Musterlösung Klausur 1, KS2

Aufgabe 1 5' $\boxed{4}$

$A(1/1/1)$, $B(1/-3/4)$

a) $g^*: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1-1 \\ -3-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ 2

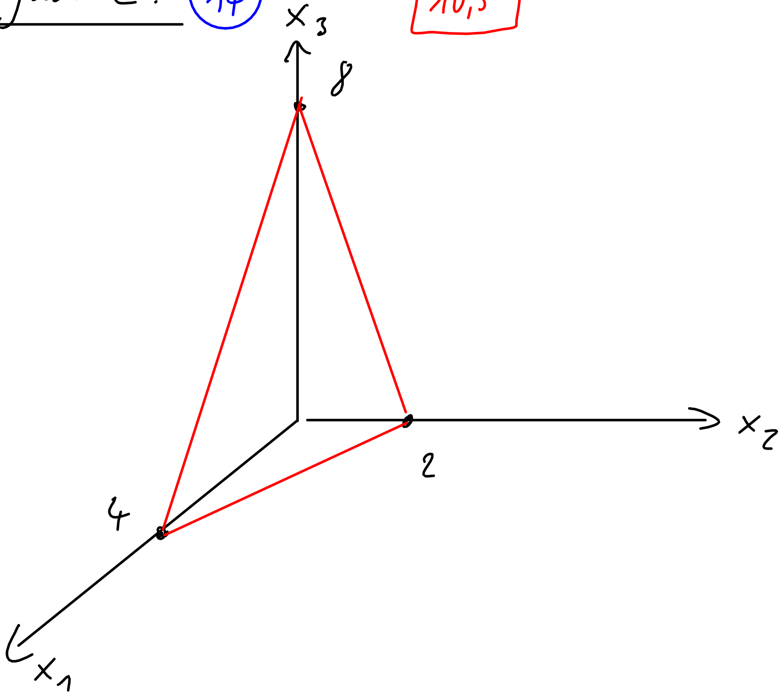
b) $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$, also $P_1(1/-7/7)$ 1

und $P_2(1/9/-5)$ 1

Aufgabe 2: 14' $\boxed{10{,}5}$

a)



1,5

b) $E_a: 5x_1 - 2x_2 = 0$

Ebene ist parallel zur x_3-Achse und verläuft durch den Ursprung (1)

$E_b: x_3 = 5$

Ebene ist parallel zur x_1-x_2-Ebene (1)

c) $o: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$ (1)

Normalenvektor von E_1

$p: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$, wobei $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ (2)

d) $E_2: 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 7 = 29$ (1)

$P \in E_2$

e) Abstand zwischen E_1 und P:

Schnittpunkt von o (aus d) und E_1 bestimmen:

$E_1 \cap g$:

$$2(3+2k) + 4(4+4k) + 7 + k = 8$$
$$6 + 4k + 16 + 16k + 7 + k = 8$$
$$21k + 29 = 8$$
$$21k = -21$$
$$k = -1$$

Einsetzen in o: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $S(1/0/6)$

(1,5)

$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-4 \\ 6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$$

Die Ebene E_1 und P haben voneinander den Abstand $\sqrt{21}$

1,5

<u>Aufgabe 3</u>: 8' 5

$A(0/-3/2)$, $B(2/0/8)$, $C(6/-1/-1)$

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0+3 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+36} = 7$ 0,5

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ -1+3 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36+4+9} = 7$ 0,5

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ -1-0 \\ -1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+1+81} = \sqrt{98}$

0,5

<u>gleichschenklig</u>, da $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ 0,5

Überprüfung auf <u>Rechtwinkligkeit</u>: wenn, dann zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ bei A:

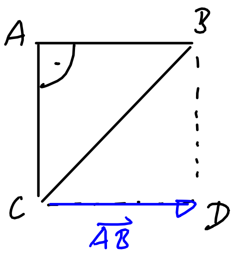
1

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\cdot 6 + 3\cdot 2 - 6\cdot 3 = 0$, also daß $90°$

b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} =$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$



also $D(8/2/5)$ 2

Aufgabe 4: 5' 4,5

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 0,5

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 0,5

$f''(x) = 6ax + 2b$ 0,5

Wendepunkt bei (-1/-2):

$f(-1) = -a + b - c + d = -2$ 0,5

$f''(-1) = -6a + 2b = 0$ 0,5

Waagrechte Tangente bei (0/-4):

$f(0) = d = -4$ 0,5

$f'(0) = c = 0$ 0,5

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{GTR} \begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

$\rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ 1

Aufgabe 5 (Alternative): 22' 7P

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}_0^+$ in Minuten ab 14 Uhr

$g_2: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OP}} + t \cdot \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + 17 \\ 36 - 54 \\ 3,8 - 3,2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{PQ}} =$

$$\begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

a) $v = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 0,3^2} \approx 12,65 \left[\frac{km}{min}\right]$ 1

b) x_3 muss 4,9 sein, also $3,4 + t \cdot 0,3 \overset{!}{=} 4,9$

$t = 5$

Um 14h05 ist eine Höhe von 4,9 km erreicht. 1,5

c) $\overrightarrow{OP_{14h10}} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 + 60 \\ 54 - 60 \\ 3,2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ -6 \\ 5,2 \end{pmatrix}$

Um 14h10 befindet sich F_2 bei $P_{14h10}(43|-6|5,2)$ 2

(mit Aufstellen von g_2)

d) <u>Umparametrisieren:</u>

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 - 15 \\ 54 - 6 \\ 3,2 - 3,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 48 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} t & s & \\ -4 & -6 & -32 \\ 12 & 6 & 48 \\ 0,3 & -0,2 & -0,2 \end{array} \xrightarrow{GTR} \begin{array}{cc|c} t & s & \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} t = 2 \\ s = 4 \end{array}$$ 1

Zum Zeitpunkt 14h04 befindet sich F_2 am Schnittpunkt der Flugbahnen.

Die Positionen der Flugzeuge sind dann:

$$\overrightarrow{OF_1} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ 48 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 54 \\ 4{,}6 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$\overrightarrow{OF_2} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

Abstand der Flugzeuge um 14h04.

$$\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 54 \\ 4{,}6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -24 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8^2 + (-24)^2 + (-0{,}6)^2}$$

$$\approx 25{,}31 \text{ [km]} \quad 0{,}5$$