Menyhart

$6 + 4 + 7 + 10 + 6{,}5 = 33{,}5$

SÁRA MENYHÁRT

1, a, Nech $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie.

Množina $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ sa volá jadro f.

Množina $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in U : f(\vec{x}) = \vec{y}$ pre nejaké $\vec{x} \in V\}$ sa volá obraz f.

Nech $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie konečnorozmerných vektorových priestorov. Potom $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$ 1 b

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow \\ & & a \end{array}$$

$\mathrm{Ker}(B) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : B(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, a) : a \in \mathbb{R}\}$ $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{c+b}_{0} \end{array}\right)$$

$c + b = 0$

$c = -b$

3 b

$b-a$

$\mathrm{Im}(B) = \{B(\vec{x}) = \vec{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{(a, \cancel{b}, -b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ $\dim(\mathrm{Im}(B)) = 2$

- ortonormálna báza $\mathrm{Ker}(B) = \left(\frac{\vec{x}}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}\right)$ 2 b

$\vec{x} = (1, 1, -2)$

$\notin \mathrm{Im}(B)$

- ortonormálna báza $\mathrm{Im}(B) = \left(\frac{(1,0,0)}{\sqrt{1}}, \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}\right)$

$X = ((1,0,0), (0,1,-1))$

6

SÁRA NENYHÁRT

a) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)(1-\lambda) - (\alpha-\lambda) =$$

$$(\alpha-\lambda)((1-\lambda)^2-1) = (\alpha-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \alpha \quad \lambda_3 = 2$ ✓

$\lambda_1 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ak $\alpha = 0 \Rightarrow$ dostaneme nulový vektor

a čo z toho?

$\lambda_2 = \alpha$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right)$$

ak $\alpha = 1$, nedostaneme nulový vektor

$\lambda_3 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ak $\alpha = 2$, dostaneme nulový vektor

a keď $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$ tak čo?

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$ $\quad \mathbb{R} \setminus \{2\}$

4

SÁRA DENIHÁRT

Neargumentujete dosť dôsledne

3) $T^2 = 2T$

$T\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$T^2\vec{x} = T.T\vec{x} = T.\lambda\vec{x}$

$2T\vec{x} = 2\lambda\vec{x}$

$T.\lambda\vec{x} = 2\lambda\vec{x} \iff \lambda = 0 \vee T.\lambda\vec{x} = 2\lambda\vec{x}$

$\lambda.\lambda\vec{x} = 2\lambda\vec{x}$

$\lambda = 2$

$\Rightarrow$ triviálne −1b

$\Leftarrow$ tiež

čo vás oprávňuje urobiť tento krok? $\vec{x} \neq \vec{0}$ −2b

7

4) $S: V \to V$

$\langle x,y\rangle_S := \langle Sx, Sy\rangle$

symetria:

$\langle x,y\rangle_S \overset{def}{=} \langle Sx,Sy\rangle = \langle Sy, Sx\rangle \overset{def}{=} \langle y,x\rangle_S$

symetria pôvodného skalárneho súčinu ✓

linearita:

$\langle ax,y\rangle_S \overset{def}{=} \langle S(ax), Sy\rangle = \langle a Sx, Sy\rangle = a\langle Sx,Sy\rangle \overset{def}{=} a\langle x,y\rangle_S$

linearita zobrazenia S — linearita pôvodného skalárneho súčinu

$\langle x+y,z\rangle_S \overset{def}{=} \langle S(x+y), Sz\rangle = \langle Sx+Sy, Sz\rangle = \langle Sx,Sz\rangle + \langle Sy, Sz\rangle \overset{def}{=} \langle x,z\rangle_S + \langle y,z\rangle_S$

nezápornosť

$\langle x,x\rangle_S = 0$, len vtedy, keď x je nulový vektor

$\langle x,x\rangle_S = \langle Sx, Sx\rangle \geq 0$ (nezápornosť pôvodného skalárneho súčinu)

$\langle Sx, Sx\rangle = 0 \iff Sx = 0 \iff x = 0$

injektívna

✓

10

SÁRA DENYHÁRT

5, b, • je zrejmé, lebo znova vznikne postupnosť od i po nekonečno a definícia hovorí, že transformácie zobrazí do seba.

• matica zobrazenia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(cA+dB) = L\begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} db_1 \\ \vdots \\ db_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_2 \\ ca_3 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} db_2 \\ db_3 \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$c = \begin{pmatrix} a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} b_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = cLA + dLB$$ ✓ 2

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ & & -\lambda \\ & & & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

↗ matice sa nedajú používať, ak dim = ∞

$\boxed{\lambda = 0}$ VLASTNÉ HODNOTY

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_1 = (1, 0, 0, 0 \dots)$ VLASTNÝ VEKTOR

↓

• $X = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ ✓

idete správnym smerom

1,5

•

•

$L\vec{u} = L \cdot (a_n, a_n+1, 2a_n+a_{n+1} \dots) = (a_n+1, 2a_n+a_n+1, 2a_n+3a_{n+1} \dots)$

keď odstránime prvý prvok, neovplyvní ostatné prvky $\Rightarrow L\vec{u} \in U$ ak $\vec{u} \in U$ A preto U je invariantný ~~vzh~~ vzhľadom na L. ✓ 2

a, Nech $A: V \to V$ je lineárna transformácia.

Ak $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, potom λ je vlastná hodnota A a $\vec{x}$ je k nej prislúchajúci vlastný vektor. ✓ 1

6,5