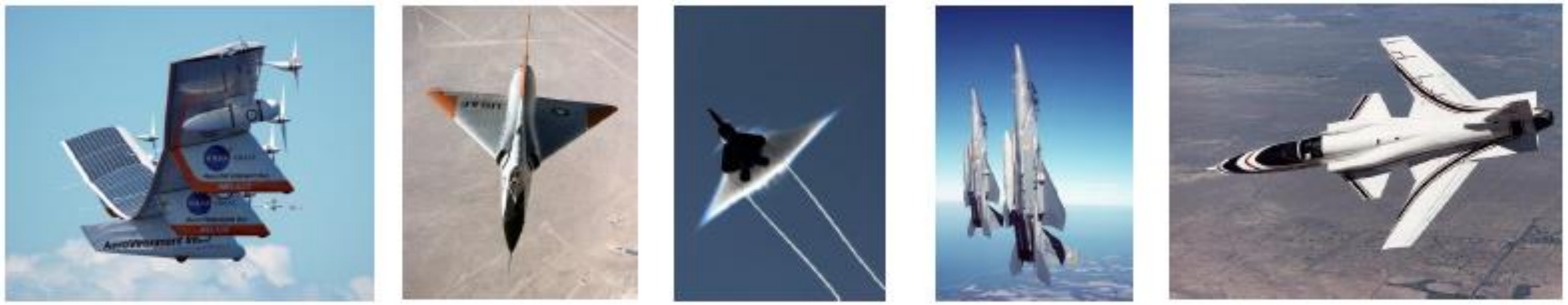
Universidade de Brasília

Faculdade UnB Gama

Mecânica do Voo

Estudo quantitativo do movimento fugoidal



Referências Bibliográficas

- **ITEN 1.9**: Paglione, P. ; Zanardi, M. C., Estabilidade e Controle de Aeronaves, ITA, 1990.
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, Dynamics of Flight – Stability and Control, John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003

10. Estudo quantitativo do movimento fugoidal

ITEM 1.9 APOSTILA

10.1. Linearização das equações do movimento

10.2. Movimento Fugoidal Livre:
resposta do movimento do CG à uma perturbação externa

10.3.Determinação do Retorno ao equilíbrio para o movimento fugoidal livre

10.4. Parâmetros que influenciam as características do movimento fugoidal

10.5. Resposta do avião a uma variação do ângulo de ataque e da potência

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA:

$$m\dot{V} = F\cos(\alpha + \alpha_F) - mg\ sen\,\gamma - \frac{1}{2}\rho\,S\,V^2\,C_D \quad \text{(1a)}$$

$$\dot{H} = V\ sen\,\gamma \quad \text{(1b)}$$

$$m\,V\,\dot{\gamma} = F\,\mathrm{sen}(\alpha + \alpha_F) - mg\ cos\,\gamma + \frac{1}{2}\rho\,S\,V^2\,C_L \quad \text{(1c)}$$

10.1. Linearização das equações do movimento

As equações de equilíbrio do voo horizontal:

$$F_e \cos(\alpha_e + \alpha_F) = \frac{1}{2}\rho_e S V_e^2 C_{D,e} \qquad \textbf{(2a)}$$

$$\dot{H} = 0 \qquad \textbf{(2b)}$$

$$mg - F_e sen(\alpha_e + \alpha_F) = \frac{1}{2}\rho_e S V_e^2 C_{L,e} \qquad \textbf{(2c)}$$

Efetuando (1) – (2), obtemos:

$$\boxed{m\dot{V} = F\cos(\alpha + \alpha_F) - F_e \cos(\alpha_e + \alpha_F) - mg\, sen\,\gamma - \frac{1}{2} S\,(\rho\, V^2 C_D - \rho_e\, V_e^2 C_{D,e})} \qquad \textbf{(3a)}$$

$$\boxed{\dot{H} = V\, sen\,\gamma} \qquad \textbf{(3b)}$$

$$\boxed{m\,V\,\dot{\gamma} = F\,\mathrm{sen}(\alpha + \alpha_F) - F_e\, sen\,(\alpha_e + \alpha_F) - mg\,(cos\,\gamma - 1) + \frac{1}{2} S(\rho\, V^2 C_L - \rho_e V_e^2 C_{L,e})} \qquad \textbf{(3c)}$$

Introduzimos aqui:

$$\Delta\hat{V} = \frac{V - V_e}{V_e} \;, \qquad \Delta H = H - H_e \;, \qquad \Delta\hat{F} = \frac{F - F_e}{F_e} \;, \qquad \Delta\gamma = \gamma - \gamma_e = \gamma$$

$$V - V_e = V_e \, \Delta\hat{V} \qquad\qquad V = V_e(\Delta\hat{V} + 1)$$

Na linearização vamos considerar a atmosfera padrão pela qual: $\rho_H = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dH} = -\frac{1}{T}\left(\frac{g}{R} + \frac{dT}{dH}\right)$

Vamos linearizar os diversos termos de (3), considerando pequenas variações em torno das condições de equilíbrio.

1. $sen\,\gamma = \gamma \quad e \quad \cos\gamma = 1$

2. $sen\,(\alpha + \alpha_F) = sen\,(\alpha_e + \alpha_F) + cos\,(\alpha_e + \alpha_F)\,\Delta\alpha, \qquad \Delta\alpha = (\alpha - \alpha_e)$

$$cos(\alpha + \alpha_F) = cos\,(\alpha_e + \alpha_F) - sen\,(\alpha_e + \alpha_F)\Delta\alpha$$

NOTA: **Salienta-se que as variações no ângulo de ataque $\Delta\alpha$ estão diretamente ligadas as variações do profundor $\Delta\delta$ e se $\Delta\delta = 0$ o ângulo de ataque permanece igual ao de equilíbrio. Assim $\Delta\alpha$ é uma variável de controle.**

3. Admitindo que a tração depende da velocidade V, da altitude H e da posição da manete π, temos:

$$\boldsymbol{F = F_e + \left[\frac{\partial F}{\partial V}\right]_e \Delta V + \left[\frac{\partial F}{\partial H}\right]_e \Delta H + \left[\frac{\partial F}{\partial \pi}\right]_e \Delta \pi}$$

Se para uma posição fixa da manete, a tração depende da velocidade e altitude através da relação

$$\boldsymbol{\frac{F}{F_e} = \left(\frac{V}{V_e}\right)^{n_V} \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{n_\rho}}$$

Então: $\boldsymbol{F = F_e + \left[\frac{\partial F}{\partial V}\right]_e V_e \Delta \hat{V} + \left[\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial H}\right]_e \Delta H}$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial V}\right]_e = n_V \frac{F_e}{V_e} \quad e \quad \left[\frac{\partial F}{\partial \rho}\right]_e = n_\rho \frac{F_e}{\rho_e} \quad \left[\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial H}\right]_e = F_e \; n_\rho \; \rho_H$$

$$F - F_e = F_e \left(n_V \Delta \hat{V} + n_\rho \rho_H \Delta H\right)$$

Definindo $\boldsymbol{\Delta \hat{F} = \left[\frac{\partial F}{\partial \pi}\right]_e \frac{\Delta \pi}{F_e}}$

$$F = F_e \left(1 + n_V \Delta \hat{V} + n_\rho \rho_H \Delta H + \Delta \hat{F}\right)$$

4. $\boldsymbol{F\,cos(\alpha + \alpha_F)}$

$F\cos(\alpha + \alpha_F) = F_e\,(1 + n_V \Delta\hat{V} + n_\rho \rho_H \Delta H + \Delta\hat{F})\{\boldsymbol{cos\,(\alpha_e + \alpha_F)} - \boldsymbol{sen\,(\alpha_e + \alpha_F)\Delta\alpha}\}$

Desprezando os termos de segunda ordem:

$F\cos(\alpha + \alpha_F) - F_e\,\boldsymbol{cos\,(\alpha_e + \alpha_F)} =$

$$\boldsymbol{F_e cos\,(\alpha_e + \alpha_F)}\,[\,n_V \Delta\hat{V} + n_\rho \rho_H \Delta H + \Delta\hat{F}] - F_e\,\boldsymbol{sen\,(\alpha_e + \alpha_F)}\;\;\Delta\alpha$$

5. $\boldsymbol{F\,\mathrm{sen}(\alpha + \alpha_F)}$

$F\,\mathrm{sen}(\alpha + \alpha_F) - F_e\,\boldsymbol{\mathrm{sen}\,(\alpha_e + \alpha_F)} =$

$$\boldsymbol{F_e sen\,(\alpha_e + \alpha_F)}\,[\,n_V \Delta\hat{V} + n_\rho \rho_H \Delta H + \Delta\hat{F}] + F_e\,\boldsymbol{cos(\alpha_e + \alpha_F)}\;\;\Delta\alpha$$

6. $\rho V^2 \; C_L$ ou $\rho V^2 \; C_D$

Vamos representar $\rho V^2 \; C_L = f(V, H, C_L)$

$$\rho V^2 \; C_L = \rho_e V_e^2 C_{L_e} + \left[\frac{\partial f}{\partial V}\right]_e \Delta V + \left[\frac{\partial f}{\partial H}\right]_e \Delta H + \left[\frac{\partial f}{\partial C_L}\right]_e \Delta C_L$$

$$\frac{\partial f}{\partial H} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial H} \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial V}\right]_e = 2\,\rho_e V_e C_{L_e} \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial C_L}\right]_e = \rho_e V_e^2 \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial H}\right]_e = \rho_e \rho_H V_e^2 C_{L_e}$$

Considerando $C_L = C_L(\alpha)$

$$\Delta C_L = C_L - C_{Le} = C_{L\alpha}\,\Delta\alpha$$

$$Lembrando\ \Delta\hat{V} = \frac{V - V_e}{V_e}$$

$$\Delta V = V_e\,\Delta\hat{V}$$

$$\rho V^2 \; C_L - \rho_e V_e^2 C_{L_e} = \rho_e V_e^2 \{ C_{Le}\ [\ 2\,\Delta\hat{V} + \rho_H\,\Delta H\ ] + C_{L\alpha}\,\Delta\alpha \}$$

$$\rho V^2 \; C_D - \rho_e V_e^2 C_{D_e} = \rho_e V_e^2 \{ C_{De}\ [\ 2\,\Delta\hat{V} + \rho_H\,\Delta H\ ] + C_{D\alpha}\,\Delta\alpha \}$$

Lembrando ainda que no voo horizontal de equilíbrio:

$$\boldsymbol{F_e \cos(\alpha_e + \alpha_F) = \frac{1}{2}\rho_e S V_e^2 C_{D_e} - \frac{mg}{E'_e}}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\rho_e S V_e^2 C_{L_e}} = mg\left(1 - \frac{tg\,(\alpha_e+\alpha_F)}{E'_e}\right)$$

Equações linearizadas são dadas por

$$\Delta\dot{\hat{V}} = (n_V - 2)\frac{g\,\varepsilon'_e}{V_e}\Delta\hat{V} + \left(n_\rho - 1\right)\rho_H\frac{g\,\varepsilon'_e}{V_e}\Delta H - \frac{g}{V_e}\gamma - \left(\frac{1}{2m}\rho_e\,S\,V_e^2\;C_{D\alpha} - \frac{g\;tg\,(\alpha_e+\alpha_F)}{V_e E'_e}\right)\Delta\alpha + \frac{g}{V_e E'_e}\;\Delta\hat{F}$$

$$\dot{H} = V_e\gamma$$

$$\dot{\gamma} = \left[\frac{2\,g}{V_e} + (n_V - 2)\frac{g\,\varepsilon'_e}{V_e}\;tg(\alpha_e + \alpha_F)\right]\Delta\hat{V} + \rho_H\left[\frac{g}{V_e} + \left(n_\rho - 1\right)\frac{g\,\varepsilon'_e}{V_e}\;tg(\alpha_e + \alpha_F)\right]\Delta H + \left(\frac{1}{2m}\rho_e\,S\,V_e^2\;C_{L\alpha} + \frac{g}{V_e E'_e}\right)\Delta\alpha + \frac{g\,tg(\alpha_e + \alpha_F)}{V_e E'_e}\;\Delta\hat{F}$$

Na forma vetorial:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \bar{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{X} + \bar{\boldsymbol{B}}\ \boldsymbol{U}$$

$$X = \begin{pmatrix} \Delta\hat{V} \\ \Delta H \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad \dot{X} = \begin{pmatrix} \Delta\dot{\hat{V}} \\ \Delta\dot{H} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\hat{F} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} U_\alpha & U_F \\ 0 & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_F \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} U_V & U_H & U_\gamma \\ 0 & 0 & V_e \\ \Gamma_V & \Gamma_H & 0 \end{pmatrix}$$

X – INCLUI AS VARIÁVEIS DE ESTADO
U – INCLUI AS VARIÁVEIS DE CONTROLE

10.2. Movimento Fugoidal Livre: resposta do movimento do CG à uma perturbação externa

Quando os controles não são acionados, mas uma perturbação externa altera os valores da velocidade, altitude e ângulo de trajetória:

$$\boxed{\dot{X} = \bar{A}\ X}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} U_V & U_H & U_\gamma \\ 0 & 0 & V_e \\ \Gamma_V & \Gamma_H & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_V = (n_V - 2)\frac{g}{V_e\,E_e{}'} \quad ; \quad U_H = (n_\rho - 1)\frac{g}{V_e E_e{}'}\rho_H; \quad U_\gamma = \frac{-g}{V_e}$$

$$\Gamma_V = \left[\frac{2\,g}{V_e} + (n_V - 2)\frac{g}{V_e E_e{}'}tg(\alpha_e + \alpha_F)\right] \qquad \Gamma_H = \left[\frac{g}{V_e} + (n_\rho - 1)\frac{g}{V_e E'{}_e}tg(\alpha_e + \alpha_F)\right]\rho_H$$

A solução dependerá das raízes da equação característica: $\det(\bar{A} - I_3 s) = 0$

$$\boxed{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s + A_3 = 0}$$

$$\boxed{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s + A_3 = 0}$$

$$A_1 = -(n_V - 2)\frac{g}{V_e E'_e}$$

$$A_3 = \frac{g^2}{V_e E'_e}\rho_H (n_V - 2\, n_\rho)$$

$$A_2 = g\left[\left(\frac{2\,g}{V_e^2} - \rho_H\right)\left(1 - \frac{tg(\alpha_e + \alpha_F)}{E'_e}\right) + \frac{tg(\alpha_e + \alpha_F)}{E'_e}\left(n_V \frac{g}{V_e^2} - n_\rho \rho_H\right)\right]$$

No movimento fugoidal as raízes da equação característica admitem em geral uma raiz real (s_1) e um par de raízes complexas ($s_{2,3} = a \pm i\, b$), de modo que a solução é:

$$x = A\, e^{s_1 t} + K\, e^{at}\, sen\,(b\, t + \Psi_x)$$

ou

$$x = A\, e^{s_1 t} + e^{at}\,(B \cos bt + C\; sen\; b\, t)$$

Se $a < 0$ e $s_1 < 0$ então a solução será amortecida e após uma perturbação externa o avião retornará ao voo de equilíbrio inicial.

APLICAÇÃO 1: avião MIRAGE III com as seguintes características:

$$m = 7400\ kg, \quad S = 36\ m^2\ , \quad \alpha_F = 0\ , \quad C_{L,\alpha} = \alpha/26, (\alpha\ em\ graus)$$
$$C_D = 0{,}015 + 0{,}4\ C_L^2$$

Condições de equilíbrio:

$$H_e = 0\ \ (T = 288{,}15\ K), \quad V_e = 200\ m/s, \quad (\boldsymbol{\rho_H = -9,6\ x\ 10^{-5}\ m^{-1}})$$

$$F_e = 15591\ N; \quad \alpha_e = 2{,}122°\ ; \quad C_{L,e} = 0{,}0816\ ; \quad C_{D,e} = 0{,}01767$$

$$E'_e = 4{,}621 + 0{,}037 = 4{,}658$$

Para baixa velocidade (avião à jato) tem-se que:

$$n_V = 0 \quad e \quad n_\rho = 1$$

→ **Pode se calcular os coeficientes da equação característica**

$$\boldsymbol{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s + A_3 = 0}$$

$A_1 = 0{,}0216$ $A_3 = 1{,}982 \times 10^{-5}$

$$A_2 = 9{,}80665\,(5{,}817 \times 10^{-4} + 7{,}63 \times 10^{-7}) = 5{,}712 \times 10^{-3}$$

e as raízes são:

$$s_1 = -3{,}508 \times 10^{-3}$$
$$s_2 = -8{,}773 \times 10^{-3} + i\ 0{,}07465$$
$$s_3 = -8{,}773 \times 10^{-3} - i\ 0{,}07465$$

O retorno ao equilíbrio é a soma de dois movimentos:

Um movimento aperiódico da forma : $\boldsymbol{x_1 = e^{-3{,}508\,.10^{-3}t}}$

Um movimento sinusoidal amortecido da forma:

$$\boldsymbol{x_2 = e^{-8{,}773\,,10^{-3}t}\cos(0,07465\ t)}$$

com período de $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{0{,}07465} = 84,16\ s}$

Um movimento aperiódico da forma : $x = e^{-3{,}508\,.10^{-3}t}$,
CONDUZ A UM RETORNO MUITO LENTO AO EQUILÍBRIO

t [minutos]	0	1	2	3	4	20=1200s
x	1	0,810	0,656	0,532	0,122	0,015

Um movimento sinusoidal amortecido da forma:

$$x = e^{-8{,}773\,{,}10^{-3}t}\cos(0{,}07465\,t)$$

É IGUALMENTE AMORTECIDO. ESSA É A OSCILAÇÃO FUGOIDAL.

t [segundos]	0	84,16	168,32	252,48	420,80
t [período]	0	T	2T	3T	5T
x	1	0,478	0,228	0,109	0,015

APLICAÇÃO 2:

Supondo, agora, que o avião se encontra numa atmosfera cuja densidade é constante.

$$\boldsymbol{\rho_H = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dH}} \longrightarrow \rho_H = 0 \longrightarrow A_3 = \frac{g^2}{V_e E'_e}\rho_H\left(n_V - 2\,n_\rho\right) = 0$$

ou seja, procura-se ver qual a influência desta hipótese simplificada.

NESTE CASO: $A_1 = 0{,}0216$ $A_2 = 4{,}770\,.\,10^{-3}$

AS RAIZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$\boldsymbol{s_1 = 0}$

$s_2 = -10{,}53\,.\,10^{-3} + i\;0{,}06826$

$s_3 = -10{,}53\,.\,10^{-3} - i\;0{,}06826$

MOVIMENTO APERIÓDICO SE ANULA.

Movimento fugoidal se tornou mais amortecido, com um período de oscilação maior ($\boldsymbol{T = 92,05s}$)

10.3.Determinação do Retorno ao equilíbrio para o movimento fugoidal livre

A partir das condições iniciais dadas, isto é, $\Delta\hat{V}(0), \gamma(0) e\ \Delta H(0)$ tem-se que:

$$\Delta\hat{V} = A_V e^{s_1 t} + k_V e^{at}\, sen(bt + \psi_V)$$

$$\Delta H = A_H e^{s_1 t} + k_H e^{at}\, sen(bt + \psi_H)$$

$$\Delta\gamma = \gamma = A_\gamma e^{s_1 t} + k_\gamma e^{at}\, sen(bt + \psi_\gamma)$$

sendo que as nove constantes $A_i\,, k_i, \psi_i\ (\, i = V, H, \gamma)$ dependem das condições iniciais.

Ou ainda:

$$\Delta\hat{V} = A_V e^{s_1 t} + e^{at}\,[B_V \cos bt + C_V\, senbt]$$

$$\Delta H = A_H e^{s_1 t} + e^{at}\,[B_H \cos bt + C_H\, senbt\,]$$

$$\Delta\gamma = \gamma = A_\gamma e^{s_1 t} + e^{at}\,[B_\gamma \cos bt + C_\gamma\, senbt]$$

Para x = $\Delta\hat{V}, \Delta H, \Delta\gamma$:

$$x = A\,e^{s_1 t} + K\,e^{at}\,sen\,(bt + \psi)$$

$$x = A\,e^{s_1 t} + e^{at}(B\cos bt\ + C\ sen\ bt)$$

A relação entre as constantes *K, B* e *C* é dada por:

$$\boldsymbol{K\ sen\ \psi = B}$$
$$\boldsymbol{K\ cos\ \psi = C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\psi = arctan\left(\frac{B}{C}\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{K^2 = B^2 + C^2}}$$

As constantes são determinadas pelas condições iniciais

$$\dot{x} = A\,s_1\,e^{s_1 t} + e^{at}(B'\cos bt\ + C'\ sen\ bt)$$
$$\ddot{x} = A\,s_1^2 e^{s_1 t} + e^{at}(B''\cos bt\ + C''\ sen\ bt)$$

nas quais

$$B' = aB + bC \qquad C' = aC - bB$$

$$B'' = aB' + bC' \qquad C'' = aC' - bB'$$

Para x = $\Delta\widehat{V}, \Delta H, \Delta\gamma$:

Conhecendo-se os valores de $x, \dot{x}, \ddot{x}$ no instante inicial (t=0), isto é, $x_o, \dot{x}_o, \ddot{x}_o$, tem-se para cada x que:

$$x_o = A + B$$
$$\dot{x}_o = A\, s_1 + B' = As_1 + aB + bC$$
$$\ddot{x}_o = A\, s_1^2 + a\, B' + b\, C' = A\, s_1^2 + (a^2 + b^2) + 2abC$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_o \\ \dot{x}_o \\ \ddot{x}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s_1 & a & b \\ s_1^2 & a^2 - b^2 & 2ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Cuja solução:

$$A = x_o \frac{a^2 + b^2}{d} - \dot{x}_o \frac{2a}{d} + \ddot{x}_o \frac{1}{d}$$

$$C = x_o \frac{s_1(a^2 - b^2 - s_1\, a)}{b\, d} + \dot{x}_o \frac{s_1^2 + b^2 - a^2}{b\, d} + \ddot{x}_o \frac{a - s_1}{b\, d}$$

$$B = x_o \frac{s_1\,(s_1 - 2\, a)}{d} + \dot{x}_o \frac{2a}{d} - \ddot{x}_o \frac{1}{d}$$

$$d = (s_1 - a)^2 + b^2$$

Válidas para cada variável
x = $\Delta\widehat{V}, \Delta H, \Delta\gamma$

Dispondo-se das condições iniciais $\Delta\hat{V}_o$, ΔH_o e $\Delta\gamma_o = \gamma_o$, as derivadas primeiras e segundas são deduzidas por:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\hat{V}}_o \\ \Delta\dot{H}_o \\ \Delta\dot{\gamma}_o \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \Delta\hat{V}_o \\ \Delta H_o \\ \Delta\gamma_o \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} \Delta\ddot{\hat{V}}_o \\ \Delta\ddot{H}_o \\ \Delta\ddot{\gamma}_o \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\hat{V}}_o \\ \Delta\dot{H}_o \\ \Delta\dot{\gamma}_o \end{bmatrix}$$

Com:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} U_V & U_H & -\frac{g}{V_e} \\ 0 & 0 & V_e \\ \Gamma_V & \Gamma_H & 0 \end{bmatrix}$$

APLICAÇÃO: AIRBUS

Dados:

$$H_e = 9000\ m \qquad V_e = 200\ m/s$$

$$m = 120000\ kg$$

$$\ell = 6{,}61\ m \qquad I_y = 9{,}72\ .\ 10^6\ kg\ m^2$$

$$C_D = 0{,}0175 + 0{,}06\ C_L^2 \qquad C_L = \frac{\alpha}{11{,}5} \quad (\alpha\ em\ graus)$$

$$C_{L\alpha} = 4{,}982\ rad^{-1} \qquad C_{L\delta} = 0{,}435\ rad^{-1} \qquad C_{Lq} = -0{,}7 \qquad C_{L\dot{\alpha}} = -3$$

$$C_{m\alpha} = -1{,}246 \qquad C_{m\delta} = -1{,}46 \qquad C_{mq} = -15 \qquad C_{m\dot{\alpha}} = -5 \qquad C_{mo} = -0{,}025$$

Vamos analisar 3 condições iniciais:

a) $\Delta\hat{V}_0 = 0{,}01 \; (\Delta V = 2\, m/s)$ $\Delta H_o = 0$ $\Delta\gamma_o = \gamma_o = 0$

b) $\Delta\hat{V}_0 = 0$ $\Delta H_o = 100m$ $\Delta\gamma_o = \gamma_o = 0$

c) $\Delta\hat{V}_0 = 0{,}01 \; (\Delta V = 2\, m/s)$ $\Delta H_o = 10m$ $\Delta\gamma_o = \gamma_o = 1° \; (0{,}01745\, rad)$

Matriz $\overline{A}$ do sistema de equações iniciais:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -5{,}88707\,.\,10^{-3} & 0 & -4{,}90333\,.\,10^{-2} \\ 0 & 0 & 200 \\ 9{,}74698\,.\,10^{-2} & -5{,}190645\,.\,10^{-6} & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica:

$$s^3 + 0{,}58871\,.\,10^{-2}s^2 + 0{,}59606\,.\,10^{-2}s + 0{,}69543\,.\,10^{-6} = 0$$

cujas raízes são:

$$\boldsymbol{s_1 = -1,1678\,.\,10^{-3}}$$

$$\boldsymbol{s_2 = -2,35963\,.\,10^{-3} + i\,.\,7,71328\,.\,10^{-2}}$$

$$\boldsymbol{s_2 = -2,35963\,.\,10^{-3} - i\,.\,7,71328\,.\,10^{-2}}$$

$$\boxed{a = \boldsymbol{-2,35963\,.\,10^{-3}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{b = 7,71328\,.\,10^{-2}}}$$

$\boldsymbol{s_1 = -1,1678\,.\,10^{-3}}$ $\boldsymbol{a = -2,35963\,.\,10^{-3}}$ $\boldsymbol{b = 7,71328\,.\,10^{-2}}$

Solução:

$$\Delta\hat{V} = A_V e^{s_1 t} + k_V e^{at}\, sen(bt + \psi_V)$$

$$\Delta H = A_H e^{s_1 t} + k_H e^{at}\, sen(bt + \psi_H)$$

$$\Delta\gamma = \gamma = A_\gamma e^{s_1 t} + k_\gamma e^{at}\, sen(bt + \psi_\gamma)$$

ou

$$\Delta\hat{V} = A_V e^{s_1 t} + e^{at}\,[B_V \cos bt + \ C_V\, senbt]$$

$$\Delta H = A_H e^{s_1 t} + e^{at}\,[B_H \cos bt + \ C_H\, senbt\ ]$$

$$\Delta\gamma = \gamma = A_\gamma e^{s_1 t} + e^{at}\,[B_\gamma \cos bt + \ C_\gamma\, senbt]$$

Primeiro caso

$$\Delta\hat{V}_0 = 0,01\ (\Delta V = 2\ m/s) \qquad \Delta H_o = 0 \qquad \Delta\gamma_o = \gamma_o = 0$$

Condições iniciais

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{\hat{V}}_o\\ \Delta\dot{H}_o\\ \Delta\dot{\gamma}_o\end{bmatrix} = \bar{A}\begin{bmatrix}\Delta\hat{V}_o\\ \Delta H_o\\ \Delta\gamma_o\end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix}\Delta\ddot{\hat{V}}_o\\ \Delta\ddot{H}_o\\ \Delta\ddot{\gamma}_o\end{bmatrix} = \bar{A}\begin{bmatrix}\Delta\dot{\hat{V}}_o\\ \Delta\dot{H}_o\\ \Delta\dot{\gamma}_o\end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix}-5{,}88707\,.\,10^{-3} & 0 & -4{,}90333\,.\,10^{-2}\\ 0 & 0 & 200\\ 9{,}74698\,.\,10^{-2} & -5{,}190645\,.\,10^{-6} & 0\end{bmatrix}$$

$$\Delta\hat{V}_0 = 0{,}01 \qquad \Delta\dot{\hat{V}}_0 = -5{,}88707\,.\,10^{-5} \qquad \Delta\ddot{\hat{V}}_0 = -4{,}74460\,.\,10^{-5}$$

$$\Delta H_o = 0 \qquad \Delta\dot{H}_o = 0 \qquad \Delta\ddot{H}_o = 1{,}9494\,.\,10^{-1}$$

$$\Delta\gamma_0 = 0 \qquad \Delta\dot{\gamma}_o = 9{,}74698\,.\,10^{-4} \qquad \Delta\ddot{\gamma}_0 = -5{,}73811\,.\,10^{-6}$$

PARA CADA VARIÁVEL $x = \Delta\hat{V}, \Delta H, \Delta\gamma$

- $A_x = x_o \frac{a^2+b^2}{d} - \dot{x}_o \frac{2a}{d} + \ddot{x}_o \frac{1}{d}$
- $B_x = x_o \frac{s_1\,(s_1-2\,a)}{d} + \dot{x}_o \frac{2a}{d} - \ddot{x}_o \frac{1}{d}$
- $C_X = x_o \frac{s_1(a^2-b^2-s_1\,a)}{b\,d} + \dot{x}_o \frac{s_1^2+b^2-a^2}{b\,d} + \ddot{x}_o \frac{a-s_1}{b\,d}$

$$d = (s_1 - a)^2 + b^2$$

A relação entre as constantes *K, B* e *C* é dada por:

$$K_x\,sen\,\psi_x = B_x$$
$$K_x\,cos\,\psi_x = C_x$$

$$\psi_x = arctan\left(\frac{B_x}{C_x}\right)$$

$$K_x{}^2 = B_x{}^2 + C_x{}^2$$

$A_V = 1{,}98736 \,.\, 10^{-3}$	$K_V = 8{,}02749 \,.\, 10^{-3}$	$\boldsymbol{\frac{A_H}{A_V} = 1{,}64832 \,.\, 10^{4}}$
$B_V = 8{,}01264 \,.\, 10^{-3}$	$\psi_V = -6{,}0832 \,.\, 10^{-2} rad = -3{,}48842°$	$\boldsymbol{\frac{A_H}{A_\gamma} = -1{,}71261 \,.\, 10^{5}}$
$C_V = -4.88028 \,.\, 10^{-4}$	$K_H = 3{,}2762 \,.\, 10^{+1}$	$\boldsymbol{\frac{A_V}{A_\gamma} = -1{,}039 \,.\, 10^{1}}$
$A_H = 3{,}2788 \,.\, 10^{+1}$	$\psi_H = -3{,}12614\, rad = -179{,}11480°$	$\frac{K_H}{K_V} = 4{,}08122 \,.\, 10^{3}$
$B_H = -3{,}2758 \,.\, 10^{+1}$	$K_\gamma = 1{,}2641 \,.\, 10^{-2}$	$\frac{K_H}{K_\gamma} = 2{,}59172 \,.\, 10^{3}$
$C_H = -5{,}06163 \,.\, 10^{-1}$	$\psi_\gamma = 1{,}55866\, rad = 89{,}11301°$	$\frac{K_V}{K_\gamma} = 6{,}35035 \,.\, 10^{-1}$
$A_\gamma = -1{,}91275 \,.\, 10^{-4}$	$\boldsymbol{\psi_H}$-$\boldsymbol{\psi_V}$= 184,37066°	
$B_\gamma = 1{,}91275 \,.\, 10^{-4}$	$\boldsymbol{\psi_H - \psi_\gamma}$= 91,7522°	
$C_\gamma = 1{,}26396 \,.\, 10^{-2}$	$\boldsymbol{\psi_\gamma}$- $\boldsymbol{\psi_V}$= 92,6184°	

Primeiro caso

$$\Delta\widehat{V}_0 = 0,01 \; (\,\Delta V = 2\, m/s) \qquad \Delta H_o = 0 \qquad \Delta\gamma_o = \gamma_o = 0$$

- **O movimento aperiódico é maior na altitude.**

$$\frac{A_H}{A_V} = 1,64832 \, . \, 10^4$$

$$\frac{A_H}{A_\gamma} = -1,71261 \, . \, 10^5$$

$$\frac{A_V}{A_\gamma} = -1,039 \, . \, 10^1$$

O movimento oscilatório de maior amplitude é em altitude.

$$\frac{K_H}{K_V} = 4,08122 \, . \, 10^3$$

$$\frac{K_H}{K_\gamma} = 2,59172 \, . \, 10^3$$

$$\frac{K_V}{K_\gamma} = 6,35035 \, . \, 10^{-1}$$

Calculando-se as respostas em $\Delta\hat{V}, \Delta H$ e $\Delta\gamma$ para as outras duas condições iniciais, constata-se que:

- **as relações das amplitudes dos movimentos aperiódicos e**
- **as diferenças de fase entre os movimentos oscilatórios**

são independentes das condições iniciais.

Este resultado é geral e válido, portanto, para todo o movimento.

EXERCÍCIO EXTRA: CALCULAR E CONFIRMAR O RESULTADO ACIMA PARA AS OUTRAS DUAS CONDIÇÕES INICIAIS FORNECIDAS.

APLICAÇÃO: MIRAGE ; 12km, 200m/s

- **Raízes da equação característica;**
- **s1 = −0,00409**
- **s2 = −0,006125 + 0,07813i**
- **S3 = −0,006125 − 0,07813i**

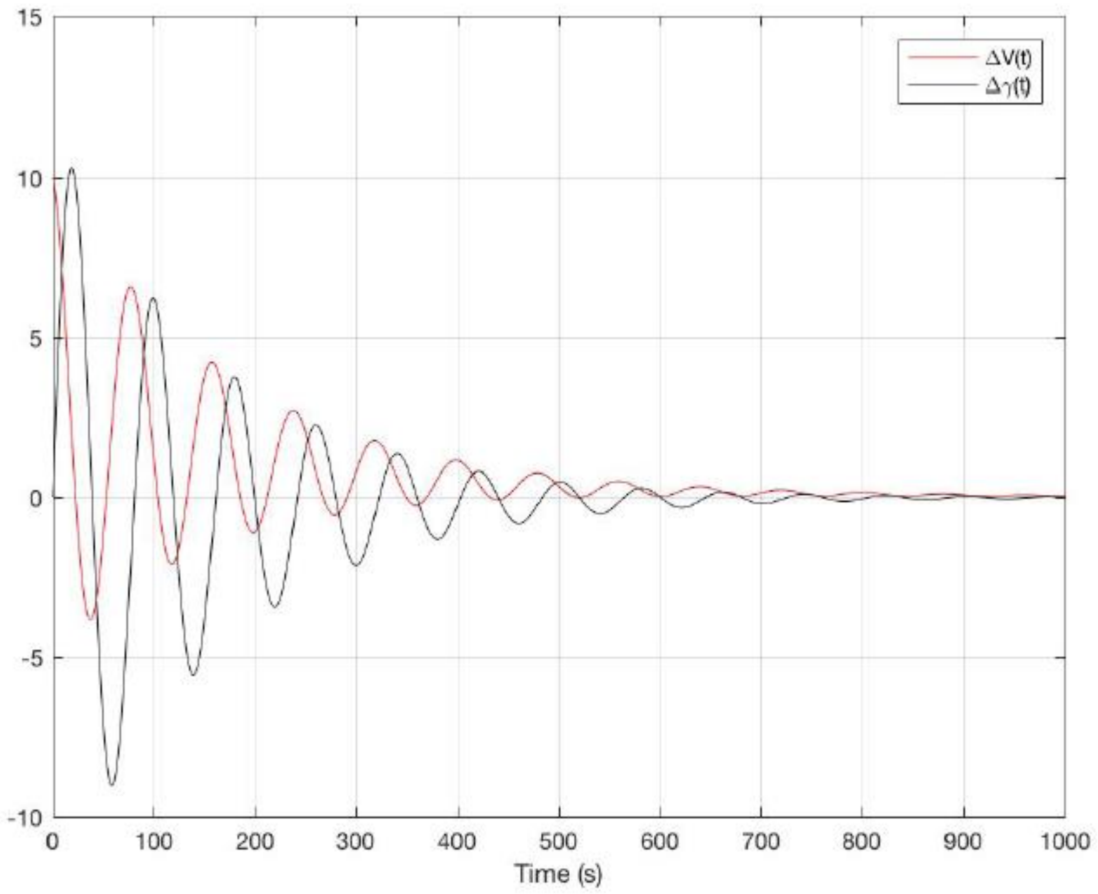
Resposta perturbação externa: $\Delta V_0 = 10m/s,\ \Delta H_0 = 30m, \Delta\gamma = 0°$

$$\Delta\hat{V} = 2{,}5492e^{-0{,}00409t} + e^{-0{,}006125t}(7{,}4508 \cos 0{,}07813t - 1{,}3745 \sin 0{,}07813t)$$

$$\Delta H = 31234e^{-0{,}00409t} + e^{-0{,}006125t}(-31204 \cos 0{,}07813t - 808.52 \sin 0{,}07813t)$$

$$\Delta\gamma = -0{,}6398e^{-0{,}00409t} + e^{-0{,}006125t}(0{,}6398 \cos 0{,}07813t + 12{,}2150 \sin 0{,}07813t)$$

Velocidade e ângulo de trajetória de voo



Altitude

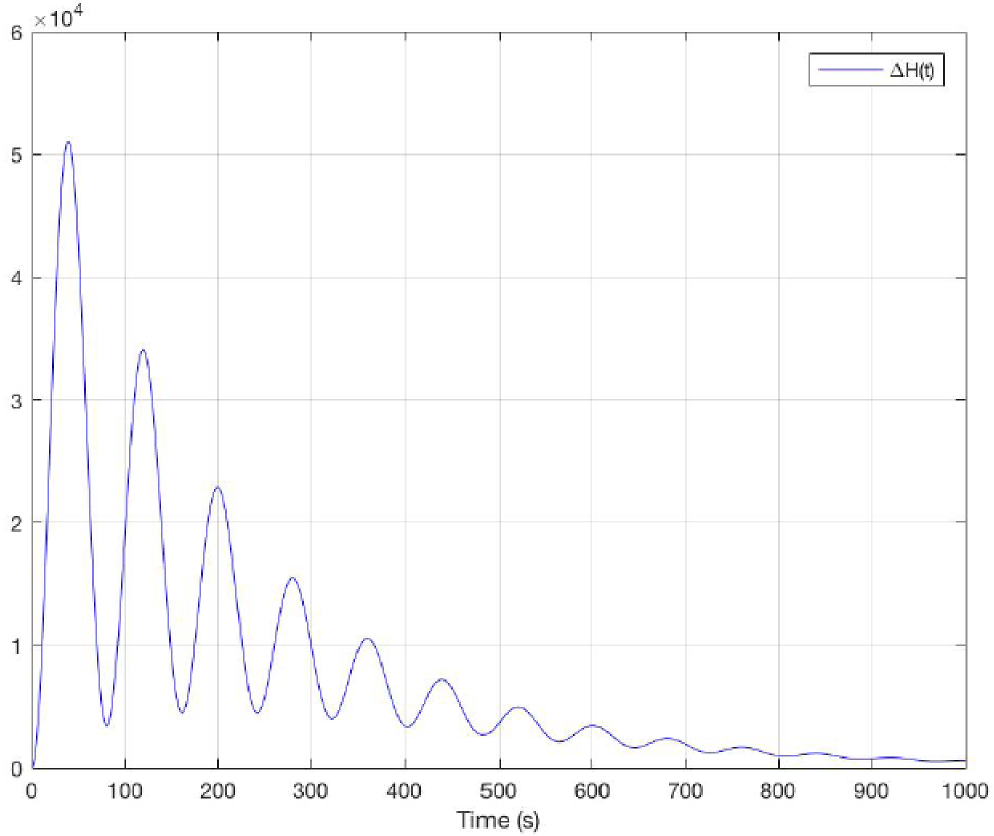


Figura 1: Comportamento da variação de altura do Mirage III no movimento fugoidal livre.

10.4. Parâmetros que influenciam as características do movimento fugoidal

$$\boxed{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s + A_3 = 0}$$

A. Movimento aperiódico

Ordem de grandeza da raiz real é pequena. Desprezando $s^3 + A_1 s^2$ em comparação à $A_2 s + A_3$

$$\boxed{s_1 = -\frac{A_3}{A_2}}$$

$$\boxed{s_1 \cong \frac{g\rho_H (2\, n_\rho - n_V)}{V_e\, E' \left(\frac{2g}{V_e^2} - \rho_H\right)}}$$

A.1. influência das características propulsivas

Com todos os parâmetros fixados com exceção de $n_\rho e\ n_V$ que dependem do tipo de motor.

Movimento aperiódico será tanto maior quanto maior $(2n_\rho - n_V)$

A.2. Influência da altitude e da velocidade

$$s_1 \cong \frac{g\rho_H(2\,n_\rho - n_V)}{V_e\,E'\left(\frac{2g}{V_e^2} - \rho_H\right)}$$

Tipo do Motor	$2n_\rho - n_V$
foguete	0
estato-reator	$\cong 0$
jato supersônico	1
jato subsônico	2
turbo-fan	2 a 3
turbo propulsor	3
motor pistão	

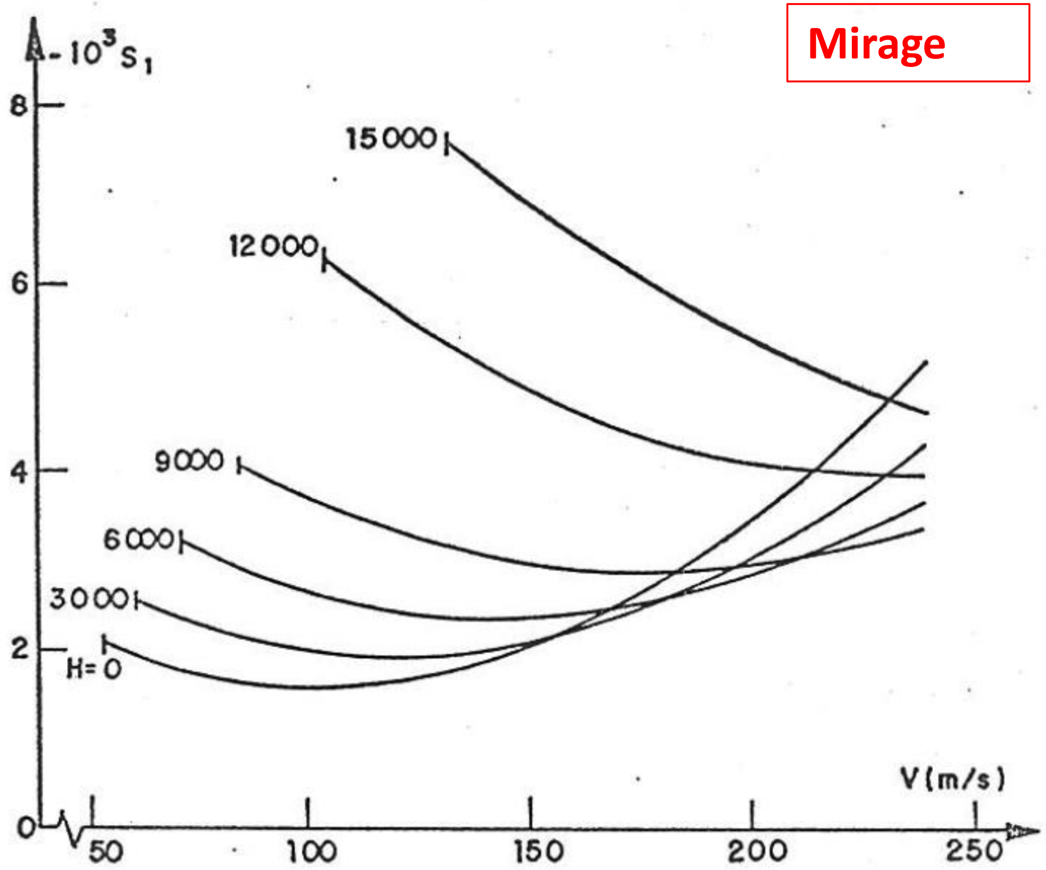
É impossível separar a influência da altitude e da velocidade sobre s_1.

A altitude intervém, através de ρ_H de maneira evidente mas também na relação $V_e E'$, pois V_e e E' são ligados por:

$$E' = \frac{C_L}{C_D} + tg\,(\alpha + \alpha_F) \quad e \qquad V_e = \frac{2\,m\,g}{\rho\,S}\,\frac{1}{C_L + C_D\,tg(\alpha + \alpha_F)}$$

A.2. Influência da altitude e da velocidade

Mirage



O limite de velocidade inferior para um valor máximo de ângulo de ataque de 26°, o limite superior foi tomado arbitrariamente a 250 m/s (a fim de permanecer no domínio subsônico).

B. Movimento oscilatório amortecido

$$s^3 + A_1 s^2 + A_2 s + A_3 = 0$$

$$s_2 = a + ib \quad e \quad s_3 = a - ib$$

Propriedades da equação de terceira ordem:

$$s_1 + s_2 + s_3 = -A_1$$

$$s_1(s_2 + s_3) + s_2 s_3 = A_2$$

$$s_1\, s_2\, s_3 = -A_3$$

Nota-se que:

$$s_1 + 2a = -A_1$$

$$2\, a\, s_1 + a^2 + b^2 = A_2$$

O **coeficiente A_3 sendo pequeno, foi visto que uma boa aproximação de s_1 seria:**

$$s_1 = -\frac{A_3}{A_2}$$

Consequentemente, a e b são dados pelas seguintes equações aproximadas:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{A_3}{A_2} - A_1\right) \qquad b^2 = A_2 + 2\, a\, \frac{A_3}{A_2} - a^2$$

Aplicando-se estas relações no exemplo do avião MIRAGE III, H= 0 km e V = 200m/s, obtém-se:

APROXIMADO:

$a = -9,795 \,.\, 10^{-3}$ $\quad b = 0,07466$ $\quad s_1 = -3,469 \,.\, 10^{-3}$

REAL:

$a =$ **−8,773** $.\, 10^{-3}$ $\quad b =$ **0,07465** $\quad s_1 =$ **−** $3,508 \,.\, 10^{-3}$

erros relativos: 1% para s_1; 0,2% para a e desprezível para b.

O valor de b pode também ser tomado pelo valor aproximado de $\sqrt{A_2}$, ou seja, 0,0756 no caso do exemplo considerado.

É, portanto, válido se utilizar as fórmulas aproximadas para se conhecer a influência dos motores, da velocidade e da altitude sobre a oscilação fugoidal.

Analisando agora o amortecimento e período:

O amortecimento do movimento, caracterizado pela parte real das duas raízes imaginárias conjugadas, é dado por:

$$a \cong \frac{g}{2\ V_e\ E'}\left(-\frac{2n_\rho - n_V}{\frac{2\ g}{V_e^2} - \ \rho_H}\ \rho_H + n_V - 2\right)$$

e o período do movimento é dado por:

$$T = \frac{2\ \pi}{b} \cong \frac{2\ \pi}{\sqrt{g\left(\frac{2g}{V_e^2} - \rho_H\right)}}$$

B.1. Influência das características propulsivas

Período: **O tipo de motor não tem, praticamente, nenhuma influência sobre o período, pois n_V e n_ρ não aparecem na expressão aproximada de T:**

$$T = \frac{2\,\pi}{b} \cong \frac{2\,\pi}{\sqrt{g\left(\frac{2g}{V_e^2} - \rho_H\right)}}$$

Amortecimento:

$$a \cong \frac{g}{2\,V_e\,E'}\left(-\frac{2n_\rho - n_V}{\frac{2\,g}{V_e^2} - \rho_H}\,\rho_H + n_V - 2\right)$$

Para o estato-reator ($n_V = 2\,, n_\rho = 1$) o amortecimento é nulo. Para o motor-foguete ($n_V = 0\,, n_\rho = 0$) o amortecimento é igual :

$$\boldsymbol{a = -\frac{g}{V_e\,E'}\,\rho_H}$$

Amortecimento: $a \cong \frac{g}{2\,V_e\,E'}\left(-\frac{2n_\rho - n_V}{\frac{2\,g}{V_e^2} - \rho_H}\,\rho_H + n_V - 2\right)$

Para os outros tipos de motores nos quais $\boldsymbol{n_\rho = 1}$, pode-se escrever que:

$$\boldsymbol{a = \frac{g}{2\,V_e\,E\prime}\,(n_V - 2)\left(1 + \frac{\rho_H}{\frac{2\,g}{V_e^2} - \rho_H}\right)}$$

O segundo parêntese é próximo da unidade e tende a zero quando a velocidade aumenta.

O movimento é, portanto, tanto mais amortecido quando se usa sistemas propulsivos na seguinte ordem (valor absoluto de a crescente):estato-reator ($a = 0$), jato puro supersônico, jato puro subsônico, turbo-fan e motor a hélice.

Tipo do Motor	$2n_\rho - n_V$
foguete	0
estato-reator	$\cong 0$
jato supersônico	1
jato subsônico	2
turbo-fan	2 a 3
turbo propulsor motor pistão	3

B.2. Influência da altitude e velocidade

$$T = \frac{2\,\pi}{b} \cong \frac{2\,\pi}{\sqrt{g\left(\frac{2g}{V_e^2} - \rho_H\right)}}$$

O período depende muito pouco da altitude sobretudo para baixas velocidades (ρ_H varia sensivelmente de 10^{-4} ao nível do mar a $1,3\,.\,10^{-4}$ na troposfera (região mais próxima da superfície da Terra, no Equador 20 km de espessura), enquanto que $2g/V_e^2$ vale $78,5\,.\,10^{-4}$ para $V_e = 50m/s$ e $4,9\,.\,10^{-4}$ para $V_e = 200m/s$.

O período não depende da altitude acima da troposfera, pois ρ_H é constante. Por outro lado, o período aumenta com a velocidade. Desprezando-se ρ_H ante $2g/V_e^2$, tem-se .... $T \cong \frac{\pi\sqrt{2}}{g} V_e \cong 0,45\,V_e$

B.2. Influência da altitude e velocidade

$$T \cong \frac{\pi\sqrt{2}}{g} V_e \cong 0,45\, V_e$$

Esta expressão é apenas aproximada, mas dá um resultado válido com desvios da ordem de 10%.

De maneira análoga ao movimento aperiódico, é difícil se concluir qual a influência da altitude e da velocidade sobre o amortecimento do movimento fugoidal. Apenas o cálculo completo permite ver estas influências.