Universidade de Brasília   Faculdade UnB Gama

Mecânica do Voo

Determinação das condições de equilíbrio: Estudo simplificado

Referências Bibliográficas

- **ITEN 1.5**: Paglione, P. ; Zanardi, M. C., Estabilidade e Controle de Aeronaves, ITA, 1990.
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, Dynamics of Flight – Stability and Control, John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003

II – Movimento Longitudinal do Avião

6. DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE EQUILIBRIO: ESTUDO SIMPLIFICADO

Item 1.5 da apostila

6. DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO: ESTUDO SIMPLIFICADO

- **Procura-se os valores das grandezas δ_P e F que devem ser fixados pelo piloto, para obter um voo de equilíbrio.**

- **Qual valor de δ_{p_e} e F_e de modo que:**

$$V = V_e\ ,\ \gamma = \gamma_e, \qquad q = 0,\ \alpha = \alpha_e$$

- **Analisa-se as equações do movimento considerando:**

$$\frac{dV}{dt} = 0, \quad \frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad q = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}$$

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO LONGITUDINAL

Equação do arrasto

$$m\frac{dV}{dt} = -m\,g\,sen\,\gamma - \frac{1}{2}\rho\,S\,V^2 C_D + F\ \cos(\alpha + \alpha_F) \qquad 1.1a$$

Equação da sustentação

$$m\,V\,\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\rho\,S\,V^2 C_L + F\,sen(\alpha + \alpha_F) - m\,g\cos\gamma \qquad 1.2a$$

Equação do momento em torno do CG

$$I_y\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\rho\,S\,V^2 l\left(C_{m_o} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\delta_P}}\delta_P + C_{m_q}\frac{ql}{V} + C_{m_{\dot\alpha}}\frac{\dot\alpha\,l}{V}\right) \qquad 1.3a$$

Relação geométrica

$$\theta = \alpha + \gamma \qquad 1.4$$

Relação cinemática

$$\frac{dH}{dt} = V\,sen\,\gamma \qquad 1.5$$

Com as condições de equilíbrio, as equações se tornam:

$$F_e \cos(\alpha_e + \alpha_F) = \frac{1}{2}\rho_e\, S\, V_e^2 C_{D_e} + m\, g\, sen\, \gamma_e$$

$$\frac{1}{2}\rho_e\, S\, V_e^2 C_{L_e} = m\, g \cos\gamma_e - F_e\, sen(\alpha_e + \alpha_F)$$

$$C_{m_0} + C_{m_\alpha}\,\alpha_e + C_{m_{\delta_P}}\,\delta_{P_e} = 0$$

Lembrando que

$$C_{Le} = C_L\,(\alpha_e) \quad e \quad C_{De} = C_D\,(\alpha_e) = C_{D0} + k\,(C_{Le})^2$$

Para a determinação das condições de equilíbrio iniciais. Serão assumidas algumas simplificações.

Hipóteses simplificadoras:

1) os ângulos $\alpha + \alpha_F$ e γ são suficientemente pequenos para que as aproximações seguintes sejam válidas:

$$sen\,(\alpha + \alpha_F) = \alpha + \alpha_F \quad ; \quad sen\,\gamma = \gamma$$

$$cos\,(\alpha + \alpha_F) = 1 \quad ; \quad cos\,\gamma = 1$$

2) O termo $F\,sen(\alpha + \alpha_F)$ pode ser desprezado quando comparado com mg numa primeira aproximação para os ângulos de ataque moderados.

Isso é válido pois a tração máxima F é da ordem de $0,2$ vezes o peso mg do avião para as aeronaves de transporte clássicas e $0,4$ vezes para os aviões de transporte supersônicos, podendo atingir de $0,5$ a $0,6$ para os caças.

Com as suposições anteriores, tem se:

$$F_e = \frac{1}{2}\rho_e\, S\, V_e^2 C_{D_e} + m\, g\ \gamma_e \qquad (1)$$

$$m\, g = \frac{1}{2}\rho_e\, S\, V_e^2 C_{L_e} \qquad (2)$$

$$C_{m_o} + C_{m_\alpha}\alpha_e + C_{m_{\delta_P}}\delta_{P_e} = 0 \qquad (3)$$

- **Vamos representar** $C_{m_{\delta_P}}$ **como** C_{m_δ}**.**
- **Se conhecemos a velocidade de equilíbrio e o ângulo de trajetória de voo, para cada altitude, a partir de (2) determinamos o coeficiente de sustentação e com a polar de arrasto o coeficiente de arrasto:**
- $C_{L_e} = 2\, mg/\rho_e S V_e^2$ $\qquad$ $C_{De} = C_{D0} + k\,(C_{Le})^2$
- **Determina se** α_e *através de* $C_{Le} = C_L\,(\alpha_e)$, **muitas vezes dado por:** $C_L = C_{L_\alpha}\alpha_e$
- **Por (1) determinamos a força de tração** F_e**.**

Assim, com o ângulo de ataque conhecido, determina se a deflexão do profundor através de (3)

$$\delta_P = \delta_{P_e} = -\frac{C_{m_o} + C_{m_\alpha}\alpha_e}{C_{m_{\delta_P}}}$$

O procedimento inverso, conhecidos δ_{P_e} e F_e, pode se:

- determinar α_e através de (3),

- com α_e e a polar de arrasto determina se C_{L_e} e C_{D_e}

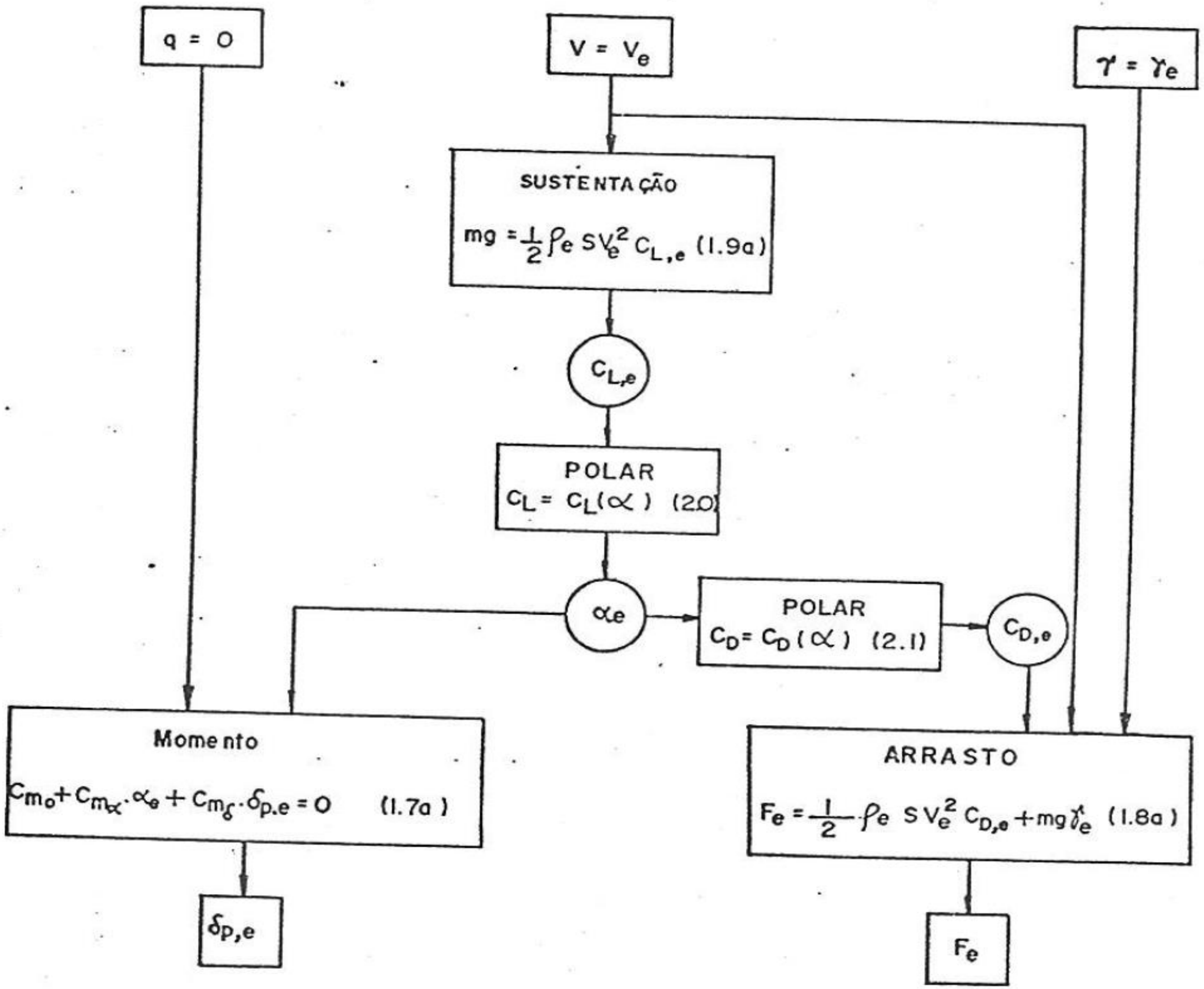
$-$ V_e **determinado através de (2) e**

$-$ γ_e **através de (1)**

Para o voo de descida e subida $\gamma_e \neq 0$ e a altitude varia, variando densidade e gravidade.

- **Logo dados V_e e γ_e é necessário considerar a variação da densidade com a altura, de modo que F_e e α_e se alteram com a altitude e portanto a cada instante.**
- **Assim para manter V_e e γ_e é preciso atuar continuamente na manete (para alterar F_e)**

E no profundor (para alterar α_e)


q = 0
V = V_e
γ = γ_e
SUSTENTAÇÃO
mg = 1/2 ρ_e S V_e^2 C_L,e (1.9a)
C_L,e
POLAR
C_L = C_L(α) (2.0)
α_e
POLAR
C_D = C_D(α) (2.1)
C_D,e
Momento
C_m0 + C_mα · α_e + C_mδ · δ_p.e = 0 (1.7a)
ARRASTO
F_e = 1/2 ρ_e S V_e^2 C_D,e + mg γ_e (1.8a)
δ_p,e
F_e

EXERCÍCIOS

- **1) Calcule as condições de equilíbrio F_e e δ_e para o AIRBUS em voo horizontal com**

$$V_e = 200\,\frac{m}{s},\ \gamma_e = 1,45^\circ\ e\ \ H_e = 9\ km.$$

$$m = 120000\ kg, \quad S = 260\ m^2, \quad l = 6,608\ m, \quad I_y = 9,72 \times 10^6 kg\ m^2$$

$$C_D = 0,0175 + 0,05\ C_L^2, \qquad C_{m_\alpha} = -1,48, \qquad C_{L_\alpha} = 5,05$$

$$C_{m_q} = -11, \qquad C_{L_\delta} = 0,435, \qquad C_{m_\delta} = -1,46, \qquad C_{m_0} = -0,01$$

EXERCÍCIOS

- **2) Calcule as condições de equilíbrio V_e, δ_e e F_e para o MIRAGE III em voo horizontal com**

$$\alpha_e = 3,16°, \ \gamma_e = 1,35° \ e \ \ H_e = 4 \ km.$$

$$m = 7400 \ kg, \quad S = 36 \ m^2, \quad l = 5,25 \ m, \quad I_y = 50000 \ kg \ m^2$$

$$C_D = 0,015 + 0,4 \ C_L^2, \qquad C_{m_\alpha} = -0,17, \qquad C_{L_\alpha} = 2,20$$

$$C_{m_q} = -0,4, \qquad C_{L_\delta} = 0,70, \qquad C_{m_\delta} = -0,45, \qquad C_{m_0} = -0,03$$

DETERMINAÇÃO DA ACELERAÇÃO DE GRAVIDADE EM UMA ALTITUDE H

- $g = \dfrac{\mu}{(R_T + H)^2}$

- $\mu = constante\ gravitacional\ da\ Terra$
- $\mu = 3{,}986\ x\ 10^{14}\ m^3/s^2$
- $R_T\ - raio\ equatorial\ da\ Terra$
- R_T = 6.378 km = 6.378.000m

DETERMINAÇÃO DA DENSIDADE EM UMA ALTITUDE H

$$\rho = \rho_0\{1 + \frac{A_0}{T_0}(H - H_0)\}^{-(1+\frac{g_0}{A_0 R*})}$$

- ρ_0 - densidade ao nível do mar = 1,225 kg/m^3
- H_0 - altitude ao nível do mar = 0 m
- $T_0 = 288{,}15\ K$ $\quad$ $A_0 = -6{,}5\ x\ 10^{-3}\ K/m$
- $g_0 - aceleração\ ao\ nivel\ do\ mar = 9{,}80665\ m/s^2$
- R* - constante universal dos gases = 287,043 $\frac{m^2}{Ks^2}$
- K – Kelvin