



Mecânica do Voo

Variações de curto período: Oscilação do ângulo de ataque





Referências Bibliográficas

- **ITEN 1.7**: Paglione, P. ; Zanardi, M. C., [Estabilidade e Controle de Aeronaves](#), ITA, 1990.
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, [Dynamics of Flight – Stability and Control](#), John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003



**8. VARIAÇÕES DE CURTO PERÍODO:
OSCILAÇÕES NO ÂNGULO DE ATAQUE**
Item 1.7 da apostila.



MOVIMENTO LONGITUDINAL DIVIDIDO EM:

1. MOVIMENTO DE CURTO PERÍODO

**OSCILAÇÕES EM γ , α , q , COM VELOCIDADE CONSTANTE
(DURAÇÃO DA ORDEM DE 0,5 – 5 SEGUNDOS)**

2. MOVIMENTO FUGOIDAL

**QUE SE CARACTERIZA POR UM MOVIMENTO DE LONGO PERÍODO (ALGUNS MINUTOS) COM
ALTERAÇÕES SENSÍVEIS NA VELOCIDADE, ÂNGULO DE TRAJETÓRIA DE VOO E ALTITUDE,
PORÉM COM PEQUENAS VARIAÇÕES NO ÂNGULO DE ATAQUE.**



MOVIMENTO DE CURTO PERÍODO

8.1 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

8.2 RESPOSTA DA AERONAVE A UMA PERTURBAÇÃO EXTERNA $\delta_p - \delta_{pe} = 0$

8.3 INFLUÊNCIA DO TAMANHO DA AERONAVE

8.4. RESPOSTA DA AERONAVE A UMA VARIAÇÃO DO PROFUNDOR

$$\delta_p - \delta_{pe} \neq 0$$



EQUAÇÕES DO MOVIMENTO LONGITUDINAL

$$m \frac{dV}{dt} = -m g \sen \gamma - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D + F \cos(\alpha + \alpha_F) \quad (1)$$

$$m V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L + F \sen(\alpha + \alpha_F) - m g \cos \gamma \quad (2)$$

$$I_y \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \rho S V^2 l \left(C_{m_o} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_P}} \delta_P + C_{m_q} \frac{ql}{V} + C_{m_{\dot{\alpha}}} \frac{\dot{\alpha} l}{V} \right) \quad (3)$$

$$\theta = \alpha + \gamma$$

$$\frac{dH}{dt} = V \sen \gamma$$



8.1. Linearização das equações do movimento

VAMOS CONSIDERAR QUE HAVERÁ SÓ ALTERAÇÕES NO PROFUNDOR: δ_p , COM

$$F = F_e, \quad \gamma_e = 0, \quad V = V_e$$

EQUAÇÃO DO ARRASTO É SATISFEITA, COM:

$$m \dot{V} = 0 = -\frac{1}{2} \rho S V_e^2 C_D + F_e \cos(\alpha + \alpha_F)$$



$$\frac{1}{2} \rho S V_e^2 C_D = F_e \cos(\alpha + \alpha_F)$$

$$H = H_e$$



As equações se reduzem:

$$m V_e \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \rho S V_e^2 C_L + F_e \sin(\alpha + \alpha_F) - m g \quad (2)$$

$$\frac{I_y}{\frac{1}{2} \rho S V_e^2 l} \frac{dq}{dt} = C_{m_o} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_P}} \delta_P + C_{m_q} \frac{ql}{V_e} + C_{m_{\dot{\alpha}}} \frac{\dot{\alpha} l}{V_e} \quad (3)$$

NO EQUILIBRIO $\dot{\gamma} = 0$, $q = 0$, $\dot{q} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$

$$0 = \frac{1}{2} \rho S V_e^2 C_{L_e} + F_e \sin(\alpha_e + \alpha_F) - m g \quad (2a)$$

$$0 = C_{m_o} + C_{m_\alpha} \alpha_e + C_{m_{\delta_P}} \delta_{Pe} \quad (3a)$$

Fazendo (2) – (2a) e (3) – (3a):



$$m V_e \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \rho S V_e^2 (C_L - C_{L_e}) + F_e [\text{sen}(\alpha + \alpha_F) - \text{sen}(\alpha_e + \alpha_F)] \quad (4)$$

$$\frac{I_y}{\frac{1}{2} \rho S l V_e^2} = C_{m_o}(\alpha - \alpha_e) + C_{m_q} \frac{ql}{V_e} + C_{m_\delta}(\delta_P - \delta_{P_e}) + C_{m_{\dot{\alpha}}}(\dot{\alpha}) \frac{l}{V_e} \quad (5)$$

Como a velocidade é constante, o número de Mach é constante e

$$C_L = C_L(\alpha, \delta_p)$$

Linearizando C_L em torno do ponto de equilíbrio:

$$C_L - C_{L_e} = C_{L_\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{L_\delta}(\delta_P - \delta_{P_e})$$



Linearizando $\text{sen}(\alpha + \alpha_F)$ em torno do ponto de equilíbrio:

$$\text{sen}(\alpha + \alpha_F) = \text{sen}(\alpha_e + \alpha_F) + \cos(\alpha_e + \alpha_F)(\alpha - \alpha_e)$$

$$\text{sen}(\alpha + \alpha_F) - \text{sen}(\alpha_e + \alpha_F) = \cos(\alpha_e + \alpha_F)(\alpha - \alpha_e)$$

ENTÃO:

$$F_e [\text{sen}(\alpha + \alpha_F) - \text{sen}(\alpha_e + \alpha_F)] = F_e \cos(\alpha_e + \alpha_F)(\alpha - \alpha_e)$$

VAMOS CONSIDERAR QUE O TERMO $C_{m\dot{\alpha}}$ É DESPREZÍVEL PERANTE OS DEMAIS TERMOS DE C_m , SE A VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE ATAQUE É PEQUENA.



INTRODUZINDO A NOTAÇÃO:

$$\bar{\gamma} = \gamma - \gamma_e, \quad \bar{\alpha} = \alpha - \alpha_e, \quad \bar{\delta}_p = \delta_p - \delta_{Pe}$$

AS EQUAÇÕES LINEARIZADAS SÃO:

$$m V_e \dot{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2} \rho V_e^2 S (C_{L\alpha} \bar{\alpha} + C_{L\delta} \bar{\delta}_p) + F_e \cos(\alpha_e + \alpha_F) \bar{\alpha}$$

$$\frac{I_y}{\frac{1}{2} \rho V_e^2 S l} \dot{q} = C_{m\alpha} \bar{\alpha} + C_{m\delta} \bar{\delta}_p + C_{mq} q$$

VOO É HORIZONTAL ENTÃO NO EQUILÍBRIO:

$$F_e \cos(\alpha_e + \alpha_F) = \frac{mg}{E'}$$



$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2mV_e} \rho V_e^2 S (C_{L\alpha} \bar{\alpha} + C_{L\delta} \overline{\delta_p}) + \frac{g}{V_e E'} \bar{\alpha}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2I_y} \rho V_e^2 S l (C_{m\alpha} \bar{\alpha} + C_{m\delta} \overline{\delta_p} + C_{mq} q)$$

DEFININDO OS COEFICIENTES:

$$L_\alpha = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} V_e^2 C_{L\alpha}, \quad m_\alpha = -\frac{1}{2} \rho \frac{S l}{I_y} V_e^2 C_{m\alpha}$$

$$L_\delta = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} V_e^2 C_{L\delta}, \quad m_\delta = -\frac{1}{2} \rho \frac{S l}{I_y} V_e^2 C_{m\delta}$$

$$m_q = -\frac{1}{2} \rho \frac{S l^2}{I_y} V_e C_{mq}$$

m_α, m_δ, m_q são positivos. Pois $C_{m\alpha} < 0$, $C_{m\delta} < 0$, $C_{mq} < 0$.



$$\dot{\gamma} = \left(\frac{L_{\alpha}}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right) \bar{\alpha} + \frac{L_{\delta}}{V_e} \overline{\delta_p}$$

$$\dot{q} = -m_{\alpha} \bar{\alpha} - m_q q - m_{\delta} \overline{\delta_p}$$

UTILIZANDO A EQUAÇÃO GEOMÉTRICA:

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha + \gamma \\ q = \dot{\theta} &= \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \rightarrow \dot{\gamma} = q - \dot{\alpha} \quad \text{ou} \quad \dot{\alpha} = q - \dot{\gamma} \end{aligned}$$

$$\dot{q} = -m_q q - m_{\alpha} \bar{\alpha} - m_{\delta} \overline{\delta_p}$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = q - \left(\frac{L_{\alpha}}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right) \bar{\alpha} - \frac{L_{\delta}}{V_e} \overline{\delta_p}$$

2 equações

2 variáveis $\bar{\alpha}, q$

1 controle $\overline{\delta_p}$



2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM:

SOLUÇÃO COMPLETA DADA PELA SOMA DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

$$\bar{\delta}_p = 0$$

EQUAÇÃO PARTICULAR DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA $\bar{\delta}_p \neq 0$

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA $\bar{\delta}_p = 0$ RESPOSTA A UMA PERTURBAÇÃO EXTERNA.

RETORNO DA AERONAVE AO EQUILÍBRIO:

ESTABILIDADE DINÂMICA



8.2 RESPOSTA A PERTURBAÇÃO EXTERNA $\bar{\delta}_p = 0$

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO, EQUAÇÃO HOMOGÊNEA:

$$\dot{q} = -m_q q - m_\alpha \bar{\alpha}$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = q - \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right) \bar{\alpha}$$

FORMA MATRICIAL

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -m_q & -m_\alpha \\ 1 & -\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right) \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DEPENDE DOS AUTOVALORES DA MATRIZ A:

$$\det(A - sI) = 0$$



SOLUÇÃO DEPENDE DOS AUTOVALORES DA MATRIZ A:

$$\det(A - sI) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -m_q - s & -m_\alpha \\ 1 & -\left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'}\right) - s \end{vmatrix} = 0$$

Que corresponde a uma equação de segunda ordem em s:

$$s^2 + \left(m_q + \frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'}\right) s + m_\alpha + m_q \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'}\right) = 0$$



**2 raízes:
s1 e s2**

Tipo de solução depende das raízes s1 e s2.



Se t é o tempo, dependendo de s_1 e s_2 a solução será:

1) s_1 e s_2 reais distintas

$$X = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

2) Para raízes reais iguais: $s_1 = s_2 = s$

$$X = e^{s_1 t} (C_1 + C_2 t)$$

3) Para um par de raízes conjugadas $s = a \pm b i$

$$X = e^{a t} (C_1 \cos b t + C_2 \sin b t)$$



$$s^2 + \left(m_q + \frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right) s + m_\alpha + m_q \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right) = 0$$

Essa equação pode ser escrita na forma:

$$s^2 + 2 w_0 \xi s + w_0^2 = 0$$

$$w_0 = \sqrt{m_\alpha + m_q \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right)}$$



w_0 – frequência natural

$$\xi = \frac{m_q + \frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'}}{2w_0}$$



ξ – amortecimento



$$s^2 + 2 w_0 \xi s + w_0^2 = 0$$

$$s = \frac{-2 w_0 \xi \pm \sqrt{4 w_0^2 \xi^2 - 4 w_0^2}}{2}$$

$$s = -w_0 \xi \pm w_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$$

PORTANTO:

1) $\xi > 1 \rightarrow s \text{ é real} \rightarrow s_1 \neq s_2 \rightarrow$ **MOVIMENTO NÃO OSCILATÓRIO**

2) $\xi = 1 \rightarrow s_1 = s_2 \rightarrow$ **MOVIMENTO NÃO OSCILATÓRIO**

3) $\xi < 1 \rightarrow s \text{ é complexo} \rightarrow s = -w_0 \xi \pm i w_0 \sqrt{1 - \xi^2}$



Desejado para aeronaves



Assim para $s = -w_0 \xi \pm iw_0 \sqrt{1 - \xi^2}$, a solução é do tipo:

$$X = \begin{pmatrix} q \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = e^{-w_0 \xi t} \left(\begin{pmatrix} A_q \\ A_\alpha \end{pmatrix} \text{sen}(w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + \begin{pmatrix} B_q \\ B_\alpha \end{pmatrix} \text{cos}(w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right)$$

A frequência do movimento é $w = w_0 \sqrt{1 - \xi^2}$

O período do movimento é dado por

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{w_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Note também que $w_0 \xi > 0$ e $e^{-w_0 \xi t}$ é decrescente.



$$q = e^{-w_0 \xi t} \left(A_q \text{sen } w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + B_q \cos w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right)$$

$$\alpha = e^{-w_0 \xi t} \left(A_\alpha \text{sen } \sqrt{1 - \xi^2} t + B_\alpha \cos w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right)$$

QUE PODE SER COLOCADO NA FORMA:

$$q = k_q e^{-w_0 \xi t} \text{sen} (w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \psi_q)$$

$$\bar{\alpha} = k_\alpha e^{-w_0 \xi t} \text{sen} (w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \psi_\alpha)$$



- As constantes são determinadas pelas condições iniciais $\bar{\alpha}_0$ e q_0
- Com $\dot{\bar{\alpha}}_0$ e \dot{q}_0 obtidos a partir do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\bar{\alpha}}_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q_0 \\ \bar{\alpha}_0 \end{bmatrix}$$



EXEMPLO: MIRAGE

**$V_e = 150 \text{ m/s}$
ao nível do mar, $H_e = 0 \text{ km}$**

$$m = 7400 \text{ kg}, \quad S = 36 \text{ m}^2, \quad l = 5,25 \text{ m}, \quad I_y = 50000 \text{ kg m}^2$$

$$C_D = 0,015 + 0,4 C_L^2, \quad C_{m_\alpha} = -0,17, \quad C_{L_\alpha} = 2,20$$

$$C_{m_q} = -0,4, \quad C_{L_\delta} = 0,70, \quad C_{m_\delta} = -0,45$$

$$\alpha_e = 3,76^\circ, \quad F_e = 11624 \text{ N}, \quad C_{L_e} = 0,1447$$

$$C_{D_\alpha} = 0,02338, \quad E = 6,1907, \quad E' = 6,2565$$

$$m_\alpha = 8,8558, \quad m_q = 0,7293, \quad \frac{L_\alpha}{V_e} = 0,9850$$

$$\frac{q}{V_e E'} = 0,01045$$



MIRAGE: $V_e = 150\text{m/s}$ $H_e = 0\text{km}$

$$q = e^{-w_0 \xi t} \left(A_q \text{sen } w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + B_q \text{cos } w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right)$$

$$\alpha = e^{-w_0 \xi t} \left(A_\alpha \text{sen } w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + B_\alpha \text{cos } w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right)$$

Com:

$$\xi = 0,2786 ; \quad w_0 = 3,0954 \text{ rad/s} \quad e \quad T = 2,113 \text{ s}$$



MIRAGE: $V_e = 150\text{m/s}$ $H_e = 0\text{km}$

$$A = \begin{bmatrix} -0,7293 & -8,8558 \\ 1 & -0,9955 \end{bmatrix}$$

Para condição inicial:

$$\bar{\alpha}_0 = 1^\circ \quad e \quad q_0 = 0$$

$$\dot{\bar{\alpha}}_0 = -0,9955 \quad e \quad \dot{q}_0 = -8,8558$$

$$A_\alpha = 0,07990 \quad e \quad A_q = -2,9782$$

$$B_\alpha = 1 \quad e \quad B_q = 0$$



MIRAGE: $V_e = 150\text{m/s}$ $H_e = 0\text{km}$

Ou ainda:

$$q = k_q e^{-w_0 \xi t} \text{sen} (w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \psi_q)$$

$$\bar{\alpha} = k_\alpha e^{-w_0 \xi t} \text{sen} (w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \psi_\alpha)$$

$$k_\alpha = 1,00319 \quad e \quad k_q = 2,9782$$

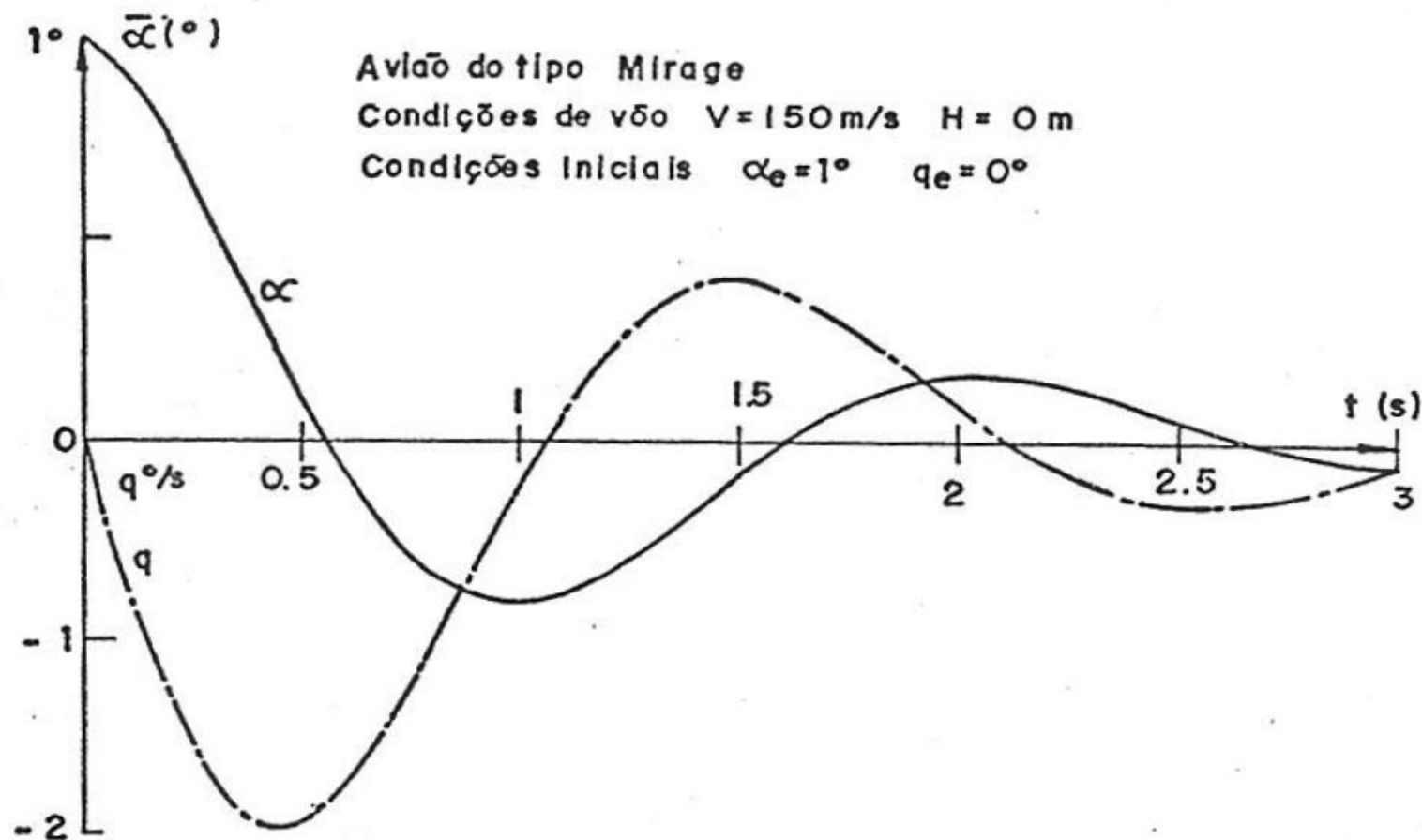
$$\psi_\alpha = 1,49106 \text{ rad} = 85,432^\circ \quad e \quad \psi_q = \pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$\bar{\alpha}(t) = 1,00319 e^{-0,8624 t} \text{sen} (2,9736 t + 1,49106)$$

$$q(t) = 2,9782 e^{-0,8624 t} \text{sen} (2,9736 t + \pi)$$



MIRAGE: $V_e = 150 \text{ km}$, $H_e = 0 \text{ km}$





AIRBUS: $V_e = 150 \text{ km}$, $H_e = 0 \text{ km}$

$$\alpha_e = 3,92^\circ (F_e = 82038 \text{ N})$$

$$C_{L,e} = 0,3269 ; C_{D,e} = 0,02284 ; E = 14,3097 ; E' = 14,3783$$

$$m_\alpha = 3,6052 ; m_q = 1,1804 ; \frac{L_\alpha}{V_e} = 0,9505 ; \frac{q}{V_e E'} = 0,004547$$

$$\xi = 0,4908 ; w_0 = 2,1754 \text{ rad/s} ; T = 3,315 \text{ s} ; \xi w_0 = 1,0677$$

$$A = \begin{bmatrix} -1,1804 & -3,6052 \\ 1 & -0,9950 \end{bmatrix}$$



AIRBUS: $V_e = 150 \text{ km}$, $H_e = 0 \text{ km}$

Condições iniciais: $\bar{\alpha}_0 = 1^\circ$ e $q_0 = 0$

$$\dot{\bar{\alpha}}_0 = -0,9950 \quad e \quad \dot{q}_0 = -3,6052$$

$$A_\alpha = 0,05946 \quad e \quad A_q = -1,9021$$

$$B_\alpha = 1 \quad e \quad B_q = 0$$

Logo

$$k_\alpha = 1,00177 \quad e \quad k_q = 1,9021$$

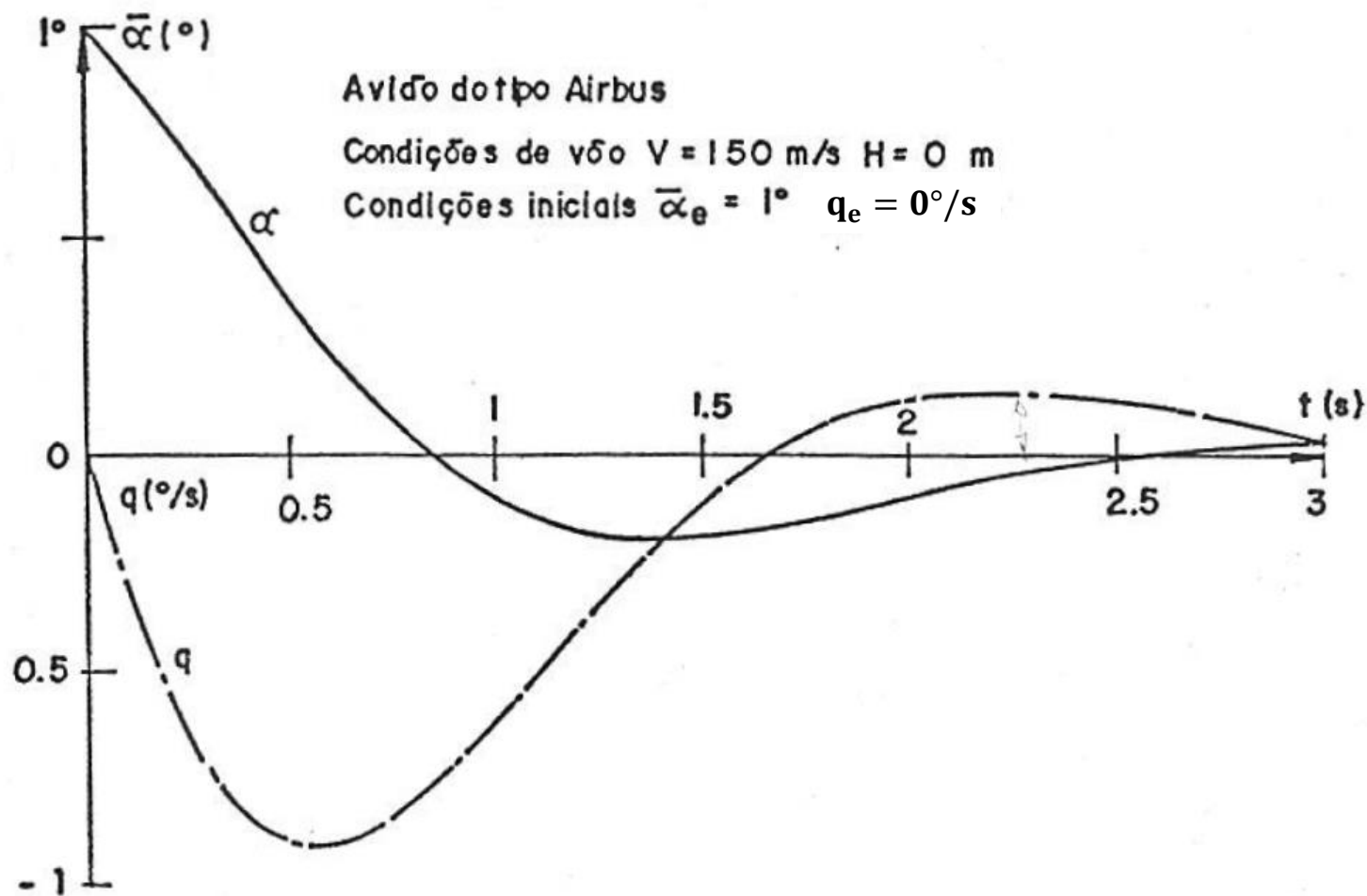
$$\psi_\alpha = 1,5141 \text{ rad} = 86,6^\circ \quad e \quad \psi_q = \pi \text{ rad} = 180$$

$$\bar{\alpha}(t) = 1,00177 e^{-1,0677 t} \text{sen} \left(\frac{2 \pi}{3,315} t + 1,5144 \right)$$

$$q(t) = 1,9021 e^{-1,0677 t} \text{sen} \left(\frac{2 \pi}{3,315} t + \pi \right)$$

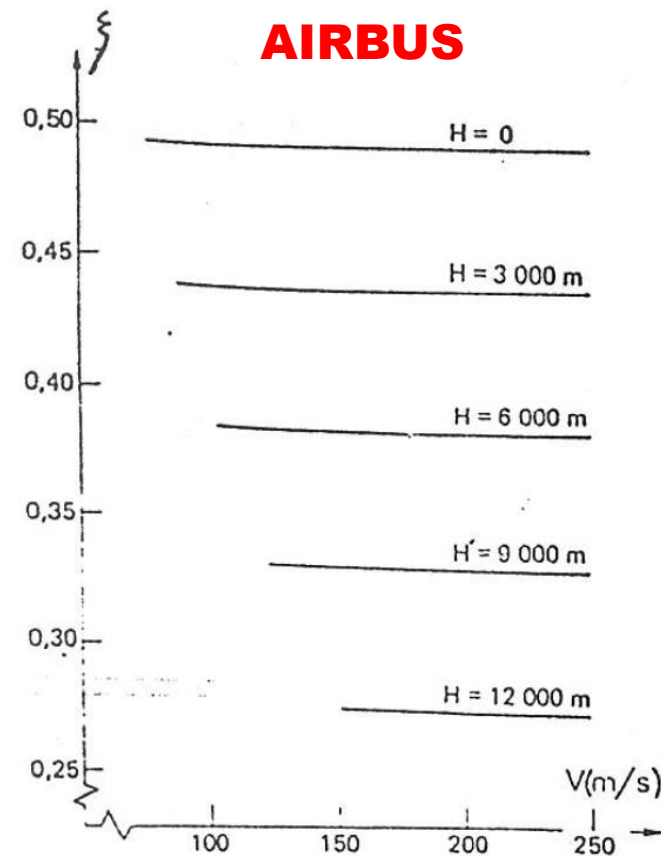
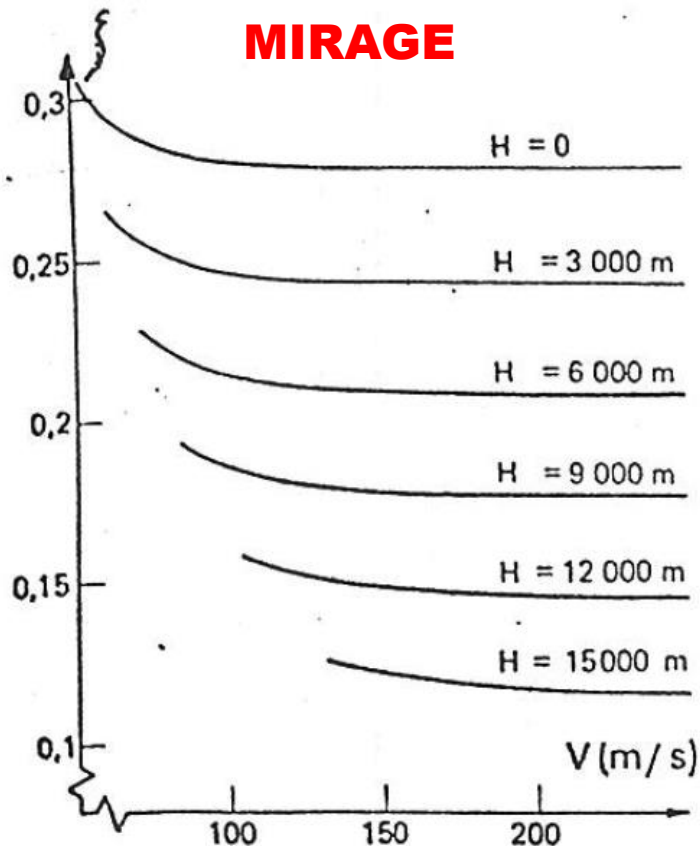


AIRBUS: $V_e = 150$ km, $H_e = 0$ km





AMORTECIMENTO



$$\xi = \frac{m_q + \frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'}}{2w_0}$$

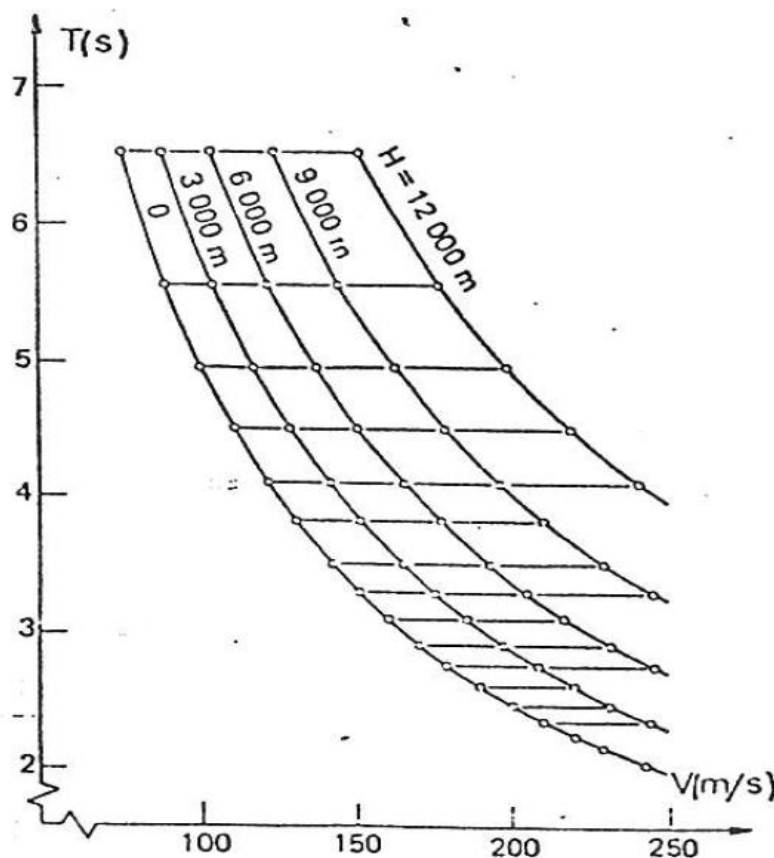
$$w_0 = \sqrt{m_\alpha + m_q \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right)}$$

AMORTECIMENTO INDEPENDE DA VELOCIDADE, DIMINUI COM A ALTITUDE



PERÍODO

AIRBUS



$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{w_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$w_0 = \sqrt{m_\alpha + m_q \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right)}$$

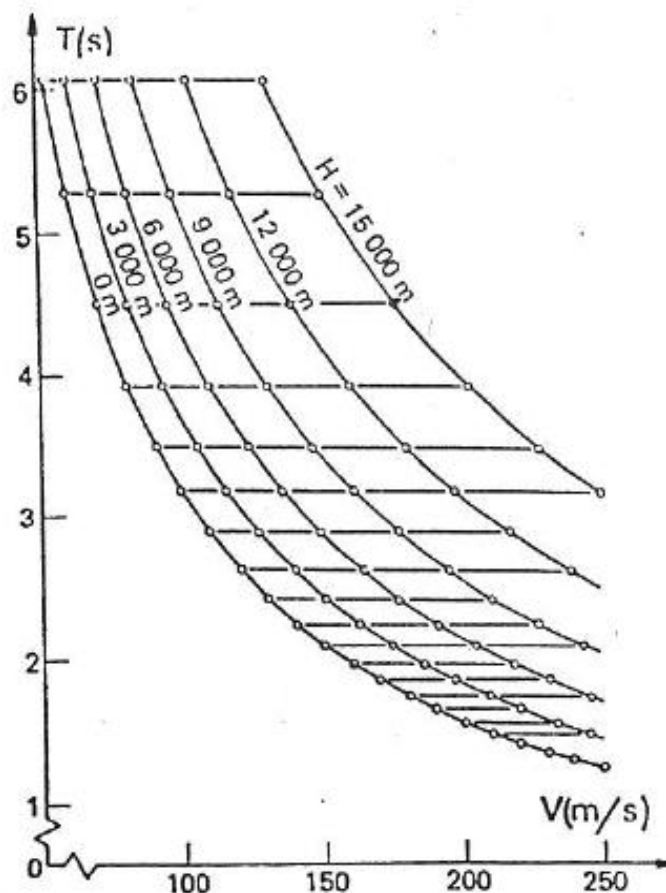
$$\xi = \frac{m_q + \frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'}}{2w_0}$$

**PERÍODO DIMINUI COM O AUMENTO DA VELOCIDADE,
AUMENTA COM A ALTITUDE, E INDEPENDENTE DO ÂNGULO DE ATAQUE**



PERÍODO

MIRAGE



$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{w_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$w_0 = \sqrt{m_\alpha + m_q \left(\frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'} \right)}$$

$$\xi = \frac{m_q + \frac{L_\alpha}{V_e} + \frac{g}{V_e E'}}{2w_0}$$

PERÍODO DIMINUI COM O AUMENTO DA VELOCIDADE, AUMENTA COM A ALTITUDE, E INDEPENDE DO ÂNGULO DE ATAQUE