Universidade de Brasília Faculdade UnB Gama

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Prof. William Reis Silva

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CULLEN M. R.; ZILL, D. G. *Equações Diferenciais, vol. I* , MAKRON Books Ltda., São Paulo-SP, 2001

SPIEGEL, M.R. *Transformadas de Laplace*, McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, 1971.

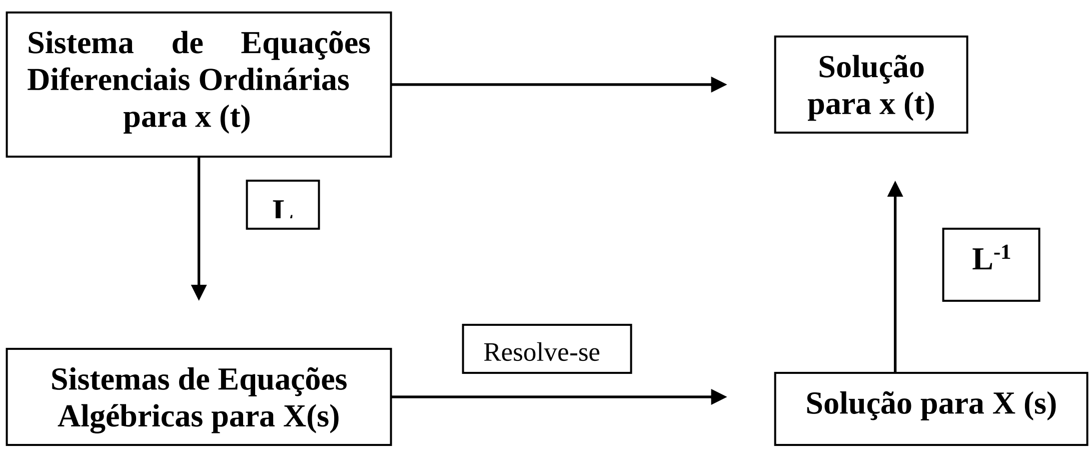
CORNETTI SILVA, R. A - Anotações de Aula de CDI-II

1. INTRODUÇÃO

A determinação de soluções de equações diferenciais ordinárias lineares ou de sistemas de equações é geralmente trabalhosa, sobretudo na etapa de determinação das constantes de integração a partir das condições iniciais.

O uso da transformada de Laplace para resolver problemas deste tipo fornece um método mais simples, com a vantagem de introduzir automaticamente as condições iniciais.

A aplicação da transformada de Laplace a tais equações, transformam as equações diferenciais em equações algébricas de soluções mais fáceis. A anti-transformada da solução das equações encontradas, obtidas por meio de tabelas ou fórmulas adequadas fornece o resultado da integração das equações diferenciais, como mostra o esquema abaixo.



No esquema acima X (s) representa a transformada de Laplace de x(t) sendo que “s” representa um número complexo.

A transformada de Laplace pertence a classe das transformadas integrais, genericamente definidas por:

$$F(s) = \int_{t_1}^{t_2} k(t,s)\, f(t)\; dt$$

onde F(s) é a transformada da função original f(t) e k(s,t) é o núcleo da transformação. Tal transformação, representada por:

$$F(s) = T\,[f\,(t)]$$

estabelece uma correspondência entre a função original na variável “t” e a função transformada na variável “s”.

Se dada uma função F(s) for possível obter f(t) univocamente determinada, dizemos que existe a transformação inversa T^{-1} tal que:

$$f(t) = T^{-1}[F(s)]$$

neste caso dizemos que *f*(*t*) é a anti-transformada ou a transformada inversa de F(s).

Note que as transformadas integrais são operadores lineares, para os quais temos que:

$$T\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1\ T\left[f_1(t)\right] + c_2\ T\left[f_2(t)\right]$$

2. DEFINIÇÃO

Seja f(t) uma função seccionalmente definida para t > 0, onde 0 indica um ponto numa vizinhança infinitesimal à esquerda da origem. A transformada de Laplace da função *f(t)* é definida pela integral:

$$L\left[f(t)\right] = F(s) \overset{\Delta}{=} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

onde $s = \sigma + jw$ indica uma variável complexa e desde que a integral acima seja convergente quando "t" tende para o infinito, ou seja, deve existir um complexo s_0 tal que a integral acima seja convergente para $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.

Note que a transformada de Laplace é linear, isto é:

$$L\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1\ L\left[f_1(t)\right] + c_2\ L\left[f_2(t)\right].$$

3. TRANSFORMADAS DE FUNÇÕES USUAIS

Vamos determinar aqui as transformadas de Laplace de algumas funções.

3.1.Função de Heasivide ou Degrau Unitário

A função degrau unitária é definida como:

$$H(t) = u_{-1}(t) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{para......} t < 0 \\ 1, & \text{para.......} t > 0 \end{cases}$$

sendo que em $t = 0$ a função assume valores finitos não especificados.

Aplicando a definição de transformada vem:

$$L\left[u_{-1}(t)\right] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} 1\, dt = \frac{1}{s}$$

3.2. Função Exponencial: a - complexo ou real

$$L\left[e^{at}\right] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_{0^-}^{\tau} e^{-st+at} dt = \frac{1}{s-a}$$

Exercícios

1. Calcule $L\left[\text{sen}\,(wt)\right]$, onde w real, $t \geq 0$.

R: $F(s) = \dfrac{w}{s^2 + w^2}$

2. Mostre que:

$$L\left[\cos\,(wt)\right] = \frac{s}{s^2 + w^2},$$

onde w real, $t \geq 0$.

4. TEOREMAS BÁSICOS

4.1. Derivada da Transformada

Se $L\left[f(t)\right] = F(s)$ então $L\left[t\, f(t)\right] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$, $\quad t > 0$.

Da definição de transformada segue-se que:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}\right] f(t)\, dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, t\, f(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\left[t\, f(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}, \quad \text{para } t > 0\,.$$

Tal propriedade pode ser generalizada através do princípio de indução por:

$$L\left[t^n\, f(t)\right] = (-1)^n\, \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad \text{para } t > 0\,.$$

Exemplos

1 - $L\left[t\, e^{2t}\right] = -\frac{d\,F(s)}{d\,s} = \frac{1}{(s-2)^2}$

2 - $L\left[t\, u_{-1}(t)\right] = -\frac{d\,F(s)}{d\,s} = \frac{1}{s^2}$

Generalizando: $L\left[t^n\, u_{-1}(t)\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

4.2. Teorema da Translação no Plano Complexo

Se $L\left[f(t)\right] = F(s)$ então $L\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$.
Da definição de transformada segue-se que:

$$L\left[e^{at} f(t)\right] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} e^{at}\, f(t)\, dt = \int_{0^-}^{\tau} e^{-(s-a)t} f(t)\, dt$$

$$L\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$$

Exemplo

$$L\left[e^{2t}\, \text{sen}(3t)\right] = F(s-2) = \frac{3}{(s-2)^2 + 9}$$

4.3. Teorema de Translação Real ou Deslocamento

Se $L[f(t)] = F(s)$ e $a \in \Re$ então $L[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$ desde que $f(t-a) = 0$ para $t < a$.

Da definição de transformada encontramos que:

$$L[f(t-a)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, f(t-a)\, dt = \int_{a^-}^{\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt$$

Mudança de variável: $\tau = t - a$

$$L[f(t-a)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-s(\tau+a)}\, f(\tau)\, d\tau$$

$$L[f(t-a)] = e^{-as} \int_{0_-}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow L[f(t-a)] = e^{-as}F(s).$$

<u>Exemplos</u>

1- $L[u_{-1}(t-a)] = e^{-as}F(s) = \dfrac{e^{-as}}{s}$

2 - $L[\delta(t-a)] = e^{-as}F(s) = e^{-as}$

3 - $L[g(t)]$, onde $g(t) = \begin{Bmatrix} 0, & t < a \\ t, & t > a \end{Bmatrix}$

R: $F(s) = e^{-as}\left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{a}{s}\right)$

4.4. Multiplicação do Argumento por Constante

Se $L[f(t)] = F(s)$ e "*w*" é uma constante positiva então:

$$L[f(w\,t)] = \frac{1}{w} F\left(\frac{s}{w}\right)$$

Da definição encontramos: $L\left[f(w\,t)\right]=\int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(w\,t)\,dt$.

Efetuando a mudança de variável: $\tau = w\,t$

$$L\left[f(w\,t)\right]=\int_{0-}^{\infty} e^{-\frac{s}{w}\tau} f(\tau)\,\frac{d\tau}{w}$$

$$L\left[f(w\,t)\right]=\frac{1}{w}F\left(\frac{s}{w}\right)$$

Exemplo

$$L\left[\text{sen}(2\,t)\right]=\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)=\frac{2}{s^2+4}$$

4.5. Transformada de Laplace de Função Periódica

Se $f(t)$ é periódica de período T então: $L\left[f(t)\right]=\dfrac{1}{1-e^{-st}}\displaystyle\int_{0^-}^{T} e^{-st} f(t)\,dt$

$$L\left[f(t)\right]=\int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Da definição encontramos:

$$L\left[f(t)\right]=\int_{0}^{T} e^{-st} f(t)\,dt+\int_{T}^{2T} e^{-st} f(t)\,dt+\ldots+\int_{nT}^{(n\text{-}1)T} e^{-st} f(t)\,dt+\ldots$$

mas: $f(t)=f(t-nT)\Rightarrow I=\displaystyle\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt=\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t-nT)\,dt$.

Efetuando a mudança de variável: $\tau = t - nT$

$$I=\int_{0^-}^{T} e^{-s(\tau-nT)} f(\tau)\,d\tau = e^{-snT}\int_{0^-}^{T} e^{-st} f(\tau)\,d\tau$$

$$\therefore L\left[f(t)\right]=\left[1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\ldots\right]\int_{0^-}^{T} e^{-st} f(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow L\left[f(t)\right]=\frac{\int_{0}^{T} e^{-st} f(\tau)\, d\tau}{1-e^{-sT}}$$

Exemplo

$$f(t)=\begin{cases} \text{sen}(t)...., & 0<t<\pi \\ 0..........., & \pi<t<2\pi \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad F(s)=\frac{1}{(1-e^{\pi s})(s^2+1)}$$

$$f(t+2\pi)=f(t)$$

4.6. Transformada de Laplace da Derivada

Se $f(t)$ e $f'(t)$ são transformáveis segundo Laplace com $L\left[f(t)\right]=F(s)$ então:

$$L\left[f'(t)\right]=s\,F(s)-f(0^-)$$

$$\text{onde } f(0^-)=\lim_{t\to 0^-} f(t)$$

Da definição de transformada segue-se que: $L\left[f'(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f'(t)\, dt$.

Usando integração por partes, encontramos:

$$L\left[f'(t)\right]=e^{-st} f(t)\Big|_{0^-}^{\infty}+s\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt=s\,F(s)-f(0^-).$$

Tal teorema se estende para derivadas de ordens superiores:

$$L\left[f''(t)\right]=s\,L\left[f'(t)\right]-f'(0)=s\left[s\,F(s)-f(0^-)\right]-f'(0^-)$$

$$L\left[f''(t)\right]=s^2\,F(s)-s\,f(0^-)-f'(0^-)$$

Generalizando:

$$L\left[f^{(n)}(t)\right]=s^n\,F(s)-s^{n-1} f(0^-)-s^{n-2} f'(0^-)....-s\,f^{(n-2)}(0^-)-f^{(n-1)}(0^-).$$

4.7. Transformada da Integral

Se $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ e $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$, então: $\mathcal{L}\left[\phi(t)\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\phi(0)}{s}$.

Aplicando a definição de transformada:

$$\mathcal{L}\left[\phi(t)\right] = \phi(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \phi(t)\, dt.$$

Integrando por partes:

$$\phi(s) = -\left[\frac{e^{-st}}{s} \phi(t)\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{\phi(0^-)}{s}.$$

Exemplo

Tensão em um capacitor: $V(t) = \frac{\overline{L}}{c} \int_{-\infty}^{t} i(t)\, dt$

$$V(s) = \frac{\overline{L}}{c} \left(\frac{I(s)}{s} + \frac{i(0^-)}{s} \right)$$

5. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

5.1. INTRODUÇÃO

O processo matemático de passar de uma expressão com variável complexa para a expressão no tempo é chamada de transformada inversa de Laplace. A notação para a transformada inversa de Laplace é $\mathcal{L}^{-1}$, de modo que:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t).$$

Ao resolver problemas usando o método da transformada de Laplace nos confrontamos com a pergunta de como determinar $f(t)$ a partir de $F(s)$. Matematicamente, $f(t)$ é determinado de $F(s)$ pela expressão:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iw}^{c+iw} F(s)\, e^{st} ds$$

onde c é uma constante real escolhida maior que as partes reais de todos os pontos singulares de $F(s)$. Tal integral é efetuada no plano complexo sobre uma reta paralela ao eixo imaginário, tendo entre outras restrições que $F(s)$ deve ser analítica no semi-plano a direita de c. Seu cálculo pode ser feito pela método dos resíduos, que estudaremos posteriormente. No entanto, existem métodos mais simples de se obter $f(t)$ a partir $F(s)$ ao invés de se utilizar a integral acima.

Um método conveniente de se obter transformadas inversas é usar uma tabela de transformadas de Laplace. Neste caso, a transformada deve estar em uma forma imediatamente reconhecível em tal tabela. Freqüentemente a função em questão pode não aparecer em tabelas de transformadas disponíveis. Se uma particular transformada $F(s)$ não é encontrada na tabela, então podemos:

1 – Obter $F(s)$ como combinação linear de transformadas tabeladas;
2 - Se $F(s)$ é uma função racional podemos decompô-la em frações parciais;
3 - Se $F(s)$ é uma função racional podemos também utilizar a fórmula de Heaviside.

Freqüentemente encontramos $F(s)$ como uma função racional nas aplicações de transformada de Laplace.

É interessante aqui introduzir o conceito de polo e zero de $F(s)$.

Dizemos que o número p é o polo de $F(s)$ se $F(s)$ é infinita em s = p, portanto $F(s)$ não é definida em s = p.

Dizemos que o número z é zero de $F(s)$ se $F(s)$ se anula para s = z, isto é, $F(s)$= 0.

Por exemplo, a função $F(s)$ dada por: $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s+2}$

- possui um zero dado por: $s+1=0$, portanto z = -1
- dois pólos dados por: $s^2+s+2=0$, ou seja $p_1=-1+2i$ e $p_2=-1-2i$.

5.2. DETERMINAÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA COMO COMBINAÇÃO LINEAR DE TRANSFORMADAS TABELADAS

Se pudermos obter $F(s)$ como combinação linear de transformadas tabeladas utilizando manipulações algébricas e teoremas básicos de transformada de Laplace poderemos determinar $f(t)$.

Podemos ressaltar os seguintes teoremas:

1) $\mathcal{L}^{-1}\left[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\right]=c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)$;

2) $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right]=e^{at} f(t)$, sendo $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$;

3) $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right]=\begin{cases} f(t-a), & \text{para } t>a \\ 0, & \text{para } t<a \end{cases}$;

4) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-p)^n}\right]=\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{pt}$;

5) $\mathcal{L}^{-1}\left[F(ks)\right]=\dfrac{1}{k}f\left(\dfrac{t}{k}\right)$.

Exemplos

1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+1)^3}\right]=\dfrac{t^2\ e^{-t}}{2}$ $\qquad$ $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2-2s+5)}\right]=\dfrac{e^t\ \text{sen}\,2t}{2}$

5.3. DECOMPOSIÇÃO DE *F*(*s*) EM FRAÇÕES PARCIAIS

Consideremos aqui as transformadas inversas de Laplace definidas por funções racionais, ou seja:

$$F(s) = P(s)/Q(s)$$

onde:

1) $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios de s, sendo que o grau de $P(s)$ menor que o grau de $Q(s)$, com coeficientes reais;

2) $P(s)$ e $Q(s)$ não possuem zeros comuns (em caso contrário, os fatores comuns devem ser simplificados);

3) O coeficiente do termo de grau elevado de $Q(s)$ seja igual a 1.

Para aplicar a técnica de expansão em frações parciais é necessário conhecer as raízes de $Q(s)$, ou seja, os pólos de $F(s)$. A vantagem deste método é que os termos individuais de $F(s)$, resultando da expansão na forma de frações parciais, são funções simples de s, e portanto não necessitamos consultar tabelas de transformadas de Laplace se memorizarmos vários pares de transformadas de Laplace simples.

1. *F*(*s*) possui pólos simples

Se $s_1, s_2, ..., s_n$ são pólos simples de funções de $F(s)$, então:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{s - s_2} + ... + \frac{a_n}{s - s_n}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - s_1}\right] + a_2 \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - s_2}\right] + ... + a_n \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - s_n}\right]$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - a}\right] = e^{at}$, então:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + ... a_n e^{s_n t}$$

Onde os coeficientes podem ser obtidos por:

$$a_k = \left\{ \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] . (s - s_k) \right\}_{s=s_k} \quad , k = 1,2,...,n$$

Exemplo

Se $F(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ Então: f(t) = 2 $e^{-t} - e^{-2t}$

2. *F*(*s*) possui pólos múltiplos

Se $s_1, s_2, ..., s_n$ são pólos de $F(s)$ com multiplicidade p, r, ... respectivamente, então:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{(s - s_1)^2} + ... + \frac{a_p}{(s - s_1)^p} +$$
$$+ \frac{b_1}{s - s_2} + \frac{b_2}{(s - s_2)^2} + ... + \frac{b_r}{(s - s_2)^r} + ...(*)$$

Aplicando a transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - s_1}\right] + a_2 \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - s_1)^2}\right] + ... + a_p \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - s_1)^p}\right] +$$

$$+ b_1 \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - s_2}\right] + b_2 \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - s_2)^2}\right] + ... + b_r \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - s_2)^r}\right] + ...$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)}\right] = e^{at}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^n}\right] = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{s_1 t} + a_2 \, t \, e^{s_1 t} + ... + a_p e^{s_1 t} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} +$$

$$+b_1 e^{s_2 t} + b_2\, t\, e^{s_2 t} + \ldots + b_r e^{s_2 t} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \ldots$$

Os coeficientes podem ser determinados encontrando o denominador comum de (*) e identificando os coeficientes.

Exemplo

Se $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$ Então f(t) = e^{-t} (1 + t^2)

5.4. FÓRMULA DE INVERSÃO DE HEAVISIDE

Seja $F(s)$ uma função racional dada por:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde todas as condições necessárias para $P(s)$ e $Q(s)$ na decomposição de frações parciais apresentadas no item 3 devem ser satisfeitas.

A natureza da transformada inversa de $F(s)$ depende da natureza das raízes de $Q(s)$ e duas possibilidades podem ser verificadas:

1) $Q(s)$ tem somente zeros simples
2) $Q(s)$ tem zeros múltiplos.

4.1. *Q*(*s*) tem zeros simples

Sejam $s_1, s_2, ..., s_n$ as raízes simples de $Q(s)$. Então:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \sum_{r=1}^{n} \frac{P(s_r)}{Q'(s_r)} e^{s_r t}$$

onde $Q'(s)$ indica a derivada primeira do polinômio $Q(s)$, tomada no ponto $s = s_r$.

De fato, a função racional que se deseja anti-transformar pode ser decomposta em frações parciais:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\sum_{r=1}^{n}\frac{A_r}{s-s_r} \qquad (1)$$

Para determinar A_r, basta reduzir todas as frações do desenvolvimento acima ao denominador comum e identificar os numeradores:

$$P(s)=\sum_{r=1}^{n}A_r\,(s-s_1)\ldots(s-s_{r-1})(s-s_{r+1})\ldots(s-s_n)$$

Fazendo agora $s=s_r$,

$$P(s_r)=A_r\left(s_r-s_1\right)\ldots\left(s_r-s_{r-1}\right)\left(s_r-s_{r+1}\right)\ldots\left(s_r-s_n\right)$$

Portanto,

$$A_r=\frac{P(s_r)}{\left(s_r-s_1\right)\ldots\left(s_r-s_{r-1}\right)\left(s_r-s_{r+1}\right)\ldots\left(s_r-s_n\right)}$$

Notemos agora que o denominador desta fração é justamente igual a derivada de $Q(s)$, tomada em $s=s_r$, isto é,

$$Q'(s_r)=\left(s_r-s_1\right)\ldots\left(s_r-s_{r-1}\right)\left(s_r-s_{r+1}\right)\ldots\left(s_r-s_n\right)$$

e, portanto

$$A_r=\frac{P(s_r)}{Q'(s_r)}$$

Substituindo este valor em (1),

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\sum_{r=1}^{n}\frac{P(s_r)}{Q'(s_r)}\frac{1}{s-s_r}$$

Como a anti-transformada de $\dfrac{1}{\left(s-s_r\right)}$ é $e^{s_r t}$, calculando a transformada inversa de cada termo a expressão anterior, obtemos

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\sum_{r=1}^{n}\frac{P(s_r)}{Q'(s_r)}e^{s_r t}$$

demonstrando assim a fórmula de inversão.

Exemplo

1) Determinar a antitransformada de: $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$

R: $f(t) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{1}{6}e^{-3t}$

2) Determinar a antitransformada de: $F(s) = \dfrac{10(s+3)}{(s+1)^2+4}$

R: $f(t) = 10\,e^{-t}(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$

4.2. $Q(s)$ tem zeros múltiplos

Se $Q(s)$ possui pólos múltiplos, o processo é similar ao item 3.2, ou seja devemos decompor $F(s)$ em uma soma de frações parciais do tipo $\dfrac{A_r}{(s-s_r)^r}$ e lembrando que $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-s_r)^r}\right) = \dfrac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{s_r t}$.

Exemplo

A antitransformada de: $F(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)^2}$

é $f(t) = 2 - 2\,e^{-t} - t\,e^{-t}$ para $t > 0$.

6. TEOREMAS DO VALOR INICIAL E FINAL

O processo da transformada inversa de Laplace muitas vezes é muito trabalhoso. Por outro lado, pode ser necessário apenas calcular o valor de $f(t)$ na vizinhança da origem ou no infinito. Nestes casos, os teoremas do valor inicial e valor final dados a seguir são úteis para determinar estes valores.

6.1. Teorema do Valor Inicial

Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$ e se existe $\lim_{s\to\infty} sF(s)$ então:

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)] = \lim_{t\to 0} f(t) = f(0\_).$$

Este teorema estabelece que o comportamento de $f(t)$ na vizinhança de t = 0 está relacionado com o comportamento de $sF(s)$ na vizinhança de $s = \infty$.

Exemplo: *A função* $f(t) = 3e^{-2t}$ *satisfaz teorema.*

6.2. Teorema do Valor Final

Se:
1) $F(s) =$ $\mathcal{L}^{-1}[f(t)]$
2) $sF(s)$ é analítica sobre o eixo imaginário e na metade direita do plano s (parte real de s>0). Então:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

O teorema do valor final é uma relação muito útil, uma vez que ele dá o valor final de uma função no tempo através do comportamento da sua transformada de Laplace quando s tende para zero (ver demonstração do livro Circuitos Elétricos do Orsini). Porém, o teorema do valor final não é válido se $sF(s)$ contiver qualquer pólo cuja parte real é zero ou positiva, o que eqilave a condição (2) do teorema.

Exemplos

1) Para a função: $F(s) = \dfrac{5}{s(s^2+s+2)}$,

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \dfrac{5}{2}$

2) Para a função: $F(s) = w/(s^2 + w^2)$,

o teorema não se aplica, pois s F(s) não é analítica em todo o eixo imaginário, visto que possui 2 pólos (s = $\pm wi$).

7. TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

É utilizado para encontrar a transformada inversa quando a transformada $F(s)$ é um produto das transformadas de funções conhecidas. Por exemplo se:

$$F(s) = \frac{2}{s^3}\left[\frac{a}{(s^2+a^2)}\right]$$

então podemos reconhecer:

$$L[t^2] = \frac{2}{s^3}$$

$$L[\operatorname{sen} at] = \frac{a}{(s^2+a^2)}$$

Assim temos que se $H(s)$ é a transformada de Laplace de $h(t)$ e $G(s)$ é transformada de Laplace de $g(t)$, então $H(s)G(s)$ é a transformada de Laplace de:

$$\int_0^t h(u)\, g(t-u)\, du = \int_0^t h(t-u)\, g(u)\, du$$

Qualquer uma destas integrais é chamada de convolução e é representada por $h * g$. Ou seja, a operação $h * g$ é chamada de convolução.

Aplicando ao exemplo anterior, temos:

$$h(t) = t^2$$

$$g(t) = \operatorname{sen} at$$

$$f(t) = \int_0^t u^2 \operatorname{sen} a(t-u)\, du$$

integrando por partes duas vezes obtemos: $f(t) = \frac{t^2}{a} - 2\left(\frac{1-\cos at}{a^3}\right)$.

Exercício: *Encontre a função cuja transformada de Laplace é:* $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+4)^2}$.

R: f(t) = 0,5 (t cos 2t + 0,5 sen 2t)

8. APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE À EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

8.1. Introdução

Nos tópicos anteriores apresentamos alguns conceitos e técnicas do método de Laplace. Esta seção apresenta a utilização da transformada de Laplace na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias lineares, aqui denominado de Método de Laplace.

Métodos clássicos para achar a solução completa de uma equação diferencial requerem a determinação das constantes de integração pelo uso das condições iniciais. No caso do método de Laplace, a determinação das constantes de integração a partir de condições iniciais não é necessária uma vez que as condições iniciais são incluídas na transformada de Laplace da equação diferencial. Se todas as condições iniciais são nulas então a transformada de Laplace da equação diferencial é obtida simplesmente substituindo $\frac{d}{dt}$ por *s*, $\frac{d^2}{dt^2}$ por s^2, etc.

Basicamente ao resolver equações diferenciais lineares pelo método da de Laplace, procedemos de acordo com as duas etapas descritas a seguir:

1) Tomando a transformada de Laplace de cada termo na equação diferencial linear dada, converte-se a equação diferencial em uma equação algébrica em *s* e se obtém a expressão para a transformada de Laplace da variável dependente através de um rearranjo da equação algébrica.
2) A solução temporal da equação deferencial é obtida achando-se a transformada inversa de Laplace da variável dependente.

8.2.Exemplo

Seja a equação diferencial:

$$m\ddot{x} + k\,x = f(t) \qquad (1)$$

onde $f(t)$ representa a função excitação ou entrada do sistema.

Tomando a transformada de Laplace de cada termo da equação (1), obtemos:

$$\mathrm{L}\left[m\ddot{x}\right] = m\left[s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)\right]$$

$$\mathrm{L}\left[k\,x\right] = kX(s)$$

$$\mathrm{L}\left[f(t)\right] = F(s)$$

Substituindo em (1), temos:

$$(m s^2 + k)\, X(s) - m s\, x(0) - m \dot{x}(0) = F(s)$$

de onde:

$$X(s) = \frac{F(s)}{m s^2 + k} + \frac{m s\, x(0) + m \dot{x}(0)}{m s^2 + k} \tag{2}$$

O primeiro termo de (2) representa a solução de equação diferencial quando as condições iniciais são nulas. O segundo termo do lado direito desta equação representa o efeito das condições iniciais.

A solução no tempo da equação diferencial é obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace de $X(s)$, ou seja:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{m s^2 + k}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{m s\, x(0) + m \dot{x}(0)}{m s^2 + k}\right] \tag{3}$$

Se $f(t)$ é uma função degrau unitário, então $F(s) = 1/s$ e:

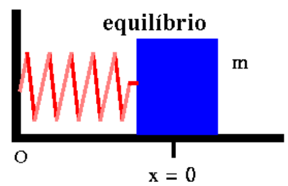
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(m s^2 + k)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{m s\, x(0) + m \dot{x}(0)}{m s^2 + k}\right]$$

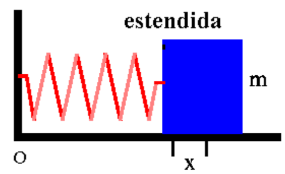
$$\mathrm{x(t)} = \left(\frac{1}{\mathrm{k}} - \frac{1}{\mathrm{k}}\cos\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}\,\mathrm{t}\right) + \left[\mathrm{x(0)}\cos\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}\,\mathrm{t} + \dot{\mathrm{x}}(0)\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}\,\mathrm{t}\right]$$

8.3. Aplicações

1. Aplicações à mecânica

Suponha que uma massa m ligada a uma mola flexível, fixa em O, está livre para se mover num plano sem atrito.





A equação diferencial associada ao deslocamento de m é dada por:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + k\,x = 0 \tag{4}$$

Se existir uma força de amortecimento proporcional à velocidade instantânea de m, a equação será:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \beta\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + k\,x + \beta\dot{x} = 0 \tag{5}$$

Se uma força externa $f(t)$ está atuando sobre m então:

$$m\ddot{x} + k\,x + \beta\dot{x} = f(t) \tag{6}$$

A transformada de Laplace é útil para resolver sistemas deste tipo.

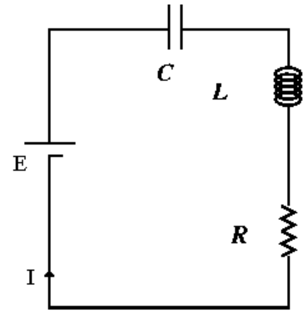
2. Aplicações a circuitos elétricos

Um circuito elétrico é composto por vários elementos tais como geradores, baterias, resistores, indutores, capacitores. Para o circuito simples dado na figura abaixo, podemos associar a seguinte equação:

$$\mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2} + \mathrm{R}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\mathrm{C}} = \mathrm{E} \tag{7}$$

onde: q – carga

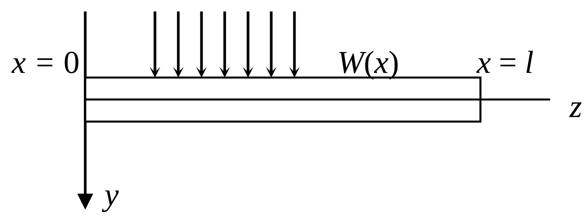
L – indutância no indutor
E – força eletromotriz
R – resistência do resistor
C – capacitância na capacitor



Aplicando o método de Laplace a equ se observar uma analogia entre a equação do sistema ao circuito elétrico (7).

3. Aplicações à vigas

Considere a viga esquematizada na figura a seguir, cujas extremidades estão em $x = 0$ e $x = l$. Suponha também que uma carga vertical dada por $W(x)$ por unidade de comprimento age transversamente à viga. Então o eixo da viga tem uma deflexão $y(x)$ no ponto x que satisfaz a equação diferencial:



$$\text{para } 0 < x < l, \; \frac{d^4 y}{d x^4} = \frac{W(x)}{E I} \qquad (8)$$

onde *E* é o módulo de elasticidade da viga e *I* é o momento de inércia da seção transversal.
As condições iniciais e de contorno dependem da maneira pela qual a viga está apoiada, tais como:

1) Engastada, embutida ou de extremidade fixa: $y(0) = \dot{y}(0) = 0$
2) Rotulada ou de extremidade simplesmente apoiada: $y(0) = \ddot{y}(0) = 0$
3) De extremidade livre: $\ddot{y}(0) = \dddot{y}(0) = 0$

4. Sistemas de equações diferenciais

A transformada de Laplace pode ser usada para resolver duas ou mais equações diferenciais simultâneas. O processo é essencialmente o mesmo descrito para uma única equação, sendo que um sistema de equações algébricas na variável s é obtido.

Exemplo

Seja o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + y \end{aligned} \qquad (9)$$

sujeito a: $x(0) = 8$ e $y(0) = 3$.

Tomando a transformada de Laplace, temos:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= 2X(s) - 3Y(s) \\ sY(s) - y(0) &= -2X(s) + Y(s) \end{aligned}$$

rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} (s-2)X(s) + 3Y(s) &= x(0) = 8 \\ 2X(s) + (s-1)Y(s) &= y(0) = 3 \end{aligned}$$

A solução deste sistema é:

$$X(s) = \frac{(8s-17)}{(s^2 - 3s - 4)}$$

$$Y(s) = \frac{(3s-22)}{(s^2 - 3s - 4)}$$

Assim:

$$x(t) = \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{(8s-17)}{(s^2 - 3s - 4)}\right]$$

$$Y(s) = \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{(3s-22)}{(s^2 - 3s - 4)}\right]$$

Aplicando frações parciais temos que a solução do sistema (9) é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ y(t) &= 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{aligned}$$

Exercícios

1) Um indutor de 2 henrys, um resistor de 16 Ohms e um capacitor de 0,02 Farads são ligados em série em uma FEM de volts. Em $t=0$, a carga no capacitor e a corrente no circuito são zero. Encontre a carga e a corrente em um instante $t>0$, se:

a) E = 300 V
b) E = 100 sen 3*t* V

2) Resolva a seguinte equação:

$$\ddot{y}-3\dot{y}+2y=4e^{2t}$$

sujeito a $y(0)=-3$ e $\dot{y}(0)=5$.

SÉRIE DE EXERCÍCIOS DE CDI-II - TRANSFORMADA DE LAPLACE
Profa. Cecília

1) Calcular as transformadas de Laplace :

a) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} sen\, t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

c) $f(t) = te^{4t}$ d) $f(t) = e^{-t} sen\, t$ e) $f(t) = t\cos t$

2) Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$: a) $f(t) = t^2 + 6t - 3$ b) $f(t) = (t+1)^3$

3) Encontre $F(s)$ ou $f(t)$ como indicado:

a) $\mathcal{L}\{te^{10r}\}$ b) $\mathcal{L}\{t^3 e^{-2t}\}$ c) $\mathcal{L}\{e^t sen\, 3t\}$ d) $\mathcal{L}\{e^{5t} senh\, 3t\}$ e) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$

f) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^3}\}$ g) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+4s+5)}\}$ h) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\}$ i) $\mathcal{L}\{\cos 2t\, \mathcal{U}(t-\pi)\}$

j) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\}$ l) $\mathcal{L}\{t\cos 2t\}$ m) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$

4) Suponha que uma função $y(t)$ tenha a propriedade $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. Encontre a transformada de Laplace da expressão $y'' + 3y'$.

5) Encontre a transformada de Laplace da função dada sem resolver a integral.

a) $\mathcal{L}\{\int_0^t e^{\tau} d\tau\}$ b) $\mathcal{L}\{\int_0^t e^{-\tau} \cos\tau\, d\tau\}$ c) $\mathcal{L}\{\int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau\}$

6) Encontre $f(t)$: a) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)}\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\}$ c) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\}$

7) Use a transformada de Laplace para resolver a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas. Quando apropriado, escreva f em termos de funções degrau unitária.

a) $\frac{dy}{dt} - y = 1, \quad y(0) = 0$ b) $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$

c) $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ d) $y'' + y = sen\, t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

e) $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

f) $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0$

Respostas

1) a) $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s}$ b) $\frac{1+e^{-sx}}{s^2+1}$ c) $\frac{1}{(s-4)^2}$ d) $\frac{1}{s^2+2s+2}$ e) $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

2) a) $\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}$ b) $\frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}$

3) a) $\frac{1}{(s-10)^2}$ b) $\frac{6}{(s+2)^4}$ c) $\frac{3}{(s-10)^2+9}$ d) $\frac{3}{(s-5)^2-9}$ e) $\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{2}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-4)^2}$

f) $\frac{1}{2}t^2 e^{-2t}$ g) $e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t} sen\ t$ h) $5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2 e^{-t}$

i) $\frac{s}{s^2+4}e^{-\pi s}$ j) $\frac{1}{2}(t-2)^2\,\mathcal{U}(t-2)$ l) $\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$ m) $\frac{1}{2}t \text{ sen } t$

4) $(s^2+3s)F(s) - s - 2$ 5) a) $\frac{1}{s(s-1)}$ b) $\frac{s+1}{s[(s+1)^2+1]}$ c) $\frac{1}{s^2(s-1)}$

6) a) $1 - e^{-t}$ b) $-\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$ c) $\frac{1}{4}t\, sen\, t$

7) a) $y = -1 + e^t$ b) $y = te^{-4t} + 2e^{-4t}$ c) $y = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$

d) $y = \cos t - \frac{1}{2} sen\, t - \frac{1}{2}t\cos t$ e) $y = -\frac{8}{9}e^{-t/2} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{18}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$ f) $y = \cos t$