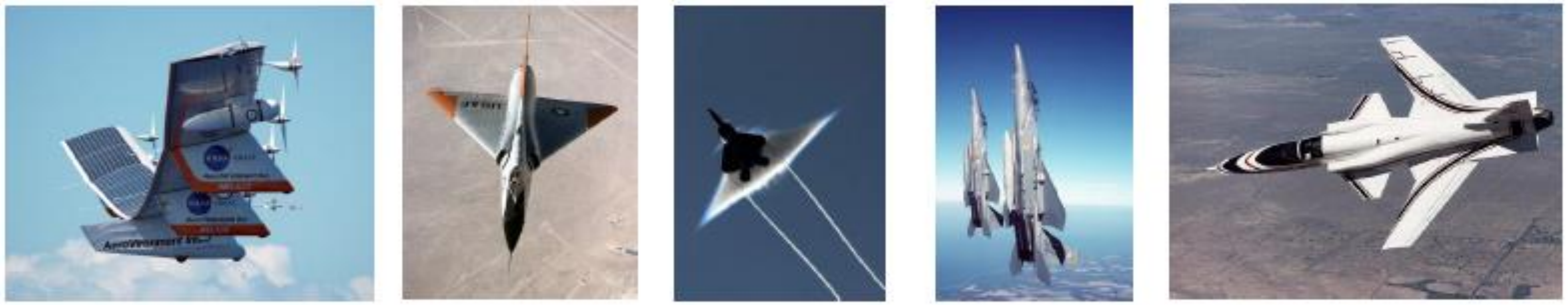
Universidade de Brasília

Faculdade UnB Gama

# Mecânica do Voo

## Voo Curvilíneo Horizontal Estabilizado



# Referências Bibliográficas


- **ITEN 2.3**: Paglione, P. ; Zanardi, M. C., Estabilidade e Controle de Aeronaves, ITA, 1990.
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, Dynamics of Flight – Stability and Control, John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003.


# 5. Voo Curvilíneo Horizontal Estabilizado

**ITEM 2.3 APOSTILA**

## 5. Voo Curvilíneo Horizontal Estabilizado (ITEM 2.3 DA APOSTILA)

**O vetor velocidade de rotação instantânea do sistema de referência da aeronaves é uma constante. Sendo representado por $\vec{\Omega} = (0,0,\Omega)$ no sistema NED, temos que as componentes $p, q$ e $r$ de $\vec{\Omega}$ no sistema do corpo são:**

$$\begin{Bmatrix} \bar{p} \\ q \\ r \end{Bmatrix} = D_b^{NED} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix} \quad .... \quad (1)$$

**Consequentemente:**

$$p = -\Omega \operatorname{sen} \Theta \quad ... \quad (2)$$

$$q = \Omega \cos \Theta \operatorname{sen} \Phi \quad ... \quad (3)$$

$$r = \Omega \cos \Theta \cos \Phi \quad ... \quad (4)$$

**A equações do movimento látero-direcional (notando que $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$), para $I_{XZ} = 0$, são:**

$$m\,\Omega\,V_e \cos\beta(\cos\theta\cos\phi\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha) = \frac{1}{2}\rho S V_e^2 (C_{Y_\beta}\cdot\beta + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta_r + C_{Y_{\delta a}}\cdot\delta a) + mg\cos\theta\operatorname{sen}\phi \tag{5}$$

$$(I_Z - I_Y)\,\Omega^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\rho S V_e^2\,\ell\,(C_{\ell_\beta}\cdot\beta - C_{\ell_p}\frac{\Omega\operatorname{sen}\theta\,\ell}{V_e} + C_{\ell_r}\frac{\Omega\cos\theta\cos\phi\,\ell}{V_e} + C_{\ell_{\delta a}}\cdot\delta_a + C_{\ell_{\delta r}}\cdot\delta r) \tag{6}$$

$$(I_X - I_Y)\,\Omega^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}\rho S V_e^2\,\ell\,(C_{n_\beta}\beta - C_{n_p}\frac{\Omega\operatorname{sen}\theta\,\ell}{V_e} + C_{n_r}\frac{\Omega\cos\theta\cos\phi\,\ell}{V_e} + C_{n_{\delta a}}\delta a + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r) \tag{7}$$

**Como $\theta$ e $\alpha$ são determinadas pelas equações do movimento longitudinal, para um dado valor de $\Omega$, há uma infinidade de combinações de $\varphi$ e $\beta$ possíveis, as quais correspondem as posições dos controles $\delta_a$ e $\delta_r$ (voo retilíneo $\Omega = 0$).**

**Simplificações:** $\cos\theta = 1, \cos\alpha = 1, \cos\beta = 1, \cos\varphi = 1$ **(nas equações do momento),** $\Omega \sin\varphi = 0, \quad \sin\alpha \sin\varphi = 0$ **e** $\Omega^2 = 0$**.**

**Definindo:**

$$\ell_\beta = \frac{\rho S V_e^2 \ell}{2 I_x} C_{\ell_\beta} \; ; \quad n_\beta = \frac{\rho S V_e^2 \ell}{2 I_z} C_{n_\beta}$$

$$\ell_p = \frac{\rho S V_e \ell^2}{2 I_x} C_{\ell_p} \; ; \quad n_p = \frac{\rho S V_e \ell^2}{2 I_z} C_{n_p}$$

$$\ell_r = \frac{\rho S V_e \ell^2}{2 I_x} C_{\ell_r} \; ; \quad n_r = \frac{\rho S V_e \ell^2}{2 I_z} C_{n_r}$$

$$\ell_{\delta_a} = \frac{\rho S V_e^2 \ell}{2 I_x} C_{\ell_{\delta a}} \; ; \quad n_{\delta a} = \frac{\rho S V_e^2 \ell}{2 I_z} C_{n_{\delta_a}}$$

$$\ell_{\delta_r} = \frac{\rho S V_e^2 \ell}{2 I_x} C_{\ell_{\delta_r}} \; ; \quad n_{\delta_r} = \frac{\rho S V_e^2 \ell}{2 I_z} C_{n_{\delta_r}}$$

**Nota:** **Nas relações relativas a $\beta, \delta_a$ e $\delta_r$ têm-se o produto $V_e^2 l$, enquanto que naquelas relativas a $p$ e $r$, têm-se o produto $V_e l^2$**

$$Y_\beta = \frac{\rho S V_e^2}{2m} C_{Y_\beta} \quad ; \quad Y_{\delta_a} = \frac{\rho S V_e^2}{2m} C_{Y_{\delta_a}} \quad ; \quad Y_{\delta_r} = \frac{\rho S V_e^2}{2m} C_{Y_{\delta_r}}$$

**Dessa forma temos as equações:**

$$\begin{cases} \Omega V_e \cos\Phi - Y_\beta \cdot \beta - Y_{\delta_r} \cdot \delta_r - Y_{\delta_a} \cdot \delta_a - g \operatorname{sen}\Phi = 0 \quad \ldots & (8) \\ \ell_\beta \cdot \beta + \ell_r \cdot \Omega + \ell_{\delta a} \cdot \delta a + \ell_{\delta_r} \cdot \delta_r = 0 & (9) \\ n_\beta \cdot \beta + n_r \cdot \Omega + n_{\delta_a} \cdot \delta a + n_{\delta_r} \cdot \delta_r = 0 & (10) \end{cases}$$

**Os seguintes casos particulares serão tratados:**

- **Curva com inclinação lateral nula** $\varphi = 0$
- **Curva com ângulo de derrapagem nulo** $\beta = 0$
- **Curva apenas com o manche** $\delta_r = 0$
- **Curva apenas com os pedais (leme de direção)** $\delta_a = 0$

**Para simplificar os efeitos parasitas são desconsiderados (i.e** $l_{\delta_r} = n_{\delta_a} = 0$**) bem como a forças laterais produzidas pela deflexões de leme de direção e ailerons (i.e** $Y_{\delta_r} = Y_{\delta_a} = 0$**). Dessa forma temos as equações:**

$$\begin{cases} \Omega V_e \cos\phi - Y_\beta \cdot \beta - g \operatorname{sen}\phi = 0 & (11) \\ \ell_\beta \cdot \beta + \ell_r \cdot \Omega + \ell_{\delta a} \cdot \delta a = 0 & (12) \\ n_\beta \cdot \beta + n_r \cdot \Omega + n_{\delta_r} \cdot \delta_r = 0 & (13) \end{cases}$$

$a)\ \varphi = 0$

$$\therefore \frac{\beta}{\Omega} = \frac{V_e}{Y_\beta} < 0 \quad (V_e > 0 \ \text{e} \ Y_\beta < 0\ !) \quad \ldots \quad (14)$$

$$\frac{\delta_r}{\Omega} = -\frac{n_\beta . \beta/\Omega + n_r}{n_{\delta_r}} < 0 \quad \left(- \frac{>0 . <0 + <0}{<0}\ !\right) \quad \ldots \quad (15)$$

$$\frac{\delta a}{\Omega} = -\frac{\ell_\beta . \beta/\Omega + \ell_r}{\ell_{\delta_a}} > 0 \quad \left(- \frac{<0 . <0 + >0}{<0}\ !\right) \quad \ldots \quad (16)$$

**Para uma curva a direita ($\Omega > 0$) com as asas niveladas, temos:**

- $\beta < 0$**: o vento vem da esquerda,**
- $\delta_r < 0$**: o pedal da direita é acionado e**
- $\delta_a > 0$**: o manche é deslocado a esquerda.**

$b)\ \beta = 0$

$$\therefore \frac{tg\ \phi}{\Omega} = V_e/g > 0 \qquad (17)$$

$$\frac{\delta_r}{\Omega} = -\frac{n_r}{n_{\delta_r}} < 0 \quad (- < 0/< 0\ !) \qquad (18)$$

$$\frac{\delta_a}{\Omega} = -\frac{\ell_r}{\ell_{\delta_a}} > 0 \quad (- > 0/< 0\ !) \qquad (19)$$

**Para uma curva a direita ($\Omega > 0$), temos:**

- $\varphi > 0$**: asa direita abaixada,**
- $\delta_r < 0$**: o pedal da direita é acionado e**
- $\delta_a > 0$**: o manche é deslocado a esquerda.**

**Tais posições das superfícies de controle látero-direcional correspondem a um regime permanente. Não se deve, portanto, surpreender o resultado anterior, ou seja, manche a esquerda para uma curva a direita. Para se passar do voo retilíneo para curvilíneo a direita, é necessário, naturalmente, que o manche seja deslocado a direita. O resultado anterior é válido para se manter o voo curvilíneo permanente e, nesse caso, o manche deve ser mantido a esquerda. Será visto ainda que tal posição é distante da posição neutra.**

**Tal manobra é chamada de "curva coordenada", o piloto mantendo a inclinação lateral, através do manche, necessária para que a variação desejada (velocidade e ângulos) seja obtida, e exerce, através dos pedais, a deflexão necessária para anular a derrapagem.**

*c)* $\delta_r = 0$

$$\therefore \quad \frac{\beta}{\Omega} = -\frac{n_r}{n_\beta} > 0 \quad (- < 0/> 0 \; !) \quad \ldots \qquad (20)$$

$$\frac{tg\,\phi}{\Omega} = \frac{V_e}{g}\left[1 - \frac{Y_\beta\,\beta}{V_e\Omega\cos\phi}\right] \quad \ldots \qquad (21)$$

**O termo** $-\frac{Y_\beta \beta}{V_e \Omega \cos\varphi}$ **é positivo. Isso significa que o ângulo** $\varphi$ **é superior (em módulo) aquele necessário pra fazer a curva coordenada (onde** $\frac{\tan\varphi}{\Omega} = \frac{V_e}{g}$**)**

$$\frac{\delta_a}{\Omega} = -\frac{n_\beta \ell_r - n_r \ell_\beta}{n_\beta \ell_{\delta_a}} \quad ? \quad \left(- \frac{?}{> 0 \; . \; < 0} \; !\right) \qquad (22)$$

**O termo** $\frac{\delta_a}{\Omega}$ **tem o mesmo sinal que** $n_\beta l_r - n_r l_\beta$**.**
**Para uma curva a direita (**$\Omega > 0$**), temos:**

- $\beta > 0$**: vento relativo a direita,**
- $\varphi > 0$**: asa direita mais baixa que no caso coordenado e**
- $\delta_a$ **: tem o mesmo sinal de** $n_\beta l_r - n_r l_\beta$**.**

**Para uma curva a direita ($\Omega > 0$), temos:**

- $\beta > 0$**: vento relativo a direita,**
- $\varphi > 0$**: asa direita mais baixa que no caso coordenado e**
- $\delta_a$ **: tem o mesmo sinal de** $n_\beta l_r - n_r l_\beta$**.**

**Se:**

- $n_\beta l_r - n_r l_\beta > 0$ **: Manche a esquerda;**
- $n_\beta l_r - n_r l_\beta < 0$ **: Manche a direita.**

**Será visto que a posição do manche tem ligação direta com a estabilidade espiral (regida pelo sinal de** $n_\beta l_r - n_r l_\beta$**)**

*d)* $\delta_a = 0$

$$\therefore \quad \frac{\beta}{\Omega} = -\frac{\ell_r}{\ell_\beta} > 0 \quad (- > 0/< 0\ !) \quad \ldots \qquad (23)$$

$$\frac{tg\ \Phi}{\Omega} = \frac{V_e}{g}\left| 1 - \frac{Y_\beta \cdot \beta}{V_e \Omega \cos \Phi} \right| \quad \ldots \qquad (24)$$

**O termo $-\frac{Y_\beta \beta}{V_e \Omega \cos\varphi}$ é positivo. Isso significa que o ângulo $\varphi$ é superior (em módulo) aquele necessário pra fazer a curva coordenada (onde $\frac{\tan\varphi}{\Omega} = \frac{V_e}{g}$)**

$$\frac{\delta_r}{\Omega} = \frac{n_\beta \ell_r - n_r \ell_\beta}{\ell_\beta\, n_{\delta_r}} \ ? \ \left( \frac{?}{< 0 \cdot < 0}\ ! \right) \qquad (25)$$

**O termo $\frac{\delta_r}{\Omega}$ tem o mesmo sinal que $n_\beta l_r - n_r l_\beta$.**
**Para uma curva a direita ($\Omega > 0$), temos:**

- $\beta > 0$**: vento relativo a direita,**
- $\varphi > 0$**: asa direita mais baixa que no caso coordenado e**
- $\delta_r$ **: tem o mesmo sinal de $n_\beta l_r - n_r l_\beta$.**

**Para uma curva a direita ($\Omega > 0$), temos:**

- $\beta > 0$: **vento relativo a direita,**
- $\varphi > 0$: **asa direita mais baixa que no caso coordenado e**
- $\delta_r$ : **tem o mesmo sinal de** $n_\beta l_r - n_r l_\beta$.

**Se:**

- $n_\beta l_r - n_r l_\beta > 0$ : **pedal esquerdo acionado;**
- $n_\beta l_r - n_r l_\beta < 0$ : **pedal direito acionado.**

**Nota: Para os dois tipos de curvas com um comando apenas, é necessário colocar o comando de rolamento ou guinada:**

- **No sentido favorável a curva (pedal direito ou manche direito para uma curva a direita) no caso de** $n_\beta l_r - n_r l_\beta < 0$
- **No sentido oposto (pedal esquerdo ou manche para a esquerda) no caso de** $n_\beta l_r - n_r l_\beta > 0$

**Portanto, no segundo caso, a curva tem a tendência de se fechar mais ainda e, portanto, é necessário que o piloto contrarie a tendência com a ajuda de uma ou de outra superfície de controle látero-direcional.**

**Dessa forma a expressão** $n_\beta l_r - n_r l_\beta$ **desempenha o papel da estabilidade do movimento, com** $n_\beta l_r - n_r l_\beta < 0$ **correspondendo ao caso estável.**

**Exemplo: AIRBUS em curva padrão, i.e. ,** $\Omega = 90°/min = \frac{\pi}{120}\frac{rad}{s} = 2{,}618 \times 10^{-2}\frac{rad}{s} = 1{,}5°/s$

**Condição de voo:** $H = 30000\ ft, M_e = 0{,}8\ (V_e = 242{,}84\ m/s)$

**Característica Aerodinâmica:**

| | $\beta$ | $p$ | $r$ | $\delta_a$ | $\delta_r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_y$ | $-1{,}5$ | $-$ | $-$ | $\mathbf{0,05}$ | $0{,}3$ |
| $C_l$ | $-1{,}3$ | $-1{,}3$ | $2{,}9$ | $-0{,}33$ | $\mathbf{0,25}$ |
| $C_n$ | $1{,}75$ | $-1{,}5$ | $-7{,}5$ | $-0{,}125$ | $\mathbf{-1,00}$ |

**Geometria – Massa – Inércias**

| | | |
|---|---|---|
| $S = 260\ m^2$ | $l = 6,61\ m$ | $m = 120000\ kg$ |
| $I_x = 5,55 \times 10^6\ kg\ m^2$ | $I_y = 9,72 \times 10^6\ kg\ m^2$ | $I_z = 14,51 \times 10^6\ kg\ m^2$ |
| $I_{yz} = 0$ | $I_{xz} = 0$ (apenas nesse caso) | $I_{xy} = 0$ |

**Exemplo: AIRBUS em curva padrão, i.e. ,** $\Omega = 90°/min = \frac{\pi}{120}\frac{rad}{s} = 2{,}618 \times 10^{-2}\frac{rad}{s} = 1{,}5°/s$

$\therefore$

$$\ell_r = 0{,}3329 \quad ; \quad n_r = -0{,}3266$$

$$Y_\beta/V_e = -0{,}1806 \quad ; \quad \ell_\beta = -5{,}476 \quad ; \quad n_\beta = 2{,}796$$

$$Y_{\delta_a}/V_e = 0{,}006021 \quad ; \quad \ell_p = -1{,}492 \quad ; \quad n_p = -0{,}06532$$

$$Y_{\delta_r}/V_e = 0{,}03613 \quad ; \quad \ell_{\delta_a} = -1{,}39 \quad ; \quad n_{\delta_a} = -0{,}1997$$

$$\ell_{\delta_r} = 1{,}053 \quad ; \quad n_{\delta_r} = -1{,}598$$

*a)* $\varphi = 0$ **(Supondo que** $Y_{\delta_r} = Y_{\delta_a} = 0$**)**

$$\frac{\beta}{\Omega} = \frac{V_e}{Y_\beta} = -5,537 \rightarrow \beta = -8^\circ,3$$

$$\frac{\delta_r}{\Omega} = \frac{n_\beta \frac{\beta}{\Omega} + n_r}{n_{\delta_r}} = -9,893 \rightarrow \delta_r = -14^\circ,84$$

$$\frac{\delta_a}{\Omega} = -\frac{\ell_\beta \frac{\beta}{\Omega} + \ell_r}{\ell_{\delta_a}} = 22,05 \rightarrow \delta_a = 33^\circ,08$$

$b)\ \beta = 0$ **(Desprezado $Y_{\delta_r}$)**

$$\frac{\operatorname{tg}\phi}{\Omega} = -\frac{V_e}{g} = 24{,}73 \rightarrow \operatorname{tg}\phi = 0{,}6475 \rightarrow \phi = 32^{\circ}{,}92$$

$$\frac{\delta_r}{\Omega} = -\frac{n_r}{n_{\delta_r}} = -0{,}2044 \rightarrow \delta_r = -0^{\circ}{,}31$$

$$\frac{\delta_a}{\Omega} = -\frac{\ell_r}{\ell_{\delta_a}} = 0{,}2395 \rightarrow \delta_a = 0^{\circ}{,}36$$

*c)* $\delta_r = 0$

$$\frac{\beta}{\Omega} = -\frac{n_r}{n_\beta} = 0{,}1168 \quad \rightarrow \quad \beta = 0^{\circ}{,}175$$

$$\operatorname{tg}\phi \quad 0{,}6475 \left[ 1 + \frac{0{,}02107}{\cos\phi} \right] \xrightarrow{\text{solução}} \phi = 33^{\circ}{,}88$$

$$\frac{\delta_a}{\Omega} = -\frac{n_\beta \, \ell_r - n_r \, \ell_\beta}{n_\beta \, \ell_{\delta_a}} = -0{,}2207 \quad \rightarrow \quad \delta_a = -0^{\circ}{,}3310$$

$d)\ \delta_a = 0$

$$\frac{\beta}{\Omega} = -\frac{\ell_r}{\ell_\beta} = 0{,}06079 \rightarrow \beta = 0°{,}092$$

$$\operatorname{tg}\phi = 0{,}6475 \left| 1 + \frac{0{,}01098}{\cos\phi} \right| \xrightarrow{\text{solucão}} \phi = 33°{,}26$$

$$\frac{\delta_r}{\Omega} = \frac{n_\beta\ \ell_r - n_r\ \ell_\beta}{\ell_\beta \cdot n_{\delta_r}} = -\ 0{,}09801 \rightarrow \delta_r = -\ 0°{,}15$$

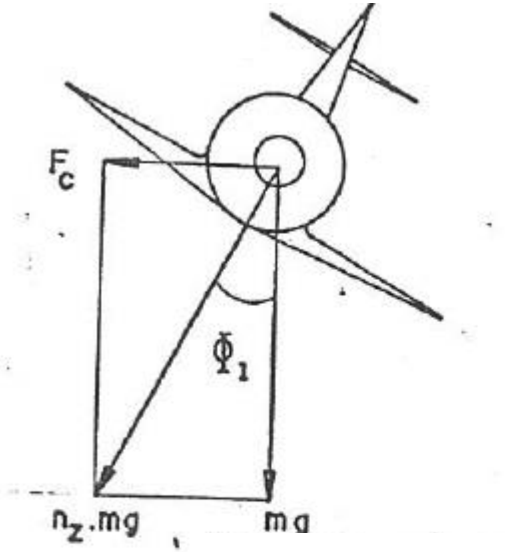
**Para se obter uma curva com uma velocidade angular $\Omega = 90°/min$ a $V_e = 242{,}84\ m/s$ (curva moderada) corresponde a um raio de $R = 9264m$, é necessário um ângulo de derrapagem e deflexões nas superfícies de controle látero-direcionais bastante grandes, para o caso da curva com asas niveladas (i. e. $\varphi = 0$), e que na prática jamais são usadas.**

**Além disso, este tipo de curva tem um grande inconveniente de provocar forças de inércias laterais muito desagradáveis para tripulação e passageiros, como pra os equipamentos da aeronaves. Nota-se que tais curvas são usadas frequentemente em navios.**

**Para $\beta = 0$, as duas superfícies de controles sofrem deflexões leves ($\delta_r = -0.31°$, no sentido favorável a curva e $\delta_a = 0.36°$, no sentido oposto a curva). Este é portanto o tipo de curva realizado na prática para aviões.**

**Nota-se ainda que o pequeno valor de $\frac{\delta_r}{\Omega}$ justifica então, o termo $Y_{\delta_r}\delta_r$ seja desprezado ($\Omega V_e$ é da ordem de $10^0$ sendo $\Omega$ em rad/s e $Y_{\delta_r}\delta_r$ é da ordem de $10^{-2}$ sendo $\delta_r$ em rad/s ).**

**Pequenas deflexões na superfícies de controle → forças aerodinâmicas situadas no plano de simetria da aeronaves .**




$$\text{tag } \phi_1 = \frac{F_c}{mg} = \frac{V_e^2}{gR} = \frac{1}{g} V_e \Omega \quad \ldots \qquad (26)$$

**Sendo $F_c$ a força centrípeta. Encontra-se para deflexões pequenas das superfícies de controle**

$$\text{tg } \phi_1 = \Omega \frac{V_e}{g}$$

**Para $\delta_r = 0$, curvas com acionamento do manche apenas , temos uma ângulo de inclinação maior que no caso coordenado ($\varphi_1 = 33{,}58°$ ao invés de $\varphi_1 = 32{,}92°$ ), a derrapagem é positiva e pequena $\beta = 0{,}175°$ , os ailerons são defletidos ligeiramente para a direita, no sentido da curva $\delta_a = -0{,}3310°$.**

**Para $\delta_a = 0$, curvas com acionamento dos pedais apenas, temos uma ângulo de inclinação maior que no caso coordenado ($\varphi_1 = 33{,}26°$ ao invés de $\varphi_1 = 32{,}92°$ ), a derrapagem é positiva e pequena $\beta = 0{,}092°$, o leme de direção é defletido ligeiramente para a direita, no sentido da curva $\delta_r = -0{,}15°$.**