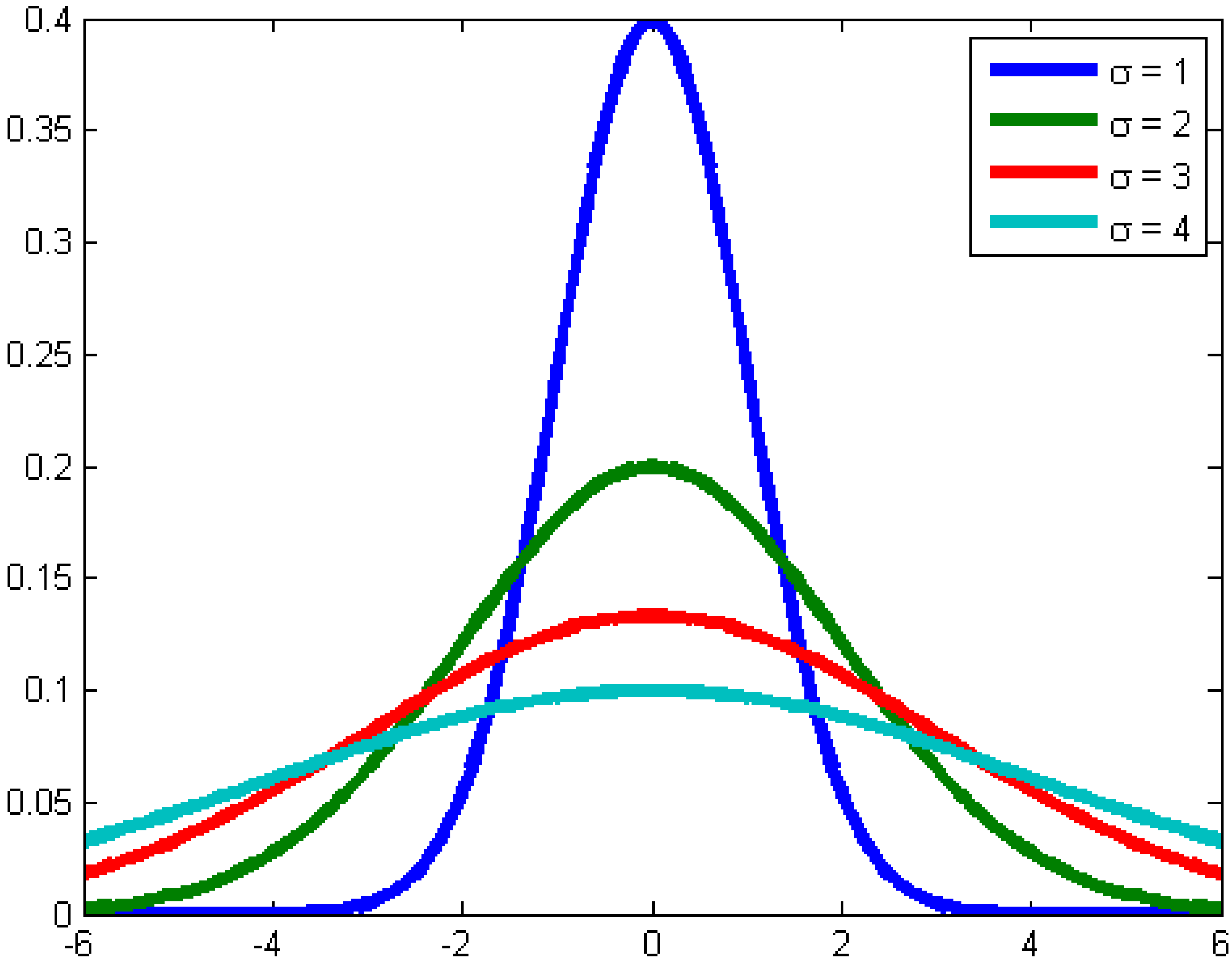
Propriedades

- Ao sofrer transformação linear ou afim, se mantém gaussiana

Exemplo: se $X \sim N(1,4)$ e $Y = 2X + 3$, então $Y \sim N(5,16)$

- Distribuição simétrica
    - Média = moda = mediana

Distribuição normal (gaussiana)



Distribuição Qui-quadrado com n graus de liberdade

Sejam n variáveis aleatórias independentes $X_i = N(0,1),\ i = 1, \dots, n$

A variável aleatória

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

possui distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade

Notação

$$Y \sim \chi_n^2$$

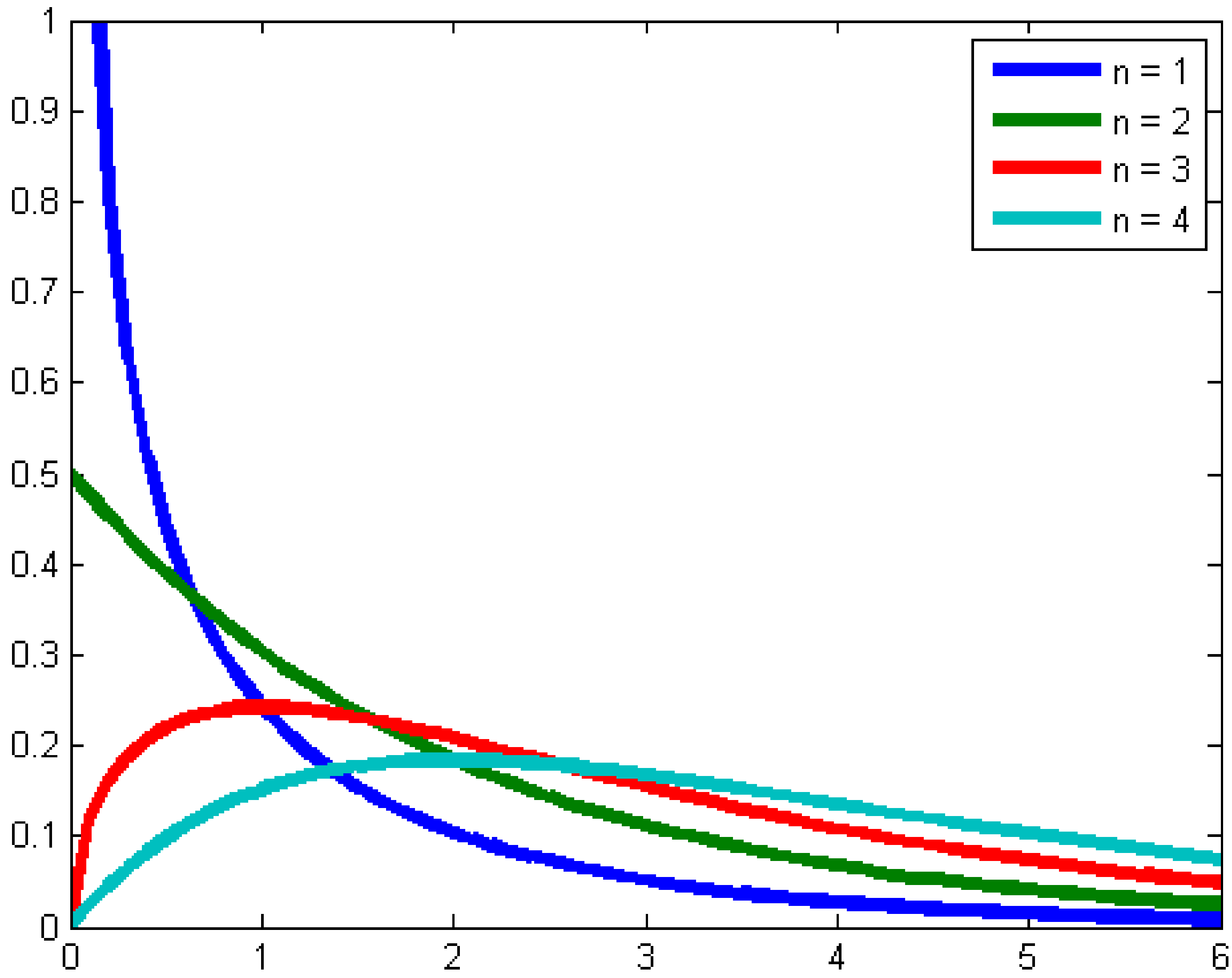
Média e variância

$$E[X] = n$$
$$\mathrm{var}[X] = 2n$$

Propriedades

- $y \geq 0$

Distribuição Qui-quadrado com n graus de liberdade



Continuar revisão através dos slides Fundamentos de probabilidade e estatística do site:

http://www2.ene.unb.br/gaborges/disciplinas/efe/index.htm