



# Mecânica do Voo

Estudo qualitativo do movimento fugoidal





## Referências Bibliográficas

- **ITEN 1.8**: Paglione, P. ; Zanardi, M. C., [Estabilidade e Controle de Aeronaves](#), ITA, 1990.
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid, [Dynamics of Flight – Stability and Control](#), John Wiley & Sons, 3ª Ed, 1996.
- STEVENS, Brian L.; LEWIS, Frank L. Aircraft control and simulation. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003



**9. ESTUDO QUALITATIVO DO MOVIMENTO FUGOIDAL:  
MOVIMENTO DO CENTRO DE GRAVIDADE**

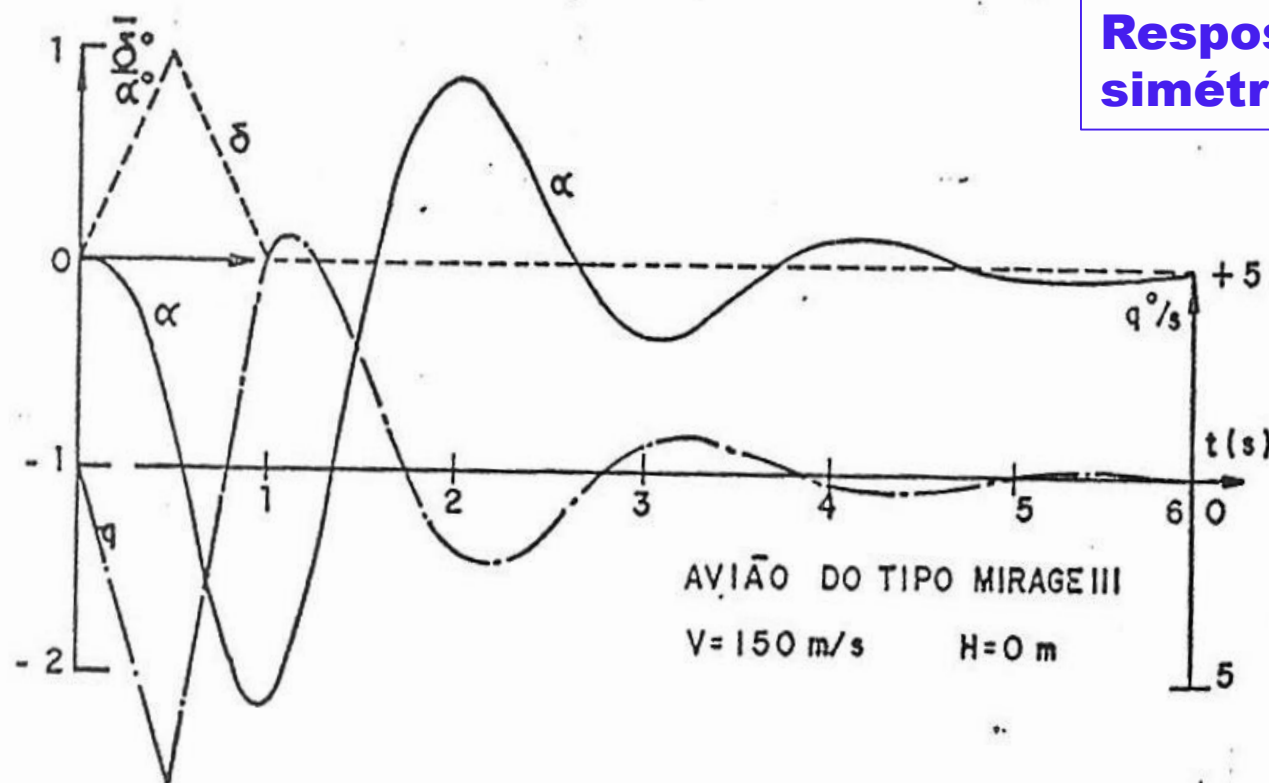
**(Item 1.8 DA APOSTILA)**



**VAMOS ANALISAR O MOVIMENTO FUGOIDAL, NO QUAL PREVALECE A IMPORTÂNCIA DA TRAJETÓRIA DO CG, SUPONDO QUE A VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE ATAQUE RESPONDE PRONTAMENTE AS VARIAÇÕES DO PROFUNDOR.**

**NÃO NOS PREOCUPAREMOS COM O MOVIMENTO DE ARFAGEM, OU SEJA, NÃO SERÁ CONSIDERADA A EQUAÇÃO DO MOMENTO DE ARFAGEM.**  
**VIMOS QUE O ÂNGULO DE ATAQUE SE ESTABILIZA APÓS UM CURTO ESPAÇO DE TEMPO ( 6 A 8 SEGUNDOS)**

## Oscilação de curto período: Variações no ângulo de ataque e velocidade de arfagem.



**Resposta a uma rampa simétrica no Profundor.**



**SERÁ REALIZADO UM ESTUDO QUALITATIVO DO MOVIMENTO, COM O ESTUDO QUANTITATIVO SENDO REALIZADO NO ITEM 10, COM A LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO.**

**ASSUMIREMOS:**

- **VARIAÇÕES NO ÂNGULO DE ATAQUE ASSOCIADAS COM VARIAÇÕES DO PROFUNDOR, ATRAVÉS DA FORÇA EXERCIDA NO MANCHE;**
- **VARIAÇÕES DA FORÇA DE TRAÇÃO ASSOCIADAS A ATUAÇÃO NA MANETE DE COMBUSTÍVEL.**



## EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

### Equação do arrasto

$$m \frac{dV}{dt} = -m g \sen \gamma - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D + F \cos(\alpha + \alpha_F) \quad (1a)$$

### Equação da sustentação

$$m V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L + F \sen(\alpha + \alpha_F) - m g \cos \gamma \quad (1b)$$

### Relação cinemática

$$\dot{H} = V \sen \gamma \quad (1c)$$

Utilizando a aproximação de pequenos ângulos e desprezando  $F \sen(\alpha + \alpha_F)$ , as equações do movimento tornam se:





## EQUAÇÕES DO MOVIMENTO SIMPLIFICADAS

$$m \dot{V} = F_e - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{De} - mg \gamma \quad (2a)$$

$$m V \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{Le} - mg \quad (2b)$$

$$\dot{H} = V \gamma \quad (2c)$$





**9.1. Variação da tração para uma posição fixa do profundor: voo de subida com velocidade constante**

**9.2. Manobra real de variação do ângulo de trajetória de voo com velocidade constante**

**9.3. Variação da tração mantendo o avião em voo horizontal: voo horizontal acelerado**

**9.4. Pilotagem prática: voo de subida com velocidade constante e voo horizontal acelerado**

**9.5. Variação da posição do profundor com tração constante**

**9.6. Pilotagem no 1º e 2º regime**



## 9.1. Variação da tração para uma posição fixa do profundor: Voo de subida com velocidade constante

Considere que o piloto tenha fixado as condições de equilíbrio para um dado ângulo de ataque  $\alpha_e$ :  $F_e, V_e, C_{Le}, C_{De}, \gamma_e$

### EQUAÇÕES DE ARRASTO E SUSTENTAÇÃO NO EQUILÍBRIO:

$$0 = F_e - \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 C_{De} - mg \gamma_e \quad (3a)$$

$$0 = \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 C_{Le} - mg \quad (3b)$$

Para  $\gamma_e = 0$

$$F_e = \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 C_{De} \quad (4a)$$

$$\frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 C_{Le} = mg \quad (4b)$$



**SE O PROFUNDOR É MANTIDO FIXO, O ÂNGULO DE ATAQUE NÃO SE ALTERA.**

**MAS O PILOTO AUMENTA A TRAÇÃO PASSANDO PARA  $F'_e$ ,  $F'_e > F_e$ ,**

**As equações de equilíbrio (3) se tornam:**

$$F'_e = \frac{1}{2} \rho'_e S V'^e_2 C_{De} + mg\gamma'_e \quad (5a)$$

$$0 = \frac{1}{2} \rho'_e S V'^e_2 C_{Le} - mg \quad (5b)$$

**Com os coeficientes de arrasto e sustentação se mantendo constantes.**

**Pela equação 5b vemos que para pequenas variações de altitude  $\rho'_e \rightarrow \rho_e$  e a velocidade  $V'_e \rightarrow V_e$ , ou seja:**

$$V'^e_2 = \frac{mg}{\frac{1}{2} \rho'_e S C_{Le}} = \frac{mg}{\frac{1}{2} \rho_e S C_{Le}} = V_e^2$$



E QUE  $\gamma'_e$  VAI SER POSITIVO:

$$\gamma'_e = \frac{F'_e - \frac{1}{2} \rho'_e S V'^e{}^2 C_{De}}{mg} = \frac{F'_e - \frac{1}{2} \rho_e S V_e{}^2 C_{De}}{mg} = \frac{F'_e - F_e}{mg} > 0$$

Avião vai passar de um voo horizontal com velocidade constante, para um Voo de equilíbrio de subida com velocidade constante.

COMO SERIA A TRANSIÇÃO ENTRE ESTES DOIS MOVIMENTOS?

VAMOS RETOMAR AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA  $\gamma_e$  PEQUENO.



$$m \dot{V} = F - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D - mg \gamma \quad (6a)$$

$$m V \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L - mg \quad (6b)$$

$$\dot{H} = V \gamma \quad (6c)$$

**NO INSTANTE INICIAL EM QUE A TRAÇÃO É AUMENTADA:**

**O VOO É HORIZONTAL**

$$\gamma = 0, \quad \alpha = \alpha_e, \quad m\dot{V} = F'_e - F_e \quad \gamma = 0.$$

**OBSERVA-SE UMA ACELERAÇÃO DO AVIÃO NA TRAJETÓRIA  
SEM MODIFICAÇÃO DO ÂNGULO DE TRAJETÓRIA.**



ALGUNS INSTANTES DEPOIS, A VELOCIDADE TENDO AUMENTADO, A SUSTENTAÇÃO PASSARÁ A SER SUPERIOR AO PESO PARA UM MESMO ÂNGULO DE ATAQUE E O AVIÃO ESTARÁ SUBMETIDO A UMA ACELERAÇÃO NORMAL (PERPENDICULAR À DIREÇÃO DA VELOCIDADE), QUE SE TRADUZ POR UMA VARIAÇÃO NO ÂNGULO DE TRAJETÓRIA DE VOO:

$$m(v_e + \Delta V) \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \rho S (v_e + \Delta V)^2 C_{L,e} - mg$$

E  $\dot{\gamma} > 0$ , OU SEJA O ÂNGULO DE TRAJETÓRIA DE VOO AUMENTA.

COMO  $\gamma$  AUMENTA,  $\dot{\gamma}$  DIMINUI.



ESSE PROCESSO VAI SE PROLONGAR ATÉ OCORRER UMA DESACELERAÇÃO  $\dot{V} < 0$ , QUE FAZ A VELOCIDADE DIMINUIR, DIMINUINDO TAMBÉM  $\dot{\gamma}$ , ATÉ QUE O SISTEMA SE ESTABILIZE EM TRAJETÓRIA DE SUBIDA COM VELOCIDADE CONSTANTE.

TEMOS ENTÃO QUE A EVOLUÇÃO INICIAL DO AVIÃO É UMA ACELERAÇÃO TANGENCIAL À TRAJETÓRIA E QUE O AUMENTO DA VELOCIDADE RESULTANTE PROVOCA UMA ACELERAÇÃO NORMAL, OU SEJA UM AUMENTO DO ÂNGULO DE TRAJETÓRIA DE VOO, DEVIDO AO DESEQUILÍBRIO DA SUSTENTAÇÃO





UMA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO (6), MOSTRA QUE O AVIÃO VAI TENDER PARA UMA TRAJETÓRIA COM  $\gamma_e > 0$  E  $V = V_e$ , APÓS UM CERTO NÚMERO DE OSCILAÇÕES DO ÂNGULO DE TRAJETÓRIA DE VOO E DA VELOCIDADE .

**ESSA OSCILAÇÃO É CHAMADA DE FUGOIDAL**, CUJO PERÍODO É BEM MAIOR DO QUE AS OSCILAÇÕES DE CURTO PERÍODO NO ÂNGULO DE ATAQUE E VELOCIDADE DE ARFAGEM.



OBSERVE QUE **UM AUMENTO DE TRAÇÃO** NÃO LEVOU A UM AUMENTO DE VELOCIDADE APÓS O PERÍODO DE TRANSIÇÃO, MAS APENAS À **UM AUMENTO DE ÂNGULO DE TRAJETÓRIA**.

**EVOLUÇÃO DO MIRAGE COM**

$$V_e = 100 \frac{m}{s},$$

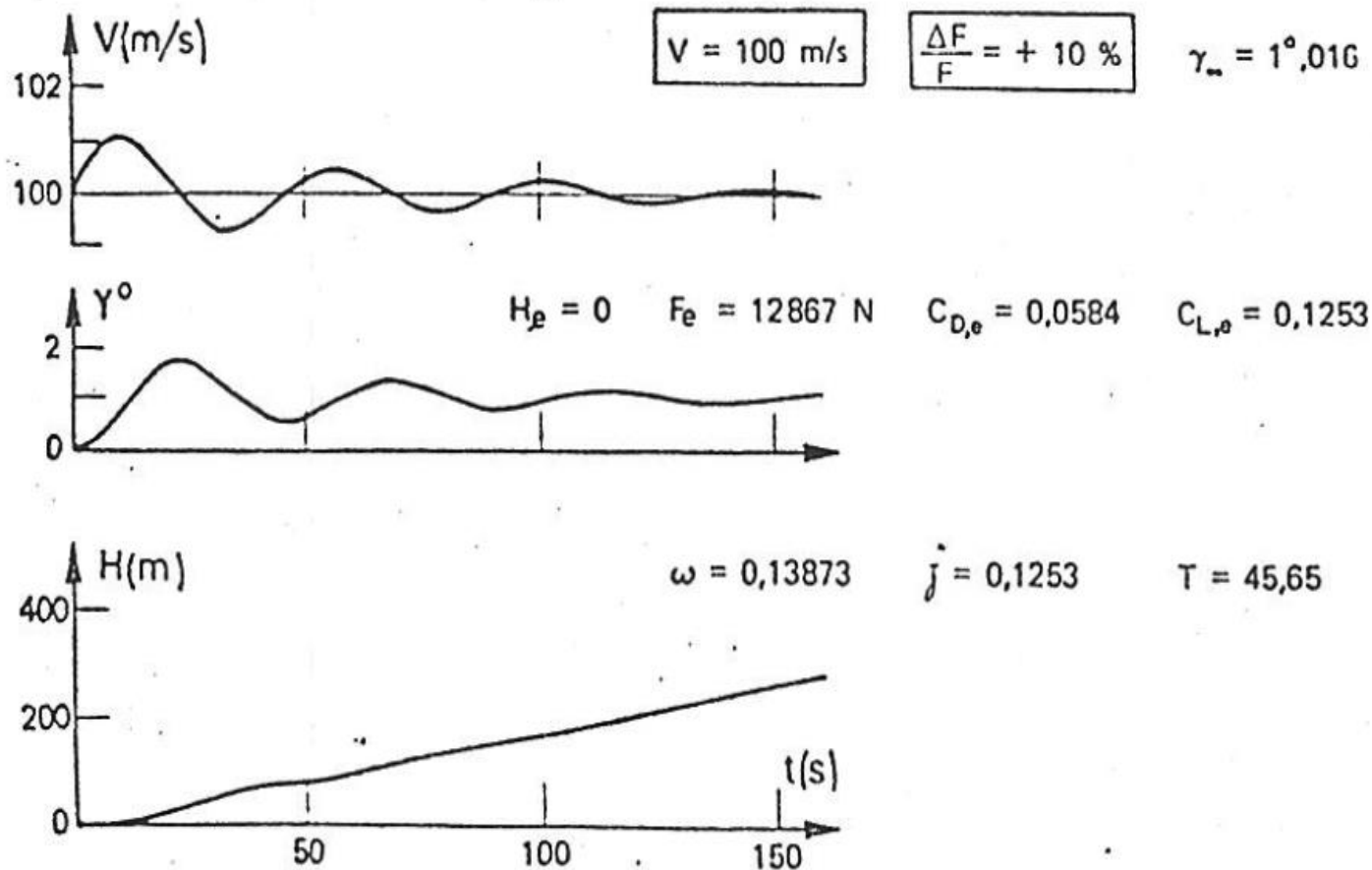
$$\text{PARA } F'_e = 1,1 F_e \text{ E } F'_e = 0,9 F_e$$

**INTERVALO DE ESTABILIZAÇÃO DE**

**150 s = 2,5 MINUTOS**

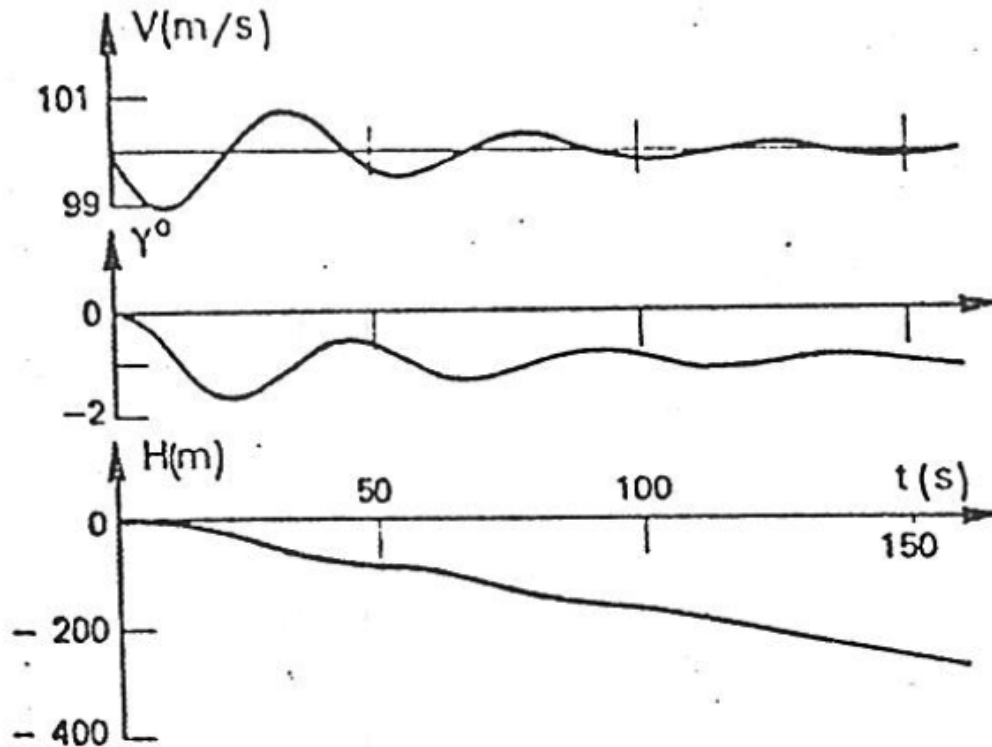


**Voo de subida com velocidade constante**



**AUMENTO DE TRAÇÃO**

**TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO  
150 S**



**Voo de DESCIDA com velocidade constante**

**DIMINUIÇÃO DE TRAÇÃO**

**TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO  
150 S**

|                       |                               |                                     |
|-----------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| $V = 100 \text{ m/s}$ | $\frac{\Delta F}{F} = -10 \%$ | $\gamma_{\infty} = -1^{\circ}, 016$ |
| $H_0 = 0$             | $F_0 = 12867 \text{ N}$       | $C_{D,0} = 0,0584$                  |
| $\omega = 0,13873$    | $z = 0,1253$                  | $C_{L,0} = 0,1253$                  |
|                       |                               | $T = 45,65$                         |



## 9.2. Manobra real de variação do ângulo de trajetória de voo com velocidade constante

NA ANÁLISE ANTERIOR FOI VISTO QUE PARA SE PASSAR DE UM VOO HORIZONTAL PARA UM VOO DE SUBIDA, PODEMOS ATUAR **APENAS NA MANETE**, DE MODO QUE O **ÂNGULO DE TRAJETÓRIA DE VOO OSCILARÁ** E DEPOIS **TENDERÁ A UM VALOR DE EQUILÍBRIO** APÓS ALGUNS MINUTOS, **SE O PROFUNDOR É MANTIDO FIXO.**

NA **PRÁTICA** O PILOTO APÓS TER AUMENTADO A TRAÇÃO, CONTRARIA A TENDÊNCIA DO AVIÃO ACELERAR, AUMENTANDO O ÂNGULO DE ATAQUE (MOVIMENTO CABRANTE, MANCHE PARA TRÁS, O PROFUNDOR SOBE)



MANOBRA CONSISTE EM FIXAR A CADA INSTANTE UM ÂNGULO DE ATAQUE, DE MODO QUE O ARRASTO RESULTANTE, EQUILIBRE A SOMA  $F - mg\gamma$ , EVITANDO QUALQUER ALTERAÇÃO NA VELOCIDADE (VELOCIDADE CONSTANTE).

A EQUAÇÃO DO ARRASTO É SEMPRE SATISFEITA E AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO SERIAM:

$$\frac{1}{2} \rho S V^2 C_D = F - mg\gamma$$



DETERMINA  $\alpha$  PARA MANTER VELOCIDADE CONSTANTE

$$m V \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L - mg$$



DETERMINA  $\dot{\gamma}$

PILOTO ATUA NA MANETE PARA AUMENTAR A TRAÇÃO E ATUA NO MANCHE PARA ALTERAR ÂNGULO DE ATAQUE.



**PARA O MIRAGE III COM:  $\alpha_e = 2,78^\circ$**

$$V_e = 200 \text{ m/s} ; \gamma = 0 ; \rho = 1,225 \text{ kg/m}^3 ; F_e = 15620 \text{ N},$$

**AUMENTANDO A TRAÇÃO DE 10%, O PILOTO DEVE FIXAR INSTANTANEAMENTE UM  $\alpha = 2,139^\circ$ , PARA QUE O ARRASTO CONTINUE A EQUILIBRAR A FORÇA PROPULSIVA  $F'_e$ .**

**PARA ESSE CASO TEMOS :**

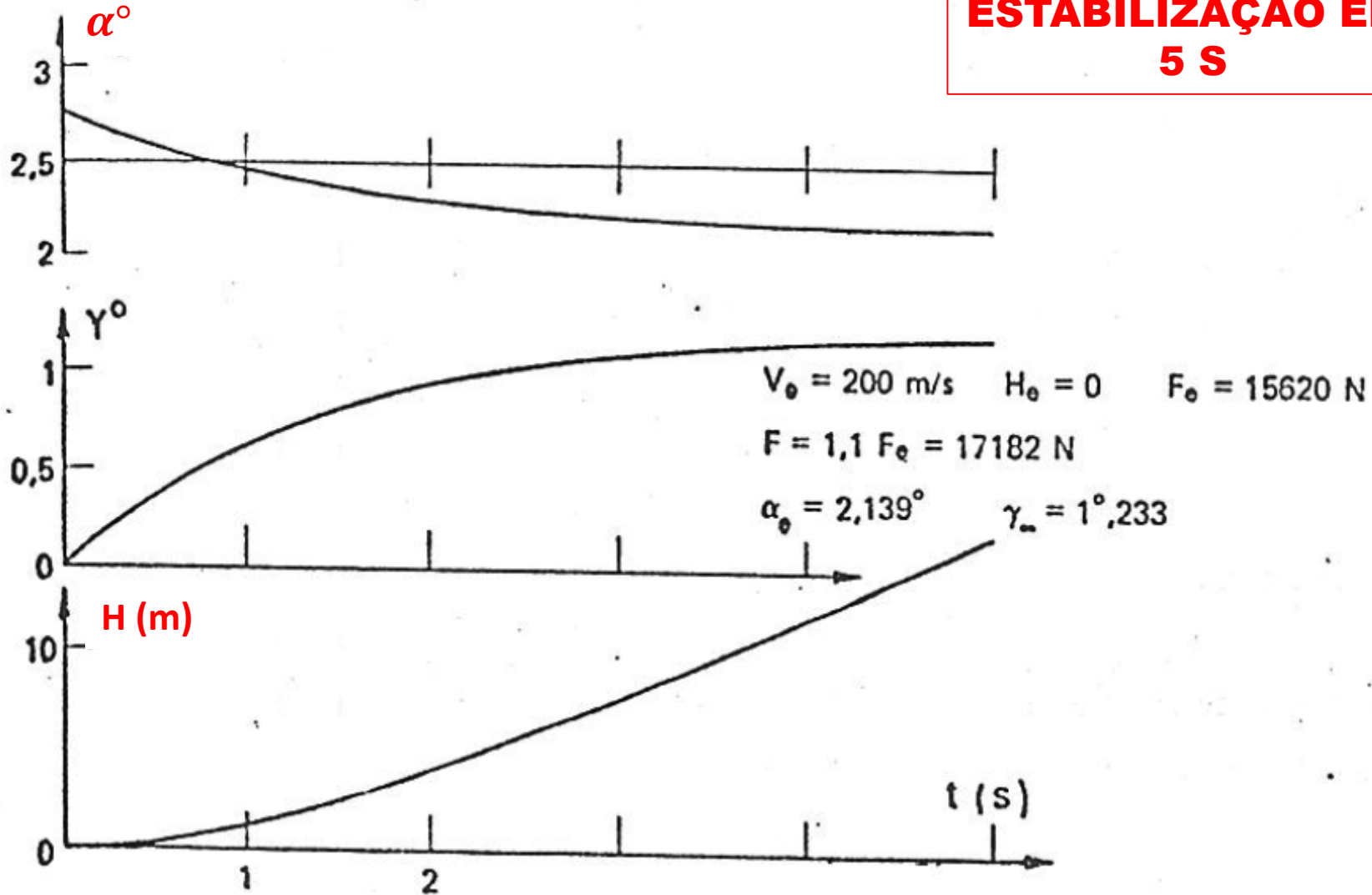
| $F_e$   | $c_D$  | $C_L$  | $\alpha$      | $\dot{\gamma}$        |
|---------|--------|--------|---------------|-----------------------|
| 15620 N | 0,0177 | 0,0823 | $2,78^\circ$  | 0                     |
| 17282 N | 0,0196 | 0,1072 | $2,139^\circ$ | $0,86^\circ/\text{s}$ |

**TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO COM PROFUNDOR FIXO = 150 s**  
**TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO COM PROFUNDOR VARIANDO = 5 s**





**ESTABILIZAÇÃO EM  
5 S**



## 9.3. Variação da tração mantendo o avião em voo horizontal: voo horizontal acelerado

SUPONHA AGORA QUE O PILOTO, MESMO TENDO AUMENTADO A TRAÇÃO DESEJA MANTER O **VOO HORIZONTAL**, OU SEJA MANTER O **ÂNGULO DE TRAJETÓRIA DE VOO NULO**.

PARA ISSO A EQUAÇÃO DA SUSTENTAÇÃO TEM DE SER SATISFEITA (  $\dot{\gamma} = 0$  ):

$$\frac{1}{2} \rho S V^2 C_{Le} = mg$$

É NECESSÁRIO ALTERAR O ÂNGULO DE ATAQUE (DIMINUIR  $C_L$ ) PARA EQUILIBRAR O AUMENTO DA VELOCIDADE ( RESULTANTE DA ACELERAÇÃO DEVIDO AO AUMENTO DE TRAÇÃO):

$$m \dot{V} = F' - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D$$



ASSIM A EQUAÇÃO DE SUSTENTAÇÃO DETERMINA UM ÂNGULO DE ATAQUE PARA CADA VELOCIDADE QUANDO  $\dot{\gamma} = 0$ .

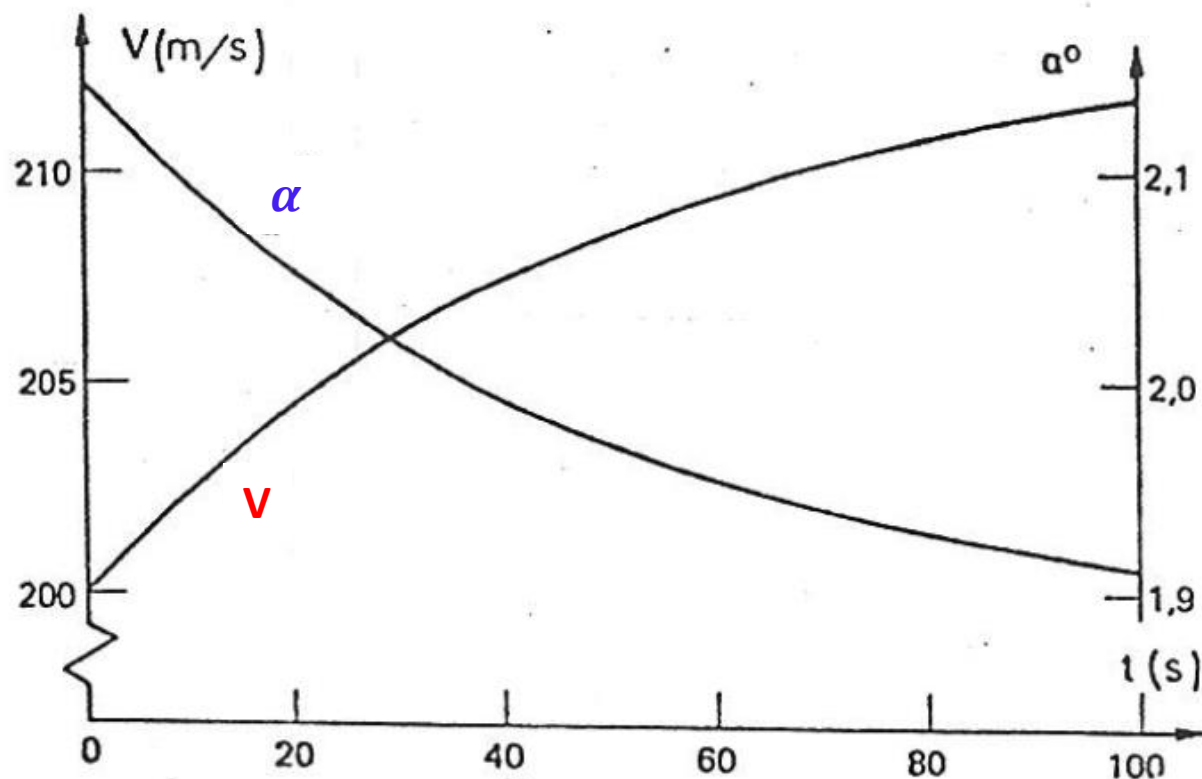
COM O ÂNGULO DE ATAQUE SE DETERMINA O COEFICIENTE DE ARRASTO, COM O QUAL SE DETERMINA  $\dot{V}$ , DA EQUAÇÃO DO ARRASTO

DESTE MODO, SE A TRAÇÃO É AUMENTADA COM RELAÇÃO AO EQUILÍBRIO INICIAL, INSTANTANEAMENTE O AVIÃO ACELERA E A VELOCIDADE MAIOR FAZ COM QUE O PILOTO DIMINUA O ÂNGULO DE ATAQUE, PARA QUE A SUSTENTAÇÃO EQUILIBRE O PESO.

APLICAÇÃO AO MIRAGE, COM  $V_e = 200 \text{ m/s}$  E AUMENTO DE TRAÇÃO DE 10%.



## Voo horizontal acelerado



$$V_e = 200 \text{ m/s}$$
$$H = 0$$

$$\alpha_e = 2^{\circ},14$$
$$F = 1,1 F_0$$

$$F_0 = 15620 \text{ N}$$
$$F = 17182 \text{ N}$$

**APLICAÇÃO AO MIRAGE, COM  $V_e = 200 \text{ m/s}$  E AUMENTO DE TRAÇÃO DE 10%.**

**Para cada velocidade uma posição do profundor.**

**AUMENTO DE VELOCIDADE  
DIMINUIÇÃO DE ÂNGULO DE  
ATAQUE**



#### 9.4. Pilotagem prática: voo de subida com velocidade constante e voo horizontal acelerado

A MANOBRA DE SE FIXAR UM ÂNGULO DE ATAQUE PARA CADA VELOCIDADE É FEITA INTUITIVAMENTE PELO PILOTO.

##### **Voo de subida com velocidade constante**

**SE DURANTE O VOO DE SUBIDA O PILOTO CONSTATA QUE A VELOCIDADE AUMENTOU, ISTO OCORRE PORQUE ELE NÃO FIXOU UM ÂNGULO DE ATAQUE SUFICIENTEMENTE GRANDE, ENTÃO ELE DEVE PUXAR O MANCHE (AUMENTANDO A DEFLEXÃO DO PROFUNDOR), DE MODO A AUMENTAR O ÂNGULO DE ATAQUE.**



### **Voo de subida com velocidade constante**

**SE DURANTE O VOO DE SUBIDA O PILOTO CONSTATA QUE A VELOCIDADE DIMINUIU, OU SEJA ELE FIXOU UM ÂNGULO DE ATAQUE MUITO GRANDE, ENTÃO ELE DEVE RELAXAR A PRESSÃO NO MANCHE ( EMPURRAR O MANCHE PARA FRENTE, DIMINUINDO A DEFLEXÃO DO PROFUNDOR), DE MODO A DIMINUIR O ÂNGULO DE ATAQUE.**



### **VOO HORIZONTAL ACELERADO**

**SE O PILOTO CONSTATA QUE A ALTURA DIMINUI, ENTÃO O ÂNGULO DE ATAQUE É PEQUENO ( $\dot{\gamma} < 0$ ) ELE DEVE PUXAR O MANCHE PARA TRÁS PARA AUMENTAR O ÂNGULO DE ATAQUE (CABRAR O AVIÃO).**

**SE A ALTURA AUMENTA, ENTÃO O ÂNGULO DE ATAQUE É GRANDE ( $\dot{\gamma} > 0$ , SUSTENTAÇÃO SUPERIOR AO PESO) PILOTO DEVE EMPURRAR O MANCHE PARA FRENTE PARA DIMINUIR O ÂNGULO DE ATAQUE (DIMINUIR A CABRAGEM O AVIÃO).**





**ESSAS DUAS MANOBRAS COM VELOCIDADE CONSTANTE SÃO EXECUTADAS SUCESSIVAMENTE APÓS A DECOLAGEM.**

**OS FLAPS E TREM DE POUSO SÃO RECOLHIDOS, O PILOTO MANTEM O AVIÃO HORIZONTALMENTE PARA GANHAR VELOCIDADE E UMA VEZ A VELOCIDADE DE SUBIDA ATINGIDA, O PILOTO CABRA O AVIÃO PARA MANTER A VELOCIDADE CONSTANTE E SE ESTABILIZAR RAPIDAMENTE EM UMA TRAJETÓRIA DE SUBIDA.**

**VOO ACELERADO HORIZONTAL,  
DE 100m/s À 200m/s,  
SEGUIDO DE UM VOO DE SUBIDA COM 200m/s.**

