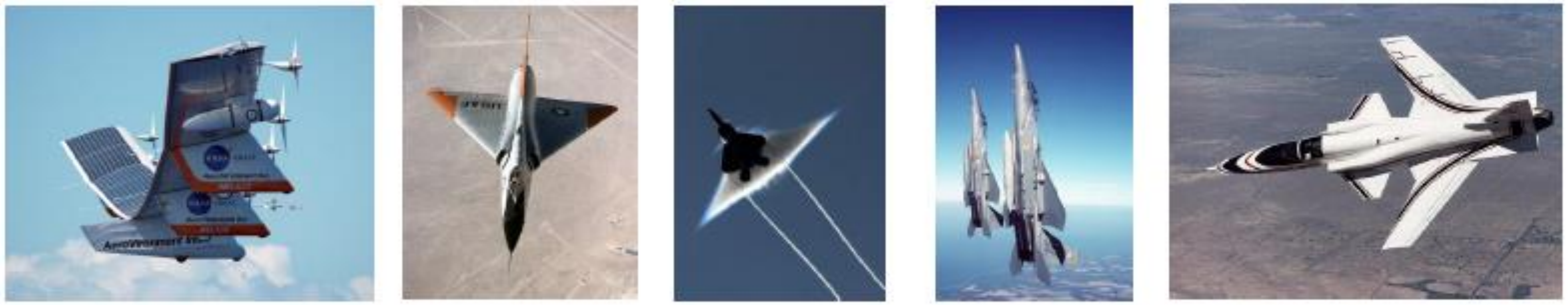
Universidade de Brasília

Faculdade UnB Gama

Mecânica do Voo

Regime permanente



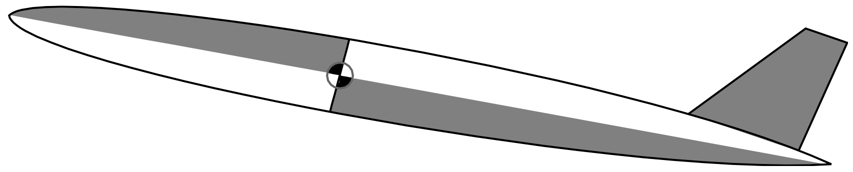
Universidade de Brasília   Faculdade UnB Gama

Referências Bibliográficas

- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003

Modelo desacoplado

- Pode-se separar o vetor de estados do avião em duas partes:
- Movimento longitudinal – avião visto “de lado”
    - Sobe e desce
    - Acelera e freia
    - Estados: V_T, α, θ, Q
    - Atuadores: propulsão e profundor



- Movimento látero-direcional – avião visto “de cima”
    - Faz curvas no plano horizontal, efetua rolamento
    - Estados: β, ϕ, ψ, P, R
    - Atuadores: aileron e leme
- Obs: posição nos 3 eixos ignorados
- Sob algumas condições, movimentos são desacoplados, ou seja, podem ser calculados e avaliados independentemente

Modelo não linear de 6 graus de liberdade

- Relembrando o modelo não linear no sistema do vento

$$m\dot{V}_T = F_T \cos\alpha\cos\beta - D + mg_1$$

$$m\dot{\beta}V_T = -F_T \cos\alpha\sin\beta + Y - mV_T R_W + mg_2$$

$$m\dot{\alpha}V_T \cos\beta = -F_T \sin\alpha - L + mV_T Q_W + mg_3,$$

$$g_1 = g_0'(-\cos\alpha\cos\beta\sin\theta + \sin\beta\sin\phi\cos\theta + \sin\alpha\cos\beta\cos\phi\cos\theta)$$

$$g_2 = g_0'(\cos\alpha\sin\beta\sin\theta + \cos\beta\sin\phi\cos\theta - \sin\alpha\sin\beta\cos\phi\cos\theta)$$

$$g_3 = g_0'(\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\phi\cos\theta).$$

Voo nivelado e sem derrapagem

- Voo em cruzeiro (etapa principal do voo):
- Voa-se em linha reta $(R = 0)$
- Com asas niveladas $(P = 0,\ \phi = 0)$
- Com ângulo de derrapagem desprezível $(\beta = 0)$
- Então:

$$g_1 = g_0'(-\cos\alpha\cos\beta\sin\theta + \sin\beta\sin\phi\cos\theta + \sin\alpha\cos\beta\cos\phi\cos\theta)$$
$$g_2 = g_0'(\cos\alpha\sin\beta\sin\theta + \cos\beta\sin\phi\cos\theta - \sin\alpha\sin\beta\cos\phi\cos\theta)$$
$$g_3 = g_0'(\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\phi\cos\theta).$$

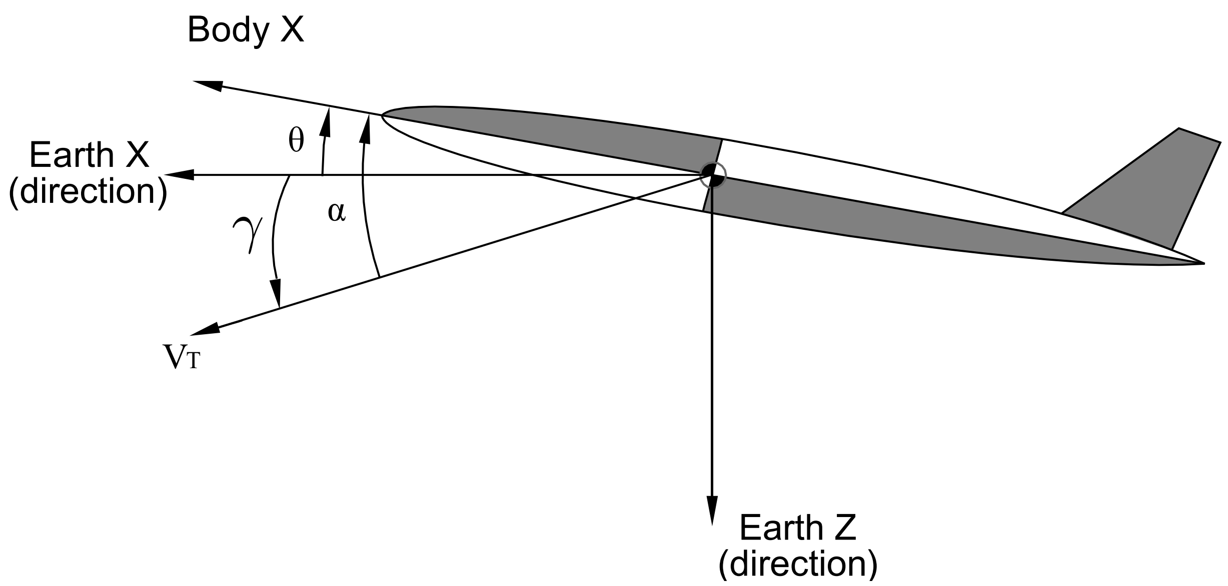
- Se torna:

$$g_1 = -g_0'\sin(\theta - \alpha) = -g_0'\sin(\gamma)$$
$$g_2 = 0$$
$$g_3 = g_0'\cos(\theta - \alpha) = g_0'\cos(\gamma)$$

- Em que $\gamma|_{\phi=\beta=0} = \theta - \alpha$

Voo nivelado e sem derrapagem

- γ: flight path angle, ou ângulo de subida. Na figura, $\gamma < 0$
- $\gamma = \text{asin}\frac{-V_D}{V_T}$
- V_D:Velocidade na vertical para baixo



- Adaptado de:
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ee/Longitudinal.svg

Voo nivelado e sem derrapagem

- As equações de força:

$$m\dot{V}_T = F_T \cos\alpha \cos\beta - D + mg_1$$

$$m\dot{\beta}V_T = -F_T \cos\alpha \sin\beta + Y - mV_T R_W + mg_2$$

$$m\dot{\alpha}V_T \cos\beta = -F_T \sin\alpha - L + mV_T Q_W + mg_3,$$

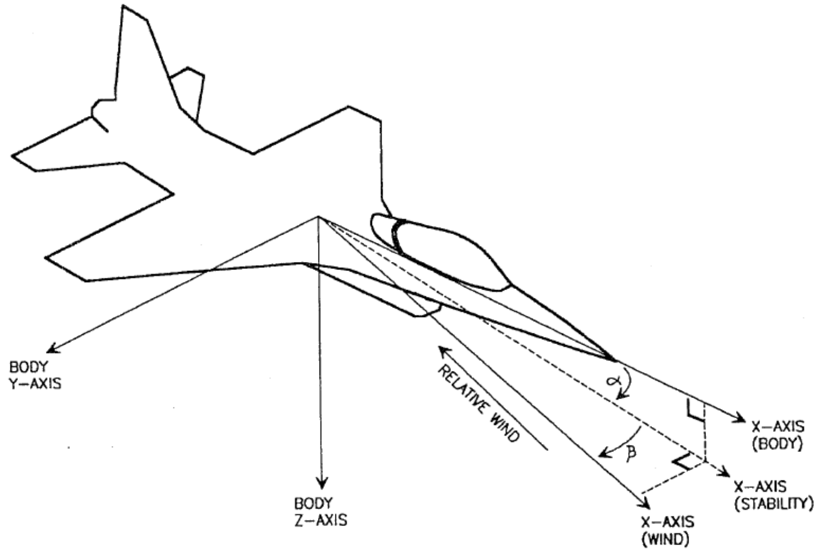
- Se tornam:

$$m\dot{V}_T = F_T \cos\alpha - D - mg_0' \sin\gamma$$

$$m\dot{\beta}V_T = Y - mV_T R_W$$

$$m\dot{\alpha}V_T = -F_T \sin\alpha - L + mV_T Q_W + mg_0' \cos\gamma$$

Voo nivelado e sem derrapagem



- Com $\beta = 0$, $Q_w = Q$ (ver figura)

- A equação $\dot{\theta} = Q\cos\phi - R\sin\phi$
- É simplificada para: $\dot{\theta} = Q$
- Assim:

$$m\dot{\alpha}V_T = -F_T\sin\alpha - L + mV_TQ_W + mg'_0\cos\gamma$$

$$m\dot{\alpha}V_T = -F_T\sin\alpha - L + mV_T\dot{\theta} + mg'_0\cos\gamma$$

$$m(\dot{\alpha} - \dot{\theta})V_T = -F_T\sin\alpha - L + mg'_0\cos\gamma$$

$$m\dot{\gamma}V_T = F_T\sin\alpha + L - mg'_0\cos\gamma$$

- E $J_y\dot{Q} = (J_z - J_x)PR - J_{xz}(P^2 - R^2) + M$ com P = R = 0, fica

$$\dot{Q} = M/J_Y$$

Voo nivelado e sem derrapagem

- Movimento longitudinal: $\mathrm{x_{long}} = [V_T\ \alpha\ \theta\ Q]^T$
- Veja que:

$$m\dot{V}_T = F_T \cos\alpha - D - mg'_0 \sin\gamma$$

$$m\dot{\alpha}V_T = -F_T \sin\alpha - L + mV_T Q_W + mg'_0 \cos\gamma$$

$$\dot{\theta} = Q$$

$$\dot{Q} = M/J_Y$$

- Calcula os valores de $\dot{\mathrm{x}}_{\mathrm{long}}$ sem depender dos estados látero-direcionais:

$$x_{lat-dir} = [\beta\ \phi\ \psi\ P\ R]$$

- Assim, obteve-se um modelo não linear desacoplado para o movimento longitudinal. Essa abordagem, entretanto, não funciona bem para o movimento látero-direcional.
- Veremos uma abordagem diferente: linearização

Linearização: introdução

- Para simular, o modelo não-linear é ideal
- Para análise de performance e estabilidade, e projeto de sistemas de controle, é mais fácil trabalhar com um modelo linearizado
- Linearização pode ser:
- Algébrica: trabalhosa, muito restrita, pouco prática. Entretanto é didática
- Numérica: software como Matlab pode fornecer facilmente. Entretanto, sem a análise algébrica prévia, pode ser difícil dar interpretação física

Linearização

- Técnica algébrica:

Sistema em regime permanente (steady state)

Efeito de pequenas perturbações

- Equação implícita de espaço de estados:

$$f(\dot{X}, X, U) = 0$$

- Mais geral que:

$$\dot{X} = f(X, U)$$

- Ponto de equilíbrio: achar $X = X_e, U = U_e$ em que

$$f(\dot{X}, X, U) = 0, \qquad \dot{X} = 0$$

- Ideia: sistema está “em repouso” – estados e sinal de controle não variam com o tempo.
- Análise de estabilidade: se perturbo levemente X e/ou U, sistema retorna ao repouso ou “move” na direção oposta?
- Ex: avião em voo nivelado. O que acontece se o piloto esbarra levemente no manche?

Linearização

- Sistema “em repouso”: tudo deve se manter constante. Porém, veja que:
- Terra esférica e girante faz vetor gravidade mudar, respectivamente, de direção e magnitude conforme avião se move
- Gravidade e pressão do ar variam com altitude
- Vento variável

- Detalhes acima limitam demasiadamente a definição de repouso. Aproximações:
- Terra plana (S_{NED} inercial): vetor gravidade constante, apontando para baixo
- Variação de altitude limitada: magnitude da gravidade e pressão atmosférica constantes
- Vento nulo ou constante

Linearização

- Com simplificações acima, a posição do avião não afeta o cálculo de qualquer outro estado
- Não é importante para a análise de estabilidade
- Portanto, será desconsiderada

Steady-State Flight:

$$\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{U}, \dot{V}, \dot{W} \left(\text{or } \dot{V}_T, \dot{\beta}, \dot{\alpha}\right) \equiv 0, \qquad U = \text{const.}$$

with the following additional constraints according to the flight condition:

Steady Wings-Level Flight: $\phi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0 \qquad (\therefore\ P, Q, R \equiv 0)$

Steady Turning Flight: $\dot{\phi}, \dot{\theta} \equiv 0, \qquad \dot{\psi} \equiv \text{turn rate}$

Steady Pull-up: $\phi, \dot{\phi}, \dot{\psi} \equiv 0, \qquad \dot{\theta} \equiv \text{pull-up rate}$

Steady Roll: $\dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0, \qquad \dot{\phi} \equiv \text{roll rate}$

Linearização

- $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W} = 0$: Soma das forças igual a zero.
- $\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R} = 0$: Soma dos momentos igual a zero.

- Achar o valor de $x = x_e, u = u_e$ para uma condição: trimagem
- Na prática, é facilmente conseguido por piloto ou sistema de controle
- Na teoria, envolve resolução de sistema não linear. Feito usualmente por métodos numéricos
  - Podem existir diversas soluções teóricas. A solução correta é obtida limitando corretamente os valores de cada variável no software de trimagem.

Linearização

- Reescrevendo $f(\dot{X}, X, U) = 0$ separando cada linha do vetor:

$$\begin{aligned} f_1(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) &= 0 \\ f_2(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_9(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) &= 0 \end{aligned}$$

- Em que:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} V_T & \beta & \alpha & \phi & \theta & \psi & P_W & Q_W & R_W \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathrm{thl} & \mathrm{el} & \mathrm{ail} & \mathrm{rdr} \end{bmatrix}$$

Linearização

- Expansão em série de Taylor de primeira ordem

$$\nabla_{\dot{X}} f_1 \delta \dot{\mathbf{X}} + \nabla_X f_1 \delta \mathbf{X} + \nabla_U f_1 \delta \mathbf{U} = 0$$
$$\vdots$$
$$\nabla_{\dot{X}} f_9 \delta \dot{\mathbf{X}} + \nabla_X f_9 \delta \mathbf{X} + \nabla_U f_9 \delta \mathbf{U} = 0$$

- Em que:

$$\nabla_X f_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial X_1} & \dfrac{\partial f_i}{\partial X_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

- Veja que, por exemplo:
- $\nabla_x f_1 \delta \boldsymbol{X} = \dfrac{\partial f_1}{\partial X_1} \delta X_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial X_9} \delta X_9$

Linearização

- Sistema linearizado pode ser representado de forma linear:

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

- $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{u}$: perturbações adicionadas aos valores de equilíbrio

$$E = -\begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\dot{X}} f_9 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} \qquad A = \begin{bmatrix} \nabla_{X} f_1 \\ \vdots \\ \nabla_{X} f_9 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} \qquad B = \begin{bmatrix} \nabla_{U} f_1 \\ \vdots \\ \nabla_{U} f_9 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}}$$

- Veja que, por exemplo $A\boldsymbol{x}$ é igual a:

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial X_9} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_9}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_9}{\partial X_9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_9 \end{bmatrix}$$

- A matriz de derivadas é chamada de jacobiano.

Linearização

- Se a matriz E for não singular:

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$
$$E^{-1}E\dot{\boldsymbol{x}} = E^{-1}A\boldsymbol{x} + E^{-1}B\boldsymbol{u}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}} = A'\boldsymbol{x} + B'\boldsymbol{u}, \quad A' = E^{-1}A, \quad B' = E^{-1}B$$

- Que é sistema em espaço de estados com formato usual

- Caso avaliado: $\beta, \phi, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \equiv 0 \quad \text{all derivatives} \equiv 0$

- Simplificações usadas:
- $\cos\beta$ e $\cos\phi$ são substituídos por 1 antes de derivar
- Produto de dois ou mais termos nulos no ponto de equilíbrio são anulados antes de derivar

Linearização

- Seja:

$$m\dot{V}_T = F_T \cos\alpha\cos\beta - D + mg_1$$

$$m\dot{\beta}V_T = -F_T \cos\alpha\sin\beta + Y - mV_T R_W + mg_2$$

$$m\dot{\alpha}V_T\cos\beta = -F_T\sin\alpha - L + mV_T Q_W + mg_3,$$

- Então:

$$-\begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_1 \\ \nabla_{\dot{X}} f_2 \\ \nabla_{\dot{X}} f_3 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e} = \begin{bmatrix} m\nabla_{\dot{X}}\dot{V}_T + \nabla_{\dot{X}} D \\ mV_T\nabla_{\dot{X}}\dot{\beta} - \nabla_{\dot{X}} Y \\ mV_T\nabla_{\dot{X}}\dot{\alpha} + \nabla_{\dot{X}} L \end{bmatrix}$$

- Assumiu-se que F_T independe das derivadas dos estados.
- Gravidade não depende de $\dot{V}_T, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ (apesar de depender de α, β)
- Forças D, Y, L podem variar com $\dot{V}_T, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$
- Derivada de $\dot{V}_T$ em relação a ele mesmo é 1
- Derivada de $\dot{V}_T$ em relação a $\dot{\alpha}$ ou $\dot{\beta}$ é nula

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} V_T & \beta & \alpha & \phi & \theta & \psi & P_W & Q_W & R_W \end{bmatrix}$$

Linearização

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} V_T & \beta & \alpha & \phi & \theta & \psi & P_W & Q_W & R_W \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_1 \\ \nabla_{\dot{X}} f_2 \\ \nabla_{\dot{X}} f_3 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e} = \begin{bmatrix} m\nabla_{\dot{X}}\dot{V}_T + \nabla_{\dot{X}} D \\ mV_T\nabla_{\dot{X}}\dot{\beta} - \nabla_{\dot{X}} Y \\ mV_T\nabla_{\dot{X}}\dot{\alpha} + \nabla_{\dot{X}} L \end{bmatrix}$$

- Veja que, por exemplo:

$$m\nabla_{\dot{X}}\dot{V}_T = m[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

- E que, por exemplo:

$$\nabla_{\dot{X}} L = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_T}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{P}_W}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_W}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_W}\right]$$

- Se definirmos:

$$Z_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{m}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}$$

- E sabendo que as outras derivadas de L são nulas, tem-se:

$$\nabla_{\dot{X}} L = m[0\ 0\ -Z_{\dot{\alpha}}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

Linearização

- As derivadas de forças e momentos aerodinâmicos existentes são chamadas de derivadas aerodinâmicas dimensionais
- Para simplificar a aparência da fórmula, serão criadas variáveis que representam essas derivadas. Uma tabela com variáveis referentes a forças se encontra no próximo slide. Nomenclatura:
- Nome da variável: X, Y, Z, indica que é uma força no eixo X, Y ou Z (S_W)
- Subscrito $\alpha, \beta, \delta_e, p$, etc: a variável foi derivada em relação ao subscrito.
- Multiplica-se a derivada dimensional pelo seu subscrito. Por exemplo: $X_\alpha \alpha$, $X_{\delta e}\delta_e$
- O valor das derivadas dimensionais foi obtido previamente, por exemplo, via experimentos.
- Se derivada não está listada na tabela a seguir, assumir derivada nula.

Derivadas dimensionais de força no eixo do vento

TABLE 2.5-1. The Force Dimensional Derivatives (Wind Axes)

X-Axis	Y-Axis	Z-Axis
$X_V = -\frac{1}{m}\frac{\partial D}{\partial V_T}$	$Y_\beta = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial Y}{\partial \beta} - D\right)$	$Z_V = -\frac{1}{m}\frac{\partial L}{\partial V_T}$
$X_{T_V} = \frac{1}{m}\frac{\partial F_T}{\partial V_T}$	$Y_p = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial P_W}$	$Z_\alpha = -\frac{1}{m}\left(D + \frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)$
$X_\alpha = \frac{1}{m}\left(L - \frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)$	$Y_r = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial R_W}$	$Z_{\dot\alpha} = -\frac{1}{m}\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha}$
$X_{\delta e} = -\frac{1}{m}\frac{\partial D}{\partial \mathrm{el}}$	$Y_{\delta r} = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial \mathrm{rdr}}$	$Z_q = -\frac{1}{m}\frac{\partial L}{\partial Q_W}$
$X_{\delta \mathrm{th}} = \frac{1}{m}\frac{\partial F_T}{\partial \mathrm{thl}}$	$Y_{\delta a} = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial \mathrm{ail}}$	$Z_{\delta e} = -\frac{1}{m}\frac{\partial L}{\partial \mathrm{el}}$

Linearização

- Derivadas de força

$$-\begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_1 \\ \nabla_{\dot{X}} f_2 \\ \nabla_{\dot{X}} f_3 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e} = \begin{bmatrix} m\nabla_{\dot{X}}\dot{V}_T + \nabla_{\dot{X}} D \\ mV_T\nabla_{\dot{X}}\dot{\beta} - \nabla_{\dot{X}} Y \\ mV_T\nabla_{\dot{X}}\dot{\alpha} + \nabla_{\dot{X}} L \end{bmatrix}$$

- Usando derivadas definidas na tabela:

$$-\begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_1 \\ \nabla_{\dot{X}} f_2 \\ \nabla_{\dot{X}} f_3 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e} = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_T - Z_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Veja que a equação acima diz que:
- $E\dot{\boldsymbol{x}}(1{:}3,1{:}3) = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & V_T & 0 \\ 0 & 0 & V_T - Z_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{V}_T \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$

Linearização

$$m\dot{V}_T = F_T \cos\alpha \cos\beta - D + mg_1$$

$$m\dot{\beta}V_T = -F_T \cos\alpha \sin\beta + Y - mV_T R_W + mg_2$$

$$m\dot{\alpha}V_T \cos\beta = -F_T \sin\alpha - L + mV_T Q_W + mg_3,$$

- Derivando em função dos estados:

$$\begin{bmatrix} \nabla_X f_1 \\ \nabla_X f_2 \\ \nabla_X f_3 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} = \begin{bmatrix} -F_T \sin\alpha \nabla_X \alpha + \cos\alpha \nabla_X F_T - \nabla_X D - mg_0' \cos\gamma(\nabla_X \theta - \nabla_X \alpha) \\ -F_T \cos\alpha \nabla_X \beta + \nabla_X Y - mV_T \nabla_X R_W + mg_0'(\sin\gamma \nabla_X \beta + \cos\theta \nabla_X \phi) \\ -F_T \cos\alpha \nabla_X \alpha - \sin\alpha \nabla_X F_T - \nabla_X L + mV_T \nabla_X Q_W + mg_0'(\sin\gamma \nabla_X \alpha - \sin\gamma \nabla_X \theta) \end{bmatrix}$$

- Obs: veja que, por exemplo
  - $\nabla_X\left(m\dot{\beta}V_T\right) = m\dot{\beta}\nabla_X V_T = \mathbf{0}_{n\times 1}$, pois $\dot{\beta} = 0$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} V_T & \beta & \alpha & \phi & \theta & \psi & P_W & Q_W & R_W \end{bmatrix}$$

Linearização

- Usando o modelo não linear desacoplado

$$m\dot{V}_T = F_T \cos\alpha - D - mg_0' \sin\gamma$$

$$m\dot{\beta}V_T = Y - mV_T R_W$$

$$m\dot{\alpha}V_T = -F_T \sin\alpha - L + mV_T Q_W + mg_0' \cos\gamma$$

- E a condição:

$$\beta, \phi, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \equiv 0 \quad \text{all derivatives} \equiv 0$$

- Obtém-se, por exemplo, da 3ª equação:

$$0 = -F_T \sin\alpha - L + mg_0' \cos\gamma \rightarrow F_T \sin\alpha = mg_0' \cos\gamma - L$$

- A primeira equação do gradiente:

- É reescrita como:

$$-F_T \sin\alpha \nabla_X \alpha + \cos\alpha \nabla_X F_T - \nabla_X D - mg_0' \cos\gamma (\nabla_X \theta - \nabla_X \alpha)$$

- α_e, γ_e: valores de equilíbrio

$$\cos\alpha_e \nabla_X F_T + L \nabla_X \alpha - \nabla_X D - mg_0' \cos\gamma_e \nabla_X \theta$$

Linearização

- De forma similar, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \nabla_X f_1 \\ \nabla_X f_2 \\ \nabla_X f_3 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_e \nabla_X F_T + L\nabla_X \alpha - \nabla_X D - mg'_0 \cos\gamma_e \nabla_X \theta \\ \nabla_X Y - D\nabla_X \beta - mV_T \nabla_X R_W + mg'_0 \cos\theta_e \nabla_X \phi \\ -\sin\alpha_e \nabla_X F_T - \nabla_X L - D\nabla_X \alpha + mV_T \nabla_X Q_W - mg'_0 \sin\gamma_e \nabla_X \theta \end{bmatrix}$$

- Que pode ser escrito utilizando as derivadas dimensionais

$$m\begin{bmatrix} X_V + X_{T_V}\cos\alpha_e & 0 & X_\alpha & 0 & -g'_0\cos\gamma_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_\beta & 0 & g'_0\cos\theta_e & 0 & 0 & Y_p & 0 & Y_r - V_T \\ Z_V - X_{T_V}\sin\alpha_e & 0 & Z_\alpha & 0 & -g'_0\sin\gamma_e & 0 & 0 & V_T + Z_q & 0 \end{bmatrix}$$

- Obs:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} V_T & \beta & \alpha & \phi & \theta & \psi & P_W & Q_W & R_W \end{bmatrix}$$

Linearização

$$m\dot{V}_T = F_T \cos\alpha \cos\beta - D + mg_1$$

$$m\dot{\beta}V_T = -F_T \cos\alpha \sin\beta + Y - mV_T R_W + mg_2$$

$$m\dot{\alpha}V_T \cos\beta = -F_T \sin\alpha - L + mV_T Q_W + mg_3,$$

- Por fim:

$$\begin{bmatrix} \nabla_U f_1 \\ \nabla_U f_2 \\ \nabla_U f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \nabla_U F_T - \nabla_U D \\ \nabla_U Y \\ -\sin\alpha \nabla_U F_T - \nabla_U L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_U f_1 \\ \nabla_U f_2 \\ \nabla_U f_3 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} = m \begin{bmatrix} X_{\delta \mathrm{th}} \cos\alpha_e & X_{\delta e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ -X_{\delta \mathrm{th}} \sin\alpha_e & Z_{\delta e} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = [\,\mathrm{thl} \quad \mathrm{el} \quad \mathrm{ail} \quad \mathrm{rdr}\,]$$

- Veja que sinal de controle afeta apenas forças e momentos aerodinâmicos e propulsivos

Linearização

- Derivadas do ângulo de Euler

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\phi\\ \theta\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\phi\\ \theta\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta}\end{bmatrix} D_b^W \begin{bmatrix}P_W\\ Q_W\\ R_W\end{bmatrix}$$

Linearização

- Considerando $\beta = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha + \tan\theta\cos\phi\sin\alpha & \tan\theta\sin\phi & -\sin\alpha + \tan\phi\cos\phi\cos\alpha \\ -\sin\phi\sin\alpha & \cos\phi & -\sin\phi\cos\alpha \\ \dfrac{\cos\phi\sin\alpha}{\cos\theta} & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi\cos\alpha}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_W \\ Q_W \\ R_W \end{bmatrix}$$

- Derivada em função da derivada do vetor de estados

$$-\begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_4 \\ \nabla_{\dot{X}} f_5 \\ \nabla_{\dot{X}} f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Derivada em função de sinais de controle: nula (sinal de controle afeta apenas forças e momentos aerodinâmicos e propulsivos)

Linearização

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha + \tan\theta\cos\phi\sin\alpha & \tan\theta\sin\phi & -\sin\alpha + \tan\phi\cos\phi\cos\alpha \\ -\sin\phi\sin\alpha & \cos\phi & -\sin\phi\cos\alpha \\ \dfrac{\cos\phi\sin\alpha}{\cos\theta} & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi\cos\alpha}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_W \\ Q_W \\ R_W \end{bmatrix}$$

- Veja que é derivada da matriz vezes vetor + matriz vezes derivada do vetor. Porém, o vetor é nulo no regime de voo estudado. Então, resta apenas matriz (com restrições do problema) vezes gradiente.
- Derivadas em função do vetor de estados

$$\begin{bmatrix} \nabla_X f_4 \\ \nabla_X f_5 \\ \nabla_X f_6 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\cos\gamma_e}{\cos\theta_e} & 0 & \dfrac{\sin\gamma_e}{\cos\theta_e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\sin\alpha_e}{\cos\theta_e} & 0 & \dfrac{\cos\alpha_e}{\cos\theta_e} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = [V_T \quad \beta \quad \alpha \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad P_W \quad Q_W \quad R_W]$$

Linearização

TABLE 2.5-2. The Moment Dimensional Derivatives (Wind Axes)

Roll	Pitch	Yaw
$L_\beta = \dfrac{1}{J'_X}\dfrac{\partial \bar{L}_{W_A}}{\partial \beta}$	$M_V = \dfrac{1}{J'_Y}\dfrac{\partial M_{W_A}}{\partial V_T}$	$N_\beta = \dfrac{1}{J'_Z}\dfrac{\partial N_{W_A}}{\partial \beta}$
$L_p = \dfrac{1}{J'_X}\dfrac{\partial \bar{L}_{W_A}}{\partial P_W}$	$M_\alpha = \dfrac{1}{J'_Y}\dfrac{\partial M_{W_A}}{\partial \alpha}$	$N_p = \dfrac{1}{J'_Z}\dfrac{\partial N_{W_A}}{\partial P_W}$
$L_r = \dfrac{1}{J'_X}\dfrac{\partial \bar{L}_{W_A}}{\partial R_W}$	$M_{\dot\alpha} = \dfrac{1}{J'_Y}\dfrac{\partial M_{W_A}}{\partial \dot\alpha}$	$N_r = \dfrac{1}{J'_Z}\dfrac{\partial N_{W_A}}{\partial R_W}$
$L_{\delta a} = \dfrac{1}{J'_X}\dfrac{\partial \bar{L}_{W_A}}{\partial \text{ail}}$	$M_q = \dfrac{1}{J'_Y}\dfrac{\partial M_{W_A}}{\partial Q_W}$	$N_{\delta a} = \dfrac{1}{J'_Z}\dfrac{\partial N_{W_A}}{\partial \text{ail}}$
$L_{\delta r} = \dfrac{1}{J'_X}\dfrac{\partial \bar{L}_{W_A}}{\partial \text{rdr}}$	$M_{\delta e} = \dfrac{1}{J'_Y}\dfrac{\partial M_{W_A}}{\partial \text{el}}$	$N_{\delta r} = \dfrac{1}{J'_Z}\dfrac{\partial N_{W_A}}{\partial \text{rdr}}$
	$M_{T_V} = \dfrac{1}{J'_Y}\dfrac{\partial M_{W_T}}{\partial V_T}$	$N_{T_\beta} = \dfrac{1}{J'_Z}\dfrac{\partial N_{W_T}}{\partial \beta}$
	$M_{T_\alpha} = \dfrac{1}{J'_Y}\dfrac{\partial M_{W_T}}{\partial \alpha}$	
	$M_{\delta\text{th}} = \dfrac{1}{J'_Y}\dfrac{\partial M_{W_A}}{\partial \text{thl}}$	

Linearização

- Derivadas do momento

$$-\begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_7 \\ \nabla_{\dot{X}} f_8 \\ \nabla_{\dot{X}} f_9 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_{X} f_7 \\ \nabla_{X} f_8 \\ \nabla_{X} f_9 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} = \begin{bmatrix} 0 & \mu L_\beta + \sigma N_\beta + \nu M_T & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu L_p + \sigma N_p & 0 & \mu L_r + \sigma N_r \\ M_V + M_{T_V} & 0 & M_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & M_q & 0 \\ 0 & \mu N_\beta + \sigma L_\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu N_p + \sigma L_p & 0 & \mu N_r + \sigma L_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_{U} f_7 \\ \nabla_{U} f_8 \\ \nabla_{U} f_9 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_e \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu L_{\delta a} + \sigma N_{\delta a} & \mu L_{\delta r} + \sigma N_{\delta r} \\ M_{\delta \mathrm{th}} & M_{\delta e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu N_{\delta a} + \sigma L_{\delta a} & \mu N_{\delta r} + \sigma L_{\delta r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = [\, V_T \quad \beta \quad \alpha \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad P_W \quad Q_W \quad R_W \,]$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = [\, \mathrm{thl} \quad \mathrm{el} \quad \mathrm{ail} \quad \mathrm{rdr} \,] \qquad \mu = \frac{J_Z' J_X'}{\Gamma}, \qquad \sigma = \frac{J_Z' J_{XZ}'}{\Gamma}, \qquad \nu = \frac{J_Z'}{\Gamma}$$

Modelo linear longitudinal

- Avaliando a linearização, percebe-se que existem dois conjuntos de equações desacoplados, que podem ser resolvidos independentemente.
- Modelo longitudinal:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} v_T & \alpha & \theta & q \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \delta_{th} & \delta_e \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_T - Z_{\dot\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -M_{\dot\alpha} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} X_{\delta th}\cos\alpha_e & X_{\delta e} \\ -X_{\delta th}\sin\alpha_e & Z_{\delta e} \\ 0 & 0 \\ M_{\delta th} & M_{\delta e} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} X_V + X_{T_V}\cos\alpha_e & X_\alpha & -g_0'\cos\gamma_e & 0 \\ Z_V - X_{T_V}\sin\alpha_e & Z_\alpha & -g_0'\sin\gamma_e & V_T + Z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_V + M_{T_V} & M_\alpha & 0 & M_q \end{bmatrix}$$

- E é não singular se V_T for suficientemente grande, então uma função explícita pode ser encontrada.
- Veja que $\boldsymbol{x}$ é uma perturbação que deve ser adicionada ao estado $\boldsymbol{X}$ do voo em regime permanente.

Modelo linear látero-direcional

- Modelo látero-direcional

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \beta & \phi & p_W & r_W \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \delta_a & \delta_r \end{bmatrix}$$

- Veja que ψ foi omitido pois direção não afeta a dinâmica do avião

$$E = \begin{bmatrix} V_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ 0 & 0 \\ L'_{\delta a} & L'_{\delta r} \\ N'_{\delta a} & N'_{\delta r} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} Y_\beta & g'_0 \cos\theta_e & Y_p & Y_r - V_T \\ 0 & 0 & \dfrac{\cos\gamma_e}{\cos\theta_e} & \dfrac{\sin\gamma_e}{\cos\theta_e} \\ L'_\beta & 0 & L'_p & L'_r \\ N'_\beta & 0 & N'_p & N'_r \end{bmatrix}$$

$$L'_\beta = \mu L_\beta + \sigma N_\beta \qquad L'_p = \mu L_p + \sigma N_p$$

$$N'_\beta = \mu N_\beta + \sigma L_\beta \qquad N'_p = \mu N_p + \sigma L_p$$

$$L'_{\delta a} = \mu L_{\delta a} + \sigma N_{\delta a} \qquad L'_{\delta r} = \mu L_{\delta r} + \sigma N_{\delta r}$$

$$N'_{\delta a} = \mu N_{\delta a} + \sigma L_{\delta a} \qquad N'_{\delta r} = \mu N_{\delta r} + \sigma L_{\delta r}$$

$$L'_r = \mu L_r + \sigma N_r$$

$$N'_r = \mu N_r + \sigma L_r$$

$$\mu = \frac{J'_Z J'_X}{\Gamma}, \qquad \sigma = \frac{J'_Z J'_{XZ}}{\Gamma}, \qquad \nu = \frac{J'_Z}{\Gamma}$$

Derivadas adimensionais de estabilidade e controle

- As derivadas dimensionais são aplicadas diretamente no modelo de espaço de estados, o que é conveniente para um uso imediato.
- Porém, é muito restrito, pois assume uma aeronave com forma e tamanho pré-definidos, e uma condição de voo bem definida. Veja que não é trivial de modificar o modelo em espaço de estados quando se quer:
- Avaliar efeitos de pequenas mudanças geométricas: aumento da envergadura, mudança na área da asa
- Obter um modelo da aeronave real a partir da análise em escala
- Avaliar efeitos na mudança do regime em um mesmo modo de voo. Por exemplo, mantendo o voo retilíneo e uniforme, o que acontece se:
    - Aumentamos a velocidade de referência?
    - A pressão do ar muda devido à mudança na altitude de referência?

Derivadas adimensionais de estabilidade e controle

- Dessa forma, redefinem-se as coeficientes aerodinâmicas de forma que se mantenham o mais constantes possíveis, mesmo sob a variação de certos parâmetros do voo.
- Nós já estudamos coeficientes adimensionais antes:

$$
\begin{aligned}
\text{drag},\ D &= \bar{q}SC_D \\
\text{lift},\ L &= \bar{q}SC_L \\
\text{sideforce},\ Y &= \bar{q}SC_Y \\
\text{rolling moment},\ \bar{L} &= \bar{q}SbC_l \\
\text{pitching moment},\ M &= \bar{q}S\bar{c}C_M \\
\text{yawing moment},\ N &= \bar{q}SbC_N,
\end{aligned}
$$

$$\bar{q} \equiv \tfrac{1}{2}\rho V_T^2$$

$\bar{q}$ = free-stream dynamic pressure

S = wing reference area

b = wing span

$\bar{c}$ = wing mean geometric chord.

$$C_D \equiv C_D(C_L) + \Delta C_D(\text{el}) + \Delta C_D(\beta) + \Delta C_D(M) + \cdots$$

Derivadas adimensionais de estabilidade e controle

- Usando esses coeficientes, podemos transformar as derivadas dimensionais. Exemplo:

$$X_V = -\frac{1}{m}\frac{\partial D}{\partial V_T} \qquad D = \bar{q}SC_D \qquad \bar{q} \equiv \tfrac{1}{2}\rho V_T^2$$

- Assim:

$$X_V = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial V_T}\left(\frac{1}{2}\rho V_T^2 S C_D\right) = -\frac{\rho S}{2m}\left(2V_T C_D + V_T^2 \frac{\partial C_D}{\partial V_t}\right)$$

$$X_V = -\frac{1}{2}\rho V_T \frac{S}{m}(2C_D + V_T \frac{\partial C_D}{\partial V_t})$$

$$X_V = -\frac{\bar{q}S}{mV_T}\left(2C_D + C_{D_V}\right), \qquad C_{D_V} = V_T \frac{\partial C_D}{\partial V_t}$$

- Demonstração similar pode ser feita para outros coeficientes

Derivadas adimensionais – movimento longitudinal

$$X_V = -\frac{\bar{q}S}{mV_T}(2C_D + C_{D_V}), \quad C_{D_V} \equiv V_T\frac{\partial C_D}{\partial V_T}$$

$$X_\alpha = \frac{\bar{q}S}{m}(C_L - C_{D_\alpha}), \qquad C_{D_\alpha} \equiv \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}$$

$$X_{\delta e} = -\frac{\bar{q}S}{m}C_{D_{\delta e}}, \qquad C_{D_{\delta e}} \equiv \frac{\partial C_D}{\partial \mathrm{el}}$$

$$Z_V = -\frac{\bar{q}S}{mV_T}(2C_L + C_{L_V}), \quad C_{L_V} \equiv V_T\frac{\partial C_L}{\partial V_T}$$

$$Z_\alpha = -\frac{\bar{q}S}{m}(C_D + C_{L_\alpha}), \qquad C_{L_\alpha} \equiv \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$$

$$Z_{\dot{\alpha}} = -\frac{\bar{q}S\bar{c}}{2mV_T}C_{L_{\dot{\alpha}}}, \qquad C_{L_{\dot{\alpha}}} \equiv \frac{2V_T}{\bar{c}}\frac{\partial C_L}{\partial \dot{\alpha}}$$

$$Z_q = -\frac{\bar{q}S\bar{c}}{2mV_T}C_{L_q}, \qquad C_{Lq} \equiv \frac{2V_T}{\bar{c}}\frac{\partial C_L}{\partial Q}$$

$$Z_{\delta e} = -\frac{\bar{q}S}{m}C_{L_{\delta e}}, \qquad C_{L_{\delta e}} \equiv \frac{\partial C_L}{\partial \mathrm{el}}$$

$$M_v = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{J_Y V_T}(2C_M + C_{m_V}), \quad C_{m_V} \equiv V_T\frac{\partial C_M}{\partial V_T}$$

$$M_\alpha = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{J_Y}C_{m_\alpha}, \qquad C_{m_\alpha} \equiv \frac{\partial C_M}{\partial \alpha}$$

$$M_{\dot{\alpha}} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{J_Y}\frac{\bar{c}}{2V_T}C_{m_{\dot{\alpha}}}, \qquad C_{m_{\dot{\alpha}}} \equiv \frac{2V_T}{\bar{c}}\frac{\partial C_M}{\partial \dot{\alpha}}$$

$$M_q = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{J_Y}\frac{\bar{c}}{2V_T}C_{m_q}, \qquad C_{m_q} \equiv \frac{2V_T}{\bar{c}}\frac{\partial C_M}{\partial Q}$$

$$M_{\delta e} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{J_Y}C_{m_{\delta e}}, \qquad C_{m_{\delta e}} \equiv \frac{\partial C_M}{\partial \mathrm{el}}$$

Derivadas adimensionais de estabilidade e controle

- As derivadas adimensionais são a linearização do coeficiente adimensional. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} C_D \\ C_L \\ C_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{D0} & C_{D\alpha} & C_{Dq} & C_{D\delta E} \\ C_{L0} & C_{L\alpha} & C_{Lq} & C_{L\delta E} \\ C_{m0} & C_{m\alpha} & C_{mq} & C_{m\delta E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \frac{\bar{c}}{2V} q \\ \delta_E \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_Y \\ C_l \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Y0} & C_{Y\beta} & C_{Yp} & C_{Yr} & C_{Y\delta A} & C_{Y\delta R} \\ C_{l0} & C_{l\beta} & C_{lp} & C_{lr} & C_{l\delta A} & C_{l\delta R} \\ C_{n0} & C_{n\beta} & C_{np} & C_{nr} & C_{n\delta A} & C_{n\delta R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \frac{b}{2V} p \\ \frac{b}{2V} r \\ \delta_A \\ \delta_R \end{bmatrix}$$

Derivadas adimensionais de estabilidade e controle

- Alguns coeficientes do movimento longitudinal:
- C_{L_α}: inclinação da curva de sustentação. Relaciona mudanças no ângulo de ataque e aceleração vertical. Afeta manobrabilidade e resposta à turbulência (turbulência afeta o ângulo de ataque ao mudar direção do fluxo de ar)
- C_{M_α}: pitch stiffness: valor negativo indica estabilidade. Levemente positivo ainda permite o voo, mas sobrecarrega o piloto. Efeito de "mola": torque restaurador para posição de equilíbrio
- $C_{M_q}, C_{M_{\dot{\alpha}}}$: efeito amortecedor: torque no sentido oposto ao movimento. Usualmente $C_{M_q} \gg C_{M_{\dot{\alpha}}}$
- C_{M_V}: se positivo, aeronave levanta o nariz ao acelerar, o que aumenta o arrasto e a componente da gravidade no eixo x, se opondo ao movimento (estabilidade). Ao aumentar o Mach, C_{M_V} diminui, podendo ficar negativo, instabilizando a velocidade. Por outro lado, aumento excessivo no arrasto devido ao aumento do nº de Mach compensa efeito

Derivadas adimensionais de estabilidade e controle

- Alguns coeficientes do movimento látero-direcional
- C_{Y_β}: força lateral devido à derrapagem
- C_{l_β}: momento de rolagem devido à derrapagem. Derivada de diedro. Negativa indica roll stiffness (estabilidade em rolamento), mas pode ser levemente positiva. Afeta o modo espiral (estudaremos em breve)
- C_{n_β}: momento de guinada devido à derrapagem. Efeito weathercock ou yaw stiffness. Positivo para estabilidade. Tende a ficar negativo em regime transônico/supersônico, ou se o ângulo de ataque é muito elevado. Em um projeto de um novo avião, o ajuste inicial do tamanho da empenagem vertical é determinado pelo valor desejado de C_{n_β}
- C_{l_p}, C_{n_r}: amortecimento no sentido oposto ao movimento de rotação
- C_{n_p}, C_{l_r}: efeito cruzado, causado pelo acoplamento entre movimentos de rolagem