



# Mecânica do Voo

## Estabilidade e Controle 2.1







## I. INTRODUÇÃO À ESTABILIDADE E CONTROLE

## II. ESTABILIDADE ESTÁTICA E CONTROLE

### 1ª PARTE

#### INTRODUÇÃO

FORÇAS LONGITUDINAIS

#### SÍNTESE DA SUSTENTAÇÃO E MOMENTO DE ARFAGEM

SUSTENTAÇÃO E MOMENTO DE ARFAGEM: ASA

SUSTENTAÇÃO E MOMENTO DE ARFAGEM: FUSELAGEM E NACELES

SUSTENTAÇÃO E MOMENTO DE ARFAGEM: EMPENAGEM

#### MOMENTO DE ARFAGEM TOTAL E PONTO NEUTRO

EFEITO DO MOMENTO E SUSTENTAÇÃO LINEAR NO PONTO NEUTRO

### Referências:

1. Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, [Dynamics of Flight – Stability and Control](#), John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
2. Mario Asselin, [An Introduction to Aircraft Performance](#), AIAA Education Series, 1997.
3. John D. Anderson Jr, [The Airplane: A History of its Technology](#), AIAA, Reston, 2002.

### Capa:

YF-12s in formation flight at dusk. The aircraft in the foreground carries the insulated cylinder used in the Cold Wall Experiment on a pylon mounted beneath the fuselage. (NASA Photo ECN 4767)  
<http://www.nasa.gov/centers/dryden/about/Organizations/Technology/Facts/TF-2004-17-DFRC.html> (Acesso em 01 MAI 2011).

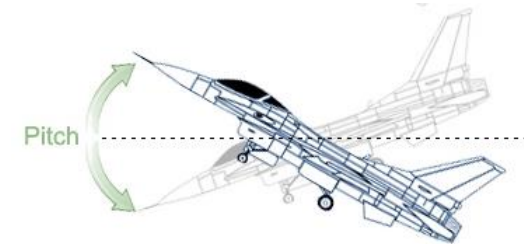
## 1. INTRODUÇÃO

Uma análise mais ampla sobre estabilidade e controle de aeronaves requer o estudo da dinâmica do voo. Entretanto, muitas das informações úteis são obtidas de um modo mais limitado, onde o movimento da aeronave não é considerado, mas somente seu estado de equilíbrio. Essa aproximação é conhecida por *análise de estabilidade estática e controle*.

O movimento não estacionário de aviões pode ser separado em duas partes:

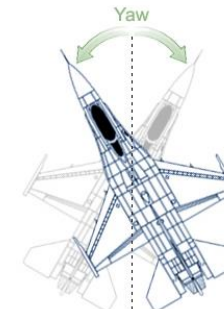
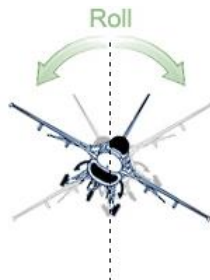
### 1. Movimento Longitudinal:

- Movimento simétrico.
- Asas niveladas.
- Movimento do CG no plano vertical.



### 2. Movimento Látero-Direcional:

- Movimento assimétrico.
- Rolamento, guinada e glissagem/derrapagem, mantendo ângulo de ataque, velocidade e ângulo de arfagem constantes.





A separação em movimento longitudinal e látero-direcional é válida tanto para análises *estáticas* como para análises *dinâmicas*. Os resultados mais importantes para *estabilidade estática* são aqueles associados com a análise *longitudinal*.

O principal assunto deste capítulo e do capítulo seguinte é sobre estabilidade e controle estático longitudinal.

Estudaremos dois aspectos do *estado de equilíbrio*:



## Estabilidade

- Momento de arfagem que atua na aeronave quando o ângulo de ataque sofre uma variação, a partir de seu valor de equilíbrio, devido, por exemplo, à ação de uma rajada.

## Controle

- Uso de controle longitudinal (profundor) para variação do valor de equilíbrio do ângulo de ataque.



Momento de arfagem



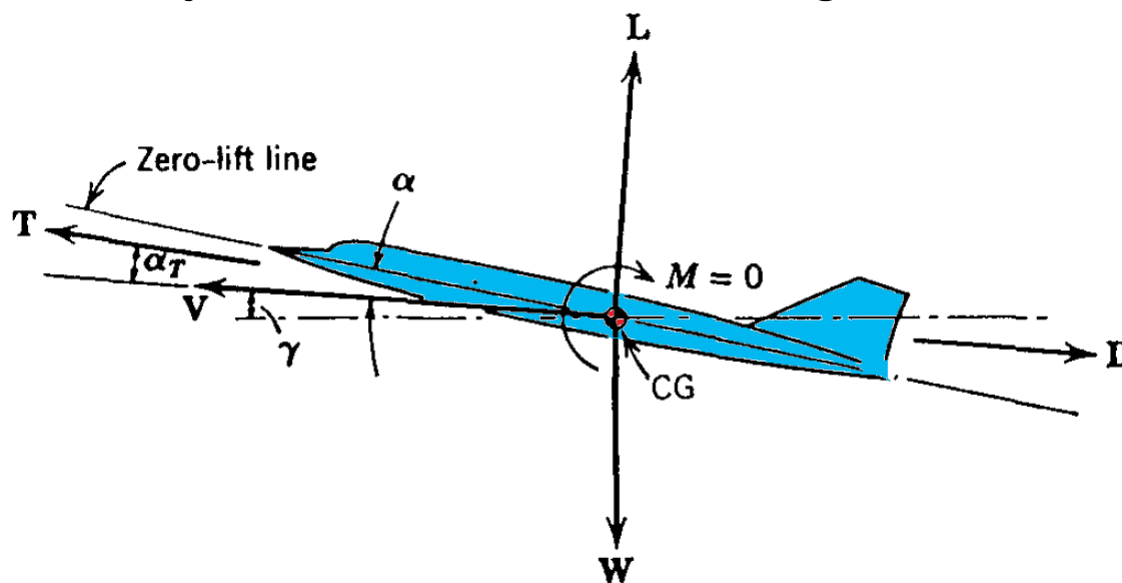
Pitching moment





## FORÇAS LONGITUDINAIS

A condição de voo básica para a maioria das aeronaves é o voo simétrico estacionário. Nessa condição, a velocidade e as forças são mostrados como na figura abaixo.

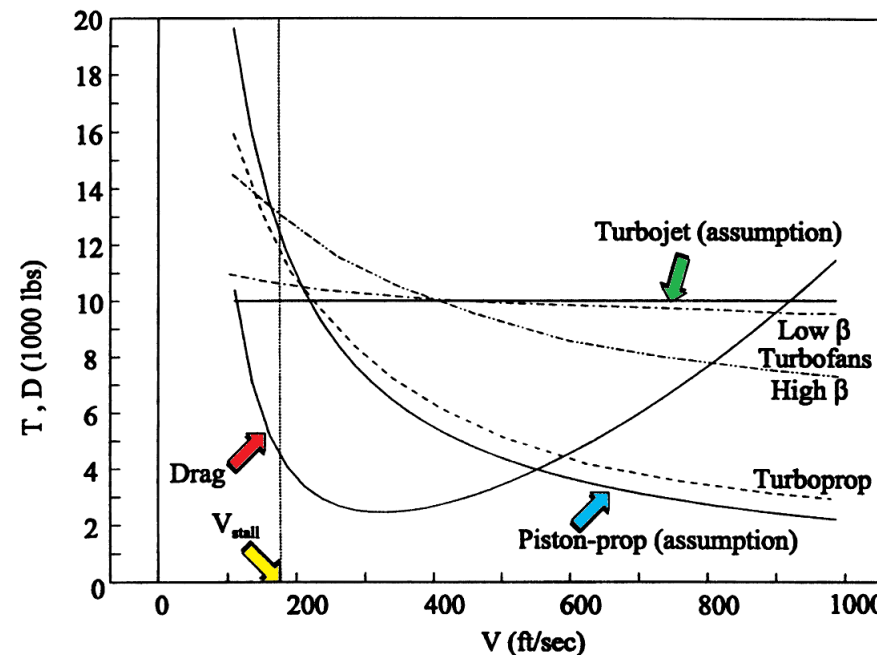


### Steady symmetric flight.

Principais parâmetros aerodinâmicos: Velocidade  $V$  e ângulo de ataque  $\alpha$ .

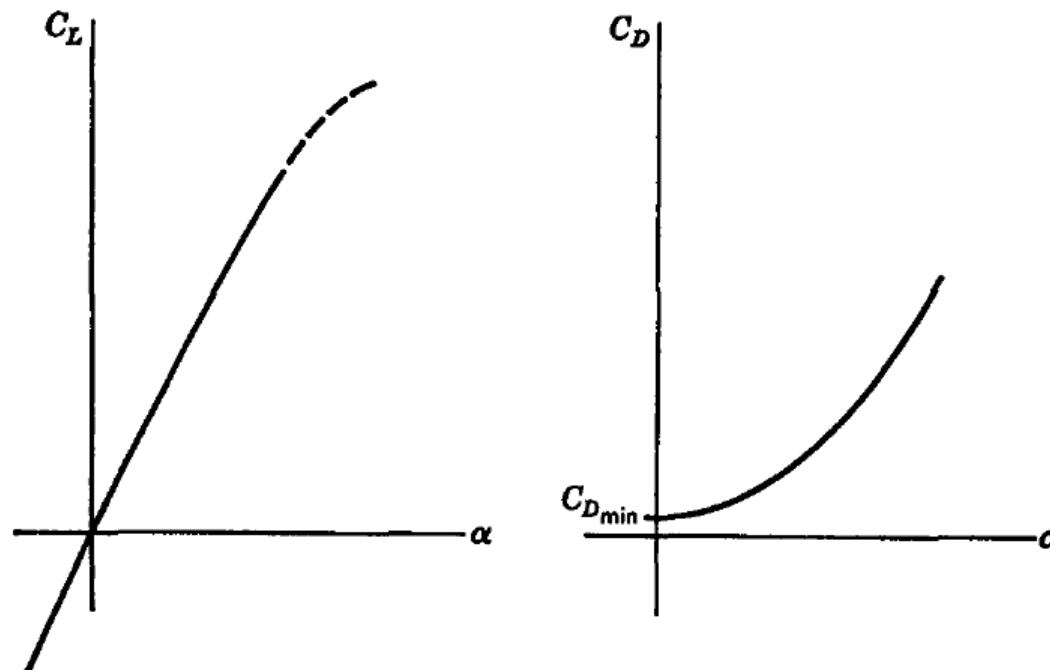
A dependência do vetor tração com relação à velocidade e ao ângulo de ataque depende do tipo de sistema propulsivo. Faremos duas hipóteses básicas:

1.  $T$  é independente de  $V \Rightarrow$  Tração constante.  
→ Foguetes e turbojatos.
2.  $TV$  é independente de  $V \Rightarrow$  Potência constante.  
→ Motor a pistão com hélices a velocidade constante.



Thrust as a function of airspeed for different propulsion systems.

A variação da sustentação e arrasto com o ângulo de ataque para os regimes subsônicos e supersônicos são mostrados na figura abaixo.



Lift and drag for subsonic and supersonic speeds.

$$C_L = C_{L\alpha} \alpha$$

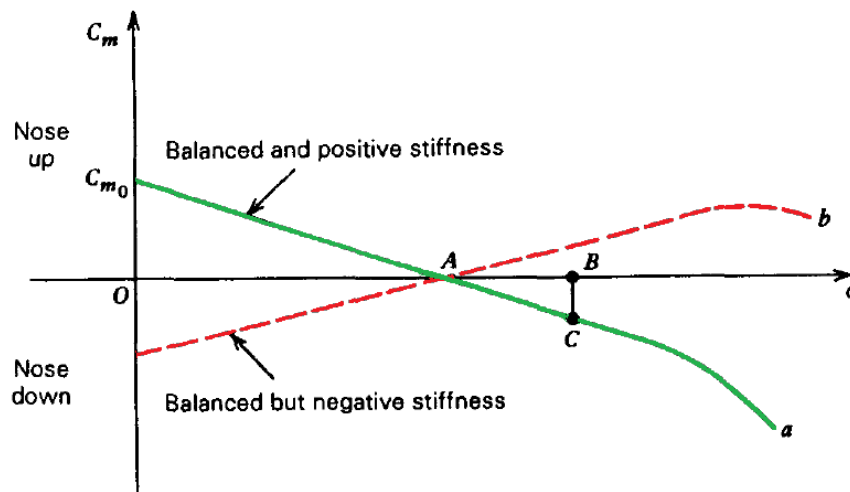
$$C_D = C_{Dmin} + KC_L^2$$



## Balanço ou Equilíbrio

Uma aeronave pode permanecer em voo estacionário não acelerado somente quando a resultante das *forças* e *momentos* externos em torno do CG sejam nulos.

- ✓ Em particular, isso requer que o *momento de arfagem* seja nulo.
- ✓ Essa é a condição do *balanço longitudinal*.
- ✓ Se o *momento de arfagem* não for nulo, a aeronave sofrerá uma rotação na direção do momento desbalanceado.



Pitching moment of an airplane about the CG.

A figura ao lado mostra um típico gráfico de coeficiente de momento de arfagem em torno do CG versus ângulo de ataque para um avião com profundor fixo (curva a). O gráfico é uma reta até próximo ao estol. Como é necessário ter  $C_m$  zero para haver o equilíbrio longitudinal, o avião só pode voar no ângulo de ataque A, para a dada deflexão de profundor.

## Rigidez em Arfagem

Suponha que a aeronave da curva a (verde) seja retirada de sua condição de equilíbrio, e seu ângulo de ataque seja aumentado de A até B, mantendo constante sua velocidade.

- ✓ A aeronave estará sujeita a um *momento negativo* ou *picador*, cuja magnitude corresponde a BC.
- ✓ Este momento tende a reduzir o ângulo de ataque, levando-o de volta à sua posição de equilíbrio => *Momento restaurador*.
- ✓ Aeronave tem *rigidez em arfagem positiva* => Uma característica desejável.



Pitching moment of an airplane about the CG.

## Rigidez em Arfagem

Suponha agora que  $C_m$  seja o dado pela curva b (vermelha).

- ✓ Quando a aeronave for retirada de sua condição de equilíbrio, o *momento de arfagem* será *positivo* ou *cabrador*.
- ✓ Este momento tende a aumentar o ângulo de ataque, afastando-a ainda mais de sua atitude de equilíbrio.



Pitching moment of an airplane about the CG.

## Rigidez em Arfagem

Portanto, vemos que a *rigidez em arfagem* é determinada pelo sinal e magnitude da derivada  $\partial C_m / \partial \alpha$ .

- ✓ Se a *rigidez em arfagem* for positiva na posição de equilíbrio  $\alpha$ , então:
  - $C_m$  deve ser zero, e
  - $\partial C_m / \partial \alpha$  deve ser negativa.
  - Formulação alternativa:  $C_{m0}$  deve ser positivo e  $\partial C_m / \partial \alpha$  deve ser negativa para que a aeronave cumpra a condição de equilíbrio estável.

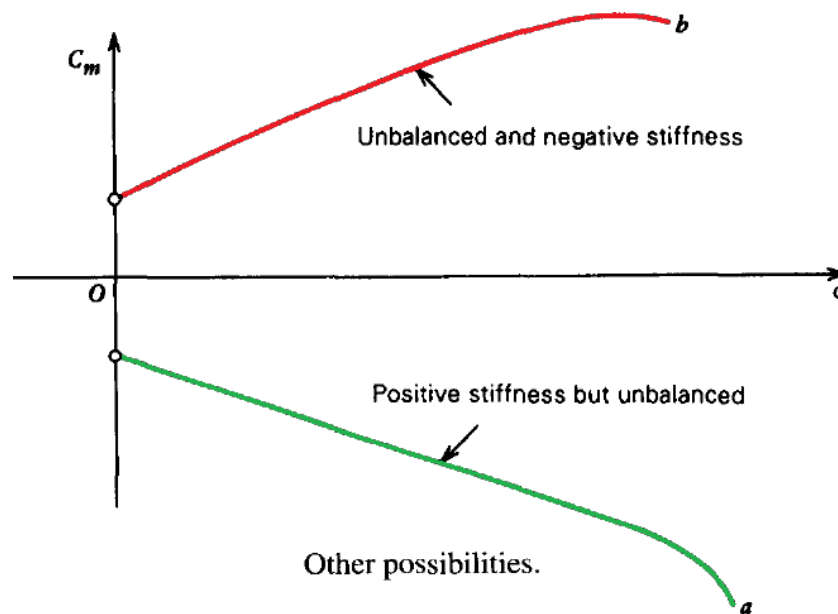


Pitching moment of an airplane about the CG.

## Rigidez em Arfagem

Portanto, vemos que a *rigidez em arfagem* é determinada pelo sinal e magnitude da derivada  $\partial C_m / \partial \alpha$ .

- ✓ Se a *rigidez em arfagem* for positiva na posição de equilíbrio  $\alpha$ , então:
  - $C_m$  deve ser zero, e
  - $\partial C_m / \partial \alpha$  deve ser negativa.
  - Formulação alternativa:  $C_{m0}$  deve ser positivo e  $\partial C_m / \partial \alpha$  deve ser negativa para que a aeronave cumpra a condição de equilíbrio estável.





## Configurações Possíveis

Possíveis soluções para uma configuração apropriada podem ser obtidas a partir dos requisitos para  $C_{m0}$  e  $\partial C_m / \partial \alpha$ . Mais adiante veremos que  $\partial C_m / \partial \alpha$  pode se tornar negativo para uma dada combinação de *superfícies aerodinâmicas* e *fuselagem* através do posicionamento do CG numa posição suficientemente dianteira.

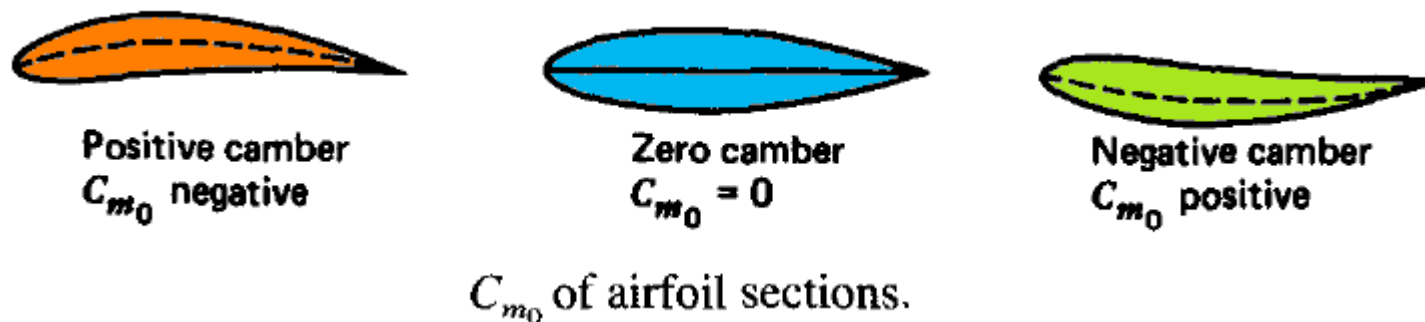
Não é o requisito de *rigidez em arfagem* sozinho que restringe as configurações possíveis, mas sim o requisito de que a aeronave deva ser simultaneamente *balanceada* e ter *rigidez em arfagem* positiva.

Assim, como uma escolha adequada do posicionamento do CG pode assegurar um  $\partial C_m / \partial \alpha$  negativo, então qualquer configuração com um  $C_{m0}$  positivo pode satisfazer a condição de voo balanceado e estável.



## Configurações Possíveis

A figura abaixo mostra o  $C_{m_0}$  para aerofólios convencionais.



Caso a configuração da aeronave seja formada apenas por uma asa, então o arqueamento determinará a característica da aeronave, conforme a seguir:

Negative camber—flight possible at  $\alpha > 0$ ; i.e.,  $C_L > 0$

Zero camber—flight possible only at  $\alpha = 0$ , or  $C_L = 0$ .

Positive camber—flight not possible at any positive  $\alpha$  or  $C_L$ .



## Configurações Possíveis

→ Para aeronaves sem empenagem e com asa não enflechada (*straight-winged tailless airplanes*), somente arqueamento negativo satisfaz as condições para voo estável e balanceado.

→ O mesmo resultado pode ser obtido com um aerofólio simétrico, com flap de bordo de fuga defletido para cima.

→ Um avião convencional, de baixa velocidade, com asa não enflechada, e arqueamento positivo, poderia voar sem a empenagem caso o CG estivesse muito dianteiro (a frente do centro aerodinâmico da asa).

→ Asas voadoras com arquitetura constituída por uma asa não enflechada e com arqueamento negativo não têm tido seu uso popularizado pelas seguintes razões:

1. The dynamic characteristics tend to be unsatisfactory.
2. The permissible CG range is too small.
3. The drag and  $C_{L_{\max}}$  characteristics are not good.



## Configurações Possíveis

→ Uma asa não enflechada com arqueamento positivo pode ser utilizada apenas em conjunto com um dispositivo auxiliar que forneça um  $C_{m_0}$  positivo.

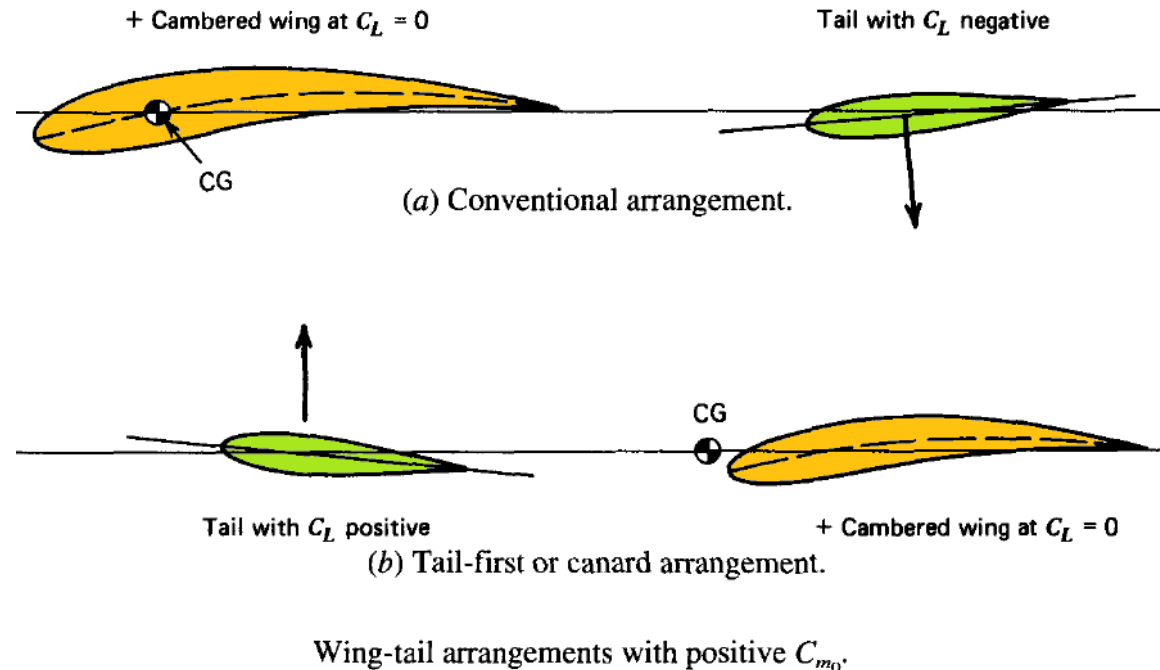
☆ Inspirados pelo trabalho de George Cayley, William Samuel Henson e John Stringfellow, na primeira metade do século XIX, propuseram a solução mais utilizada nos modernos aviões => Configuração de uma empenagem atrás da asa.



☆ Santos Dumont e os irmãos Wright adotaram e voaram a configuração canard (empenagem a frente da asa).

☆ Qualquer uma dessas arquiteturas conseguem fornecer um  $C_{m_0}$  positivo, conforme ilustra a figura do próximo slide.

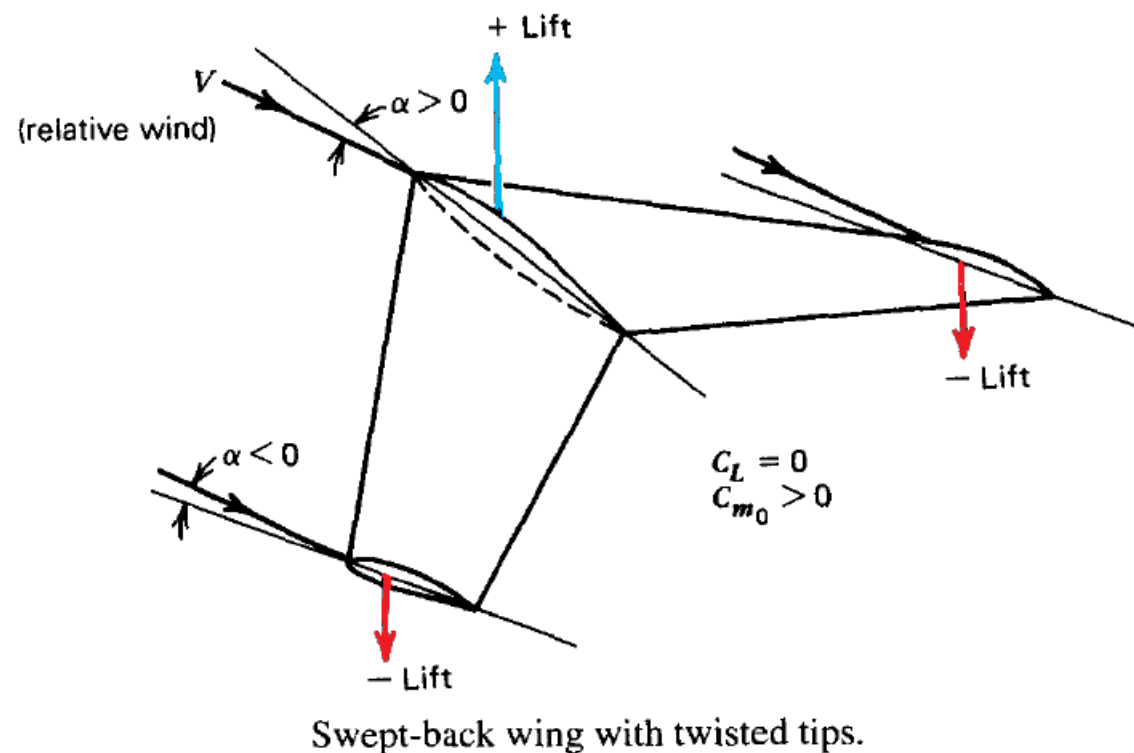
## Configurações Possíveis



Quando a asa está na condição de sustentação nula, a superfície auxiliar deve fornecer momento cabrador (ver figura acima).

- Arquitetura convencional (*conventional arrangement*): Deve estar com ângulo de ataque negativo.
- Arquitetura *canard* (*tail-first*): Deve estar com ângulo de ataque positivo.

## Configurações Possíveis



A figura acima mostra uma alternativa para a combinação asa-empenagem. Consiste de uma asa enflechada com torção nas pontas. Quando a sustentação total é nula, a parte da frente da asa tem sustentação positiva e a parte de trás, negativa. O resultado é um momento cabrador.



## 2. SÍNTESE DA SUSTENTAÇÃO E MOMENTO DE ARFAGEM

A sustentação total e o momento de arfagem de uma aeronave é função:

- Ângulo de ataque
- Ângulos de deflexão das superfícies de controle
- Número de Mach
- Número de Reynolds
- Coeficiente de tração
- Pressão dinâmica

A determinação precisa da sustentação e momento de arfagem é uma das principais tarefas na análise de estabilidade e controle.

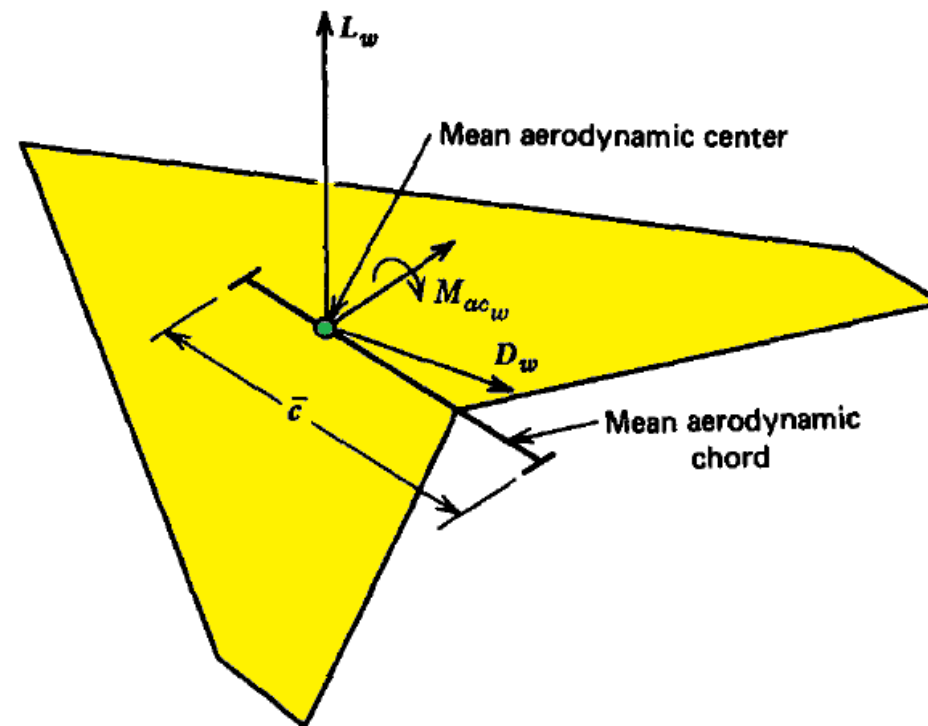
Para fins de estimação, os valores de sustentação e momento de arfagem podem ser obtidos pela contribuição das diversas partes da aeronave, ou seja, asa, fuselagem, naceles, sistemas propulsivos, empenagem, superfícies de controle, enfim, todas as partes da aeronaves e suas interferências mútuas.

☐ O Apêndice B do Etkin apresenta dados para estimar parâmetros aerodinâmicos.



## Sustentação e Momento de Arfagem: Asa

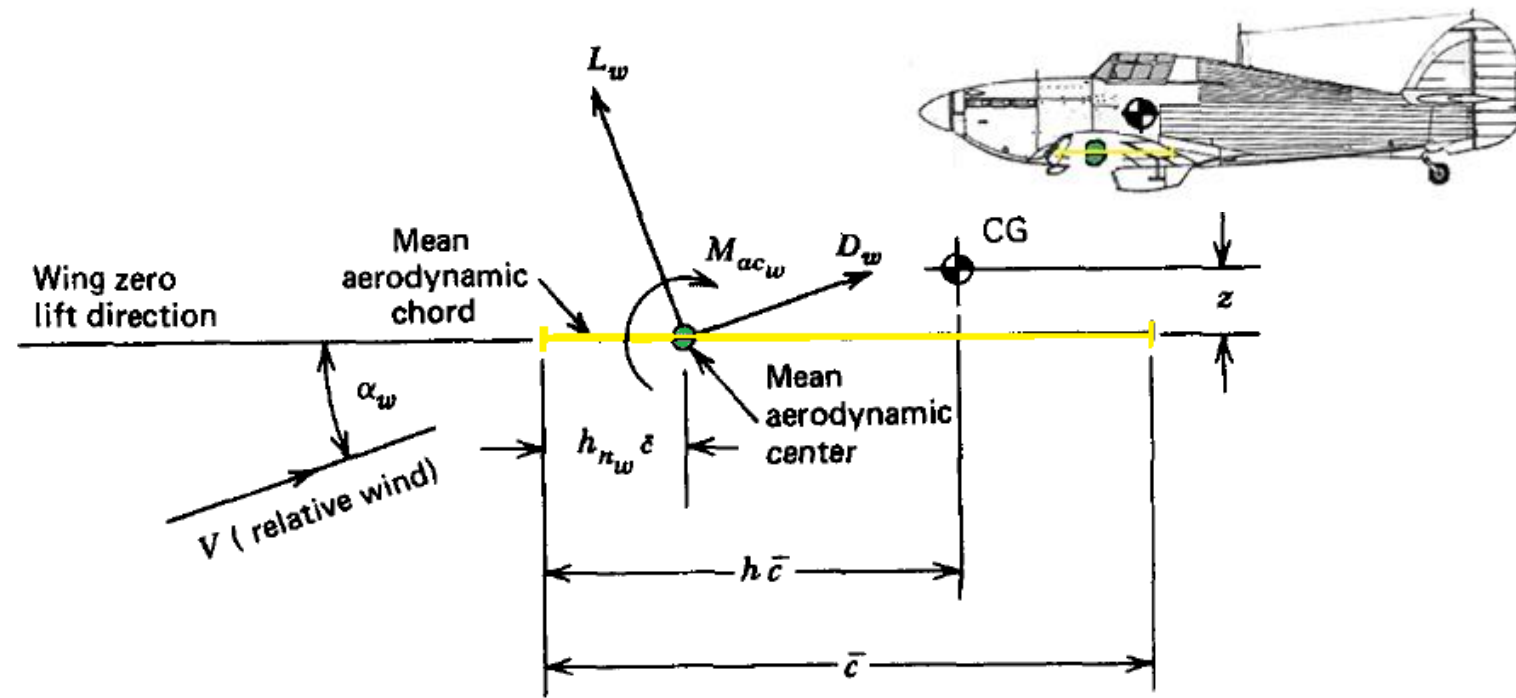
A **força aerodinâmica** em qualquer superfície aerodinâmica pode ser representada como **sustentação** e **arrasto** no centro médio aerodinâmico, adicionado a um **momento de arfagem**, este último independente do ângulo de ataque.



Aerodynamic forces on the wing.

O momento de arfagem desse sistema de forças em torno do CG é dado por:

$$M_W = M_{ac_w} + (L_w \cos \alpha_w + D_w \sin \alpha_w)(h - h_{n_w})\bar{c} + (L_w \sin \alpha_w - D_w \cos \alpha_w)z$$



Moment about the CG in the plane of symmetry.

Vamos assumir que o ângulo de ataque seja suficientemente pequeno de modo que as seguintes aproximações sejam válidas.

$$\begin{aligned}\cos \alpha_w &= 1 \\ \sin \alpha_w &= \alpha_w\end{aligned}$$

Agora vamos adimensionalizar a equação do momento de arfagem, dividindo-a por  $\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}$ .

$$M_W = M_{ac_w} + (L_w \cos \alpha_w + D_w \sin \alpha_w)(h - h_{n_w})\bar{c} + (L_w \sin \alpha_w - D_w \cos \alpha_w)z \div \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}$$

$$C_{m_w} = C_{m_{ac_w}} + (C_{L_w} + C_{D_w} \alpha_w)(h - h_{n_w}) + (C_{L_w} \alpha_w - C_{D_w}) \frac{z}{\bar{c}}$$

Em geral, a última parcela da equação acima é muito pequena se comparada às demais parcelas para a maioria das configurações convencionais de aviões, podendo ser, portanto, desprezada.

Outra simplificação que podemos fazer é desprezar  $C_{D_w} \alpha_w$ , pois para a maioria das condições de voo, temos que:

$$C_{D_w} \alpha_w \ll C_{L_w}$$

Com essas simplificações, obtemos:

$$C_{m_w} = C_{m_{ac_w}} + C_{L_w} (h - h_{n_w})$$
$$C_{m_w} = C_{m_{ac_w}} + \alpha_w a_w (h - h_{n_w})$$



Onde  $a_w = C_{L_{\alpha_w}}$  é a derivada da curva de sustentação da asa.

Usaremos a equação acima para representar o momento de arfagem da asa nas análises a seguir.

Outra simplificação que podemos fazer é desprezar  $C_{D_w} \alpha_w$ , pois para a maioria das condições de voo, temos que:

$$C_{D_w} \alpha_w \ll C_{L_w}$$

Com essas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} C_{m_w} &= C_{m_{ac_w}} + C_{L_w} (h - h_{n_w}) \\ C_{m_w} &= C_{m_{ac_w}} + \alpha_w a_w (h - h_{n_w}) \end{aligned}$$



Onde  $a_w = C_{L_{\alpha_w}}$  é a derivada da curva de sustentação da asa.

Usaremos a equação acima para representar o momento de arfagem da asa nas análises a seguir.



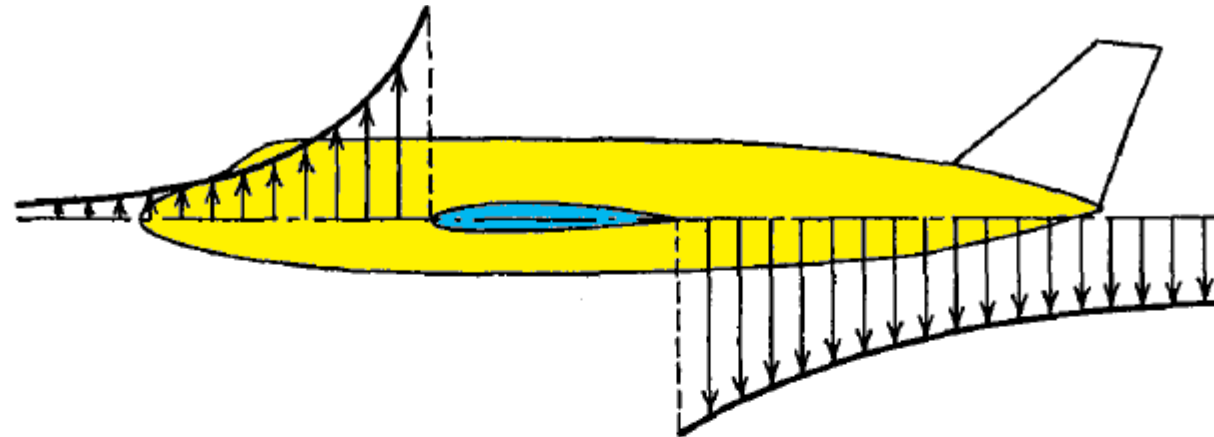
## Sustentação e Momento de Arfagem: Fuselagem e Naceles

A fuselagem sozinha, num escoamento, também está sujeita à **força aerodinâmica**. Assim como a asa, essa força pode ser representada como **sustentação** e **arrasto** em um centro aerodinâmico, e mais um **momento de arfagem**, independente do ângulo de ataque.

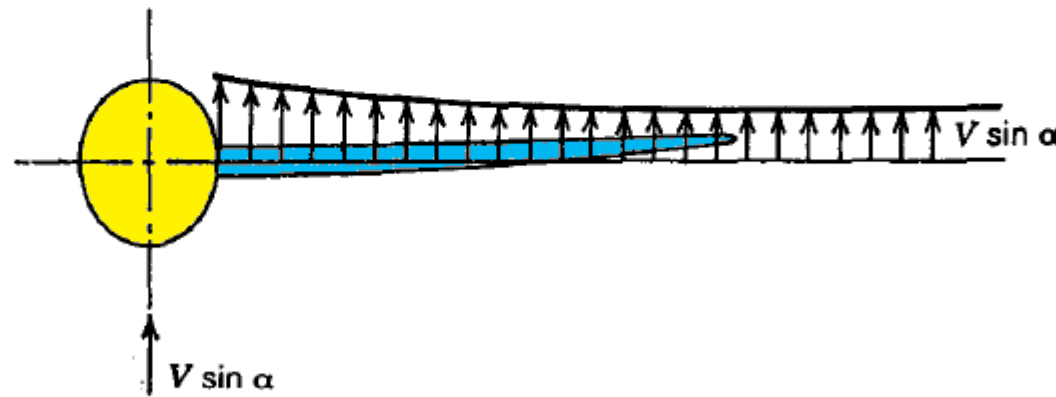
Assim como para a asa sozinha, a curva sustentação versus ângulo de ataque para a fuselagem é aproximadamente linear.

Quando a asa e a fuselagem são colocadas juntas, o efeito conjunto não pode ser representado pela soma dos efeitos das forças aerodinâmicas que atuam separadamente em ambas. Existe o efeito de interferência, onde o campo de escoamento da asa afeta as forças na fuselagem e vice-versa.



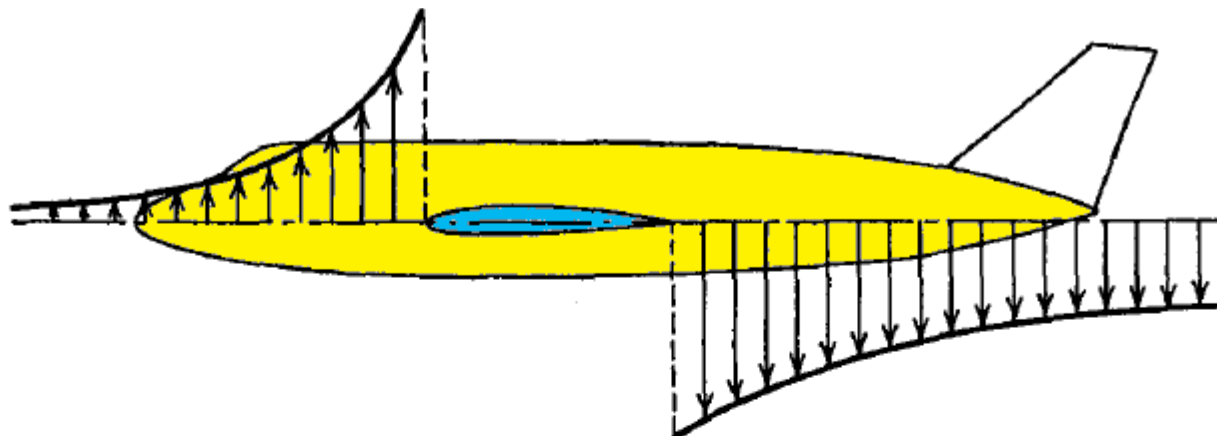


**(a)** Qualitative pattern of upwash and downwash induced along the body axis by the wing vorticity.



**(b)** Qualitative pattern of upwash induced along wing by the cross-flow past the body.

Example of mutual interference flow fields of wing and body—subsonic flow.



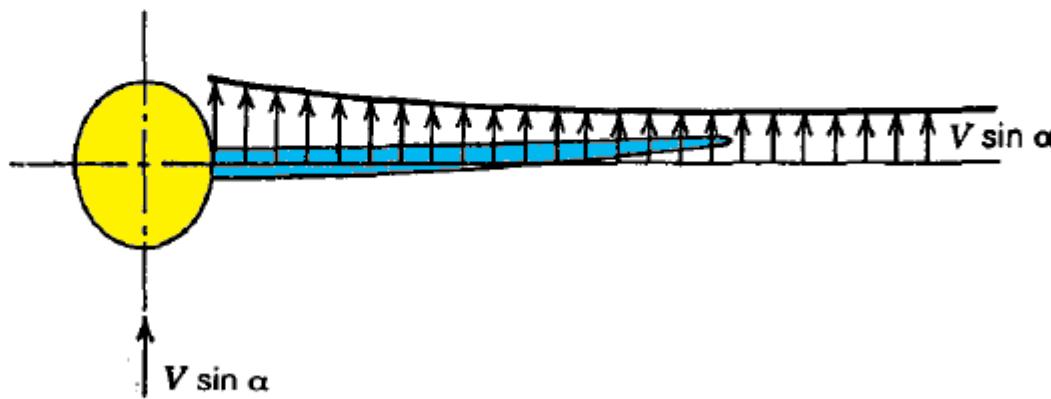
**(a)** Qualitative pattern of upwash and downwash induced along the body axis by the wing vorticity.

A figura do slide anterior mostra os campos de escoamento de interferência para um escoamento subsônico.

Em (a) é mostrado o padrão da velocidade induzida pela asa ao longo da fuselagem. Esse escoamento induzido produz um momento positivo que aumenta com a sustentação da asa ou com o ângulo de ataque.

A figura do slide anterior mostra os campos de escoamento de interferência para um escoamento subsônico.

Em (b) é mostrado o efeito da fuselagem sobre a asa. Quando o eixo da fuselagem está com um ângulo  $\alpha$  em relação ao escoamento, existe uma componente perpendicular  $V \sin \alpha$ . A fuselagem distorce esse escoamento localmente, ocasionando uma componente perpendicular da ordem de  $2 \cdot V \sin \alpha$  na junção asa-fuselagem. Portanto, temos uma mudança na distribuição de sustentação na asa.



**(b)** Qualitative pattern of upwash induced along wing by the cross-flow past the body.

Example of mutual interference flow fields of wing and body—subsonic flow.



O resultado de adicionar uma fuselagem e naceles à asa pode ser interpretado como:

- Um deslocamento à frente do centro aerodinâmico médio.
- Um aumento na derivada da curva de sustentação.
- Um incremento negativo em  $C_{m_{ac}}$ .

A equação do momento de arfagem anteriormente obtida para a asa apenas, pode ser ampliada para incluir a contribuição da fuselagem e naceles, porém, com diferentes valores dos parâmetros. Nesse caso, usamos o subscrito *wb* (*wing-body*) para representar esses valores. Assim, temos:

$$C_{m_{wb}} = C_{m_{acwb}} + C_{L_{wb}} (h - h_{n_{wb}})$$

$$C_{m_{wb}} = C_{m_{acwb}} + \alpha_{wb} a_{wb} (h - h_{n_{wb}})$$

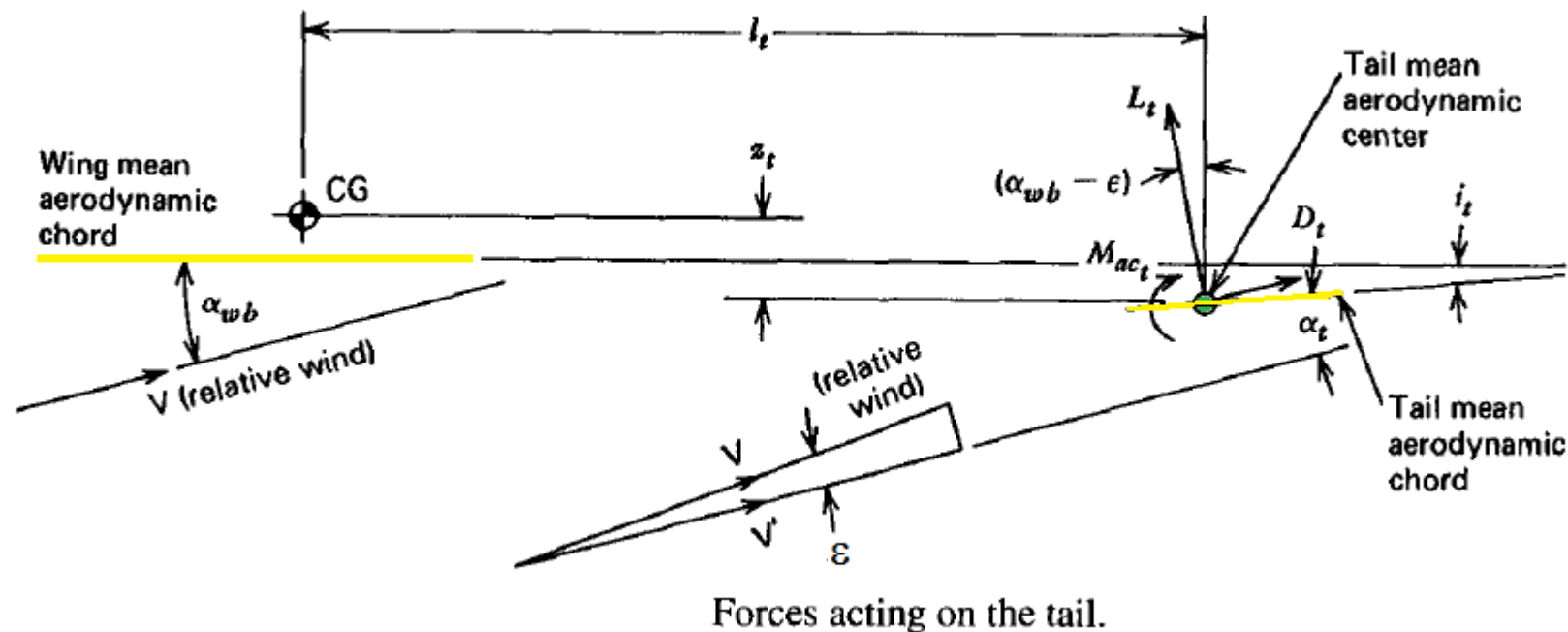
Onde  $\alpha_{wb}$  é a derivada da curva de sustentação do conjunto asa-nacele-fuselagem.



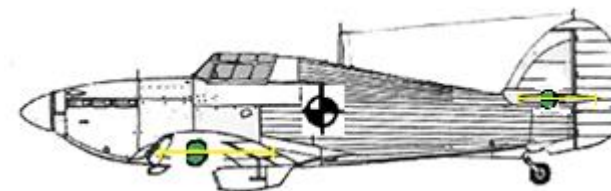
## Sustentação e Momento de Arfagem: Empenagem

A representação da **força aerodinâmica** numa empenagem isolada é essencialmente a mesma que de uma asa isolada. Quando a empenagem é montada em um avião, surgem importantes fenômenos de interferência. São eles:

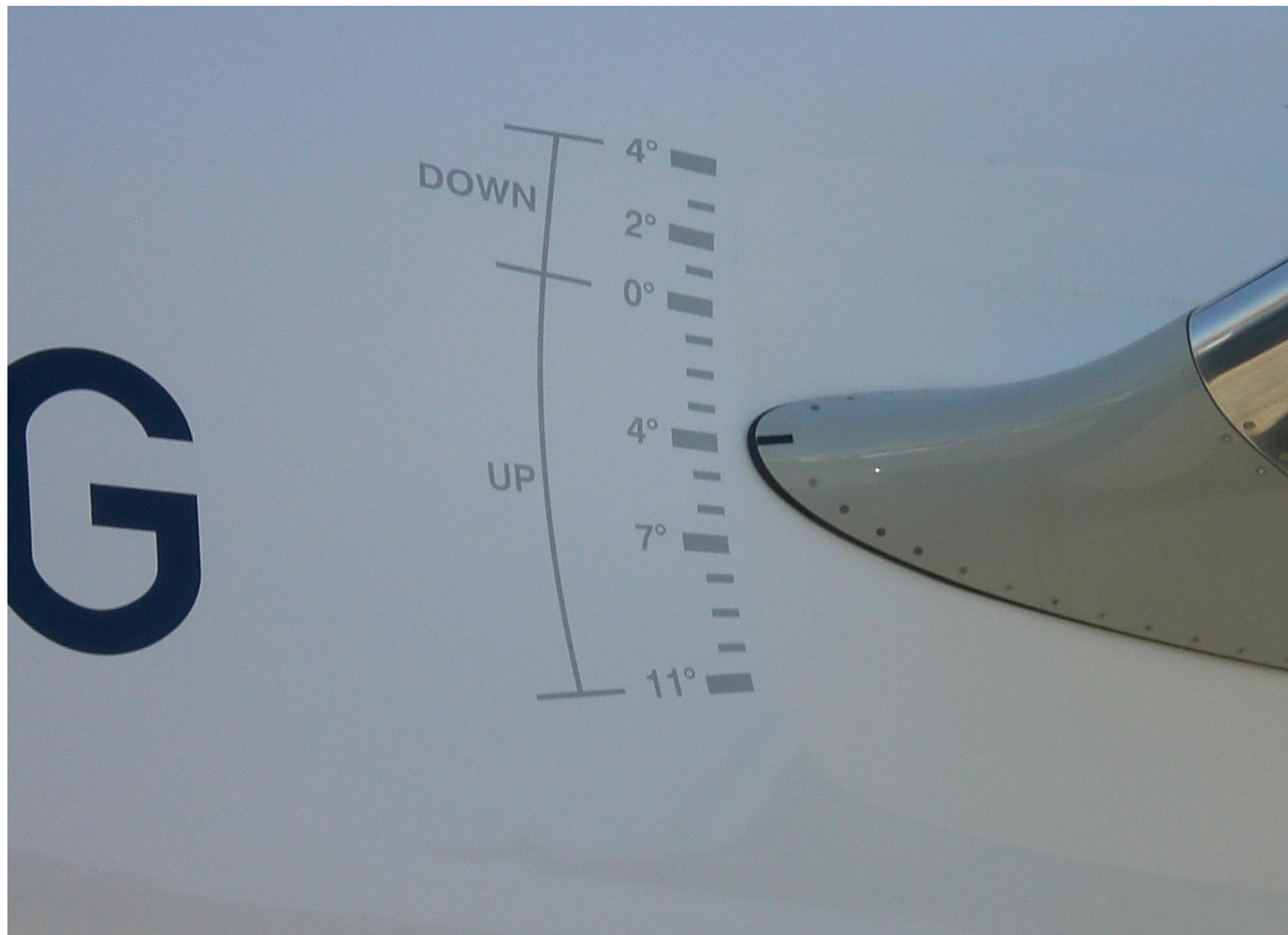
1. *Downwash*.
2. Sombreamento de parte da empenagem pela fuselagem.
3. Redução do vento relativo quando a empenagem está na esteira da asa.



A figura acima ilustra as forças atuando na empenagem. A orientação do vento relativo na empenagem  $V'$  difere da orientação do vento relativo na asa  $V$  pelo pelo ângulo de *downwash*  $\epsilon$ . A sustentação e o arrasto na empenagem são perpendicular e paralelo à  $V'$ , respectivamente. O ângulo  $i_t$  é o ângulo de incidência da empenagem.









A contribuição da empenagem à sustentação da aeronave completa, deve ser, por definição de sustentação, perpendicular ao vento relativo  $V$  (e não  $V'$ ). Ou seja:

$$L_t \cos \epsilon - D_t \sin \epsilon$$

Como  $\epsilon$  é pequeno,  $D_t \sin \epsilon$  pode ser desprezado e a contribuição da empenagem à sustentação total da aeronave pode ser aproximada pelo próprio  $L_t$ .

Vamos introduzir o  $C_L$  da empenagem, denotado por  $C_{L_t}$ , para representar o coeficiente de sustentação da empenagem, baseado na pressão dinâmica da aeronave  $\frac{1}{2}\rho V^2$  e tendo a área da empenagem  $S_t$  como referência.

$$C_{L_t} = \frac{L_t}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_t}$$



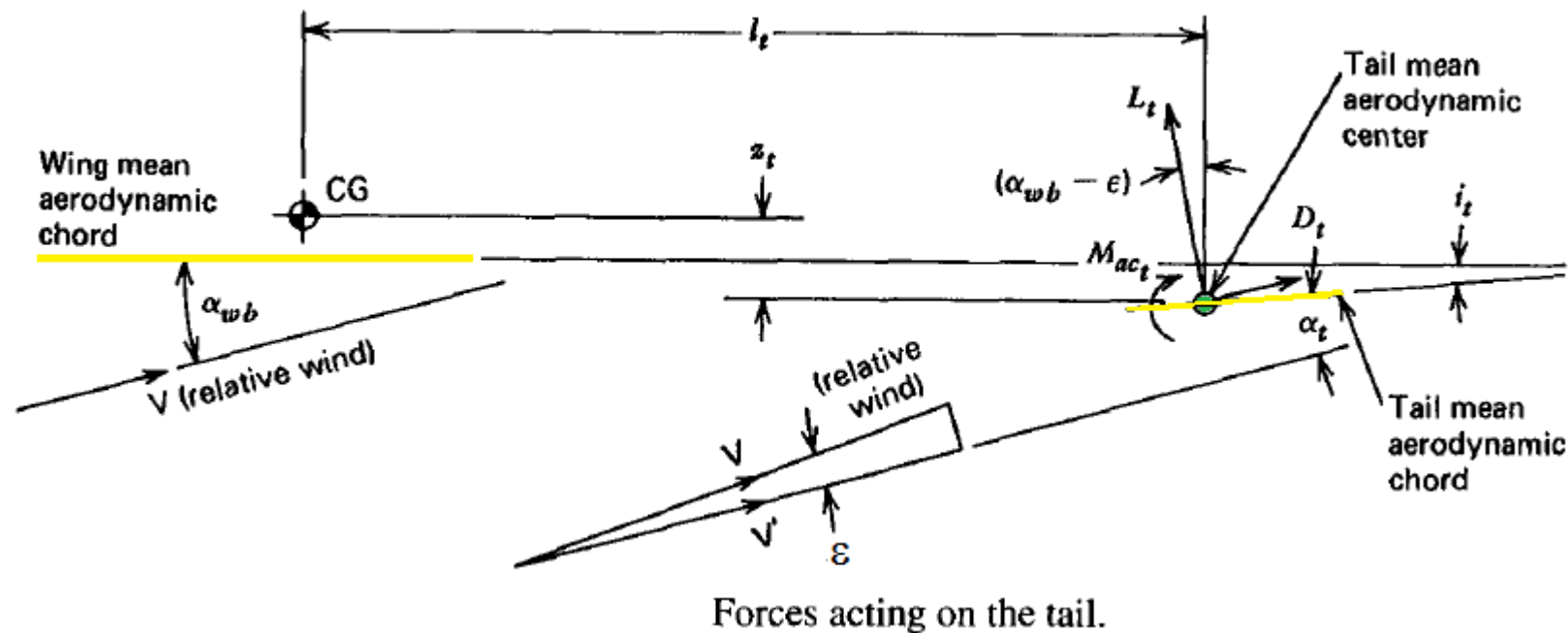
A sustentação total da aeronave é:

$$L = L_{wb} + L_t$$

Alternativamente, seu coeficiente de sustentação é:

$$C_L = C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t}$$

- ✓ O coeficiente de sustentação da empenagem costuma ser baseado na pressão dinâmica local (na empenagem), que é diferente da pressão dinâmica da aeronave  $\frac{1}{2}\rho V^2$  quando a empenagem fica na esteira de turbulência da asa.
- ✓ Para levar em consideração essa diferença entre  $V'$  e  $V$ , a relação  $V'/V$  é incorporada no coeficiente angular  $a_t$  da curva de sustentação.
- ✓ A quantidade  $V'/V$  para a empenagem isolada é diferente da mesma para a empenagem instalada devido aos efeitos de interferência, mencionados anteriormente. Quanto a isso, costuma-se:
  - Introduzir um fator de eficiência da empenagem  $\eta_t$ , onde o coeficiente angular da curva de sustentação da empenagem isolada é multiplicada por  $\eta_t$ . ou
  - Adotar  $a_t$  como a derivada da curva de sustentação da empenagem, instalada na aeronave, e baseada na pressão dinâmica  $\frac{1}{2}\rho V^2$  da aeronave. Essa é a aproximação seguida por Etkin e, portanto, a que usaremos na nossa disciplina.



Com o auxílio da figura acima, vamos calcular o momento de arfagem da empenagem em relação ao CG da aeronave.

$$M_t = M_{ac_t} - l_t [L_t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon) + D_t \sin(\alpha_{wb} - \varepsilon)] - z_t [-L_t \sin(\alpha_{wb} - \varepsilon) + D_t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon)]$$

$$M_t = M_{ac_t} - l_t [L_t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon) + D_t \sin(\alpha_{wb} - \varepsilon)] - z_t [-L_t \sin(\alpha_{wb} - \varepsilon) + D_t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon)]$$

Para a grande maioria dos aviões convencionais, na equação acima, todas as parcelas são muito pequenas em comparação ao termo  $l_t L_t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon)$ . Na nossa disciplina, vamos analisar apenas essa configuração. Entretanto, é importante ter em mente que podemos encontrar configurações de aeronaves onde os outros termos podem ter magnitudes não desprezíveis, não podendo ser desprezados.

Com a hipótese acima, e assumindo  $\alpha_{wb} - \varepsilon \ll 1$ , temos:

$$M_t = -l_t L_t = -l_t C_{L_t} \frac{1}{2} \rho V^2 S_t$$

Escrevendo na forma de coeficiente, temos:

$$C_{m_t} = \frac{M_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}} = -\frac{l_t}{\bar{c}} \frac{S_t}{S} C_{L_t}$$



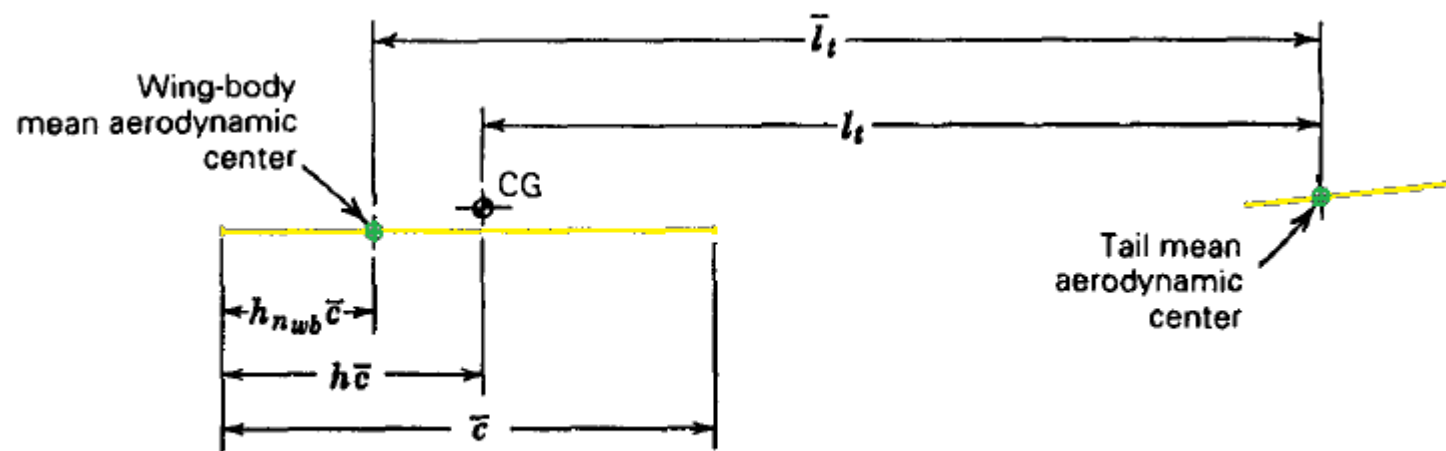
$$C_{m_t} = \frac{M_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}} = -\frac{l_t}{\bar{c}} \frac{S_t}{S} C_{L_t}$$

Na equação acima, notem que o produto  $l_t S_t$  e  $S \bar{c}$  têm unidades de volume. A combinação  $l_t S_t / \bar{c} S$  é a razão de dois volumes característicos da geometria da aeronave. Em inglês essa razão é chamada de *horizontal-tail volume ratio* ou *tail volume*. No Brasil chamamos de **volume de cauda**. Essa quantidade é denotada por  $V_H$ . Assim:

$$C_{m_t} = -V_H C_{L_t}$$



Uma vez que o CG não é um ponto fixo, pois ele varia com o carregamento da aeronave, consumo de combustível, alijamento e lançamento de cargas, temos que  $V_H$  não é constante, embora sua variação durante o voo seja pequena. Seria mais conveniente calcular o momento de arfagem da empenagem em torno de um ponto fixo... o **centro aerodinâmico médio da combinação asa-fuselagem seria um bom candidato**. Consideremos a figura abaixo:



Wing-body and tail mean aerodynamic centers.

Definimos:

$$\bar{V}_H = \frac{\bar{l}_t S_t}{\bar{c} S}$$





Escrevendo  $V_H$  em termos de  $\bar{V}_H$  temos:

$$V_H = \bar{V}_H - \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}})$$

O momento da empenagem em torno do centro aerodinâmico médio da combinação asa-fuselagem é então:

$$\bar{C}_{m_t} = -\bar{V}_H C_{L_t}$$

E o momento da empenagem em torno do CG pode ser reescrito como:

$$C_{m_t} = -\bar{V}_H C_{L_t} + C_{L_t} \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}})$$

### 3. MOMENTO DE ARFAGEM TOTAL E PONTO NEUTRO

Na seção anterior, obtivemos as seguintes contribuições para o momento de arfagem da aeronave:

→ Asa+Fuselagem +Naceles:

$$C_{m_{wb}} = C_{m_{acwb}} + C_{L_{wb}} (h - h_{n_{wb}})$$

→ Empenagem:

$$C_{m_t} = -\bar{V}_H C_{L_t} + C_{L_t} \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}})$$

Somando ambos os coeficientes e adicionando  $C_{m_p}$ , que representa a contribuição do sistema propulsivo, obtemos o coeficiente do momento de arfagem total da aeronave em torno do CG:

$$C_m = C_{m_{wb}} + C_{m_t} + C_{m_p}$$

$$C_m = C_{m_{acwb}} + C_{L_{wb}} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{L_t} \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) + C_{m_p}$$

$$C_m = C_{m_{acwb}} + (C_{L_{wb}} + C_{L_t} \frac{S_t}{S}) (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{m_p}$$

## 3. MOMENTO DE ARFAGEM TOTAL E PONTO NEUTRO

Na seção anterior, obtivemos as seguintes contribuições para o momento de arfagem da aeronave:

→ Asa+Fuselagem +Naceles:

$$C_{m_{wb}} = C_{m_{acwb}} + C_{L_{wb}} (h - h_{n_{wb}})$$

→ Empenagem:

$$C_{m_t} = -\bar{V}_H C_{L_t} + C_{L_t} \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}})$$

Somando ambos os coeficientes e adicionando  $C_{m_p}$ , que representa a contribuição do sistema propulsivo, obtemos o coeficiente do momento de arfagem total da aeronave em torno do CG:

$$C_m = C_{m_{wb}} + C_{m_t} + C_{m_p}$$

$$C_m = C_{m_{acwb}} + C_{L_{wb}} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{L_t} \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) + C_{m_p}$$

$$C_m = C_{m_{acwb}} + \underbrace{(C_{L_{wb}} + C_{L_t} \frac{S_t}{S})}_{C_L} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{m_p}$$

Portanto:

$$C_m = C_{m_{acwb}} + C_{L\alpha} (h - h_{nwb}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{m_p}$$

Vale a pena lembrar que para obter a equação acima, não levamos em conta nenhum efeito de tração, de compressibilidade e aeroelástico.

Portanto, utilizando a equação acima, podemos determinar a rigidez em arfagem ( $-C_{m_\alpha}$ ). Lembrando que os centros aerodinâmicos médios da asa+fuselagem e da empenagem são pontos fixos, então:

$$C_{m_\alpha} = \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} + C_{L\alpha} (h - h_{nwb}) - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$$

Na equação acima vemos que  **$C_{m_\alpha}$  depende linearmente da posição do CG**, aqui **representado por  $h$** . Como  $C_{L\alpha}$  possui magnitudes típicas muito grandes, a magnitude e o sinal de  $C_{m_\alpha}$  apresentam uma grande dependência com  $h$ .



Como foi mencionado anteriormente,  $C_{m\alpha}$  pode se tornar negativo através de uma escolha adequada de  $h$ . Seja  $h_n$  a posição do CG na qual  $C_{m\alpha}$  torna-se nulo. Essa posição é de particular importância pois representa a fronteira entre a rigidez em arfagem positiva e negativa.

👉  $h_n$  é conhecido como **ponto neutro**.

O **ponto neutro está para a aeronave** completa assim como o **centro médio aerodinâmico está para a asa**. Por isso, de acordo com o Etkin, podemos usar a expressão centro aerodinâmico da aeronave como alternativa para ponto neutro.

Usando a equação anterior, podemos calcular a localização do ponto neutro. Pela definição, temos que no ponto neutro  $C_{m\alpha} = 0$ . Portanto:

$$h_n = h_{n_{wb}} - \frac{1}{C_{L_\alpha}} \left( \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right)$$

Substituindo  $h_{nwb}$  em  $C_{m\alpha}$ , obtemos:

$$h_n = h_{nwb} - \frac{1}{C_{L\alpha}} \left( \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right) \Rightarrow h_{nwb} = h_n + \frac{1}{C_{L\alpha}} \left( \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right)$$
$$\Downarrow$$
$$C_{m\alpha} = \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} + C_{L\alpha} (h - h_{nwb}) - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$$

E, a equação de  $C_{m\alpha}$  assume a forma:

$$C_{m\alpha} = C_{L\alpha} (h - h_n)$$

Substituindo  $h_{nwb}$  em  $C_{m\alpha}$ , obtemos:

$$h_n = h_{nwb} - \frac{1}{C_{L\alpha}} \left( \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right) \Rightarrow h_{nwb} = h_n + \frac{1}{C_{L\alpha}} \left( \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right)$$
$$\Downarrow$$
$$C_{m\alpha} = \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} + C_{L\alpha} (h - h_{nwb}) - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$$

E, a equação de  $C_{m\alpha}$  assume a forma:

$$C_{m\alpha} = C_{L\alpha} (h - h_n)$$



Substituindo  $h_n$  em  $C_{m_\alpha}$ , obtemos:

$$h_n = h_{n_{wb}} - \frac{1}{C_{L_\alpha}} \left( \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right) \Rightarrow h_{n_{wb}} = h_n + \frac{1}{C_{L_\alpha}} \left( \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right)$$
$$\Downarrow$$
$$C_{m_\alpha} = \frac{\partial C_{m_{acwb}}}{\partial \alpha} + C_{L_\alpha} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$$

E, a equação de  $C_{m_\alpha}$  assume a forma:

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha} (h - h_n)$$

Notem que:

- $h \Rightarrow$  Posição do CG adimensionalizada.
- $h_n \Rightarrow$  Não depende da posição do CG.

A diferença entre a posição adimensionalizada do CG ( $h$ ) e o ponto neutro ( $h_n$ ) é chamada margem estática ( $K_n$ ):

$$K_n = h_n - h$$



O critério para estabilidade estática é que  $C_{m\alpha} < 0$ , ou seja, que a aeronave apresente rigidez em arfagem positiva. Isso significa que:

$$\rightarrow h < h_n$$

ou

$$\rightarrow K_n > 0$$





O critério para estabilidade estática é que  $C_{m\alpha} < 0$ , ou seja, que a aeronave apresente rigidez em arfagem positiva. Isso significa que:

ou  $\rightarrow h < h_n$

$\rightarrow K_n > 0$

Isso significa que o CG deve estar a frente do ponto neutro. Quanto mais dianteiro for o CG, maior a margem estática  $K_n$ , e, sob o ponto de vista de estabilidade estática, mais estável será a aeronave.





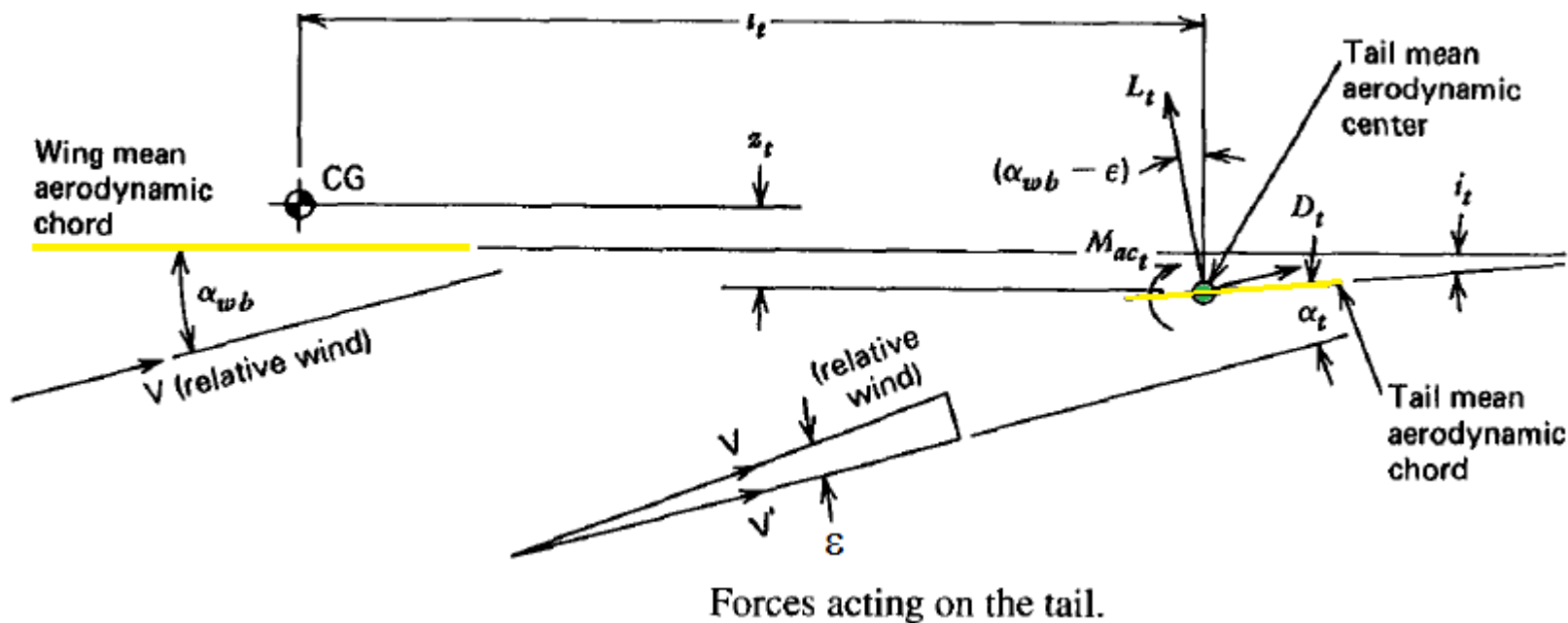
## Efeito do Momento e Sustentação Linear no Ponto Neutro

Quando as forças e momentos sobre a asa, fuselagem, empenagem e sistema propulsivo forem lineares em  $\alpha$ , como ocorre na maior parte do do espectro de operação de uma aeronave, podemos obter algumas relações analíticas de extrema utilidade. Assim, temos:

$$C_{L_{wb}} = a_{wb} \alpha_{wb}$$

$$C_{L_t} = a_t \alpha_t$$

$$C_{m_p} = C_{m_{0p}} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \cdot \alpha$$



Com auxílio da figura acima, vemos que o ângulo de ataque na empenagem  $\alpha_t$  é dado por:

Portanto:

$$\alpha_l = \alpha_{wb} - i_l - \epsilon$$

$$C_{L_t} = a_t(\alpha_{wh} - i_t - \epsilon)$$



O *downwash*  $\epsilon$  pode ser aproximado por:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \alpha_{wb}$$

→ A constante  $\epsilon_0$  é o *downwash* quando  $\alpha_{wb} = 0$ , e é devido à:

- Campo de velocidade induzida pela fuselagem.
- Torção da asa => Produz uma esteira de vórtices e um campo de *downwash* mesmo quando a sustentação total é zero.

→ A derivada  $\partial \epsilon / \partial \alpha$ :

- A principal contribuição do *downwash* na empenagem ocorre devido ao rasto da esteira de turbulência da asa.
- A derivada é constante.
- É proporcional à  $C_L$ .









O coeficiente de sustentação na empenagem é então:

$$C_{L_t} = a_t \left[ \alpha_{wb} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - i_t - \epsilon_0 \right]$$

O coeficiente total de sustentação, utilizando a equação acima e  $C_{L_{wb}} = a_{wb} \alpha_{wb}$ , e substituindo em:

$$C_L = C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t}$$

Temos:

$$C_L = a_{wb} \alpha_{wb} \left[ 1 + \frac{a_t S_t}{a_{wb} S} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \right] - a_t \frac{S_t}{S} (i_t + \epsilon_0)$$



A equação anterior pode ser escrita como:

$$C_L = (C_L)_0 + a\alpha_{wb}$$

Como  $\alpha_{wb}$  difere de  $\alpha$  por uma constante, temos:

$$C_L = a\alpha$$

Onde:

$$(C_L)_0 = -a_t \frac{S_t}{S} (i_t + \epsilon_0)$$

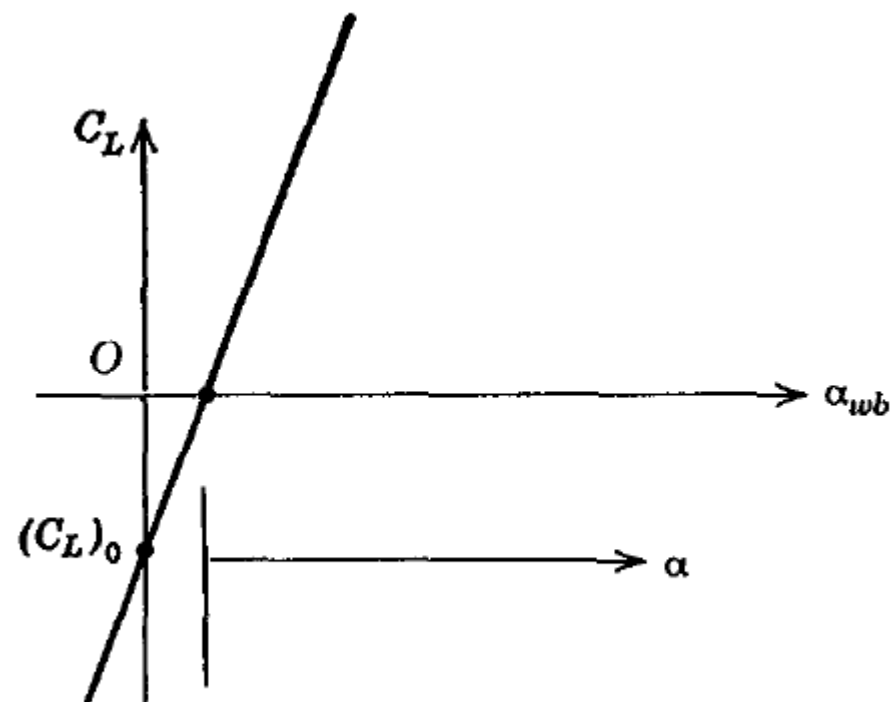
Note que  $(C_L)_0$  é o coeficiente de sustentação na empenagem quando  $\alpha_{wb}=0$ .

O coeficiente angular  $a$  é dado por:

$$a = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = a_{wb} \left[ 1 + \frac{a_t}{a_{wb}} \frac{S_t}{S} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \right]$$



$\alpha$  é o ângulo de ataque da linha de sustentação zero da aeronave completa. Na figura abaixo, vemos a relação gráfica entre  $\alpha$ ,  $\alpha_{wb}$  e  $(C_L)_0$ .



Graph of total lift.



Utilizando as duas maneiras de expressar  $C_L$ ...

$$\begin{cases} C_L = (C_L)_0 + a\alpha_{wb} \\ C_L = a\alpha \end{cases}$$

... determinamos a diferença entre  $\alpha$  e  $\alpha_{wb}$ :

$$a\alpha = (C_L)_0 + a\alpha_{wb}$$

Portanto:

$$\alpha - \alpha_{wb} = -\frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} (i_t + \epsilon_0)$$

Quando substituímos as relações lineares para  $C_L$ ,  $C_{L_t}$  e  $C_{m_p}$  na equação...

$$C_m = C_{m_{ac_{wb}}} + C_L(h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{m_p}$$

... encontramos os seguintes resultados, após algumas manipulações algébricas (**Fica como sugestão de exercício para casa provar os resultados a seguir**):

$$\begin{cases} C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha \\ C_m = \bar{C}_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{wb} \end{cases}$$



Onde...

$$C_{m_\alpha} = a(h - h_{n_{wb}}) - a_t \bar{V}_H \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$$

ou

$$C_{m_\alpha} = a_{wb}(h - h_{n_{wb}}) - a_t V_H \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$$

$$\begin{cases} C_{m_0} = C_{m_{acwb}} + C_{m_{0p}} + a_t \bar{V}_H (\epsilon_0 + i_t) \left[ 1 - \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \right] \\ \bar{C}_{m_0} = C_{m_{acwb}} + \bar{C}_{m_{0p}} + a_t V_H (\epsilon_0 + i_t) \end{cases}$$

$C_{m_0}$  airplane pitching-moment coefficient at zero  $\alpha$

$\bar{C}_{m_0}$  airplane pitching-moment coefficient at zero  $\alpha_{wb}$

Onde...

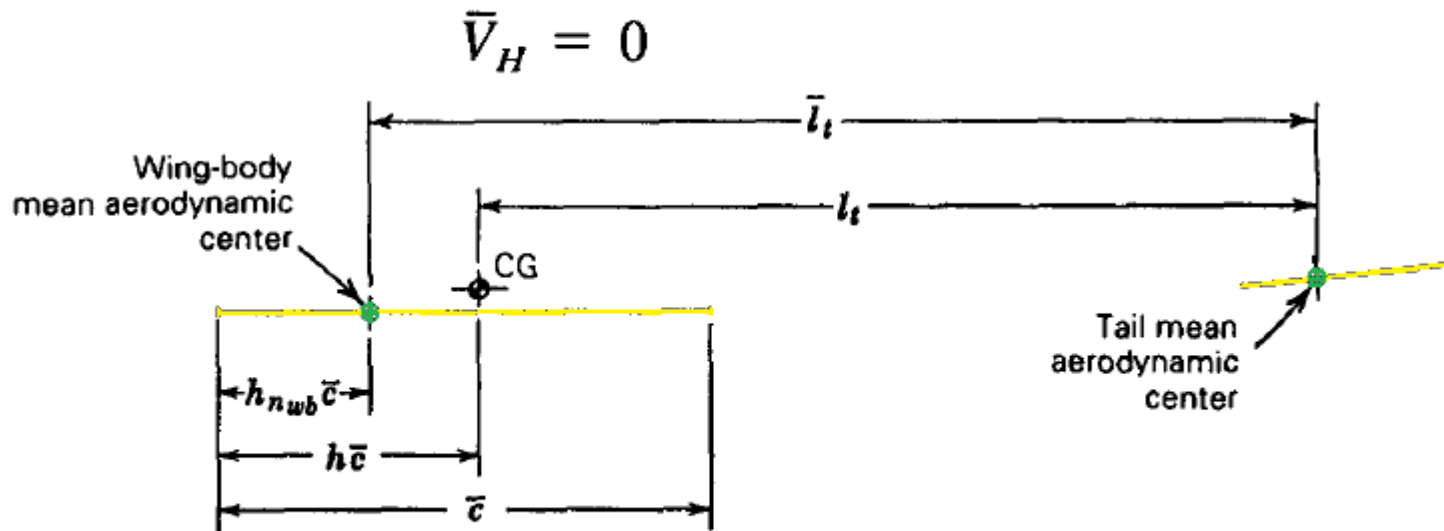
$$\begin{aligned} \bar{C}_{m_{0p}} &= C_{m_{0p}} + (\alpha - \alpha_{wb}) \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \\ h_n &= h_{n_{wb}} + \frac{a_t}{a} \bar{V}_H \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Reparem que:

→  $\bar{C}_{m_0}$  é o momento de arfagem a zero  $\alpha_{wb}$ , e seu valor depende de  $h$  (via  $V_H$ ).

→  $C_{m_0}$  é o momento de arfagem a sustentação total zero ( $\alpha=0$ ), e é independente da posição do CG.

Todo as relações anteriores aplicam-se igualmente para aeronaves sem empenagem (*tailless aircraft*) colocando :



Wing-body and tail mean aerodynamic centers.

$$\bar{V}_H = \frac{\bar{l}_t S_t}{\bar{c} S}$$

Notem, a partir da figura acima, que  $\bar{V}_H = 0$  poderia ser devido à:

- ➔  $\bar{l}_t = 0 \Rightarrow$  O centro aerodinâmico da empenagem estaria junto ao centro aerodinâmico da asa.
- ➔  $S_t = 0 \Rightarrow$  A área da empenagem seria nula.

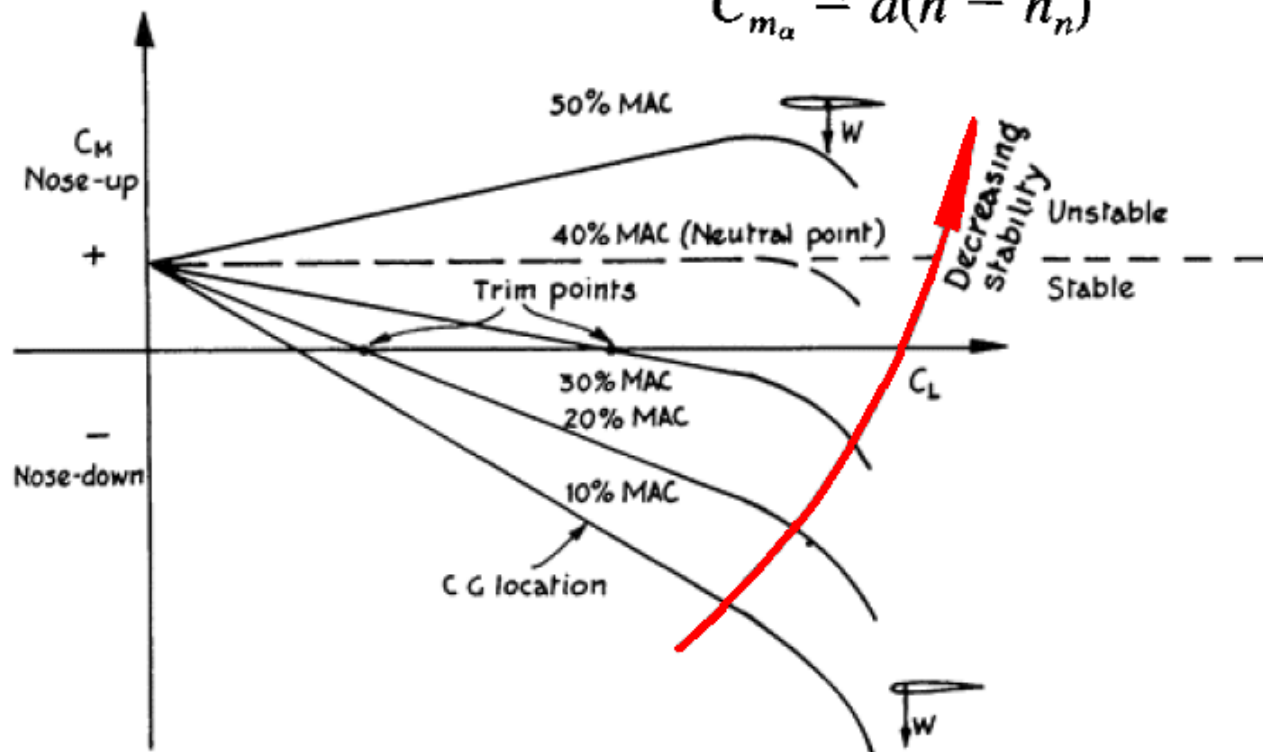


Outra relação útil pode ser obtida integrando  $C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha} (h - h_n)$  , ou seja:

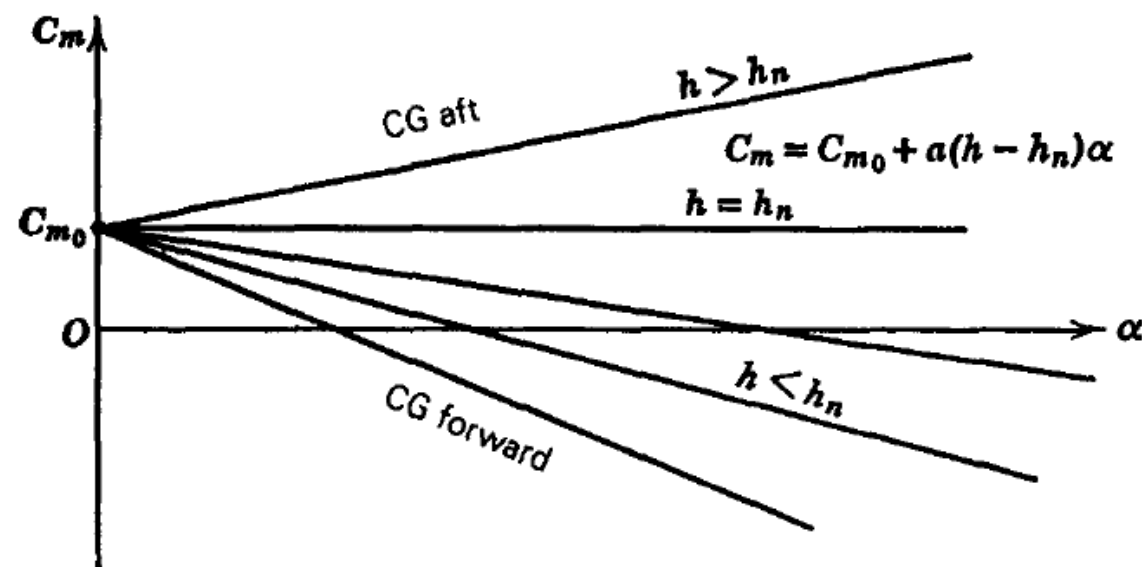
$$C_m = C_{m_0} + C_L(h - h_n)$$

$$C_m = C_{m_0} + a\alpha(h - h_n)$$

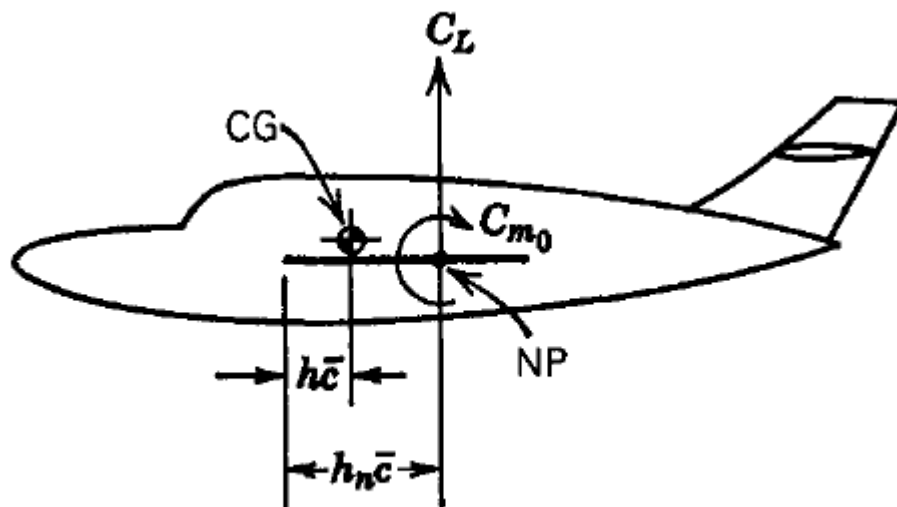
$$C_{m_\alpha} = a(h - h_n)$$



Effect of centre-of-gravity position on longitudinal stability.



Effect of CG location on  $C_m$  curve.



Total lift and moment acting on vehicle.



A figura acima mostra o sistema resultante de sustentação e momento correspondente à equação anterior (  $C_m = C_{m_0} + C_L(h - h_n)$  ), ou seja, uma força  $C_L$  e um binário  $C_{m_0}$  no ponto neutro.



# FIM DA 1ª PARTE