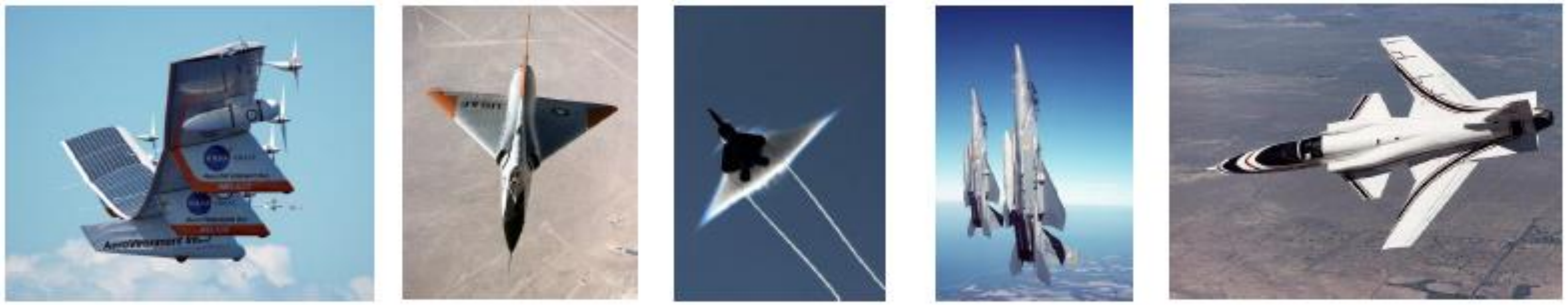
Universidade de Brasília

Faculdade UnB Gama

Mecânica do Voo

Derivada de vetor

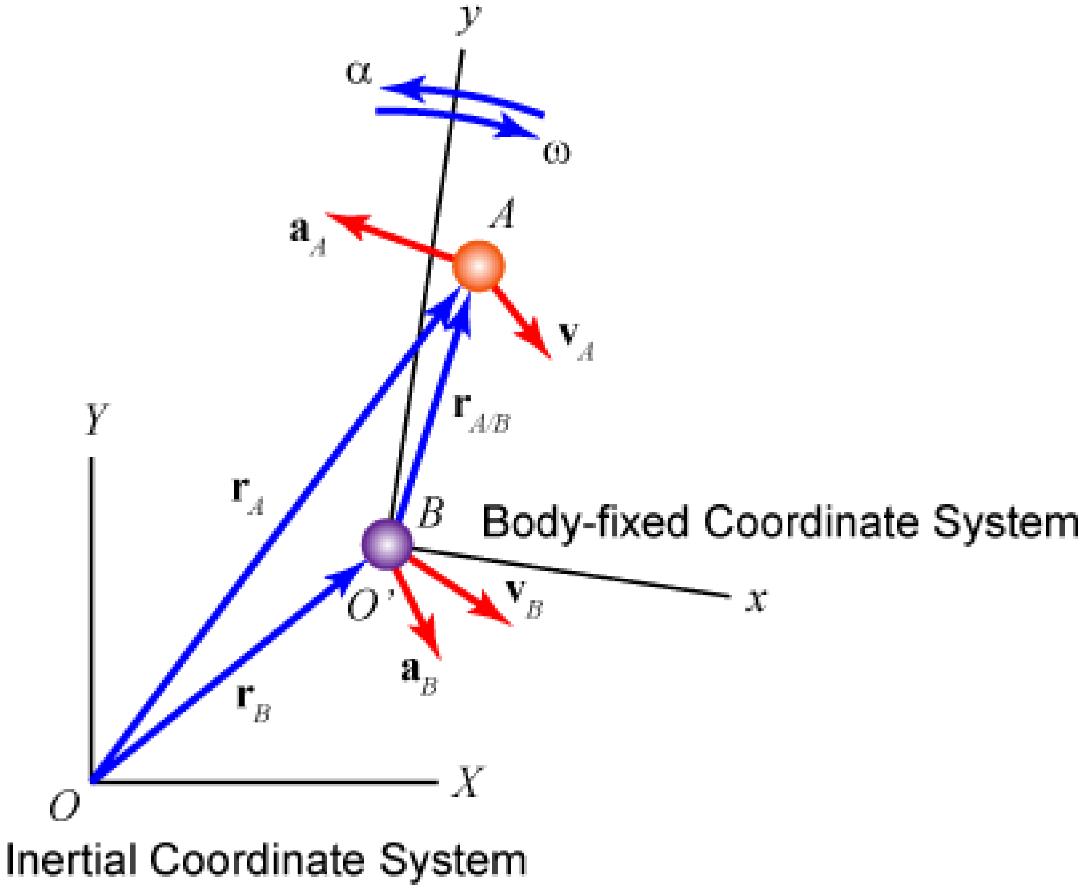


Notação

- S_x - Um sistema de referência *x*. Exemplos: NED, b (corpo), ECEF, ECI, i (inercial – ECI ou NED conforme o caso), e (Earth, qualquer referencial fixo à Terra – na disciplina, sempre ECEF)
- $\boldsymbol{D}_y^x$ - Matriz de rotação (DCM) que rotaciona de S_x para S_y
- $\boldsymbol{v}_x$ - Vetor representado em S_x
- $\boldsymbol{\omega}_z^{xy}$ - Vetor velocidade angular entre os sistemas de referência S_x e S_y, representado em S_z
- $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_x}{dt}\right|_{S_x} = \dot{\boldsymbol{v}}_x$ - Derivada de $\boldsymbol{v}$, avaliada e representada em S_x

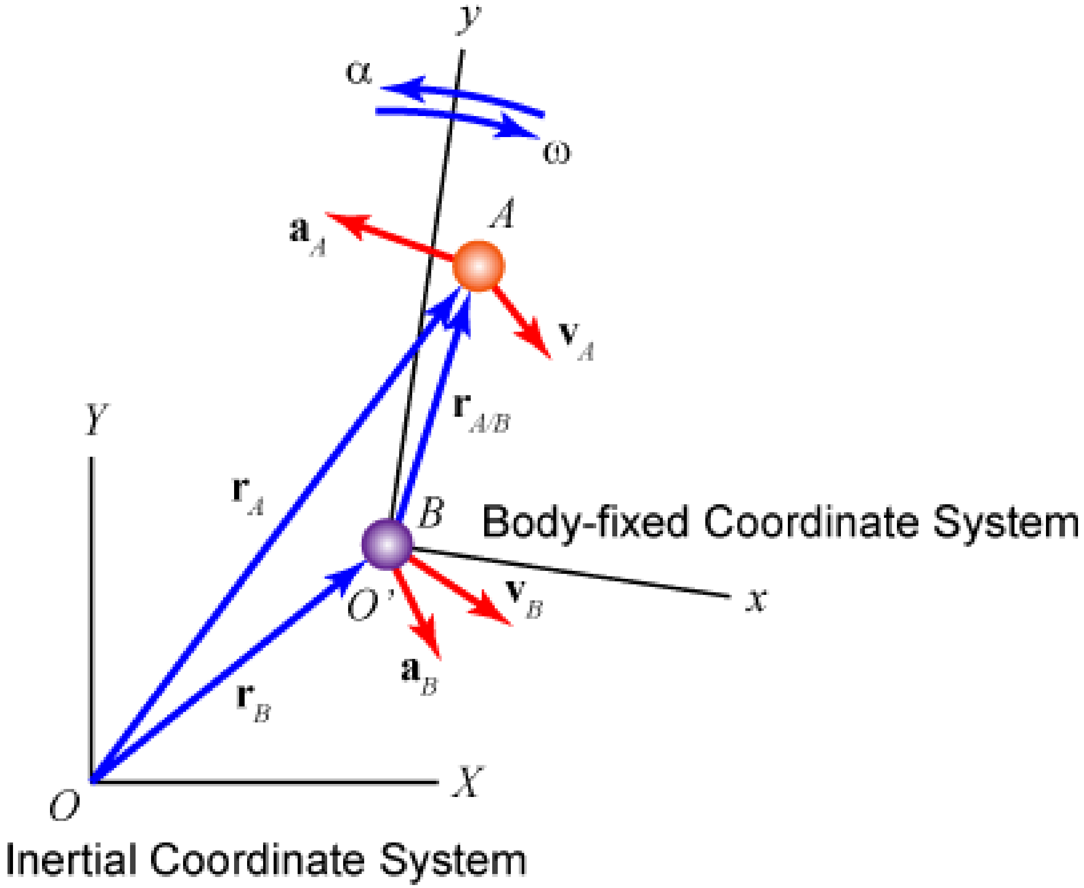
Derivada do Vetor

- Seja um vetor $\boldsymbol{v}$, que é observado em dois sistemas coordenados distintos S_a e S_b, em que um pode estar rotacionando quando comparado ao outro. Veja que, apesar de
$$\boldsymbol{v}_b = \boldsymbol{D}_b^a \boldsymbol{v}_a,$$
- temos que
$$\dot{\boldsymbol{v}}_b \neq \boldsymbol{D}_b^a \dot{\boldsymbol{v}}_a$$
- Na verdade, pela regra da cadeira (derivada):
$$\dot{\boldsymbol{v}}_b = \boldsymbol{D}_b^a \dot{\boldsymbol{v}}_a + \dot{\boldsymbol{D}}_b^a \boldsymbol{v}_a$$
- Pois os ângulos de Euler não são mais constantes e, por isso, $\boldsymbol{D}_b^a$ não é constante.

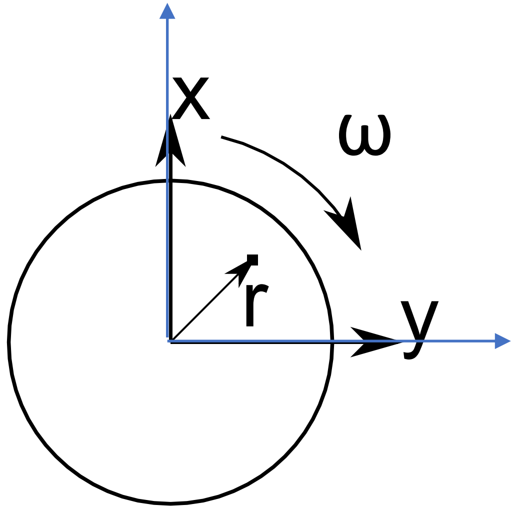


Derivada do Vetor

- Exemplo físico: imagine que você está em um brinquedo gira-gira em movimento. A pessoa ao seu lado parece parada para você, mas para um observador externo, ambos giram. A velocidade (derivada da posição) é nula em seu referencial, mas é não-nula no referencial do observador externo.



Derivada do Vetor



- É possível mostrar que (teorema de Coriolis)

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_{S_b} = \left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_{S_a} + \boldsymbol{\omega}^{ab} \times \boldsymbol{v}$$

- Ou, em uma notação mais compacta

$$\dot{\boldsymbol{v}}_b = \dot{\boldsymbol{v}}_a + \boldsymbol{\omega}^{ab} \times \boldsymbol{v}$$

- Ou seja, a derivada do vetor em S_b pode ser obtida utilizando a derivada em S_a mais uma compensação que é função da velocidade angular relativa entre os sistemas de coordenadas e o valor do vetor.

- Veja que não é informado o sistema de referência: pode-se usar qualquer um, desde que seja o mesmo em toda a equação. Por exemplo, se desejamos $\dot{\boldsymbol{v}}_b$ representado em S_a

$$\boldsymbol{D}_a^b \dot{\boldsymbol{v}}_b = \dot{\boldsymbol{v}}_a + \boldsymbol{\omega}_a^{ab} \times \boldsymbol{v}_a$$

Coriolis

- Aplicação do teorema de Coriolis* – verificar qual a velocidade e aceleração inerciais a partir de informações no sistema do corpo
- Fonte: ftp://labattmot.ele.ita.br/ele/jacques/CursoNaveg/ApostilaNavegacao/CAP2E3.PDF
- Seja um vetor posição $\boldsymbol{r}$ que indica a posição de um corpo em um sistema de coordenadas inercial (chamaremos genericamente de S_i). O sistema está em um referencial girante S_G
- Deseja-se saber a velocidade e aceleração inercial desse objeto.
- Exemplo: sei a velocidade e aceleração de um avião em relação ao solo, e quero saber o movimento inercial
- * Veja que o teorema, e seus efeitos, valem para qualquer sistema girante (exemplo: brinquedo gira gira). Não é uma propriedade específica do planeta Terra girante.

Coriolis

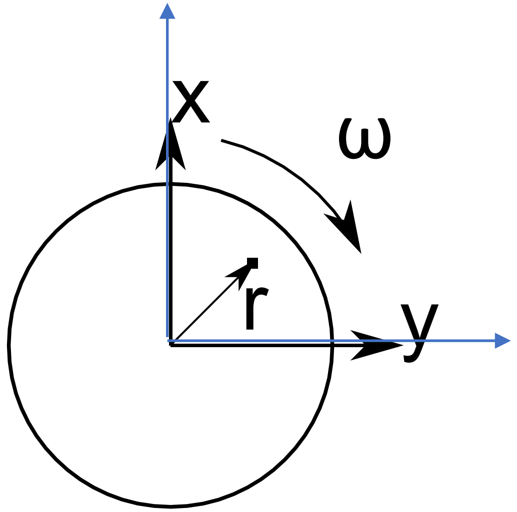
$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}$$

- Pode-se definir a velocidade relativa ao sistema girante $\boldsymbol{V}_G = \dot{\boldsymbol{r}}_G$:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}$$

- Ou seja: velocidade inercial é a velocidade relativa mais velocidade causada pela rotação do sistema.
- Exemplo: a velocidade inercial de um carro, na Terra, é a velocidade do carro em relação ao chão mais a velocidade do chão em relação ao sistema inercial (centro da Terra)
- A velocidade do chão é causada pela rotação $\boldsymbol{\omega}^{Gi}$ da Terra aplicada ao “braço de alavanca” $\boldsymbol{r}$ cuja magnitude é aproximadamente o raio da Terra

Coriolis



- Exemplo: ponto em um disco girando (ex: brinquedo gira-gira)
- Sistema "inercial": superfície terrestre
- Sistema girante: disco

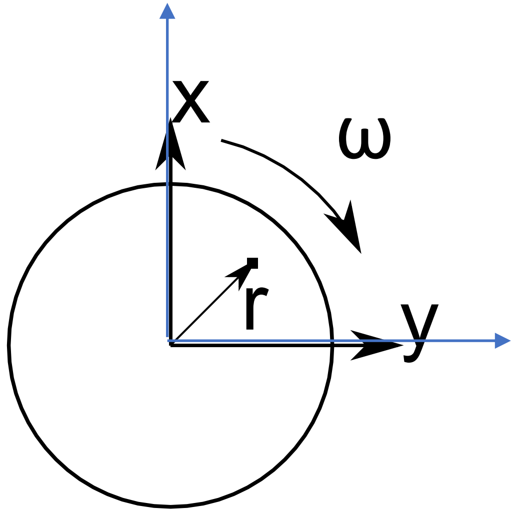
Exemplo 1 – Assuma sistemas de referência instantaneamente alinhados

$$\boldsymbol{\omega}^{Gi} = [0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}} rad/s\,, \qquad \mathbf{r} = [1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}\, m\,, \qquad \boldsymbol{V}_G = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}$$

- Então:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}$$

Coriolis



- Exemplo: ponto em um disco girando (ex: brinquedo gira-gira)
- Sistema “inercial”: superfície terrestre
- Sistema girante: disco

Exemplo 1 – Assuma sistemas de referência instantaneamente alinhados

$$\boldsymbol{\omega}^{Gi} = [0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}} rad/s\,, \qquad \mathbf{r} = [1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}\ m\,, \qquad \boldsymbol{V}_G = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}$$

- Então:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi}{}_{\times}\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{m/s}$$

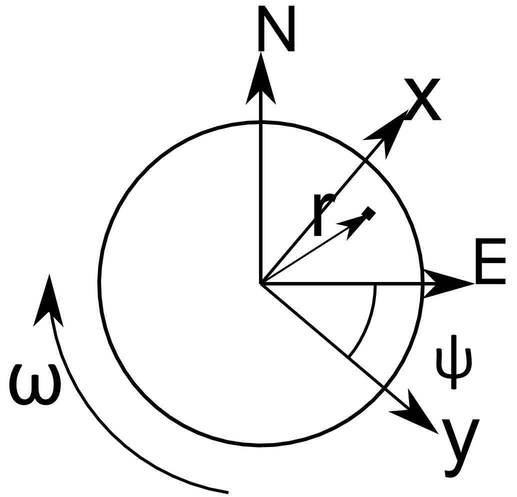
Coriolis

Exemplo 2:

$$\boldsymbol{\omega}^{Gi} = [0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}} rad/s\,, \qquad \mathbf{r} = [1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}\ m\,, \qquad \boldsymbol{V}_G = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}, \qquad \psi \neq 0°$$

- Então:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}$$



- Achar primeiro a matriz de rotação

$$\boldsymbol{D}_i^G = \begin{bmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

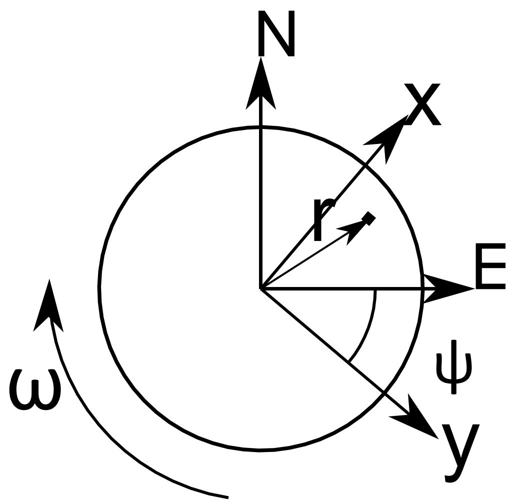
Coriolis

Exemplo 2:

- Veja que podemos fazer as contas em qualquer sistema de referência. Entretanto, faz sentido que a resposta final seja descrita no referencial inercial:

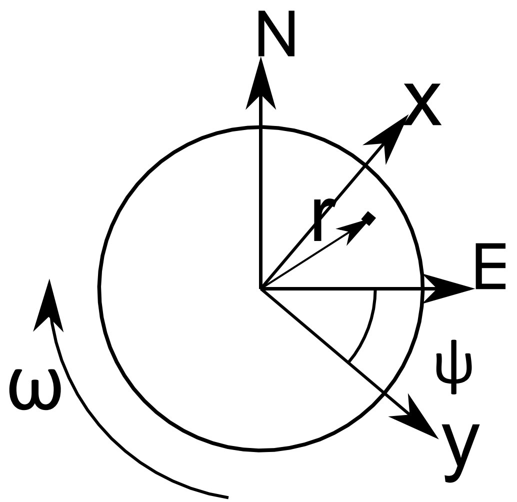
$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{D}_i^G\left(\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{D}_i^G\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{D}_i^G\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sin\psi\\ \cos\psi\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{m/s}$$



Coriolis

- Observações sobre o exemplo 2:
- $\boldsymbol{V}_G = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ indica que a pessoa não se move em relação ao brinquedo gira gira. Por exemplo, ela se mantém sentada sempre na mesma cadeira.



- $\boldsymbol{V}_i = \begin{bmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{bmatrix}$ indica que, alguém olhando de fora, vê a pessoa com uma velocidade de $-\sin\psi$ na direção norte (ou seja, $\sin\psi$ na direção sul) e $\cos\psi$ na direção leste.

Coriolis

- Aplicando a segunda derivada em $\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}\right)\Big|_{S_I} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{V}_G)\Big|_{S_I} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}\right)\Big|_{S_I}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \dot{\boldsymbol{V}}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{V}_G + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{Gi}{}_G \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}\right)$$

- Reorganizando

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \dot{\boldsymbol{V}}_G + 2\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{V} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{Gi}{}_G \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times (\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r})$$

- Veja que

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{Gi}{}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{Gi}{}_G + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{\omega}^{Gi} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{Gi}{}_G$$

- Então

Coriolis

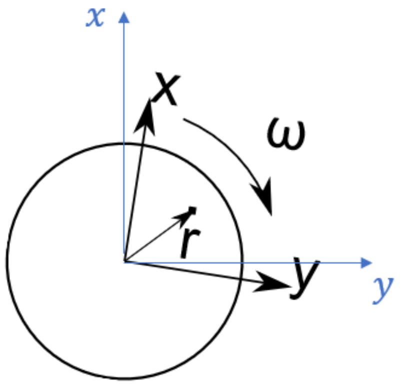
$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \dot{\boldsymbol{V}}_G + 2\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{V} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{Gi}{}_G \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times (\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r})$$

- $\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$ → Aceleração inercial, “verdadeira”
- $\dot{\boldsymbol{V}}_G = \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}}$ → Aceleração “aparente”, computada no sistema girante
- $2\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{V}$ → Aceleração de Coriolis
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}^{Gi}{}_G \times \boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{Gi}{}_i \times \boldsymbol{r}$ → Aceleração devido a mudança na velocidade angular do sistema girante (Aceleração tangencial)
- $\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times (\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r})$ → Aceleração centrípeta
- **Obs:** calcular $\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r}\right)$, não $\left(\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{\omega}^{Gi}\right) \times \boldsymbol{r}$, pois o segundo caso erroneamente resulta em zero
- Destaca-se novamente que o efeito Coriolis é para qualquer referencial girante, e não necessariamente apenas para a rotação da Terra.

Coriolis

Exemplo: Considere que a aceleração inercial de uma mosca sobre um disco girante é representada pela seguinte equação:

$$\overset{ii}{\boldsymbol{r}} = \overset{G}{\boldsymbol{V}} + 2\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{V} + \overset{G}{\boldsymbol{\omega}}{}^{Gi} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}^{Gi} \times (\boldsymbol{\omega}^{Gi} \times \boldsymbol{r})$$



Examine as componentes da aceleração sofrida pela mosca quando ela

i. Está estacionada sobre o disco que gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}^{Gi}$ constante.

ii. Está estacionada sobre o disco que gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}^{Gi} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ variável.

iii. Se move com velocidade aparente $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ sobre o disco que gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}^{Gi}$ constante.

iv. Se move com velocidade aparente $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ sobre o disco que gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}^{Gi} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ variável.

Movimento de Translação

- Momento linear:

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

- Segunda lei de Newton:

$$\sum \boldsymbol{F} = \dot{p} = \frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}}_i)\bigg|_{S_i} = \dot{\mathrm{m}}\dot{\boldsymbol{r}}_i + m\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

- Que pode ser entendida como: o somatório de forças é igual a derivada do momento linear avaliada em um referencial inercial
- Em um míssil ou foguete, o termo $\dot{\mathrm{m}}\dot{\boldsymbol{r}}_i$ é relevante. Em sistemas com massa (quase) constante (avião, problemas de física usuais do ensino médio), esse termo pode ser desprezado.
- Usualmente não se dá a ênfase necessária que o sistema de referência deve ser inercial.
- Com ambos os comentários anteriores, chega-se a equação conhecida $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

Movimento de Translação

- Fontes de força em uma aeronave de asa fixa
- Propulsão/empuxo: hélice ou turbina, fixa ao corpo da aeronave, rotacionando com ela. Força descrita mais facilmente em S_b
- Forças aerodinâmicas: dependem do formato da aeronave, posição de superfícies de controle (aileron, profundor, leme) e do fluxo de ar. Forças descritas mais facilmente em S_w, mas que podem ser descritas também em S_b
- Atração gravitacional: descrita melhor em S_{NED}. Considerando $\dot{\mathrm{m}} = 0$ e as forças:
- $\boldsymbol{F}_a$ somatório de forças aerodinâmicas
- $\boldsymbol{F}_p$ somatório de forças de propulsão
- m**g** atração gravitacional

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p + \mathrm{m}\mathbf{g} \rightarrow \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p}{m} + \mathbf{g}$$

Movimento de Translação

- Teremos que fazer uma dedução utilizando 3 sistemas de referência pois:
- Deve-se ter um sistema inercial (S_{ECI}) em que valham as leis de Newton. Para uma notação mais compacta, chamaremos de S_i
- A velocidade do avião é descrita em relação à superfície de uma terra esférica (S_{ECEF}), que gira em relação ao S_{ECI} com velocidade $\boldsymbol{\omega}^{ei}$. Para uma notação mais compacta, chamaremos de S_e
- Forças são descritas principalmente em S_b.
- A velocidade angular do sistema S_b em relação ao sistema inercial é:
- $\boldsymbol{\omega}^{bi} = \boldsymbol{\omega}^{be} + \boldsymbol{\omega}^{ei}$
- Obs: $\boldsymbol{\omega}^{ei}$ é conhecido: $\boldsymbol{\omega}_e^{ei} = \left[0\ 0\ \frac{2\pi}{24h}\right]^T$, $\boldsymbol{\omega}^{bi}$ se mede com girômetros, $\boldsymbol{\omega}^{be} = \boldsymbol{\omega}^{bi} - \boldsymbol{\omega}^{ei}$

Movimento de Translação

- Deduzindo novamente o efeito de Coriolis, mas com sistemas de referência apropriados para o problema
- A velocidade $\mathbf{V} = \dot{\boldsymbol{r}}_e$ é a velocidade do avião em relação à Terra (se $\dot{\boldsymbol{r}}_e \neq \vec{0}$, latitude e/ou longitude e/ou altitude variam com o tempo) .
- Primeira derivada: velocidade inercial

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}$$

- Forças aerodinâmicas e de propulsão promovem aceleração no sistema de referência da aeronave, ou seja, $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{V}}_b$. Aplicando a segunda derivada em relação ao sistema inercial ECI

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega}^{bi} \times \boldsymbol{V} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{ei}{}_i \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)$$

- Considerando que a Terra gira com velocidade constante, e reorganizando

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)$$

Movimento de Translação

- Substituindo

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p}{m} + \mathbf{g}$$

- Em

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)$$

- Obtém-se:

$$\frac{\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p}{m} + \mathbf{g} = \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)$$

- Reordenando

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p\right) - \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \left[\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)\right]$$

Movimento de Translação

- A equação abaixo vale para qualquer sistema de referência

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p) - (\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}) \times \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega}^{ei} \times (\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r})]$$

- Definindo o sistema de referência como S_b e aplicando transformações de referência onde for apropriado

$$\boldsymbol{a}_b = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{F}_{b_a} + \boldsymbol{F}_{b_p}\right) - (\boldsymbol{\omega}_b^{bi} + \boldsymbol{D}_b^i \boldsymbol{\omega}_i^{ei}) \times \boldsymbol{V}_b + \boldsymbol{D}_b^i[\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega}_i^{ei} \times (\boldsymbol{\omega}_i^{ei} \times \boldsymbol{r}_i)]$$

- Usando $\boldsymbol{\omega}^{bi} = \boldsymbol{\omega}^{be} + \boldsymbol{\omega}^{ei}$

$$\boldsymbol{a}_b = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{F}_{b_a} + \boldsymbol{F}_{b_p}\right) - (\boldsymbol{\omega}^{be} + 2\boldsymbol{D}_b^i \boldsymbol{\omega}^{ei}) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{D}_b^i[\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega}^{ei} \times (\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r})]$$

- Obs: Momentos aerodinâmicos causados por $\boldsymbol{\omega}^{be}$ quando se assume que vento está parado em relação à Terra girante, Girômetros medem $\boldsymbol{\omega}^{bi}$
- Momentos aerodinâmicos relevantes apenas quando $\boldsymbol{\omega}^{be} \gg \boldsymbol{\omega}^{ei}$, ou seja, quando $\boldsymbol{\omega}^{be} \approx \boldsymbol{\omega}^{bi}$

Atração Gravitacional

$$\boldsymbol{g} = -\frac{GM}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\left[r_x\ r_y\ r_z\right]^T$$

- GM: Constante gravitacional vezes massa da Terra
- $\|\boldsymbol{r}\|^2$: Decaimento com o quadrado da distância
- $\frac{GM}{\|\boldsymbol{r}\|^2}$: Magnitude da atração gravitacional em $\boldsymbol{r}$
- $-\frac{\left[r_x\ r_y\ r_z\right]^T}{\|\boldsymbol{r}\|}$: Direção do vetor atração gravitacional (vetor unitário)

- Na prática, fatores como diferença de densidade da Terra, montanhas e outros podem afetar a magnitude e direção da atração gravitacional

Vetor Gravidade

- Definindo

$$\boldsymbol{g}' = \left[\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)\right]$$

- $\boldsymbol{g}'$: Vetor gravidade

- Tem-se

$$\boldsymbol{a}_b = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{F}_{b_a} + \boldsymbol{F}_{b_p}\right) - \left(\boldsymbol{\omega}^{be} + 2\boldsymbol{D}_b^i\boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{D}_b^i\boldsymbol{g}'$$

- Veja que $\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)$ é a aceleração centrípeta causada pela rotação da Terra.
- $\boldsymbol{g}'$ possui menor magnitude que $\boldsymbol{g}$
- O prumo de pedreiro se alinha com o vetor $\boldsymbol{g}'$, de forma que é a definição prática de gravidade.
- O sistema de referência S_{NED} na verdade tem eixo D alinhado com $\boldsymbol{g}'$

Vetor Gravidade

- Sabendo que

$$\boldsymbol{\omega}^{ei} = \left[0\ 0\ \omega^{ei}\right]^T$$

- Tem-se que

$$-\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right) = -\begin{bmatrix} 0 & -\omega^{ei} & 0 \\ \omega^{ei} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\omega^{ei} & 0 \\ \omega^{ei} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = -\left[\omega^{ei}\right]^2 \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Veja que a força centrípeta “joga para fora” uma massa na superfície do planeta, em uma direção perpendicular ao eixo de rotação.
- Obs:

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = [\boldsymbol{v}_1]_\times \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Medida de acelerômetro

- Acelerômetros são usados para medir a aceleração da aeronave. Essa informação é usada para:
- Navegação: saber a posição atual do avião via integração da medida de aceleração e condição inicial
- Controle: mede informação para criar loop de realimentação

- Mas, o que mede o acelerômetro:
- Como está fixo à aeronave (e rotacionando com ela), mede informação representada em S_b
- Mede aceleração absoluta (inercial)
- Mas **não mede** aceleração da gravidade

Exemplos: queda livre, objeto imóvel em balança (peso)

$$\boldsymbol{a}' = \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{g}$$

Medida de acelerômetro

- Sabendo que:

$$\boldsymbol{a}' = \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{g} \qquad \textit{I}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\boldsymbol{F}_{b_a} + \boldsymbol{F}_{b_p}}{m} + \boldsymbol{g} \qquad \textit{II}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right) \qquad \textit{III}$$

Medida de acelerômetro

- Se acelerômetro está exatamente no CG da aeronave, com ***II*** em ***I*** e a medida é feita em S_b:

$$\boldsymbol{a}_b' = \frac{\boldsymbol{F}_{b_a} + \boldsymbol{F}_{b_p}}{m} + \boldsymbol{g}_b - \boldsymbol{g}_b = \frac{\boldsymbol{F}_{b_a} + \boldsymbol{F}_{b_p}}{m}$$

$$\boldsymbol{a}_b' = \frac{\sum \boldsymbol{F}}{m} - \boldsymbol{g}_b \qquad \textbf{\textit{IV}}$$

- Ou ***III*** em ***I***:

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right) - \boldsymbol{g}$$

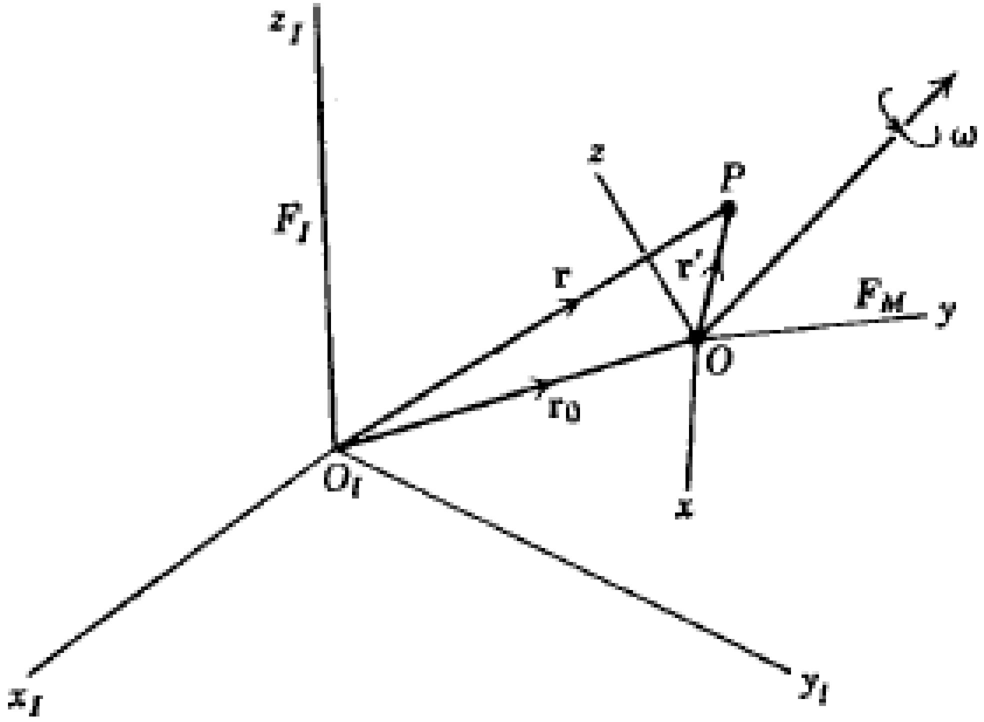
$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} - \boldsymbol{g}' \qquad \textbf{\textit{V}}$$

Medida de acelerômetro

- Se acelerômetro está em uma posição $\boldsymbol{r}'$ em relação ao CG, tem-se

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}' \qquad \textit{VI}$$

- $\boldsymbol{r}_0$: posição do CG da aeronave em relação ao centro da Terra



Medida de acelerômetro

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}' \qquad VI$$

- Derivada em sistema inercial

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{0_{\boldsymbol{i}}} + \dot{\boldsymbol{r}'}_{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{\omega}^{bi} \times \boldsymbol{r}' \qquad VII$$

- Como o acelerômetro está fixo à aeronave, $\dot{\boldsymbol{r}'}_{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{0}}$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{0_{\boldsymbol{i}}} + \boldsymbol{\omega}^{bi} \times \boldsymbol{r}' \qquad VIII$$

- Segunda derivada

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_{0_i} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{bi}{}_b \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}^{bi} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} \times \boldsymbol{r}'\right) \qquad IX$$

Medida de acelerômetro

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_{0_i} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{bi}{}_b \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}^{bi} \times (\boldsymbol{\omega}^{bi} \times \boldsymbol{r}') \qquad \textit{IX}$$

- Veja que $\ddot{\boldsymbol{r}}_{0_i}$ era $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ no primeiro modelo de acelerômetro, então já conhecemos seu efeito. A diferença está nos outros termos. Adicionando esses termos à medida de acelerômetro (***IX em I***):

$$\boldsymbol{a}'_b = \frac{\boldsymbol{F}_{b_a} + \boldsymbol{F}_{b_p}}{m} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{bi}{}_b \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}^{bi} \times (\boldsymbol{\omega}^{bi} \times \boldsymbol{r}') \qquad \textit{X}$$

$$\boldsymbol{a}'_b = \frac{\sum \boldsymbol{F}_b}{m} - \boldsymbol{g}_b + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{bi}{}_b \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}^{bi} \times (\boldsymbol{\omega}^{bi} \times \boldsymbol{r}') \qquad \textit{XI}$$

- Veja que há uma componente tangencial e outra centrípeta, que não correspondem ao movimento do avião. Outros erros de sensor (ruído branco, viés) não foram adicionados ao modelo.
- Forma alternativa

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}) \times \boldsymbol{V} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{bi}{}_b \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}^{bi} \times (\boldsymbol{\omega}^{bi} \times \boldsymbol{r}') - \boldsymbol{g}' \qquad \textit{XII}$$

Aproximação de Terra Plana

Aproximação de Terra Plana

Não é essa Terra plana!

Aproximação de Terra Plana

- Equação completa (terra esférica):

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p\right) - \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \left[\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)\right]$$

- $\boldsymbol{r}$ é a posição inercial do veículo. Em magnitude:

$$\|\boldsymbol{r}\| \approx R_e + h \qquad \text{(não é igual, porque a Terra é um elipsóide)}$$

$$R_e \approx 6400 \text{ km}$$

$$h < 20 \text{ km}$$

- É razoável assumir que $\|\boldsymbol{r}\|$ é aproximadamente constante em um voo. Então:

$$\boldsymbol{g}' = \left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)\right] = \boldsymbol{g}_0' = [0\ 0\ 9{,}81]^T$$

será considerado constante.

- Para velocidades baixas, a componente $\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{V}$ possui efeito pequeno e pode ser desprezada. Obs: esse termo desprezado é o efeito Coriolis que se aprende no ensino médio, causado pela rotação da Terra $\boldsymbol{\omega}^{ei}$.

Aproximação de Terra Plana

- Equação completa (terra esférica):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p}{m} - \left(\boldsymbol{\omega}^{bi} + \boldsymbol{\omega}^{ei}\right) \times \boldsymbol{V} + \left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)\right]$$

Aproximação de Terra plana:

- O sistema S_{NED} é considerado inercial $\boldsymbol{\omega}^{bi} = \boldsymbol{\omega}^{b,NED}$
- Efeitos de curvatura e rotação da Terra desprezados $\boldsymbol{\omega}^{ei} = \boldsymbol{0}$
- Gravidade constante $\boldsymbol{g}_0' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\omega}^{ei} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{ei} \times \boldsymbol{r}\right)$
- Aceleração:

$$\boldsymbol{a}_b = \frac{\boldsymbol{F}_{b_a} + \boldsymbol{F}_{b_p}}{m} - \boldsymbol{\omega}^{b,NED} \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{D}_b^{NED} \boldsymbol{g}_0'$$

- Posição: $\boldsymbol{p}_{NED}$
- Velocidade: $\boldsymbol{V}_{NED} = \dot{\boldsymbol{p}}_{NED}$

Movimento de Rotação

- Momento angular de uma partícula:

$$\delta\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \delta m\dot{\boldsymbol{r}}$$

- É possível mostrar que um objeto rígido composto por infinitas partículas infinitesimais possui o seguinte momento angular:

$$\mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \equiv J\boldsymbol{\omega}_B$$

- $\boldsymbol{H}_B$ - Momento angular em S_b; $\boldsymbol{J}$ - Matrix 3x3, chamada de matriz de inércia, equivale à massa; $\boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}^{ei} = [P\ Q\ R]$ - Velocidade angular – equivalente à velocidade; J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} - Momentos de inércia; J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} - Produtos cruzados de inércia

Movimento de Rotação

- Os momentos de inércia e produto cruzado de inércia podem ser calculados analiticamente (ou numericamente, via software apropriado) através de

$$J_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$J_{xy} \equiv J_{yx} = \int xy\, dm.$$

- Veja que, por depender de x,y,z, depende do sistema de coordenadas utilizado. Usualmente, o sistema utilizado é o sistema do corpo, com origem do sistema no CG da aeronave.
- OBS: Diagonalização de matrizes

Movimento de Rotação

- A segunda lei de Newton, para movimento de rotação, é

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{H}}$$

- (somatório de torques é igual à derivada do momento angular no sistema inercial).
- Fontes de torque:
  - Superfícies de controle (torques aerodinâmicos)
  - Fontes de empuxo desalinhadas com o CG

Movimento de Rotação

- Usando

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{H}}, \qquad \boldsymbol{H}_b = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}_b^{bi}$$

- Calcula-se:

$$\boldsymbol{T}_b = \dot{\boldsymbol{H}}_i = \dot{\boldsymbol{H}}_b + \boldsymbol{\omega}_b^{bi} \times \boldsymbol{H}_b = \boldsymbol{J}_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_b^{bi} + \boldsymbol{\omega}_b^{bi} \times \boldsymbol{J}_b \boldsymbol{\omega}_b^{bi}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b^{bi} = \boldsymbol{J}_b^{-1}\left(\boldsymbol{T}_b - \boldsymbol{\omega}_b^{bi} \times \boldsymbol{J}_b \boldsymbol{\omega}_b^{bi}\right)$$

- Pode ocorrer mudança na matriz de inércia:
  - Consumo de combustível
  - Escoamento de combustível entre asas
  - Lançamento de carga durante voo
- Entretanto, assumiu-se $\dot{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{0}$, pois costuma-se resolver o efeito da mudança de $\boldsymbol{J}$ desenvolvendo-se um controlador distinto para cada caso.

Movimento de Rotação

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{bmatrix},$$

$$k_1 = \frac{J_{yy}J_{zz} - J_{yz}^2}{\Delta}, \qquad k_2 = \frac{J_{yz}J_{zx} + J_{xy}J_{zz}}{\Delta}$$

$$k_3 = \frac{J_{xy}J_{yz} + J_{zx}J_{yy}}{\Delta}, \qquad k_4 = \frac{J_{zz}J_{xx} - J_{zx}^2}{\Delta}$$

$$k_5 = \frac{J_{xy}J_{zx} + J_{yz}J_{xx}}{\Delta}, \qquad k_6 = \frac{J_{xx}J_{yy} - J_{xy}^2}{\Delta}$$

$$\Delta = J_{xx}J_{yy}J_{zz} - 2J_{xy}J_{yz}J_{zx} - J_{xx}J_{yz}^2 - J_{yy}J_{zx}^2 - J_{zz}J_{xy}^2$$

Movimento de Rotação

- Muitas aeronaves possuem simetria no plano xz, ou seja, a metade da esquerda pode ser obtida espelhando a metade direita. Nesse caso, $J_{xy} = J_{yz} = 0$, simplificando as equações

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix}, \qquad J^{-1} = \frac{1}{\Gamma}\begin{bmatrix} J_z & 0 & J_{xz} \\ 0 & \dfrac{\Gamma}{J_y} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_x \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = J_x J_z - J_{xz}^2$$

Movimento de Rotação

- Definindo o torque $T_B = [\bar{L}\ M\ N]$ e usando as equações simplificadas:

$$\Gamma\dot{P} = J_{xz}[J_x - J_y + J_z]PQ - [J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2]QR + J_z\bar{L} + J_{xz}N$$

$$J_y\dot{Q} = (J_z - J_x)PR - J_{xz}(P^2 - R^2) + M$$

$$\Gamma\dot{R} = [(J_x - J_y)J_x + J_{xz}^2]PQ - J_{xz}[J_x - J_y + J_z]QR + J_{xz}\bar{L} + J_xN$$

- As equações são acopladas e não-lineares. Mesmo assumindo um objeto com simetria nos 3 planos, as equações continuam acopladas e não-lineares:

$$\dot{P} = \frac{(J_y - J_z)QR}{J_x} \quad \dot{Q} = \frac{(J_z - J_x)PR}{J_y} \quad \dot{R} = \frac{(J_x - J_y)PQ}{J_z}$$

- Destaca-se o efeito giroscópico: velocidades angulares em dois eixos causam aceleração no terceiro, mesmo sem torques externos. Exemplo:

https://www.youtube.com/watch?v=1n-HMSCDYtM

https://www.youtube.com/watch?v=BPMjcN-sBJ4

https://www.youtube.com/watch?v=GeyDf4ooPdo

Movimento de Rotação

- Definindo o torque $T_B = [\bar{L}\ M\ N]$ e usando as equações simplificadas:

$$\Gamma\dot{P} = J_{xz}[J_x - J_y + J_z]PQ - [J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2]QR + J_z\bar{L} + J_{xz}N$$

$$J_y\dot{Q} = (J_z - J_x)PR - J_{xz}(P^2 - R^2) + M$$

$$\Gamma\dot{R} = [(J_x - J_y)J_x + J_{xz}^2]PQ - J_{xz}[J_x - J_y + J_z]QR + J_{xz}\bar{L} + J_xN$$

- As equações são acopladas e não-lineares. Mesmo assumindo um objeto com simetria nos 3 planos, as equações continuam acopladas e não-lineares:

$$\dot{P} = \frac{(J_y - J_z)QR}{J_x} \quad \dot{Q} = \frac{(J_z - J_x)PR}{J_y} \quad \dot{R} = \frac{(J_x - J_y)PQ}{J_z}$$

- Destaca-se o efeito giroscópico: velocidades angulares em dois eixos causam aceleração no terceiro, mesmo sem torques externos. Exemplo:

https://www.youtube.com/watch?v=1VPfZ_XzisU

Movimento de Rotação

- Motor de rotação adiciona momento de inércia à aeronave:

$$\mathbf{H}_B = J\boldsymbol{\omega}_B + \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}$$

- O momento extra gera termos extras nas 3 equações do slide anterior:

$$J_z(Rh_y - Qh_z) + J_{xz}(Qh_x - Ph_y)$$

$$-Rh_x + Ph_z$$

$$J_{xz}(Rh_y - Qh_z) + J_x(Qh_x - Ph_y)$$

Atitude

- 1) A atitude depende da sequência de rotação 3-2-1.
- 2) A velocidade angular pode ser vista como pequenas rotações instantâneas nos 3 eixos do corpo. A velocidade angular não depende da sequência de rotação.
- As informações 1) e 2) mostram que a velocidade angular **não é** a derivada dos ângulos de Euler. Pode-se mostra que a relação entre ambas é:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\phi \\ \theta \\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta \sin\phi & \tan\theta \cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

$$\dot{\Phi} = \mathscr{E}(\Phi)\boldsymbol{\omega}, \qquad \text{where } \Phi = [\phi, \theta, \psi]^T$$

- $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{b,NED} = [P\ Q\ R]$
- Veja que a matriz acima **não é** uma matriz de rotação

Atitude

- A transformação inversa:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\Theta \\ 0 & c\Phi & c\Theta s\Phi \\ 0 & -s\Phi & c\Theta c\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

Modelo Completo – Terra Esférica

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{v}}_B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_E & B^T & 0 & 0 \\ B\mathbf{g}(\mathbf{p}) - B\Omega_E^2 & -(\Omega_B + B\Omega_E) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J^{-1}\Omega_B J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\Omega_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v}_B \\ \boldsymbol{\omega}_B \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\mathbf{F}_B}{m} \\ J^{-1}\mathbf{T}_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_x \\ 0 & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Omega_B = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_q = \begin{bmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & -R & Q \\ -Q & R & 0 & -P \\ -R & -Q & P & 0 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\omega}^{bi} = [P\ Q\ R]^T$. O modelo de Terra esférica parametriza a atitude utilizando quaternions, que não estudamos

Modelo Completo – Terra Plana

- Nos slides anteriores, foi visto:
- Posição e derivadas, afetadas por forças de entrada
- Posição angular e derivadas, afetadas por torque de entrada
- Atitude, afetada pela velocidade angular
- Unindo todas as equações, e utilizando a aproximação de Terra plana, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{V}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^{bi} \\ \dot{\boldsymbol{\Phi}} \\ \dot{\boldsymbol{p}}_{NED} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left[\boldsymbol{\omega}^{bi}\right]_\times \boldsymbol{V}_b + \boldsymbol{D}_b^{NED} \boldsymbol{g}_0' \\ -\boldsymbol{J}^{-1}\left[\boldsymbol{\omega}^{bi}\right]_\times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}^{bi} \\ \mathcal{E}(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{\omega}^{bi} \\ \boldsymbol{D}_{NED}^{b} \boldsymbol{V}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_b \\ \boldsymbol{T}_b \end{bmatrix}$$

- Veja que a solução é um modelo em espaço de estados. O modelo, entretanto, é não linear, e matrizes apenas ajudam a enfatizar o vetor de estados $\boldsymbol{x}$ cujos estados são $\boldsymbol{V}_b, \boldsymbol{\omega}^{bi}, \boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{p}_{\mathrm{NED}}$. Veja que há forte acoplamento entre as equações.

Modelo Completo – Terra Plana

- Definindo

$$\overset{i}{R}_b = U_b = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \qquad \omega_b^{bi} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \qquad \overset{ib}{R}_b = \overset{b}{\dot{U}}_b = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix}$$

- Pode-se reescrever as equações matriciais de força e torque como:

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} F_{Xb} \\ F_{Yb} \\ F_{Zb} \end{bmatrix} = M \overset{i}{\dot{U}}_b = M \begin{bmatrix} \dot{U} + QW - VR \\ \dot{V} + UR - PW \\ \dot{W} + PV - UQ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{P} + (RP - \dot{Q})I_{xy} - (\dot{R} + PQ)I_{xz} + (R^2 - Q^2)I_{yz} + QR(I_{zz} - I_{yy}) \\ I_{yy}\dot{Q} + (PQ - \dot{R})I_{yz} - (\dot{P} + QR)I_{xy} + (P^2 - R^2)I_{xz} + RP(I_{xx} - I_{zz}) \\ I_{zz}\dot{R} + (QR - \dot{P})I_{xz} - (\dot{Q} + RP)I_{yz} + (Q^2 - P^2)I_{xy} + PQ(I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix}$$