SÁRA MENYHÁRT

1, a, Nech $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie.

Množina $Ker(f) = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ sa volá jadro f.

Množina $Im(f) = \{\vec{y} \in U : f(\vec{x}) = \vec{y}$ pre nejaké $\vec{x} \in V\}$ sa volá obraz f.

Nech $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie konečnorozmerných vektorových priestorov. Potom $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow \\ & & a \end{array}$$

$Ker(B) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : B(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{(\frac{-a}{2}, \frac{-a}{2}, a) : a \in \mathbb{R}\}$ $\quad dim(Ker(B)) = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{c+b}_{0} \end{array}\right)$$

$c + b = 0$

$c = -b$

$Im(B) = \{B(\vec{x}) = \vec{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{(a, b, -b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ $\quad dim(Im(B)) = 2$

- ortonormálna báza $Ker(B) = \left(\frac{\vec{x}}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}\right)$

  $\vec{x} = (1, 1, -2)$

- ortonormálna báza $Im(B) = \left(\frac{(1,0,0)}{\sqrt{1}}, \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}\right)$

$X = ((1,0,0), (0,1,-1))$

SÁRA MENYHÁRT

c) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)(1-\lambda) - (\alpha-\lambda) =$$

$$(\alpha-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1\right) = (\alpha-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \alpha \qquad \lambda_3 = 2$$

$\lambda_1 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ak $\alpha = 0 \Rightarrow$ dostaneme nulový vektor

$\lambda_2 = \alpha$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right)$$

ak $\alpha = 1$, nedostaneme nulový vektor

$\lambda_3 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ak $\alpha = 2$, dostaneme nulový vektor

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

SÁRA DENIHÁRT

3) $T^2 = 2T$

$T\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$\left.\begin{array}{l} T^2\vec{x} = T.T\vec{x} = T.\lambda\vec{x} \\ 2T\vec{x} = 2\lambda\vec{x} \end{array}\right\} T.\lambda\vec{x} = 2\lambda\vec{x} \iff \lambda = 0 \ \vee \ T.\lambda\vec{x} = 2\lambda\vec{x}$$

$$\lambda.\lambda\vec{x} = 2\lambda\vec{x}$$

$$\lambda = 2$$

4) $S : V \to V$

$$\langle x, y\rangle_S := \langle Sx, Sy\rangle$$

symetria:

$$\langle x, y\rangle_S \overset{def}{=} \langle Sx, Sy\rangle = \langle Sy, Sx\rangle \overset{def}{=} \langle y, x\rangle_S$$

symetria pôvodného skalárneho súčinu

linearita:

$$\langle ax, y\rangle_S \overset{def}{=} \langle S(ax), Sy\rangle = \langle aSx, Sy\rangle = a\langle Sx, Sy\rangle \overset{def}{=} a\langle x, y\rangle_S$$

linearita zobrazenia S   linearita pôvodného skalárneho súčinu

$$\langle x+y, z\rangle_S \overset{def}{=} \langle S(x+y), Sz\rangle = \langle Sx+Sy, Sz\rangle = \langle Sx, Sz\rangle + \langle Sy, Sz\rangle \overset{def}{=} \langle x, z\rangle_S + \langle y, z\rangle_S$$

nezápornosť

$\langle x, x\rangle_S = 0$, len vtedy, keď x je nulový vektor

$\langle x, x\rangle_S = \langle Sx, Sx\rangle \geq 0$ (nezápornosť pôvodného skalárneho súčinu)

$$\langle Sx, Sx\rangle = 0 \iff Sx = 0 \iff x = 0$$

injektívna

SÁRA DENYHÁRT

5, b, • je očividne, lebo znova vznikne postupnosť od i po neko-
nečno a definícia hovorí, že transformácia zobrazí do sebe.

• matica zobrazenia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(cA+dB) = L\begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} db_1 \\ \vdots \\ db_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_2 \\ ca_3 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} db_2 \\ db_3 \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$c = \begin{pmatrix} a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} b_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = cLA + dLB$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \\ 0 & -\lambda & 1 & \\ & & -\lambda & \\ & & & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{\lambda = 0}$ VLASTNÉ HODNOTY

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_1 = (1, 0, 0, 0 \ldots)$$

VLASTNÝ VEKTOR

• $X = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$

•

•

$L\vec{u} = L \cdot (a_n, a_n + 1, 2a_n + a_{n+1} \ldots) = (a_n + 1, 2a_n + a_n + 1, 2a_n + 3a_{n+1} \ldots)$

keď odstránime prvý prvok, neovplyvní ostatné prvky $\Rightarrow L\vec{u} \in U$ ak $\vec{u} \in U$
A preto U je invariantný ~~voči~~ vzhľadom na L.

a) Nech $A : V \to V$ je lineárna transformácia.

Ak $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, potom λ je vlastná hodnota A a $\vec{x}$ je k
nej prislúchajúci vlastný vektor.