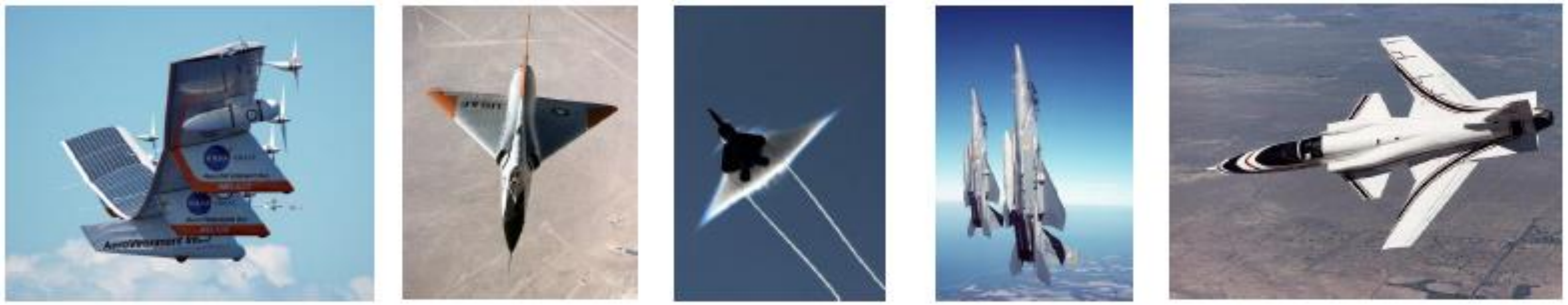
Universidade de Brasília

Faculdade UnB Gama

# Mecânica do Voo

## Estudo Simplificado do Movimento Látero-Direcional



# Referências Bibliográficas


- **ITEN 2.4**: Paglione, P. ; Zanardi, M. C., Estabilidade e Controle de Aeronaves, ITA, 1990.
- Nelson - Flight Stability and Automatic Control
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, Dynamics of Flight – Stability and Control, John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003.


# 6. Estudo Simplificado do Movimento Látero-Direcional

## ITEM 2.4 APOSTILA

## 6.1. Movimento de rolamento puro:

**Supondo-se que o avião dispõe de um único grau de liberdade em torno do eixo $OX$, suposto aqui como eixo principal de inércia, o movimento é portanto, regido somente pela equação do momento de rolamento, na qual:**

$I_{xz} = 0$ **(**$OX$ **é um eixo principal de inércia)**

$\delta_r = r = \beta = 0$ **(um só grau de liberdade)**

$q = 0$ **(o avião é supostamente equilibrado longitudinalmente de maneira que a velocidade de arfagem seja nula)**

**Envolve só equação da velocidade de rolamento p:**

$$\dot{p} - l_p p = l_{\delta_a} \delta_a$$

**Movimento de rolamento puro:**

$$\dot{p} - l_p p = l_{\delta_a}\,\delta_a$$

**SOLUÇÃO É DADA PELA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ($\dot{p} - l_p p = 0$) MAIS UMA SOLUÇÃO PARTICULAR DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA ($\dot{p} - l_p p = l_{\delta_a}\,\delta_a$)**

**A SOLUÇÃO DE** $\dot{p} - l_p p = 0$ **é** $p(t) = K\,e^{l_p\,t}$

**A resposta a uma entrada, do tipo degrau $\delta_{a,o}$, dos ailerons, a solução particular da equação:**

$$p = -\frac{l_{\delta_a}}{l_p}\,\delta_{a,o}$$

**Movimento de rolamento puro:**

$$\dot{p} - l_p p = l_{\delta_a}\,\delta_a$$

**A resposta a uma entrada do tipo degrau $\delta_{a,o}$, (com $p = 0$ no instante inicial) pode ser escrita como:**

$$p(t) = -\frac{l_{\delta_a}}{l_p}\left(1 - e^{l_p\,t}\right)\delta_{a,o}$$

$l_p$ **< 0,** $l_{\delta_a}$**<0.**

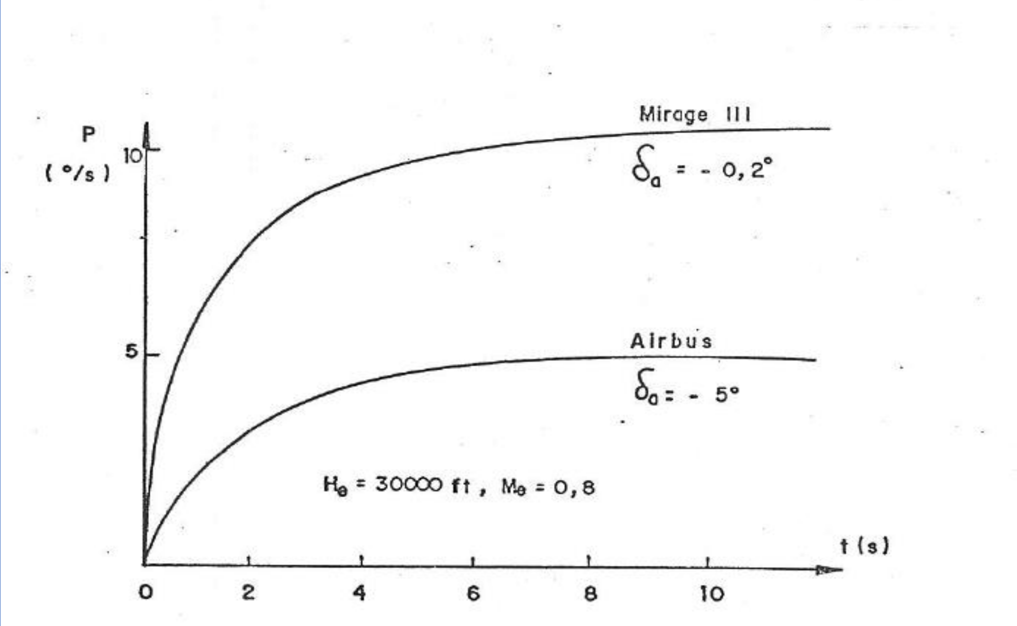
**Consequentemente, para uma entrada degrau $\delta_{a,o}$ positiva dos ailerons (manche a esquerda), a velocidade de rolamento tende a um valor assintótico negativo (asa esquerda descendo).**

**EXEMPLO: Avião Airbus a uma deflexão $\delta_{a,o} = -5°$ (manche a direita)**
**Avião Mirage III a uma deflexão $\delta_{a,o} = -0{,}2°$ (manche a direita),**
**NAS condições de voo ($H_e = 9120\ km, M_e = 0{,}8 \rightarrow V_e = 242{,}54\ m/s$).**

**Movimento de rolamento puro:**

$$p(t) = -\frac{l_{\delta_a}}{l_p}\left(1 - e^{l_p\,t}\right)\,\delta_{a,o}$$

**EXEMPLO: Avião Airbus a uma deflexão $\delta_{a,o} = -5°$ (manche a direita)**
**Avião Mirage III a uma deflexão $\delta_{a,o} = -0{,}2°$ (manche a direita),**
**nas condições de voo ($H_e = 9120km, N_{Me} = 0{,}8 \;\rightarrow\; V_e = 242{,}54\;m/s$).**




**AIRBUS**

$$p = -9{,}316\,\left(1 - e^{-1{,}492\,t}\right)\,\delta_a$$

**MIRAGE**

$$p = -5{,}544\,\left(1 - e^{-1{,}532\,t}\right)\,\delta_a$$

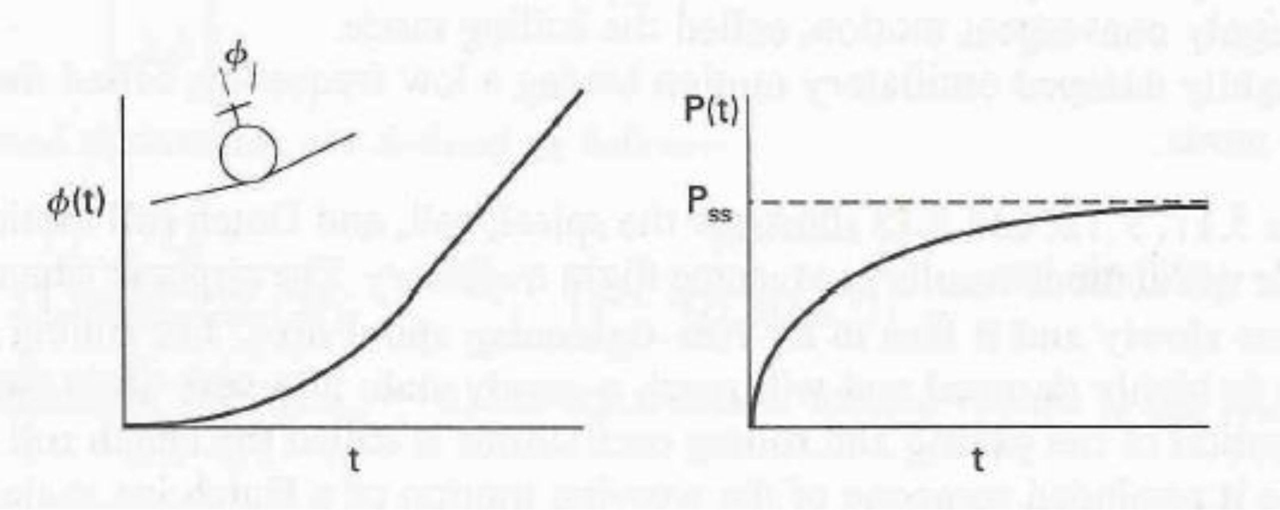
$$\boldsymbol{l_p = \frac{\rho\, S\, V_e\, l^2}{2\, I_x}\, C_{l_p}}$$

$$\boldsymbol{l_{\delta_a} = \frac{\rho\, S\, V_e^2\, l}{2\, I_x}\, C_{l_{\delta_a}}}$$

**Movimento de rolamento puro:**

$$p(t) = -\frac{l_{\delta_a}}{l_p}\left(1 - e^{l_p\, t}\right)\delta_{a,o}$$

**EXEMPLO: Avião Airbus a uma deflexão** $\delta_{a,o} = -5°$ **(manche a direita)**
**Avião Mirage III a uma deflexão** $\delta_{a,o} = -0{,}2°$ **(manche a direita),**
**nas condições de voo (**$H_e = 9120km, N_{Me} = 0{,}8 \rightarrow V_e = 242{,}54\, m/s$**).**




**AIRBUS**

$$p = -9{,}316\left(1 - e^{-1{,}492\, t}\right)\delta_a$$

**MIRAGE**

$$p = -55{,}44\left(1 - e^{-1{,}532\, t}\right)\delta_a$$

$$\boldsymbol{l_p = \frac{\rho\, S\, V_e\, l^2}{2\, I_x} C_{l_p}}$$

$$\boldsymbol{l_{\delta_a} = \frac{\rho\, S\, V_e^2\, l}{2\, I_x} C_{l_{\delta_a}}}$$

## 6.2. MOVIMENTO ESPIRAL

**Movimento espiral: envolve a equação de guinada e de cinemática:**

**Deseja-se fazer uma curva sem rolamento, apenas com $\beta, \phi, r$. Supondo-se agora que $\boldsymbol{\beta, p\ e\ r}$ são pequenos e variam lentamente, então, nestas condições, os momentos das forças de inércia são pequenos e os momentos aerodinâmicos preponderantes.**

**O lado esquerdo das equações do movimento são desprezados.**

**Desprezando $Y_{\delta_r}$ $e$ $Y_{\delta_a}$, da equação de força lateral:**

$$mV_e \cos\beta\,(\dot{\beta} - p\,sen\alpha_e + r\,cos\alpha_e) = \frac{1}{2}\rho_e S V_e^2 \left(C_{y_\beta}\,\beta + C_{y_{\delta_a}}\delta_a + C_{y_{\delta_r}}\delta_r\right) + m\,g\,sen\,\phi\cos\theta_e$$

**Determina se:** $Y_\beta \beta + g\,\phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\beta}{\phi} = -\frac{g}{Y_\beta} > 0, \qquad Y_\beta < 0$

**Por exemplo, se o avião está inclinado à direita ($\phi > 0$), surge uma derrapagem $\beta > 0$, devido à inclinação $\phi$:**

$$\beta = -\frac{g}{Y_\beta}\phi > 0$$

**Devido à esta derrapagem $\beta$, aparecem dois momentos aerodinâmicos:**

**a) um momento de guinada que induz uma velocidade de guinada $r$:**

$$n_\beta\,\beta + n_r\,\mathrm{r} = 0$$

$$\frac{\mathrm{r}}{\beta} = -\frac{n_\beta}{n_r}$$

**O nariz da aeronave gira a direita ($r > 0$).**

**b) um momento de rolamento devido ao efeito do diedro :** $l_\beta\,\beta < 0$ **pois** $l_\beta < 0$ **, ROLAMENTO À ESQUERDA mas r gera um outro momento de rolamento** $l_r\,\mathrm{r} > 0$ **,** ***pois*** $l_r > 0$**, ROLAMENTO À DIREITA**

**O ROLAMENTO É ENTÃO DADO POR:** $l_\beta\,\beta + l_r\,\mathrm{r}$

**O ROLAMENTO É ENTÃO DADO POR:** $l_\beta\, \beta + l_r\, \mathrm{r}$

$l_\beta\, \beta < 0$, **ROLAMENTOÀ ESQUERDA.** $l_r\, \mathrm{r} > 0$ **ROLAMENTO À DIREITA.**

**Se** $\boldsymbol{l_\beta\, \beta + l_r}\, \mathbf{r} < 0$ → **Prevalece o rolamento à esquerda, que tenderá a levantar a asa direita, anulando** $\varphi$

**Mas** $\boldsymbol{l_\beta\, \beta + l_r}\, \mathbf{r}$ **=** $\boldsymbol{l_\beta\, \beta + l_r} \frac{n_\beta}{n_r}\beta = \beta\left(l_\beta - l_r \frac{n_\beta}{n_r}\right) = \frac{\beta}{n_r}\left(l_\beta\, n_r - l_r\, n_\beta\right) < 0$

**Como** $n_r < 0$ **então** $l_\beta\, n_r - l_r\, n_\beta > 0$ → $l_r\, n_\beta - l_\beta\, n_r < 0$

$Q_{r_\beta} = l_r\, n_\beta - l_\beta\, n_r$ **- CONDICIONA A ESTABILIDADE**

$Q_{r_\beta}$ **- COEFICIENTE DE ESTABILIDADE ESTÁTICA ESPIRAL**,

$\boldsymbol{Q_{r_\beta} < 0}$ **, $\phi$ TENDE A SE EQUILIBRAR.**

$\boldsymbol{Q_{r_\beta} > 0}$ **, $\phi$ AUMENTA LENTAMENTE, $\beta$ CRESCE** → **CURVA SE FECHA**

**Não é correto falar em estabilidade estática , pois o efeito de $\phi$ no movimento de rolamento é indireto através de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{r}$.**

**RETOMANDO AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO, INCLUINDO OS TERMOS NA VELOCIDADE DE ROLAMENTO p E GUINADA r, com $\delta_a$ e $\delta_r$ nulos - as superfícies de controle são supostas em suas posições neutra :**

$$V_e r - Y_\beta \beta - g\phi = 0 \qquad (*)$$
$$l_\beta\, \beta + l_r\, \mathrm{r} + l_P \mathrm{p} = 0 \qquad (**)$$
$$n_\beta\, \beta + n_r\, \mathrm{r} + n_P \mathrm{p} = 0 \qquad (***)$$

**Utilizando (**) e (***) obtemos:**

$$Q_{r_\beta} r + Q_{p_\beta} p = 0 \qquad (4*)$$
$$Q_{p_\beta} \beta + Q_{p_r} r = 0 \qquad (5*)$$

**sendo**:

$$Q_{r_\beta} = l_r\ n_\beta - l_\beta\, n_\mathrm{r}$$
$$Q_{p_\beta} = l_P\, n_\beta - l_\beta\, n_P$$
$$Q_{p_r} = l_P\, n_\mathrm{r} - l_r\, n_P$$

**Eliminando $\beta$ de (*) e (5*)** : $\left(V_e + Y_\beta \frac{Q_{p_r}}{Q_{p_\beta}}\right) r - g\,\phi = 0$

$$W = V + Y_\beta \frac{Q_{p_r}}{Q_{p_\beta}}$$

$$Wr - g\,\phi = 0$$

***Derivando:*** $\dot{r} = \frac{g}{W}\dot{\phi}$

**Mas pela equação cinemática:** $\dot{\phi} = p + tg\,\theta\,(q\,sen\,\phi + r)$ **com as simplificações assumidas:** $\dot{\phi} = p$

**Logo:** $\dot{r} = \frac{g}{W}p$

**Combinando com (4*) :** $\dot{r} + \frac{g}{W}\frac{Q_{r_\beta}}{Q_{p_\beta}}\,r = 0$

**CUJA SOLUÇÃO** $r = r_0\,e^{at}$ **com** $a = -\frac{g}{W}\frac{Q_{r_\beta}}{Q_{p_\beta}}$

$$r = \ r_0 \, e^{at}$$

**AS SOLUÇÕES PARA $p, \beta, \phi$ SÃO OBTIDAS COM O AUXÍLIO DAS EQUAÇÕES ANTERIORES**

$$Q_{p_\beta}\beta + \ Q_{p_r} r = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{Q_{p_r} r_0}{Q_{p_\beta}} (\, e^{at})$$

$$Q_{r_\beta} r + \ Q_{p_\beta} p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{Q_{r_\beta} r_0}{Q_{p_\beta}} (\, e^{at})$$

$$\dot{\phi} = p \quad \Rightarrow \quad \phi = -\frac{Q_{r_\beta} r_0}{Q_{p_\beta} a} (\, e^{at} - 1)$$

**ANALISANDO O SINAL DE** $a = -\frac{g}{W}\frac{Q_{r_\beta}}{Q_{p_\beta}}$

- **o coeficiente** $C_{n_P}$ **é, em geral pequeno.**
- **Logo,** $Q_{p_\beta} = l_p\, n_\beta - l_\beta\, n_p$ **tem o mesmo sinal que** $n_\beta\, l_p$ **, ou seja, negativo.**
- $W$ **é próximo de** $V$ **( o termo** $Y_\beta \frac{Q_{pr}}{Q_{p_\beta}}$ **é pequeno comparado a** $V$**).**

- **Assim,** $a$ **tem o mesmo sinal que** $Q_{r_\beta} = l_r\ n_\beta - l_\beta\, n_r$**, e o movimento é amortecido se** $Q_{r_\beta}$ **for negativo.**

**Exemplo 1 : AIRBUS**

$$I_{xz} = 0, \qquad V = 242{,}84m/s, \qquad H = 9120\ m$$

$$Q_{p_r} = 0{,}5090 \quad ; \quad Q_{p_\beta} = -4.529 \quad ; \quad Q_{r_\beta} = -0{,}8577$$

$$1 + \frac{Y_\beta}{V}\frac{Q_{p_r}}{Q_{p_\beta}} = 1{,}0230, \qquad W = 247{,}46$$

Logo $\boldsymbol{a = -0,0075}$

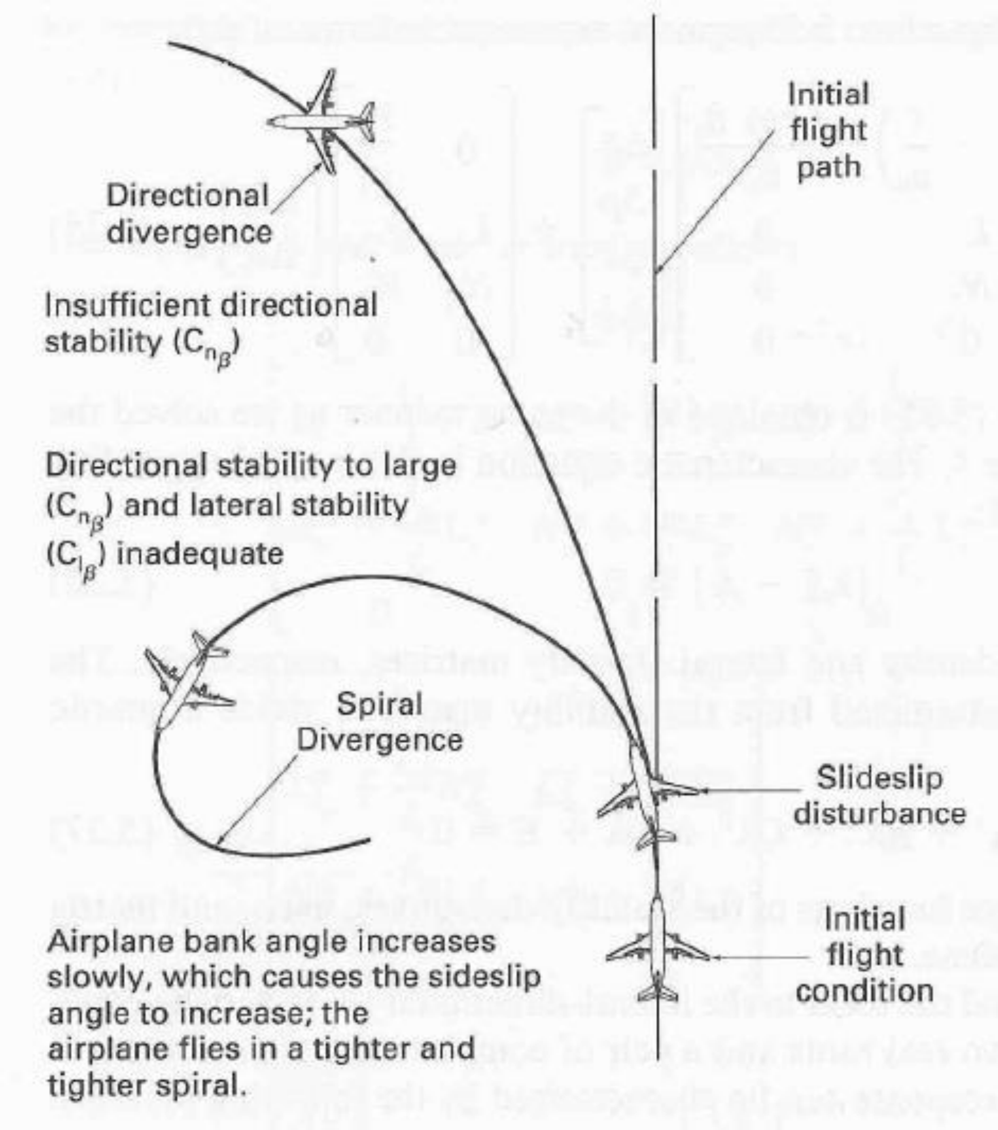
- **Exemplo 2 : MIRAGE III**

$$l_\beta = -14{,}184 \quad ; \quad l_P = -1{,}532 \quad ; \quad l_r = 0{,}3677$$

$$n_\beta = 6{,}369 \quad ; \quad n_P = 0{,}05055 \quad , \quad n_r = -0{,}6434\,, \quad Q_{p_r} = 0{,}9671 \quad ; \quad Q_{p_\beta} = -9.0418 \quad ;$$

$$Q_{r_\beta} = -6{,}7648, \qquad \frac{y_\beta}{V_e} = -0{,}1622\,, \qquad 1 + \frac{Y_\beta}{V}\frac{Q_{p_r}}{Q_{p_\beta}} = 1{,}01753 \quad ; \quad W = 246{,}77$$

**Logo** $\boldsymbol{a = -0,0297}$


Initial
flight
path
Directional
divergence
Insufficient directional
stability ($C_{n_\beta}$)
Directional stability to large
($C_{n_\beta}$) and lateral stability
($C_{l_\beta}$) inadequate
Spiral
Divergence
Slideslip
disturbance
Initial
flight
condition
Airplane bank angle increases
slowly, which causes the sideslip
angle to increase; the
airplane flies in a tighter and
tighter spiral.

## 6.3. Oscilação em derrapagem (Dutch Roll)

**Admite se que a derrapagem está diretamente associada com a velocidade de guinada**

**Com simplificações, as equações que regem o movimento são:**

$$\dot{p} = l_p p + l_r\, r + \; l_\beta \beta$$
$$\dot{r} = n_p p + n_r\, r + \; n_\beta \beta$$
$$\dot{\beta} = -r$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_p & l_r & l_\beta \\ n_p & n_r & n_\beta \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ r \\ \beta \end{Bmatrix}$$

**Equação característica:**

$$\begin{vmatrix} l_p - s & l_r & l_\beta \\ n_p & n_r - s & n_\beta \\ 0 & -1 & -s \end{vmatrix} = 0$$

$$(l_p - s)\left[s\,(n_r - s) - n_\beta\right] + \; n_p\,(l_\beta - s\, l_r) = 0$$

## Oscilação em derrapagem

$$\left(l_p - s\right)\left[s\,(n_r - s) - n_\beta\right] + n_p\left(l_\beta - s\,l_r\right) = 0$$

**Em geral, $n_p$ é pequeno (como já visto). Desprezando-se este termo, obtém se as soluções aproximadas:**

$$s = l_p$$

$$s^2 - n_r\,s + n_\beta = 0$$

**Equação característica de grau 3, com uma raiz real (de rolamento puro) e**

**1 raiz complexa conjugada ( movimento oscilatório amortecido)**

**Com** $w_o = \sqrt{n_\beta}$    $\xi = -\dfrac{n_r}{2\sqrt{n_\beta}}$

**EXEMPLOS:**

**Para o avião Airbus nas condições de voo** $V = 242{,}84\ m/s, H = 9120\text{m}$**, tem-se:**

$$s^2 + 0{,}3266\ s + 2{,}796\ =\ 0$$

**O que fornece** $w_o = 1{,}672$ **,** $\xi = 0{,}0977$ **e as duas raízes** $u \pm i\ v = \ -0{,}1633 \pm i\ 1{,}6641$

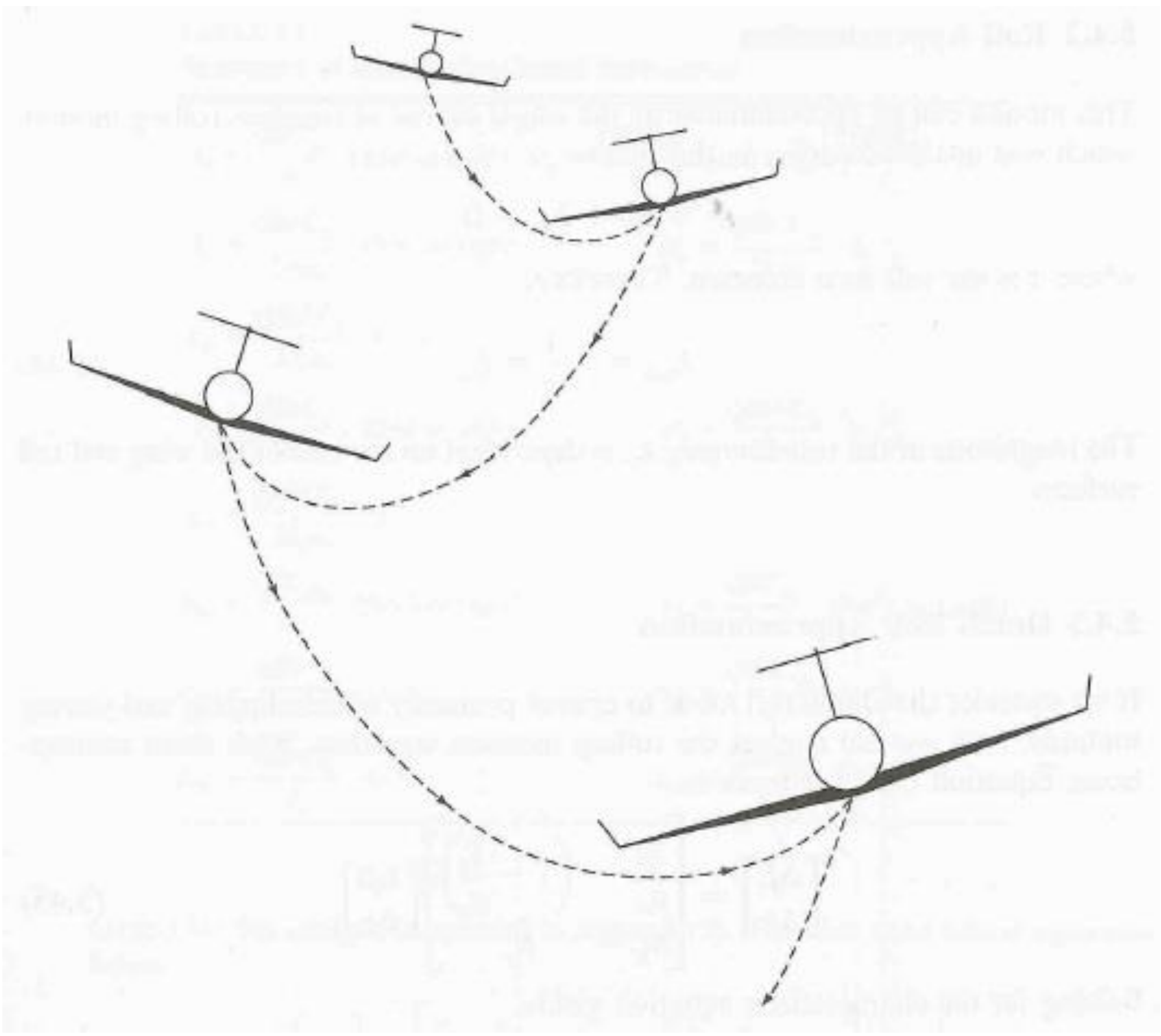
**O período é portanto,** $T = \frac{2\pi}{1{,}6641} = 3{,}8\ s$ **e o movimento é fracamente amortecido.**

**Para o Mirage III, nas mesmas condições de voo, tem-se:**

$$s^2 + 0{,}6434\ s + 6{,}369\ =\ 0$$

**O que fornece** $w_o = 2{,}524$**,** $\xi = 0{,}1275$ **e as duas raízes** $u \pm i\ v = \ -0{,}3217 \pm i\ 2{,}5031$

**O período é portanto,** $T = \frac{2\pi}{v} = 2{,}5\ s$



**NA PRÁTICA NÃO SE DEVE UTILIZAR OS VALORES APROXIMADOS POIS APRESENTAM RESULTADOS GROSSEIROS, MAS AS RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA COMPLETA:**

$$\left(l_p - s\right)\left[s\,(n_r - s) - n_\beta\right] + n_p\left(l_\beta - s\,l_r\right) = 0$$

**OBSERVAÇÃO**

**Movimento látero direcional livre é a superposição dos 3 modos:**

- **Rolamento puro,**
- **Modo espiral**
- **Oscilação de derrapagem (Dutch Roll)**

# 7. MOVIMENTO LÁTERO DIRECIONAL COMPLETO (ITEM 2.5 DA APOSTILA)

**Equações do movimento látero-direcional considerando** $\cos\beta = 1$ **e** $\sin\beta = \beta$

$$m V_e(\dot{\beta} - p \operatorname{sen} \alpha_e + r \cos \alpha_e) = \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 (C_{y_\beta} \beta + C_{y_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{y_{\delta r}} \delta r) + mg \operatorname{sen} \phi \cos \theta_e$$

$$I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y) r q_e - I_{xz}\, p\, q_e = \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 \ell (C_{\ell_\beta} \cdot \beta + C_{\ell_p} \cdot \frac{p\ell}{V_e} + C_{\ell_r} \cdot \frac{r\ell}{V_e} + C_{\ell_{\delta a}} \cdot \delta a + C_{\ell_{\delta r}} \cdot \delta r)$$

$$I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (I_y - I_x) p q_e + I_{xz} r q_e = \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 \ell \left( C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_p} \cdot \frac{p\ell}{V_e} + C_{n_r} \frac{r\ell}{V_e} + C_{n_{\delta a}} \delta a + C_{n_{\delta r}} \delta r \right)$$

$$\dot{\phi} = p + \mathrm{tg}\, \theta_e (q_e \,\mathrm{sen}\, \phi + r \cos \phi)$$

**Aproximação válida para $\beta \leq 10°$. Considerando ainda $\cos\varphi = 1$ e $\sin\varphi = \varphi$**

**Observação:** **Manobras normais para ângulos de inclinação lateral para aviões de transporte $\varphi$ vai até $45°$ (AIRBUS por exemplo) e para aviões do tipo caça $\varphi$ vai até $60°$ (Mirage III por exemplo)**

**Introduzindo a notação:**

$$Y_\beta = \frac{\rho_e S V_e^2}{2m} C_{y_\beta} \; ; \quad Y_{\delta a} = \frac{\rho_e S V_e^2}{2m} C_{y_{\delta a}} \; ; \quad Y_{\delta r} = \frac{\rho_e S V_e^2}{2m} C_{y_{\delta r}} \; ;$$

$$L_\beta = \frac{\rho_e S V_e^2 \ell}{2} C_{\ell_\beta} \; ; \quad N_\beta = \frac{\rho_e S V_e^2 \ell}{2} C_{n_\beta} \; ;$$

$$L'_p = \frac{\rho_e S V_e \ell^2}{2} C_{\ell_p} \; ; \quad N'_p = \frac{\rho_e S V_e \ell^2}{2} C_{n_p} \; ;$$

$$L'_r = \frac{\rho_e S V_e \ell^2}{2} C_{\ell_r} \; ; \quad N'_r = \frac{\rho_e S V_e \ell^2}{2} C_{n_r} \; ;$$

$$L_{\delta a} = \frac{\rho_e S V_e^2 \ell}{2} C_{\ell_\delta} \; ; \quad N_{\delta a} = \frac{\rho_e S V_e^2 \ell}{2} C_{n_{\delta a}}$$

$$L_{\delta r} = \frac{\rho_e S V_e^2 \ell}{2} C_{\ell_{\delta r}} \; ; \quad N_{\delta r} = \frac{\rho_e S V_e^2 \ell}{2} C_{n_{\delta r}} \; ,$$

**Temos:**

$$\dot{\beta} = \frac{g\cos\theta_e}{V_e}\phi + \frac{Y_\beta}{V_e}\beta + p\,\mathrm{sen}\,\alpha_e - r\cos\alpha_e + \frac{Y_{\delta a}}{V_e}\delta a + \frac{Y_{\delta r}}{V_e}\delta r$$

$$I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} = L_\beta\beta + (L'_p + I_{xz}q_e)p + \left| L'_r - (I_z - I_y)q_e \right| r \; +$$

$$+ L_{\delta a}\cdot\delta a + L_{\delta r}\cdot\delta r$$

$$I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} = N_\beta\beta + \left| N'_p - (I_y - I_x)q_e \right| p + (N'_r - I_{xz}q_e)\,r \; +$$

$$+ N_{\delta a}\cdot\delta a + N_{\delta r}\cdot\delta r$$

$$\dot{\phi} = q_e\,\mathrm{tg}\,\theta_e\,\phi + p + r\,\mathrm{tg}\,\theta_e$$

**Definindo:**

$$L_p = L'_p + I_{xz}\, q_e \quad ; \qquad N_p = N'_p - (I_y - I_x)\, q_e \quad ;$$

$$L_r = L'_r - (I_z - I_y) q_e \quad ; \qquad N_r = N'_r - I_{xz}\, q_e \quad , \text{ e}$$

$$\ell_x = \frac{I_z L_x + I_{xz} N_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad \text{e} \quad n_x = \frac{I_{xz} L_x + I_x N_x}{I_x I_z - I_{xz}^2}$$

**O índice $x$ representa as variáveis $\beta, p, r, \delta_a, \delta_r$. LINEARIZA-SE AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO**

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_e tg\,\theta_e & 0 & 1 & tg\,\theta_e \\ \dfrac{g\cos\theta_e}{V_e} & \dfrac{y_\beta}{V_e} & sen\alpha_e & -cos\alpha_e \\ 0 & l_\beta & l_p & l_r \\ 0 & n_\beta & n_p & n_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \beta \\ p \\ r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{y_{\delta_a}}{V_e} & \dfrac{y_{\delta_r}}{V_e} \\ l_{\delta_a} & l_{\delta_r} \\ n_{\delta_a} & n_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{U}$$

**RESPOSTA A PERTURBAÇÃO EXTERNA:**

$$\dot{X} = A\ X$$

**EQUAÇÃO CARACTERISTICA DE 4ª ORDEM:**

$$D = \begin{vmatrix} q_e tg\ \theta_e - s & 0 & 1 & tg\ \theta_e \\ \dfrac{g\cos\theta_e}{V_e} & \dfrac{y_\beta}{V_e} - s & sen\alpha_e & -cos\alpha_e \\ 0 & l_\beta & l_p - s & l_r \\ 0 & n_\beta & n_p & n_r - s \end{vmatrix} = 0$$

**RESPOSTA A PERTURBAÇÃO EXTERNA:**

$$\dot{X} = A\ X$$

**EQUAÇÃO CARACTERISTICA DE 4ª ORDEM:**

$$A_o s^4 + A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + A_4 = 0$$

CUJAS RAÍZES:

- **uma raiz real negativa grande em valor absoluto: tal raiz corresponde ao movimento de rolamento puro;**
- **uma raiz real próxima de zero: tal raiz corresponde ao movimento espiral – se ela for negativa, o movimento é amortecido;**
- **um par de raízes imaginárias conjugadas que correspondem à oscilação de derrapagem, também conhecida como oscilação lateral ou dutch roll.**

## EQUAÇÃO CARACTERISTICA DE 4ª ORDEM:

$$A_o s^4 + A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + A_4 = 0$$

**Sendo os coeficientes das equações característica:**

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = -\left(\frac{Y_\beta}{V_e} + n_r + \ell_p\right) - q_e \operatorname{tg} \theta_e$$

$$A_2 = -B_\alpha + Q_{pr} + \frac{Y_\beta}{V_e}(\ell_p + n_r) + q_e \operatorname{tg}\theta_e \left| \ell_p + n_r + \frac{Y_\beta}{V_e} \right|$$

$$A_3 = -A_\beta - \frac{Y_\beta}{V_e} Q_{pr} - \frac{g}{V_e} B_\theta + q_e \operatorname{tg}\theta_e \left| B_\alpha - Q_{pr} - \frac{Y_\beta}{V_e}(\ell_p + n_r) \right|$$

$$A_4 = -\frac{g}{V_e} T_\beta + q_e \operatorname{tg}\theta_e \left| A_\beta + \frac{Y_\beta}{V_e} Q_{pr} \right|$$

**onde:**

$$B_\alpha = \ell_\beta \operatorname{sen} \alpha_e - n_\beta \cos \alpha_e$$

$$Q_{pr} = \ell_p n_r - \ell_r n_p$$

$$B_\theta = l_\beta \cos\theta_e + n_\beta \operatorname{sen}\theta_e$$

$$A_\beta = Q_{p\beta} \cos \alpha_e + Q_{r\beta} \operatorname{sen} \alpha_e$$

$$Q_{p\beta} = \ell_p n_\beta - \ell_\beta n_p$$

$$Q_{r\beta} = \ell_r n_\beta - \ell_\beta n_r$$

$$T_\beta = Q_{r\beta} \cos \theta_e - Q_{p\beta} \operatorname{sen} \theta_e$$

**RESPOSTA A PERTURBAÇÃO EXTERNA:**

**SOLUÇÕES DO TIPO EXPONENCIAL E SENOIDAL.**

$$X = A\,e^{s1t} + B\,e^{s2t} + K\,e^{ut}\,sen\,(vt + C)$$

**APLICAÇÃO : AIRBUS**

**CONDIÇÕES DE VOO: V = 242,8 m/s H = 9120m**

$F_e = 85057\ N$ ; $\alpha_e = 3{,}838°$ $\theta_e = \alpha_e = 3{,}838°$ e $q_e = 0$

| | | |
|---|---|---|
| $L_\beta = -3{,}0111 \times 10^7$ | $N_\beta = 4{,}0843 \times 10^7$ | |
| $L_p = -8{,}2079 \times 10^6$ | $N_p = -9{,}4707 \times 10^6$ | |
| $L_r = 1{,}831 \times 10^6$ | $N_r = -4{,}7383 \times 10^6$ | |
| $y_\beta = -43{,}811$ | $l_\beta = -5.4927$ | $n_\beta = 2{,}8085$ |
| $l_p = -1{,}492$ | $n_p = -6{,}192 \times 10^{-2}$ | |
| $l_r = 3{,}3487$ | $n_r = -3{,}2734 \times 10^{-1}$ | $y_\beta / V_e = -1{,}8063 \times 10^{-1}$ |

**A equação característica torna-se então:**

$$s^4 + 2{,}0\, s^3 + 4{,}0076\, s^2 + 4{,}8836\, s + 2{,}2331 \times 10^{-2} = 0$$

**raízes são:**

$\boldsymbol{a = -4,59 \times 10^{-3} \Longrightarrow}$ **módulo espiral**
$\boldsymbol{b = -1,50 \Longrightarrow}$ **rolamento puro**
$\boldsymbol{u \pm i\, v = -2,50 \times 10^{-1} \pm i\, 1,79 \Longrightarrow}$ **dutch roll**

**módulo espiral fracamente amortecido** $\boldsymbol{(T_{1/2} = \frac{0{,}693}{a} = 151s)}$

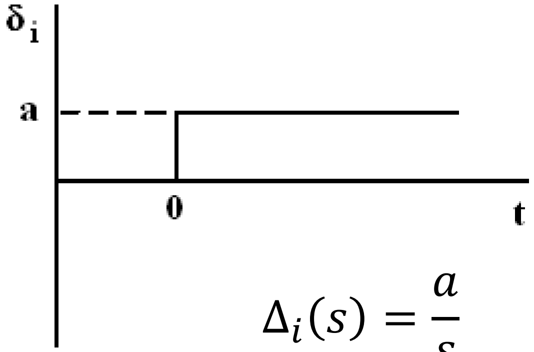
**rolamento puro bastante amortecido** $\boldsymbol{(T_{1/2} = \frac{0{,}693}{b} = 0,46s)}$

**dutch roll amortecido após três períodos amplitude reduzida a 7% do valor inicial** $\boldsymbol{(T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,52s)}$

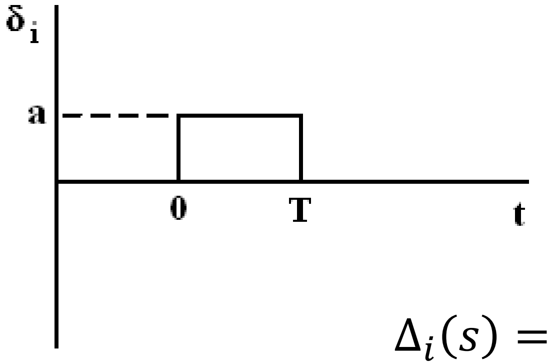
## RESPOSTA AOS CONTROLES DE AILERON E LEME:

**Aplicação da transformada de Laplace, construção das funções de transferência e aplicação de transformada inversa.**

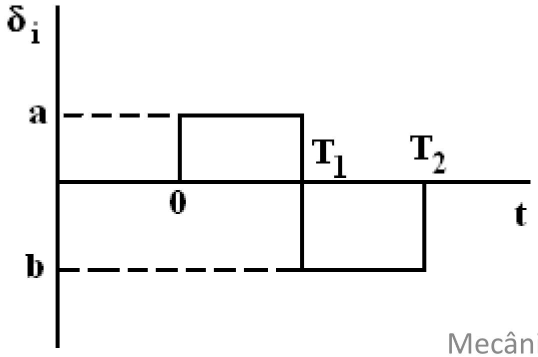
**Deve se conhecer o tipo de atuação nos comandos de controle.**




$$\Delta_i(s) = \frac{a}{s}$$




$$\Delta_i(s) = \frac{a}{s}(1 - e^{-sT})$$




$$\Delta_i(s) = \frac{a}{s} + \frac{b-a}{s}\, e^{-sT_1} - \frac{b}{s}\, e^{-sT_2}$$

## Equação do movimento látero-direcional:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_e tg\,\theta_e & 0 & 1 & tg\,\theta_e \\ \dfrac{g\cos\theta_e}{V_e} & \dfrac{y_\beta}{V_e} & sen\alpha_e & -cos\alpha_e \\ 0 & l_\beta & l_p & l_r \\ 0 & n_\beta & n_p & n_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \beta \\ p \\ r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{y_{\delta_a}}{V_e} & \dfrac{y_{\delta_r}}{V_e} \\ l_{\delta_a} & l_{\delta_r} \\ n_{\delta_a} & n_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix}$$

## Aplicando a transformada de Laplace

$$\begin{bmatrix} q_e tg\,\theta_e - s & 0 & 1 & tg\,\theta_e \\ \dfrac{g\cos\theta_e}{V_e} & \dfrac{y_\beta}{V_e} - s & sen\alpha_e & -cos\alpha_e \\ 0 & l_\beta & l_p - s & l_r \\ 0 & n_\beta & n_p & n_r - s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \beta \\ p \\ r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{y_{\delta_a}}{V_e} & \dfrac{y_{\delta_r}}{V_e} \\ l_{\delta_a} & l_{\delta_r} \\ n_{\delta_a} & n_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} = 0$$

## Funções de transferências

### a) Ângulo de rolamento $\varphi$

$$G_{\varphi\delta_i} = \frac{\varphi}{\delta_i} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & tg\,\theta_e \\ -\frac{y_{\delta_i}}{V_e} & \frac{y_\beta}{V_e} - s & sen\alpha_e & -cos\alpha_e \\ -l_{\delta_i} & l_\beta & l_p - s & l_r \\ -n_{\delta_i} & n_\beta & n_p & n_r - s \end{vmatrix}}{D}$$

**Que pode ser escrita como:**

$$D.G_{\phi\delta i} = \frac{1}{\cos\theta_e} \left| \Delta_{\theta i} s^2 + \left(\frac{Y_{\delta i}}{V_e} B_\theta - \frac{Y_\beta}{V_e} \Delta\theta_i + T_{\delta i}\right) s + \right.$$

$$\left. + \frac{Y_{\delta i}}{V_e} T_\beta - \frac{Y_\beta}{V_e} T_{\delta i} - Q_{\beta\delta i} \cos(\theta_e - \alpha_e) \right|$$

**Onde:**

$$\Delta\theta_a = \ell_{\delta a} \cdot \cos\theta_e + n_{\delta a} \operatorname{sen}\theta_e$$

$$\Delta\theta_r = \ell_{\delta r} \cos\theta_e + n_{\delta r} \operatorname{sen}\theta_e$$

$$T_{\delta a} = Q_{r_{\delta a}} \cos\theta_e - Q_{p_{\delta a}} \operatorname{sen}\theta_e$$

$$T_{\delta r} = Q_{r_{\delta r}} \cos\theta_e - Q_{p_{\delta a}} \operatorname{sen}\theta_e$$

$$Q_{r_{\delta a}} = \ell_r \cdot n_{\delta a} - \ell_{\delta a} \cdot n_r$$

$$Q_{r_{\delta r}} = \ell_r \cdot n_{\delta r} - \ell_{\delta r} \cdot n_r$$

$$Q_{p_{\delta a}} = \ell_p \cdot n_{\delta a} - \ell_{\delta a} \cdot n_p$$

$$Q_{p_{\delta r}} = \ell_p \cdot n_{\delta r} - \ell_{\delta r} \cdot n_p$$

**No caso de $\delta_a$ :**

$$D.G_{\phi\delta a} = K \left| s^2 + 2\xi_{\rho} \, \omega_{\rho} \, s + \omega_{\rho}^2 \right|$$

com

$$\omega_{\rho}^2 = \frac{\frac{Y_{\delta a}}{V_e} T_{\beta} - \frac{Y_{\beta}}{V_e} T_{\delta a} - Q_{\beta\delta a} \cos(\theta_e - \alpha_e)}{\Delta\theta_a}$$

e

$$2\xi_{\rho} \, \omega_{\rho} = \frac{\frac{Y_{\delta a}}{V_e} B_{\theta} - \frac{Y_{\beta}}{V_e} \Delta\theta_a + T_{\delta a}}{\Delta\theta_a}$$

**O denominador $D$:**

$$D = (s-a)(s-b)(s^2 + 2\omega_D \cdot \xi_D s + \omega_D^2)$$

**sendo:**

$a \triangleq$ é a raiz correspondente ao modo espiral,

$b \triangleq$ é a raiz correspondente ao modo de rolamento,

$\xi_D \triangleq$ é o amortecimento reduzido da oscilação de derrapagem (dutch roll => índice D!)

$\omega_D \triangleq$ é a frequência natural de tal modo.

**E a função de transferência:**

$$G_{\phi\delta a} = k \frac{s^2 + 2\xi_\rho \omega_\rho s + \omega_\rho^2}{(s-a)(s-b)(s^2+2\xi_D \omega_D s+ \omega_D^2)}$$

**Supondo as condições de voo e os coeficientes aerodinâmicos sejam tais que:**

$$\frac{\omega_\rho}{\omega_D} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\xi_\rho}{\xi_D} = 1$$

**Então, a função de transferência ficaria da forma:**

$$G_{\phi\delta a} = \frac{k}{(s-a)(s-b)}$$

**A resposta oscilatório a uma ação dos ailerons é suprimida, ou seja, ailerons não excitam mais o modo de vibração dutch roll, a medida que a relação $\frac{\omega_\rho}{\omega_D}$ e $\frac{\xi_\rho}{\xi_D}$ se aproxima da unidade a pilotagem se torna mais apreciável.**

**Essa é uma característica desejável na qualidade de voo látero-direcional**

## b) Ângulo de derrapagem $\beta$

### Função de transferência

$$D.G_{\beta\delta i} = \frac{Y_{\delta i}}{V_e} s^3 + \left[\Delta_{\alpha_i} - (n_r + \ell_p)\frac{Y_{\delta i}}{V_e} - q_e \, tg\, \theta_e \frac{Y_{\delta i}}{V_e}\right] s^2$$

$$+ \left\{A_{\delta i} + \frac{Y_{\delta i}}{V_e} Q_{pr} + \frac{g}{V_e} \Delta_{\theta i} + q_e \, tg\, \theta_e \left[\frac{Y_{\delta i}}{V_e}(n_r + \ell_p) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Delta_{\alpha_i}\right]\right\} s + \frac{g}{V_e} T_{\delta i} - q_e \, tg\, \theta_e \left(A_{\delta i} + \frac{Y_{\delta i}}{V_e} Q_{pr}\right)$$

## c) Velocidade de rolamento $p$

### Função de transferência

$$D.G_{p\delta i} = \ell_{\delta i}\, s^3 + \left[Q_{r\delta i} + \frac{Y_{\delta i}}{V_e}\,\ell_\beta - \frac{Y_\beta}{V_e}\,\ell_{\delta i} - q_e \,\mathrm{tg}\,\theta_e\,\ell_{\delta i}\right] s^2 +$$

$$\left[\frac{Y_{\delta i}}{V_e}\,Q_{r\beta} - \frac{Y_\beta}{V_e}\,Q_{r\delta i} - \cos\theta_e\,Q_{\beta\delta i} + q_e\,\mathrm{tg}\,\theta_e\left(\frac{Y_\beta}{V_e}\,\ell_{\delta i}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{Y_{\delta i}}{V_e}\,\ell_\beta - Q_{r\delta i}\right)\right] s + \frac{g}{V_e}\,\mathrm{sen}\,\theta_e\,Q_{\beta\delta i} +$$

$$+ q_e\,\mathrm{tg}\,\theta_e\left(\frac{Y_\beta}{V_e}\,Q_{r\delta i} - \frac{Y_{\delta i}}{V_e}\,Q_{r\beta} + \cos\theta_e\,Q_{\beta\delta i}\right)$$

## d) Velocidade de guinada $r$

### Função de transferência

$$D.G_{r\delta i} = n_{\delta i}\, s^3 + \left[\frac{Y_{\delta i}}{V_e} n_\beta - \frac{Y_\beta}{V_e} n_{\delta i} - Q_{p\delta i} - q_e\, tg\theta_e\, n_{\delta i}\right] s^2 +$$

$$\left[\frac{Y_\beta}{V_e} Q_{p\delta i} - sen\,\alpha_e\, Q_{\beta\delta i} - \frac{Y_{\delta i}}{V_e} Q_{p_\beta} + q_e\, tg\,\theta_e \times\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{Y_\beta}{V_e} n_{\delta i} + Q_{p\delta i} - \frac{Y_{\delta i}}{V_e} n_\beta\right)\right] s - \frac{g}{V_e} \cos\theta_e\, Q_{\beta\delta i} +$$

$$+ q_e\, tg\,\theta_e \left(\frac{Y_{\delta i}}{V_e} Q_{p\beta} + sen\,\theta_e\, Q_{\beta\delta i} - \frac{Y_\beta}{V_e} Q_{p\delta i}\right)$$

**Onde:**

$$Q_{r\delta i} = \ell_r \cdot n_{\delta i} - \ell_{\delta i} \cdot n_r ; \quad A_{\delta i} = Q_{p\delta i} \cos \alpha_e + Q_{r\delta i} \operatorname{sen} \alpha_e$$

$$Q_{p\delta i} = \ell_p \cdot n_{\delta i} - \ell_{\delta i} \cdot n_p$$

$$Q_{\beta\delta i} = \ell_\beta \cdot n_{\delta i} - \ell_{\delta i} \cdot n_\beta$$

$$\Delta\alpha_i = \ell_{\delta i} \operatorname{sen} \alpha_e - n_{\delta i} \cos \alpha_e$$

**Pode-se calcular a resposta da aeronaves através de uma variação nos controles látero-direcionais:**

$$\Delta_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta_i(t) \cdot dt = F|\delta_i(t)|$$

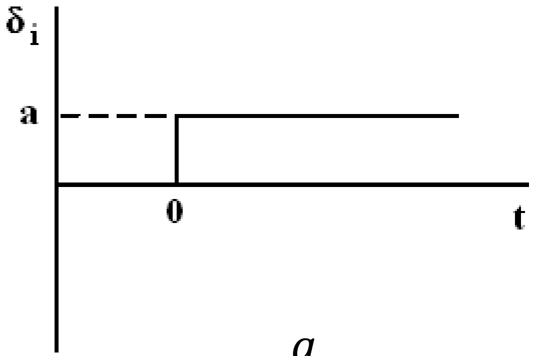
**Se a função de transferência de um dos quatro parâmetros $\varphi, \beta, p$ e $r$ é descrita por:**

$$G_{x\delta} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

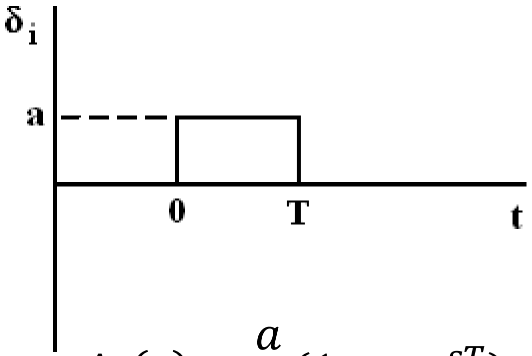
**$x(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $\frac{N(s)}{D(s)}\Delta_i(s)$:**

$$x(t) = F^{-1}\left|\frac{N(s)}{D(s)}\,\Delta_i(s)\right|$$

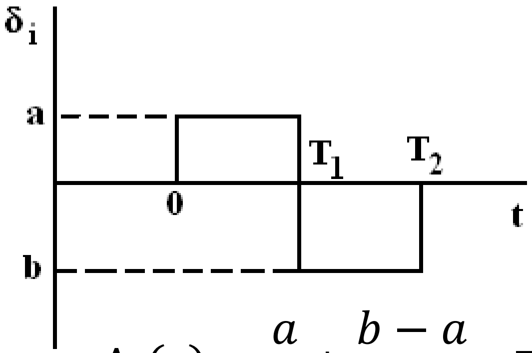
**Deve se conhecer o tipo de atuação nos comandos de controle.**




$$\Delta_i(s) = \frac{a}{s}$$




$$\Delta_i(s) = \frac{a}{s}(1 - e^{-sT})$$




$$\Delta_i(s) = \frac{a}{s} + \frac{b-a}{s}\,e^{-sT_1} - \frac{b}{s}\,e^{-sT_2}$$

**A transformada inversa de $\frac{1}{s}\frac{N(s)}{D(s)}$, onde $N(s)$ é um polinômio de terceiro grau e $D(s)$ é um polinômio de quarto grau que têm duas raízes reais $a$ e $b$ (modo espiral e de rolamento, respectivamente) e duas raízes complexas conjugadas $u \pm iv$ (dutch roll), assim:**

$$\frac{1}{s}F(s) = \frac{N_0 s^3 + N_1 s^2 + N_2 s + N_3}{s(s-a)(s-b)\left[(s+u)^2 + v^2\right]}$$

**A decomposição em frações parciais é dada por.**

$$\frac{1}{s}F(s) = \frac{P}{s} + \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{Qs + R}{(s+u)^2+v^2}$$

**A transformada de Laplace inversa resulta em.**

$$f(t) = P + Ae^{at} + Be^{bt} + Ke^{ut}\,\mathrm{sen}\,(vt + \psi)$$

$$f(t) = P + Ae^{at} + Be^{bt} + Ke^{ut}\,\text{sen}\,(vt + \psi)$$

**onde:**

$$P = \frac{N_3}{ab\ (u^2 + v^2)}$$

$$A = \frac{N_0 a^3 + N_1 a^2 + N_2 a + N_3}{a(a-b)\ |(a-u)^2 + v^2|}$$

$$B = \frac{N_0 b^3 + N_1 b^2 + N_2 b + N_3}{b(b-a)\ |(b-u)^2 + v^2|}$$

**$K$ e $\psi$ são dados por:**

$$K\ (\cos\psi + i\ \text{sen}\,\psi) = \frac{1}{v}\ \frac{N_0 Z^3 + N_1 Z^2 + N_2 Z + N_3}{Z(Z-a)\ (Z-b)}$$

**onde:**

$$Z = u + iv$$

**Para $f(0) = 0$:**

$$f(t) = A(e^{at}-1) + B(e^{bt}-1) + K\ e^{ut}\,|\text{sen}(vt+\psi) - \text{sen}\ \psi|$$

## APLICAÇÃO AO MIRAGE

**Condições de Voo:**

$$H = 9120m\,, Ve = 242,5\ m/s, \qquad \rho = 0,4583 kg/m^3, \qquad \alpha_e = 3,838°$$

**As raízes da equação características são então:**

$a = -2,5028 \times 10^{-2}$ ***(movimento espiral)***

$b = -1,4559$ ***(movimento de rolamento)***

$u \pm i\,v = -0,424226 \pm i\,2,5853$ ***(dutch roll)*** $\rightarrow \xi_D = 0,16194$, $\omega_D = 2,6198$, $T = 2,43s$

**Os coeficientes que intervêm no cálculo das raízes e das funções de transferência:**

| | | |
|---|---|---|
| $l_\beta = -12,988$ | $n_\beta = 5,9807$ | $\frac{y_\beta}{V_e} = -0,16223$ |
| $l_p = -1,531$ | $n_p = 4,6235 \times 10^3$ | |
| $l_r = 0,24042$ | $n_r = 0,6362$ | |
| $l_{\delta_a} = -85,438$ | $n_{\delta_a} = -2,5631$ | $\frac{y_{\delta_a}}{V_e} = 2,7039 \times 10^{-3}$ |
| $l_{\delta_r} = 4,4001$ | $n_{\delta_r} = -3,4773$ | $\frac{y_{\delta_r}}{V_e} = 2,0279 \times 10^{-2}$ |

## Numeradores das oito funções de transferência:

| | | $\phi$ | $\beta$ | p | r |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta_a$ | $N_0$ | 0 | $2,7039.10^{-3}$ | $-8,5438.10^{1}$ | -2,5631 |
| | $N_1$ | $-8,5610.10^{1}$ | -3,1362 | $-6,8867.10^{1}$ | -4,7188 |
| | $N_2$ | $-6,9182.10^{1}$ | -2,8087 | $-5,5192.10^{2}$ | $-3,6979.10^{1}$ |
| | $N_3$ | $-5,5439.10^{2}$ | -2,2294 | 1,4678 | $-2,1954.10^{1}$ |
| $\delta_r$ | $N_0$ | 0 | $2,0279.10^{-2}$ | 4,4001 | -3,4773 |
| | $N_1$ | 4,1676 | 3,8071 | 2,4143 | -5,7463 |
| | $N_2$ | 2,0301 | 5,6104 | $-1,8522.10^{1}$ | -1,9263 |
| | $N_3$ | $-1,8651.10^{1}$ | $6,4899.10^{-2}$ | $5,0559.10^{-2}$ | $-7,5621.10^{-}$ |

## Para o caso da função de transferência $G_{\varphi\delta_a}$, nota-se que:

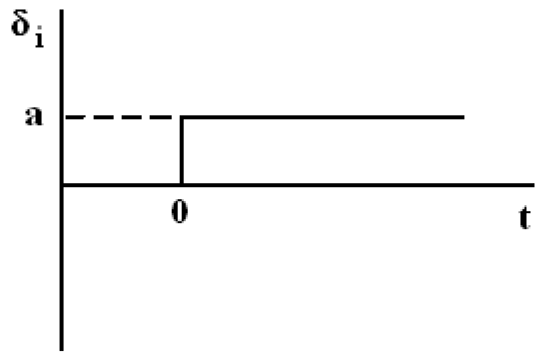
$$\omega_\rho = 2{,}5448$$

$$\xi_\rho = 0{,}15878$$

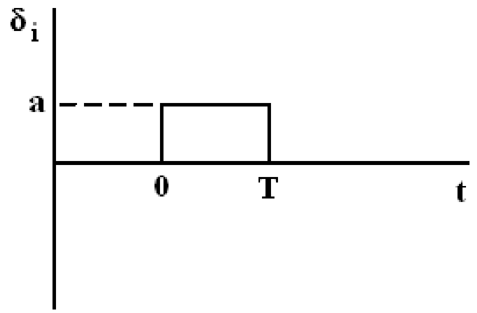
$$\frac{\omega_\rho}{\omega_D} = 0{,}97136$$

$$\frac{\xi_\rho}{\xi_D} = 0{,}98047$$

**A) Deflexão dos ailerons do tipo degrau $\delta_a = -0,1°$.**




**B) Deflexão dos aileron do tipo PULSO $\delta_a = -0,1°, e\ T = 1,25s$**




**C) deflexão do tipo**

$$\delta_a = -0,1°, \quad com \quad \Delta T_1 = 1,25s,$$
$$\delta_a = 0\ com\ \Delta T_2 = 0,1s$$
$$Seguida\ de\ função\ degrau\ \delta_a = 0,1$$

**D) deflexão do tipo :**

$$\boldsymbol{\delta_a = -0,1°, \quad com \quad \Delta T_1 = 1,25s,}$$
$$\boldsymbol{\delta_a = 0 \; com \, \Delta T_2 = 0,1s}$$
Seguida de pulso $\boldsymbol{\delta_a = 0,1 \; com \; \Delta T_3 = 1,25s,}$

### i. Reposta a uma deflexão do tipo A dos ailerons $(\delta_a = -0,1°)$:

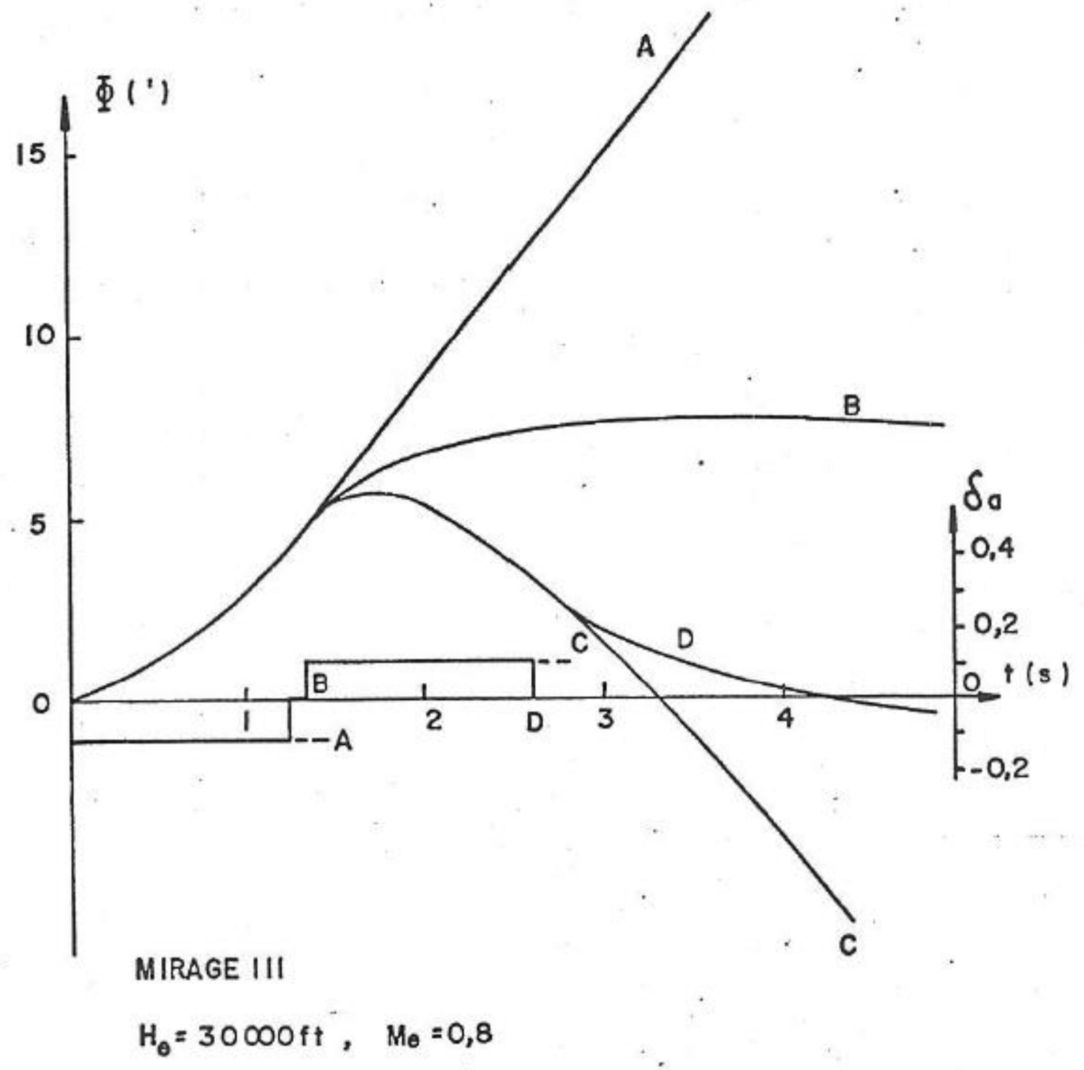
$$f(t) = A(e^{at}-1)+B(e^{bt}-1)+K\ e^{ut}|sen(vt+\psi)-sen\ \psi|$$

| | A | B | K | $\psi$ (rad) |
|---|---|---|---|---|
| $\phi$ $\|°\|$ | $2,2555\ 10^3$ | $-3,9354.10^1$ | $6,6802.10^{-1}$ | 1,9095 |
| $\beta$ $\|°\|$ | 8,8189 | $-2,9717.10^{-1}$ | $3,9312.10^{-1}$ | 1,6127 |
| p $\|°/s\|$ | -6,2191.10 | $5,7170.10^1$ | 1,8065 | -2,6525 |
| r $\|°/s\|$ | $8,5828.10^1$ | 1,8458 | $9,0502.10^{-1}$ | $1,2691.10^{-1}$ |

## ii. Reposta a uma deflexão do tipo A do leme ($\delta_r = 1°$):

$$f(t) = A(e^{at}-1)+B(e^{bt}-1)+K\,e^{ut}|\mathrm{sen}(vt+\psi)-\mathrm{sen}\,\psi|$$

| | A | B | K | $\psi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\phi$ \|°\| | $7{,}6309.10^{1}$ | $-7{,}9146.10^{-1}$ | $9{,}4861.10^{-1}$ | $-1{,}4237$ |
| $\beta$ \|°\| | $2{,}9846.10^{-1}$ | $-5{,}9779.10^{-3}$ | $5{,}5823.10^{-1}$ | $-1{,}7204$ |
| p \|°/s\| | $-2{,}1040$ | $1{,}1498$ | $2{,}5653$ | $2{,}9755.10^{-1}$ |
| r \|°/s\| | $2{,}9037$ | $3{,}7120.10^{-2}$ | $1{,}2851$ | $3{,}0770$ |


Φ (')
15
10
5
0
A
B
C
D
1
2
3
4
t (s)
δa
0,4
0,2
0
-0,2
MIRAGE III
Hₑ = 30000ft , Mₑ = 0,8

**Influência da velocidade de arfagem $q_e$:**

**Supondo que o Mirage III efetue uma manobra com um fator de carga igual a $n = 4$:**

$$\alpha_e = 15{,}3°$$

**E a velocidade de arfagem**

$$q_e = \frac{g}{V}(n-1) = 0{,}1213\, rad/s$$

**O ângulo de arfagem $\theta_e$, no momento onde a aeronave está no ponto mais baixo da manobra ($\gamma = 0$). Consequentemente:**

$$q_e \tan\theta_e = 3{,}3184 \times 10^{-2}\, rad/s$$

**Nessa condição temos os coeficiente $L$ e $N$**

$$L_\beta = -1{,}2739 \cdot 10^5 \qquad N_\beta = 3{,}8217 \cdot 10^5$$

$$L_p = -1{,}3569 \cdot 10^4 \qquad N_p = -2{,}4253 \cdot 10^3$$

$$L_r = 2{,}5811 \cdot 10^3 \qquad N_r = -3{,}4822 \cdot 10^4$$

**E os coeficientes $\ell$ e $n$:**

$$\ell_\beta = -1{,}2958 \cdot 10^{-1} \qquad n_\beta = 5{,}9807$$

$$\ell_p = -1{,}5249 \qquad n_p = -8{,}6168 \cdot 10^{-2}$$

$$\ell_r = 1{,}5833 \cdot 10^{-1} \qquad n_r = -6{,}4229 \cdot 10^{-1}$$

$$Y_\beta / V_e = -1{,}6223 \cdot 10^{-1}$$

**A equação característica se torna:**

$$s^4 + 2{,}2962\, s^3 + 10{,}455\, s^2 + 12{,}073\, s - 0{,}2191 = 0$$

**Cujas raízes são:**

$a = 0{,}017873$ $\quad (a' = -2{,}50 \cdot 10^{-2})$

$b = -1{,}3343$ $\quad (b' = -1{,}46)$

$u \pm iv = -0{,}48993 \pm i\ 2{,}9915$ $\quad (T = 2{,}1\ s!)$

$(u' \pm iv' = -0{,}424 \pm i\ 2{,}59)$ $\quad (T' = 2{,}43\ s\ !)$

**Constata-se que a aeronave tornou-se ligeiramente instável no modo espiral, o amortecimento do rolamento diminui em valor absoluto e a oscilação de derrapagem (dutch roll) é mais amortecida embora o seu período tenha diminuído ligeiramente**

**Considere agora um avião fictício com uma massa $m = 8000\,kg$ que voa a $H = 65000\,ft\ \left(\rho = 0{,}0907\,\frac{kg}{m^3}\right)$, $M = 2\ (V = 590{,}14\,m/s)$ e que possui os seguintes momento de inércias no sistema do avião e características aerodinâmicas.**

$I_x = 0{,}45 \cdot 10^4\ kgm^2$ ; $I_y = 6{,}5 \cdot 10^4\ kgm^2$ ;

$I_z = 6{,}95 \cdot 10^4\ kgm^2$ e $I_{xz} = 5{,}75 \cdot 10^3\ kgm^2$ .

$C_D = 0{,}0175 + 0{,}4\ C_L{}^2$ ; $S = 25\ m^2$ e $\ell = 5\ m$, $\alpha_F = 2^o$

$C_{y_\beta} = -0{,}6$ ; $C_{\ell_\beta} = -0{,}03$ ; $C_{n_\beta} = 0{,}08$

$C_L = \frac{\alpha}{30}$ ; $C_{\ell_p} = -0{,}12$ ; $C_{n_p} = 0{,}055$

$|\alpha| = {}^o$ ; $C_{\ell_r} = 0{,}06$ ; $C_{n_r} = -0{,}7$

## i. Voo horizontal permanente

$F_e = 12988$ N ; $\ell_\beta = -1,1468.10^{+1}$ ; $n_\beta = 1,3233$

$\alpha = 5^o,827$ ; $\ell_p = -4,7978.10^{-1}$ ; $n_p = -2,6459.10^{-2}$

$\dfrac{Y_\beta}{V_e} = -5,0171.10^{-2}$ ; $\ell_r = 8,6702.10^{-3}$ ; $n_r = -1,6772.10^{-1}$

**Equação característica do movimento látero direcional:**

$$s^4 + 0,69767\, s^3 + 2,5939\, s^2 + 1,3190 s + 3,0026.10^{-2} = 0$$

**Cujas raízes são:**

$a = -0,02388$ ; $u = -0,08465$

$b = -0,5045$ ; $v = 1,5765$ $(T = 3,99$ s!$)$

$a = -0{,}02388$ $\qquad u = -0{,}08465$

$b = -0{,}5045$ $\qquad v = 1{,}5765 \qquad (T = 3{,}99\ s!)$

**Constata-se que o movimento de dutch roll é pouco amortecido de modo que o amortecimento do modo de rolamento é igualmente fraco.**

## i. Voo a $n = -1$

$$F_e = 13035 \text{ N} \qquad \ell_\beta = -1{,}1468.10^{1} \;; \qquad n = 1{,}3233$$

$$\alpha = -5^{o}{,}895 \qquad \ell_p = -4{,}8593.10^{-1} \;; \qquad n_p = 1{,}9634.10^{-3}$$

$$\frac{Y_\beta}{V_e} = -5{,}0171.10^{-} \qquad \ell_r = 4{,}9763.10^{-2} \;; \qquad n_r = -1{,}6157.10^{-1}$$

**Equação característica do movimento látero direcional a $n = -1$ :**

$$s^4 + 0{,}70282\, s^3 + 0{,}2529\, s^2 + 0{,}6307\, s + 3{,}2852.10^{-2} = 0$$

**Cujas raízes a $n = -1$ são:**

$$a = -0{,}05306 \qquad u = 0{,}1879$$

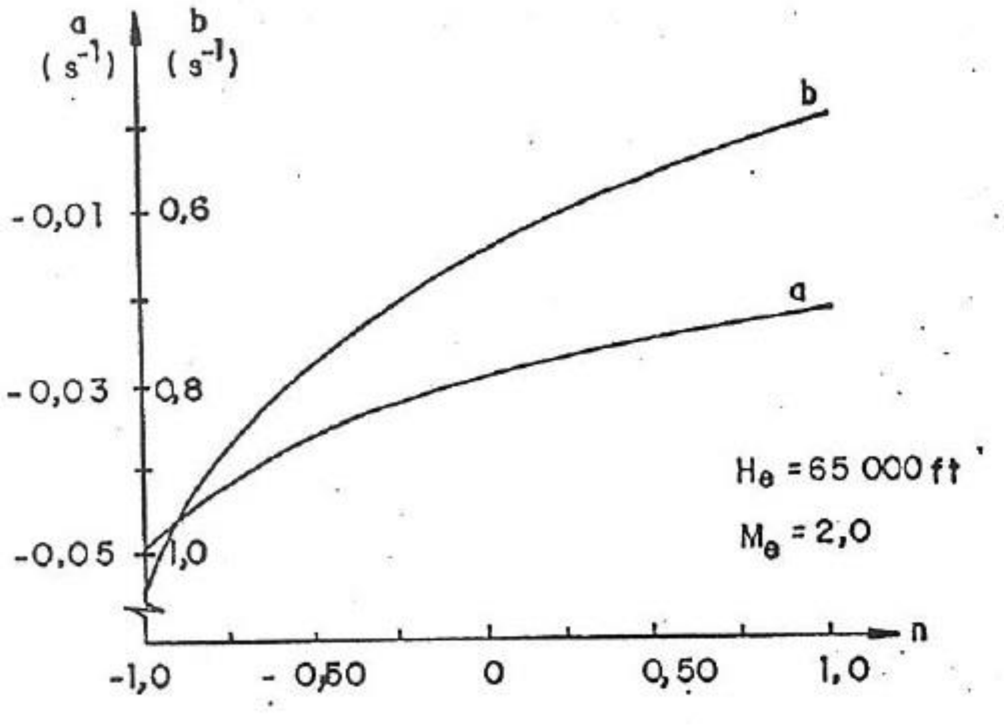
$$b = -1{,}0255 \qquad v = 0{,}784 \qquad (T = 8{,}33 \text{ s!})$$

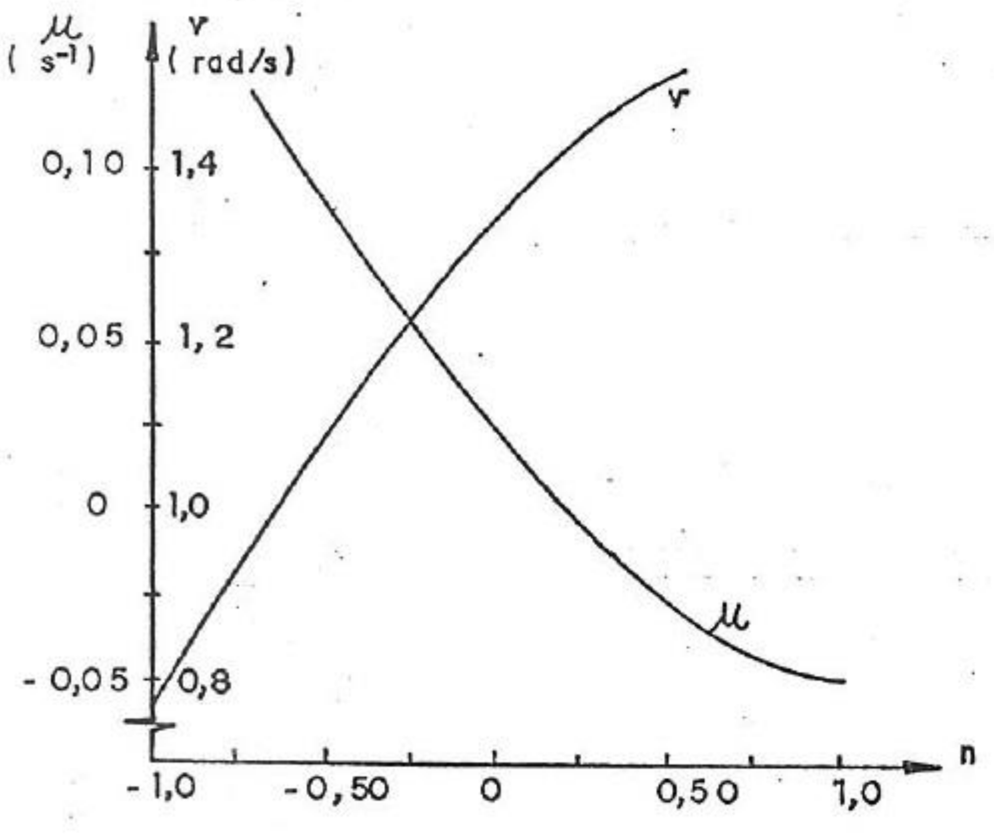
a = - 0,05306 u = 0,1879

b = - 1,0255 v = 0,784 (T = 8,33 s!)

**O dutch roll se tornou claramente divergente a** $n = -1$ , **a velocidade de arfagem a** $M = 2$**, na altitude dada é** $q_e = -0{,}033235\frac{rad}{s}$.

**Contata-se que o modo de oscilação dutch roll torna-se dinamicamente instável para um fator de carga ligeiramente negativo.**


a
( s⁻¹)
b
( s⁻¹)
b
a
-0,01
0,6
-0,03
0,8
-0,05
1,0
$H_e$ =65 000 ft
$M_e$ = 2,0
n
-1,0
- 0,50
0
0,50
1,0


μ
( s⁻¹)
r
( rad/s)
r
μ
0,10
1,4
0,05
1,2
0
1,0
- 0,05
0,8
n
- 1,0
-0,50
0
0,50
1,0