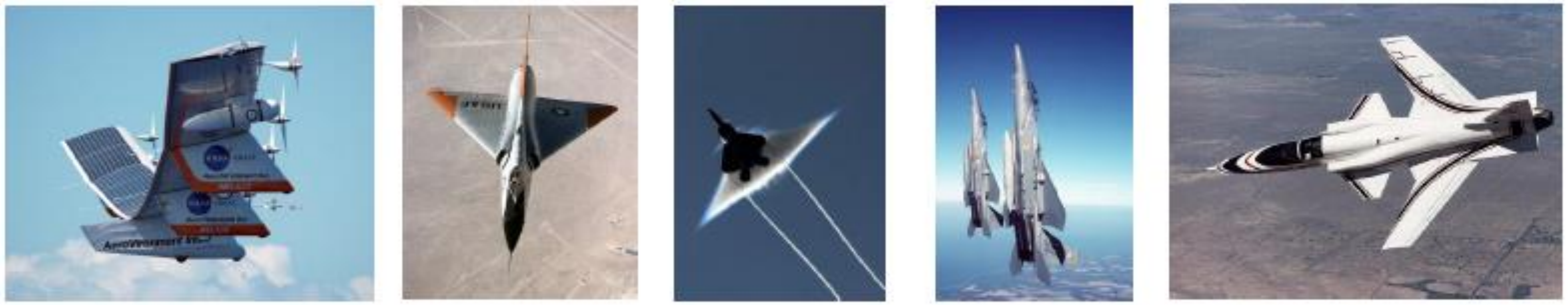
Universidade de Brasília

Faculdade UnB Gama

Mecânica do Voo

Sistemas de referência, atitude, matriz de rotação



Referências

Sugestão de referência:

- Etkin, B. – Dynamics of Atmospheric Flight, Capítulo 4 e início do 5
- Stevens, B. and Lewis, F. - Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003., Capítulo 1
- PAGLIONE, P. ; ZANARDI, M. C., Estabilidade e Controle de Aeronaves, ITA, 1990.

Outros livros – contém apenas explicações muito breves:

- Hull, D. – Fundamentals of airplane flight mechanics, Seção 2.1
- NELSON, R. – Flight stability and automatic control, Seção 1.6

Introdução

- Sistemas de referência
- Também conhecido como sistema de coordenadas ou eixos coordenados
- Usado para descrever os mais diversos vetores e propriedades:
  - Posição, velocidade, aceleração
  - Força, torque
  - Momentos de inércia
- Os sistemas mecânicos podem ser descritos em qualquer sistema de referência
- Alguns serão mais convenientes que outros
- Informações podem ser convertidas de um sistema para outro
- Sistemas podem se mover e/ou rotacionar em relação a outros

Revisão Vetores

- Operação com vetores

$$\boldsymbol{v}_1 = [x_1 \;\; y_1 \;\; z_1]^T, \qquad \boldsymbol{v}_2 = [x_2 \;\; y_2 \;\; z_2]^T$$

- Norma

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1)^{\frac{1}{2}}$$

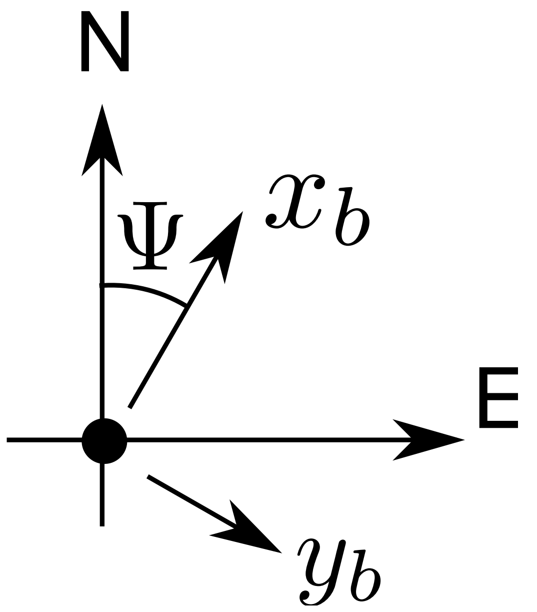
- Produto escalar (dot product)

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \|\boldsymbol{v}_1\| \|\boldsymbol{v}_2\| \cos\theta$$

- Produto vetorial (cross product)

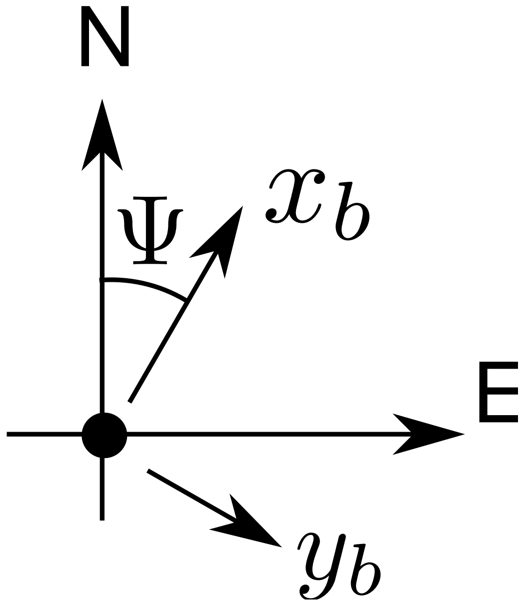
$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = [\boldsymbol{v}_1]_\times \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Sistema NED

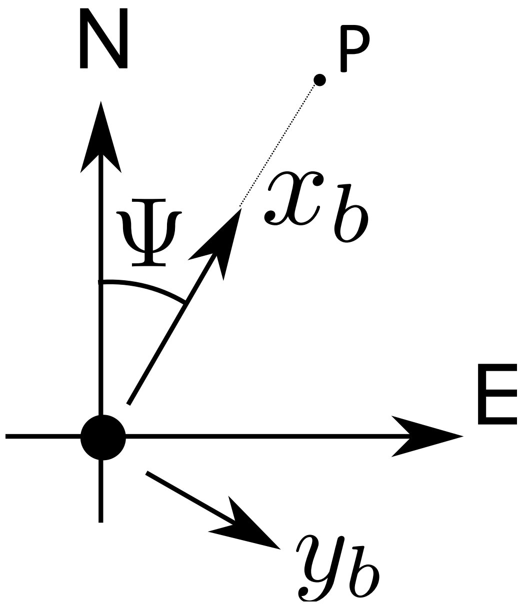


Exemplo em duas dimensões:

- As direções norte e leste definem um sistema de referência S_{NED}.
  - S: letra usada para representar sistemas de referência
  - N: north (norte)
  - E: east (leste)
  - D: down (vertical para baixo, omitido)
- A direção frontal e lateral definem um sistema de referência do corpo S_b
  - x_b é a frente
  - y_b é a lateral direita
- Ambos os eixos são dextrogiros (regra da mão direita), e os eixos de referência são ortogonais e de norma unitária (ortonormais)
- Ψ é o ângulo de rotação entre os sistemas



- Se a pessoa diz: estou vendo um ponto 10 m à minha frente, e se $\Psi = 30°$, qual a coordenada desse ponto no sistema S_{NED} ?
- Atenção: na definição que estamos usando, a coordenada possui formato (N,E), sendo o contrário do usual (ou seja, o "eixo x", ou primeiro eixo, está para cima no desenho).



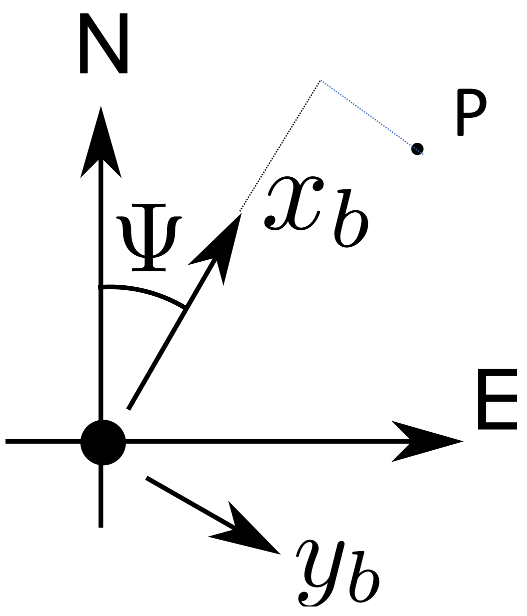
- Por trigonometria:

$$p_N = 10\cos 30° \approx 8{,}66$$
$$p_E = 10\sin 30° = 5$$

- Assim: $\boldsymbol{p}_{\mathrm{NED}} = \begin{bmatrix} 8{,}66 \\ 5 \end{bmatrix}$. Veja que $\boldsymbol{p}_b = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

- O subscrito NED ou b indicam qual o sistema de referência utilizado para descrever ***p***

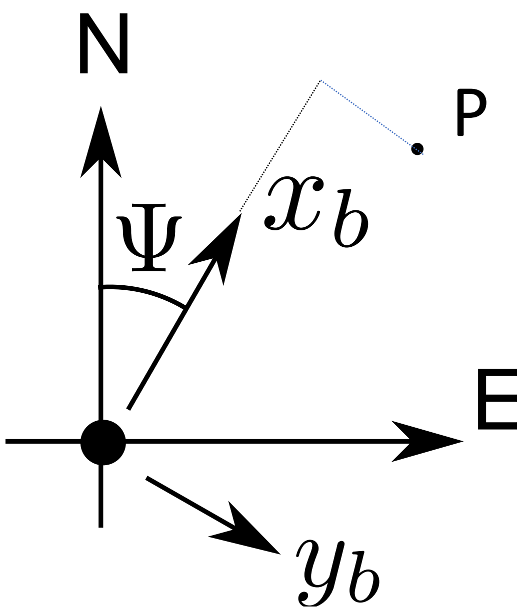
- Veja que $\|\boldsymbol{p}_{\mathrm{NED}}\| = \|\boldsymbol{p}_{\mathrm{b}}\| = 10$



- Agora o ponto está 10 metros à frente, e 3 metros à direita da pessoa. Ou seja:

$$\boldsymbol{p}_b = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Qual a coordenada no sistema S_{NED}?



- Agora o ponto está 10 metros à frente, e 3 metros à direita da pessoa. Ou seja:

$$\boldsymbol{p}_b = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Qual a coordenada no sistema S_{NED}?

Solução:

- Os efeitos das distâncias podem ser tratados de modo separado e somados ao final. Assim:

$$p_N = 10\cos 30° - 3\sin 30° \approx 7{,}16$$
$$p_E = 10\sin 30° + 3\cos 30° \approx 7{,}60$$

Transformações de Coordenadas

- Podemos escrever a equação anterior de forma matricial.

$$\begin{bmatrix} p_N \\ p_E \\ p_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{p}_{NED} = \boldsymbol{D}_{NED}^{b}\boldsymbol{p}_b$$

- A transformação de coordenada é uma transformação linear
- A matriz $\boldsymbol{D}$ é chamada de matriz de rotação ou matriz de cossenos diretores (em inglês, a sigla é DCM)
- A matriz $\boldsymbol{D}_{NED}^{b}$ apresentada aqui é uma versão simplificada, com apenas uma rotação. A matriz completa será vista adiante
- A notação b em cima e NED em baixo, usada aqui, remete a frações para facilitar a memorização: b de cima em ***D*** cancela o b de baixo em ***p***, sobrando NED em baixo na resposta:

$$\boldsymbol{p}_{NED} = \boldsymbol{D}_{NED}^{\cancel{b}}\boldsymbol{p}_{\cancel{b}}$$

- Cada linha da matriz $\boldsymbol{D}_{NED}^{b}$ é um vetor unitário que descreve o sistema de referência S_b, representado no sistema de referência S_{NED}. Veja que os eixos que descrevem S_b, descritos em S_b, são:

$$\boldsymbol{x}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{z}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Descrevendo os mesmos eixos em S_{NED}

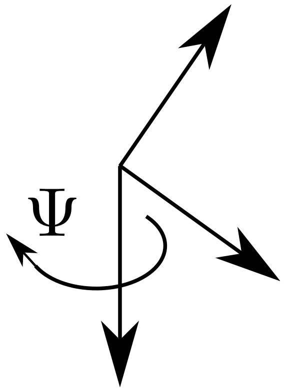
$$[\boldsymbol{x}_b]_{NED} = \boldsymbol{D}_{NED}^{b}\boldsymbol{x}_b = \begin{bmatrix} \cos\Psi \\ \sin\Psi \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{y}_b]_{NED} = \begin{bmatrix} -\sin\Psi \\ \cos\Psi \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{z}_b]_{NED} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Então, veja que:

$$\boldsymbol{D}_{NED}^{b} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{x}_b]_{NED} & [\boldsymbol{x}_b]_{NED} & [\boldsymbol{z}_b]_{NED} \end{bmatrix}$$

- Veja que, no exemplo $\boldsymbol{D}_{NED}^{b}$, a terceira linha é [0 0 1] e, similarmente, a terceira coluna é $[0\ 0\ 1]^T$. Isso indica que a terceira dimensão (vertical) não é alterada, de forma que é igualmente definida em ambos os sistemas de referência.

- A rotação é definida no eixo inalterado. No exemplo, uma rotação em torno do eixo z rotaciona eixos x e y.
- Sentido positivo da rotação dado pela regra da mão direita
- Como cada coluna da matriz é um eixo normal (norma unitária), essas colunas (se consideradas vetores) possuem norma unitária
- É possível mostrar que a mesma propriedade vale para as linhas da matriz, ou seja, elas também possuem norma unitária.
- Como os eixos são ortogonais, a matriz possui determinante não nulo e, por isso, inversa
- Com algumas exceções, é padronizado que os ângulos são definidos de modo que, se são nulos, não há rotação, e a matriz **D** decai para a identidade (ou seja, não faz nada). Devido a isso, a diagonal principal só pode conter cosseno ou o valor 1.



- O vetor $\boldsymbol{p}$ tem que possuir a mesma norma em qualquer sistema de referência. Então:

$$\boldsymbol{p}_{NED}^T \boldsymbol{p}_{NED} = \boldsymbol{p}_b^T \boldsymbol{p}_b$$

$$\boldsymbol{p}_{NED}^T \boldsymbol{p}_{NED} = \boldsymbol{p}_{NED}^T \left[\boldsymbol{D}_b^{NED}\right]^T \boldsymbol{D}_b^{NED} \boldsymbol{p}_{NED}$$

- A igualdade acima só é válida se

$$\left[\boldsymbol{D}_b^{NED}\right]^T = \left[\boldsymbol{D}_b^{NED}\right]^{-1}$$

- Assim, a matriz de rotação possui inversa igual a transposta
- A transformação linear inversa, então, é

$$\boldsymbol{p}_b = \boldsymbol{D}_b^{NED} \boldsymbol{p}_{NED}, \qquad \boldsymbol{D}_b^{NED} = \left[\boldsymbol{D}_{NED}^b\right]^T$$

- Ou seja:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_N \\ p_E \\ p_D \end{bmatrix}$$

- A matriz ***D***, então, é uma matriz ortonormal.

- Vimos que:

$$\boldsymbol{D}_{NED}^{b} = \left[[\boldsymbol{x}_b]_{NED} \quad [\boldsymbol{x}_b]_{NED} \quad [\boldsymbol{z}_b]_{NED}\right]$$

- Da mesma forma:

$$\boldsymbol{D}_{b}^{NED} = [\boldsymbol{N}_b \quad \boldsymbol{E}_b \quad \boldsymbol{D}_b]$$

- Ou seja, $\boldsymbol{D}_{b}^{NED}$ é construído com a base vetorial de NED (vetores unidimensionais que apontam respectivamente para norte, leste e vertical), representada no sistema S_b
- Assim:

$$\boldsymbol{D}_{NED}^{b} = \left[\boldsymbol{D}_{b}^{NED}\right]^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_b^T \\ \boldsymbol{E}_b^T \\ \boldsymbol{D}_b^T \end{bmatrix}$$

- Então:

$$\boldsymbol{p}_{NED} = \boldsymbol{D}_{NED}^{b}\boldsymbol{p}_b = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_b \cdot \boldsymbol{p}_b \\ \boldsymbol{E}_b \cdot \boldsymbol{p}_b \\ \boldsymbol{D}_b \cdot \boldsymbol{p}_b \end{bmatrix}$$

- Ou seja, as componentes de $\boldsymbol{p}_{NED}$ são as projeções ortográficas de $\boldsymbol{p}$ em seus eixos.

- Pode-se usar a mesma lógica da rotação no eixo z para rotações nos outros 2 eixos. Com isso, obtém-se:

$$\boldsymbol{D}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- θ, aqui é um ângulo qualquer

Veja que:

- A linha/coluna referente ao eixo de rotação contém apenas zeros e 1
- A diagonal principal contém apenas cosseno ou 1
- Pode ser necessário aplicar até 3 rotações distintas para ir de um sistema de referência a outro. As rotações são aplicadas uma por vez, e **a sequência é importante**. Por exemplo, se desejamos transformar um vetor $\boldsymbol{v}_a$ em $\boldsymbol{v}_b$ através de uma sequência 3-2-1 (z, depois y, depois x), fazemos:

$$\boldsymbol{v}_b = \boldsymbol{D}_x(\theta_x)\boldsymbol{D}_y\left(\theta_y\right)\boldsymbol{D}_z(\theta_z)\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{D}\left(\theta_z, \theta_y, \theta_x\right)\boldsymbol{v}_a$$

- Os ângulos de rotação são chamados de ângulos de Euler

Perguntas:

- Explicação matemática para “a ordem das rotações importa”
- Por que as matrizes parecem estar na ordem contrária?

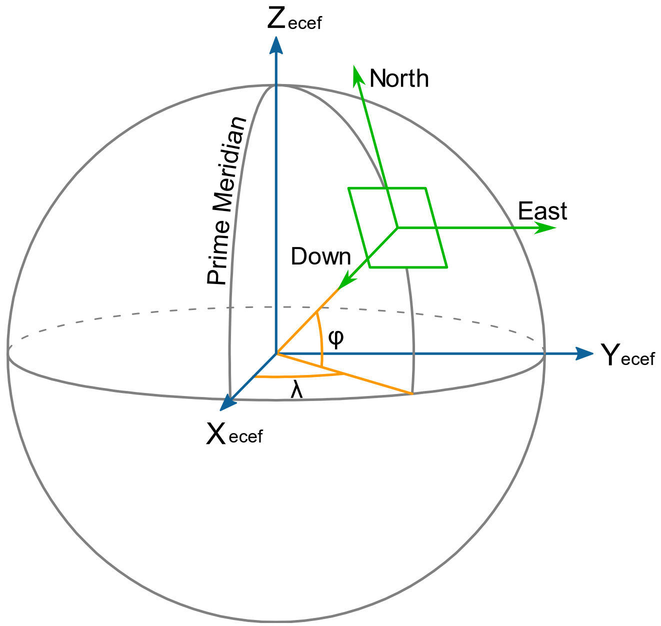
Sistema ECEF

Sistema de referência Earth Centered, Earth Fixed (centrado e fixado no planeta Terra) S_{ECEF}

- Centro coincide com centro da Terra, Eixo z alinhado com rotação da Terra, Eixos x e y no plano do equador e o Eixo x passa na latitude $\lambda = 0$ e longitude $\varphi = 0$
- x,y,z formam um sistema dextrógiro
- Sistema cartesiano (como os outros sistemas de referência), que pode ser mais apropriado do que descrever posição via latitude, longitude
- Rotaciona com a Terra com velocidade

$$\omega^e \approx \frac{2\pi}{dia} \approx 7{,}27 \cdot 10^{-5} \mathrm{rad}/s$$

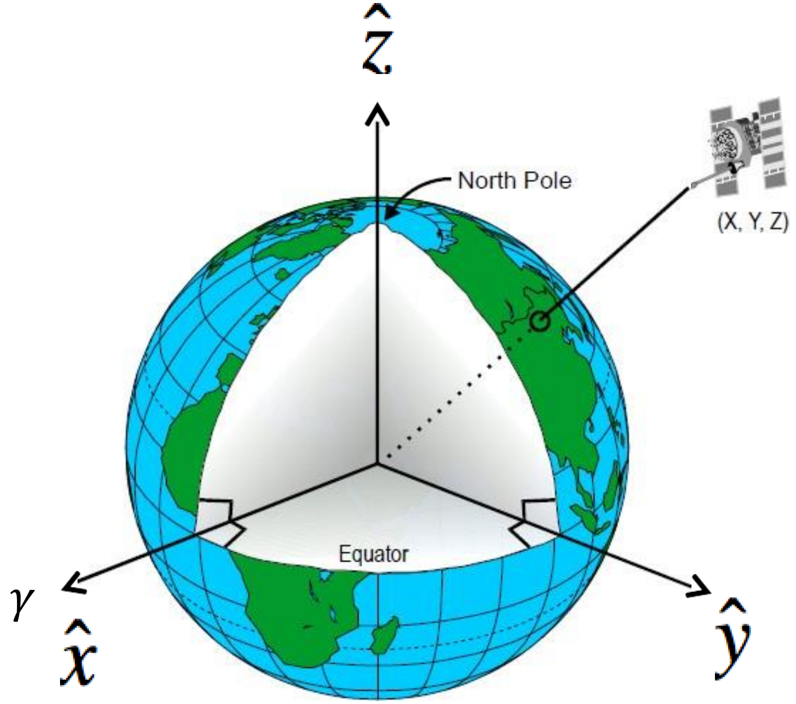
- Apropriado para grandes distâncias
- Exemplo: posição da nossa sala de aula (aproximada, considerando terra perfeitamente esférica): $[4\,099\,938 \quad -4\,560\,618 \quad -1\,757\,221]^T$ [m]



Sistema ECI

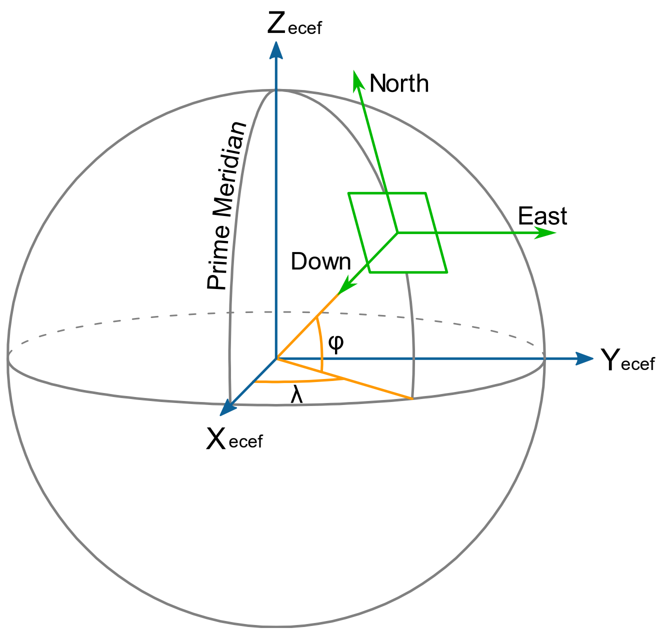
Sistema Earth Centered Inertial (centrado na Terra, inercial) S_{ECI}

- Similar ao ECEF: eixo z alinhado com vetor de rotação da Terra, eixos x e y no plano equatorial, mas não rotacionam com a Terra
- Definição elegante: eixo x aponta para estrela fixa distante equinócio vernal (γ) ou à constelação de Áries (fixada no primeiro de janeiro de 2000 às 12.00 GMT ou J2000)
- Definição mais usada: igual ao ECEF em $t = 0$ (decolagem, início da simulação, etc.), mas não rotaciona com a Terra após isso
- Para todos os efeitos práticos em mecânica do voo, é um referencial inercial, ou seja, não está acelerado, não possui forças fictícias. É o referencial em que as leis de Newton devem ser avaliadas.
- Um sistema inercial é importante durante a dedução de equações. Explica efeitos não inerciais de outros referenciais.



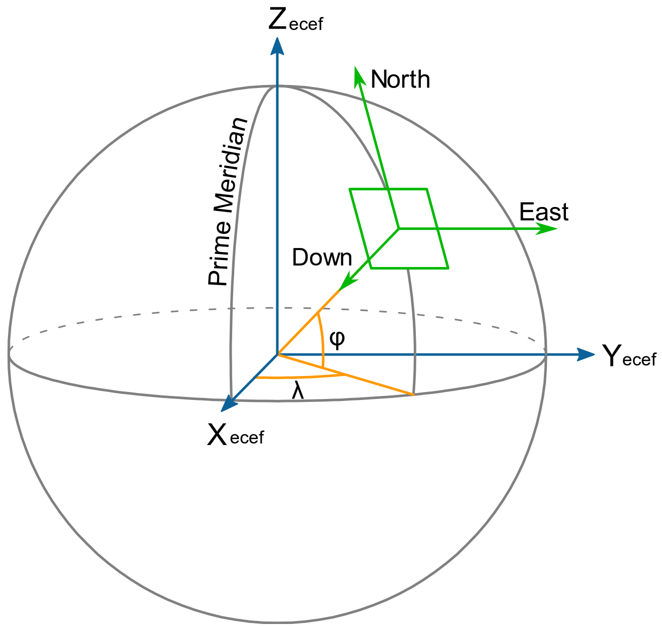
Sistema NED

- Sistema de referência North-East-Down (norte, leste, vertical para baixo) S_{NED}
- Centro coincide com centro do avião, da estação de solo, ou qualquer ponto de referência próximo
  - Eixo z aponta para centro da Terra (para baixo)
  - Eixo x aponta para norte **local**
  - Eixo y aponta para leste **local**
- Vetores mudam conforme posição no globo, por isso foi usada a palavra **local**.
- Curvatura da Terra pode dificultar uso em grandes distâncias



Sistema NED e ECEF

- Matriz de rotação ECEF para NED



$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{NED}}^{\mathrm{ECEF}} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & 0 & -\sin(-\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\varphi) & 0 & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

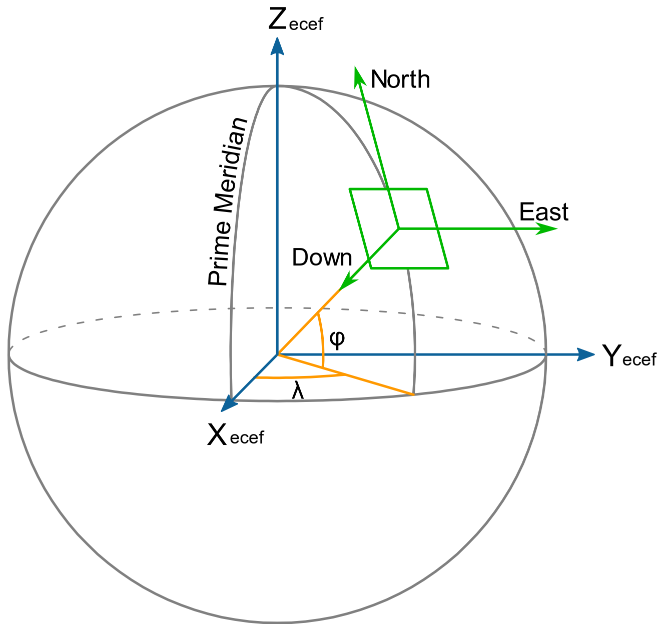
$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{NED}}^{\mathrm{ECEF}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{NED}}^{\mathrm{ECEF}} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi\cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Sistema NED e ECEF

- Matriz de rotação ECEF para NED

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{NED}}^{\mathrm{ECEF}} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi\cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$



1. Qual é a matriz $\boldsymbol{D}_{\mathrm{ECEF}}^{\mathrm{NED}}$?
2. Em qual sistema é mais fácil definir o vetor rotação angular da Terra? Como é o vetor? Assuma velocidade angular da Terra ω^e
3. Em qual sistema é mais fácil definir a gravidade local? Como é o vetor? Assuma magnitude g, ignore o efeito de rotação da Terra.
4. Compute os vetores anteriores no outro sistema de coordenadas

Sistemas NED e ECEF

- 1. Qual é a matriz $\boldsymbol{D}_{\text{ECEF}}^{\text{NED}}$?

$$\boldsymbol{D}_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} = \left(\boldsymbol{D}_{\text{NED}}^{\text{ECEF}}\right)^{T}$$

- 2. Em qual sistema é mais fácil definir o vetor rotação angular da Terra?

ECEF

- Como é o vetor?

$$\boldsymbol{\omega}_{ECEF}^{ECEFi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^{e} \end{bmatrix}$$

- 3. Em qual sistema é mais fácil definir a gravidade local?

NED

- Como é o vetor

$$\boldsymbol{g}_{NED} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

- 4. Compute os vetores anteriores no outro sistema de coordenadas

$$\boldsymbol{\omega}_{NED}^{ECEFi} = \boldsymbol{D}_{\text{NED}}^{\text{ECEF}} \boldsymbol{\omega}_{ECEF}^{ECEFi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} \omega^{e}$$

$$\boldsymbol{g}_{ECEF} = \boldsymbol{D}_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} \boldsymbol{g}_{NED} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\cos\lambda \\ -\cos\varphi\sin\lambda \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} g$$

Sistema de Coordenadas

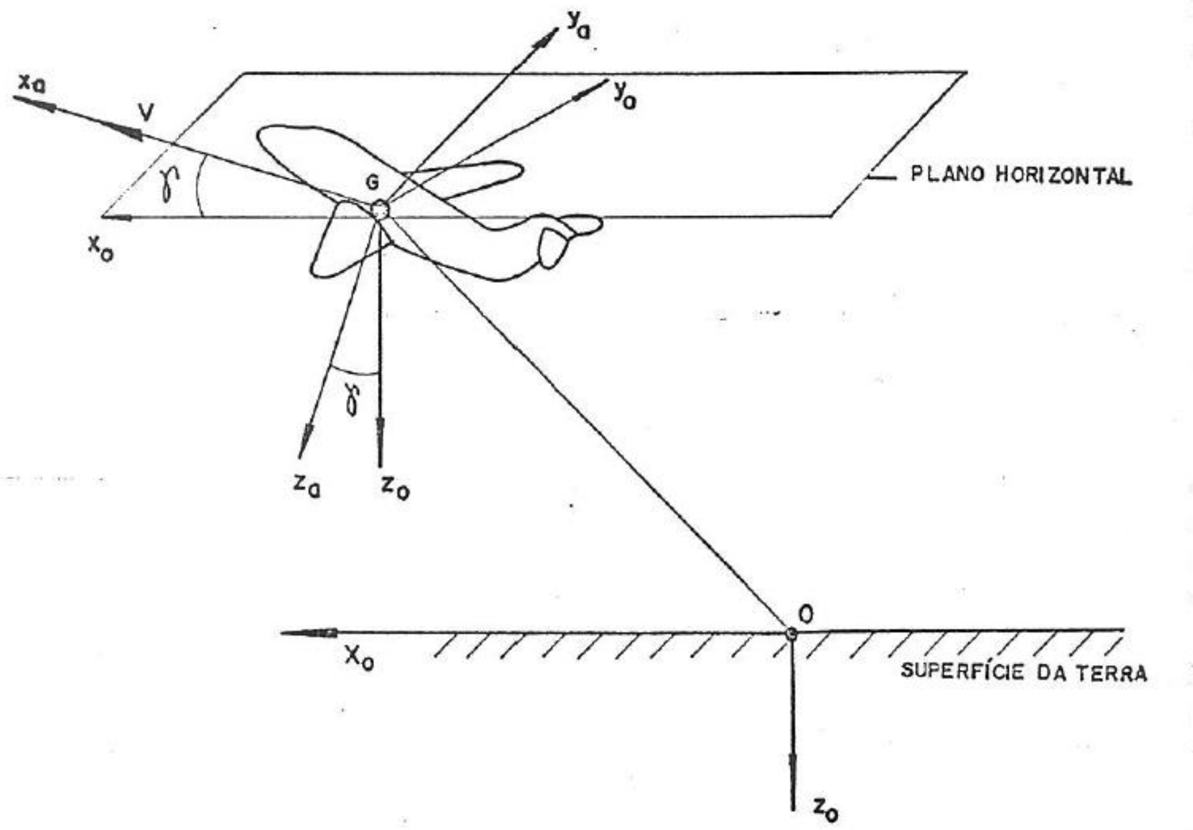
- Em análises de Estabilidade e Controle de Aeronaves, a utilização de uma Terra plana e não girante é uma boa aproximação.
- Nesse caso, um sistema de coordenadas fixo na Terra pode ser considerado como inercial. Os principais sistemas utilizados são:

Sistema Terrestre (NED): $\mathbf{Ox_o y_o z_o}$

Sistema Terrestre no avião: $\mathbf{Gx_o y_o z_o}$

Sistema do Avião (do corpo) ou Sistema da Aeronave : **Gxyz**

Sistema do Vento ou Aerodinâmico: $\mathbf{Gx_a y_a z_a}$



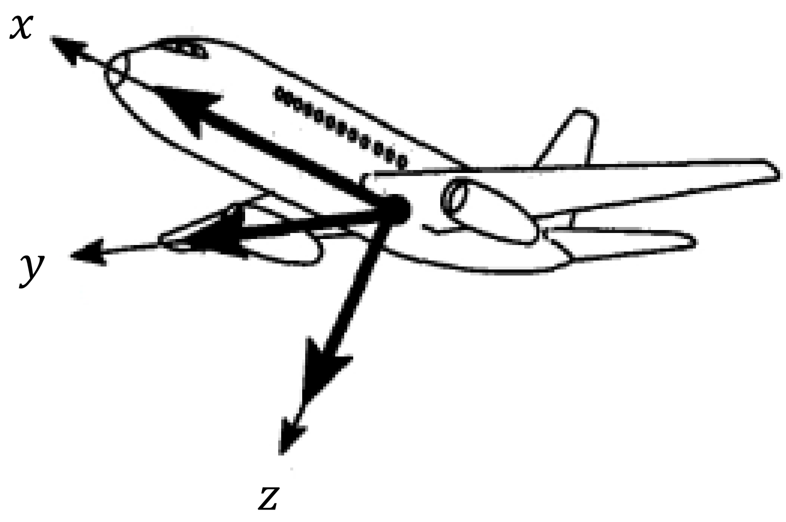
ϒ – ângulo de trajetória de voo – ângulo que a velocidade forma com plano do horizonte

Quando não existe guinada, o eixo y_a coincide com y_o

Sistema terrestre $Ox_oy_oz_o$ e sistema aerodinâmico $Gx_ay_az_a$

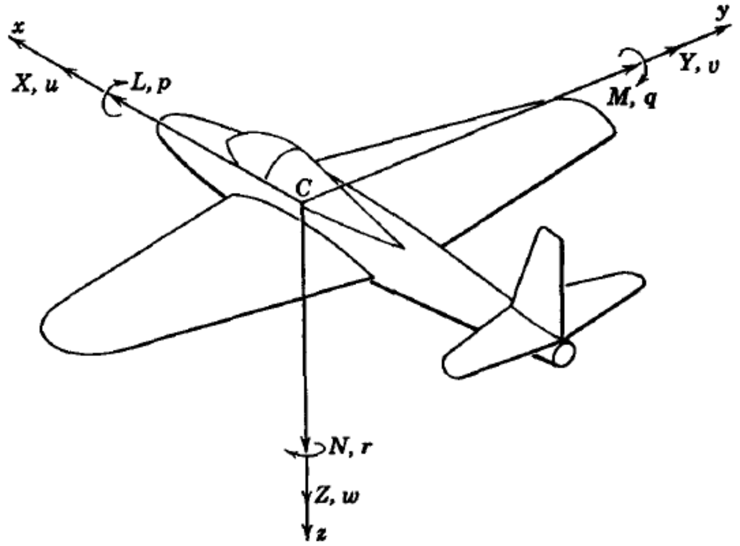
Sistema de Coordenadas

- **sistema do corpo, “body axes”** : utilizado em estabilidade e controle, simulação de voo e para referenciar grandezas dinâmicas medidas por sensores fixos à estrutura da aeronave como acelerações e velocidades angulares.



- origem G: CM do veículo;
- eixo-x: arbitrário, mas normalmente coincide com a linha de referência da fuselagem;
- eixo-z: no plano de simetria da aeronave, apontando para fora do ventre da aeronave;
- eixo-y: completa um triedro ortogonal dextrógiro

Sistema de Coordenadas



Sistema da aeronave ou do avião: Gxyz

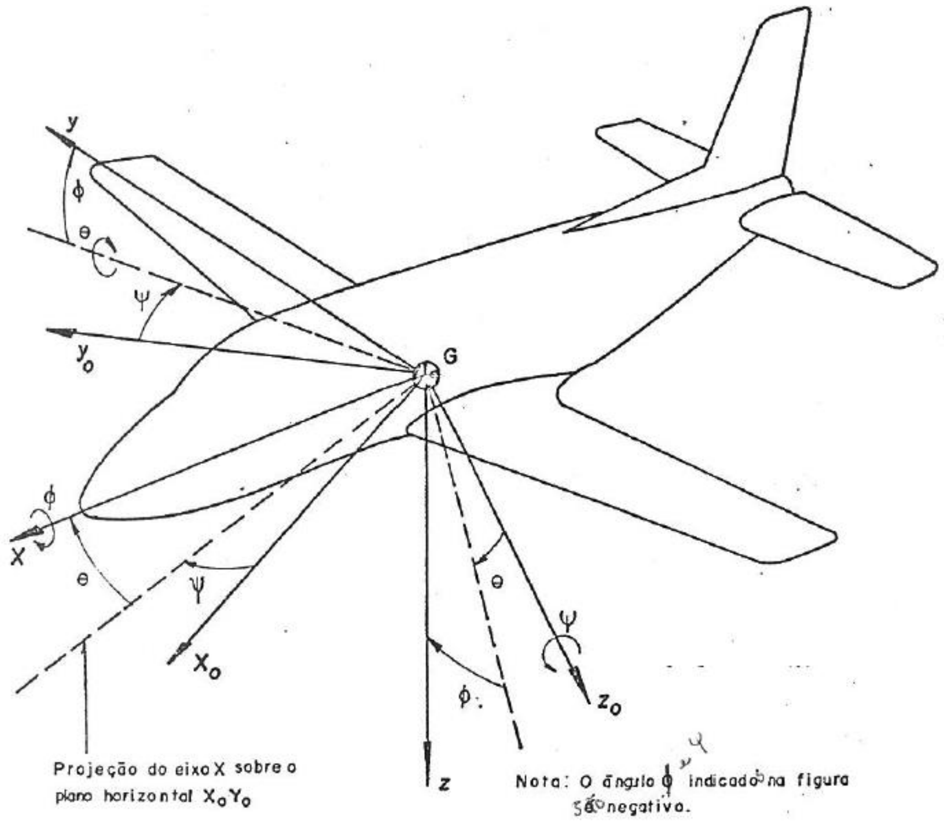
L – momento de rolamento, M – momento de arfagem, N – momento de guinada

p – velocidade de rolamento, q – velocidade de arfagem, r- velocidade de guinada

(X, Y, Z) componente da força aerodinâmica resultante

(u, v, w) – componentes da velocidade relativa a atmosfera.

Universidade de Brasília Faculdade UnB Gama



Ângulos de Euler 3-2-1:

Rotação de ψ em Gzo

Rotação de θ em Gy'

Rotação de ϕ em Gx

ψ –ângulo de azimute

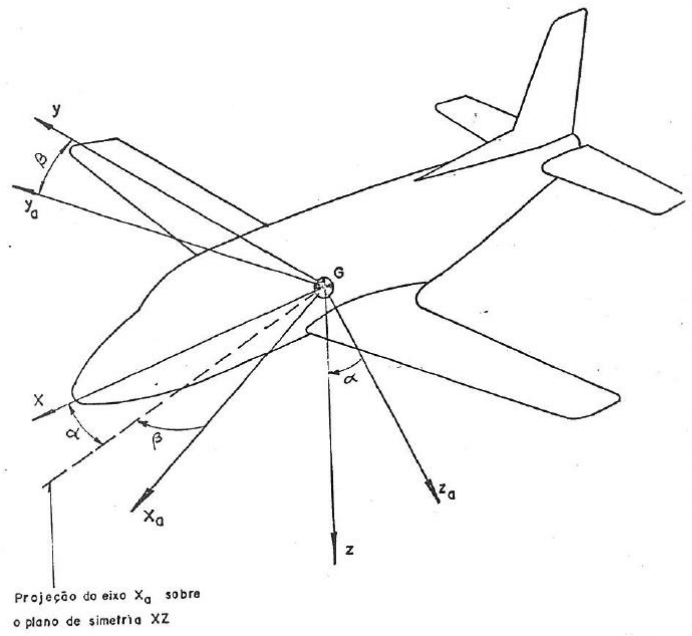
θ - ângulo de arfagem

ϕ – ângulo de rolamento

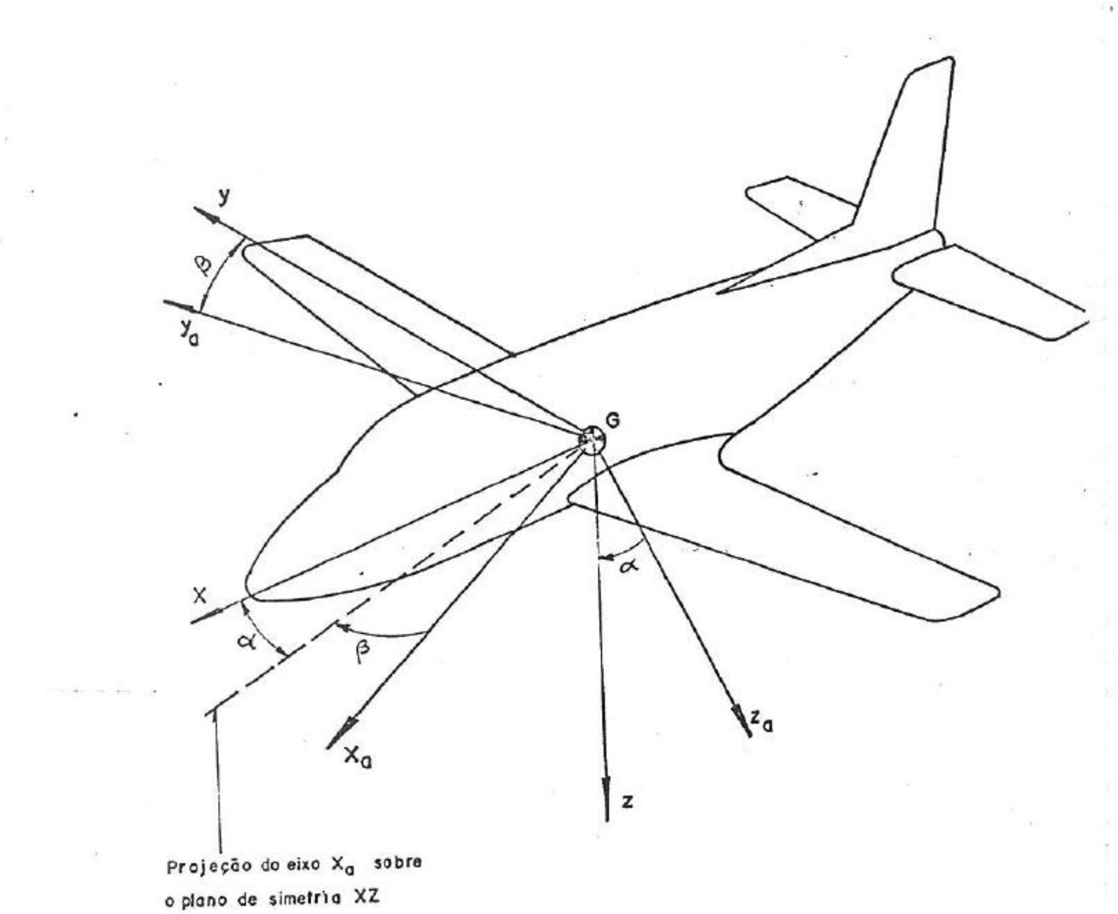
Sistema terrestre $Gx_oy_oz_o$ e sistema da aeronave Gxyz

Sistema de Coordenadas

- **sistema aerodinâmico**: também chamado de sistema de trajetória em relação ao ar, utilizado nos estudos de desempenho de aeronaves e para expressar as forças aerodinâmicas



- origem C: CM da aeronave;
- eixo-xa : coincide com o vetor velocidade da aeronave em relação ao ar (“vento relativo”)
- eixo-za : no plano de simetria da aeronave, apontando para fora do ventre da aeronave
- eixo-ya : completa um triedro ortogonal dextrógiro



O ângulo de ataque α é positivo quando a componente da velocidade no eixo Gz é positiva.

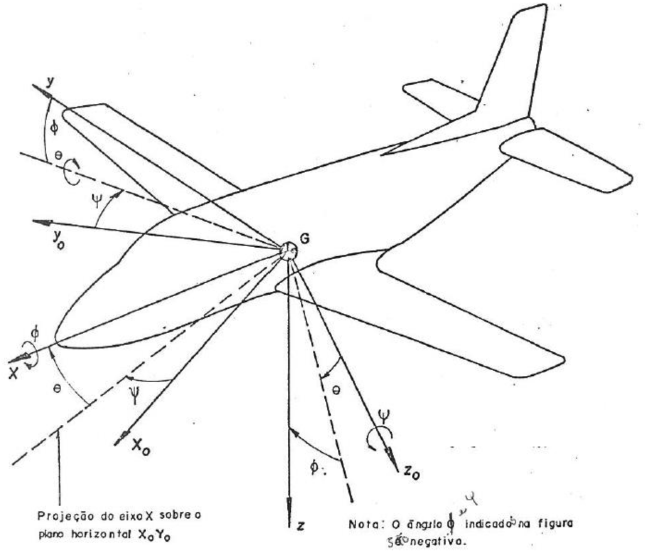
O ângulo de derrapagem β é positivo quando a componente da velocidade no eixo Gy é positiva.

Sistema aerodinâmico $Gx_ay_az_a$ e sistema da aeronave Gxyz

Relação entre os Sistema de Coordenadas

- Os ângulos de Euler expressam a orientação relativa entre dois sistemas de referência. Rotações sucessivas, numa ordem determinada, levam um sistema a coincidir com o outro. Os três principais conjuntos de ângulos de Euler usados na mecânica do voo são:
- sistema terrestre móvel para sistema do corpo: ψ, θ, φ (yaw, pitch, roll)
- sistema terrestre móvel para sistema aerodinâmico: χ, γ, μ (rumo, ângulo de trajetória, rolamento aerodinâmico)
- sistema aerodinâmico para sistema do corpo: $-\beta, \alpha, 0$ (ângulo de derrapagem, ângulo de ataque)

Relação entre os Sistema de Coordenadas



Atitude da aeronave é dada pelos ângulos de Euler da sequencia 3-2-1:

Rotação de ψ em Gzo

Rotação de θ em Gy'

Rotação de ϕ em Gx

ψ –ângulo de azimute

θ - ângulo de arfagem

ϕ – ângulo de rolamento

Estes ângulos relacionam o sistema terrestre com o sistema do avião:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = R(\psi, \theta, \phi) \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

V_x, V_y, V_z $-$ *components da velocidade no sistema* terrestre;

Relação entre os Sistema de Coordenadas

- $\boldsymbol{D}_b^{NED} = \boldsymbol{D}_x(\phi)\boldsymbol{D}_y(\theta)\boldsymbol{D}_z(\psi)$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

- ψ: Guinada $\qquad -180° \leq \psi \leq 180°$
- θ: Arfagem $\qquad -90° \leq \theta \leq 90°$
- ϕ: Rolamento $\qquad -180° \leq \phi \leq 180°$

Relação entre os Sistema de Coordenadas

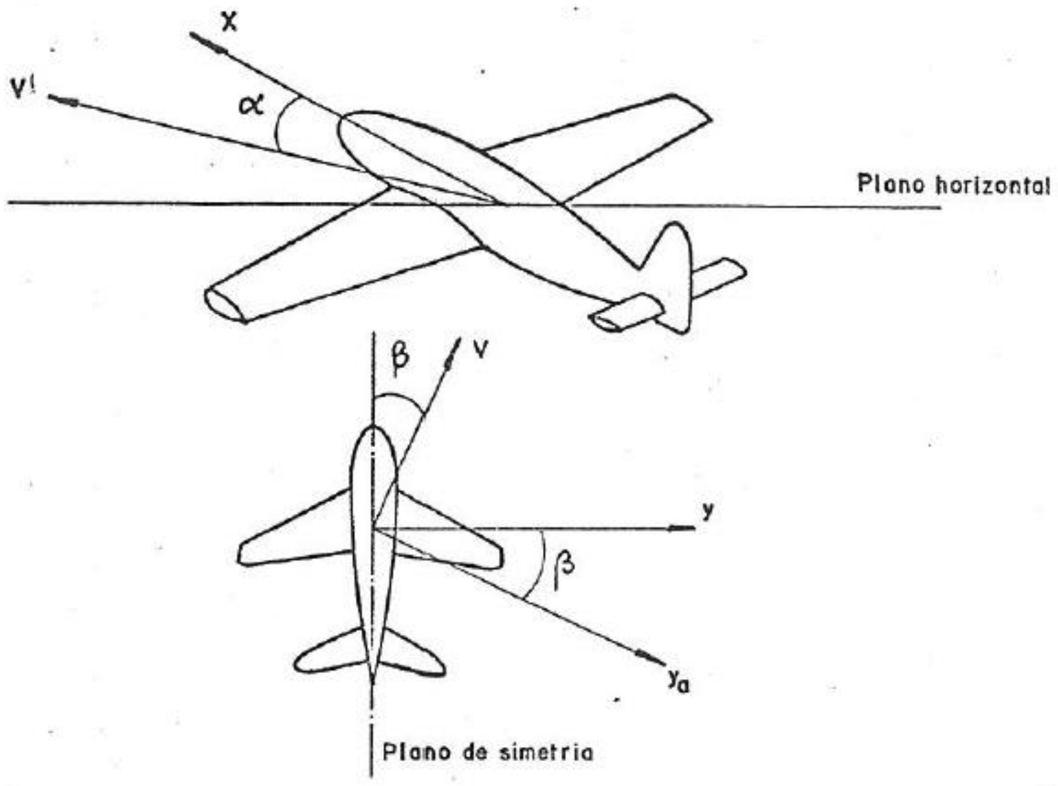
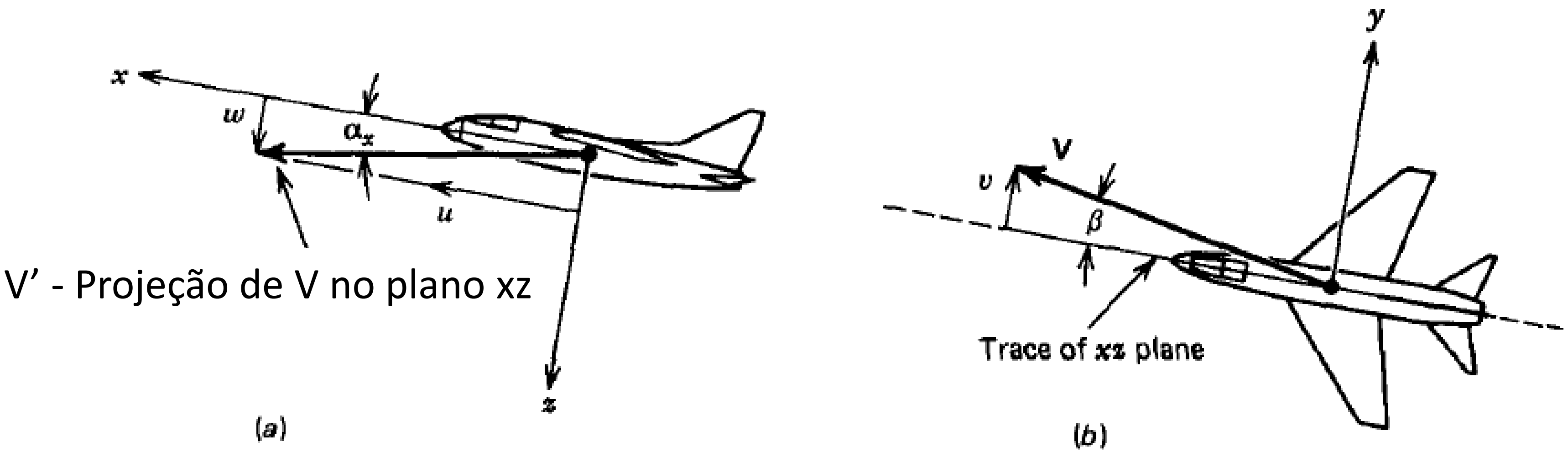


Fig. 18 - Ângulo de ataque (α) e Ângulo de derrapagem (β)

Velocidade no Sistema aerodinâmico

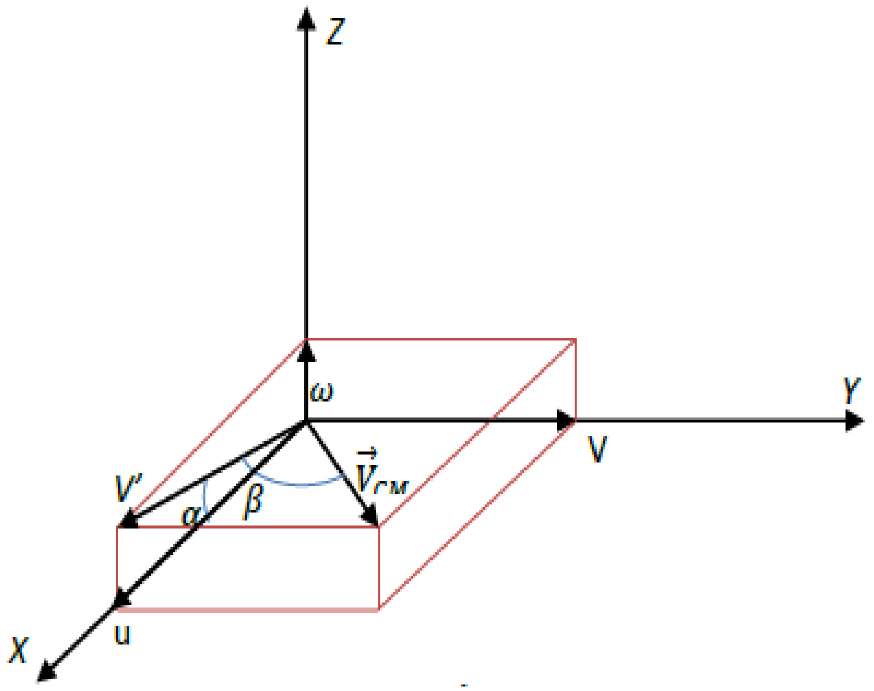
Componentes da velocidade *V* no sistema da aeronave: *u,v,w.*



(a) Definição do ângulo de ataque (b) Definição do ângulo de derrapagem

Quando não existe derrapagem, o ângulo de ataque é o ângulo que a velocidade forma com o eixo longitudinal Gx.

Componentes da velocidade *V* no sistema da aeronave: *u,v,w.*



Sistema do avião obtido do sistema aerodinâmico através das rotações:

Ângulo -β no eixo Gza

Ângulo α no eixo Gy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = R(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ângulo de ataque: $\alpha = tan^{-1}(\frac{w}{u})$

Ângulo de derrapagem: $\beta = tan^{-1}(\frac{v}{V\prime})$

$u = V \cos \beta \cos \alpha$

$v = V \text{ sen } \beta$

$w = V \cos \beta \text{ sen } \alpha$

$$\boldsymbol{D}_b^a = \boldsymbol{D}_y(\alpha)\boldsymbol{D}_z(-\beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Veja que a velocidade do avião, em S_a é

$$\boldsymbol{V}_a = [V_T \ \ 0 \ \ 0]^T$$

- Então:

$$\boldsymbol{V}_b = \boldsymbol{D}_b^a\boldsymbol{V}_a = \mathrm{V_T}\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

Posição do centro de gravidade com relação ao sistema terrestre, com vetores unitários ($\hat{\imath}_0, \hat{\jmath}_0, \hat{k}_0$)

$$\boxed{\vec{R} = x_0\ \hat{\imath}_0, + y_0\ \hat{\jmath}_0 + z_0\ \hat{k}_0}$$

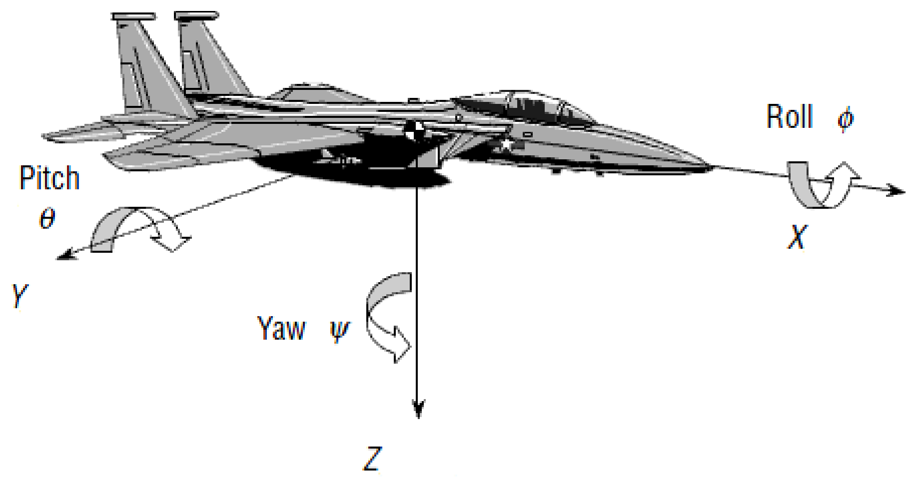
Componentes da velocidade *de rotação* no sistema do avião:

$$\boxed{\vec{\Omega} = p\,\hat{\imath} + q\,\hat{\jmath} + r\,\hat{k}}$$

p – velocidade de rolamento.

q – velocidade de arfagem.

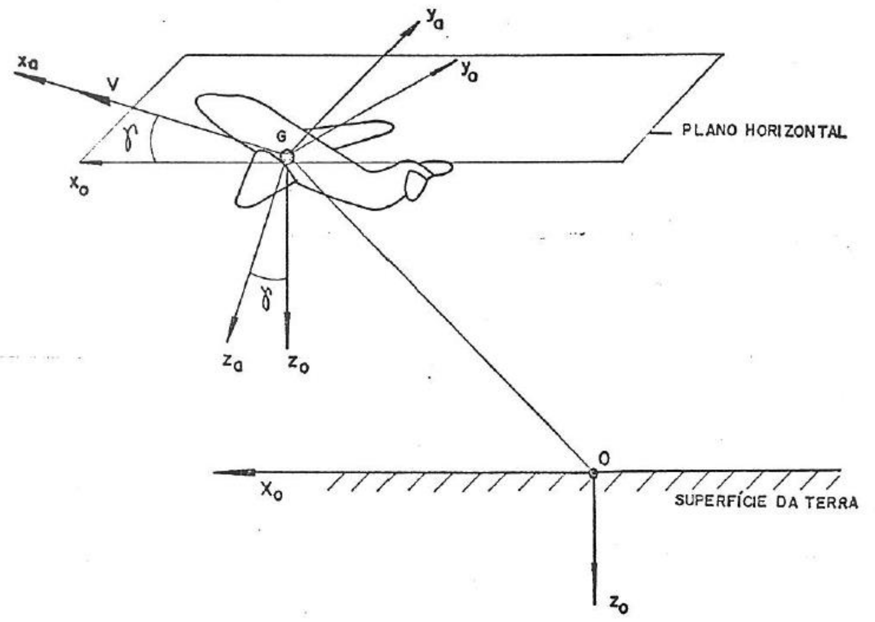
r – velocidade de guinada.



Motion variables: common notation

Forças e momentos atuantes no avião

1. FORÇA PESO $\vec{W}$: ALINHADA COM O EIXO VERTICAL G_{z0}



No sistema terrestre:

$$\boxed{\vec{W} = m\, g\, \widehat{k_0}}$$

No sistema do avião:

$$\boxed{\vec{W} = m\,(g_x\, \hat{\imath} + g_y\, \hat{\jmath} + g_z\, \hat{k})}$$

Sendo que g_x , g_y g_z dependem dos ângulos de Euler ψ, θ, ϕ

No sistema aerodinâmico:

$$\boxed{\vec{W} = mg\,(-sen\,\gamma\, \hat{\imath}_a + cos\,\gamma\, \hat{k}_a)}$$

Forças e momentos atuantes no avião

2. FORÇA AERODINÂMICA $\overrightarrow{\boldsymbol{F_a}}$:

No sistema aerodinâmico:

$$\boxed{\overrightarrow{F_a} = -D\,\hat{\imath}_a + F_{Ya}\hat{\jmath}_a - \bar{L}\,\hat{k}_a}$$

D – Arrasto = $\frac{1}{2}\rho S V^2 C_D$

$\bar{L}$ **– sustentação =** $\frac{1}{2}\rho S V^2 C_L$

F_{Ya} **– força lateral =** $\frac{1}{2}\rho S V^2 C_{Ya}$

Forças e momentos atuantes no avião

2. FORÇA AERODINÂMICA $\overrightarrow{\boldsymbol{F_a}}$:

No sistema do avião:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_a}} = \boldsymbol{F_{xa}}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{F_{ya}}\widehat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{F_{za}}\,\widehat{\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{F_{xa}} = -\boldsymbol{D}\cos\boldsymbol{\alpha}\cos\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{F_{ya}}\cos\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{L}\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}$$
$$\boldsymbol{F_{ya}} = -\boldsymbol{D}\,\mathbf{sen}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{F_{ya}}\cos\boldsymbol{\beta}$$
$$\boldsymbol{F_{za}} = -\boldsymbol{D}\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}\cos\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{F_{ya}}\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{L}\cos\boldsymbol{\alpha}$$

Sistema do avião obtido do sistema aerodinâmico através das rotações:

Ângulo -β no eixo Gza

Ângulo α no eixo Gy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = R(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forças e momentos atuantes no avião

3. FORÇA E MOMENTO DE TRAÇÃO $\vec{F}$ e $\overrightarrow{M_F}$:

Força alinhada no plano de simetria do avião. Depende da posição da manete, altitude e velocidade. Tração não exerce torque, com exceção de desalinhamentos dos motores.

No sistema do avião:

$$\vec{F} = F_x\,\hat{\imath} + F_z\,\hat{k}$$
$$\overrightarrow{M_F} = \vec{0}$$

Seja α_F o ângulo que a força de tração $\vec{F}$ forma com o eixo longitudinal do avião:

$$\vec{F} = F\,(\cos\alpha_F\hat{\imath} - sen\,\alpha_F\hat{k})$$

Se não existe guinada, plano $x_a z_a$ se alinha com o plano de simetria xz:

$$\vec{F} = F\,(\cos(\alpha+\alpha_F)\,\hat{i}_a - sen(\alpha+\alpha_F)\,\hat{k}_a$$

Forças e momentos atuantes no avião

4. MOMENTO AERODINÂMICO $\overrightarrow{M_a}$:

No sistema do avião:

$$\boxed{\overrightarrow{M_a} = L\,\hat{i} + M\hat{j} + N\,\hat{k}}$$

L – ROLAMENTO = $\frac{1}{2}\,\rho\,S\,V^2\,l\,C_l$

M – ARFAGEM = $\frac{1}{2}\,\rho\,S\,V^2\,l\,C_m$

N**– GUINADA=** $\frac{1}{2}\,\rho\,S\,V^2\,l\,C_n$

l **- Comprimento característico, muitas vezes adotado como sendo a corda média geométrica da asa.**

Nota: ver apêndice A e D da apostila Paglione.