## 1.1. Wiederholung: Funktionen, Ableitung und Ableitungsfunktion

### 1.1.1. *Was ist eine Funktion?*

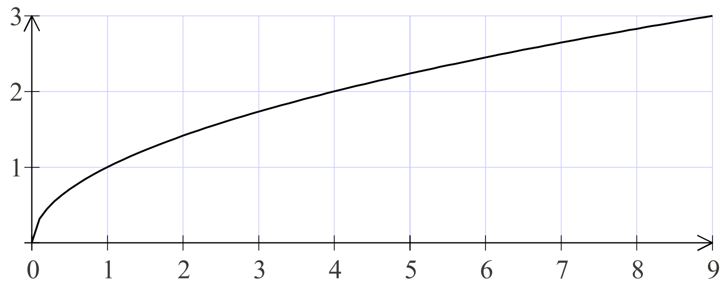
Eine Funktion ist eine **Abbildungsvorschrift**, die jeder Zahl aus einer **Definitionsmenge** $D_f$ genau eine Zahl zuordnet.

Die Menge aller Funktionswerte wird als **Wertemenge** bezeichnet.

Man kann die Abbildungsvorschrift z.B. durch Tabellen, Graphen oder Funktionsterme angeben.

**Beispiel:**

$f(x)=\sqrt{(x)}$ kann als Graph folgendermaßen dargestellt werden:



Man kann daraus auch eine Wertetabelle erstellen, aus der man z.B. ersieht, dass $f(4)=2$ ist.

Die Definitionsmenge ist hier $[0;\infty[$ , die Wertemenge ebenfalls.

### 1.1.2. *Die Ableitung einer Funktion (Einführung mit Geschwindigkeitsmessung)*

Zur Analyse von Funktionen ist häufig die Untersuchung der Änderungsrate einer Funktion innerhalb eines gewissen Bereichs hilfreich.

Z.B. wäre es interessant zu wissen, wie schnell ein Fahrzeug zu einem bestimmten Zeitpunkt fährt oder wie schnell sich ein Bestand zu einem bestimmten Zeitpunkt ändert (vielleicht Wassermenge in einem Becken) .

Um die Geschwindigkeit eines Autos zu bestimmen könnte man zwei Polizisten mit synchron laufenden Uhren an verschiedene Stellen an die Straße stellen (z.B. an Kilometerstein 3 km und 5 km). Fährt ein Auto beim ersten Polizisten vorbei, so übermittelt dieser seinem Kollegen per Funk die Uhrzeit, wann das Auto vorbeigefahren ist.

Fährt das Auto beim zweiten Polizisten vorbei, so kann er auch die Uhrzeit ablesen und dadurch die Geschwindigkeit des Autos berechnen.

$v_{mittel}=\frac{Zurückgelegte\ Strecke}{dafür\ benötigte\ Zeit}$ , hier also $v_{mittel}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$ .

Angenommen der erste Polizist beobachtet das Auto genau um Mitternacht ( $t_0=0\text{s}$ ), der andere 100 Sekunden später ( $t_1=100\,s$ ), dann gilt:

$$v_{mittel}=\frac{5000\,m-3000\,m}{100\,s-0\,s}=\frac{2000\,m}{100\,s}=20\,\frac{m}{s}\ .$$

Natürlich muss das Auto nicht die ganze Zeit mit $20\,\frac{m}{s}$ gefahren sein. Es könnte am ersten

Polizisten vorbeigerast sein, dann an einem Parkplatz dazwischen eine kurze Pause eingelegt haben, um dann wieder weiterzurasen.

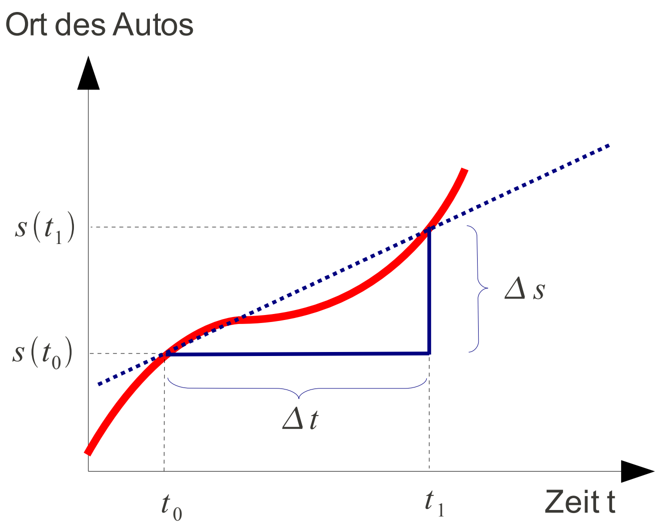
Deswegen ist die berechnete Geschwindigkeit nur die **mittlere Geschwindigkeit**.

**Frage:** Wie könnten die Polizisten die Genauigkeit erhöhen?

**Antwort:** Indem sie sich näher zusammenstellen, also indem Polizist 2 z.B. näher zu Polizist 1 geht!

Um so kürzer hintereinander die beiden Messungen stattfinden, desto genauer entspricht die berechnete Geschwindigkeit der Momentangeschwindigkeit des Autos beim ersten Polizisten.

Im Schaubild kann man sich das so vorstellen:



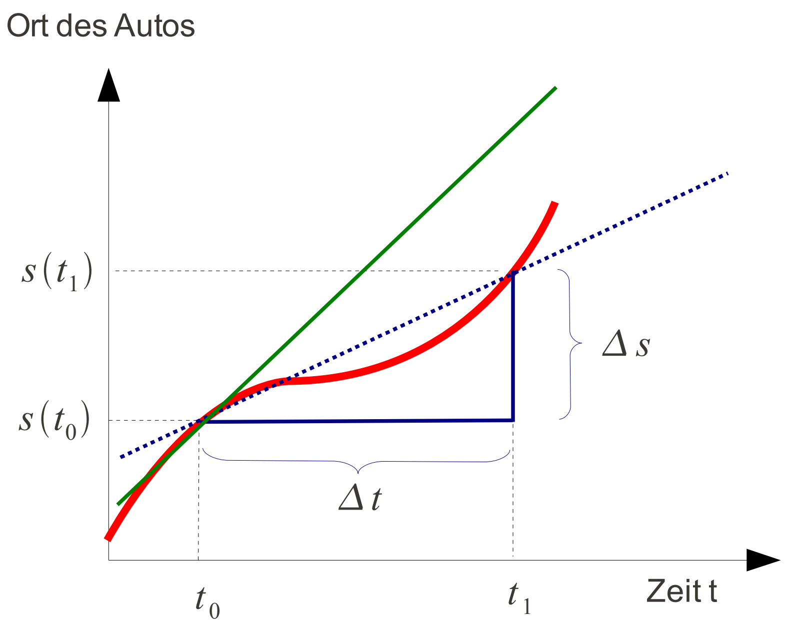

Im Schaubild soll die dicke Linie die Position des Autos zu jedem Zeitpunkt darstellen. $t_0$ und $t_1$ sind die Zeitpunkte, zu denen die Polizisten die Uhrzeit ablesen, $s(t_0)$ und $s(t_1)$ die Orte, an denen die Polizisten stehen.

Mit Hilfe der Grafik kann man erkennen, dass die Rechnung $v_{mittel}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$ nichts anderes ist, als das Bestimmen der Steigung der eingezeichneten gestrichelten Sekante.

Jeder Punkt auf der Sekante gibt an, wo das Fahrzeug wäre, wenn es ab Polizist 1 mit konstanter Geschwindigkeit weitergefahren wäre. Offensichtlich wurde es aber zunächst schneller (Schaubild steiler als Sekante), hat dann abgebremst und schließlich wieder beschleunigt.

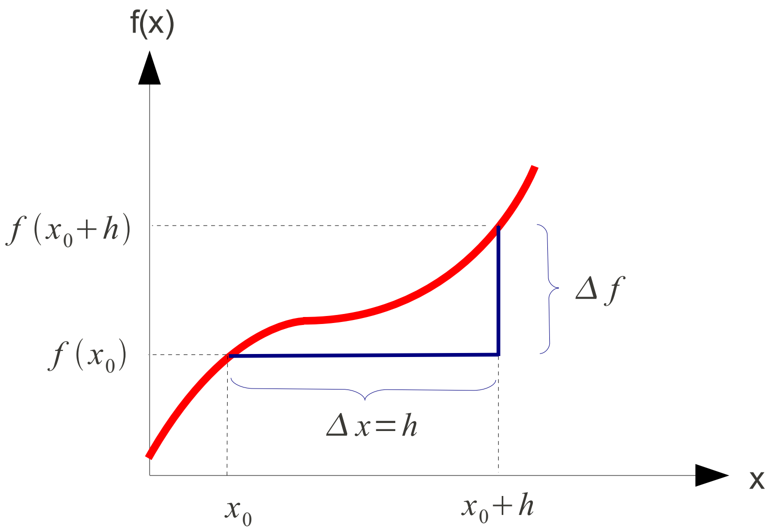
Rücken die beiden Polizisten nun immer näher zusammen, so entspricht die gemessene mittlere Geschwindigkeit irgendwann immer genauer der **Momentangeschwindigkeit**. Im nicht möglichen Idealfall, dass sie beliebig nah beisammen stehen, könnten sie die Momentangeschwindigkeit beliebig genau annähern.

Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0$ entspricht somit der Steigung der Tangente durch den Punkt $(t_0; s(t_0))$, wie im Schaubild dargestellt:




*Mathematische Notierung*

Ändern wir einige Bezeichnungen aus der Skizze ab, so ergibt sich ein bekanntes Bild:




Die oben berechnete mittlere Geschwindigkeit entspricht hier dem Ausdruck $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, auch bekannt als **Differenzenquotient**.

Das Verkleinern der Zeitabstände beim Messen entspricht einem Verkleinern von h, wobei sich dadurch automatisch auch der Abstand zwischen den Polizisten $f(x_0+h)-f(x_0)$ verkleinert.

Mathematisch drückt man die Tatsache, dass sich ein Wert beliebig nah einem anderen annähert, mit Hilfe des **Limes** aus:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ .

Existiert der Grenzwert dieses **DIfferenzialquotienten**, so steht er für die **Ableitung** von f an der Stelle $x_0$, kurz $f'(x_0)$.

Existiert er für jeden x-Wert aus einem Intervall I, so kann man die **Ableitungsfunktion** $f'(x)$ definieren, die jedem $x \in I$ den Wert der Ableitung $f'(x)$ zuweist. f selbst nennt man dann **differenzierbar auf I**.

Graphisch entspricht die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x der Steigung der Tangente an der Funktion f, die durch den Punkt P(x;f(x)) verläuft.

*Anmerkungen:*

- Die Geschwindigkeit ist also die Ableitung des Ortes nach der Zeit, also $v(t)=s'(t)$
- Die Einheiten passen auch: Wird der Ort in m angegeben und die Zeit in s, so liefert der Differenzenquotient und somit auch die Ableitung des Ortes *nach der Zeit* automatisch auch $\frac{m}{s}$, was der Einheit von Geschwindigkeit entspricht.
- Eine alternative Schreibweise für $f'(x)$ ist , gesprochen „df nach dx“ und geht auf Leibnitz zurück, der zeitgleich mit Newton die Differenzialrechnung „erfand“. Z.B. kann man kurz schreiben $\frac{d}{dx}x^2=2x$ .

**Aufgaben:** S. 16/1,2,3,5,6,8,9,10

## 1.2. Ableitungsregeln und höhere Ableitungen

Bei differenzierbaren Funktionen kann man über den Grenzwert des Differenzenquotienten den Wert der Ableitung an jeder Stelle bestimmen, allerdings kann das sehr aufwändig sein.

Für viele Funktionstypen gibt es zum Glück einfache Regeln, die das Bilden des Terms der Ableitungsfunktion ermöglichen.

Zur Wiederholung hier die wichtigsten Regeln:

**Potenzregel:**
Für $f(x)=x^r$ gilt: $f'(x)=r \cdot x^{r-1}$ .

Die Hochzahl muss dabei keine natürliche Zahl sein, diese Regel gilt auch für $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$ .

*Beispiele:*

a) $f(x)=a \cdot x=a \cdot x^1 \rightarrow f'(x)=a \cdot 1 \cdot x^0=a \cdot 1 \cdot 1=a$

b) $f(x)=2x^2 \rightarrow f'(x)=2 \cdot 2x^1=4x$

c) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \rightarrow f'(x)=-1 \cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

**Summen- und Faktorregel:**

Leitet man die Summen bzw. Vielfache von bekannten Funktionen ab, so ist die Ableitung die Summe bzw. das Vielfache der jeweiligen Ableitungen.

*Beispiel:*

$f(x)=x^2$ und $g(x)=x^3$.

Die Funktion $h(x)=2x^2+4x^3$ entspricht dann $h(x)=2f(x)+4g(x)$ und hat als Ableitung also den Term $h'(x)=2f'(x)+4g'(x)=2\cdot 2x+4\cdot 3x^2=4x+12x^2$.

**Höhere Ableitungen:**

Man kann häufig die Ableitung $f'$ einer Funktion nochmal ableiten und erhält dann die zweite Ableitung $f''$ und so weiter.

**Weitere wichtige Ableitungsregeln:**

| *Term der Funktion f* | *Term der Ableitungsfunktion f'* |
|---|---|
| $c$ mit $c\in\mathbb{R}$ | 0 |
| sin(x) | cos(x) |
| cos(x) | -sin(x) |

*Anmerkung:*

Funktionen deren Funktionsterme sich aus Summen und Differenzen von Vielfachen von Potenzen der Form $x^n \textit{ mit } n\in\mathbb{N}$ zusammensetzen heißen **ganzrationale Funktionen**, wobei die höchste vorkommende Potenz den **Grad der Funktion** bestimmt.

*Beispiel:*

$12x^9-3x^7-4x^2$ ist eine ganzrationale Funktion 9. Grades.

Aufgaben:

S. 19/1,2,3,4,6,7,9,10,12

Wiederholung alter Stoff: S.20/13,14

## 1.3. Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung

Als „Ableitung der Ableitung" liefert die 2. Ableitung Informationen über die **Änderung der Steigung** eines Schaubilds:

Ist die **2. Ableitung positiv**, so bedeutet das, dass die erste Ableitung immer größer wird, die Steigung der ursprünglichen Funktion immer mehr zunimmt. Geometrisch entspricht das einer **Linkskurve**.

Ist die **2. Ableitung negativ**, so durchläuft die ursprüngliche Funktion f im Schaubild eine **Rechtskurve**.

Wo die **Steigung maximal / minimal** ist, liegt eine **Wendestelle** vor. Dort muss dann die **2. Ableitung null** sein.

## 1.4. Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrem- und Wendestellen

**Notwendige Bedingungen** sind Bedingungen, die für eine Folgerung auf jeden Fall gegeben sein müssen. Allerdings muss sich die Folgerung noch nicht aus einer notwendigen Bedingung allein ergeben.

Ist allerdings eine **hinreichende Bedingung** erfüllt (indem z.B. mehrere notwendige Bedingungen erfüllt sind), so kann man daraus tatsächlich auf eine bestimmte Eigenschaft folgern.

**Beispiel:**
Sei f eine stetige und differenzierbare Funktion. Hat f an einer Stelle $x_0$ ein lokales Extremum, so liegt dort auch eine waagrechte Tangente vor, d.h. $f'(x_0)=0$ .

Allein aus der Tatsache, dass ein lokales Extremum vorliegt, kann man also auf die waagrechte Tangente schließen:

Lokales Extremum bei $x_0$ $\Rightarrow f'(x_0)=0$

**Somit ist die linke Seite hinreichend für die rechte Seite.**

Die **andere Richtung gilt nicht**, d.h.

$f'(x_0)=0 \Rightarrow$ Lokales Extremum bei $x_0$

ist **falsch!**
Denn es könnte dadurch bei $x_0$ auch nur ein Sattelpunkt vorliegen. Die Bedingung aber, dass $f'(x_0)=0$ gilt, ist auf jeden Fall **notwendig**, sie muss erfüllt sein, aber es scheint noch etwas zu fehlen.
So muss man die linke Seite noch weiter einschränken, indem man z.B. zusätzlich noch fordert, dass $f''(x_0)$ ungleich null ist. Dann haben wir ein hinreichendes Argument für Extremstellen:

{ $f'(x_0)=0$ **und** $f''(x_0)\neq 0$ } $\Rightarrow$ lokales Extremum bei $x_0$ .

Eine andere mögliche Einschränkung wäre gewesen, von $f'$ an der Stelle $x_0$ einen Vorzeichenwechsel (VZW) zu fordern.

Somit gilt:

### *1.4.1. Hinreichende Bedingungen für Extremstellen*

**1. hinreichende Bedingung für Extremstellen**

Ist $f'(x_0)=0$ **und** findet für $f'$ in der Umgebung von $x_0$ ein Vorzeichenwechsel statt, so hat $f$ bei $x_0$ eine Extremstelle.

(VZW von – nach + → Minimum, VZW von + nach - → Maximum).

**2. hinreichende Bedingung für Extremstellen**

Ist $f'(x_0)=0$ **und** $f''(x_0)\neq 0$ **,** so hat $f$ bei $x_0$ eine Extremstelle,

( $f''(x_0)>0$ → Minimum, da Linkskurve, $f''(x_0)<0$ → Maximum, da Rechtskurve)

**Anmerkungen:**

1. Nicht immer findet man alle Extremstellen!

   Sobald eine der beiden hinreichenden Bedingungen für eine Funktion gilt, weiß man, dass diese bei $x_0$ eine Extremstelle hat.

   Es gibt aber auch Funktionen, die an einer Stelle ein Extremum haben, obwohl weder die 1. noch die 2. hinreichende Bedingung erfüllt ist.

   Mit anderen Worten: findet man mit Hilfe der beiden hinreichenden Kriterien keine Extremstellen, heißt das noch lange nicht, dass die Funktion keine Extremstellen hat.

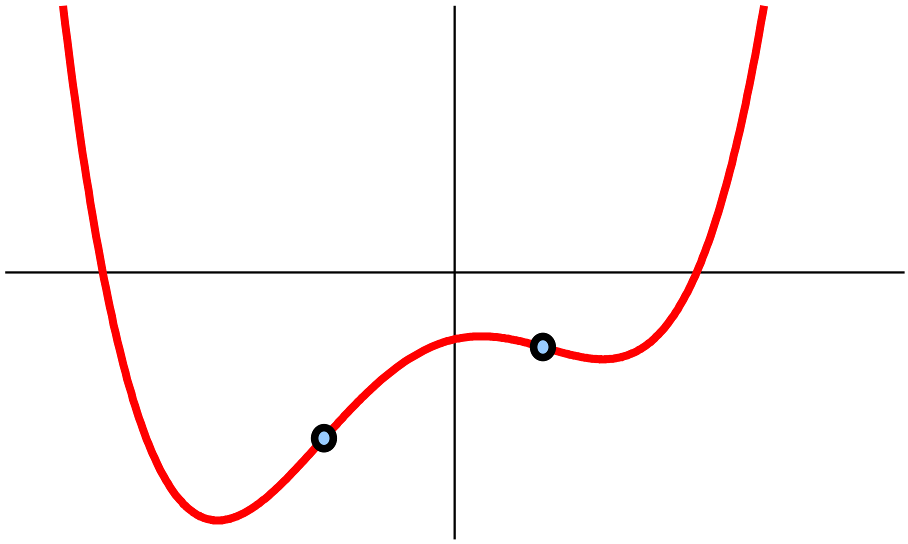
   Beispiel: $f(x)=1$ hat als Ableitungen $f'(x)=0$ und $f''(x)=0$. Somit ist keine der beiden hinreichenden Bedingungen erfüllt, obwohl f überall Extremstellen besitzt (da für das Minimum z.B. nur gelten muss, dass $f(x_0)\leqslant f(x)$ (kleiner-**gleich**!) für alle x aus der Umgebung von $x_0$, und nicht $f(x_0)<f(x)$ (also echt kleiner)).

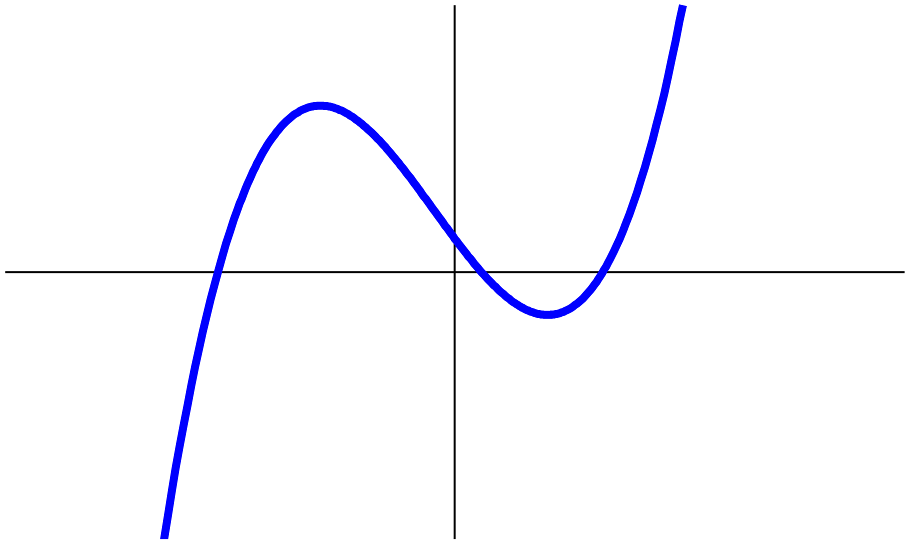
2. Die beiden hinreichenden Bedingungen können verschiedene Ergebnisse liefern!

   $f(x)=x^4$ liefert mit der 2. hinreichenden Bedingung keinen Hinweis auf das Minimum bei $x_0=0$, wohl aber die 1. hinreichende Bedingung, da der VZW trotz Sattelpunkt der 1. Ableitung bei 0 erkannt wird! Die erste hinreichende Bedingung scheint „mehr zu können" als die 2.

### 1.4.2. *Hinreichende Bedingungen für Wendestellen*

Gegeben seien eine Funktion f und ihre Ableitung f '.





Anhand der Schaubilder sieht man schnell: die Wendepunkte sind genau dort, wo die Steigung der ursprünglichen Funktion lokal maximal bzw. minimal ist. Dies kann man auch daran erkennen, dass die Ableitungsfunktion $f'$ dort ein Maximum bzw. ein Minimum hat.

Um die Wendestellen zu finden, kann man also auch die Extremstellen der Ableitungsfunktion suchen. Somit verlagert sich das Problem vom letzten Abschnitt „um eine Ableitung nach unten" und somit auch die hinreichenden Bedingungen. Im Vergleich zu den Extremstellen, müssen wir nur wenig ändern: Aus $f'$ wird $f''$ und aus $f''$ wird $f'''$, statt *Extremstelle* schreiben wir nun *Wendestelle*:

**1. hinreichende Bedingung für *Wende*stellen**

Ist $f''(x_0)=0$ **und** findet für $f''$ in der Umgebung von $x_0$ ein Vorzeichenwechsel statt, so hat $f$ bei $x_0$ eine *Wende*stelle.

**2. hinreichende Bedingung für *Wende*stellen**

Ist $f''(x_0)=0$ **und** $f'''(x_0)\neq 0$ **,** so hat $f$ bei $x_0$ eine *Wende*stelle,

Mögliche Aufgaben:

Extremstellen: LS S. 26/1,2,3,4,6, zum Überlegen: 9,11,13,14

Wendestellen: LS S. 30/1,5,8,9 (Graphen finden),10 (Anwendung),11 (Tangente bestimmen),12 (allgemeine Rechnung),13 (Überlegen),15 (GTR)

## 1.5. Tangenten und Normalen an Schaubildern

### *1.5.1. Terme von Tangente und Normale*

Die **Tangente t(x)** an ein Schaubild f(x) am Punkt $P(x_0; f(x_0))$ ist die Gerade, die das Schaubild bei $x_0$ berührt. Sie hat die gleiche Steigung wie f an der Stelle $x_0$ , also $m=f'(x_0)$ .

Da die Tangente eine Gerade ist, gilt für sie die normale Geradengleichung:

$t(x)=m\cdot x+c$

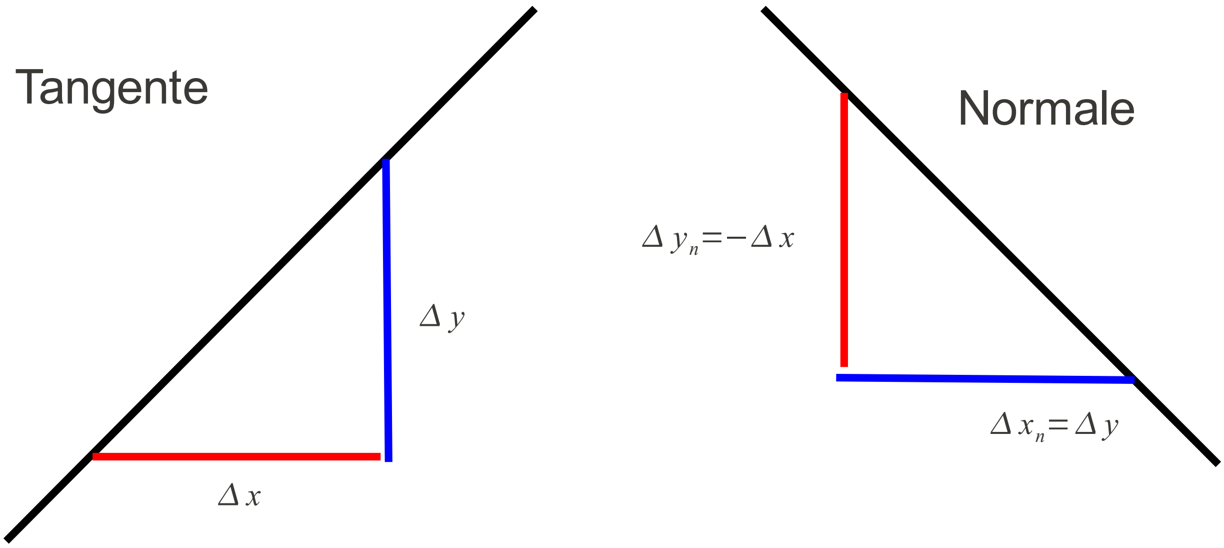
Dabei ist m die **Steigung** und c der **y-Achsenabschnitt**, also der Funktionswert, den die Funktionsgleichung der Tangente bei x=0 annimmt (also der y-Wert, an dem die Tangente die y-Achse schneidet).

Die **Normale n(x)** an ein Schaubild f(x) am Punkt $P(x_0; f(x_0))$ ist die Gerade, die **senkrecht zur Tangente** steht und ebenfalls durch den Punkt P läuft.

Auch sie hat eine normale Geradengleichung, allerdings mit anderer Steigung $m_n$ und anderem y-Achsenabschnitt.

**Wie hängen m und $m_n$ zusammen?**

Links sieht man das Steigungsdreieck der Tangente, wodurch man die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen kann. Rechts kann man die zugehörige Normale sehen, wobei einfach die Tangente um 90° im Uhrzeigersinn gedreht wurde. Das Steigungsdreieck hat sich dabei entsprechend mitgedreht.




Bei der Tangente waren in unserem Beispiel $\Delta x$ und $\Delta y$ positiv, durch das Drehen ist das neue $\Delta y_n$ jetzt negativ und entspricht somit dem negativen $\Delta x$ der ursprünglichen Tangente.

Das neue $\Delta x_n$ ist bei der Drehung aus $\Delta y$ hervorgegangen.

**Somit gilt für die Steigung der Normale:**

$$m_n = \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = \frac{-\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{m}$$

### *1.5.2. Bestimmung des Terms der Tangente / Normale durch einen Punkt auf dem Schaubild*

**Beispiel:**

$f(x) = x^2$ und gesucht sind Normale und Tangente, die das Schaubild bei $x_0 = 2$ hat.

Zunächst die erste Ableitung an der Stelle 2 bestimmen, um die Steigung m der Tangente zu erhalten:

$f'(x)=2x \Rightarrow m=f'(2)=2\cdot 2=4$

Damit kann man die Steigung der Normale bestimmen:

$m_n=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{4}$

Nun sind von der Tangenten- und der Normalengleichung jeweils die Steigung bekannt. Nun ist noch der jeweilige y-Achsenabschnitt zu bestimmen.

Diesen erhält man, indem man in die jeweilige Gleichung einen Punkt einsetzt, von dem man weiß, dass er auf der Tangente bzw. Normale liegt.

In unserem Fall gehen beide Geraden durch den Punkt $P(2;f(2))=P(2;4)$ .

**Zuerst die Tangente:**

$y=4\cdot x+c$

Da $P\in t$ , gilt:

$4=4\cdot 2+c$ , also $c=4-8=-4$ .

Somit: $t(x)=4\cdot x-4$

**Nun die Normale:**

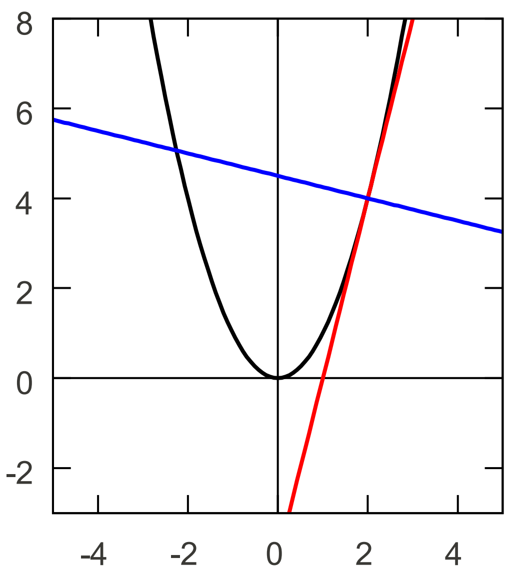
$y=-\frac{1}{4}\cdot x+c$

Da $P\in n$ , gilt:

$4=-\frac{1}{4}\cdot 2+c$ , also $c=4+0{,}5=4{,}5$

Somit: $n(x)=-\frac{1}{4}\cdot x+4{,}5$

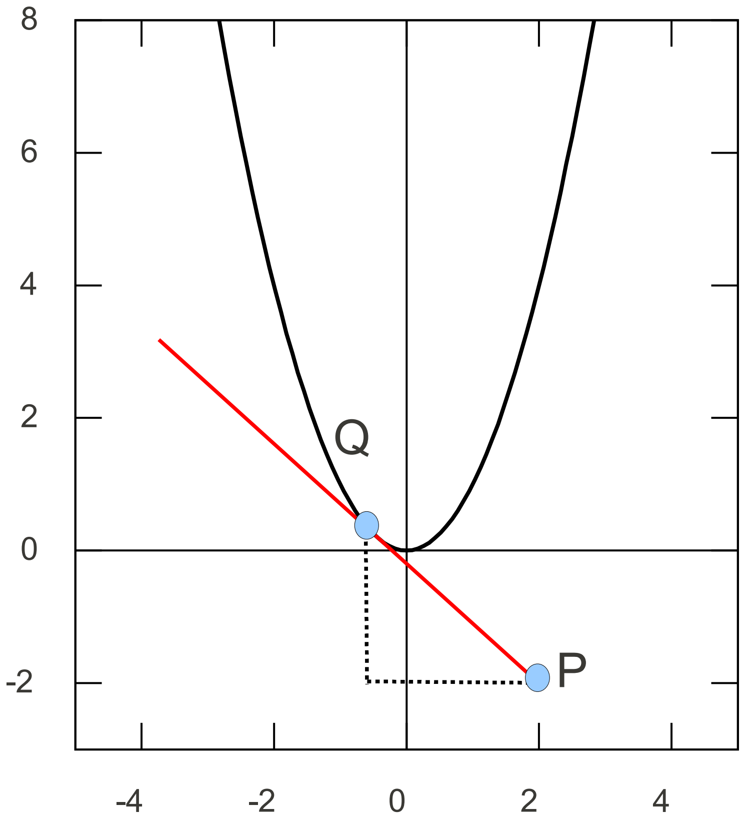
Mit dem GTR kann man die Richtigkeit der Berechnung überprüfen:




### *1.5.3. Tangente an ein Schaubild durch einen Punkt außerhalb des Schaubilds*

**Beispiel:**

Gegeben sei wieder $f(x)=x^2$ und gesucht sind die Tangenten, die den Graph von f berühren und durch den Punkt P(2;-2) gehen.




Die Steigung der Tangente muss also gleich sein, wie die Steigung des Schaubilds am noch unbekannten Punkt Q.

Also $m=f'(x_q)$, wobei m über das Steigungsdreieck bestimmt werden kann als $\frac{y_q-y_p}{x_q-x_p}=m$.

Da Q auf dem Schaubild liegt, gilt auch, dass $y_q=f(x_q)$, wodurch man insgesamt erhält:

$$\frac{f(x_q)-y_p}{x_q-x_p}=f'(x_q)$$

Einsetzen und Auflösen nach $x_q$ liefert die Stelle, durch die man die Tangente legen muss.

Ab hier ist die Aufgabe identisch zum Problem im vorigen Abschnitt.

**Durchführung am konkreten Beispiel:**

$f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, P(2;-2)

Obige Formel liefert damit:

$$\frac{x_q^2-(-2)}{x_q-2}=2x_q$$

Mit dem Nenner multiplizieren:

$$x_q^2+2=2x_q(x_q-2)$$

Alles auf eine Seite bringen, ausmultiplizieren und zusammenfassen:

$-x_q^2+4x_q+2=0$

Die Mitternachtsformel liefert:

$x_1=2+\sqrt{6}$ und $x_2=2-\sqrt{6}$

Es gibt also zwei Lösungen. Das wird aus dem Schaubild heraus aber auch klar: es muss zwei Tangenten geben, die vom Punkt P(2;-2) ausgehen: eine durch den Punkt $Q(x_2; f(x_2))$ und eine weiter nach oben durch den Punkt $R(x_1; f(x_1))$.

Der Rest der Lösung gestaltet sich wie im letzten Abschnitt und kann selbständig durchgeführt werden.

Lösungen für die Tangentengleichungen (gerundet):

$t_1(x)=-0{,}8989794855663558\,x-0{,}2020410288672885$

$t_2(x)=8.898979485566356\,x-19.79795897113271$

Kontrolle mit dem GTR / Schaubild: