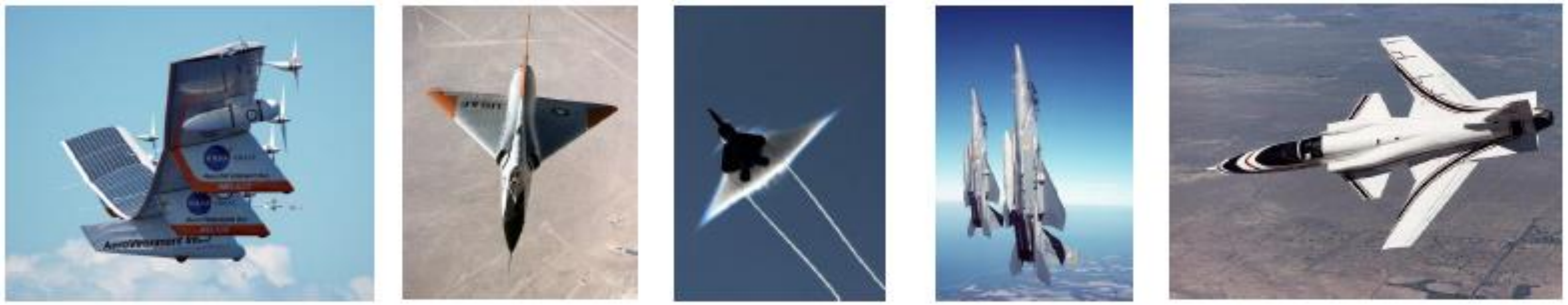
Universidade de Brasília    Faculdade UnB Gama

# Mecânica do Voo

## Resposta a uma variação de ângulo de ataque e potência



# Referências Bibliográficas


- **ITEN 1.9**: Paglione, P. ; Zanardi, M. C., Estabilidade e Controle de Aeronaves, ITA, 1990.
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, Dynamics of Flight – Stability and Control, John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003.

## 10.5 . Movimento fugoidal:

## RESPOSTA A UMA VARIAÇÃO DE ÂNGULO DE ATAQUE E POTÊNCIA

**ITEM 1.9.5 APOSTILA**

**Na forma vetorial:**

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \bar{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{X} + \bar{\boldsymbol{B}}\ \boldsymbol{U}$$

$$X = \begin{pmatrix} \Delta\hat{V} \\ \Delta H \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad \dot{X} = \begin{pmatrix} \Delta\dot{\hat{V}} \\ \Delta\dot{H} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\hat{F} \end{pmatrix} , \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} u_\alpha & u_F \\ 0 & 0 \\ \gamma_\alpha & \gamma_F \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} U_V & U_H & U_\gamma \\ 0 & 0 & V_e \\ \gamma_V & \gamma_H & 0 \end{pmatrix}$$

**X – INCLUI AS VARIÁVEIS DE ESTADO**
**U – INCLUI AS VARIÁVEIS DE CONTROLE**

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\hat{V}} \\ \Delta\dot{H} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_V & U_H & U_\gamma \\ 0 & 0 & V_e \\ \Gamma_V & \Gamma_H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{V} \\ \Delta H \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_\alpha & U_F \\ 0 & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\hat{F} \end{bmatrix}$$

$$U_V = (n_V - 2)\frac{g\varepsilon'_e}{V_e} \quad ; \quad U_H = (n_\rho - 1)\frac{g\varepsilon'_e}{V_e}\rho_H \quad ; \quad U_\gamma = -\frac{g}{V_e}$$

$$U_\alpha = -\left[\frac{g\varepsilon'_e}{V_e} tg(\alpha_e + \alpha_F) + \frac{D_\alpha}{V_e}\right] \quad ; \quad U_F = \frac{g\varepsilon'_e}{V_e}$$

$$\Gamma_V = \left[\frac{2\,g}{V_e} + (n_V - 2)\frac{g\varepsilon'_e}{V_e} tg(\alpha_e + \alpha_F)\right]$$

$$\Gamma_H = \left[\frac{g}{V_e} + (n_\rho - 1)\frac{g\varepsilon'_e}{V_e} tg(\alpha_e + \alpha_F)\right]\rho_H$$

$$\Gamma_\alpha = \frac{g\varepsilon'_e}{V_e} + \frac{L_\alpha}{V_e} \qquad \Gamma_F = \frac{g\varepsilon'_e}{V_e} tg(\alpha_e + \alpha_F)$$

Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias para x (t)

Solução para x (t)

*APLICA SE A* ***TRANSFORMADA DE LAPLACE*** *AO SISTEMA* $\mathcal{L}\,(x\,(t))$

*APLICA SE A* ***TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE*** *AO SISTEMA* $\mathcal{L}^{-1}\,(x\,(t))$

Sistemas de Equações Algébricas para X(s)

Solução para X (s)

**Considerando condições iniciais $\Delta\widehat{V_0} = \mathbf{0}\,, \Delta H_0 = \mathbf{0}, \Delta\gamma_0 = \mathbf{0}$**

**Aplicando a transformada de Laplace:**

$$\bar{V}\,s = U_V\bar{V} + U_H\overline{H} + U_\gamma\bar{\gamma} + U_\alpha\bar{\alpha} + U_F\bar{F}$$

$$\bar{H}\,s = V_e\,\bar{\gamma}$$

$$\bar{\gamma}\,s = \gamma_V\bar{V} + \gamma_H\overline{H} + \gamma_\alpha\bar{\alpha} + \gamma_F\bar{F}$$

**Sendo que $\bar{V}, \overline{H}\,, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}, \bar{F}$**

**são as transformadas de Laplace das variáveis de estado $\Delta\widehat{V}, \Delta H, \Delta\gamma, \Delta\alpha, \Delta\widehat{F}$**

**Reagrupando os termos:**

$$\begin{bmatrix} s - U_V & -U_H & -U_\gamma \\ 0 & s & -V_e \\ -\Gamma_V & -\Gamma_H & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{H} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\alpha\bar{\alpha} + U_F\bar{F} \\ 0 \\ \Gamma_\alpha\bar{\alpha} + \Gamma_F\bar{F} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s-U_V & -U_H & -U_\gamma \\ 0 & s & -V_e \\ -\Gamma_V & -\Gamma_H & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{H} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\alpha \bar{\alpha} + U_F \bar{F} \\ 0 \\ \Gamma_\alpha \bar{\alpha} + \Gamma_F \bar{F} \end{bmatrix}$$

**Multiplicando tudo por (-1):**

$$\begin{bmatrix} U_V - s & U_H & U_\gamma \\ 0 & -s & V_e \\ \Gamma_V & \Gamma_H & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{H} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_\alpha \bar{\alpha} - U_F \bar{F} \\ 0 \\ -\Gamma_\alpha \bar{\alpha} - \Gamma_F \bar{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ 0 \\ b2 \end{bmatrix}$$

**A SOLUÇÃO DESTE SISTEMA É DADA POR:**

$$\bar{V} = \frac{\det A_V}{det(\overline{A} - Is)} \qquad \bar{H} = \frac{det\ A_H}{det(\overline{A} - Is)} \qquad \bar{\gamma} = \frac{det\ A_\gamma}{det(\overline{A} - Is)}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} U_V & U_H & U_\gamma \\ 0 & 0 & V_e \\ \gamma_V & \gamma_H & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{det\,(\bar{A} - I\,s) = s^3 + A_1 s^2 + A_2 s + A_3}}$$

$$A_1 = -(n_V - 2)\frac{g}{V_e E'_e}$$

$$A_3 = \frac{g^2}{V_e E'_e}\rho_H(n_V - 2\,n_\rho)$$

$$A_2 = g\left[\left(\frac{2\,g}{V_e^2} - \rho_H\right)\left(1 - \frac{tg(\alpha_e + \alpha_F)}{E'_e}\right) + \frac{tg(\alpha_e + \alpha_F)}{E'_e}\left(n_V \frac{g}{V_e^2} - n_\rho \rho_H\right)\right]$$

$$\boxed{A_V = \begin{pmatrix} b1 & U_H & U_\gamma \\ 0 & -s & V_e \\ b2 & \gamma_H & -s \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{A_H = \begin{pmatrix} U_V - s & b1 & U_\gamma \\ 0 & 0 & V_e \\ \gamma_V & b2 & -s \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{A_\gamma = \begin{pmatrix} U_V - s & U_H & b1 \\ 0 & -s & 0 \\ \gamma_V & \gamma_H & b2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{b1 = -U_\alpha \bar{\alpha} - U_F \bar{F}}$$

$$\boxed{\mathrm{b}2 = -\Gamma_\alpha \bar{\alpha} - \Gamma_F \bar{F}}$$

**Considerando o caso de $\bar{F} = 0$, existindo só atuação no profundor:**

$$b1 = -U_{\alpha}\bar{\alpha}$$

$$b2 = -\Gamma_{\alpha}\bar{\alpha}$$

**A resposta da aeronave é:**

$$\bar{V} = \frac{\det A_V}{\det(\overline{A - Is})} = G_{V\alpha}\ \bar{\alpha}$$

$$\bar{H} = G_{H\alpha}\ \bar{\alpha}$$

$$\bar{\gamma} = G_{\gamma\alpha}\ \bar{\alpha}$$

$$G_{V\alpha}, G_{H\alpha}, G_{\gamma\alpha}$$

$\Rightarrow$

**Funções de transferência entre**

**a entrada $\bar{\alpha}$**

**E as saídas $\bar{V}, \bar{H}, \bar{\gamma}$**

**Do mesmo modo atuando apenas na manete com $\bar{\alpha} = 0$,**

$$b1 = -U_F \bar{F}$$

$$b2 = -\Gamma_F \bar{F}$$

$$\boxed{\bar{V} = \frac{\det A_V}{\det(\bar{A} - Is)} = G_{VF} \; \bar{F}}$$

$$\boxed{\bar{H} = G_{HF} \; \bar{F}}$$

$$\boxed{\bar{\gamma} = G_{\gamma F} \; \bar{F}}$$

$$\boxed{G_{VF}, G_{HF}, G_{\gamma F}}$$

$\Rightarrow$

**Funções de transferência entre**

**a entrada $\bar{F}$**

**E as saídas $\bar{V}, \bar{H}, \bar{\gamma}$**

**As seis funções de transferências $G_{V\alpha}, G_{H\alpha}, G_{\gamma\alpha}, G_{VF}, G_{HF}, G_{\gamma F}$ são obtidos por uma fração racional da forma:**

$$\frac{N_o s^2 + N_1 s + N_2}{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s + A_3}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $G_{V\alpha}$ | $N_o = U_\alpha$ | $N_1 = U_\gamma \Gamma_\alpha$ | $N_2 = V_e[U_H \Gamma_\alpha - U_\alpha \Gamma_H]$ |
| $G_{VF}$ | $N_o = U_F$ | $N_1 = U_\gamma \Gamma_F$ | $N_2 = V_e[U_H \Gamma_F - U_F \Gamma_H]$ |
| $G_{H\alpha}$ | $N_o = 0$ | $N_1 = V_e \Gamma_\alpha$ | $N_2 = V_e[\Gamma_V \mathrm{U}_\alpha - \Gamma_\alpha U_V]$ |
| $G_{HF}$ | $N_o = 0$ | $N_1 = V_e \Gamma_F$ | $N_2 = V_e[\Gamma_V \mathrm{U}_F - \Gamma_F U_V]$ |
| $G_{\gamma\alpha}$ | $N_o = \Gamma_\alpha$ | $N_1 = \Gamma_\mathrm{V} \mathrm{U}_\alpha - \Gamma_\alpha \mathrm{U}_V$ | $N_2 = 0$ |
| $G_{\gamma F}$ | $N_o = \Gamma_F$ | $N_1 = \Gamma_\mathrm{V} \mathrm{U}_F - \Gamma_\mathrm{F} \mathrm{U}_V$ | $N_2 = 0$ |

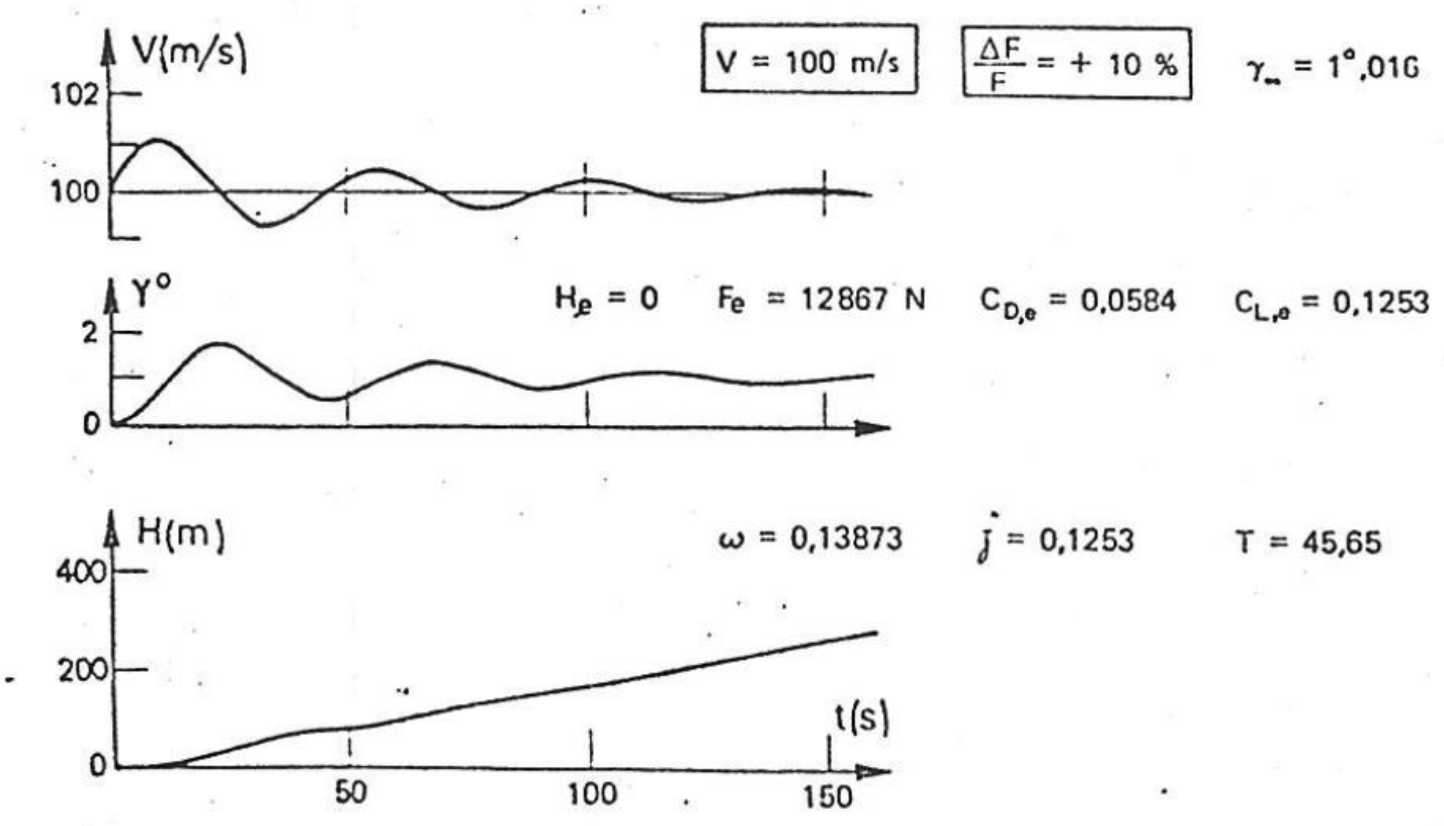
**A resposta para o caso geral de $\bar{\alpha} \neq 0$ $e\ \bar{F} \neq 0$,**

**pode ser realizada pelo mesmo procedimento.**

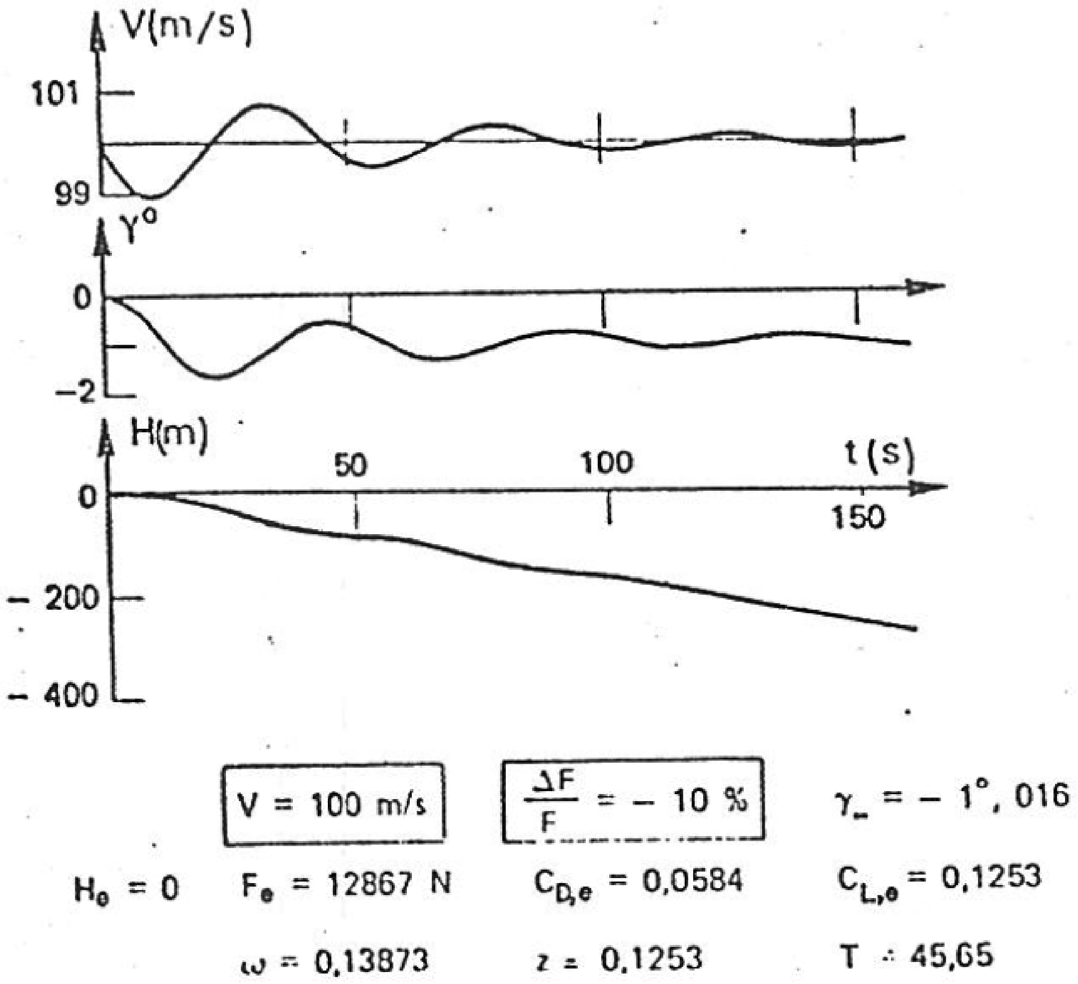
**AS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DEPENDERÃO DE $\bar{\alpha}$ $e\ \bar{F}$.**

**A resposta no tempo é determinada pela aplicação da transformada inversa de Laplace, admitindo se um tipo de variação para ângulo de ataque e manete.**

## AUMENTO DE TRAÇÃO : EVOLUÇÃO DO MIRAGE COM $V_e = 100\frac{m}{s}$, voo de subida.



## DIMINUIÇÃO DE TRAÇÃO : EVOLUÇÃO DO MIRAGE COM $V_e = 100\frac{m}{s}$, voo de descida



## OBSERVAÇÃO: FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA PARA MOVIMENTO LONGITUDINAL COMPLETO

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{U\}$$

**Com:**

$\boldsymbol{x}$ = $(\boldsymbol{\Delta\hat{V}, \gamma, \alpha, q\ e\ H})$

**e as componentes** $\boldsymbol{de\ U}$ **são:** $\boldsymbol{\Delta\delta_\rho\ e\ \Delta\pi}$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{51} & \cdots & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \vdots & \vdots \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

Com: $x = (\Delta\hat{V}, \gamma, \Delta\alpha, q\ , \Delta H)$

$$\delta_1 = \Delta\delta_\rho$$

$$e\ \delta_2 = \Delta\pi$$

**Após a aplicação da transformada de Laplace, as funções de transferência $G_{x_i\delta_j}$ que associam a saída $x_i$ com a entrada $\delta_j$ são dadas por**:

$$\boxed{G_{x_i\delta_j} = \frac{N_{ij}}{D}}$$

**Sendo D o determinante característico de [A] e $N_{ij}$ é obtido da substituição da i-ésima coluna da matriz (A-Is) pela j-ésima coluna de [-B].**