Musterlösung Mathematik-KA

Freitag, 8. Dezember 2017 14:48

Aufgabe 1 1'

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos(2x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos(2x) - \sqrt{x} \cdot \sin(2x) \cdot 2$$

Aufgabe 2 2'

$$f(x) = 2 + e^{2x+1}$$

$$F(x) = 2x + \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$$

$$F(0) \overset{!}{=} e \rightsquigarrow \frac{1}{2}e + c = e \rightsquigarrow c = \frac{1}{2}e$$

$$F(x) = 2x + \frac{1}{2}e^{2x+1} + \frac{1}{2}e$$

Aufgabe 3 3'

$$x^5 + 4x^3 - 5x = 0$$

$$x(x^4 + 4x^2 - 5) = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$u := x^2$$

$$u^2 + 4u - 5 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

Resubstitution: $x^2 = -5$ ↯ $, x^2 = 1 \rightsquigarrow x_2 = -1, x_3 = 1$

Aufgabe 4 15'

$$E: 3x_1 + 4x_3 = -7 \quad , P(9/-4/1)$$

a) HNF: $$\frac{-7 - 3x_1 - 4x_3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$$

$= 5$

$|-7-3\cdot 9-4\cdot 1|$ 38

$= 5$

$$d(P;E) = \frac{|-7-3\cdot 9-4\cdot 1|}{5} = \frac{38}{5}$$

b) $S(-1/1/-1) \in E$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9+1 \\ -4-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$Q(-11/6/-3)$

c) $R(3/-8/2) \rightarrow \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3-9 \\ -8+4 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt L auf F liegt genau zwischen P und R, also z.B.

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung aufstellen mit $\vec{n}_E = \overrightarrow{PR}$:

$$F: \; -6x_1 - 4x_2 + x_3 \overset{L\in F}{=} -6\cdot 6 - 4\cdot(-6) + 3/2 = -36+24+3/2 =$$
$$= -10{,}5$$

d) Allgemeiner Punkt $P_t(5-5t/4-2t/2)$ in HNF einsetzen:

$$\frac{|-7-3\cdot(5-5t)-4\cdot 2|}{5} \overset{!}{=} 3$$

$|-30+15t| \overset{!}{=} 15$ $\quad$ $-30+15t = -15 \rightsquigarrow t = 1$; $\quad -30+15t = 15 \rightsquigarrow t = 3$

ges. Punkte: $P_1(0/2/2)$ und $P_3(-10/-2/2)$

<u>Aufgabe 5</u>: 37'

4' a) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EA} =$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3-2 \\ -2+3 \\ 4-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-2 \\ -3+3 \\ -0{,}5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow C(-2/3/-0{,}5)$$

6' b) $E: \; ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$

$E \in E: \quad 2a - 3b + 4c = 1 \quad$ GTR $\quad a = 1/13$

$F \in E: \quad 3a + 2b + 4c = 1 \quad \leadsto \quad b = -1/65$

$S \in E: \quad 0a + 0b + 5c = 1 \qquad c = 1/5$

$E_{EFS}: \; 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$ (alles mit 65 multipliziert)

10' c) Winkel zwischen den Normalenvektoren bestimmen

$$\vec{n}_{E_{FSG}} = \vec{SF} \times \vec{FG} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-0 \\ 4-5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-2 \\ 4-4 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\overset{}{}} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ -(0-5) \\ 3+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_{E_{FSG}} \cdot \vec{n}_{E_{EFS}}}{|\vec{n}_{E_{FSG}}| \cdot |\vec{n}_{E_{EFS}}|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}}{\sqrt{25+1+169} \cdot \sqrt{1+25+169}} =$$

$$= \frac{5-5+169}{\sqrt{195} \cdot \sqrt{195}} = \frac{169}{195} \approx 0{,}867$$

$$\leadsto \overset{*}{\alpha} = \arccos(0{,}867) \approx 29{,}93^\circ$$

Damit der Winkel stumpf wird: $\alpha = 180^\circ - 29{,}93^\circ = 150{,}07^\circ$

3' d) $A_{Dach} = 4 \cdot A_{E_{FSG}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{SF} \times \vec{FG} \right| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \sqrt{195} \approx 27{,}93\,[m^2]$

8' e) Geraden aufstellen:

$$g_{DF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3+3 \\ 2+2 \\ 4+0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

$$g_{AS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0+3 \\ 5+0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}, l \in \mathbb{R}$$

Abstand mit HNF:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ -42 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{8{,}5^2 + 42^2 + 26^2} = \sqrt{2512{,}25}$$

$$d = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2512{,}25}} \cdot \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ -42 \\ 26 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2512{,}25}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ -42 \\ 26 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2512{,}25}} \cdot |-84{,}5| \approx 1{,}69\,[m]$$

6′ f) $S^*(0|0|7)$

Gerade für Schatten: $g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung aus Aufgabe b)

$E: \; 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$

$\underline{E \cap g_S:}$

$$\begin{aligned} 5 \cdot k + k + 13(7 - 2k) &= 65 \\ 6k + 91 - 26k &= 65 \\ -20k &= -26 \\ k &= \frac{13}{10} \end{aligned}$$

Einsetzen in g_S: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{13}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 \\ -1,3 \\ 4,4 \end{pmatrix}$

Abstand $|\overrightarrow{SP}| = \left| \begin{pmatrix} 1,3 \\ -1,3 \\ 4,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1,3 \\ -1,3 \\ -0,6 \end{pmatrix} \right| =$

$\sqrt{1,3^2 + 1,3^2 + 0,6^2} \approx 1,93$ [m]