



# Mecânica do Voo

Completando o modelo da aeronave





# Referências Bibliográficas

- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003

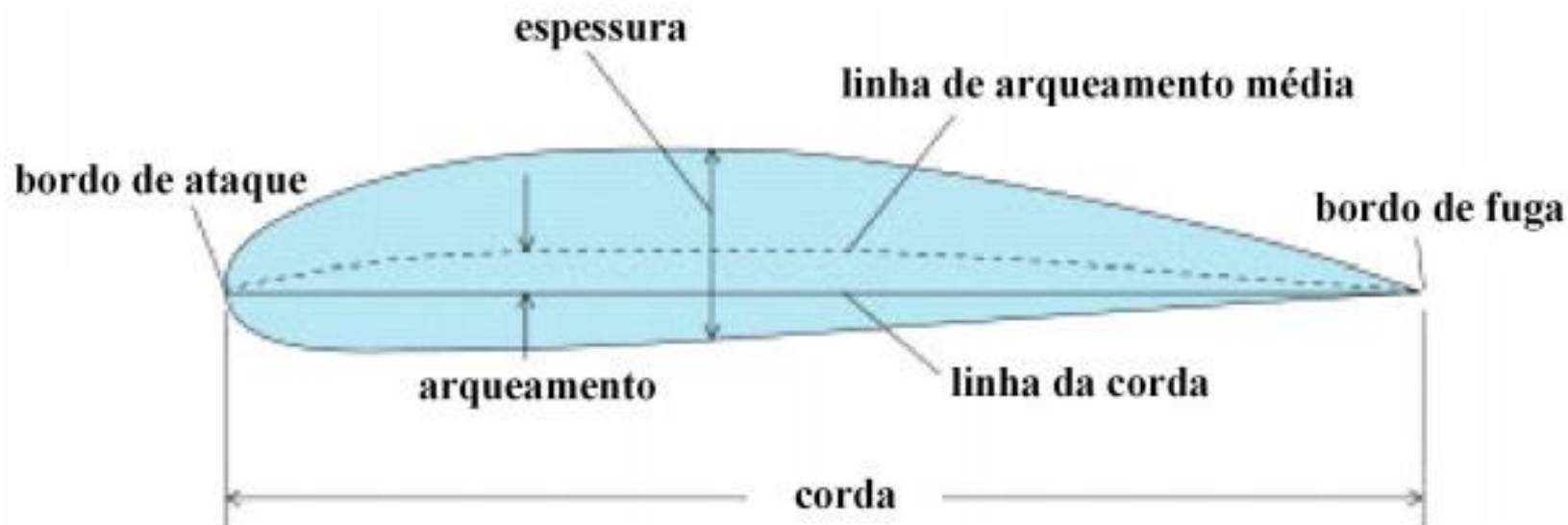


# Introdução

- Um modelo suficientemente realista é importante para:
- Auxiliar o início de um novo projeto de aeronave
- Sugerir quais ensaios devem ser feitos, e o que deve ser obtido
  - Túnel de vento
  - Voo
- Avaliar efeito de mudanças no projeto
- Projeto e análise de
  - Efeitos aerodinâmicos
  - Estrutura: falha e fadiga
  - Sistemas de controle: melhoria na qualidade do voo, piloto automático
- Simulador realista:
  - Avaliação do projeto por pilotos experientes
  - Treinamento de novos pilotos
  - Reconstrução do voo em casos como acidentes aéreos
- Modelos são limitados. Limitações devem ser conhecidas e contornáveis.
- Exemplo: uso de controle robusto se parâmetros são incertos

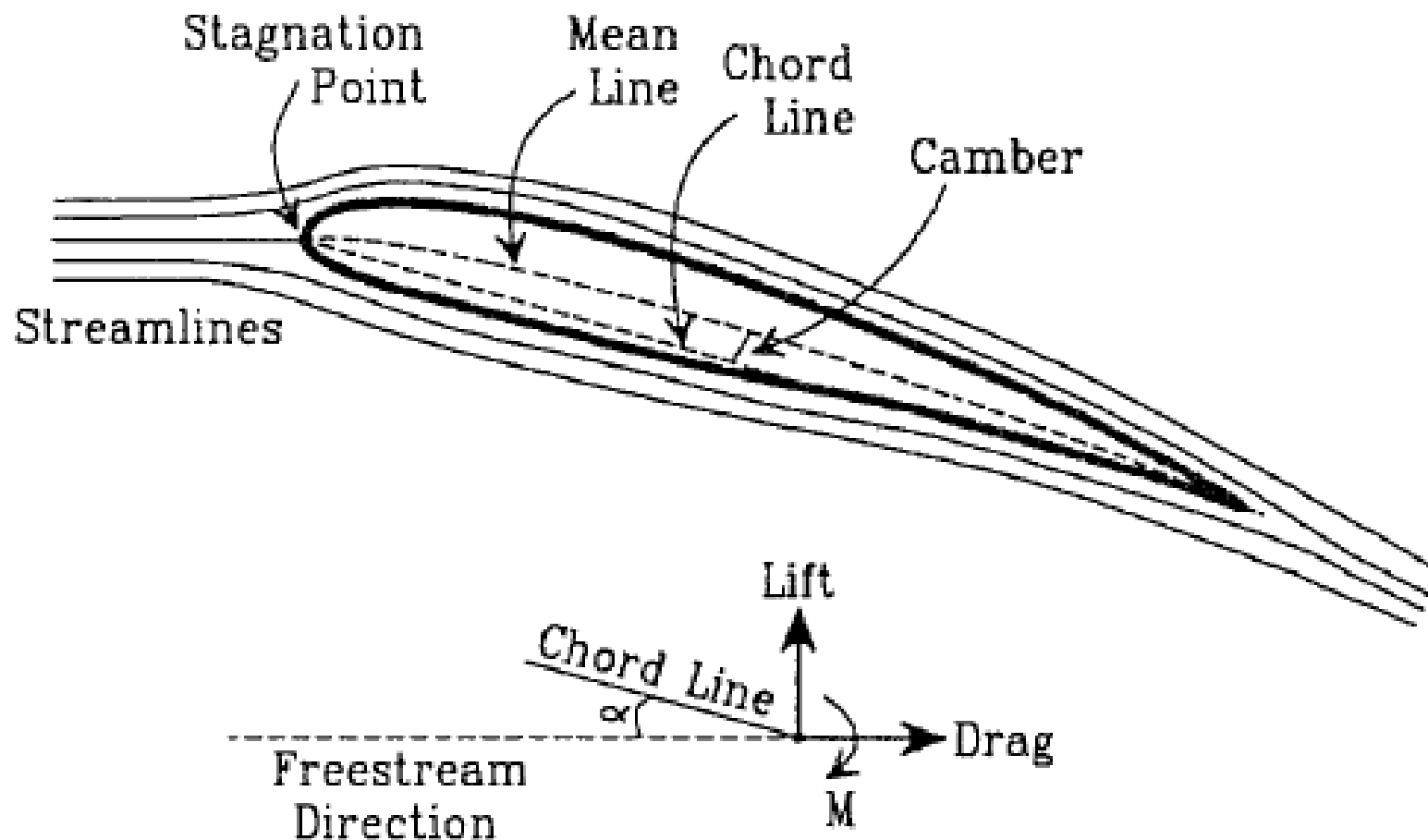


# Revisão de aerodinâmica





# Revisão de aerodinâmica



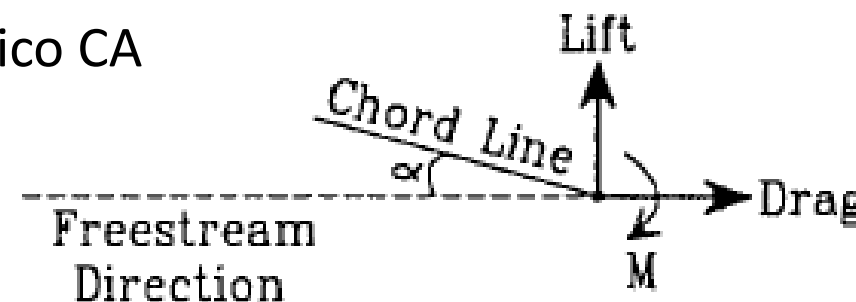


# Revisão de aerodinâmica

- Avaliação simplificada em 2 dimensões:
- Asa com comprimento infinito
- Não há fluxo de ar na 3ª dimensão
- Fluxo inicial (não perturbado) de ar dado pela direção de fluxo livre
- Geometria do aerofólio fornece características aerodinâmicas:
- Linha de corda: linha **reta** que conecta o bordo de ataque (leading edge) ao bordo de fuga (trailing edge) da asa, e que funciona como referência para descrever outros parâmetros.
  - Aerofólios podem ser simétricos ou assimétricos em relação à linha de corda
  - O tamanho da linha de corda é chamado de corda
- Linha de arqueamento média: linha que conecta os bordos, mantendo a distância média entre as superfícies superior e inferior da asa
  - Maior distância perpendicular entre linha de corda e linha de arqueamento: arqueamento

# Revisão de aerodinâmica

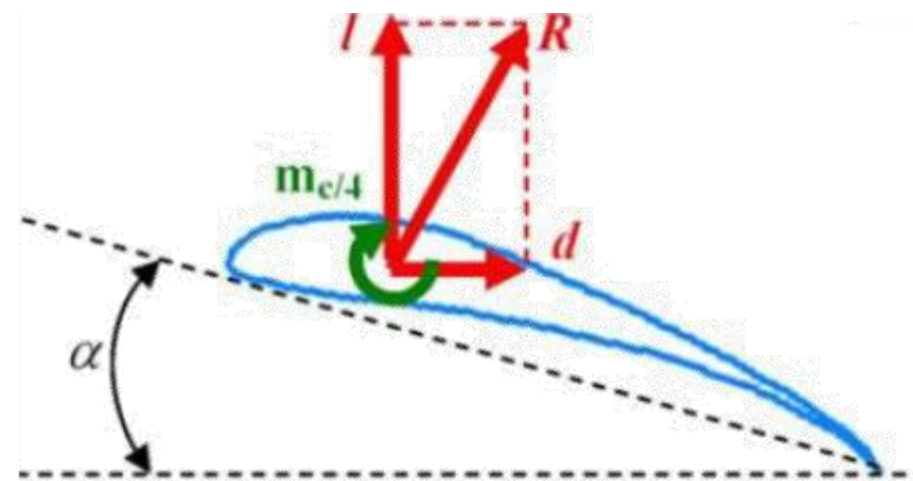
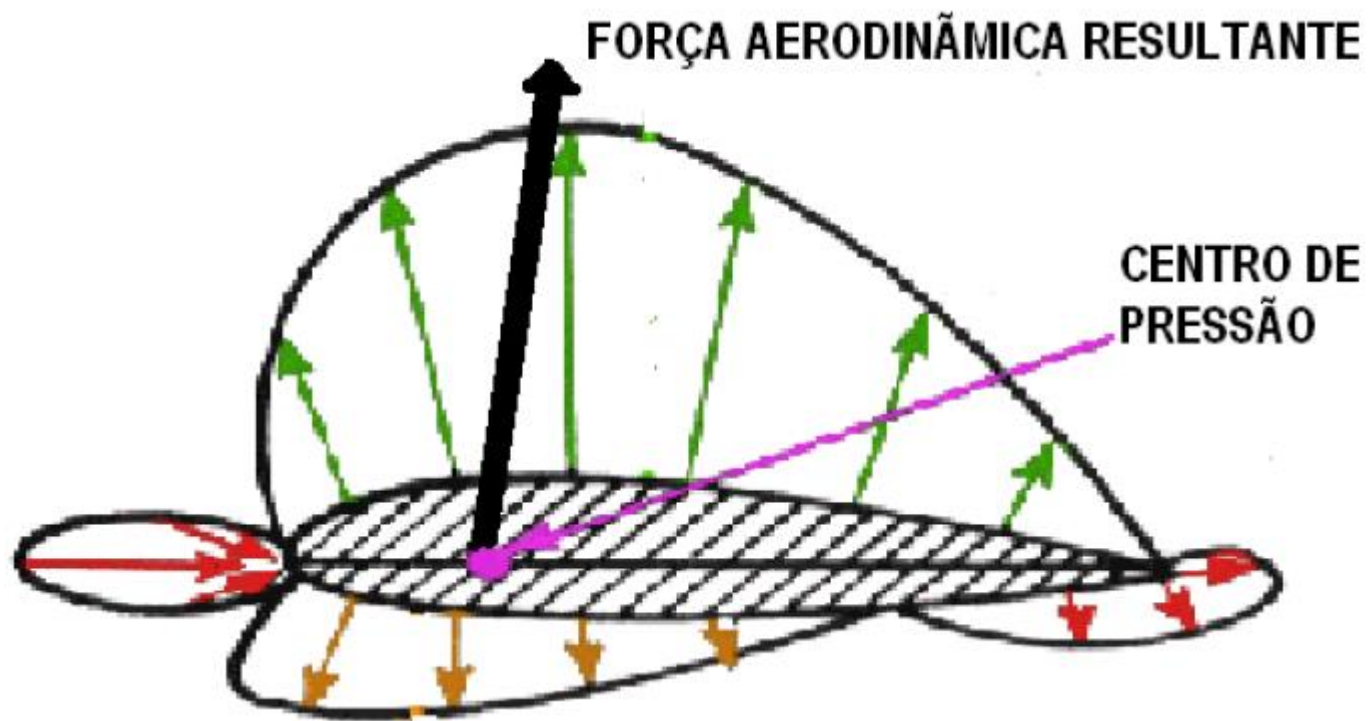
- Ângulo de ataque  $\alpha$ : ângulo entre linha de corda e fluxo de ar
- Resultado dos efeitos aerodinâmicos:
- Força, que é decomposta em duas componentes
  - Sustentação (lift): perpendicular ao fluxo de ar
  - Arrasto (drag): paralela ao fluxo de ar
- Momento
- As forças de sustentação e arrasto, dentro de certos limites, aumentam ao aumentar  $\alpha$
- Momento depende de onde se define o centro de rotação:
- Momento é nulo se eixo se encontra no centro de pressão CP
  - CP varia com  $\alpha$ , então não pode ser escolhido
- Momento não varia com  $\alpha$  se eixo no centro aerodinâmico CA
  - Posição aproximada:  $\frac{1}{4}$  de corda, a partir do bordo de ataque







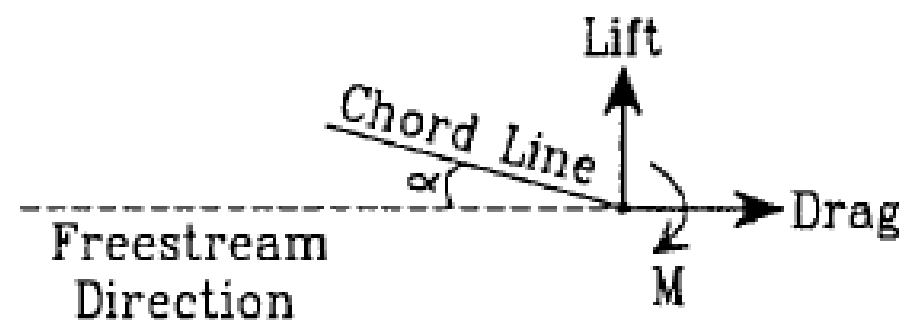
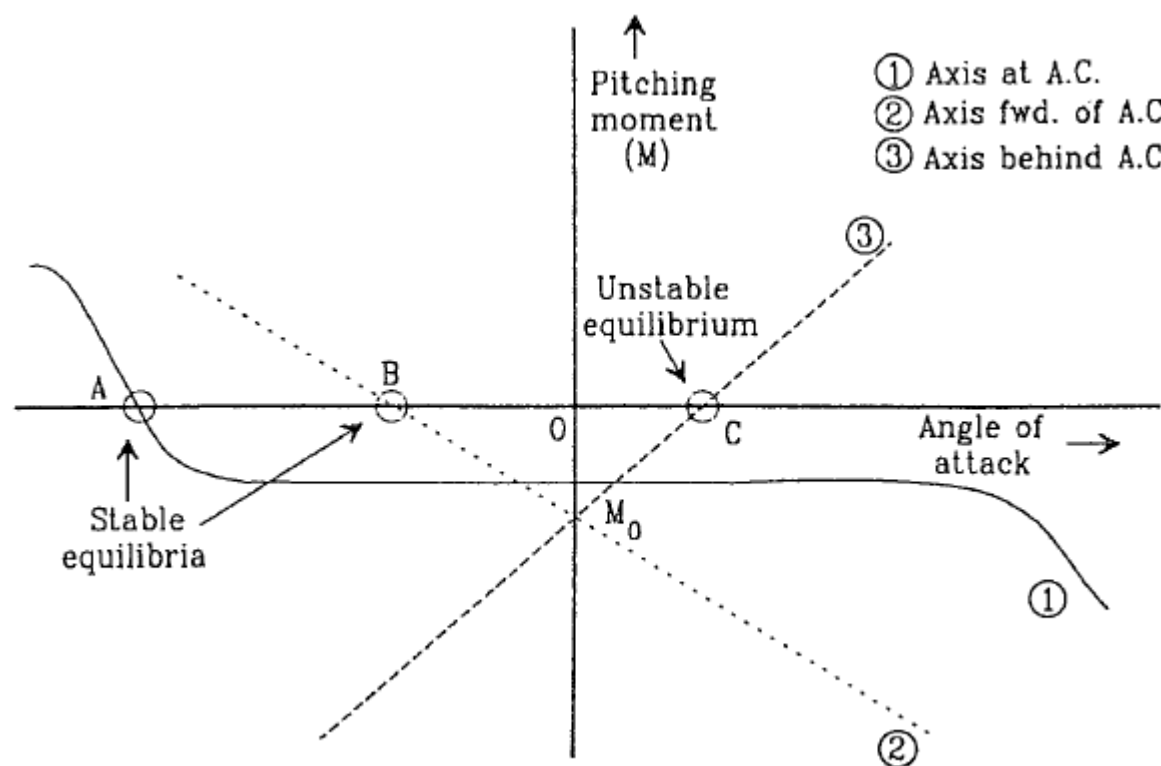
# Revisão de aerodinâmica







# Revisão de aerodinâmica





# Revisão de aerodinâmica

- Estabilidade estática:
- Pontos A e B são estáveis, pois direção dos momentos tende a reduzir ângulo de ataque alto e aumentar ângulo de ataque baixo
  - “positive stiffness” – força em regime permanente que restaura equilíbrio
  - Gráfico de momento em relação a ângulo com inclinação negativa
- Ponto A está fora do ponto de operação
- Ponto C apresenta equilíbrio instável. Sem controle ou outras superfícies, momento faz ângulo de ataque divergir
- A estabilidade dinâmica é mais importante, mas será estudada depois



# Revisão de aerodinâmica

- Equações das forças e momento de um aerofólio (2 dimensões)

$$\text{lift per unit span} = \bar{q}cC_l(\alpha)$$

$$\text{drag per unit span} = \bar{q}cC_d(\alpha)$$

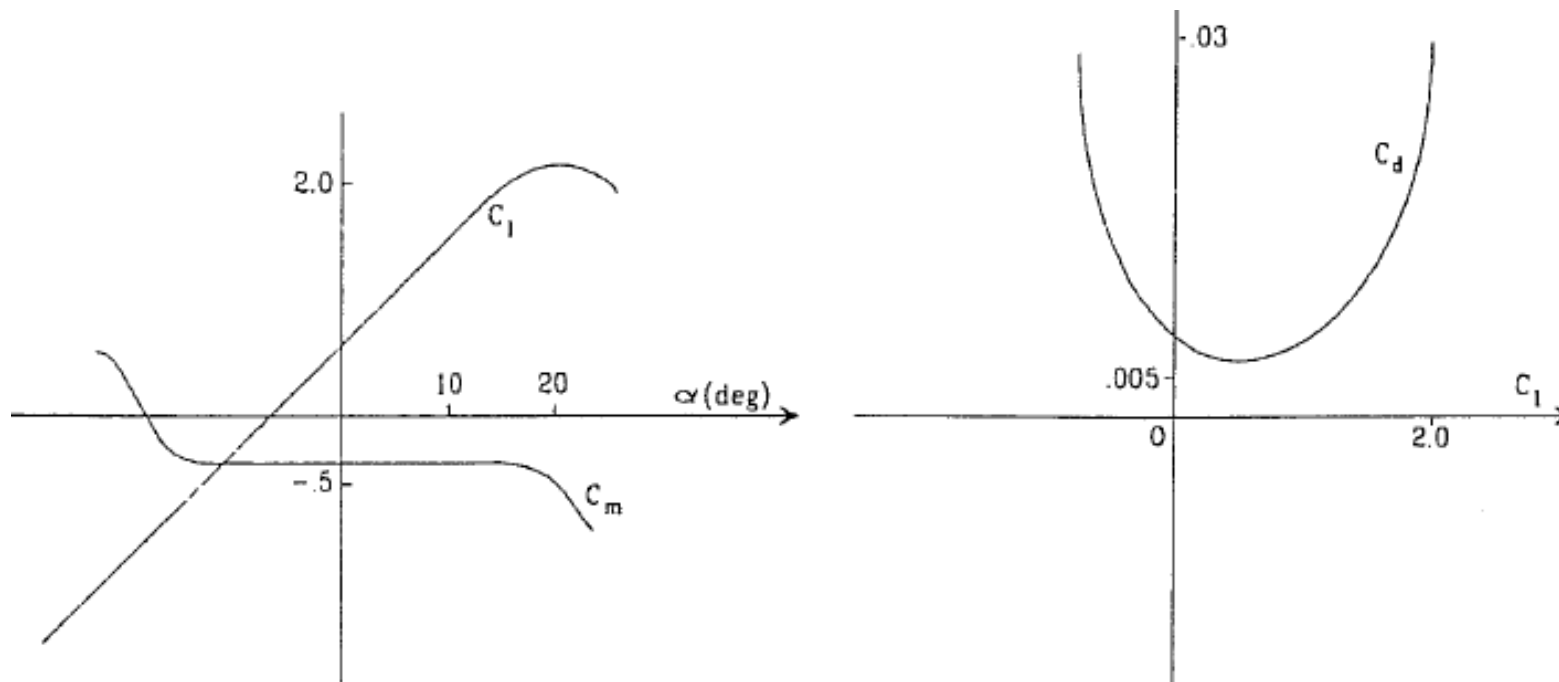
$$\text{pitching moment per unit span} = \bar{q}c^2C_m(\alpha)$$

$$\text{dynamic pressure, } \bar{q} \equiv \frac{1}{2}\rho V_T^2 \quad (\text{pressure units})$$

- $\rho$ : densidade do ar (1.225 kg/m<sup>3</sup> ao nível do mar)
- $c$ : corda
- $\bar{q}$ : pressão dinâmica, modela efeitos da densidade e velocidade do ar
- $V_T$ : velocidade do fluxo de ar livre
- $C_l, C_d, C_m$ : coeficientes adimensionais do aerofólio 2D



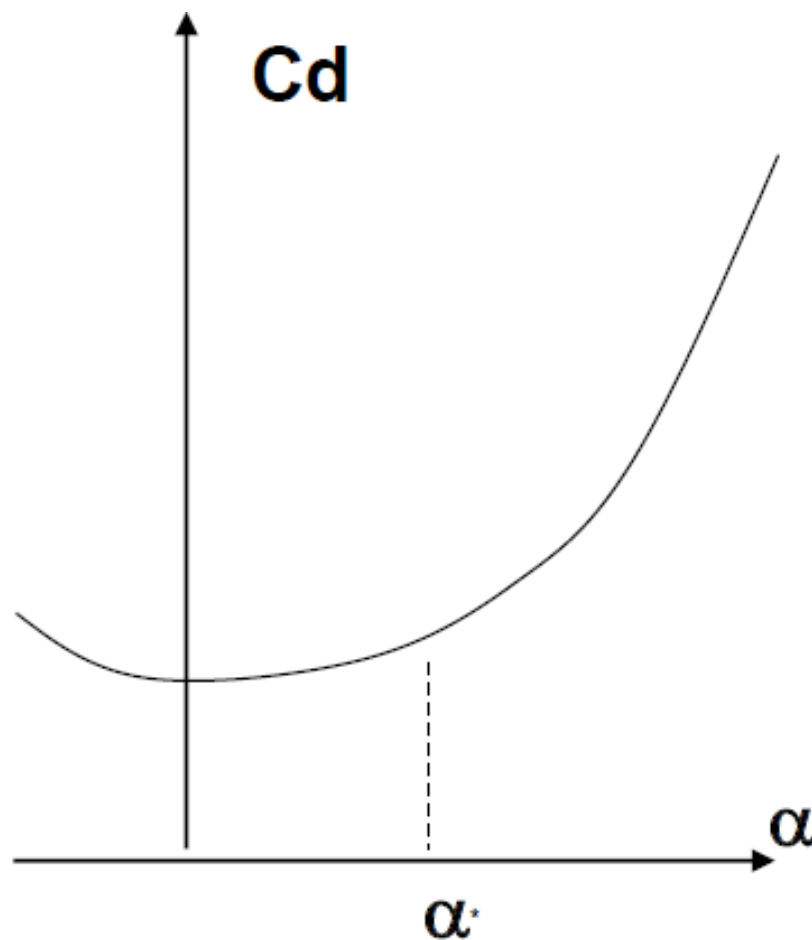
# Revisão de aerodinâmica



- $C_l, C_m, C_d$ : são funções apenas de  $\alpha$
- $C_d$  costuma ser representado em função de  $C_l$  (polar de arrasto)
- Veja que há um trecho longo com comportamento linear (afim) em  $C_l$



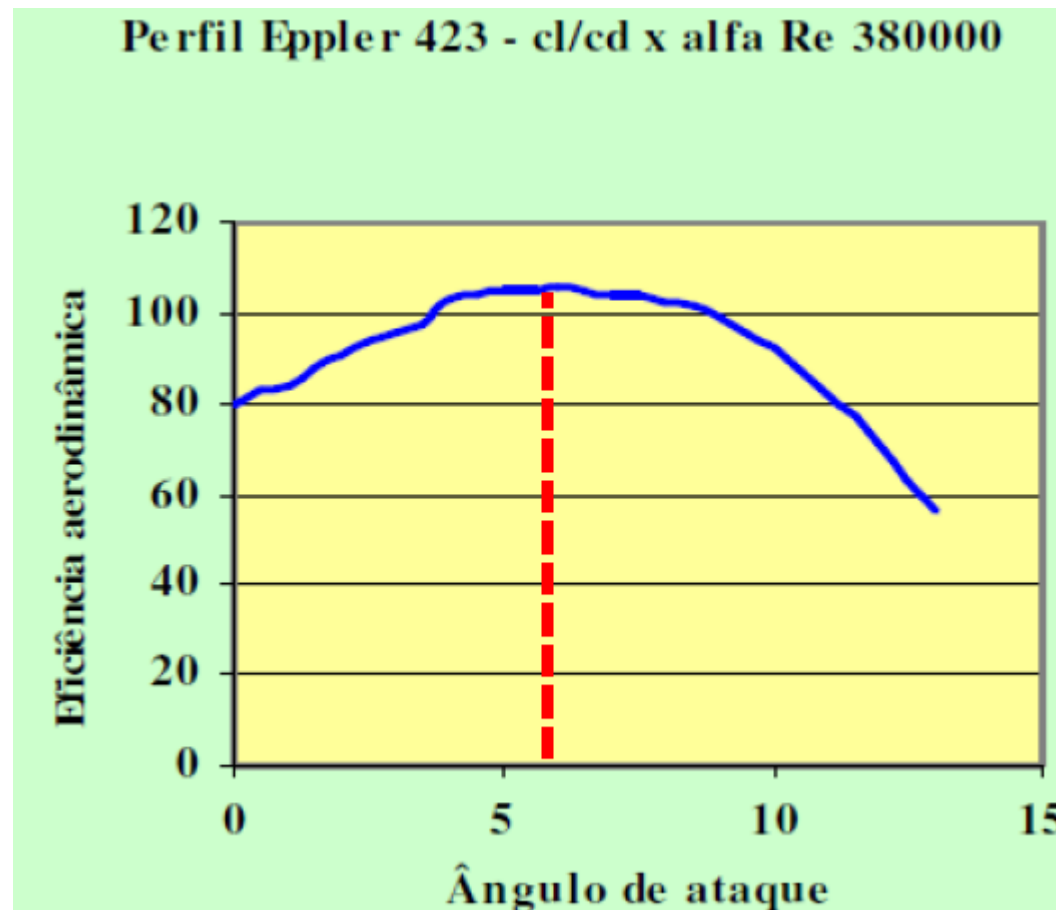
# Revisão de aerodinâmica





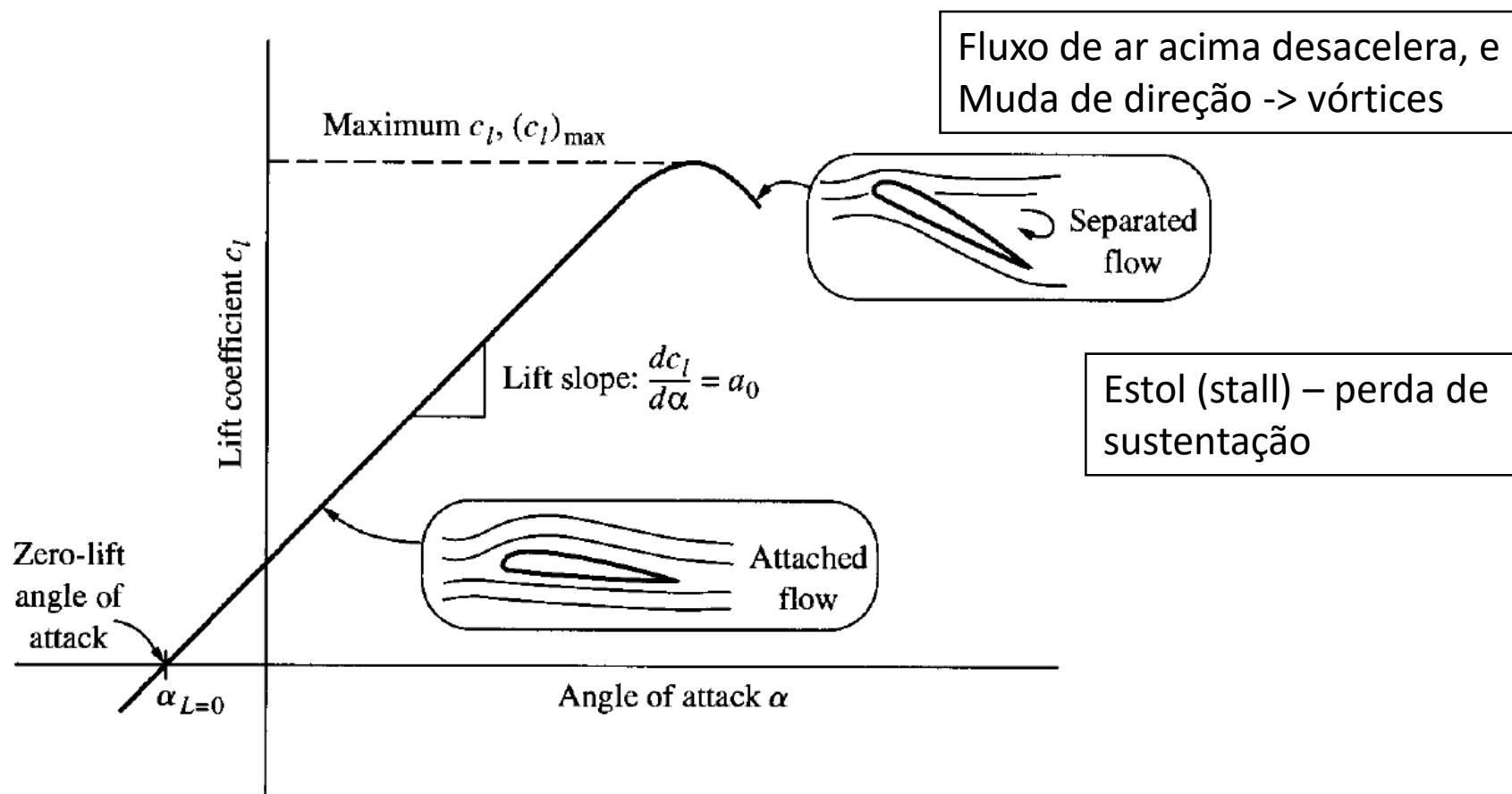
# Revisão de aerodinâmica

- Outra forma de plotar arrasto: gráfico de eficiência aerodinâmica
- Plota-se  $C_l/C_d$  em relação a  $\alpha$





# Revisão de aerodinâmica



Aircraft Performance and Design - Anderson



# Revisão de aerodinâmica

## Efeito da velocidade do fluxo de ar

- Velocidade muito elevada pode afetar  $c_l$
- Relação apresentada em função do número de Mach

$$M = \frac{V_T}{V_{som}}$$

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{dC_L/d\alpha|_{M=0}}{\sqrt{1-M^2}}, \quad M < 1$$

Para voo subsônico:

- Regiões:

$M < 1.0$ : Subsônico

$0.8 < M < 1.2$ : Transônico\*

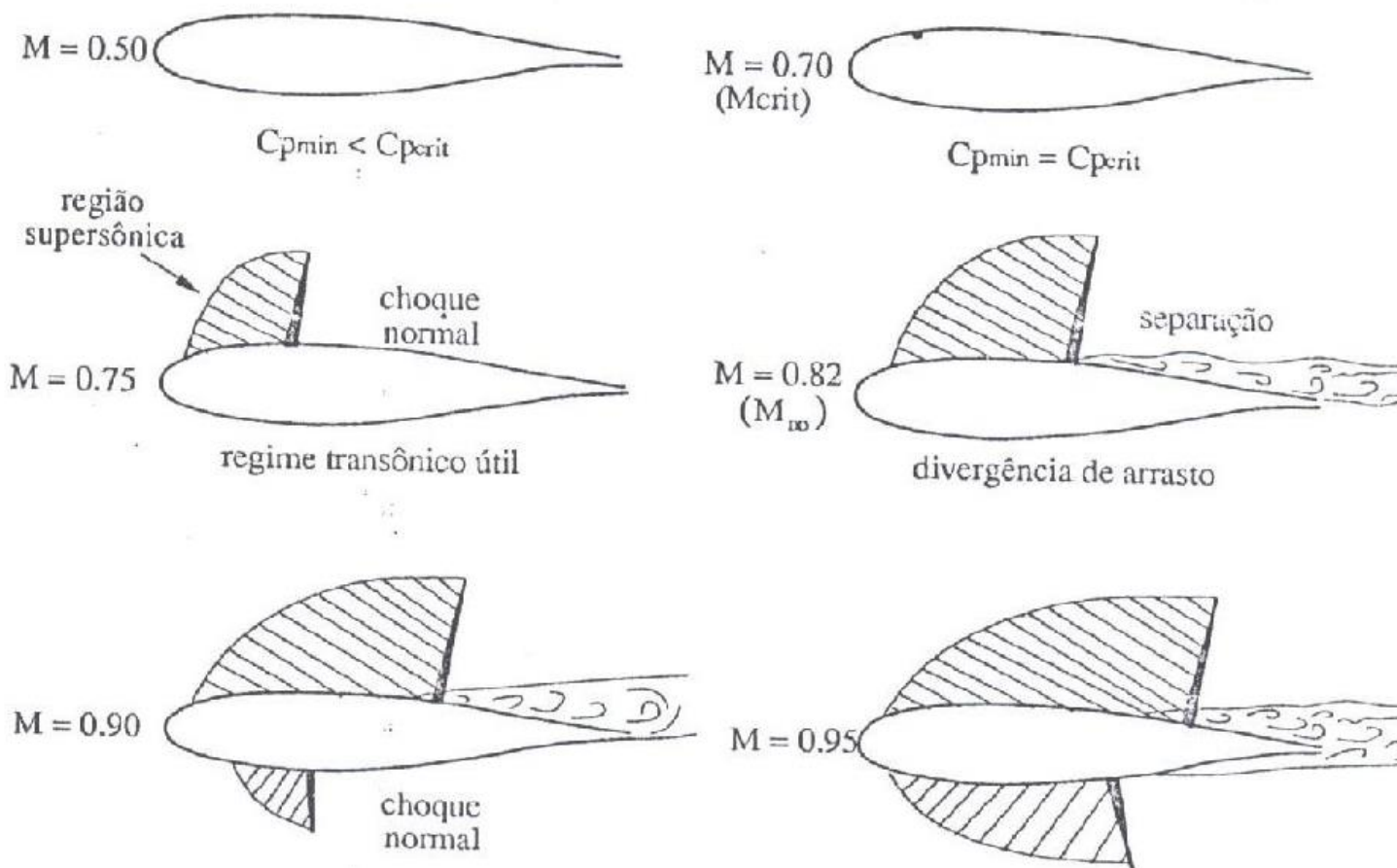
$1.0 < M < 5.0$ : Supersônico

$5.0 < M$  : Hipersônico

- \*Aqui, parte da asa está em regime subsônico e parte em regime supersônico. Movimento do fluxo de ar bastante complicado. CA muda erraticamente, tendendo para 50% da corda ao chegar no supersônico.



# Revisão de aerodinâmica

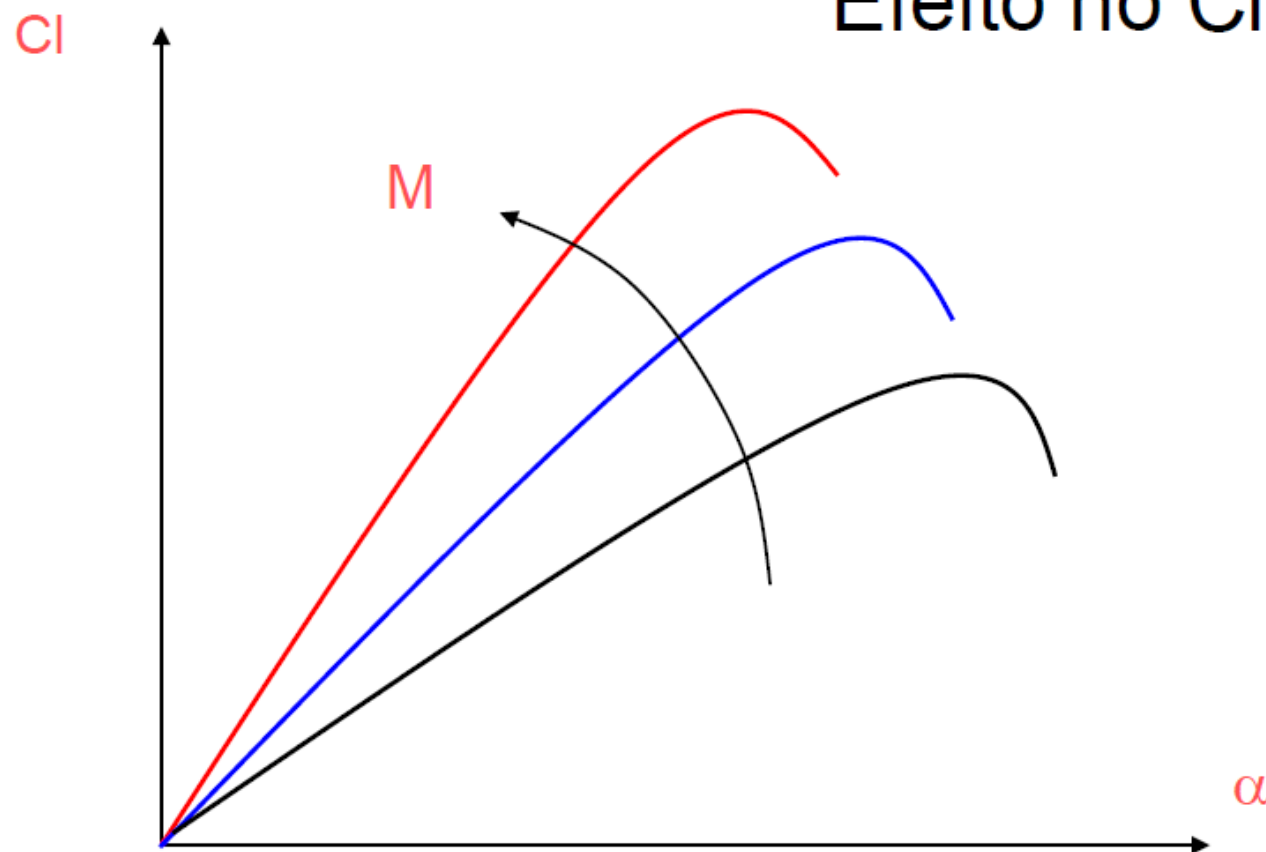




# Revisão de aerodinâmica

Efeito do número de Mach

Efeito no  $C_l$





# Revisão de aerodinâmica

- A asa tridimensional possui análise mais difícil do que o perfil 2D.
- Ar se movimenta na terceira dimensão, reduzindo eficiência na sustentação.
- Aerofólios de um avião: asa, empenagem horizontal, empenagem vertical, outros.

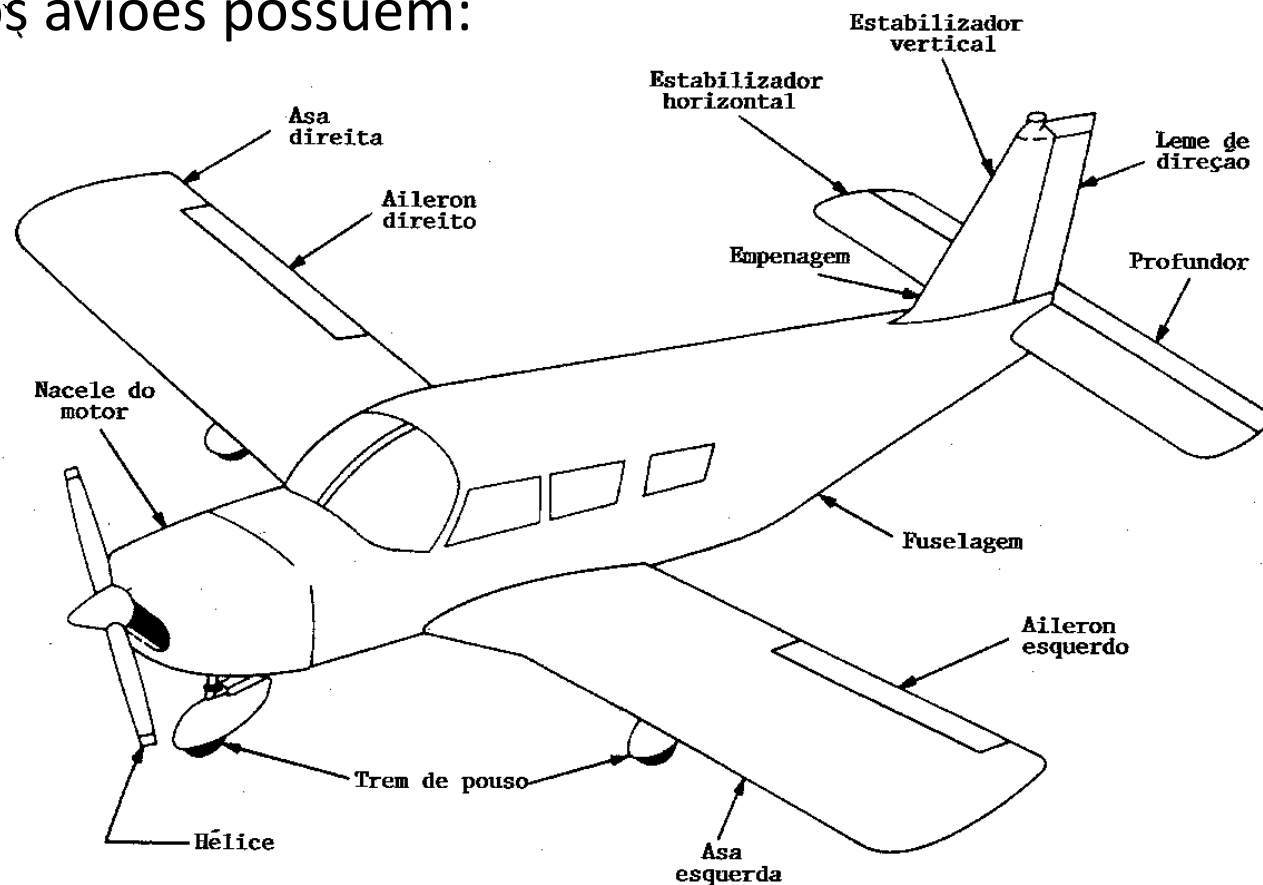
## Parâmetros da geometria da asa

- $b$ : envergadura (comprimento) da asa
- $c$ : corda da asa (varia em cada ponto)
- $\bar{c}$ : corda geométrica média
- $S$ : área total da asa
- $\lambda$ : afilamento da asa (corda da ponta / corda da raiz)
- $\Lambda$ : enflechamento
- $A$ : Alongamento

# Componentes básicos de uma aeronave

A maioria das estruturas dos aviões possuem:

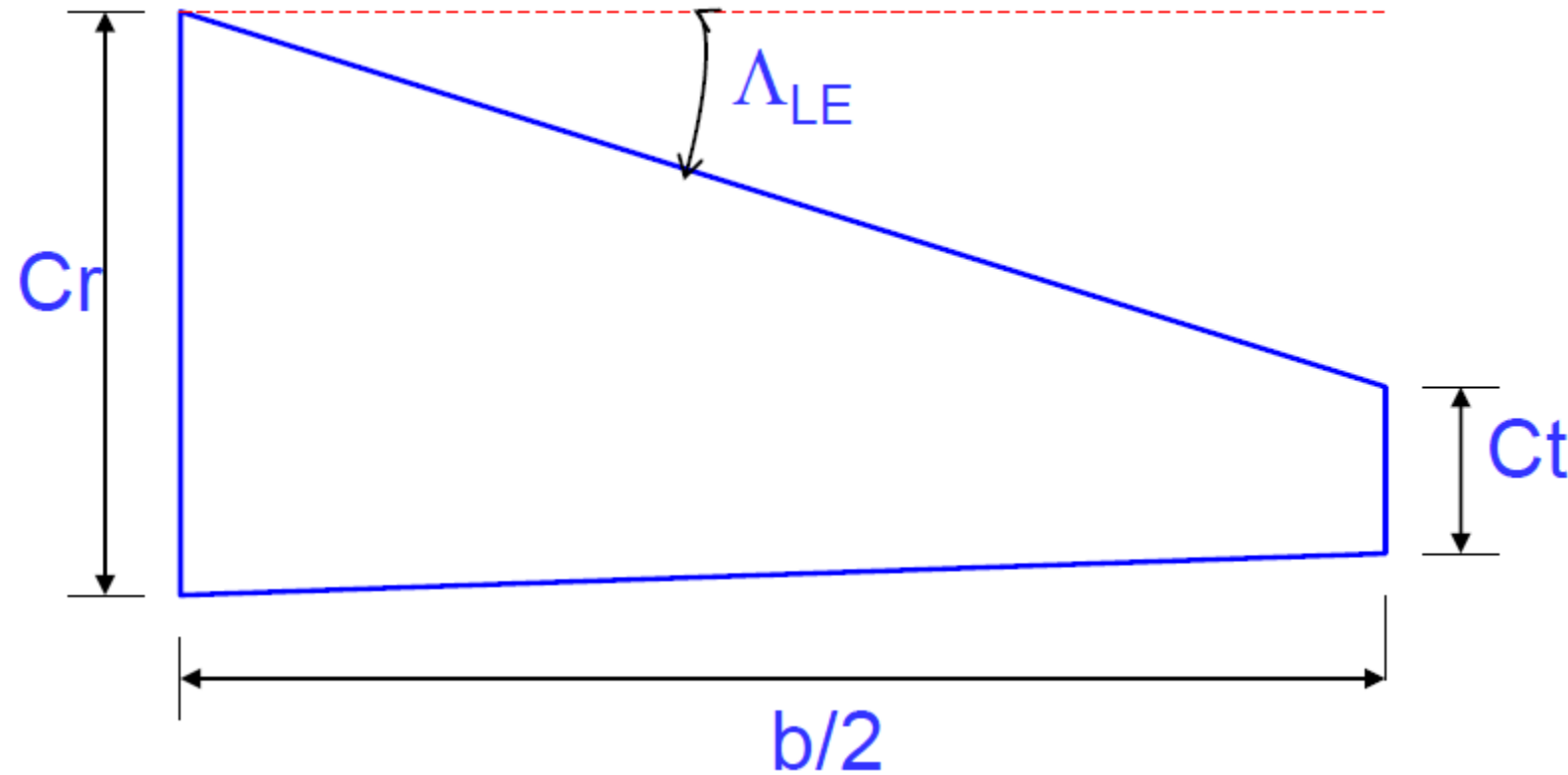
- fuselagem,
- asas,
- empenagem,
- trem de pouso e
- o grupo moto-propulsor.





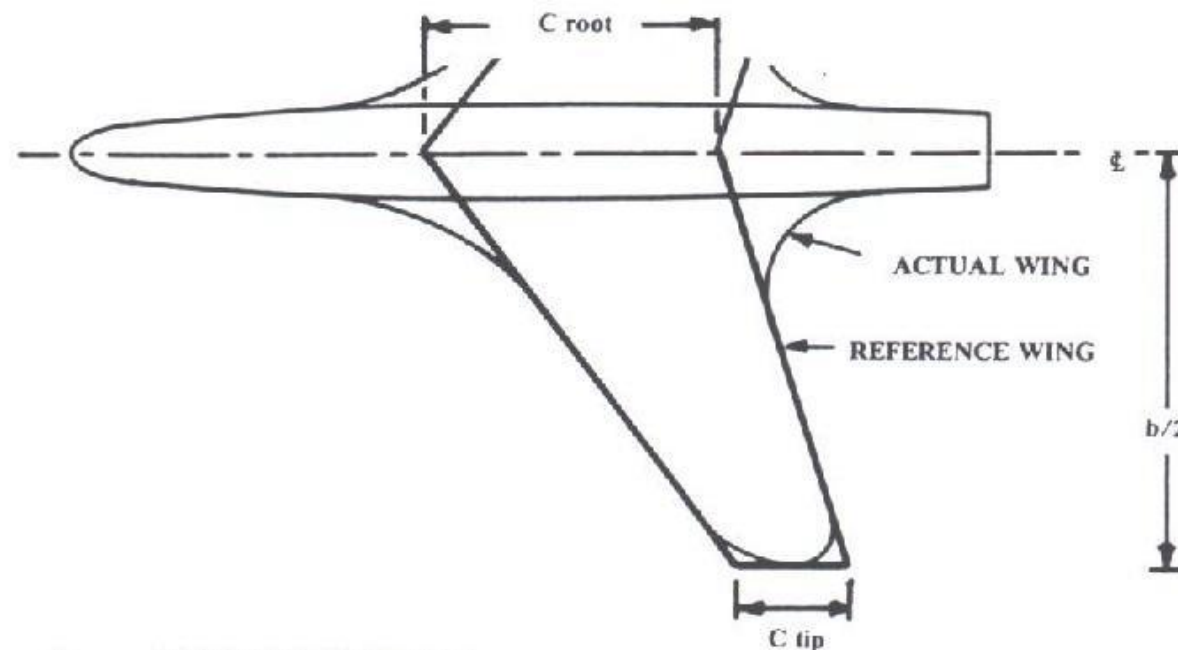


# Asas





# Asas



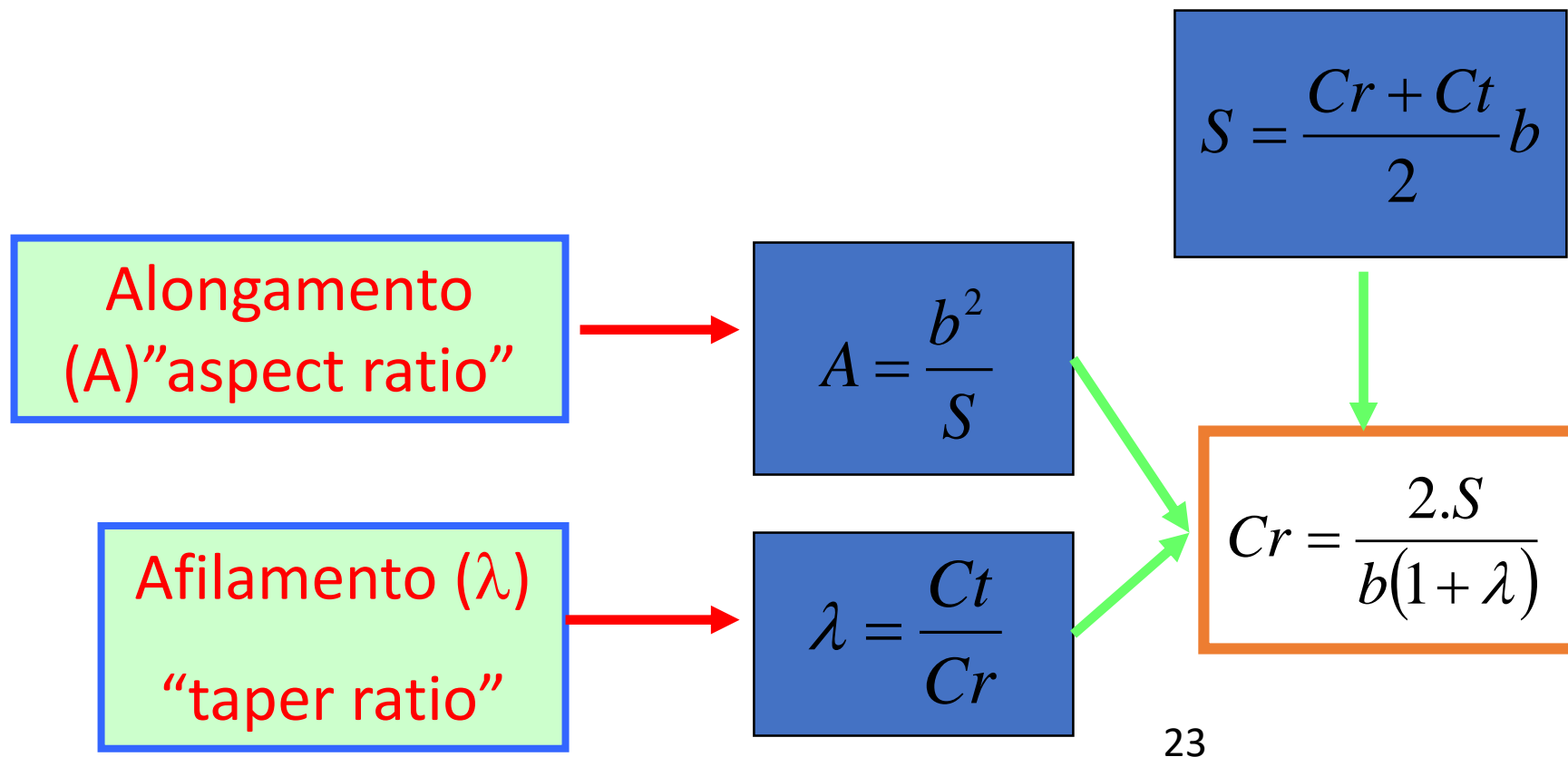
$S$  = REFERENCE WING AREA  
 $C$  = CHORD (DISTANCE L.E. TO T.E.)  
 $A$  = ASPECT RATIO =  $b^2/S$   
 $t/c$  = AIRFOIL THICKNESS RATIO (MAXIMUM THICKNESS/CHORD)  
 $\lambda$  = TAPER RATIO =  $C_{tip}/C_{root}$   
 $b$  = SPAN

GIVEN:  $W/S, A, \lambda$

$$S = W/(W/S) \quad b = \sqrt{A \cdot S} \quad C_{root} = 2 \cdot S/[b(1 + \lambda)] \quad C_{tip} = \lambda \cdot C_{root}$$



# Revisão de aerodinâmica



23



# Revisão de aerodinâmica

- **Alongamento**

- Alongamento elevado: asa de grande envergadura com uma corda pequena.
  - Melhor desempenho. Se aproxima do comportamento 2D, reduzindo arrasto induzido.
  - Aumento excessivo:
    - Problemas de ordem estrutural: aumento na deflexão e momento fletor. Aumento das tensões atuantes na estrutura. Exige estrutura de maior resistência → aumento de peso da aeronave.
    - Manobrabilidade da aeronave: rolamento prejudicado devido maior momento de inércia.
  - Ex.: planadores, aeronaves que voam em baixa velocidade
- Alongamento baixo: asa de pequena envergadura e corda grande.
  - Ex: avião militar, voo em alta velocidade e/ou manobrabilidade

# Revisão de aerodinâmica

- Alongamento

Incremento de A

Coeficiente angular

$dC_L/d\alpha$

$C_{Lmax}$

$\alpha_s$

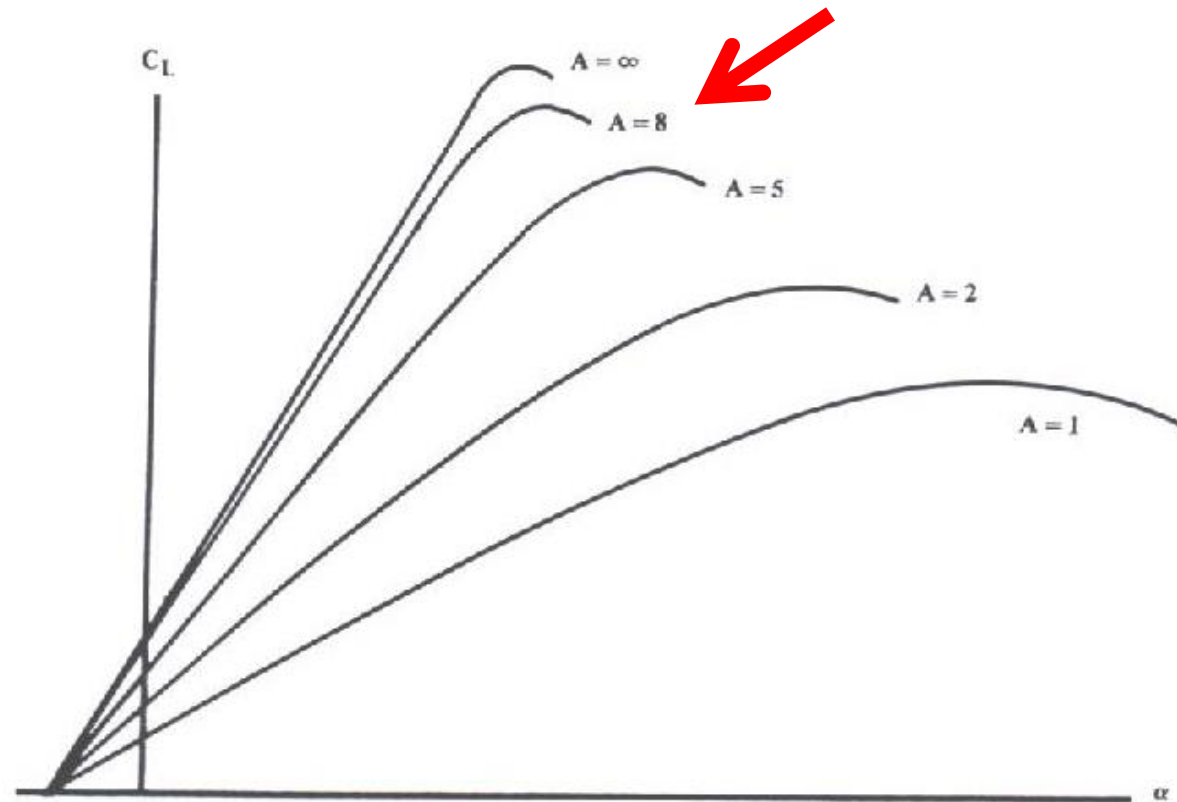
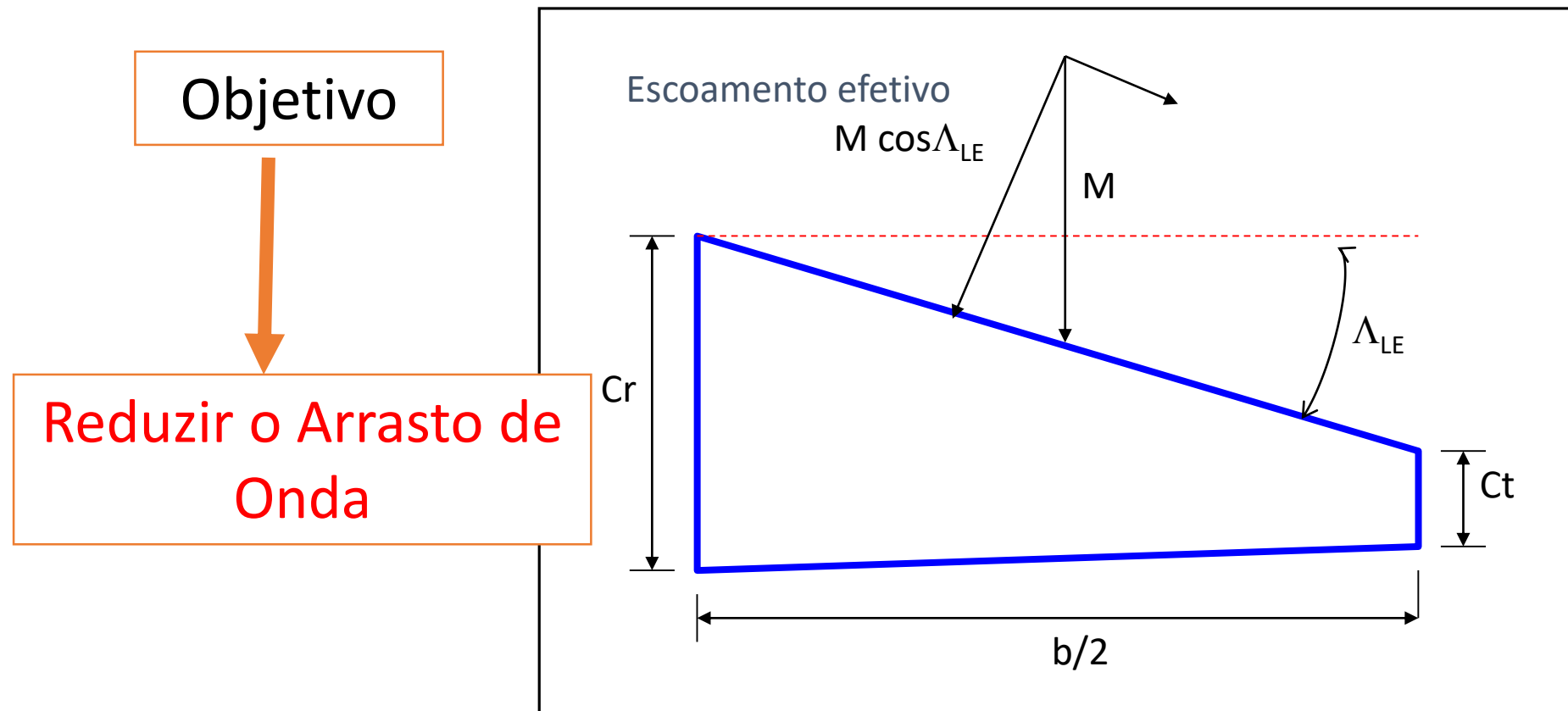


Fig. 4.18 Effect of aspect ratio on lift.

# Revisão de aerodinâmica

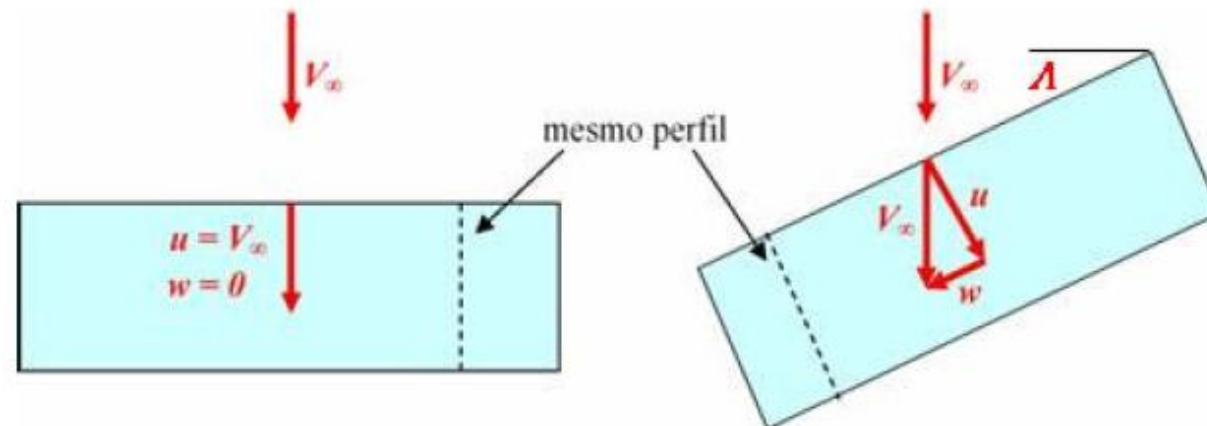
- Enflechamento





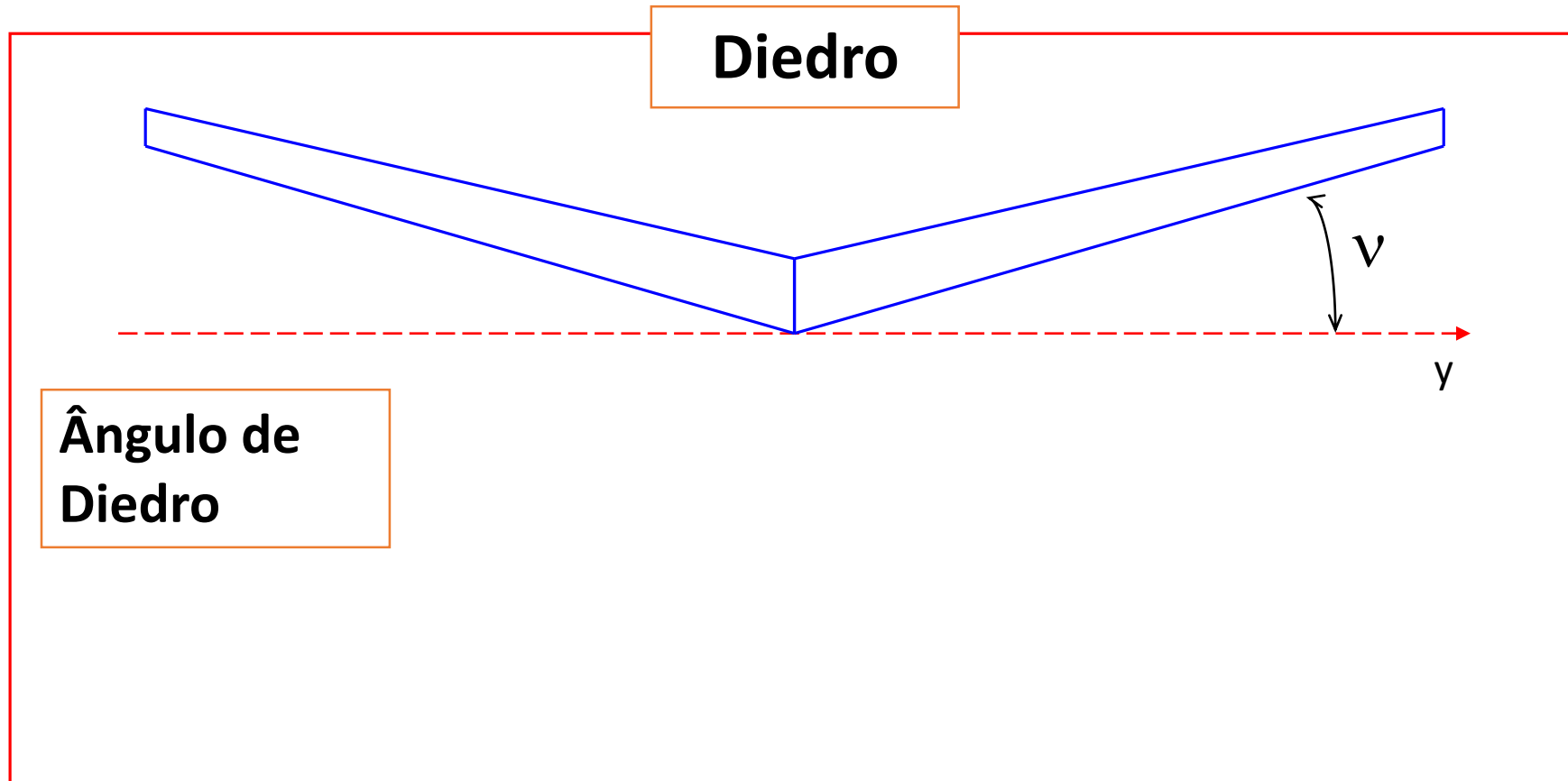
# Revisão de aerodinâmica

- Na figura, a componente  $u$  da velocidade é quem gera a sustentação
- Enflechamento:
- Reduz o Mach efetivo na asa:  $M \cos(\Lambda) < M$
- Para uma mesma velocidade, sustentação é menor
- Adia efeitos transônicos e supersônicos:
  - avião subsônico pode voar mais rápido





# Revisão de aerodinâmica





# Revisão de aerodinâmica

- Projetar um avião envolve trade-offs
- Um fluxo de ar em baixa velocidade gera baixa sustentação. Sustentação extra é obtida com asas de maior alongamento, e não enflechadas
- Voo em alta velocidade gera bastante sustentação. Asa enflechada pode reduzir arrasto, evitar efeitos transônicos, e permitir um aumento na velocidade da aeronave. Alongamento menor vai facilitar a manobrabilidade e dar maior resistência
- Veja que não dá para mudar o alongamento em voo. O enflechamento pode ser mudado, mas é solução cara e aumenta peso da aeronave.
- Soluções:
- Aviões comerciais são ajustados para o voo de cruzeiro, já que é o maior tempo de viagem
- Sustentação em baixa velocidade obtido de outras fontes: vórtice de sustentação, superfícies de controle

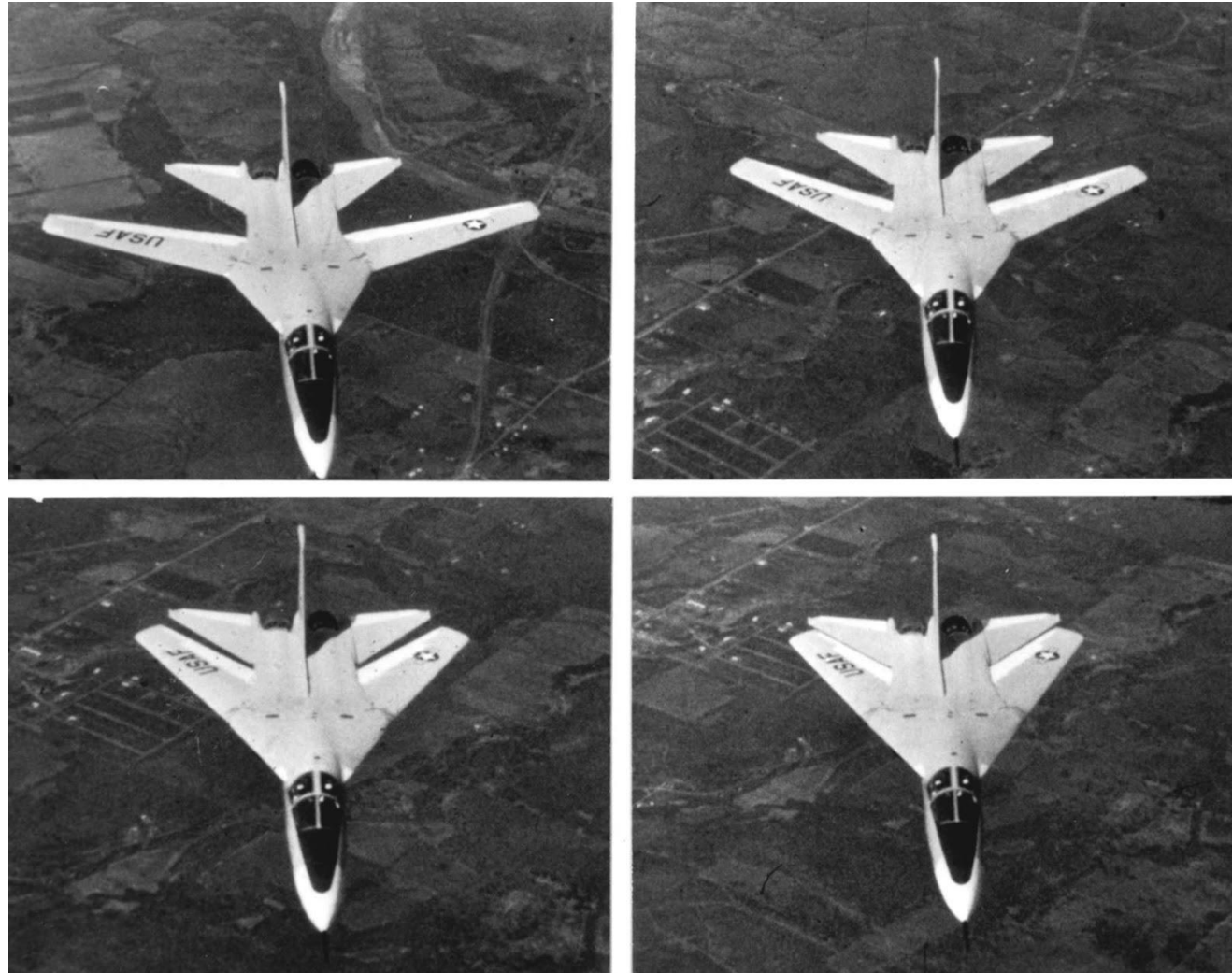


Dassault Mirage G





Boeing 733



F-111





Concorde

<https://www.youtube.com/watch?v=nUtwkJaEPoE>

[https://www.youtube.com/watch?v=mnM\\_enYCpow](https://www.youtube.com/watch?v=mnM_enYCpow)

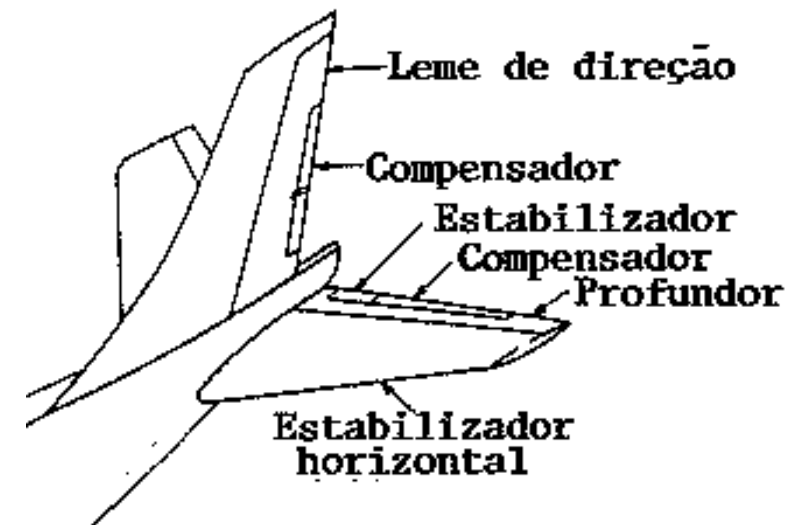
# Empenagem

A empenagem possui como função principal estabilizar e controlar o avião durante o voo.

É dividida em duas superfícies:

- **Horizontal (Estabilizador)** que contém o profundor é responsável pela estabilidade e controle longitudinal da aeronave
- **Vertical (Leme)** que é responsável pela estabilidade e controle direcional da aeronave.

Sua estrutura é similar à da asa e normalmente vem em um perfil simétrico.





# Empenagem

- **Superfície horizontal:** é formada pelo estabilizador horizontal (parte fixa) e pelo profundor (parte móvel), algumas aeronaves também possuem os compensadores com a finalidade de reduzir os esforços de pilotagem e em alguns casos o estabilizador e o profundor constituem-se de uma única peça completamente móvel. A superfície horizontal é responsável pelos movimentos de arfagem (levantar e baixar o nariz) da aeronave.
- **Superfície vertical:** é formada pelo estabilizador vertical (parte fixa) e pelo leme de direção (parte móvel), essa superfície é responsável pelos movimentos de guinada (deslocamento do nariz para a direita ou para a esquerda) da aeronave.

# Superfícies aerodinâmicas de controle

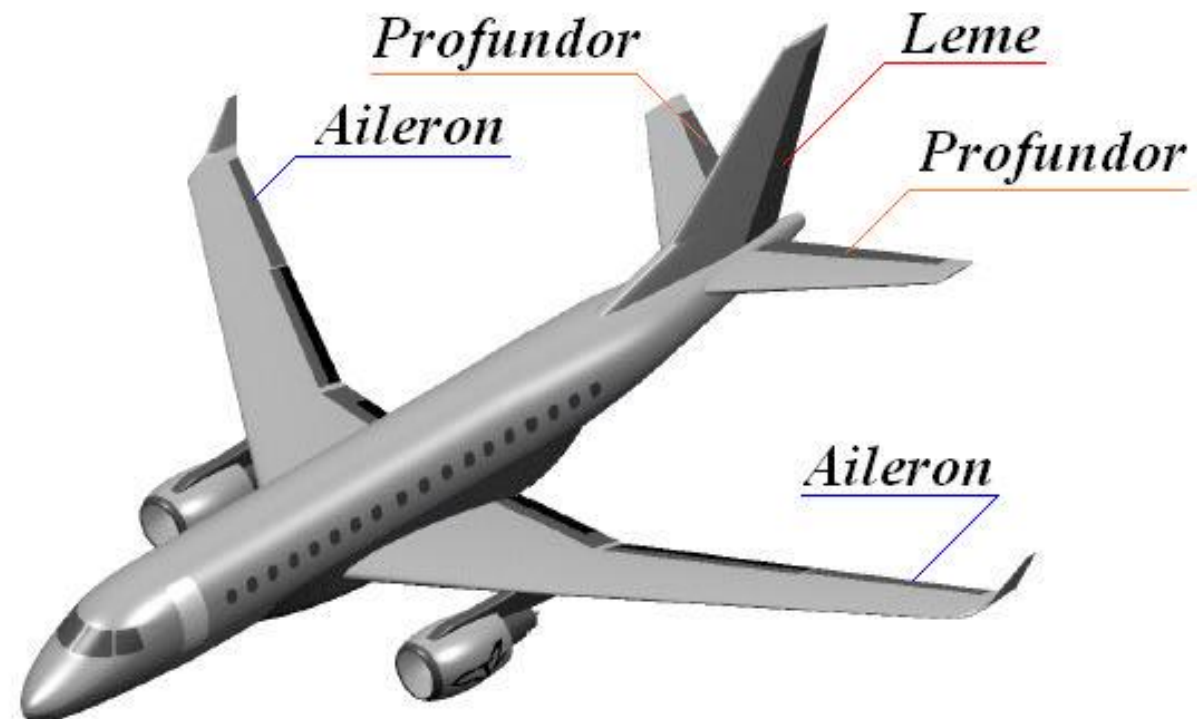
- Aileron, Profundor e Leme.

Essas superfícies de controle produzem forças aerodinâmicas em decorrência da mudança das características de sua superfície e modificando a atitude da aeronave em relação aos seus eixos de referência.

Eixo Longitudinal

Eixo Lateral

Eixo Transversal





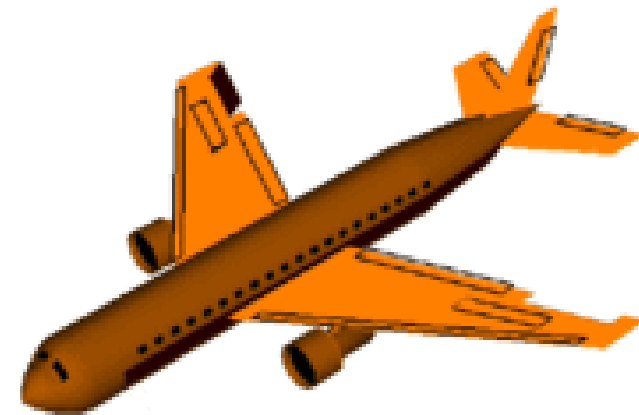
# Superfícies aerodinâmicas de controle

## Ailerons – Controle em torno do eixo Longitudinal:

O movimento é de **rolamento**.

Abaixando o aileron em uma asa levanta-se o aileron na outra.

A asa com o aileron abaixado sobe por causa de sua superfície aumentada, e a asa com o aileron levantado afunda por causa de sua sustentação diminuída. Deste modo, o efeito de mudança de um ou outro aileron é ajudado pelo movimento simultâneo e oposto do aileron na outra asa.



# Superfícies aerodinâmicas de controle

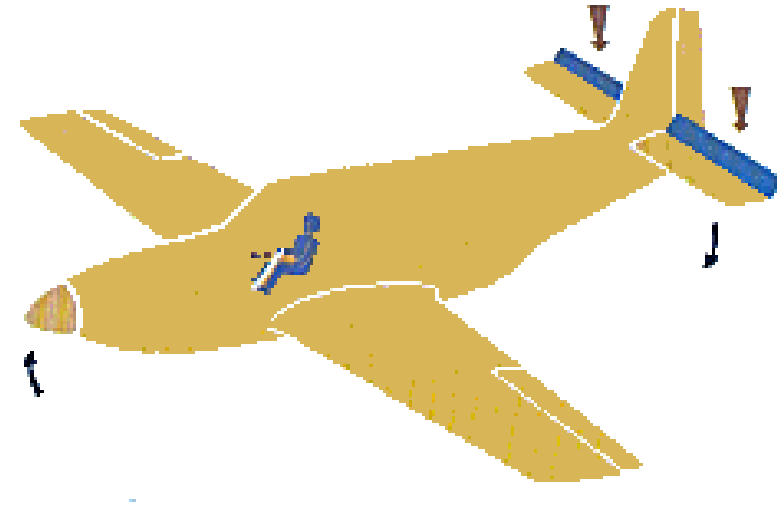
**Ailerons – Controle em torno do eixo Longitudinal:**



# Superfícies aerodinâmicas de controle

## Profundores: Controle em torno do eixo lateral.

- Este movimento é chamado de **arfagem**.
- Os profundores formam a parte traseira da cauda horizontal e movimentam-se simultaneamente para cima e para baixo. Eles são dispositivos articulados presos no estabilizador horizontal.
- Juntos, o estabilizador horizontal e os profundores formam um aerofólio único.
- Uma mudança na posição dos profundores modifica a curvatura do aerofólio, que aumenta ou diminui sustentação.
- Se diminuir a sustentação a cauda abaixo, se aumentar ela sobre ocasionando o movimento de arfagem.

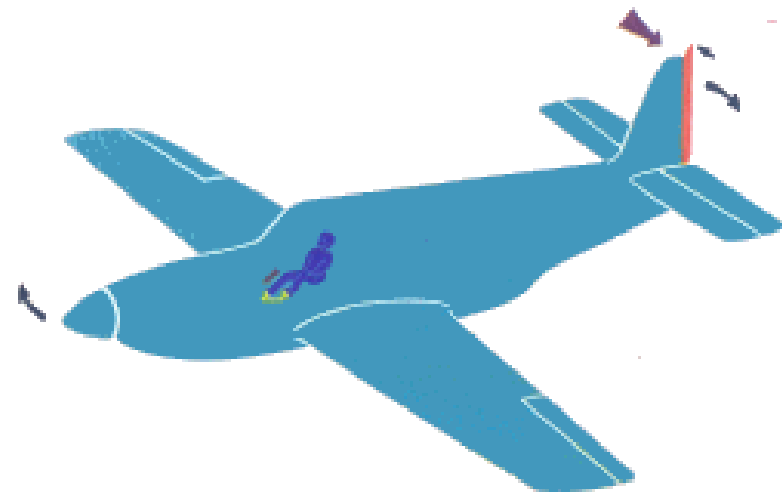




# Superfícies aerodinâmicas de controle

## Leme - controle em torno do eixo vertical.

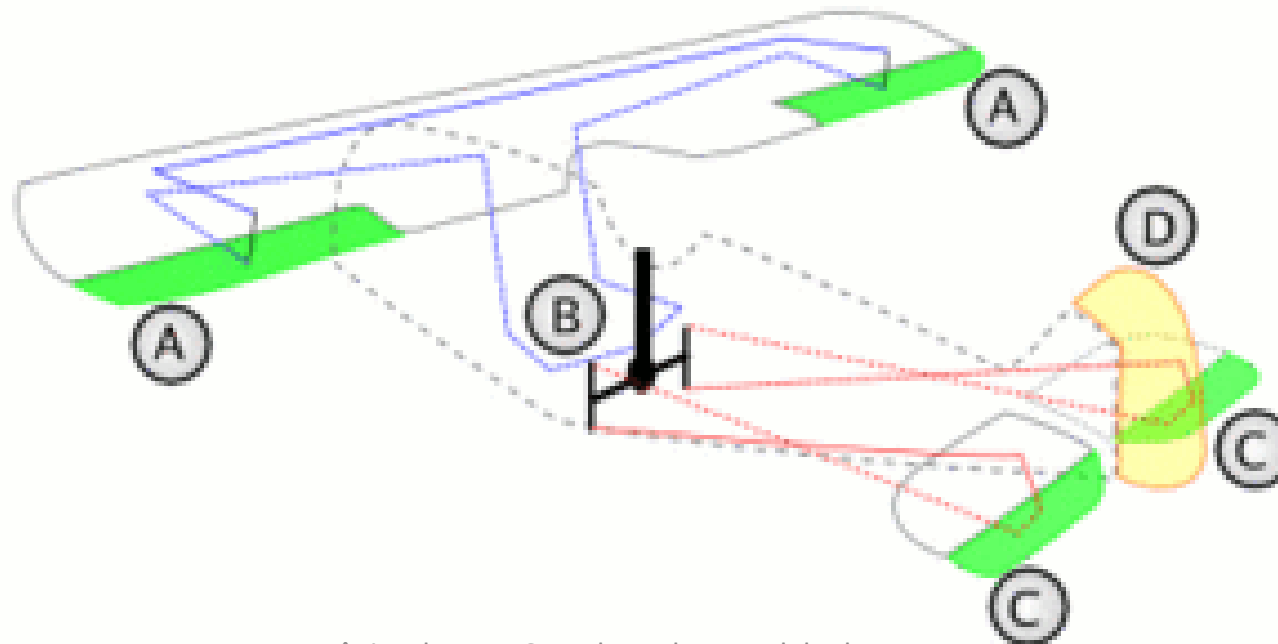
- Este movimento é chamado de **guinada**.
- Como as outras superfícies de controle primário, o leme é uma superfície móvel dobrável a uma superfície fixa que, neste caso, é o estabilizador vertical, ou barbatana.
- Sua ação parecida a dos profundores, fazendo movimentos diferentes em um avião, no caso, movimentos laterais em vez de movimentos de cima para baixo e de baixo para cima.





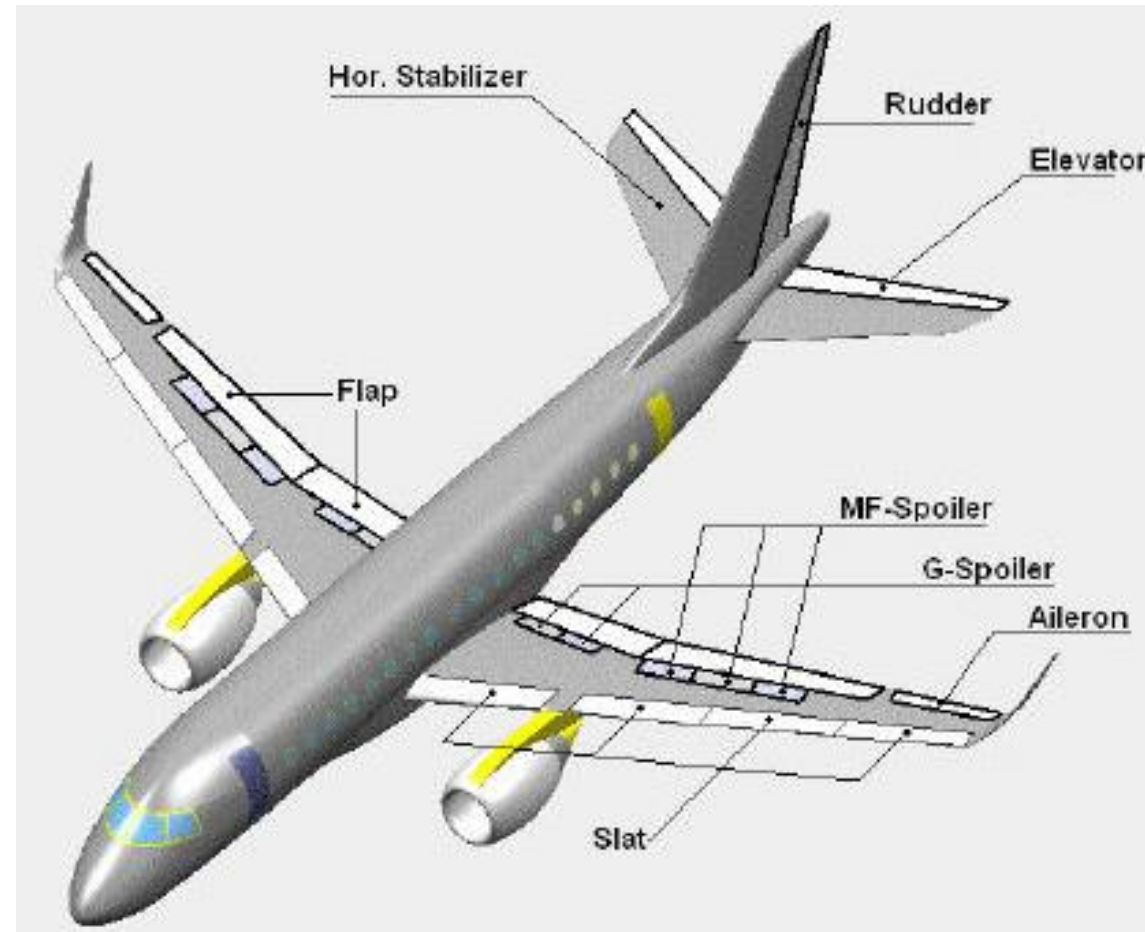
# Sistema de controle

Os ailerons (A) são movimentos controlador pelo manche (B) da aeronave, no caso para a direita ou esquerda, os profundores (C) também, mas leva-se o manche à frente ou para trás, já o leme (D) é controlado pelos pedais da aeronave, para a direita ou esquerda.





# Sistema de controle e sustentação





# Sistema de controle e sustentação

Além dessas superfícies de controle básicas , outros dispositivos podem existir na aeronave tal que possam estar atuando forças e momentos a fim de influenciar o comportamento da aeronave.

Como exemplo podemos citar:

- 1 – Freios aerodinâmicos ou spoilers montados na fuselagem da aeronave ou em suas asas;
- 2 – Flaps;
- 3 – Canards;
- 4 – Slats;
- 5 – Asas com geometria variável.

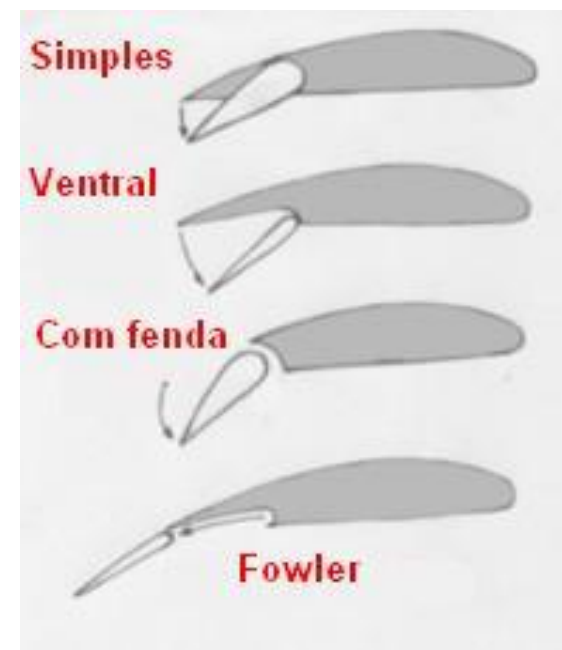


## Spoilers



## Flap

O flape ou flap é um dispositivo hipersustentador que possibilita aumentar a curvatura da asa. Dessa forma é possível aumentar seu coeficiente de sustentação ( $C_L$ ).







## Canards

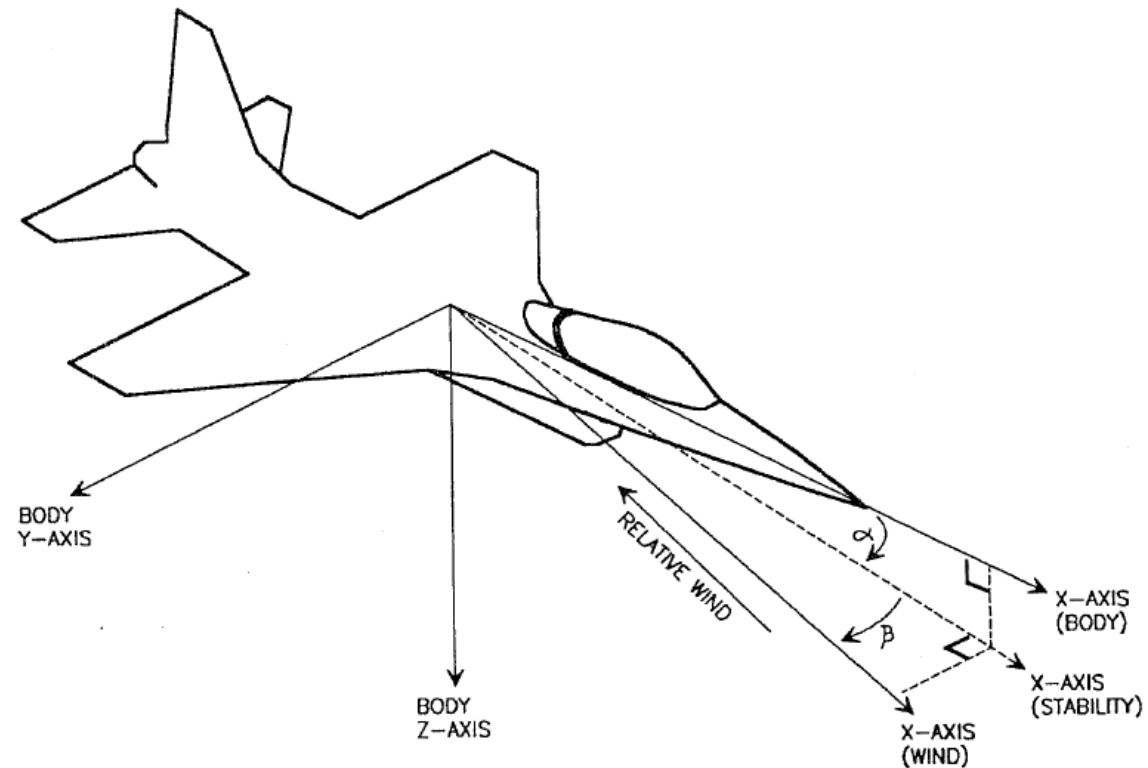


# Forças e momentos em aeronaves

- Forças e momentos aerodinâmicos são gerados pelo fluxo de ar
- Descritos no sistema do vento  $S_w$
- Velocidade do vento igual à velocidade relativa do CG, mas com direção oposta

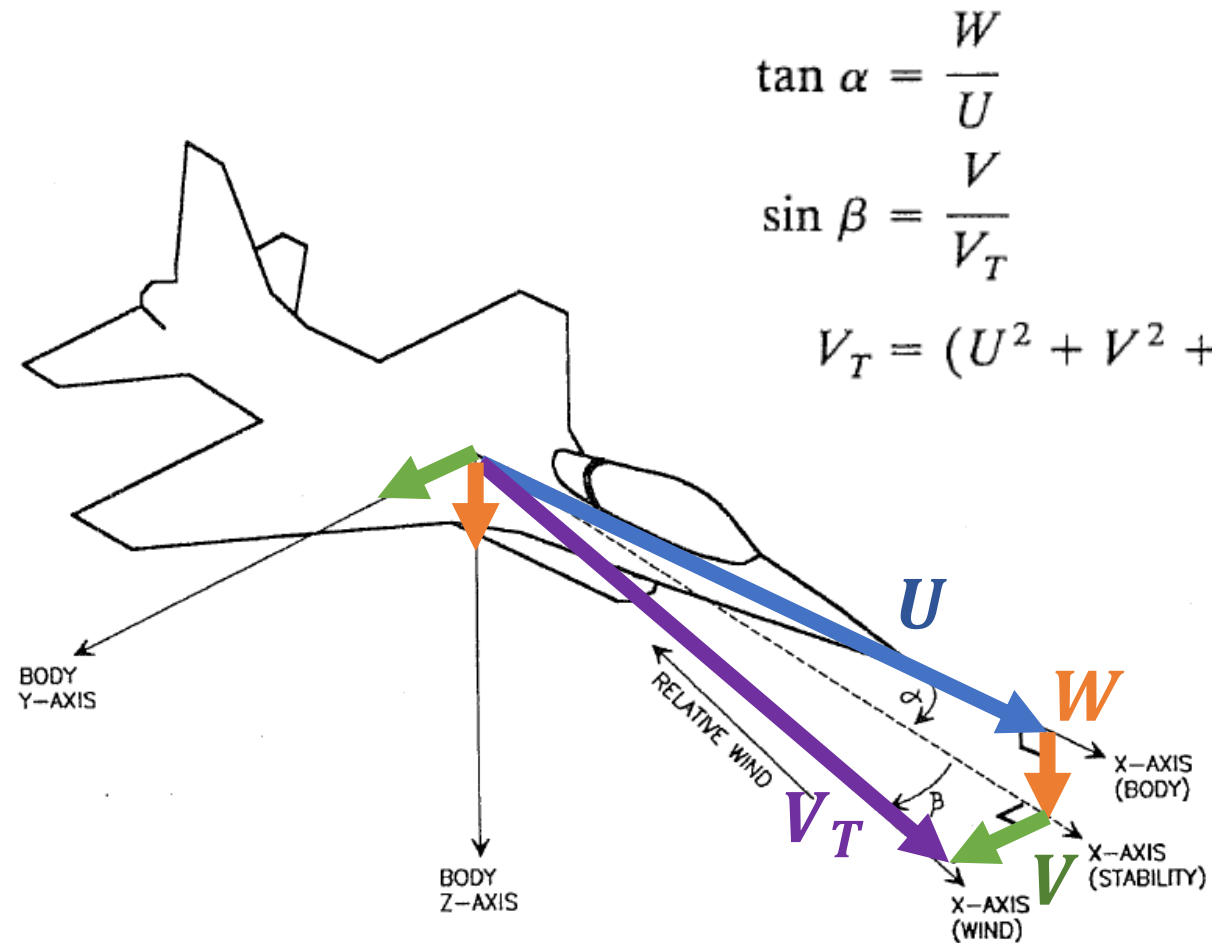
## Rotações

- Primeira:  $\alpha$ , sentido negativo, eixo y (body)
- Segunda:  $\beta$ , sentido positivo, eixo z (wind)
- Quando se aplica apenas a rotação  $\alpha$ , mas não  $\beta$ , tem-se o sistema de estabilidade  $S_s$



# Forças e momentos em aeronaves

- $\mathbf{V} = [U \ V \ W]^T$ : velocidade do avião em relação ao fluxo de ar, representado no sistema do corpo
- $V_T = \|\mathbf{V}\|$ : magnitude da velocidade do avião em relação ao fluxo de ar
- Veja que os conjuntos de 3 variáveis  $U, V, W$  e  $V_T, \alpha, \beta$  trazem a mesma informação, mas de modos distintos (cartesiano e polar).





# Forças e momentos em aeronaves

- Partindo do sistema do corpo, a sequência de rotação é 2-3, e a primeira rotação tem sentido oposto à regra da mão direita.
- A rotação em torno do eixo  $y$  é o ângulo de ataque  $\alpha$ . O resultado da rotação é o sistema de coordenadas de estabilidade  $S_S$ .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{STAB}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{BODY}}$$

- Após, a rotação no eixo  $z$  é o ângulo de derrapagem  $\beta$ , obtendo-se  $S_w$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{WIND}} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{STAB}}$$

- Após rotações, eixo  $x$  está alinhado com fluxo de vento



# Forças e momentos em aeronaves

- Rotação completa:

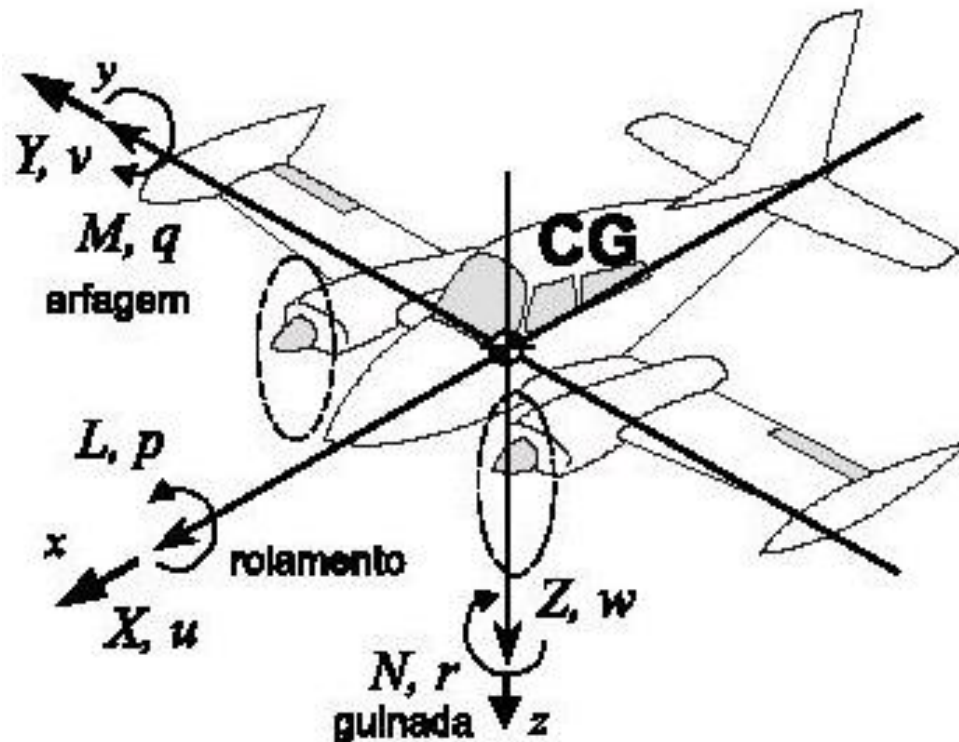
$$\mathbf{v}_{\text{WIND}} = S_{\beta} S_{\alpha} \mathbf{v}_{\text{BODY}} = \mathbf{D}_w^b \mathbf{v}_b$$
$$\mathbf{D}_w^b = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- Para voo eficiente,  $\beta \approx 0$
- O ângulo  $\alpha$  deve ser grande o suficiente para prover sustentação, mas costuma também ser pequeno
- Forças em  $S_w$ :

	Forças em $S_b$	Momentos
• $-D$ (arrasto – para trás)	$F_x$	$\bar{L}$
• $Y$ (força lateral – para a direita)	$F_y$	$M$
• $-L$ (sustentação – para cima)	$F_z$	$N$

# Forças e momentos em aeronaves

- Forças e momentos, direções positivas



# Forças e momentos em aeronaves

$$\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_A} \\ F_{y_A} \\ F_{z_A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{x_T} \\ F_{y_T} \\ F_{z_T} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{F}_{B_A} + \mathbf{F}_{B_T}$$

$$S\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_W = \mathbf{F}_{W_A} + \mathbf{F}_{W_T} = \begin{bmatrix} -D \\ Y \\ -L \end{bmatrix} + S\mathbf{F}_{B_T}$$

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \bar{L} \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{L}_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix} \equiv \mathbf{T}_{B_A} + \mathbf{T}_{B_T}$$

$$\mathbf{T}_W = \begin{bmatrix} \bar{L}_W \\ M_W \\ N_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}_{W_A} \\ M_{W_A} \\ N_{W_A} \end{bmatrix} + S\mathbf{T}_{B_T} \equiv \mathbf{T}_{W_A} + \mathbf{T}_{W_T}$$

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = S^T \mathbf{v}_W = S^T \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_T \cos \alpha \cos \beta \\ V_T \sin \beta \\ V_T \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$



# Forças e momentos em aeronaves

- Forças e momentos possuem origem aerodinâmica e propulsiva
- Subscrito A indica origem aerodinâmica
- Subscrito T indica origem propulsiva (thrust)
- $V_T$ : Velocidade do fluxo de ar. Por definição, está alinhado com o eixo x de  $S_w$
- Motor: gera principalmente  $F_{x_T}$ , mas angulação pode gerar também  $F_{y_T}$  e  $F_{z_T}$

# Forças e momentos em aeronaves

- Equações de força e momento para aeronave completa:

$$\text{drag, } D = \bar{q}SC_D$$

$$\text{lift, } L = \bar{q}SC_L$$

$$\text{sideforce, } Y = \bar{q}SC_Y$$

$$\text{rolling moment, } \bar{L} = \bar{q}SbC_l$$

$$\text{pitching moment, } M = \bar{q}S\bar{c}C_M$$

$$\text{yawing moment, } N = \bar{q}SbC_N,$$

$\bar{q}$  = free-stream dynamic pressure

$S$  = wing reference area

$b$  = wing span

$\bar{c}$  = wing mean geometric chord.

- Mais complicadas que equações do aerofólio 2D
- Descritas em  $S_w$
- Coeficientes de força em  $S_B$ :  $C_x, C_y, C_z$
- Coeficientes dependem de vários fatores:  $\alpha, \beta, \omega_b$ , superfícies de controle (aileron, profundor, leme, etc.), número de Mach. Ex:

$$C_D \equiv C_D(C_L) + \Delta C_D(\text{el}) + \Delta C_D(\beta) + \Delta C_D(M) + \dots$$



# Forças e momentos dependentes de taxa de variação

- Ao rotacionar, altera-se o fluxo de ar no aerofólio
- Efeito transitório é difícil de modelar
- Simplifica-se supondo que componentes de força e momento são dependentes de taxas de variação:  $P, Q, R, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$
- Formato geral de uma componente que depende de taxa

$$\text{dimensionless force or moment component} = \frac{k}{2V_T} C(\alpha, \beta, M) \times \text{rate}$$

- $k/2$ : algum comprimento característico, como metade da envergadura
- $\frac{k}{2} \times \text{rate}$ : velocidade tangente
- velocidade tangente /  $V_T$ : perturbação angular

# Obtenção dos coeficientes

$$C_D \equiv C_D(C_L) + \Delta C_D(\text{el}) + \Delta C_D(\beta) + \Delta C_D(M) + \dots$$

$$C_L \equiv C_L(\alpha, T_C) + \Delta C_L(\text{el}) + \Delta C_L(M) + \Delta C_{L_{ST}}(\alpha, T_C) + \dots$$

$$C_Y \equiv C_Y(\beta) + \Delta C_Y(\text{rdr}) + \dots$$

$$C_l \equiv C_l(\beta) + \Delta C_l(\text{ail}) + \Delta C_l(\text{rdr}) + \frac{b}{2V_T} [C_{l_p} P + C_{l_r} R] + \dots$$

$$C_M \equiv C_M(C_L, T_C) + \Delta C_M(\text{el}) + \Delta C_{M_{ST}}(\alpha, T_C) + \Delta C_M(M) \\ + \frac{\bar{c}}{2V_T} [C_{m_q} Q + C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha}] + \frac{x_R C_L}{\bar{c}} + \dots$$

$$C_N \equiv C_N(\beta) + \Delta C_N(\text{rdr}) + \Delta C_N(\text{ail}) + \frac{b}{2V_T} [C_{n_p} P + C_{n_r} R] + \dots$$

\* Decomposição comum para aviões subsônicos



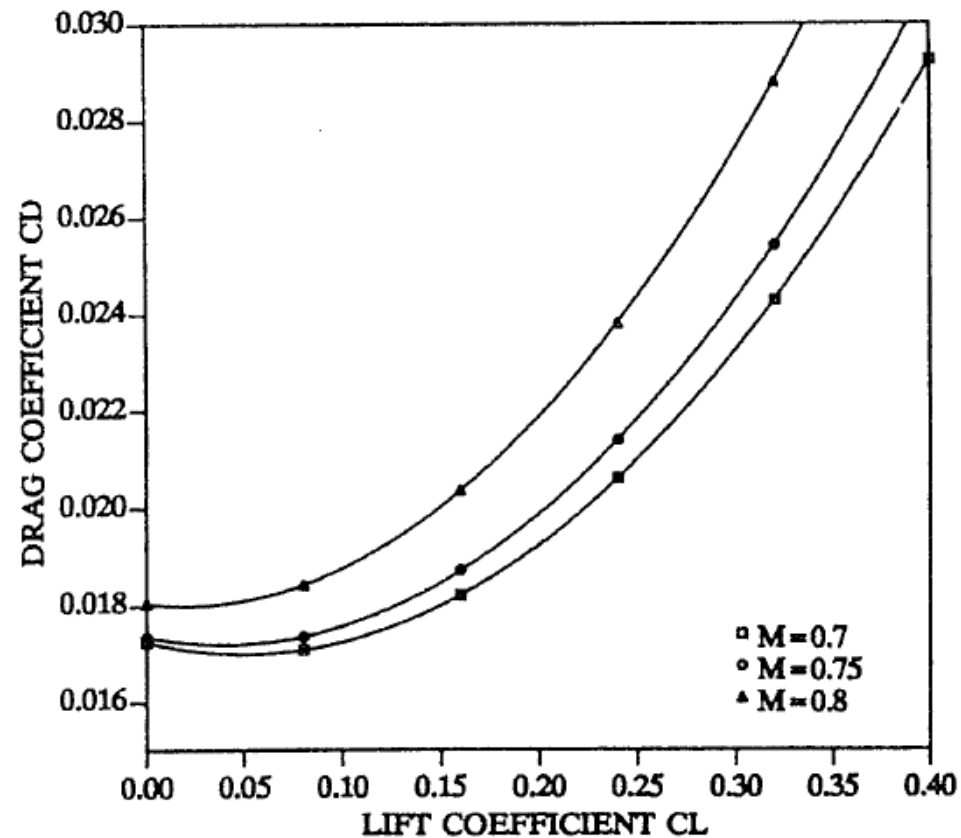


# Obtenção dos coeficientes

- Cada coeficiente pode ser expresso como uma soma de componentes, cada um sendo afetado por parâmetros distintos.
- O primeiro é o componente base, de maior relevância
- Influências importantes, mas que foram omitidas: posição do trem de pouso, configurações de flaps, etc.
- Componentes obtidos em:
  - Simulações em computador
  - Túnel de vento
  - Ensaio de voo

# Coeficiente de arrasto

- Componente base:  $C_D(C_L)$



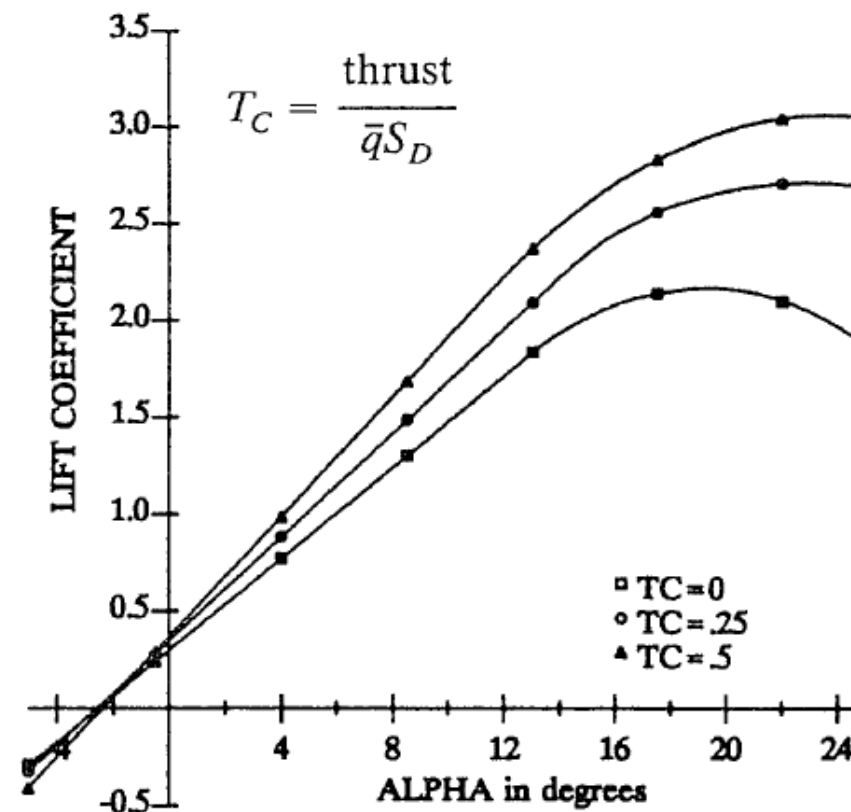
# Coeficiente de arrasto

- Componente base:  $C_D(C_L)$
- Obtido com aeronave trimada, ou seja, com superfícies de controle e propulsão ajustados para manter condição de voo
- Gráfico: polar de arrasto se ajusta bem a parábola:
$$C_D(C_L) = k(C_L - C_{L_{DM}})^2 + C_{DM}$$
- DM: drag (arrasto) mínimo
- Não afetado por número de Mach se esse for baixo
- Termos de correção
- Mudanças de configuração (flaps, trem de pouso, etc.)
- Efeitos de superfícies de controle
- Efeito de solo, etc.

$$C_D \equiv C_D(C_L) + \Delta C_D(\text{el}) + \Delta C_D(\beta) + \Delta C_D(M) + \dots$$

# Coeficiente de sustentação

- Componente base:  $C_L(\alpha, T_C)$



# Coeficiente de sustentação

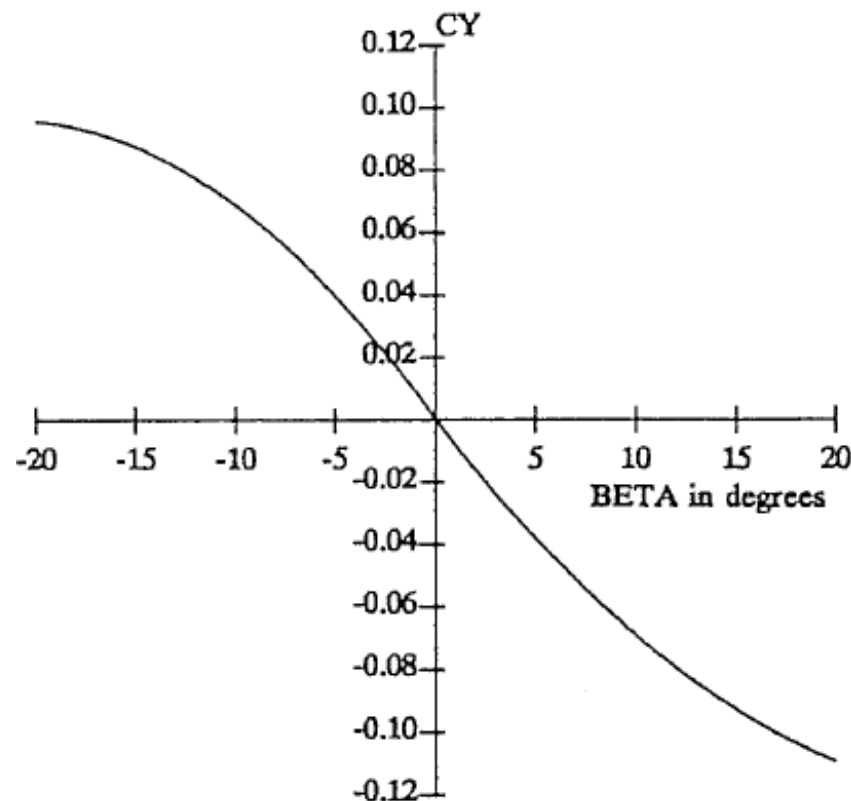
- Componente base:  $C_L(\alpha, T_C)$
- $T_C$ : coeficiente de empuxo, insere efeito de *wash* causado por propulsores a hélice
- $S_D$ : área da asa varrida pelo *wash*
- Outros componentes:
- Comando de profundor
- Número Mach
- Efeito de estol

$$C_L \equiv C_L(\alpha, T_C) + \Delta C_L(\text{el}) + \Delta C_L(M) + \Delta C_{L_{\text{ST}}}(\alpha, T_C) + \dots$$



# Coeficiente de força lateral

- Componente base:  $C_Y(\beta)$





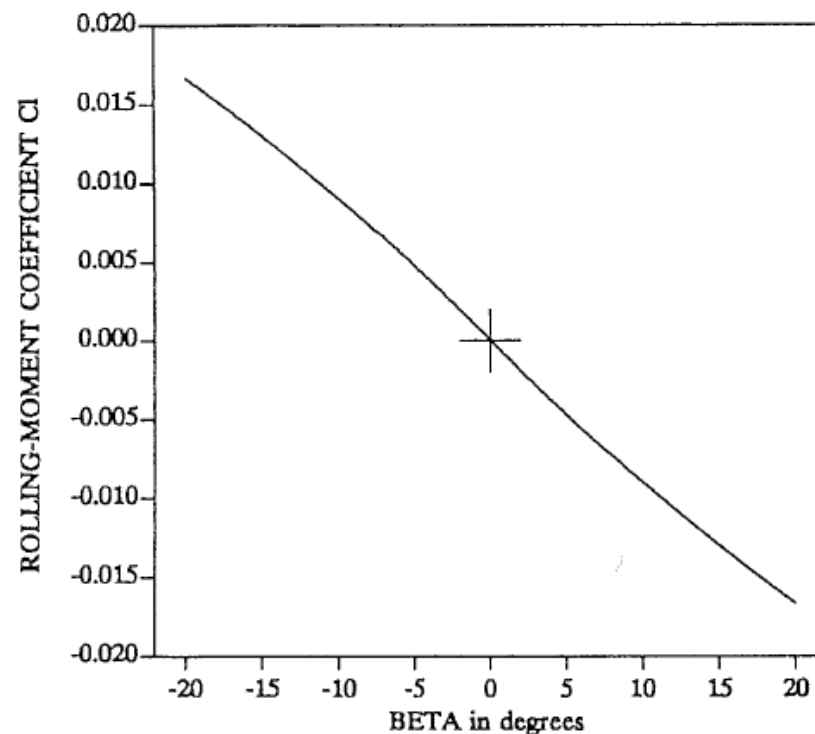
# Coeficiente de força lateral

- Componente base:  $C_Y(\beta)$
- Força lateral só é significativa quando  $\beta \neq 0$
- Influenciado por flaps, wash do propelente, efeitos compressivos
- Valor típico:  $C_Y \approx 0.1$
  
- Outros componentes:
- Deflexão do leme
- Trem de pouso

$$C_Y \equiv C_Y(\beta) + \Delta C_Y(\text{rdr}) + \dots$$

# Coeficiente de momento de rolagem

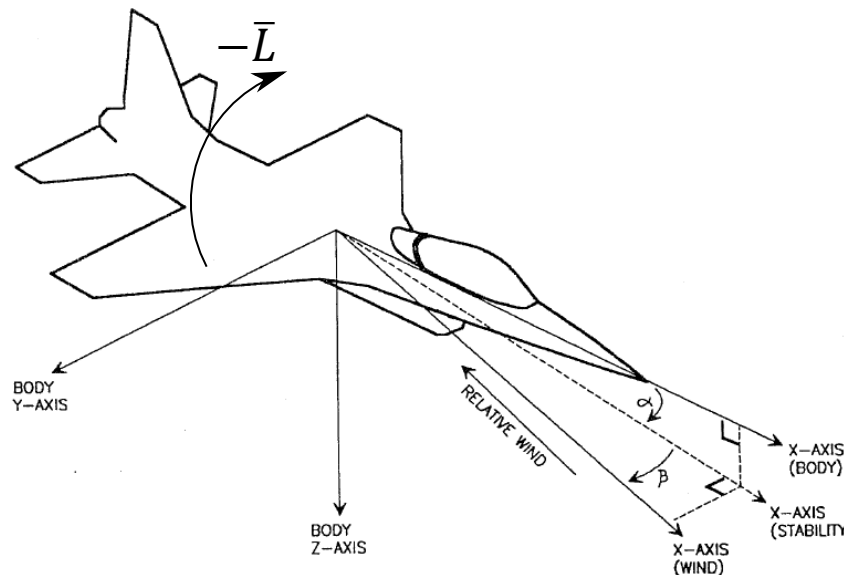
Componente base:  $C_l(\beta)$



$$C_l \equiv C_l(\beta) + \Delta C_l(\text{ail}) + \Delta C_l(\text{rdr}) + \frac{b}{2V_T} [C_{l_p} P + C_{l_r} R] + \dots$$

# Coeficiente de momento de rolagem

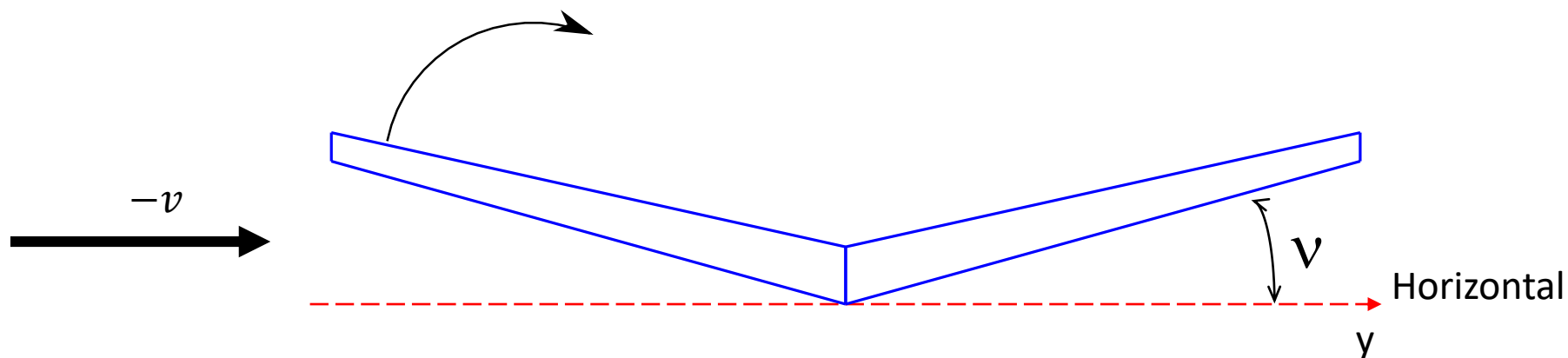
- Componente base:  $C_l(\beta)$
- Chamado de efeito diedro:
- 3 fontes:
  - Diedro das asas
  - Enflechamento
  - Fluxo de ar na fuselagem



- Usualmente, as 3 fontes geram momento negativo para beta positivo
  - Não é coincidência, mas sim por projeto: diedro e enflechamento possuem ângulos com sinal apropriado para obter efeito desejado.
- Efeito:
  - *Roll stiffness*: aeronave tende a voar com asas niveladas, resiste ao rolamento

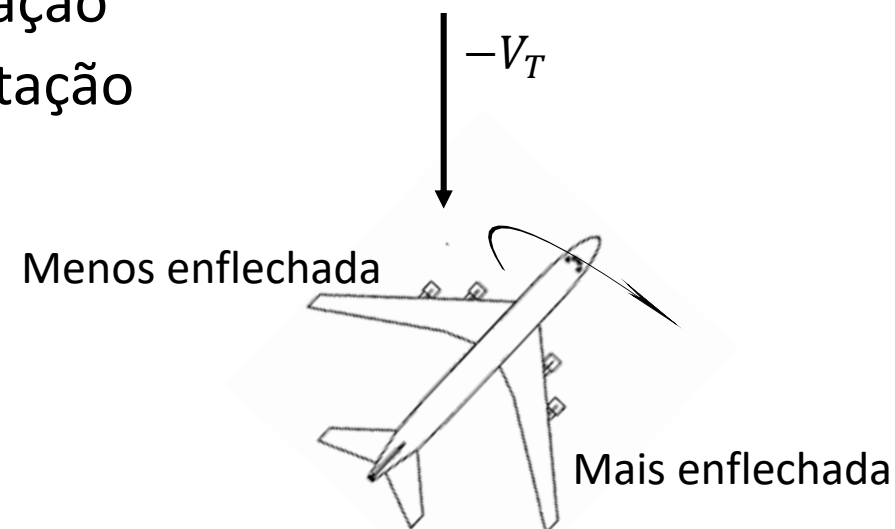
# Coeficiente de momento de rolagem

- Diedro da asa
- Do ponto de vista de vento lateral, se ângulo de diedro é positivo:
  - “Primeira” asa possui ângulo de ataque mais positivo
  - Outra asa com ângulo de ataque menos positivo



# Coeficiente de momento de rolagem

- Enflechamento
- Do ponto de vista do fluxo de ar
  - Uma asa menos enflechada: mais sustentação
  - Outra asa mais enflechada: menos sustentação



# Coeficiente de momento de rolagem

- Outros coeficientes:
- $\frac{b}{2V_T} [C_{l_p} P + C_{l_r} R]$ : amortecimento do rolamento devido às taxas de rolamento e guinada
- $\Delta C_l(ail)$ : momento causado por superfícies de controle:
  - Aileron: sua principal função é gerar o momento  $\bar{L}$ 
    - Perde eficiência próximo de níveis transônicos: ao acionar aileron, forças aerodinâmicas torcem a asa no sentido oposto, podendo mesmo gerar reversão no controle (girar para lado oposto ao comandado)
  - Spoiler: “rouba” sustentação em uma das asas.
    - Funciona bem em alta velocidade
  - Profundor: em algumas aeronaves, pode ter comando diferencial, ou seja, cada metade move-se para um lado, funcionando como aileron

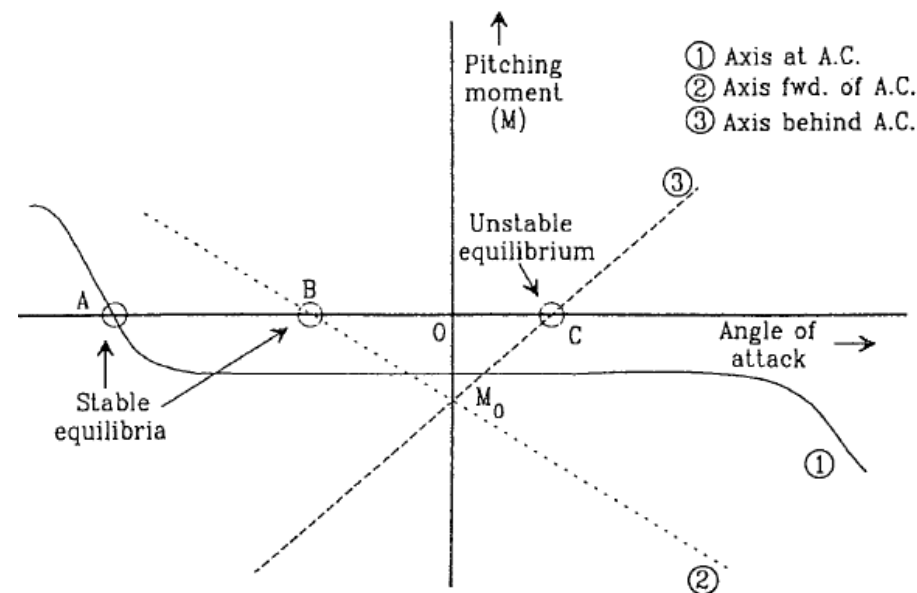
# Coeficiente de momento de rolagem

- Outros coeficientes:
- $\Delta C_l(rud)$ : momento causado por leme:
  - A principal função do leme é gerar o momento  $N$  (guinada)
  - Gerar rolamento  $\bar{L}$  é um efeito colateral indesejado
  - Motivo: leme, e seu centro de pressão, estão acima do eixo de estabilidade  $x$ , gerando braço de alavanca
    - Efeito atenuado com o aumento de  $\alpha$



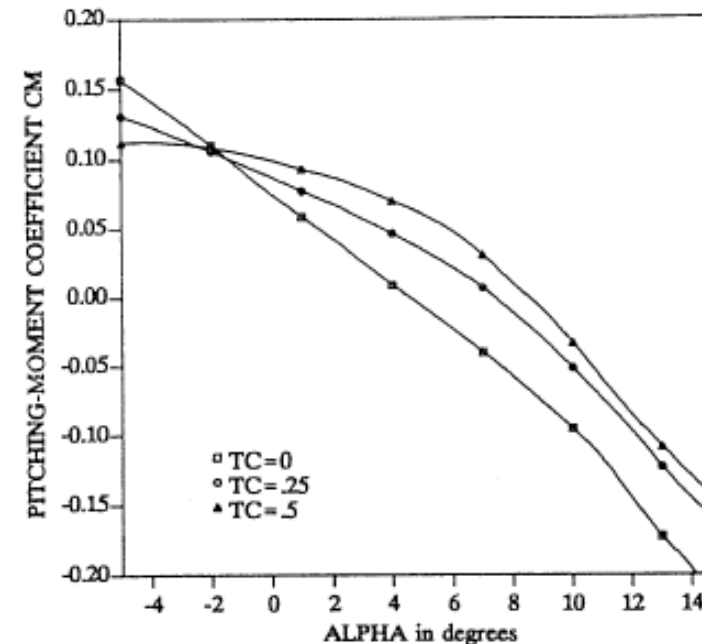
# Coeficiente de momento de arfagem

- Relembrando:
- Linha 2, eixo de rotação à frente do centro aerodinâmico, apresenta um ponto de equilíbrio estável (pitch stiffness):
- $\frac{dM}{d\alpha} < 0$  indica que, se  $\alpha$  aumenta, momento cada vez mais tenta reduzi-lo.
- Seria bom que ponto estável B fosse para um ângulo de ataque positivo, pois deseja-se sustentação elevada.
- $M_0 > 0$
- Empenagem horizontal pode prover momento



# Coeficiente de momento de arfagem

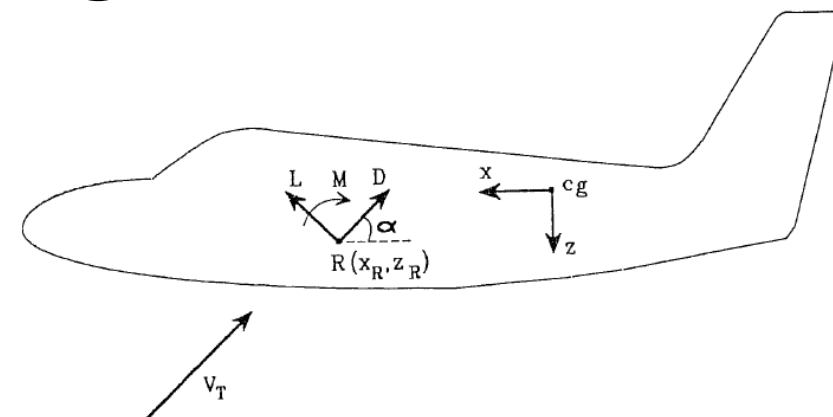
- Componente base:  $C_M(\alpha, T_C)$
- $C_M$  decai com o aumento de  $\alpha$  por projeto: estabilidade (pitch stiffness)
- Coeficiente de empuxo  $T_C$  diminui a influência de  $\alpha$  em  $C_M$



$$C_M \equiv C_M(C_L, T_C) + \Delta C_M(\text{el}) + \Delta C_{M_{ST}}(\alpha, T_C) + \Delta C_M(M) + \frac{\bar{c}}{2V_T} [C_{m_q} Q + C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha}] + \frac{x_R C_L}{\bar{c}} + \dots$$

# Coeficiente de momento de arfagem

- Outros coeficientes:  $\frac{x_R C_L}{\bar{c}}$



- Ponto R (forças aerodinâmicas) está em posição distinta do CG:

$$M_{cg} = M + (L \cos \alpha + D \sin \alpha) x_R + (L \sin \alpha - D \cos \alpha) z_R$$

- $M$ : momento gerado pelas superfícies de controle
- Dividindo por  $\bar{q} S \bar{c}$ , para obter equação adimensional:

$$C_{M_{cg}} = C_M + (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha) \frac{x_R}{\bar{c}} + (C_L \sin \alpha - C_D \cos \alpha) \frac{z_R}{\bar{c}}$$

- Considerando  $\alpha \approx 0, x_R \gg z_R$

$$C_{M_{cg}} = C_M + \frac{x_R C_L}{\bar{c}}$$

# Coeficiente de momento de arfagem

- Veja que maior fonte de momento é a asa, via sustentação
- A empenagem horizontal deve contrabalancear momento da asa
- Se asa gera momento negativo, empenagem horizontal deve gerar momento positivo
  - Pela posição, significa força para baixo: diminui sustentação
  - Gerar força para baixo também gera arrasto
  - Menos sustentação e mais arrasto: perda de eficiência
  - Eficiência pode ser melhorada diminuindo pitch stiffness:
  - Sistema de controle de voo deve ser preparado para lidar com instabilidade
- Para um pitch stiffness positivo, ponto de rotação deve estar à frente do centro aerodinâmico do aerofólio (linha 2 do gráfico)
- CG próximo ao centro aerodinâmico da asa
- Entretanto, deve-se avaliar efeito aerodinâmico do avião como um todo

# Coeficiente de momento de arfagem

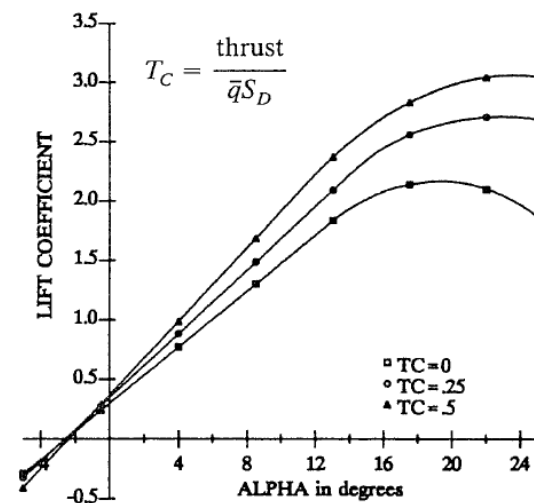
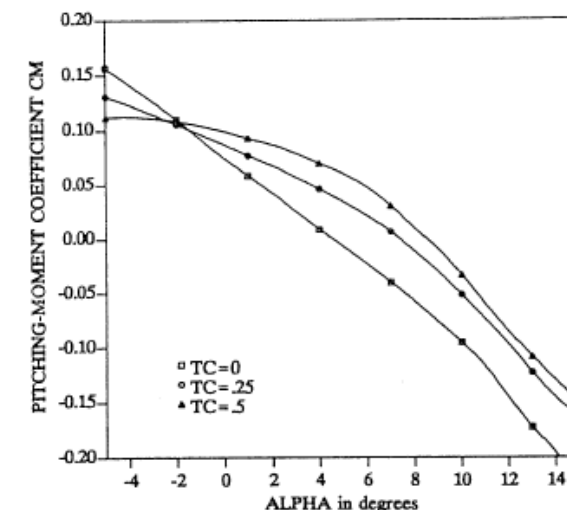
- Usando

$$C_{M_{cg}} = C_M + \frac{x_R C_L}{\bar{c}}$$

- Quer-se  $\frac{dC_{M_{cg}}}{d\alpha} < 0$  para positive stiffness. Derivando a equação acima

$$\frac{dC_{M_{cg}}}{d\alpha} = \frac{dC_M}{d\alpha} + x_R \frac{dC_L/d\alpha}{\bar{c}}$$

- Por projeto,  $\frac{dC_M}{d\alpha} < 0$  (ver slide anterior, com gráfico)
- Por outro lado,  $\frac{x_R}{\bar{c}} \frac{dC_L}{d\alpha}$  é sempre positivo para  $x_R > 0$
- Ponto  $x_R$  em que ambos os fatores se equilibram: ponto neutro, o centro aerodinâmico da aeronave
- $\frac{x_{neutro} - x_R}{\bar{c}}$ : margem estática. Se  $> 0$ , há positive stiffness
- Veja que estabilidade aumenta se  $x_R$  se move no sentido negativo e/ou  $x_{neutro}$  para trás. Ou seja, CG para frente e/ou sustentação para trás.
- Valor usado em projeto: **3 a 5%**, o que permite **variações no CG**



# Coeficiente de momento de arfagem

- Aviões supersônicos:
- A margem estática **aumenta** consideravelmente ao passar do regime subsônico para supersônico. Motivo: mudança no centro aerodinâmico
- Margem estática é bom, mas não em excesso:
  - Menor manobrabilidade
  - Menor rendimento aerodinâmico por aumento de arrasto no ponto de trimagem
  - Solução:
    - Projetar aeronave para ter margem estática negativa em voo subsônico.
    - Projetar sistema de controle automático que controle a instabilidade

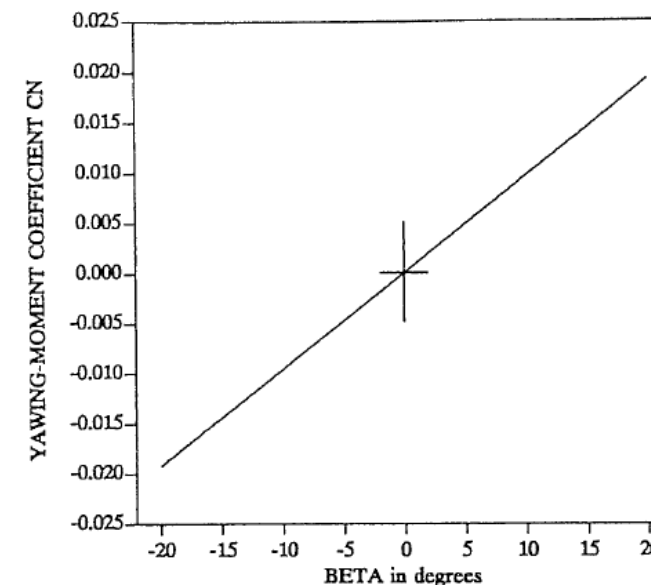
# Coeficiente de momento de arfagem

- Outros coeficientes:
- $\Delta C_{M_{ST}}(\alpha, T_C)$ : efeito de estol
- $\Delta C_M(M)$ : efeito do número de Mach
- $C_{M_q}$ : efeito de amortecimento. Causado por velocidade tangencial de braço de alavanca que altera ângulo de ataque da superfície de controle
- $C_{M_{\dot{\alpha}}}$ : efeito de amortecimento. Causado pela interação aerodinâmica entre asa e empenagem horizontal.  $C_{M_{\dot{\alpha}}}$  modela empenagem recebendo downwash de asa que, pelo tempo de propagação do fluxo de ar, foi gerado em uma asa com ângulo de ataque diferente do atual.
- $\Delta C_M(el)$ : efeito do profundor. Não é trivial, pois fluxo de ar no profundor é afetado pela asa e motores. Pressão aerodinâmica diferente da pressão da asa. Também é sujeito a efeitos elásticos, incluindo reversão de controle.



# Coeficiente de momento de guinada

- Componente base:  $C_N(\beta)$
- Aeronave simétrica: momento é nulo se  $\beta = 0$
- Efeito *weathercock* (cata-vento, biruta): aeronave tende a se alinhar com vento: momento estabilizador
- Várias fontes:
  - empenagem vertical
  - Asa enflechada: lado que recebe vento gera mais sustentação e, portanto, mais arrasto
  - Fuselagem: devido a interação com asa, pode gerar efeito contrário. Efeito destacado para  $\alpha$  elevado



$$C_N \equiv C_N(\beta) + \Delta C_N(\text{rdr}) + \Delta C_N(\text{ail}) + \frac{b}{2V_T} [C_{n_p} P + C_{n_r} R] + \dots$$



# Coeficiente de momento de guinada

- Outros coeficientes:
- $\Delta C_N(rud)$ : efeito da superfície de controle leme
- $\Delta C_N(ail)$ : Uso do aileron gera arrasto maior (menor) em asa com sustentação aumentada (reduzida), gerando momento de guinada como efeito colateral

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Com todas as forças e momentos, pode-se voltar ao modelo não linear de Terra plana.
- Modelo não linear em espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U})$$

- Vetor de estados:

$$\mathbf{x} = [U \ V \ W \ \phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R \ p_N \ p_E \ h]^T$$

- $U \ V \ W$ : velocidade terrestre representada no sistema do corpo  $S_b$
- $\phi \ \theta \ \psi$ : ângulos de Euler
- $P \ Q \ R$ : velocidade angular, sistema do corpo
- $p_N \ p_E \ h$ : posição NED, com direção “down” com sinal trocado (altitude)
- $\mathbf{f}$ : vetor de funções não-lineares
- Sinal de controle  $\mathbf{U} = [thl \ el \ ail \ rdr]$

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Em espaço de estados, a derivada do vetor de estados também é importante:
- $\dot{U} \ \dot{V} \ \dot{W}$ : aceleração no sistema do corpo  $S_b$
- $\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}$ : taxa de variação dos ângulos de Euler. **Não é** P, Q, R!
- $\dot{P} \ \dot{Q} \ \dot{R}$ : aceleração angular, sistema do corpo
- $\dot{p}_N \ \dot{p}_E \ \dot{h}$ : velocidade NED, com direção “down” com sinal trocado

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Equações de força, após multiplicações matriciais

$$\dot{U} = RV - QW - g'_0 \sin \theta + \frac{F_x}{m}$$

$$\dot{V} = -RU + PW + g'_0 \sin \phi \cos \theta + \frac{F_y}{m}$$

$$\dot{W} = QU - PV + g'_0 \cos \phi \cos \theta + \frac{F_z}{m}$$

- Primeiro e segundo termos: aceleração centrípeta em dois planos
- Terceiro termo: gravidade no sistema do corpo
- Último termo: força específica (aceleração causada pela força)
- Origem aerodinâmica e propulsiva



# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Equações de atitude

$$\dot{\phi} = P + \tan \theta (Q \sin \phi + R \cos \phi)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = \frac{Q \sin \phi + R \cos \phi}{\cos \theta}$$

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

Equação dos momentos:

$$\dot{P} = (c_1 R + c_2 P)Q + c_3 \bar{L} + c_4 N$$

$$\dot{Q} = c_5 PR - c_6 (P^2 - R^2) + c_7 M$$

$$\dot{R} = (c_8 P - c_2 R)Q + c_4 \bar{L} + c_9 N$$

Em que:

$$\Gamma c_1 = (J_y - J_z)J_z - J_{xz}^2, \quad \Gamma c_2 = (J_x - J_y + J_z)J_{xz}$$

$$\Gamma c_3 = J_z, \quad \Gamma c_4 = J_{xz}$$

$$c_5 = \frac{J_z - J_x}{J_y}, \quad c_6 = \frac{J_{xz}}{J_y}$$

$$c_7 = \frac{1}{J_y}, \quad \Gamma c_8 = J_x(J_x - J_y) + J_{xz}^2,$$

$$\Gamma c_9 = J_x, \quad \Gamma = J_x J_z - J_{xz}^2$$

E  $\bar{L}, M, N$  são momentos de origem aerodinâmica e propulsiva



# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Equações de navegação

$$\begin{aligned}\dot{p}_N = & U \cos \theta \cos \psi + V(-\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi) \\ & + W(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_E = & U \cos \theta \sin \psi + V(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) \\ & + W(-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi)\end{aligned}$$

$$\dot{h} = U \sin \theta - V \sin \phi \cos \theta - W \cos \phi \cos \theta$$

- Veja que  $\dot{p}_N$   $\dot{p}_E$   $\dot{h}$  são  $U$   $V$   $W$  rotacionados de  $S_b$  para  $S_{NED}$ , i.e.,

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_N \\ \dot{p}_E \\ -\dot{h} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{NED}^b \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Sinal de controle  $\mathbf{U} = [thl \ el \ ail \ rdr]$  não aparece de forma explícita. Seu efeito é modificar coeficientes aerodinâmicos (por exemplo,  $C_L$ ) para modificar as forças  $F_x, F_y$  e  $F_z$  e momentos  $\bar{L}, M, N$
- *thl*: percentual de acionamento do motor (throttle)
- *el*: profundor (elevator)
- *ail*: aileron
- *rdr*: leme (rudder)

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Um modelo de espaço de estados alternativo: trocar estados  $U, V, W$  por  $V_T, \alpha, \beta$ , ou seja:

$$\mathbf{x} = [V_T \ \alpha \ \beta \ \phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R \ p_N \ p_E \ h]^T$$

- Motivo: facilitar o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos.
- Equações do novo modelo:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = D_b^w \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_T \cos \alpha \cos \beta \\ V_T \sin \beta \\ V_T \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

- Derivando:

Obtém-se:

$$\tan \alpha = \frac{W}{U}$$

$$\sin \beta = \frac{V}{V_T}$$

$$V_T = (U^2 + V^2 + W^2)^{1/2}$$

$$\dot{V}_T = \frac{U\dot{U} + V\dot{V} + W\dot{W}}{V_T}$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{V}V_T - V\dot{V}_T}{V_T^2 \cos \beta}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{U\dot{W} - W\dot{U}}{U^2 + W^2}.$$

- Equações de outros estados são iguais

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- No novo modelo,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$  são resultados do cálculo do modelo em espaço de estados.
- Entretanto,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$  podem ser necessários para calcular forças e momentos aerodinâmicos, ou seja, podem ser entrada do modelo.
- Se  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$  forem necessários apenas nas equações de momento, pode-se primeiro calcular as equações de força, para então obter  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$ , após obter coeficientes de momento e, por fim, calcular as equações restantes.

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Passos para usar modelo alternativo se forças não forem dependentes de  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$ 
  - 1) Calcular número de Mach e pressão dinâmica. Calcular empuxo do motor
  - 2) Calcular coeficientes aerodinâmicos utilizados nas equações de força, calcular  $V_T, \alpha, \beta$ , após,  $U, V, W$  e, por fim  $\dot{V}_T, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$
  - 3) Calcular coeficientes aerodinâmicos das equações de momento, utilizando  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$  se necessário, então calcular as equações de momento
  - 4) Calcular demais equações

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Mais uma variante do modelo: no sistema do vento  $S_W$
- Vantagens:
- Não há problema com  $C_{L\dot{\alpha}}$  e  $C_{L\dot{\beta}}$
- É o sistema de referência mais natural para descrever forças aerodinâmicas
- A partir desse modelo obtém-se
  - modelos lineares de pequenas perturbações
  - Derivadas de estabilidade

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Convertendo equações de força:
- Assume-se que força de empuxo do motor  $F_T$  é aplicada no eixo x
- Será aplicada a matriz de rotação  $\mathbf{D}_w^b$  (S na notação do livro)
- O livro usa a propriedade  $\mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}^T = [\omega^{wb}]_\times$ . Aqui, usaremos Coriolis
- Partindo da primeira versão da equação de força:

$$\frac{1}{m}\mathbf{F}_b = \dot{\mathbf{v}}_b + \boldsymbol{\omega}_b^{bi} \times \mathbf{v}_b - \mathbf{D}_b^i \mathbf{g}'_0$$

- Obtém-se

$$\frac{1}{m}\mathbf{F}_w = \dot{\mathbf{v}}_w + \boldsymbol{\omega}_w^{wb} \times \mathbf{v}_w + \boldsymbol{\omega}_w^{bi} \times \mathbf{v}_w - \mathbf{D}_w^i \mathbf{g}'_0$$

- Que pode ser reescrito de forma mais simples (mas que não ajudará nas deduções)

$$\frac{1}{m}\mathbf{F}_w = \dot{\mathbf{v}}_w + \boldsymbol{\omega}_w^{wi} \times \mathbf{v}_w - \mathbf{D}_w^i \mathbf{g}'_0$$



# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Pode se mostrar que

- $[\boldsymbol{\omega}^{wb}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} & -\dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} & 0 & \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta & -\dot{\alpha} \sin \beta & 0 \end{bmatrix}$

- Assim:

- $\dot{\mathbf{v}}_w + \boldsymbol{\omega}^{wb} \times \mathbf{v}_w = \begin{bmatrix} \dot{V}_T \\ \dot{\beta} V_T \\ \dot{\alpha} V_T \cos \beta \end{bmatrix}$

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Assumindo  $\omega_w^{bi} = [P_w \ Q_w \ R_w]$

$$m\dot{V}_T = F_T \cos \alpha \cos \beta - D + mg_1$$

$$m\dot{\beta}V_T = -F_T \cos \alpha \sin \beta + Y - mV_T R_w + mg_2$$

$$m\dot{\alpha}V_T \cos \beta = -F_T \sin \alpha - L + mV_T Q_w + mg_3,$$

$$g_1 = g'_0(-\cos \alpha \cos \beta \sin \theta + \sin \beta \sin \phi \cos \theta + \sin \alpha \cos \beta \cos \phi \cos \theta)$$

$$g_2 = g'_0(\cos \alpha \sin \beta \sin \theta + \cos \beta \sin \phi \cos \theta - \sin \alpha \sin \beta \cos \phi \cos \theta)$$

$$g_3 = g'_0(\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \phi \cos \theta).$$



# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Modelo mais simples por estar em  $S_W$
- Gravidade mais complicada, pois envolve duas rotações (NED->b->w)
- Se a sustentação (lift) depende de  $\dot{\alpha}$ , basta usar a equação de sustentação
- Se força lateral Y (side force) depende de  $\dot{\beta}$ , basta usar a equação de força lateral

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Propriedade da álgebra linear. Seja a seguinte transformação linear:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{A}\mathbf{u}_a$$

- Em que  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de transformação linear.
- Se queremos mudar a base dos vetores, a transformação tem que ser feita na base original. Então:

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{D}_b^a \mathbf{A} \mathbf{D}_a^b \mathbf{u}_b$$

- Veja que, se definirmos:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{D}_b^a \mathbf{A} \mathbf{D}_a^b$$

- A transformação é feita na base nova, com uma nova matriz de transformação linear:

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{A}' \mathbf{u}_b$$

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Convertendo a equação do momento para  $S_W$

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_b^{bi} + \boldsymbol{\omega}_b^{bi} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_b^{bi}$$

- Usando Coriolis e a propriedade anterior:

$$\mathbf{T}_w = \mathbf{J}_w \dot{\boldsymbol{\omega}}_w^{bi} + \boldsymbol{\omega}_w^{wb} \times \mathbf{J}_w \boldsymbol{\omega}_w^{bi} + \boldsymbol{\omega}_w^{bi} \times \mathbf{J}_w \boldsymbol{\omega}_w^{bi}$$

- Em que  $\mathbf{J}_w$  é o momento de inércia do avião no sistema do vento:

$$\mathbf{J}_w = \mathbf{D}_w^b \mathbf{J} \mathbf{D}_b^w$$

- Veja que, nesse sistema de referência, o momento de inércia varia no tempo.

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

$$J_W = \begin{bmatrix} J'_x \cos^2 \beta + J'_y \sin^2 \beta & \frac{1}{2}(J'_y - J'_x) \sin 2\beta & -J'_{xz} \cos \beta \\ \frac{1}{2}(J'_y - J'_x) \sin 2\beta & J'_x \sin^2 \beta + J'_y \cos^2 \beta & J'_{xz} \sin \beta \\ -J'_{xz} \cos \beta & J'_{xz} \sin \beta & J'_z \end{bmatrix}$$

- Em que:

$$J'_x = J_x \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha - J_{xz} \sin 2\alpha$$

$$J'_y = J_y$$

$$J'_z = J_x \sin^2 \alpha + J_z \cos^2 \alpha + J_{xz} \sin 2\alpha$$

$$J'_{xz} = \frac{1}{2}(J_x - J_z) \sin 2\alpha + J_{xz} \cos 2\alpha.$$

# Modelo não linear de 6 graus de liberdade

$$J_W^{-1} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} J'_z \cos^2 \beta + \left(\frac{\Gamma}{J'_y}\right) \sin^2 \beta & \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{J'_y} - J'_z\right) \sin 2\beta & J'_{xz} \cos \beta \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{J'_y} - J'_z\right) \sin 2\beta & J'_z \sin^2 \beta + \frac{\Gamma}{J'_y} \cos^2 \beta & -J'_{xz} \sin \beta \\ J'_{xz} \cos \beta & -J'_{xz} \sin \beta & J'_x \end{bmatrix}$$

- Equação do momento:

$$\dot{\omega}_W = -\Omega_R \omega_W - J_W^{-1} (\omega_W \times J_W \omega_W) + J_W^{-1} T_W$$

- Essa equação, entretanto, é mais complicada. Usualmente, usa-se a equação de forças no sistema do corpo ou vento, e a do momento no sistema do corpo.
- Entretanto, livro usa essa formulação para explicar modelo linearizado.