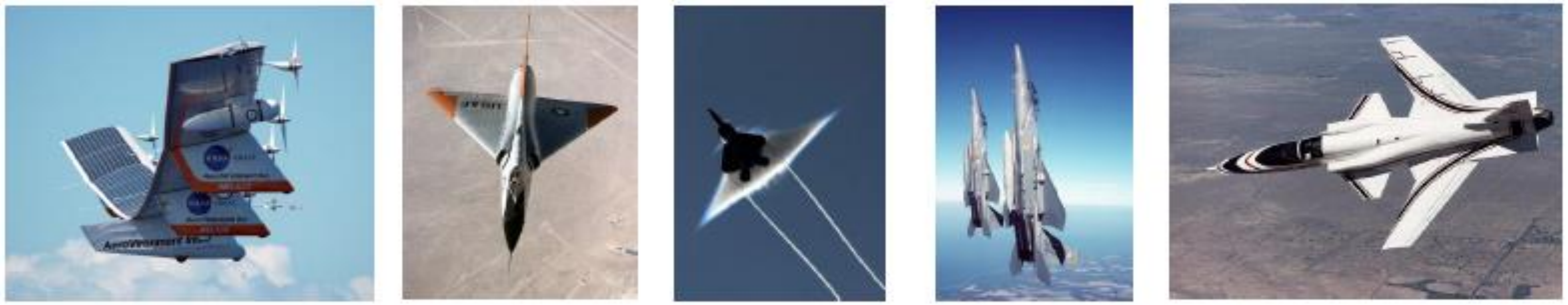
Universidade de Brasília   Faculdade UnB Gama

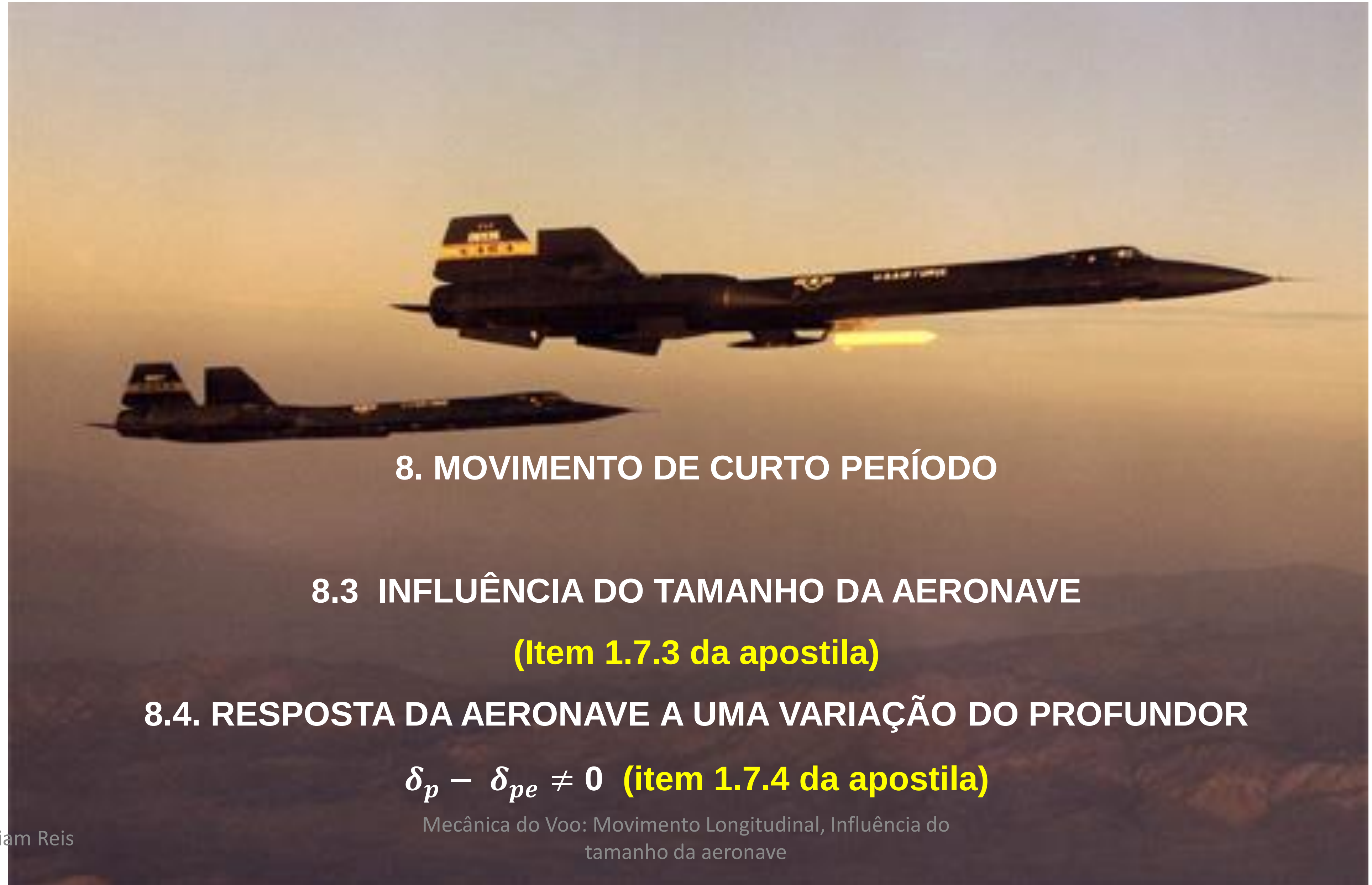
Mecânica do Voo

Movimento Longitudinal: Influência do tamanho da aeronave



Referências Bibliográficas

- **ITEN 1.7**: Paglione, P. ; Zanardi, M. C., Estabilidade e Controle de Aeronaves, ITA, 1990.
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, Dynamics of Flight – Stability and Control, John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003



8. MOVIMENTO DE CURTO PERÍODO

8.3 INFLUÊNCIA DO TAMANHO DA AERONAVE

(Item 1.7.3 da apostila)

8.4. RESPOSTA DA AERONAVE A UMA VARIAÇÃO DO PROFUNDOR

$\delta_p - \delta_{pe} \neq 0$ **(item 1.7.4 da apostila)**

8.3 INFLUÊNCIA DO TAMANHO DA AERONAVE

Para a análise será considerado:

- todos os comprimentos são multiplicados por λ;

- a carga alar = massa/área = m/S é mantida, de modo que :

- massa é multiplicada por λ^2

- momento de inércia multiplicado por λ^4.

- **Para altitude , velocidade e ângulo de ataque fixos, então:**

$$L_\alpha = \frac{1}{2}\,\rho\,\frac{S}{m}\,V_e^2\,C_{L_\alpha}$$

$$m_q = -\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{S\,l^2}{I_y}\,V_e\,C_{m_q}$$

$$\frac{g}{V_e\,E'}$$

→ **Independem do comprimento e portanto de λ.**

$$m_\alpha = -\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{S\,l}{I_y}\,V_e^2\,C_{m_\alpha}$$

→ **É dividido por λ.**

Lembrando que:

$$w_0 = \sqrt{m_\alpha + m_q \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right)}$$

$$\xi = \frac{m_q + \frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}}{2w_0}$$

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{w_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\boldsymbol{w_0}$ - é dividido por $\sqrt{\lambda}$ $\rightarrow$ $\mathit{diminui\ com\ aumento\ de\ \lambda}$

$\boldsymbol{T}$ – é multiplicado por $\sqrt{\lambda} \rightarrow$ $\mathit{aumenta\ com\ aumento\ de\ \lambda}$

$\boldsymbol{\xi}$ - é multiplicado por $\sqrt{\lambda} \rightarrow$ $\mathit{aumenta\ com\ o\ aumento\ de\ \lambda}$

MIRAGE

λ	1	2	3	4
ξ	0,2786	0,3799	0,4497	0,5062
w_0	3,0954	2,2702	1,9178	1,7146
T	2,113	2,992	3,668	4,240

$aumenta\ com\ \lambda$

$diminui\ com\ \lambda$

aumenta $com\ \lambda$

8.4. RESPOSTA DA AERONAVE A UMA VARIAÇÃO DO PROFUNDOR: $\boldsymbol{\delta_p - \delta_{pe} \neq 0}$

$$\dot{q} = -m_q q - m_\alpha \bar{\alpha} - m_\delta \overline{\delta_P}$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = q - \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right)\bar{\alpha} - \frac{L_\delta}{V_e}\,\overline{\delta_p}$$

SOLUÇÃO SERÁ OBTIDA

UTILIZANDO TRANFORMADA DE LAPLACE,

Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias para x (t)

Solução para x (t)

APLICA SE A TRANSFORMADA DE LAPLACE AO SISTEMA $\mathcal{L}\,(x\,(t))$

APLICA SE A TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE AO SISTEMA
$\mathcal{L}^{-1}\,(x\,(t))$

Sistemas de Equações Algébricas para X(s)

Solução para X (s)

$$\dot{q} = -m_q q - m_\alpha \bar{\alpha} - m_\delta \overline{\delta_P}$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = q - \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right)\bar{\alpha} - \frac{L_\delta}{V_e}\;\overline{\delta_p}$$

APLICANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE , LEMBRANDO:

$$\mathcal{L}\left(q(t)\right) = q(s)$$

$$\mathcal{L}\left(\bar{\alpha}(t)\right) = \bar{\alpha}(s)$$

TRANSFORMADA DA DERIVADA: $\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = s\,F(s) - f(0)$

com $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)$

$$\dot{q} = -m_q q - m_\alpha \bar{\alpha} - m_\delta \overline{\delta_P}$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = q - \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\, E'}\right)\bar{\alpha} - \frac{L_\delta}{V_e}\, \overline{\delta_p}$$

Para $\bar{\alpha}\,(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\;\; \boldsymbol{e}\;\; \boldsymbol{q}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{tem} - \boldsymbol{se}$:

$$(s + m_q)\, q(s) + m_\alpha\, \bar{\alpha}(s) = -m_\delta\, \overline{\delta_p}(s)$$

$$-q(s) + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\; E'} + s\right)\bar{\alpha}(s) = -\frac{L_\delta}{V_e}\overline{\delta_p}(s)$$

Resolvendo o sistema algébrico para

$\bar{\alpha}(s)\;\; e\;\; q(s)\;\; em\; termos\; de\; \overline{\delta_p}(s)$**:**

$$\bar{\alpha} = -\frac{s\,\frac{L_\delta}{V_e} + m_q\,\frac{L_\delta}{V_e} + m_\delta}{s^2 + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'} + m_q\right)\,s + m_q\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right) + m_\alpha}\,\bar{\delta}_P$$

$$\bar{q} = -\frac{s\,m_\delta + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right)\,m_\delta - \frac{L_\delta}{V_e}\,m_\alpha}{s^2 + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'} + m_q\right)\,s + m_q\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right) + m_\alpha}\,\bar{\delta}_P$$

OBSERVE QUE O DENOMINADOR É SIMILAR AO LADO DIREITO DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DO MOVIMENTO (ITEM 8.2)

$$s^2 + \left(m_q + \frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right)\,s + m_\alpha + m_q\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right) = 0$$

$$s^2 + 2\,w_0\,\xi\,s + w_0^2 = 0$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{s\,\frac{L_\delta}{V_e} + m_q\,\frac{L_\delta}{V_e} + m_\delta}{s^2 + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'} + m_q\right)\,s + m_q\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right) + m_\alpha}\,\bar{\delta}_P$$

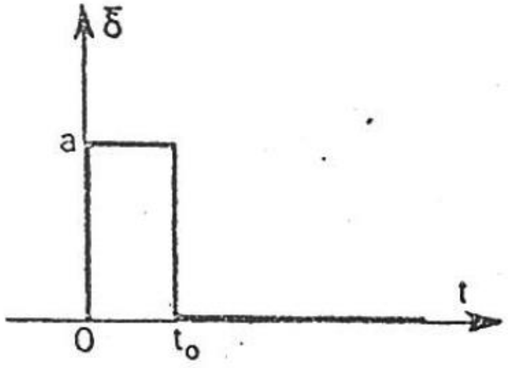
$$\bar{q} = -\frac{s\,m_\delta + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right)\,m_\delta - \frac{L_\delta}{V_e}m_\alpha}{s^2 + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'} + m_q\right)\,s + m_q\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right) + m_\alpha}\,\bar{\delta}_P$$

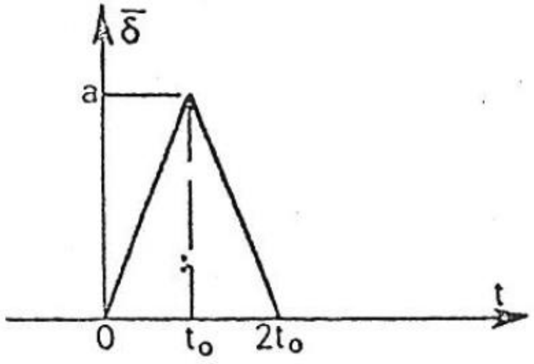
Ou ainda: $\boxed{\bar{\alpha}(s) = G_{\alpha\delta}\,\overline{\delta_p}(s)}$ $\boxed{q(s) = G_{q\delta}\,\overline{\delta_p}(s)}$

$\boldsymbol{Com}$ $\boldsymbol{G_{\alpha\delta}}$ **e** $\boldsymbol{G_{q\delta}}$ **são as funções de transferência que relacionam a entrada** $\boldsymbol{\overline{\delta_p}(s)}$ **com as saídas** $\boldsymbol{\bar{\alpha}(s)}$ **e q(s) .**

Aplicando a transformada inversa de Laplace determina se $\boldsymbol{\bar{\alpha}(t)}$ **e** $\boldsymbol{q(t)}$**, desde que se conheça o tipo de entrada** $\boldsymbol{\overline{\delta_p}(s)}$

A VARIAÇÃO DO PROFUNDOR PODE SER DE VÁRIAS FORMAS, COMO POR EXEMPLO:





$$\bar{\delta}_P(s) = \frac{a}{s}\left[1 - e^{-s\,t_o}\right]$$

$$\bar{\delta}_P(s) = \frac{a}{t_0}\frac{1}{s^2} - \frac{2\,a}{t_0}\frac{e^{-s\,t_o}}{s^2} + \frac{a}{t_0}\frac{e^{-2\,s\,t_o}}{s^2}$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{s\,\frac{L_\delta}{V_e} + m_q\,\frac{L_\delta}{V_e} + m_\delta}{s^2 + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'} + m_q\right)\,s + m_q\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right) + m_\alpha}\,\bar{\delta}_P \quad = \quad \boldsymbol{G_{\alpha\delta}\,\overline{\delta_p}(s)}$$

$$\bar{q} = -\frac{s\,m_\delta + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right)\,m_\delta - \frac{L_\delta}{V_e}m_\alpha}{s^2 + \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'} + m_q\right)\,s + m_q\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e\,E'}\right) + m_\alpha}\,\bar{\delta}_P \quad = \quad \boldsymbol{G_{q\delta}\,\overline{\delta_p}(s)}$$

Colocando $\boldsymbol{G_{\alpha\delta}}$ e $\boldsymbol{G_{q\delta}}$ na forma:

$$G_{\alpha,\delta} = \frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2} \qquad e \qquad G_{q,\delta} = \frac{Q'\,s + R'}{(s-p)^2 + q^2}$$

NOTA: neste ponto da solução p e q representam constantes definidas a partir do denominador das funções de transferência $G_{\alpha,\delta}$ e $G_{q,\delta}$.

Para obter a variação no tempo $\bar{\alpha}(t)$ e $q(t)$ é necessário obter as Transformadas Inversas de Laplace de funções do tipo:

$$\eta(s) = \frac{1}{s}\frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2}$$

$$\beta(s) = \frac{1}{s}\frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2}\,e^{-st_0}$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{s^2}\frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^2}\frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2}\,e^{-st_0}$$

$$\sigma(s) = \frac{1}{s^2}\frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2}\,e^{-2st_0}$$

Algumas propriedades de transforma inversa de Laplace

a) $f(s) + g(s)$ tem por transformada inversa $f(t) + g(t)$

b) se $g(s) = e^{-s\,t}\, f(s)$, então $g(t) = \begin{cases} f(t-T) \; se \; t > T \\ 0 \qquad\quad se \;\; t < T \end{cases}$

c) $f(s) = \frac{A}{s}$ tem por transformada inversa $f(t) = \begin{cases} A & se \; t > 0 \\ 0 & se \;\; t < 0 \end{cases}$

d) $f(s) = \frac{A}{s^2}$ tem por transformada inversa $f(t) = \begin{cases} A\,t & se \; t > 0 \\ 0 & se \;\; t < 0 \end{cases}$

e) $f(s) = \frac{Q\,s+R}{(s-p)^2+q^2}$ tem por transformada inversa

$$f(t) = e^{p\,t}\left(\frac{p\,Q+R}{q}\; sen\; q\; t + Q\cos q\; t\right)$$

APLICAÇÃO PARA O MIRAGE III

Em voo horizontal com velocidade de 150m/s, nível do mar.

$$s^2 + 2\,w_0\,\xi\,s + {w_0}^2 = (s-p)^2 + q^2 = s^2 - 2\,p\,s + p^2 + q^2$$

$$p = -w_0\,\xi = -0{,}8624 \qquad q = w_0\sqrt{1-\xi^2} = 2{,}1729$$

$$\boxed{L_\delta = \frac{1}{2}\,\rho\,\frac{S}{m}\,V^2\,C_{L_\delta} = 46{,}9307}$$

$$\boxed{m_\delta = -\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{S\,l}{I_y}\,V^2\,C_{m_\delta} = 23{,}4419}$$

$$G_{\alpha,\delta} = \left[\frac{\alpha}{\delta_P}\right] = -\frac{0{,}3129\ s + 23{,}67}{(s + 0{,}8624)^2 + \ (2{,}9729)^2}$$

$$G_{q,\delta} = \left[\frac{q}{\delta_P}\right] = \ -\frac{23{,}4419\ s + 20{,}5635}{(s + 0{,}8624)^2 + \ (2{,}9729)^2}$$

CONSIDERANDO A ENTRADA COM RAMPA DUPLA SIMÉTRICA DE AMPLITUDE DE 1° COM UM TEMPO DE $2t_0 \ = 1\ seg$:

$$\bar{\delta}_P(s) = \ \frac{2}{s^2} - \ \frac{4}{s^2}\ e^{-s/2} \ + \ \frac{2}{s^2}\ e^{-\ s}$$

LOGO AS TRANSFORMADA INVERSAS SÃO DO TIPO:

$$\boxed{\kappa(s) = \frac{2}{s^2}\frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2}}$$

$$\boxed{\varphi(s) = \frac{-4}{s^2}\frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2}\;e^{-s/2}}$$

$$\boxed{\sigma(s) = \frac{2}{s^2}\frac{Q\,s + R}{(s-p)^2 + q^2}\;e^{-s}}$$

Podemos usar a propriedade:

$$g(s) = f(s)\, e^{-sT} \quad então \quad g(t) = f(t-T)\ se\ t > T$$

$$g(t) = 0 \quad se\ t < T$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\,(f(s))$$

Devemos lembrar também a decomposição em frações parciais:

$$\frac{Q\,s + R}{s^2\,[(s-p)^2 + \ q^2]} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C\,s + D}{(s-p)^2 + \ q^2}$$

$$A = \ \frac{R}{p^2 + q^2}$$

$$B \ = \ \frac{1}{p^2 + q^2}\ (Q + 2\,p\,A)$$

$$C \ = \ -B$$

$$D \ = 2\,p\,B - A$$

USANDO AS PROPRIEDADES:

c) $f(s) = \frac{A}{s}$ tem por transformada inversa $f(t) = \begin{cases} A & se\ t > 0 \\ 0 & se\ \ t < 0 \end{cases}$

d) $f(s) = \frac{A}{s^2}$ tem por transformada inversa $f(t) = \begin{cases} A\,t & se\ t > 0 \\ 0 & se\ \ t < 0 \end{cases}$

e) $f(s) = \frac{Q\,s+R}{(s-p)^2+q^2}$ tem por transformada inversa

$$f(t) = e^{p\,t}\left(\frac{p\,Q+R}{q}\ sen\ q\ t + Q\cos q\ t\right)$$

$$\bar{\alpha}(t) = 2\left\{-2{,}4703\,t + 0{,}4120\,e^{-0{,}8624\,t}\,[0{,}7114\,\mathbf{sen}\,\mathbf{2,9729t} -\right.$$

$$\left.-0{,}4120\,\mathbf{cos}\,\mathbf{2,929\,t}]\right\} - 4\,I\left(t-\frac{1}{2}\right)\left\{-2{,}4703\left(t-\frac{1}{2}\right) + 0{,}4120\,e^{-0{,}8624\,\left(t-\frac{1}{2}\right)}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[-0{,}7114\,\mathbf{sen}\,\mathbf{2,9729}\left(\boldsymbol{t}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) + 0{,}4120\,\mathbf{cos}\,\mathbf{2,929}\,(\boldsymbol{t}-\mathbf{1/2})\right]\right\} +$$

$$+ 2\,I\,(t-1)\{-2{,}4703\,(t-1) + 0{,}4120\,e^{-0{,}8624\,(t-1)}\,\cdot$$

$$\cdot\,[-0{,}7114\,\mathbf{sen}\,\mathbf{2,9729}\,(\boldsymbol{t}-\mathbf{1}) + 0{,}4120\,\mathbf{cos}\,\mathbf{2,929}\,(\boldsymbol{t}-\mathbf{1})]\}$$

sendo a função $I\ (t-\tau)$ nula para $t < \tau$ e igual a 1 para $t \geq \tau$.

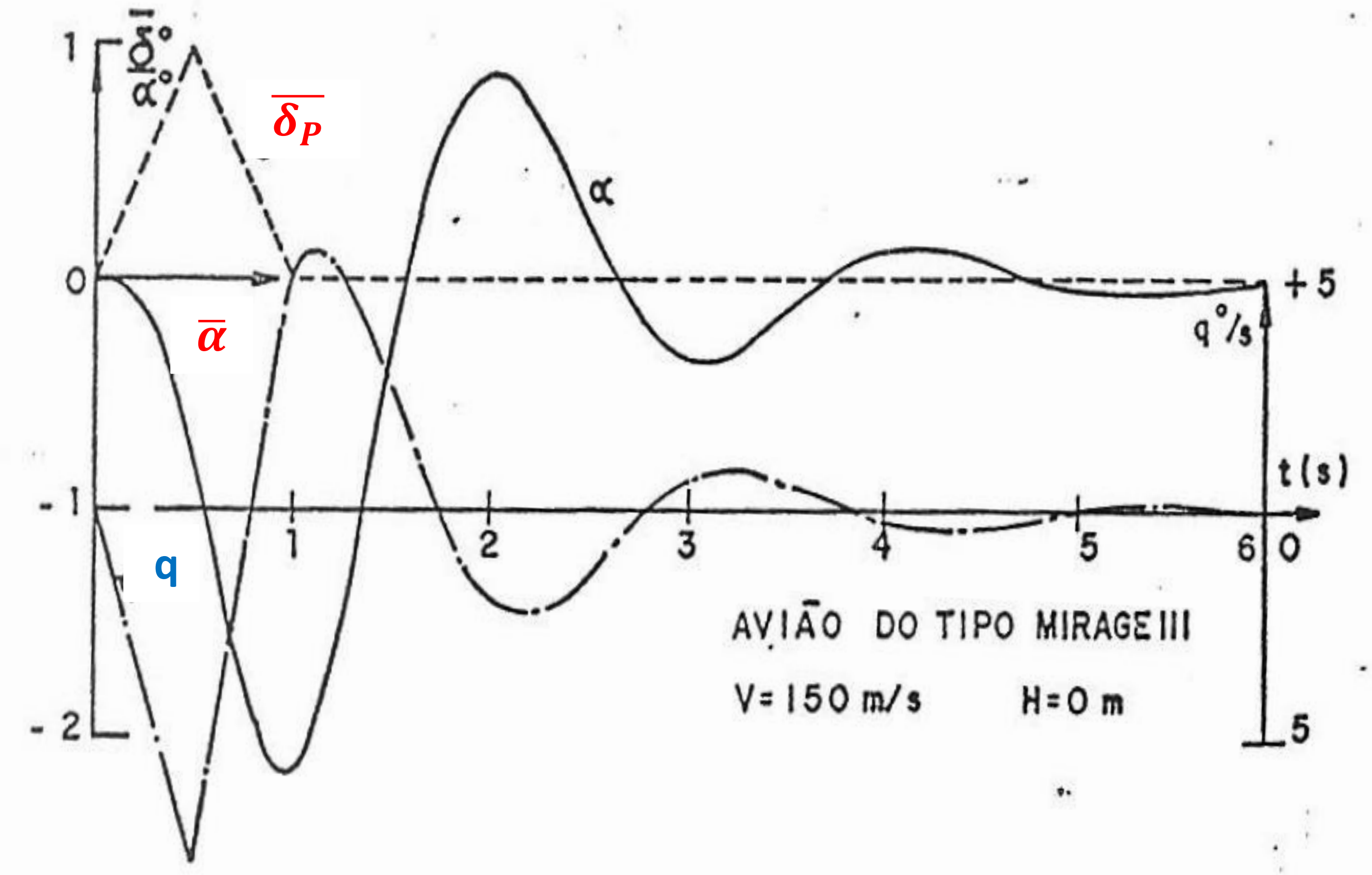
$$q(t) = 2\left\{-2{,}1416\, t - 0{,}2{,}0602\, \boldsymbol{e}^{-\,\mathbf{0{,}8624}\,\boldsymbol{t}}\ [-1{,}3195\ \boldsymbol{sen}\ \mathbf{2,9729}\boldsymbol{t} +\right.$$

$$+\, 2{,}062\, \boldsymbol{cos}\ \mathbf{2,929}\ \boldsymbol{t}]\} - \ 4\, I\left(t - \tfrac{1}{2}\right)\left\{-2{,}4703\ \left(t - \tfrac{1}{2}\right) + \ 0{,}4120\ \boldsymbol{e}^{-\,\mathbf{0{,}8624}\,(\boldsymbol{t}-\frac{1}{2})}\ \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[-\,0{,}7114\ sen\ 2{,}9729\ \left(t - \tfrac{1}{2}\right) + \ 0{,}4120\, \cos 2{,}929\ (t - 1/2)\right]\right\} +$$

$$2\, I\ (t-1)\,\{-2{,}4703\ (t-1) + \ 0{,}4120\ \boldsymbol{e}^{-\,\mathbf{0{,}8624}\,(\boldsymbol{t}-\mathbf{1})}\ \cdot$$

$$\cdot\ [-\,0{,}7114\ \boldsymbol{sen}\ \mathbf{2,9729}\ (\boldsymbol{t}-\mathbf{1}) + \ 0{,}4120\, \boldsymbol{cos}\ \mathbf{2,929}\ (\boldsymbol{t}-\mathbf{1})]\}$$



$\bar{\delta}^\circ$
$\bar{\alpha}^\circ$
1
0
-1
-2
$\overline{\delta_P}$
$\overline{\alpha}$
q
α
+5
q°/s
t(s)
1
2
3
4
5
6
0
5
AVIÃO DO TIPO MIRAGE III
V= 150 m/s H=0 m

CONCLUSÕES

1. **Uma variação no profundor se traduz por uma oscilação do ângulo de ataque, cujo período é da ordem de alguns segundos e o amortecimento é grande.**

2. Piloto pode controlar o ângulo de ataque atuando no profundor (supondo CG constante).

Variação no profundor se traduz por uma variação instantânea no ângulo de ataque.

Nota:
- NÃO FOI LEVADO EM CONTA A INFLUÊNCIA DE $C_{m\dot{\alpha}}$
- CG fixo.

A POSIÇÃO DO CG VARIA COM A DISPOSIÇÃO DA CARGA DA AERONAVE, DOS PASSAGEIROS, DOS DESLOCAMENTO DOS PASSAGEIROS, EJEÇÃO DE BOMBAS, CONSUMO DE COMBUSTÍVEL.

QUANDO O CG SE APROXIMA DO CA DA ASA+FUSELAGEM, O MOMENTO AERODINÂMICO NA ASA DIMINUI, MAS O MOMENTO AERODINÂMICO NA EMPENAGEM É POUCO ALTERADO.

ASSIM $C_{m\alpha}$ DEPENDE DO MOVIMENTO DO CG MAS $C_{m\delta}$ INDEPENDE.

OS COEFICIETES $C_{m\alpha}$ E $C_{m\delta}$ INFLUENCIAM NA DETERMINAÇÃO DO ÂNGULO DE ATAQUE, ATÉ MESMO NA CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO.

ASSIM O CERTO SERIA DIZER QUE CADA POSIÇÃO DO PROFUNDOR CORRESPONDE UM ÂNGULO DE ATAQUE QUE É FUNÇÃO DO CG