Ableitungsregeln: Die Produktregel

Problem:
Wie leitet man das Produkt zweier Funktionen ab, z.B. $(x \cdot \sin(x))'$?

Herleitung:
Zunächst kann man ganz normal den **Differenzialquotienten** für die Ableitung von $f(x) \cdot g(x)$ aufstellen:

$$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Nun fügt man in den Zähler eine **„geschickte Null"** ein, nämlich

$$0 = -f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) .$$

Das ändert den Ausdruck nicht, führt aber zu folgendem einfachen Ergebnis:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} + \frac{g(x+h) \cdot f(x) - g(x) \cdot f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$g(x) \cdot f'(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Somit gilt die **Produktregel**:

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

Angwandt auf unser Beispiel ergibt das:

$$(x \cdot \sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

Ableitungsregeln: Die Kettenregel

Problem:
Wie leitet man einen Term ab, bei der eine Funktion als Argument einer anderen Funktion vorkommt, also z.B. $(\sin(3x))'$?

Herleitung:
Man stellt zunächst den Differenzenquotienten der Funktion $f(g(x))$ auf:

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Nun multipliziert man den Term im Limes mit einer geschickten 1, nämlich mit

$$1 = \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)},$$

und erhält somit:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Somit gilt die **Kettenregel**:

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Man bezeichnet das nachträgliche Differenzieren von $f'(g(x))$ mit $g'(x)$ auch als **Nachdifferenzieren**.

Es wird also zunächst die „äußere Funktion“ abgeleitet, die innere lässt man unverändert stehen. Danach multipliziert man das Ergebnis mit der Ableitung der „inneren Funktion“.

Wenden wir das auf unser Beispiel an:

$$\sin(3x) = \cos(3x) \cdot 3$$

Hier war $\sin(x)$ die äußere Funktion und $3x$ die innere Funktion.