

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
I СЕМЕСТР

Лектор: *Тюленев Александр Иванович*



Авторы: *Шаринов Артем,*  
*Шмакова Екатерина*  
*Проект на Github*

осень 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Множество действительных чисел</b>	<b>2</b>
1.1	Кванторы и множества . . . . .	2
1.2	Аксиомы действительных чисел . . . . .	3
1.3	Супремумы, инфимумы и грани числовых множеств . . . . .	4
1.4	Вложенные отрезки . . . . .	6
1.5	Счётные и несчётные множества . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Предел числовой последовательности</b>	<b>11</b>
2.1	Определение предела последовательности . . . . .	11
2.2	Свойства пределов сходящихся последовательностей, связанные с арифметическими операциями . . . . .	14
2.3	Предельный переход в неравенствах . . . . .	16
2.4	Пределы монотонных последовательностей . . . . .	17
2.5	Подпоследовательности и частичные пределы . . . . .	17
2.6	Критерий Коши . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Топология числовой прямой</b>	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>Предел функций</b>	<b>28</b>
4.1	Классические определения предела . . . . .	28
4.2	Предел по множеству . . . . .	29
4.3	Критерий Коши для функций . . . . .	30
4.4	Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса . . . . .	32
4.5	Арифметические операции с пределами функций . . . . .	33
4.6	Предельные переходы в неравенствах . . . . .	34
4.7	Верхние и нижние пределы для функции . . . . .	35
4.8	Непрерывность функции в точке и на множестве . . . . .	37
4.9	Колебания . . . . .	40
4.10	Обратная функция . . . . .	42
4.11	Первый замечательный предел и непрерывность элементарных функций . . . . .	45
4.12	Число $e$ . . . . .	46
4.13	Показательная функция . . . . .	48
4.14	Свойства показательной функции . . . . .	51
4.15	Второй замечательный предел . . . . .	53
4.16	Эквивалентность функций . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Производная функции в точке. Дифференциал. Дифференцируемость</b>	<b>58</b>
5.1	Односторонние производные . . . . .	59

5.2	Правила вычисления производных и дифференциалов . . . . .	60
5.3	Производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	63
5.4	Формула Лейбница . . . . .	64
5.5	Вычисление производных функций, заданных неявно . . . . .	65
5.6	Производные функций, заданных параметрически . . . . .	66
5.7	Теоремы о среднем . . . . .	66
5.8	Следствия из теоремы Лагранжа о среднем . . . . .	68
5.9	Теорема Дарбу . . . . .	69
5.10	Формула Тейлора . . . . .	69
5.11	Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора . . . . .	73
5.12	Правило Лопиталья . . . . .	76
5.13	Исследование функций . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Первообразная, неопределенный интеграл, полиномы, комплексные числа</b>	<b>83</b>
6.1	Свойства неопределенного интеграла . . . . .	84
6.2	Комплексные числа . . . . .	85
6.3	Полиномы . . . . .	86
6.4	Интегрирование дробей . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Линейные пространства (векторные пространства)</b>	<b>90</b>
7.1	Нормированное пространство . . . . .	91
7.2	Метрическое пространство . . . . .	91
7.3	Равномерная непрерывность . . . . .	93
7.4	Евклидово пространство . . . . .	94
7.5	Топология метрического пространства . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Кривые</b>	<b>102</b>
8.1	Вектор-функции . . . . .	102

# 1 Множество действительных чисел

## 1.1 Кванторы и множества

Определим следующие символы:

$\wedge$ — логическое «и»	$\vee$ — логическое «или»
$\Rightarrow$ — «следует»	$\Leftrightarrow$ — «тогда и только тогда»
$\neg$ — «отрицание»	$\forall$ — «для любого»
$\exists$ — «существует»	$:$ — «такой, что»
$:=$ — «равно по определению»	$\exists!$ — «существует и единственно»
$\hookrightarrow$ — «выполняется»	$\emptyset$ — пустое множество

Множества можно задавать перечислением, если они конечны,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  или как набор условий  $X = \{x : P(x)\}$ .

Для множеств будем использовать следующие операции:

1.  $X \cup Y := \{z : z \in X \vee z \in Y\}$  — объединение;
2.  $X \cap Y := \{z : z \in X \wedge z \in Y\}$  — пересечение;
3.  $X \setminus Y := \{z : z \in X \wedge z \notin Y\}$  — разность.

**Определение 1.1.** Множество называется бесконечным если  $\forall n \in \mathbb{N}$   $X$  содержит  $n$  различных элементов.

**Определение 1.2.** Пусть  $X, Y$  — непустые множества. Тогда  $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$  — декартово произведение.

**Определение 1.3.** Будем говорить, что задано соответствие  $f$  из  $X$  в  $Y$ , если  $X \times Y$  выделено подмножество  $G_f \subset X \times Y$ .

При этом, если  $(x, y) \in G_f$ , то говорят, что  $y$  поставлен в соответствие  $x$ .

$D_f := \{x \in X : \exists y \in Y \hookrightarrow (x, y) \in G_f\}$  — область определения.

$E_f := \{y \in Y : \exists x \in X \hookrightarrow (x, y) \in G_f\}$  — область значений.

**Определение 1.4.** Если  $D_f = X$ , то говорят, что задано отображение (многозначное) из  $X$  в  $Y$   $f: X \mapsto Y$ .

**Определение 1.5.**  $X, Y \neq \emptyset$ . Будем говорить, что  $f: X \mapsto Y$  — *отображение*, если  $D_f = X$  и  $\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in G_f$ . Последнее можно интерпретировать как  $y = f(x)$ . Если не сказано обратного, то отображение считать однозначным.

**Определение 1.6.**  $X, Y, Z \neq \emptyset$ .  $f: X \mapsto Y$ ,  $g: Y \mapsto Z$  — отображения. *Композицией отображений*  $f$  и  $g$  назовём отображение  $h = g \circ f$ , если  $h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X$ .

**Определение 1.7.** Отображение  $f: X \mapsto Y$  — *инъекция*, если  $\forall x_1, x_2 \in X \hookrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Определение 1.8.** Отображение  $f: X \mapsto Y$  — *сюръекция*, если  $E_f = Y$ . Каждый элемент множества  $Y$  является образом хотя бы одного элемента множества  $X$ .

**Определение 1.9.** Отображение  $f: X \mapsto Y$  называется *обратимым*, если  $\exists f^{-1}: Y \mapsto X$ , такое, что

$$\begin{cases} f \circ f^{-1} = Id_Y \\ f^{-1} \circ f = Id_X \end{cases} \quad \text{при этом } f^{-1} \text{ называется обратной к } f.$$

## 1.2 Аксиомы действительных чисел

**Определение 1.10.** Множеством действительных чисел называется непустое множество  $\mathbb{R}$ , в котором введены 2 бинарные операции:

$$\langle + \rangle: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$\langle \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

и отношение порядка " $\leq$ ". Удовлетворяют 15 аксиомам:

1.  $a + b = b + a$   $\forall a, b \in \mathbb{R}$
2.  $a + (b + c) = (a + b) + c$   $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
3.  $\exists 0 \in \mathbb{R}: a + 0 = 0 + a = a$   $\forall a \in \mathbb{R}$
4.  $\exists (-a): a + (-a) = 0$   $\forall a \in \mathbb{R}$
5.  $a \cdot b = b \cdot a$   $\forall a, b \in \mathbb{R}$
6.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$   $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
7.  $\exists 1 \neq 0: a \cdot 1 = a$   $\forall a \in \mathbb{R}$
8.  $\exists \frac{1}{a}: a \cdot \frac{1}{a} = 1$   $\forall a \neq 0$
9.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$   $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
10.  $a \leq b \vee b \leq a$   $\forall a, b \in \mathbb{R}$
11. если  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$   $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
12. если  $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$   $\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall c \geq 0$
13. если  $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$   $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
14. если  $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$   $\forall a, b \in \mathbb{R}$
15. Аксиома непрерывности  $\forall A, B \subset \mathbb{R}$

**Определение 1.11.** Аксиома непрерывности.

$\forall A, B \subset \mathbb{R}: A, B \neq \emptyset$  и  $\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b$ .  $\exists c \in \mathbb{R}: a \leq c \leq b$ . То есть существует «разделительное число».

**Примечание.** Аксиома непрерывности не справедлива для рациональных чисел ( $\mathbb{Q}$ ).

*Доказательство.* Предположим, что  $\mathbb{Q}$  удовлетворяет аксиоме непрерывности.

$$A := \{x \in \mathbb{Q}: x \geq 0, x^2 < 2\}, B := \{x \in \mathbb{Q}: x^2 > 2\}.$$

Если аксиома непрерывности верна для  $\mathbb{Q}$ , то это означает, что  $\exists c \in \mathbb{Q}: \forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$ . Возьмём наши множества  $A, B$ , тогда  $c^2 = 2$ , но  $\nexists c \in \mathbb{Q}: c^2 = 2 \Rightarrow$  противоречие.  $\square$

**Определение 1.12.**  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ . Притом  $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \neq \pm\infty \hookrightarrow -\infty < x < +\infty$ .

**Определение 1.13.**  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Определение 1.14.**  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ .

**Определение 1.15.**  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ .

**Определение 1.16.**  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ .

**Определение 1.17.**  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ .

**Определение 1.18.**  $a = b \Rightarrow (a, b) = \emptyset$ .

### 1.3 Супремумы, инфимумы и грани числовых множеств

**Определение 1.19.** Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным сверху*, если  $\exists M \in \mathbb{R}$ :  $a \leq M \quad \forall a \in A$ .

**Примечание.** Множество неограниченно сверху, если  $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A: a(M) > M$ . Где  $a \equiv a(M)$ . Т.е. мы как бы "подбираем"  $a$  в зависимости от данного  $M$ .

**Определение 1.20.** Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным снизу*, если  $\exists m \in \mathbb{R}$ :  $m \leq a \quad \forall a \in A$ .

**Определение 1.21.** Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу.

**Определение 1.22.** Число  $M(m)$  называется *верхней (нижней) гранью* числового непустого множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $x \leq M$  ( $x \geq m$ )  $\quad \forall x \in A$ .

**Определение 1.23.** Пусть  $A$  — ограниченное сверху множество. Число  $M \in \mathbb{R}$  называется *супремумом*  $A$  и записывается  $M = \sup A$ , если выполняется:

1.  $M$  является верхней гранью, то есть  $\forall x \in A \hookrightarrow x \leq M$ .
2.  $\forall M' < M \quad \exists a(M') \in A: M' < a(M') \leq M$ . То есть никакое другое число не является верхней гранью.

**Определение 1.24.** Если  $A$  — неограниченное сверху множество, то  $\sup A := +\infty$ .

**Теорема 1.1.** (о существовании и единственности супремума) Супремум существует и единственен.

$$\forall A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset \hookrightarrow \exists! \sup A.$$

*Доказательство.* В случае неограниченного множества  $A$  верность теоремы следует из определения. Рассмотрим случай ограниченного множества  $A \Rightarrow$  существует хотя бы одна верхняя грань.

Пусть  $B := \{M \in \mathbb{R} : M \text{ — верхняя грань } A\}$ .  $B \neq \emptyset$ .

Кроме того  $A$  расположено левее  $B$ . Тогда в силу аксиомы непрерывности  $\exists c \in \mathbb{R}$ :  $a \leq c \leq M \quad \forall a \in A, \quad \forall M \in B$ .

Покажем, что  $c = \sup A$ . Действительно, так как  $a \leq c \quad \forall a \in A \Rightarrow c$  — верхняя грань, тогда 1 пункт определения супремума проверен.

Предположим  $\exists c' < c$ :  $c'$  — верхняя грань. Тогда  $c' \in B$ , но  $c$  было выбрано так, что  $c \leq M \quad \forall M \in B \Rightarrow c \leq c'$  — противоречие  $\Rightarrow \forall c' < c \hookrightarrow c \notin B \Leftrightarrow \neg(c' \in B) \Leftrightarrow \neg(\forall a \in A \hookrightarrow a \leq c') \Leftrightarrow \exists a(c') \in A : a(c') > c'$ , но так как  $a(c') \in A$ , то  $a(c') \leq c$ . И тогда мы показали, что  $\forall c' < c \quad \exists a(c') \in A : c' < a(c') \leq c$ . Значит, мы проверили определение супремума с заменой  $M$  на  $c \Rightarrow$  он существует.

Докажем единственность супремума. Предположим, что  $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R} : M_1 = \sup A$  и  $M_2 = \sup A$ .

Пусть  $M_1 > M_2$ . Тогда по (2) пункту определения супремума (для  $M_1$ )  $\exists a(M_2) \in A$ :  $a(M_2) > M_2 \Rightarrow$  это противоречит тому, что  $M_2$  — верхняя грань (то есть (1) пункт определения  $M_2$  как супремума)  $\Rightarrow$  такого быть не может.

Случай  $M_2 > M_1$  аналогичен  $\Rightarrow M_1 = M_2$ , то есть супремум существует и единственен.  $\square$

**Утверждение 1.1.**  $M = \sup A$  ( $M \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \leq M & \forall a \in A \\ \forall M' < M \exists a(M') \in A : M' < a(M') \leq M \end{cases}$$

Для случая  $A$  — ограниченное множество, это просто определение супремума.

Пусть  $A$  — неограниченно сверху, тогда  $+\infty = \sup A$ , но тогда система выше выполняется при замене  $M$  на  $+\infty$  по отношению порядка  $\overline{\mathbb{R}}$ .

И наоборот если система выполнена для  $M = +\infty$ , то тогда  $A$  — неограниченно сверху, и тогда  $+\infty = \sup A$ .

**Лемма 1.1.** (Лемма Архимеда) Множество натуральных чисел неограниченно сверху.

$$\forall M' \in \mathbb{R} \exists N(M') \in \mathbb{N} : N(M') > M'.$$

*Доказательство.* Предположим, что  $\mathbb{N}$  — ограничено сверху  $\Rightarrow$  существует верхняя грань и более того существует конечный супремум  $M = \sup \mathbb{N} < +\infty$ . Тогда в силу второго пункта определения супремума:  $\forall M' < M$  найдётся натуральное число его больше. Но так как это верно  $\forall M'$ , то можем взять  $M' = M - 1$ .

Тогда  $\exists N(M') \in \mathbb{N} : N(M') > M - 1 \Rightarrow N(M') + 1 > M \Rightarrow M$  — не супремум. Противоречие.  $\square$

**Определение 1.25.**  $m \in \mathbb{R}$  называется инфимумом ограниченного снизу множества  $A$ , если

$$m = \inf A \iff \begin{cases} a \geq m & \forall a \in A \\ \forall m' > m, \exists a(m') \in A : m' > a(m') \geq m \end{cases}$$

**Определение 1.26.** Если  $A$  — неограниченное снизу множество, то  $\inf A := -\infty$ .

**Теорема 1.2.** (о существовании и единственности инфимума) Инфимум существует и единственен.

$$\forall A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset \leftrightarrow \exists! \inf A.$$

*Доказательство.* Аналогично супремуму с точностью до замены знаков.  $\square$

**Утверждение 1.2.**  $m = \inf A$  ( $m \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \geq m & \forall a \in A \\ \forall m' > m \exists a(m') \in A : m' > a(m') \geq m \end{cases}$$

**Определение 1.27.** Число  $M$  называется максимумом (максимальным элементом) множества  $E \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow M = \max E$ , если

1.  $M \in E$ ;
2.  $M \geq x \forall x \in E$ .

Аналогично определяется минимум.

## 1.4 Вложенные отрезки

Всегда предполагается, что  $a_n \leq b_n$ .

**Определение 1.28.** Отображение из  $\mathbb{N}$  в множество всех отрезков на числовой прямой  $\mathbb{R}$  назовём *последовательностью отрезков* и обозначим  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$

**Определение 1.29.** Будем говорить, что  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность *вложенных отрезков*, если  $\{[a_{n+1}, b_{n+1}]\} \subset \{[a_n, b_n]\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Лемма 1.2.** (*Лемма Кантора или принцип вложенных отрезков*) Любая последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение (точка лежит сразу во всех отрезках), то есть

$$\forall \text{ вложенной } \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} \quad \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \iff \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

*Доказательство.*  $\forall n \in \mathbb{N}$  справедливы неравенства:

$$-\infty < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n < +\infty.$$

Заметим следующий факт (\*):

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \hookrightarrow -\infty < a_n \leq b_m < +\infty$$

Действительно, предположим  $m \geq n \Rightarrow$  по индукции  $b_m \leq b_n \Rightarrow a_m \leq b_m \leq b_n$ .

Если же  $m < n$ , то  $a_m \leq a_n \leq b_n$ .

$A := \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  — множество «левых» концов.

$B := \{b_1, b_2, \dots, b_m, \dots\}$  — множество «правых» концов.

Из (\*) получаем, что  $A$  расположено «левее»  $B \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: a_n \leq c \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \quad \square$$

**Примечание.** Лемма Кантора о вложенных отрезках может не работать для интервалов.

Пример:  $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$(a_n, b_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right). \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \emptyset.$$

Действительно, предположим  $\exists x > 0: x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < \frac{1}{x}$  —

противоречие с леммой Архимеда.

**Определение 1.30.** Последовательность вложенных отрезков  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$  называется

*стягивающейся*, если  $\forall n \in \mathbb{N} \exists [a_{m(n)}, b_{m(n)}]: l < \frac{1}{n}$ , где  $l = (b_i - a_i)$ .  $l$  — длина.

**Теорема 1.3.** *Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  имеет единственную общую точку, то есть*

$$\exists! x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$



*Доказательство.* Ранее было доказано, что пересечение не пусто  $\left(\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\right)$ .

Тогда предположим, что  $\exists x_1, x_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \quad (x_1 \neq x_2)$ .

Так как  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| > 0$ . Пусть  $|x_1 - x_2| = \frac{1}{M}$ . Но тогда по лемма Архимеда  $\exists N \in \mathbb{N}: N > M \Rightarrow \frac{1}{N} < |x_1 - x_2| \Rightarrow$  в силу того, что система отрезков стягивающаяся, то  $\exists [a_{m(N)}, b_{m(N)}]$  длина которого  $< \frac{1}{N}$ , но по предположению  $x_1, x_2$  принадлежат всем отрезкам этой последовательности, в частности  $x_1, x_2 \in [a_{m(N)}, b_{m(N)}] \Rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{1}{N} \Rightarrow |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$  — противоречие. Получается  $x_1 = x_2$ .  $\square$

**Теорема 1.4.** (3 принципа непрерывности числовой прямой) Следующие утверждения эквивалентны:

1. Аксиома непрерывности.
2. Существование  $\inf$  и  $\sup$  у любого непустого множества.
3. Лемма Кантора о непустоте пересечения вложенной системы и лемма Архимеда.

**Примечание.** Ранее было доказанно, что  $(1) \rightarrow (2), (2) \rightarrow (3), (1) \rightarrow (3)$ . Рассмотрим более сложный переход:  $(3) \rightarrow (1)$ .

**Теорема 1.5.** Из леммы Кантора и леммы Архимеда следует аксиома непрерывности.

*Доказательство.* Зафиксируем такие непустые множества  $A, B \subset \mathbb{R}$ , что  $A$  расположено левее  $B$ . Разобьём доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Поскольку  $A$  и  $B$  — непустые множества, зафиксируем произвольные  $a_0 \in A$  и  $b_0 \in B$ . Поскольку  $A$  расположено левее  $B$ , то  $a_0 \leq b_0$ .

Шаг 2. Если  $a_0 = b_0$ , то полагаем  $c = a_0 = b_0$  и завершаем доказательство. Действительно, если последовательность  $A$  «левее» последовательности  $B$ , то из  $a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$  и  $a_0 \in A$  следует, что  $\forall b \hookrightarrow b \geq a_0 = c$ . Аналогично,  $\forall a \hookrightarrow a \leq b_0 = c$ .

Шаг 3. Пусть теперь  $a_0 < b_0$ .

База индукции. Положим  $J^0 := [a_0, b_0]$ . По построению отрезок  $J^0$  имеет непустое пересечение с множеством  $A$  и множеством  $B$ .

Шаг индукции. Предположим, что при некотором  $n \in \mathbb{N}_0$  мы построили (при  $n = 0$  мы это уже проверили) такие отрезки

$$J^0 = [a_0, b_0] \supset \dots \supset J^n = [a_n, b_n],$$

что справедливо неравенство

$$l(J^j) = |a_j - b_j| \leq \frac{|a_0 - b_0|}{2^j} \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}.$$

Кроме того,

$$J^j \cap A \neq \emptyset \quad \text{и} \quad J^j \cap B \neq \emptyset \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}.$$

Поделим отрезок  $J^n$  на две равные части. Обозначим соответствующие отрезки символами  $I_1^{n+1}, I_2^{n+1}$  в порядке следования (слева направо). Возможны 2 случая.

В первом случае найдётся такой индекс  $k^* \in \{1, 2\}$ , что

$$I_{k^*}^{n+1} \cap A \neq \emptyset \quad \text{и} \quad I_{k^*}^{n+1} \cap B \neq \emptyset.$$

Тогда положим

$$J^{n+1} := I_{k^*}^{n+1}.$$

Во втором случае  $I_1^{n+1}$  имеет непустое пересечение только с  $A$ , а  $I_2^{n+1}$  имеет непустое пересечение только с  $B$ . Тогда положим  $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$ . Мы утверждаем, что

$$a < c_n < b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Действительно, поскольку  $I_1^{n+1} \cap A \neq \emptyset$  и  $A$  расположено левее  $B$ , то заведомо  $B \subset [a_n, +\infty)$ .

С другой стороны,  $I_1^{n+1} \cap B \neq \emptyset$ , откуда следует, что

$$B \subset [a_n, +\infty) \setminus [c_n, b_n] = \left( \frac{a_n + b_n}{2}, +\infty \right).$$

Аналогично доказывается, что  $A \subset (-\infty, \frac{a_n + b_n}{2})$ . Таким образом, выполнено условие  $a < c_n < b$ . В частности, число  $c_n$  разделяет множества  $A$  и  $B$ .

Шаг 4. В итоге, возможны два случая. В первом случае (назовём его  $C1$ ), существует число  $n_0 \in \mathbb{N}$ , для которого левая половина отрезка  $[a_{n_0}, b_{n_0}]$  имеет непустое пересечение только с  $A$ , а правая половина имеет непустое пересечение только с  $B$ .

Во втором случае (назовём его  $C2$ ), мы получим бесконечную последовательность отрезков  $\{J^n\}_{n=0}^\infty$ , для которой выполнены следующие свойства:

(P1)

$$J^{n+1} \subset J^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0;$$

(P2)

$$J^n \cap A \neq \emptyset \quad \text{и} \quad J^n \cap B \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

(P3)

$$l(J^n) = \frac{|a_0 - b_0|}{2^n} \leq \frac{|a_0 - b_0|}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Шаг 5. В случае ( $C1$ ) мы полагаем  $c := \frac{a_{n_0} + b_{n_0}}{2}$  и завершаем построение, поскольку  $c$  разделяет  $A$  и  $B$ .

Шаг 6. В случае ( $C2$ ) заметим, что в силу (P1) и (P3) последовательность  $\{J^n\}_{n=0}^\infty$  является стягивающейся последовательностью вложенных отрезков. Имея в виду теорему о существовании и единственности общей точки для стягивающейся последовательности вложенных отрезков, положим

$$c := \bigcap_{n=0}^{\infty} J^n. \quad (2)$$

Покажем, что в этом случае  $c$  разделяет  $A$  и  $B$ . Рассуждая методом от противного, предположим, что найдётся  $a^* \in A$  такое, что  $a^* > c$ . В силу леммы Архимеда и (1) получим, что найдётся  $n^* \in \mathbb{N}$  такое, что

$$l(J^{n^*}) < |c - a^*| \quad (3)$$

Но тогда, имеем

$$x < a^* \quad \forall x \in J^{n^*}. \quad (4)$$

Действительно, в противном случае мы имели бы  $|c - x| \geq |c - a^*|$  для некоторой точки  $x \in J^{n^*}$ , что в комбинации с (2) приводит к неравенству  $l(J^{n^*}) \geq |c - a^*|$ , которое противоречит (3).

В силу (P2) отрезок  $J^{n^*}$  имеет непустое пересечение с  $B$ , а значит существует  $b^* \in J^{n^*} \cap B$ . Учитывая (4) получаем, что

$$\exists b^* \in B : \quad b^* < a^* \in A.$$

Это противоречит тому, что множество  $A$  расположено левее множества  $B$ . Наше противоречие возникло от предположения, что существует точка  $a^* \in A$ , удовлетворяющая неравенству  $a^* > c$ . Значит наше предположение было неверно. Поэтому

$$a \leq c \quad \forall a \in A.$$

Аналогично доказывается, что

$$c \leq b \quad \forall b \in B.$$

Комбинируя последние два вывода, получаем аксиому непрерывности.  $\square$

## 1.5 Счётные и несчётные множества

**Определение 1.31.** Отображение  $f: X \mapsto Y$  называется *биекцией*  $X$  на  $Y$ , если оно и инъекция, и сюръекция  $\Leftrightarrow$  оно обратимо.

**Определение 1.32.** Множество  $X$  называется *конечным*, если  $\exists N \in \mathbb{N}$  и биекция  $X$  на  $\{1, \dots, N\}$ . В противном случае множество называется *бесконечным*.

**Определение 1.33.** Будем говорить, что *множества  $X$  и  $Y$  равномощны*, если существует биекция  $X$  на  $Y$ .

**Определение 1.34.** Будем говорить, что *мощность множества  $Y$  не меньше мощности множества  $X$* , если существует множество  $Y' \subset Y$  такое, что  $X$  и  $Y'$  равномощны.

**Определение 1.35.** Множество  $X$  называется *счётным*, если  $X$  равномощно  $\mathbb{N}$ .

**Определение 1.36.** Множество  $X$  называется *несчётным*, если  $X$  бесконечно и неравномощно  $\mathbb{N}$ .

**Теорема 1.6.**  $\mathbb{Q}$  — счётно.

*Доказательство.* Построим бесконечную таблицу. Где по горизонтали отложим целые числа, по вертикали — натуральные, а в клетках — их частное.

$\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...
1	0/1	1/1	-1/1	2/1	-2/1	3/1	-3/1	...
2	0/2	1/2	-1/2	2/2	-2/2	3/2	-3/2	...
3	0/3	1/3	-1/3	2/3	-2/3	3/3	-3/3	...
4	0/4	1/4	-1/4	2/4	-2/4	3/4	-3/4	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Итого это инъекция и сюръекция, получаем биекцию  $\Rightarrow \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$  ( $\mathbb{N}$  равномощно  $\mathbb{Q}$ .)  $\square$

Предположим противное, то есть существует биекция  $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{R}$ . То есть все точки оказались пронумерованы натуральными числами. Тогда рассмотрим точку  $x_1$  и отрезок  $J^1$ , не содержащий её. Внутри  $J^1$  найдём отрезок  $J^2$ , не содержащий  $x_2$ , и заметим, что он не содержит и  $x_1$ . Продолжая по индукции, построим последовательность  $J^1 \supset J^2 \supset \dots \supset J^k \supset \dots$  со следующим свойством:

Следовательно  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cap J^k = \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

По лемме Кантора существует точка  $c$  — пересечение последовательности вложенных отрезков ( $c \in J^k \forall k \in \mathbb{N}$ )  $\Rightarrow c \neq x_k \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$  мы нашли точку  $c$ , которой не присвоен никакой номер  $\Rightarrow$  противоречие с тем, что все числа занумерованы.  $\square$

## 2 Предел числовой последовательности

### 2.1 Определение предела последовательности

**Определение 2.1.** Последовательностью будет называть отображение  $x: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ .

**Примечание.** При этом  $x(n) \equiv x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Элементом последовательности называется пара  $(n, x_n)$ . При этом числа  $x_n$  называются значениями элементов последовательности.

Вся последовательность обозначается  $\{x_n\} \equiv \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

**Определение 2.2.**  $\hat{\mathbb{R}} := \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \cup \{\infty\}$  — расширенная числовая прямая.

**Примечание.** При этом  $\infty \neq \{-\infty\}$ ,  $\infty \neq \{+\infty\}$ .

**Определение 2.3.** (Эпсилон окрестность из  $\hat{\mathbb{R}}$ ) пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\text{если } a \in \mathbb{R}, \text{ то } U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

$$\text{если } a = +\infty, \text{ то } U_\varepsilon(a) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$$

$$\text{если } a = -\infty, \text{ то } U_\varepsilon(a) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\text{если } a = \infty, \text{ то } U_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(-\infty) \cup U_\varepsilon(+\infty)$$

**Определение 2.4.** Пусть  $\{x_n\}$  — числовая последовательность. Будем говорить, что элемент  $a \in \hat{\mathbb{R}}$  является *пределом последовательности*  $\{x_n\}$  и писать  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ , если выполнено следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Leftrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

**Примечание.** То есть начиная с какого-то номера ( $N$ ) все элементы последовательности с большим номером ( $n \geq N$ ) попадут в заданный интервал ( $U_\varepsilon(a)$ ). Необязательно искать именно минимальный номер  $N$ .

**Пример.** Рассмотрим последовательность  $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ .

Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : \forall n \geq N(\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} \leq \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

**Утверждение 2.1.** Пусть  $a \in \hat{\mathbb{R}}, c \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \Leftrightarrow |x_n| \in U_\varepsilon(a);$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \Leftrightarrow |x_n| \in U_{\varepsilon/c}(a).$

*Доказательство.* Так как  $c \geq 1$ , то  $U_\varepsilon \subset U_{\varepsilon/c}$ , откуда получаем импликацию  $(1) \rightarrow (2)$  (при  $\tilde{N}(\varepsilon) = N(\varepsilon)$ ).

Теперь докажем  $(2) \rightarrow (1)$ . Так как для любого  $\varepsilon$ , то возьмём  $\varepsilon/c$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \quad N(\varepsilon) := \tilde{N}(\varepsilon/c) : \forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon/c) \Leftrightarrow x_n \in U_{\varepsilon/c}(a) = U_\varepsilon(a).$   $\square$

**Определение 2.5.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *сходящейся*, если она имеет конечный предел. В противном случае она называется *расходящейся*.

**Определение 2.6.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной*, если множество значений её элементов ограничено. То есть

$$\exists M \in [0; +\infty) : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leq M.$$

**Определение 2.7.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно большой*, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

**Примечание.** Притом

$$\left[ \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \end{array} \right] \Rightarrow \{x_n\} - \text{бесконечно большая}.$$

Обратное неверно. Контрпример:  $\{x_n\} = \{(-1)^n \cdot n\} \forall n \in \mathbb{N}$ . Она бесконечно большая, но при этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty$ .

**Задача.** Как связаны условия:

1. Последовательность  $\{x_n\}$  — неограничена;
2. Последовательность  $\{x_n\}$  — бесконечно большая?

*Решение.* (2)  $\rightarrow$  (1). Но (1)  $\nrightarrow$  (2). Контрпример:  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1 + (-1)^n) \cdot n\}_{n=1}^{\infty}$  — неограничена, но и не бесконечно большая.

**Лемма 2.1.** (*Лемма о непересекающихся окрестностях*)

$$\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a \neq b \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset.$$

*Доказательство.* Возможны 4 случая:

1.  $a, b \in \mathbb{R}, -\infty < a < b < +\infty$ . Тогда возьмём  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ .

$$U_\varepsilon(a) = \left(a - \frac{b-a}{2}, a + \frac{b-a}{2}\right) \cap U_\varepsilon(b) = \left(a + \frac{b-a}{2}, b + \frac{b-a}{2}\right) = \emptyset.$$

2.  $-\infty < a < b = +\infty$ . Рассмотрим  $\varepsilon = \frac{1}{|a|+1}$  и заметим, что тогда  $\varepsilon \leq 1$ .

$$U_\varepsilon(b) = (|a|+1, +\infty) \cap U_\varepsilon(a) = \left(a - \frac{1}{|a|+1}, a + \frac{1}{|a|+1}\right) = \emptyset,$$

так как  $U_\varepsilon(a) \subset (a-1, a+1)$ , который не пересекается с  $U_\varepsilon(b)$ .

3.  $-\infty = a < b < +\infty$ . Тогда действуем по аналогии с пунктом выше и рассматриваем  $\varepsilon = \frac{1}{|b| + 1}$ .
4.  $-\infty = a < b = +\infty$ . Рассмотрим  $\varepsilon = 1$ .

$$U_\varepsilon(a) = (-\infty, -1) \cap U_\varepsilon(b) = (1, +\infty) = \emptyset.$$

□

**Теорема 2.1.** Если у последовательности  $\{x_n\}$  существует предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , то он единственен в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $\exists a, b \in \overline{\mathbb{R}} \hookrightarrow a \neq b, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ .

Тогда по лемме о непересекающихся окрестностях  $\exists \varepsilon^* > 0: U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b) = \emptyset$ .

Запишем определение предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n| \in U_\varepsilon(a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n| \in U_\varepsilon(b)$$

Подставим  $\varepsilon = \varepsilon^*$ .

Следовательно, если мы возьмём  $n > \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\}$ , то  $x_n \in U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b) = \emptyset$ .

Противоречие. Следовательно  $a = b$ . □

**Примечание.** В  $\hat{\mathbb{R}}$  предел может быть не единственен. (Так как если  $+\infty$  — предел, то и  $\infty$  — предел).

Если  $\{x_n = n\}_{n=1}^\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

**Теорема 2.2.** Если последовательность  $\{x_n\}$  сходится, то она ограничена. Обратное неверно.

*Доказательство.* Пусть последовательность  $\{x_n\}$  сходится, значит у неё есть предел и этот предел — число. Но тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Тогда в частности  $\exists N = N(1): \forall n \geq N(1) \hookrightarrow |x_n| \leq |a| + 1$ .

Поскольку вне хвоста конечное число элементов, то возьмём  $M := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N(1)}|, |a| + 1\}$ . Отсюда следует,  $|x_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ .

Контрпример:  $\{x_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^\infty$  — ограничена, но не является сходящейся. Более того эта последовательность не имеет предела в  $\hat{\mathbb{R}}$ . □

## 2.2 Свойства пределов сходящихся последовательностей, связанные с арифметическими операциями

**Определение 2.8.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно малой*, если её предел равен 0.

**Лемма 2.2.** Произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей есть бесконечно малая последовательность. То есть, если  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность, а  $\{y_n\}$  бесконечно малая, то  $\{z_n\} := \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$  — бесконечно малая последовательность.

*Доказательство.*

$$\{x_n\} \text{ — ограниченная последовательность} \Leftrightarrow \exists M \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leq M.$$

$$\{y_n\} \text{ — бесконечно малая последовательность} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |y_n - 0| < \varepsilon.$$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n \cdot y_n| < M \cdot \varepsilon$ , а тогда по утверждению 2.1  $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N}(\varepsilon) = N(\varepsilon)$ ,  $M < 1$  или  $\tilde{N}(\varepsilon) = N(\varepsilon/M)$ ,  $M \geq 1$ . Итого  $\forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon$ .  $\square$

**Лемма 2.3.** Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность, то есть, если

$$\begin{cases} \{x_n\} \text{ — бесконечно малая} \\ \{y_n\} \text{ — бесконечно малая} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x_n \pm y_n\} \text{ — бесконечно малая} \\ \{x_n \cdot y_n\} \text{ — бесконечно малая} \end{cases}$$

*Доказательство.* Докажем для суммы и разности. Тогда с учётом утверждения 2.1:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n| \in U_{\varepsilon/2}(0)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \hookrightarrow |y_n| \in U_{\varepsilon/2}(0)$$

Возьмём  $N(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ . Получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \pm y_n \in U_{\varepsilon}(0).$$

Тот факт, что  $\{x_n \cdot y_n\}$  — бесконечно малая следует из того, что  $\{x_n\}$  ограничена (а это следует из того, что она сходящаяся, так как она бесконечно малая) и  $\{y_n\}$  — бесконечно малая, а по лемме 2.2 их произведение будет бесконечно малой последовательностью.  $\square$

**Лемма 2.4.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{последовательность } \{a - x_n\} \text{ — бесконечно малая.}$$

**Лемма 2.5.** Пусть  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , при этом  $a, b \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

*Доказательство.* Для суммы и разности нужно лишь заметить, что последовательность  $\{(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\}_{n=1}^{\infty}$  — бесконечно малая (можно убедиться, раскрыв скобки и воспользовавшись леммой 2.4).

Покажем для произведения. Для этого достаточно доказать, что  $\{(a_n b_n) - (ab)\}_{n=1}^{\infty}$  — бесконечно малая последовательность.



Заметим, что  $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n \cdot (b_n - b) + b \cdot (a_n - a)$ .

Рассмотрим последовательность  $\{a_n \cdot (b_n - b)\}_{n=1}^{\infty}$ . Она бесконечно малая, как произведение ограниченной на бесконечно малую (так как  $\{a_n\}$  — это бесконечно малая последовательность, то она является сходящейся, как следствие и ограниченной), а  $\{b_n - b\}$  — бесконечно малая).

Теперь рассмотрим последовательность  $\{b \cdot (a_n - a)\}_{n=1}^{\infty}$  и стационарную последовательность, которая равна  $b$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , тогда снова получаем произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую ( $\{b\}$  — ограничена,  $\{a_n - a\}$  — бесконечно малая), что есть бесконечно малая последовательность.

Итого получаем разность двух бесконечно малых последовательностей, которая есть бесконечно малая последовательность, что мы и хотели. Правило для произведения теперь доказано.  $\square$

**Лемма 2.6.** Пусть  $x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x: x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$ .

*Доказательство.* Покажем, что последовательность  $\{\frac{1}{x_n}\}$  — ограничена.

Действительно, по определению предела получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_{\varepsilon}(x).$$

Возьмём  $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ , то  $\exists N^* \in \mathbb{N} : \forall n \geq N^* \hookrightarrow x_n \in U_{\frac{|x|}{2}}(x) \Leftrightarrow x - \frac{|x|}{2} < x_n < x + \frac{|x|}{2}$ .

$$\forall n \geq N^* \hookrightarrow |x_n| \geq \frac{|x|}{2} \Rightarrow \forall n \geq N^* \hookrightarrow \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}.$$

Возьмём  $M := \max\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \dots, \frac{1}{|x_{N^*}|}, \frac{2}{|x|}\} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \leq M \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  последовательность  $\{\frac{1}{x_n}\}$  — ограничена.

Рассмотрим  $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_n}{x \cdot x_n} = \frac{1}{x \cdot x_n} \cdot (x - x_n)$  и заметим, что  $\{x - x_n\}$  — бесконечно малая последовательность, а  $\frac{1}{x \cdot x_n}$  — ограничена, так как  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$  — ограничена.

Итого получаем  $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}$  — бесконечно малая  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, y \in \mathbb{R}; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$  и  $x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}$ .

*Доказательство.* Достаточно воспользоваться предыдущей леммой и леммой о пределе произведения последовательностей и рассмотреть  $\frac{y_n}{x_n}$ , как  $y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ .  $\square$

### 2.3 Пределный переход в неравенствах

**Лемма 2.7.** Пусть есть два элемента  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$  и две числовые последовательности  $\{x_n\}, \{y_n\}$  такие, что:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B, \quad A < B.$$

Тогда  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n < y_n$ .

*Доказательство.* По лемме о непересекающихся окрестностях

$$\exists \varepsilon^* > 0 : U_{\varepsilon^*}(A) \cap U_{\varepsilon^*}(B) = \emptyset.$$

А так как  $A < B$ , то  $\forall x \in U_{\varepsilon^*}(A)$  и  $\forall y \in U_{\varepsilon^*}(B) \hookrightarrow x < y$ .

Запишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(A);$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \in U_\varepsilon(B).$$

Возьмём  $N := \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\} \Rightarrow \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_{\varepsilon^*}(A)$  и  $y_n \in U_{\varepsilon^*}(B) \Rightarrow x_n < y_n$ , что нам и надо было.  $\square$

**Теорема 2.3.** (Теорема о предельном переходе в неравенстве) Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, A \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B, B \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $\exists N \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \forall n \geq N$ . Тогда  $A \leq B$ .

*Доказательство.* Предположим  $A > B$ . Тогда по только что доказанной выше лемме  $\exists N^* : \forall n \geq N^* \hookrightarrow x_n > y_n$ .

Положим  $\tilde{N} := \max\{N, N^*\}$ . Тогда  $\forall n \geq \tilde{N} \hookrightarrow x_n \leq y_n$  (по условию) и  $x_n > y_n$  (по предположению), а такого быть не может, то есть предположение было неверно.  $\square$

**Задача.** Пусть  $\exists N \in \mathbb{N} : x_n < y_n \forall n \geq N$ . При этом  $x_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty$  и  $y_n \rightarrow B, n \rightarrow \infty$ . Верно ли, что  $A < B$ ?

*Решение.* Нет. Контрпример:  $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}$ .

$x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  и  $y_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , но  $y_n > x_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Примечание.** Пределный переход может портить строгие неравенства и превращать их в нестрогие.

**Следствие.** Если  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \geq a, a \in \mathbb{R}$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, A \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $A \geq a$ .

*Доказательство.* Положим  $y := a \forall n \in \mathbb{N}$  и применим предыдущее утверждение.  $\square$

**Теорема 2.4.** (Теорема о трёх последовательностях или о двух милиционерах) Пусть  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  — числовые последовательности. Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c, c \in \mathbb{R}$ . Пусть  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \leq c_n \leq b_n$ . Тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ .

*Доказательство.* Распишем определение предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \hookrightarrow a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \hookrightarrow b_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon);$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N}(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N\} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow \begin{cases} a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon); \\ b_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon); \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow c_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c. \end{aligned}$$

□

**Теорема 2.5.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  и  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow y_n \geq x_n$ . Тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ . Аналогично для  $-\infty$ .

*Доказательство.* Вновь распишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\text{Но тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} := \max\{N(\varepsilon), N\} : \forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \geq x_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty.$$

□

## 2.4 Пределы монотонных последовательностей

**Определение 2.9.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *нестрого возрастающей* (*нестрого убывающей*), если  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} \geq x_n$  ( $x_{n+1} \leq x_n$ ). Соответственно, если поставить строгое неравенство, то получим определения *строго возрастающей* (*строго убывающей*) последовательности.

**Определение 2.10.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *монотонной*, если она нестрого возрастает или нестрого убывает. Соответственно она называется *строго монотонной*, если она строго возрастает или строго убывает.

**Теорема 2.6.** (Теорема Вейерштрасса) Любая монотонная последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ . При этом если  $\{x_n\}$  нестрого возрастает, то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}$ . Соответственно, если  $\{x_n\}$  нестрого убывает, то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$ .

*Доказательство.* Докажем для нестрого возрастающей последовательности. Для нестрого убывающей аналогично.

Сначала рассмотрим случай ограниченной сверху последовательности. По теореме о существовании супремума  $\exists M = \sup\{x_n\}$ . Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$ . В силу второго пункта определения супремума  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : x_N > M - \varepsilon$ . Отсюда в силу возрастания последовательности  $\{x_n\}$  имеем  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \geq x_N > M - \varepsilon$ . В силу первого пункта определения супремума  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \leq M$ . Поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(M)$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$ .

Теперь рассмотрим теперь случай, когда последовательность  $\{x_n\}$  неограничена сверху. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : x_N > \frac{1}{\varepsilon}$ . Отсюда в силу возрастания последовательности  $\{x_n\}$  имеем  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \geq x_N > \frac{1}{\varepsilon}$ , то есть  $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ , а значит  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . □

## 2.5 Подпоследовательности и частичные пределы

**Определение 2.11.** Пусть дана числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Последовательность  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$  называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{x_n\}$ , если существует строго возрастающая последовательность чисел  $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N} : y_k = x_{n_k} \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Определение 2.12.** Будем говорить, что элемент  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  — *частичный предел последовательности*  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если  $\exists \{x_{n_k}\}$  — подпоследовательность последовательности  $\{x_n\}$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$ .

**Пример.**  $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ . Её частичными пределами являются  $\{-1\}$ ,  $\{1\}$ .

**Теорема 2.7.** (*Критерий частичного предела*) Пусть  $\{x_n\}$  — числовая последовательность. Пусть  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $A$  является частичным пределом последовательности  $\{x_n\}$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0$  в  $U_\varepsilon(A)$  содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\}$ ;
3.  $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n(\varepsilon, N) \geq N: x_n \in U_\varepsilon(A)$ .

*Доказательство.* Доказывать будем в следующем порядке: (1)  $\rightarrow$  (2), (2)  $\rightarrow$  (3), (3)  $\rightarrow$  (1).

Шаг 1. Пусть  $A$  — частичный предел  $\Rightarrow$  существует строго возрастающая последовательность  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$ .

Это равносильно тому, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$ . Но так как  $\forall \varepsilon > 0$  в силу леммы Архимеда существует бесконечно много чисел  $K \in \mathbb{N}$  удовлетворяющих неравенству  $k \geq K(\varepsilon)$ , то, получается, в  $U_\varepsilon(A)$  содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\}$ .

Шаг 2. Пусть выполнено (2). Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ , следовательно в  $U_\varepsilon(A)$  содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\}$ .

Пусть  $I(\varepsilon)$  — это такие натуральные индексы, что  $\{x_n \in U_\varepsilon(A) \forall n \in I(\varepsilon)\}$ . А так как  $I(\varepsilon)$  бесконечно по условию (2), то  $\forall N \in \mathbb{N} \exists n \in I(\varepsilon): n \geq N$ . Можно доказать, предположив противное и получив противоречие с тем, что  $I(\varepsilon)$  бесконечно.

А так как  $\varepsilon > 0$  было выбрано произвольно, получаем, что  $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N: x_n \in U_\varepsilon(A)$ .

Шаг 3. Пусть выполнено (3). Покажем, что выполнено (1). Построим подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  такую, что  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$ .

Определим  $n_1 = n(1, 1)$ . Пусть на некотором шаге  $k - 1 \in \mathbb{N}$  определено значение  $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ . Определим

$$n_k = n\left(\frac{1}{k}, n_{k-1} + 1\right),$$

то есть  $n_k = n(\varepsilon, N)$ , где  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ,  $N = n_{k-1} + 1$ . Тогда  $n_k \geq n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$  и  $x_{n_k} \in U_{1/k}(A)$ . По индукции получаем, что определена последовательность  $\{n_k\}$  натуральных чисел такая, что  $\forall k \geq 2 \hookrightarrow n_k > n_{k-1}$  и  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{1/k}(A)$ . Поэтому последовательность  $\{n_k\}$  строго возрастает и  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$ . Следовательно, выполнено условие (1).  $\square$

**Теорема 2.8.** (Теорема Больцано-Вейерштрасса) Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная числовая последовательность. Тогда она имеет хотя бы один конечный частичный предел.

**Примечание.** Иначе можно сформулировать как: из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* Поскольку  $\{x_n\}$  — ограниченная числовая последовательность, то найдётся такое  $M \geq 0$ , что

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Считаем далее, что  $M \neq 0$ , так как в данном случае доказательно тривиально (получается стационарная последовательность, предел которой равен 0).

Разделим отрезок  $I^1 := [-M, M]$  пополам и через  $I^2$  обозначим ту половину, в которой находятся значения бесконечного количества элементов последовательности. Такая obviously найдётся, потому что в противном случае в обеих половинах содержались бы значения лишь конечного числа элементов последовательности  $\{x_n\}$ , но тогда и на всём отрезке  $I^1$  содержались бы значения лишь конечного числа элементов, а такого быть не может, так как  $\{x_n\} \subset I^1$ .

Небольшое замечание: если в обеих половинах оказалось бесконечное число элементов последовательности, то берём любую.

Далее рассуждаем по индукции. Базу мы уже сделали, теперь сделаем шаг. Предположим при некотором  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$  мы методом половинного деления построили последовательность отрезков  $I^1 \supset I^2 \supset \dots \supset I^k$ :  $\forall j \in \{1, \dots, k\}$  отрезок  $I^j$  содержит значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\}$ .

Теперь разделим  $I^{k+1}$  на два конгруэнтных отрезка и выберем ту половинку, в которой содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\}$ . Такая найдётся, потому что в противном случае получится, что и весь отрезок  $I^k$  содержит лишь конечное число элементов последовательности, что не так по построению.

Получаем бесконечную последовательность вложенных отрезков  $I^1 \supset \dots \supset I^k \supset \dots$ , которая является стягивающейся, поскольку

$$l(I^k) = \frac{l(I^1)}{2^{k-1}}, \quad 2^k > k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,  $\exists x^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} I^k$ . Покажем, что  $x^*$  — частичный предел. В силу критерия

частичного предела достаточно доказать, что  $\forall \varepsilon > 0$  в  $U_\varepsilon(x^*)$  содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\}$ .

Действительно, из определения предела и того, что  $x^* \in I^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k(\varepsilon): x^* \in I^{k(\varepsilon)} \subset U_\varepsilon(x^*)$ . Следовательно, по построению получаем, что  $I^{k(\varepsilon)}$  содержит бесконечно много значений элементов последовательности, а значит и в  $U_\varepsilon(x^*)$ . Получаем, что хотя бы один частичный предел существует.  $\square$

**Лемма 2.8.** Если последовательность  $\{x_n\}$  — неограничена сверху, то  $+\infty$  является её частичным пределом. Если  $\{x_n\}$  неограничена снизу, то  $-\infty$  является её частичным пределом.

*Доказательство.* Докажем для случая неограниченности сверху, так как случай неограниченности снизу рассматривается аналогично.

Заметим, что если  $\{x_n\}$  неограничена сверху, то  $\forall N \in \mathbb{N}$  отбросим первые  $N$  элементов и снова получим последовательность, неограниченную сверху. Рассмотрим последовательность  $\{y_n\} = \{x_{n+N}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad n \in \mathbb{N}: y_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k > N: x_k > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

по критерию частичного предела  $+\infty$  является частичным пределом последовательности  $\{x_n\}$ .  $\square$

**Определение 2.13.**  $PL(\{x_n\}) := \{L \in \mathbb{R} : L \text{ — частичный предел } \{x_n\}\}$  — множество всех частичных пределов.

**Теорема 2.9.** (Обобщённая теорема Больцано-Вейерштрасса) Любая числовая последовательность имеет хотя бы один частичный предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

*Доказательство.* Доказательство состоит в применении критерия частичного предела и [леммы 2.8](#).  $\square$

**Определение 2.14.** Пусть  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ .  $M \in \overline{\mathbb{R}}$  — супремум  $A$ .

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq M, \forall a \in A; \\ \forall M' < M \exists a \in A : M' < a. \end{cases}$$

**Определение 2.15.** Пусть  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ .  $m \in \overline{\mathbb{R}}$  — инфимум  $A$ .

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq m, \forall a \in A; \\ \forall m' > m \exists a \in A : m' > a. \end{cases}$$

**Определение 2.16.** Верхним и нижним пределом последовательности  $\{x_n\}$  называются соответственно

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= \sup PL(\{x_n\}); \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= \inf PL(\{x_n\}). \end{aligned}$$

**Лемма 2.9.** Пусть последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел равный  $A$ ,  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда  $PL(\{x_n\}) = \{A\}$ .

*Доказательство.* Запишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Возьмём произвольную подпоследовательность  $x_{n_k}$  последовательности  $\{x_n\}$  и покажем, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$ .

Из того, что  $n_k$  строго возрастает легко доказать, что  $n_k \geq k \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) = N(\varepsilon) : \forall k \geq K(\varepsilon) (\Rightarrow n_k \geq N(\varepsilon)) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$ .  $\square$

**Теорема 2.10.** Пусть дана числовая последовательность  $\{x_n\}$ . Тогда  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \in PL(\{x_n\})$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \in PL(\{x_n\})$ .

*Доказательство.* Докажем для верхнего предела, а для нижнего аналогично.

Обозначим  $M = \sup PL(\{x_n\})$ . Из определения супремума следует, что  $\forall \varepsilon^* > 0 \hookrightarrow U_{\varepsilon/2}(M) \cap PL(\{x_n\}) \neq \emptyset$ . Следовательно,  $\exists c \in PL(\{x_n\}) : c \in U_{\varepsilon/2}(M) \Rightarrow$  по критерию частичного предела в  $U_{\varepsilon/2}(c)$  содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\}$ .

$U_{\varepsilon/2}(c) \subset U_\varepsilon(M)$ , так как  $c \in U_\varepsilon(M)$ . Тогда в  $U_\varepsilon(M)$  содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\}$ , но  $\varepsilon$  был выбран произвольно  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$  в  $U_\varepsilon(M)$  содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности  $\{x_n\} \Rightarrow$  по критерию частичного предела  $M$  — частичный предел.  $\square$

**Теорема 2.11.** Пусть  $\{x_n\}$  — числовая последовательность. Тогда для верхнего предела справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} x_k),$$

а для нижнего предела

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} x_k).$$

*Доказательство.* Докажем для верхнего предела, а для нижнего аналогично.

Шаг 0. При каждом  $n \in \mathbb{N}$  положим

$$y_n := \sup_{k \geq n} x_k := \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

Заметим, что  $y_{n^*} = +\infty$  при каком-то  $n^* \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y_n = +\infty \forall n \in \mathbb{N}$ . Действительно, это легко следует из того, что хвосты  $\{x_k : k \geq n_1\}$  и  $\{x_k : k \geq n_2\}$  отличаются не более, чем на конечное число элементов. Если  $y_n = +\infty$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , то, очевидно,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . С другой стороны, из определения супремума и равенства  $y_n = +\infty$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  вытекает, что  $\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists k \geq n$  такой, что  $x_k > \frac{1}{\varepsilon}$ . По критерию частичного предела это означает, что  $+\infty$  является частичным пределом последовательности  $\{x_n\}$ , а значит  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Резюмируя, получаем, что, если  $\exists n \in \mathbb{N} : y_n = +\infty$ , то требуемое равенство выполнено.

Шаг 1. Заметим, что  $y_n \geq x_n > -\infty \forall n \in \mathbb{N}$ . Так как случай  $y_n = +\infty$  уже рассмотрен выше, до конца доказательства предполагаем, что  $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$ . Ключевым же для нас наблюдением будет монотонность последовательности  $\{y_n\}$ . Действительно, из включения

$$\{k \in \mathbb{N} : k \geq n+1\} \subset \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$$

вытекает неравенство

$$y_{n+1} \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Шаг 2. Установим неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} x_k).$$

По теореме 2.10 верхний предел сам является частичным пределом. Фиксируем произвольную подпоследовательность  $\{x_{n_j}\}$  последовательности  $\{x_n\}$ , для которой

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}. \quad (2)$$

Из положенного нами определения  $y_n$  (в шаге 0) очевидно, что

$$x_{n_j} \leq y_{n_j}.$$

Поскольку в силу неравенства (1) последовательность  $\{y_n\}$  монотонно убывает (нестрого), она имеет предел. А значит имеет предел и подпоследовательность  $\{y_{n_j}\}$ . Более того,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (3)$$

Переходя к пределу в неравенстве  $x_{n_j} \leq y_{n_j}$  и используя (2) и (3), получим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n.$$

Из положенного нами определения  $y_n$  и неравенства выше и вытекает требуемое в начале шага 2 неравенство.

Шаг 3. Установим неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} x_k).$$

Покажем, что правая часть этого неравенства является частичным пределом. Тогда, учитывая, что верхний предел - это наибольший (в смысле  $\overline{\mathbb{R}}$ ) частичный предел, получаем требуемое неравенство.

Обозначим правую часть неравенства за  $M$ . Тогда в силу монотонности  $\{y_n\}$  и теоремы Вейерштрасса получим

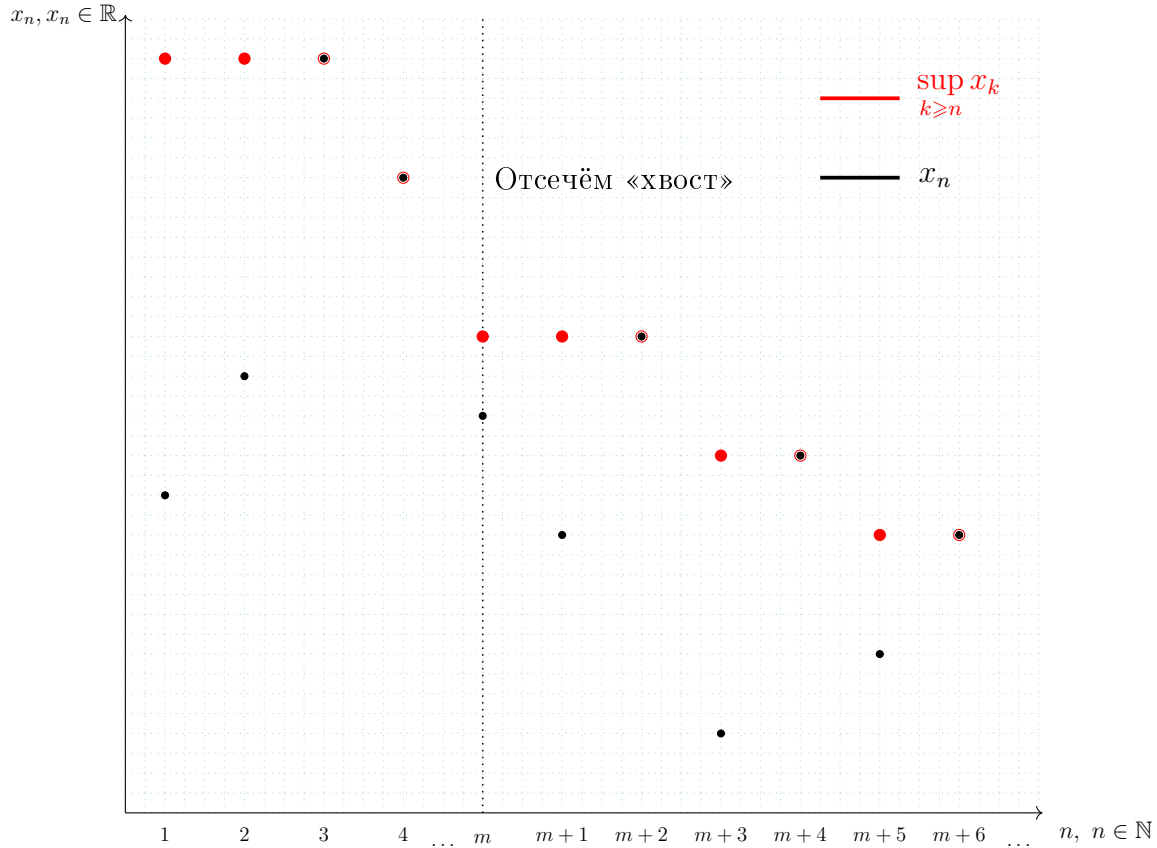
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \in U_{\varepsilon/2}(M). \quad (4)$$

Используя определение супремума и наше определение  $y_n$ , получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n \geq N(\varepsilon) \exists k \geq n : x_k \in U_{\varepsilon/2}(y_n). \quad (5)$$

Заметим, что, если  $y_n \in U_{\varepsilon/2}(M)$  и  $x_k \in U_{\varepsilon/2}(y_n)$ , то  $x_k \in U_{\varepsilon}(M)$ . Следовательно, учитывая (4) и (5), получаем, что  $\forall \varepsilon > 0 U_{\varepsilon}(M)$  содержит значения бесконечного числа элементов последовательности  $\{x_n\}$ . По критерию частичного предела это означает, что  $M$  — частичный предел. Тогда требуемое неравенство доказано.

Шаг 4. Объединяя доказанные в шагах 2 и 3 неравенства, получаем требуемое равенство.  $\square$





**Теорема 2.12.** Пусть  $\{x_n\}$  — числовая последовательность. Пусть  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ;
2.  $PL(\{x_n\}) = \{A\}$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = A$ .

*Доказательство.* Заметим, что (2)  $\Leftrightarrow$  (3) просто из определений. Покажем (3)  $\rightarrow$  (2). Пусть  $c \in PL(\{x_n\})$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq c \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}, \text{ но они равны по (3) } \Rightarrow c = A.$$

Переход (2)  $\rightarrow$  (3) очевиден. Множество  $PL$  состоит всего из одного элемента, то есть крайне легко взять его супремум и инфимум (и они равны).

Переход (1)  $\rightarrow$  (2) доказали ранее ([лемма 2.9](#)).

Покажем (3)  $\rightarrow$  (1), тогда мы докажем равносительность всех условий.

Сначала рассмотрим случай  $A \in \mathbb{R}$ . Тогда, используя рассуждения [шага 2](#) теоремы 2.11, легко видеть, что  $z_n := \inf\{x_k : k \geq n\} \in \mathbb{R}$  и  $y_n := \sup\{x_k : k \geq n\} \in \mathbb{R}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Используя монотонность последовательностей  $\{z_n\}$ ,  $\{y_n\}$  и учитывая [теорему 2.10](#), получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A.$$

Тогда, используя очевидное неравенство  $z_n \leq x_n \leq y_n$ , справедливое при всех  $n \in \mathbb{N}$ , и [теорему о трёх последовательностях](#), получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

Рассмотрим случай  $A = +\infty$ , так как случай  $A = -\infty$  рассматривается аналогично. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , то [по теореме 2.11](#) в силу определения инфимума получаем, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : z_{N(\varepsilon)} \in U_\varepsilon(+\infty)$ . По построению последовательности  $z_n$  получаем, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ , а значит  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .  $\square$

## 2.6 Критерий Коши

**Определение 2.17.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *фундаментальной*, если выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall m \geq N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**Лемма 2.10.** Пусть  $\{x_n\}$  — сходящаяся последовательность. Тогда она фундаментальна.

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\}$  — сходится к числу  $c$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - c| < \varepsilon/2$$

следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N \forall m \geq N \hookrightarrow |x_n - x_m| \leq |x_n - c| + |x_m - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .  $\square$

**Лемма 2.11.** Если последовательность  $\{x_n\}$  фундаментальна, то она ограничена.

*Доказательство.* Поскольку условие фундаментальности сформулировано для любого  $\varepsilon$ , то возьмём  $\varepsilon = 1$ .

$$\exists N(1) : \forall n, m \geq N(1) \hookrightarrow |x_n - x_m| < 1, \text{ возьмём } m = N(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{N(1)}| < 1 \quad \forall n \geq N(1) \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_{N(1)}| \quad \forall n \geq N(1)$$

Положим  $M := \max\{x_1, x_2, \dots, |x_{N(1)}|, 1 + |x_{N(1)}|\} \Rightarrow |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\}$  — ограниченная последовательность.  $\square$

**Теорема 2.13.** (*Критерий Коши*) Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

*Доказательство.* В одну сторону мы уже доказали ([лемма 2.10](#)). Докажем в другую сторону.

Пусть последовательность  $\{x_n\}$  фундаментальна  $\Rightarrow$  она ограничена по [лемме 2.11](#), а тогда у  $\{x_n\}$  есть конечный частичный предел по [теореме Больцано-Вейерштрасса](#)  $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$  и  $\exists \{x_{n_k}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n_k \geq N(\varepsilon)$  и  $|x_{n_k} - c| < \varepsilon/2$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - c| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| \Rightarrow |x_n - c| < \varepsilon.$$

Теперь мы доказали утверждение в обе стороны.  $\square$

### 3 Топология числовой прямой

**Определение 3.1.** Пусть  $E$  — непустое множество. Тогда  $x \in \mathbb{R}$  называется *точкой прикосновения* множества  $E$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset.$$

**Определение 3.2.** *Замыканием* множества  $E$  называется множество всех точек прикосновения  $E$  и обозначается  $\text{cl}E$  (также можно встретить обозначение  $\overline{E}$ ).

**Определение 3.3.** Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

**Примечание.** Множество  $E$  всегда содержится в своём замыкании ( $E \subset \text{cl}E$ ).

**Примечание.** По определению пустое множество и всё пространство  $\mathbb{R}$  считаются замкнутыми.

**Пример.** Возьмём два числа  $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ .  $[a, b]$  — замкнутое множество.

Покажем, что  $\forall c \notin [a, b]$  не является точкой прикосновения.

Действительно, возьмём  $\varepsilon^* = \min\{\frac{|c-b|}{2}, \frac{|a-c|}{2}\}$ . Тогда  $U_{\varepsilon^*}(c) \cap [a, b] = \emptyset \Rightarrow$  она не является точкой прикосновения  $\Rightarrow \text{cl}[a, b] \subset [a, b]$ , а поскольку обратное включение ( $[a, b] \subset \text{cl}[a, b]$ ) выполнено автоматически, то получаем, что отрезок замкнут.

**Определение 3.4.** Пусть  $G$  — непустое множество. Будем говорить, что  $x$  — *внутренняя точка*  $G$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G.$$

**Определение 3.5.** *Внутренностью* множества  $G$  называется множество всех его внутренних точек и обозначается  $\text{int}G$ .

**Определение 3.6.** Множество  $G \subset \mathbb{R}$  называется *открытым*, если оно совпадает со своей внутренностью.

**Примечание.** По определению  $\{\emptyset\}$  и  $\mathbb{R}$  открыты.

**Примечание.** Внутренность всегда содержится в своём множестве ( $\text{int}G \subset G$ ).

**Пример.** Возьмём два числа  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a < b$ .  $(a, b)$  — открытое множество.

Действительно, пусть  $x \in (a, b)$ . Возьмём  $\varepsilon = \min\{|x - a|, |b - x|\}$ . Раскрыв модульные неравенства, получим  $U_\varepsilon(x) \subset (a, b)$ , то есть  $\text{int}(a, b) \subset (a, b)$ , а так как  $\forall c \notin (a, b) \hookrightarrow c$  — не внутренняя точка, то  $(a, b) \subset \text{int}(a, b) \Rightarrow (a, b) = \text{int}(a, b) \Rightarrow (a, b)$  — открытое множество.

**Задача.** Может ли множество быть и не открытым, и не замкнутым?

**Решение.** Может. К примеру, полуинтервал. Возьмём  $(a, b]$ ,  $a < b$ . Заметим, что  $a$  — точка прикосновения по определению, она принадлежит замыканию, но не принадлежит множеству  $\Rightarrow$  оно не является замкнутым. А  $b \notin \text{int}(a, b]$ , так как  $\forall \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(b) \not\subset (a, b] \Rightarrow$  оно не является открытым. Итого получаем, что это и не открытое, и не замкнутое множество.

**Пример.** Возьмём множество  $\mathbb{Q}$ .  $\text{cl}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ,  $\text{int}\mathbb{Q} = \emptyset \Rightarrow$  оно и не открыто, и не замкнуто.

$\text{int}\mathbb{Q} = \emptyset$  очевидно, так как в любом интервале найдётся иррациональная точка.

$\text{cl}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$  потому, что в любом интервале найдётся рациональная точка.

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Покажем, что любой интервал длины не более  $\varepsilon$  содержит как рациональную, так и иррациональную точку. Возьмём  $k \geq [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \Rightarrow \frac{1}{k} < \varepsilon$ . Разобьём всю числовую прямую на равные отрезки длины  $\frac{1}{2k}$ . Концы этих отрезков, очевидно, рациональны. А иррациональное число в каждом отрезке содержится потому, что мы можем прогомोटетировать (домножением на рациональное и прибавлением рационального) отрезок  $[0, 2]$  в любой такой отрезок, а в отрезке  $[0, 2]$  содержится как минимум  $\sqrt{2}$ , являющийся иррациональным числом.

А поскольку длина каждого отрезка  $\frac{1}{2k}$ , а  $\varepsilon > \frac{1}{k}$ , то этот отрезок содержится в  $\varepsilon$ -окрестности  $\Rightarrow$  для любого интервала найдётся как рациональная, так и иррациональная точка внутри.

**Определение 3.7.**  $x \in \mathbb{R}$  называется *изолированной точкой* множества  $E$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap E = \{x\}.$$

**Определение 3.8.**  $x \in \mathbb{R}$  называется *предельной точкой* множества  $E$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \ (U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset.$$

**Утверждение 3.1.**  $x$  — точка прикосновения (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x — изолированная точка \\ x — предельная точка \end{cases}$

**Доказательство.** Из совокупности в (1) очевидно (просто по определениям).

Докажем из (1) в совокупность.

Пусть  $x$  — точка прикосновения  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$ . Возможны два случая: если  $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap E = \{x\} \Rightarrow$  она изолированная, либо  $\forall \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(x) \cap E$  содержит не только  $x$ , но тогда она предельная.  $\square$

**Задача.** Пусть  $\{x_n\}$  — числовая последовательность. Доказать, что замыкание множества значений последовательности — это объединение множества всех значений последовательности и его частичных пределов, то есть  $\text{cl}\{x_n\} = \{x_n\} \cup PL(\{x_n\})$ .

**Теорема 3.1.** (*Критерий точки прикосновения*) Пусть  $E$  — множество,  $E \neq \emptyset$ . Точка  $x$  является точкой прикосновения  $E \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

*Доказательство.* Пусть  $\exists \{x_n\} \subset E: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x = x_{N(\varepsilon)}: x \in (U_\varepsilon(x) \cap E)$ .

Пусть обратно,  $x$  — точка прикосновения множества  $E$ . Построим последовательность, сходящуюся к  $x$ .

$\forall k \in \mathbb{N}$  в силу определения точки прикосновения  $U_{\frac{1}{k}}(x) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_k \in (E \cap U_{\frac{1}{k}}(x))$ . Тогда рассмотрим неравенство  $0 \leq |x - x_k| \leq \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N}$  по построению. Но  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow$  по теореме о двух милиционерах  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} |x - x_k| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k - x = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ .  $\square$

**Определение 3.9.** Множество  $K \subset \mathbb{R}$  называется *компактом*, если из любой последовательности значений точек  $\{x_n\} \subset K$  можно выделить сходящуюся в  $K$  подпоследовательность. То есть

$$\exists \{x_{n_k}\} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x, x \in K.$$

**Теорема 3.2.** (*Критерий компактности в  $\mathbb{R}$* ) Множество  $K \subset \mathbb{R}$  — компактно  $\Leftrightarrow$  оно ограничено и замкнуто.

*Доказательство.* Шаг 1. Пусть  $K$  — ограничено и замкнуто. Докажем, что  $K$  — компакт. Возьмём произвольную последовательность  $\{x_n\} \subset K$ . Покажем, что из неё можно выделить сходящуюся в  $K$  подпоследовательность.

Так как  $\{x_n\}$  является последовательностью в  $K$ , а  $K$  ограничено, то  $\{x_n\}$  — ограничено, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность  $x_{n_j}$ , которая сходится "куда-то".

Пусть  $x^* = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}$ . Тогда в силу критерия точки прикосновения  $x^*$  — точка прикосновения  $K$ , а  $K$  замкнуто  $\Rightarrow x^* \in K$ .

Шаг 2. Докажем в обратную сторону. Пусть  $K$  — компакт. Докажем, что  $K$  — ограничено и замкнуто. Будем доказывать от противного.

Предположим, что  $K$  — неограничено. Тогда  $\forall j \in \mathbb{N} \exists x_j \in K: |x_j| > j \Rightarrow \exists \{x_j\} \subset K \lim_{j \rightarrow \infty} |x_j| = +\infty \Rightarrow$  не существует сходящейся подпоследовательности  $\{x_j\}$ . Получили противоречие с компактностью  $\Rightarrow K$  — ограничено.

Предположим, что  $K$  — не замкнуто. Тогда  $\exists x^*$  — точка прикосновения  $K: x^* \notin K$ . Тогда в силу критерия точки прикосновения  $\exists \{x_n\} \subset K: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \Rightarrow$  любая подпоследовательность  $\{x_{n_j}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  тоже сходится к  $x^* \notin K$ . Получили последовательность  $\{x_n\}$  из которой нельзя выделить сходящейся в  $K$  подпоследовательность. Противоречие. Получаем, что  $K$  — замкнуто.  $\square$

**Определение 3.10.** Система множеств  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  называется *покрытием* множества  $E$ , если  $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \supset E$ .

**Определение 3.11.** Система  $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$  называется *подпокрытием* покрытия  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , если  $J \subset I$  и  $\bigcup_{\beta \in J} V_\beta \supset E$ .

**Определение 3.12.** Покрытие называется *открытым*, если все  $V_\alpha$  открыты.

**Определение 3.13.** Подпокрытие называется *открытым*, если все  $V_\beta$  открыты.

**Лемма 3.1.** (Лемма Гейне-Бореля) Из любого открытого покрытия компакта  $K$  можно выделить конечное подпокрытие (открытое).

*Доказательство.* Будем доказывать от противного. Пусть  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — открытое покрытие компакта  $K$ , из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Так как  $K$  компакт, то  $K$  ограничен (по критерию компактности), то есть  $\exists [a, b] \subset \mathbb{R}: K \subset [a, b]$ .

Для удобства  $I^0 := [a, b]$ , разделим его пополам: получаем  $I_1^0$  и  $I_2^0$ . Заметим, что  $I_1^0 \cap K$  покрывается  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  и  $I_2^0 \cap K$  покрывается  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Хотя бы для одного из них из  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  невозможно выделить конечное подпокрытие, потому что иначе можно было бы выделить конечное подпокрытие  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .

*Примечание.* Если из обеих частей невозможно выделить конечное подпокрытие, то берём любую.

Пусть  $I^1$  — та половинка отрезка  $I^0$ , что из покрытия  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  нельзя выделить конечное подпокрытие  $I^1 \cap K$ .

Предположим, что мы построили отрезки  $I^0 \supset \dots \supset I^m$ :  $|I^j| = \frac{1}{2}|I^{j-1}|$  и в то же время из  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  нельзя выделить конечного подпокрытия множества  $K \cap I^j \forall j \in \{0, 1, \dots, m\}$ . На  $m+1$  шаге поделим отрезок  $I^m$  пополам и выберем ту половину, пересечение которой с  $K$  не может быть покрыто конечным поднабором  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Получили стягивающуюся

последовательность вложенных отрезков  $\{I^m\}$ . Тогда по лемме Кантора  $\exists x = \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m$ .

Поскольку  $x \in K$  (так как  $K$  замкнут и  $\forall m \in \mathbb{N} x_m \in (I_m \cap K)$ , тогда  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$ ), а значит  $\exists \alpha(x) \in I: x \in V_{\alpha(x)}$ , но  $V_{\alpha(x)}$  — открытое, то есть  $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha(x)}$ . Так как  $|I^m| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$  и  $x \in I^m \forall m \in \mathbb{N}$ , то  $\exists m(\varepsilon) \in \mathbb{N}: I^{m(\varepsilon)} \subset U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha(x)} \Rightarrow I^{m(\varepsilon)} \cap K$  покрывается одним  $U_{\alpha(x)}$ , что противоречит построению, то есть исходное предположение было неверно.

□

**Задача.** Доказать, что если из любого открытого покрытия множества можно выделить конечное подпокрытие, то это множество компактно.

**Утверждение 3.2.** Пусть  $\{x_n\}$  — числовая последовательность. Множество её частичных пределов образуют замкнутое множество.

То есть:  $\{x_n\}$  — произвольная числовая последовательность, то  $(PL(\{x_n\}))$  — замкнутое множество.

$$\{x_n\} \cup PL(\{x_n\}) = cl(\{x_n\})$$

**Задача.** Существует ли последовательность, у которой множество частичных пределов несчётно?

*Решение.* Да. Например, рациональные точки на числовой прямой:  $\mathbb{Q}\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  множество пределов последовательности  $PL(\{r_n\}) = \mathbb{R}$ . Это следует из того, что в любой  $U_\varepsilon$  любой точки содержится как бесконечно много рациональных, так и иррациональных точек.

## 4 Предел функций

### 4.1 Классические определения предела

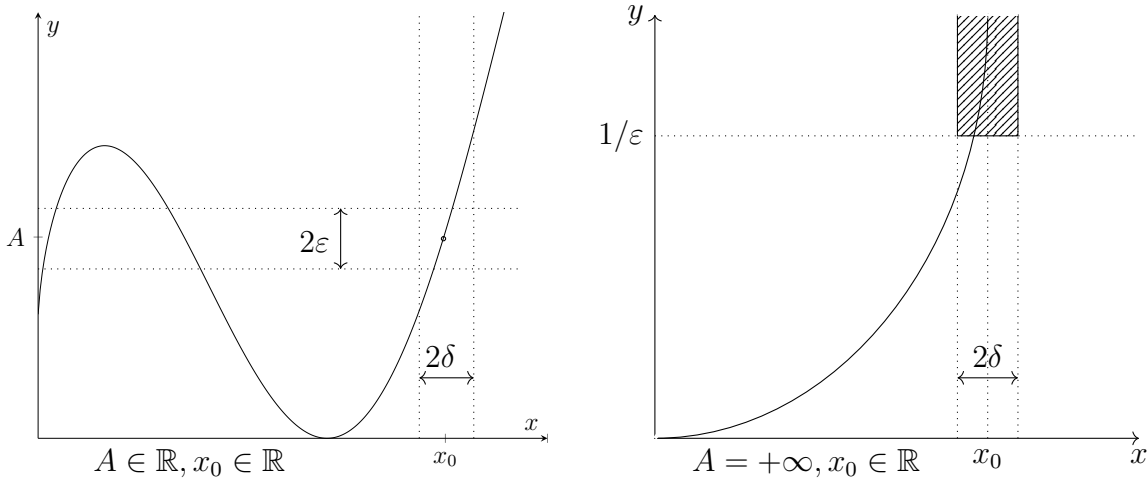
**Определение 4.1.** Под *функцией*, если не оговорено обратное, понимаем однозначное отображение  $f: E \mapsto \mathbb{R}$ , где  $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$ .

**Определение 4.2.** Пусть  $\delta > 0, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда *проколотой дельта-окрестностью* точки  $x_0$  называется множество  $\mathring{U}_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

**Примечание.** Если  $x_0 = \pm\infty$  или  $x_0 = \infty$ , то проколотая окрестность совпадает с непроколотой. Если же  $x_0 \in \mathbb{R}$ , то  $\mathring{U}_\delta = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ .

**Определение 4.3.** (По Коши/в терминах окрестностей) Пусть  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$  и пусть  $A \in \hat{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f: \mathring{U}_{\delta_0} \mapsto \mathbb{R}$ . Будем говорить, что  $A$  — предел функции  $f$  в точке  $x_0$  и записывать:

$$\left[ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$



**Определение 4.4.** *Последовательностью Гейне* в точке  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$  называется такая числовая последовательность  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ , что выполнено два условия:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ;
2.  $x_n \neq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 4.5.** (По Гейне/в терминах последовательностей) Пусть  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$  и  $A \in \hat{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ . Будем говорить, что  $f$  имеет предел в точке  $x_0$  равный  $A$ , если для любой последовательности Гейне  $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$  в точке  $x_0$   $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ . Пишем:

$$\left[ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0 \end{array} \right]$$

**Теорема 4.1.** (*Эквивалентность определений по Коши и по Гейне*) Пусть  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}, A \in \hat{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  (по Коши)  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  (по Гейне).

*Доказательство.* Шаг 1. Докажем сначала, что из Коши следует Гейне. Распишем определение:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \quad (1)$$

Возьмём произвольную последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$  в точке  $x_0$ . Первый пункт определения выполнен автоматически (так как мы берём из проколотой дельта-окрестности). Запишем определение предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \forall \delta \in (0; \delta_0] \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta}(x_0).$$

В частности, если фиксирован произвольный  $\varepsilon > 0$ , то  $\forall n \geq N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$ . Положим  $\tilde{N}(\varepsilon) := N(\delta(\varepsilon))$ . Из (1)  $\Rightarrow \forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow f(x_n) \in U_{\varepsilon}(A)$ . Но поскольку  $\varepsilon > 0$  был выбран произвольно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N}(\varepsilon) = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow f(x_n) \in U_{\varepsilon}(A) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Но так как  $\{x_n\}$  — последовательность Гейне в точке  $x_0$  была выбрана произвольно, то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  по Гейне.

Шаг 2. Докажем, что из Гейне следует Коши. Предположим, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  по Гейне, но не по Коши. Запишем отрицание к Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta \in (0; \delta_0] \exists x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow f(x) \notin U_{\varepsilon}(A).$$

Раз это верно для любого  $\delta$ , то возьмём  $\delta = \frac{\delta_0}{n}$ . Получаем:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \mathring{U}_{\frac{\delta_0}{n}}(x_0) : f(x_n) \notin U_{\varepsilon}(A).$$

(Примечание на лекции: здесь в неявной форме используется аксиома выбора) Получается последовательность  $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ . А по построению  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}$  — последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Но  $\forall n \in \mathbb{N} f(x_n) \notin U_{\varepsilon}(A) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$ . Получаем противоречие с существованием предела по Гейне. Значит предположение было неверно и из Гейне следует Коши.  $\square$

## 4.2 Предел по множеству

**Определение 4.6.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $E \neq \emptyset$ , а  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ . Будем говорить, что  $x_0$  — *предельная точка* множества  $E$ , если

$$\forall \delta > 0 \mathring{U}_{\delta}(x_0) \cap E \neq \emptyset.$$

**Лемма 4.1.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $E \neq \emptyset$ .  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$  — предельная точка  $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} \in E \setminus \{x_0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Любую такую последовательность будем называть *последовательностью Гейне в точке  $x_0$  для множества  $E$* .

**Определение 4.7.** (Предел по множеству) Пусть  $A \in \hat{\mathbb{R}}$ ,  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f: E \mapsto \mathbb{R}$ ,  $E \neq \emptyset$  и  $x_0$  — предельная точка множества  $E$ . Будем говорить, что  $A$  — *предел  $f$  по множеству  $E$  при  $x \rightarrow x_0$*  и записывать это  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = A$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E \cap \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(A) \text{ — по Коши.}$$

$$\forall \text{ последовательности Гейне } \{x_n\} \subset E \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

**Теорема 4.2.** Определения предела по множеству в терминах Коши и Гейне эквивалентны.

*Доказательство.* Абсолютно аналогично доказательству [теоремы 4.1](#).  $\square$

**Лемма 4.2.** Пусть  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ . Пусть  $A \in \hat{\mathbb{R}}$  и  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ . Пусть  $x_0$  — предельная точка и для  $E_1$ , и для  $E_2$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases} \quad (2)$$

*Доказательство.* Докажем сначала (1)  $\rightarrow$  (2). Распишем (1) по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (E_1 \cup E_2) \cap \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

$$\text{Тогда} \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E_1 \cap \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E_2 \cap \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases}$$

Теперь докажем (2)  $\rightarrow$  (1). То есть выполнена система

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E_1 \cap \dot{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E_2 \cap \dot{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases}$$

Получается

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\} > 0 : \forall x \in (E_1 \cup E_2) \cap \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) = (E_1 \cap \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)) \cup (E_2 \cap \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

□

**Определение 4.8.** Функция Дирихле  $f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

**Утверждение 4.1.** Функция Дирихле не имеет предела ни в какой точке.

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ .

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = 1$ , а  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} f(x) = 0$ . По только что доказанной нами [лемме](#)  $\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . □

### 4.3 Критерий Коши для функций

**Лемма 4.3.** Пусть  $f: E \mapsto \mathbb{R}$ . Пусть  $x_0$  — предельная точка множества  $E$ . Пусть для любой последовательности Гейне  $\{x_n\} \subset E$  в точке  $x_0$   $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ,  $A \in \mathbb{R}$ . Тогда  $A$  не зависит от выбора  $\{x_n\}$ . То есть  $A$  одинаково при выборе любого  $\{x_n\}$ .

*Доказательство.* Пусть есть две последовательности Гейне  $\{x_n\}, \{y_n\} \subset E$  в точке  $x_0$ .

$$\text{Положим } \{z_n\} = \begin{cases} x_k, & n = 2k \\ y_k, & n = 2k - 1 \end{cases}$$

Тогда  $\{z_n\} \subset E$  и  $\{z_n\}$  — последовательность Гейне в точке  $x_0$ .



По условию  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ . Но тогда  $\{f(x_k)\}$  и  $\{f(y_k)\}$  — подпоследовательности последовательности  $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ . Но мы взяли две произвольные последовательности Гейне  $\Rightarrow A$  один и тот же.  $\square$

**Примечание.** По умолчанию  $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ ,  $\delta_0 > 0$ .

**Определение 4.9.** Пусть  $f: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ . Условием Коши для  $f$  в точке  $x_0$  назовём:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

**Теорема 4.3.** (Критерий Коши) Пусть  $f: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  удовлетворяет условию Коши в точке  $x_0$ ;
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Примечание.** Коши даёт критерий именно конечного предела.

*Доказательство.* Докажем сначала (2)  $\rightarrow$  (1). Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in [0, \delta_0] \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in [0, \delta_0] \quad \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow \begin{cases} |f(x_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Важное примечание.  $\delta(\varepsilon)$  в следствии тот же самый.

По теореме о неравенстве треугольника имеем:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Итого,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

Следовательно, выполнено условие Коши.

Теперь докажем (1)  $\rightarrow$  (2). Поскольку определение предела по Коши и по Гейне эквивалентны, нам достаточно доказать, что из условия Коши следует существование конечного предела по Гейне.

Зафиксируем произвольную последовательность Гейне в точке  $x_0$ :

$$\{x_n\} : \begin{cases} x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty \\ x_n \neq x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \forall \delta > 0 \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\delta(\varepsilon)) : \forall n, m > N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, получилось условие Коши для  $\{f(x_n)\}$ , значит

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A(\{x_n\}), A(\{x_n\}) \in \mathbb{R}.$$

В итоге, для любой  $\{x_n\}$  — произвольной последовательности Гейне в точке  $x_0$ :

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A(\{x_n\}), A(\{x_n\}) \in \mathbb{R}.$$

В силу [леммы 4.3](#)  $A(\{x_n\})$  не зависит от выбора  $\{x_n\}$ , то есть  $\exists A \in \mathbb{R}: \forall \{x_n\}$  - последовательности Гейне в точке  $x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$ .

Значит,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . □

**Примечание.** Критерий Коши работает и для пределов по множеству. Доказательство точно такое же.

То есть, пусть  $f: X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_0} \cap X \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon;$
2.  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \in \mathbb{R}.$

**Теорема 4.4.** (*Принцип локализации*) Пусть  $\exists \bar{\delta} \in (0, +\infty): f(x) = g(x) \forall x \in \mathring{U}_{\bar{\delta}}(x_0)$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . И если они существуют, то равны.

*Доказательство.* Очевидно расписывается по определению предела. □

**Примечание.** Тоже самое можно сформулировать по множеству.

## 4.4 Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса

В данном параграфе, если не сказано обратного,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Определение 4.10.** Пусть  $f: \mathring{U}_{\delta_0}^+(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ , где  $\mathring{U}_{\delta_0}^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta_0)$ . Будем говорить, что  $A \in \mathbb{R}$  является *правосторонним пределом*  $f$  в точке  $x_0$ , если  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathring{U}_{\delta_0}^+(x_0)}} f(x) = A$ , и записы-

вать  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ . Аналогично определяется *левосторонний предел*.

**Примечание.** Для  $-\infty$  по определению предел только левосторонний, для  $+\infty$  — правосторонний.

**Определение 4.11.** Функция называется *нестрого возрастающей* (*нестрого убывающей*) на  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \left( f(x_1) \geq f(x_2) \right)$$

**Определение 4.12.** Функция  $f: X \mapsto \mathbb{R}$  называется *монотонной на  $X$* , если либо нестрого возрастает, либо нестрого убывает.

**Определение 4.13.** Аналогично можно ввести понятия *строгого убывания на  $X$* , *строгого возрастания на  $X$* , *строгой монотонности на  $X$* .

**Определение 4.14.**

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} f(x) &:= \sup\{f(x) : x \in X\} \\ \inf_{x \in X} f(x) &:= \inf\{f(x) : x \in X\} \\ \max_{x \in X} f(x) &:= \max\{f(x) : x \in X\}, \text{ если он существует} \\ \min_{x \in X} f(x) &:= \min\{f(x) : x \in X\}, \text{ если он существует} \end{aligned}$$

Запишем в кванторах:

$$\sup_{x \in X} f(x) = M \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in X \\ \forall M' < M \quad \exists x' \in X : f(x') > M' \end{cases}$$

Аналогично для инфимума.

**Примечание.** Максимум и минимум могут быть только из  $\mathbb{R}$ , в отличие от супремума и инфимума, которые могут быть из  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Утверждение 4.2.** Можно переформулировать определение в терминах окрестностей (вместо  $M'$  берём  $M - \varepsilon$  или  $\frac{1}{\varepsilon}$ , в случае  $M = +\infty$ ).

$$M = \sup_{x \in X} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in X \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M) \end{cases}$$

**Теорема 4.5.** (Теорема Вейерштрасса) Пусть  $-\infty < a < b < +\infty$ . Пусть  $f$  нестрого возрастает на  $(a, b)$ . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x) \quad (1)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x) \quad (2)$$

**Примечание.**  $f \uparrow$  на  $(a, b)$  — нестрогое возрастание  
 $f \downarrow$  на  $(a, b)$  — нестрогое убывание

**Примечание.** Для односторонних пределов доказательство аналогично. Интервал  $(a, b)$  заменяется на  $(x_0, x_0 \pm \delta)$ .

*Доказательство.* Докажем (1), так как (2) аналогично. Пусть

$$E = \{f(x) : x \in (a, b)\}.$$

Поскольку  $\exists \sup E = M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in (a, b) : f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M)$ ,

но  $f$  нестрого возрастает на  $(a, b) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \quad \forall x \in [x_\varepsilon, b)$ .

Действительно, если  $M$  — число,  $M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq M$ .

Если  $M = +\infty$ ,  $\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \quad \forall x \in [x_\varepsilon, b) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(+\infty)$ .

Но тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = b - x_\varepsilon : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}^-(b) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = M. \quad \square$

## 4.5 Арифметические операции с пределами функций

**Теорема 4.6.** Пусть  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0$  — предельная точка. Пусть  $\begin{cases} \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f_1(x) = a_1 \in \mathbb{R}, \\ \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f_2(x) = a_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$

Тогда 1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} (f_1(x) \pm f_2(x)) = a_1 \pm a_2$ ; 2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = a_1 \cdot a_2$ .

*Доказательство.* Для доказательства достаточно проверить условие определения предела по Гейне. То есть возьмём произвольную  $\{x_n\}$  — последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Тогда

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(x_n) \pm f_2(x_n)) = a_1 \pm a_2$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(x_n) \cdot f_2(x_n)) = a_1 \cdot a_2$$

Так как последовательность Гейне выбиралась произвольно, то в силу эквивалентности определения по Коши и по Гейне получили утверждение теоремы.  $\square$

**Лемма 4.4.** (О сохранении знака) Пусть  $f : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка  $X$ . Пусть  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  (для удобства).

$$\text{Тогда } \exists \bar{\delta} > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\bar{\delta}}(x_0) \cap X \hookrightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0, \\ \text{sign}(f(x)) = \text{sign}(a). \end{cases}$$

*Доказательство.* Запишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(\bar{\delta})(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Поскольку  $\forall \varepsilon$ , то возьмём  $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ . Тогда

$$\bar{\delta} = \delta\left(\frac{|a|}{2}\right) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_{\bar{\delta}}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - a| < \frac{|a|}{2} \Leftrightarrow a - \frac{|a|}{2} < f(x) < \frac{|a|}{2} + a.$$

То есть знак сохраняется.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0$  — предельная точка  $X$ . Пусть  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) =$

$$B \neq 0 \quad \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = A \neq 0. \text{ Тогда } \exists \bar{\delta} > 0 : g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\bar{\delta}}(x_0) \cap X \text{ и } \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

*Доказательство.* Следует из [леммы о сохранении знака](#), [леммы о пределе частного для последовательности](#) и [эквивалентности по Коши и по Гейне](#)  $\square$

## 4.6 Пределные переходы в неравенствах

**Теорема 4.7.** (О трёх функциях или о двух милиционерах) Пусть  $f, g, h : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ . Пусть  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = A$ ,  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$ . Тогда  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} h(x) = A$ .

*Доказательство.* Достаточно [теоремы о трёх последовательностях](#) и [эквивалентности по Коши и по Гейне](#).  $\square$

**Теорема 4.8.** (О предельном переходе в неравенстве) Пусть  $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная

$$\text{точка для } X. \text{ Пусть } \begin{cases} \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}; \\ \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}. \end{cases} \quad \text{Тогда, если } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow A \leq B.$$

*Доказательство.* Достаточно [теоремы о предельном переходе в неравенство](#) и [эквивалентности по Коши и по Гейне](#).  $\square$

**Примечание.** Строгое неравенство может не сохраниться при предельном переходе.

**Пример.**

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty, \quad g(x) = -\frac{1}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

## 4.7 Верхние и нижние пределы для функции

Для удобства записи в данном параграфе обозначим  $E \equiv \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$ . То есть вместо  $E$  нужно подставить вот эту конструкцию.

**Определение 4.15.** Пусть  $f : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) := \sup_{\delta > 0} \{ \inf_{x \in E} f(x) \} \in \hat{\mathbb{R}}$$

$$\overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) := \inf_{\delta > 0} \{ \sup_{x \in E} f(x) \} \in \hat{\mathbb{R}}$$

Также введём обозначения:  $\underline{g}_{x_0}(\delta) = \inf_{x \in E} f(x)$  и  $\overline{g}_{x_0}(\delta) = \sup_{x \in E} f(x)$ .

**Лемма 4.5.** Если  $\delta_1 < \delta_2$ , то  $\overline{g}_{x_0}(\delta_1) \leq \overline{g}_{x_0}(\delta_2)$  и  $\underline{g}_{x_0}(\delta_1) \geq \underline{g}_{x_0}(\delta_2)$ .

*Доказательство.* Доказательство очевидно из определений [супремума](#) и [инфимума](#) (так как супремум по меньшему множеству не может стать больше.)  $\square$

**Лемма 4.6.**

$$\forall \bar{\delta} > 0 \Rightarrow \inf_{\delta > 0} \overline{g}_{x_0}(\delta) = \inf_{\delta \in (0, \bar{\delta})} \overline{g}_{x_0}(\delta)$$

$$\sup_{\delta > 0} \underline{g}_{x_0}(\delta) = \sup_{\delta \in (0, \bar{\delta})} \underline{g}_{x_0}(\delta)$$

*Доказательство.* Докажем первое равенство, так как второе аналогично.

$$\overline{g}_{x_0}(\delta') \leq \overline{g}_{x_0}(\delta''), \text{ если } \delta' \in (0, \delta_1), \delta'' \in (0, \delta_2) \quad 0 < \delta_1 < \delta_2$$

$$\sup_{\delta' \in (0, \delta_1)} \underline{g}_{x_0}(\delta') = \sup_{\delta'' \in (0, \delta_2)} \underline{g}_{x_0}(\delta'')$$

$\square$

**Теорема 4.9.** Пусть  $f : X \mapsto \mathbb{R}$ . Тогда

$$\overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = \sup \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \text{ — последовательность Гейне в точке } x_0 \}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = \inf \{ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \text{ — последовательность Гейне в точке } x_0 \}$$

*Доказательство.* Докажем теорему для верхнего предела, так как для нижнего доказательство аналогично.

Обозначим  $\sup \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \text{ — последовательность Гейне в точке } x_0 \}$  как  $J$ , а также  $E \equiv \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$ .

Чтобы доказать утверждение нужно проверить два неравенства: 
$$\begin{cases} \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \leq J, \\ \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \geq J. \end{cases}$$

Докажем второе неравенство. Возьмём произвольную  $\delta > 0$  и произвольную последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$ .

Так как  $\{x_n\}$  — последовательность Гейне, то

$$\exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in E$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf_{N \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq N} f(x_n) \leq \sup_{n \geq N(\delta)} f(x_n)$$

$$\sup_E f(x) \geq \sup_{n \geq N(\delta)} f(x_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

«Заморозим»  $x_n$  и будем менять  $\delta > 0$ . Можно взять  $\inf$  от обеих частей:

$$\inf_{\delta > 0} \sup_E f(x) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Левая часть не зависит от выбора  $x_n$ , следовательно, беря супремум по всем  $\{x_n\}$ , получим нужное неравенство:

$$\overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \geq J,$$

Покажем теперь, что:

$$\overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \leq J.$$

Найдём последовательность Гейне в точке  $x_0$ , которая «в точности даст левую часть». В силу [леммы 4.6](#):

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \inf_{\delta \in (0, \frac{1}{n})} \sup_E f(x) = \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \quad (1)$$

По определению инфинума  $\forall n \in \mathbb{N}$  в силу [равенства \(1\)](#):

$$\exists \delta \in (0, \frac{1}{n}) : \sup_E f(x) \in U_{\frac{1}{n}} \left( \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \right)$$

Но по определению супремума

$$\exists x_n \in E : f(x_n) \in U_{\frac{1}{2n}} \left( \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \right).$$

Получается, мы построили последовательность  $\{\overline{x}_n\} \subset X$ , которая является последовательностью Гейне в точке  $x_0$ , и при этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\overline{x}_n) = \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x)$ , значит,

$$\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(\overline{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\overline{x}_n) = \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x).$$

□

**Теорема 4.10.** (О верхнем и нижнем пределе для функции) Пусть  $f: X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $A \in \hat{\mathbb{R}}$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A;$
2.  $\overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A.$

*Доказательство.* (1)  $\Leftrightarrow \forall$  последовательности Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A. \end{cases} \Leftrightarrow (2)$$



## 4.8 Непрерывность функции в точке и на множестве

**Определение 4.16.** Пусть  $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ .

Функция  $f$  называется *непрерывной в точке*  $x_0$ , если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Определение 4.17.** Функция  $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ , не являющаяся непрерывной в точке  $x_0$  называется *разрывной в точке*  $x_0$ .

### Классификация точек разрыва

**Определение 4.18.** Точка  $x_0$  называется *точкой устранимого разрыва*, если:

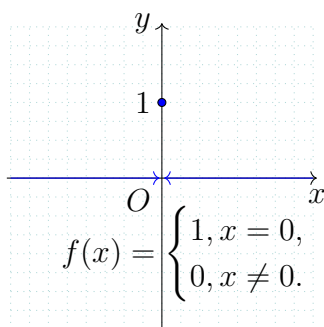
$$\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0). \end{cases}$$

**Определение 4.19.** Точка  $x_0$  называется *точкой разрыва первого рода*, если:

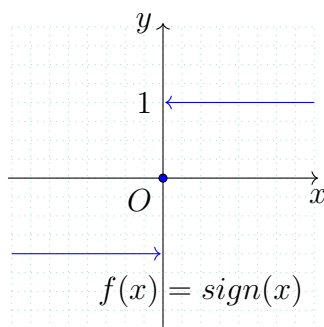
$$\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \in \mathbb{R}, \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x). \end{cases}$$

**Определение 4.20.** Точка  $x_0$  называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторонних пределов не существует, либо бесконечен.

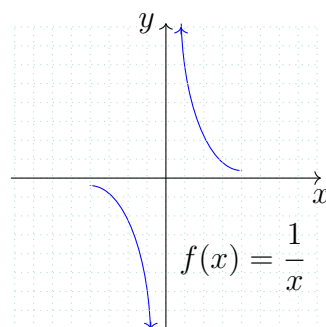
### Примеры точек разрыва



Устранимый разрыв



Разрыв первого рода



Разрыв второго рода

**Определение 4.21.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ .

Будем говорить, что  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  *непрерывна в точке*  $x_0 \in X$  по множеству  $X$ , если

$$\begin{cases} x_0 \text{ — изолированная точка } X, \\ \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

**Определение 4.22.** Функция  $f : X \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  называется *непрерывной на*  $X$ , если она непрерывна в каждой точке  $x_0 \in X$  по множеству  $X$ .

**Теорема 4.11.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}$  — компакт,  $K \neq \emptyset$ .

Пусть  $f$  непрерывна на  $K$ . Тогда  $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$  — компакт.

*Доказательство.* Пусть  $y_n \subset \{f(K)\} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset K : f(x_n) = y_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\} \subset K (\{x_{n_j}\} — подпоследовательность \{x_n\})$  и  $\exists x^* \in K : x_{n_j} \rightarrow x^*, j \rightarrow \infty$ .

Тогда так как  $f$  непрерывна в точке  $x^*$ , то  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = f(x^*) \in f(K)$ .

$$f(x_{n_j}) = y_{n_j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$y_{n_j} \rightarrow f(x^*) \in f(K), j \rightarrow \infty.$$

Поскольку  $\{y_n\} \subset f(K)$  выбрана произвольно, то  $f(K)$  — компакт.  $\square$

**Лемма 4.7.** Пусть  $X \in \mathbb{R}, X \neq \emptyset, x_0 \in X$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .
3.  $\forall \{x_n\} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \hookrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

**Определение 4.23.** Пусть  $X \in \mathbb{R}, X \neq \emptyset, x_0 \in X$ .  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  называется *полу непрерывной сверху* в точке  $x_0$  по множеству  $X$ , если

$$\left[ \begin{array}{l} x_0 — \text{изолирована,} \\ \overline{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x)} \leq f(x_0). \end{array} \right.$$

**Определение 4.24.** Пусть  $X \in \mathbb{R}, X \neq \emptyset, x_0 \in X$ .  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  называется *полу непрерывной снизу* в точке  $x_0$  по множеству  $X$ , если

$$\left[ \begin{array}{l} x_0 — \text{изолирована,} \\ \underline{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x)} \geq f(x_0). \end{array} \right.$$

**Определение 4.25.** Характеристическая функция множества (индикатор).

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases} \quad \text{где } E \subset \mathbb{R} — \text{множество.}$$

**Пример.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}$  — непустое открытое множество.  $\chi_G$  — полу непрерывна снизу в каждой точке.

Если  $x_0 \in G$ , то  $\exists U_\delta(x_0) \subset G$  в ней очевидно.

Если  $x_0 \notin G$ , то  $f(x_0) = 0$  и  $f(x) \geq 0$ , так как она является характеристической функцией.

**Пример.** Пусть  $F \subset \mathbb{R}$  — непустое замкнутое множество.  $\chi_F$  — полу непрерывна сверху в каждой точке.

**Теорема 4.12.** Пусть  $f : X \mapsto \mathbb{R}, x_0 \in X$ . Тогда  $f$  непрерывна в точке  $x_0$  по множеству  $X \Leftrightarrow$  она полу непрерывна снизу в точке  $x_0$  по множеству  $X$  и полу непрерывна сверху в точке  $x_0$  по множеству  $X$ .



*Доказательство.* Если  $x_0$  — изолированная точка, то доказательство очевидно.

Если  $x_0$  — предельная точка, то непрерывность в ней по множеству  $X \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0), \\ \underline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0). \end{cases} \quad (*)$$

По [теореме о верхнем и нижнем пределе для функции](#).

Заметим, что:

$$f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \leq \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow (*)$$

□

**Теорема 4.13.** Пусть  $K$  — компакт,  $K \neq \emptyset$ . Пусть  $f: K \mapsto \mathbb{R}$ . Если  $f$  — полунепрерывна снизу на компакте, то она достигает своего минимума, а если полунепрерывна сверху, то — максимума.

*Доказательство.* Докажем для полунепрерывности сверху, так как для полунепрерывности снизу доказательство аналогично.

Пусть  $f(K) := \{f(x): x \in K\} \subset \mathbb{R}$ . Тогда  $\exists \sup f(K) = M$ . Пока знаем, что  $M \in \overline{\mathbb{R}}$ . Из [утверждения 4.2](#) получаем:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in f(K): y_n \in U_{\frac{1}{n}}(M)$ . Но тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in K: f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(M) \Rightarrow$  построили последовательность точек  $\{x_n\} \subset K: f(x_n) \rightarrow M, n \rightarrow \infty$ . (Примечание: обычно такая последовательность называется «максимизирующая»)

Так как  $K$  — компакт, то существует подпоследовательность  $\{x_{n_j}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  и точка  $x^* \in K: x_{n_j} \rightarrow x^*, j \rightarrow \infty$ . Но  $f$  — полунепрерывна сверху в точке  $x^* \Rightarrow \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) \leq \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \in K}} f(x) \leq f(x^*)$ . Но на самом деле  $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = M$ . А тогда  $f(x^*) \geq M$ , но  $f(x^*) \in f(K) \Rightarrow f(x^*) \leq M$ . Итого получаем,  $f(x^*) = M$ . То есть она достигает максимума. □

**Следствие.** Если функция непрерывна на непустом компакте  $K$ , то она достигает и максимума, и минимума. В частности, функция непрерывная на отрезке достигает на нём своего максимума и минимума.

**Введём следующие обозначения:** если  $f: E \mapsto \mathbb{R}$  и непрерывна на нём, то  $f \in C(E)$ .

**Теорема 4.14.** (Теорема Больцано-Коши/о промежуточном значении) Пусть  $a < b$ . Пусть  $f \in C([a, b])$ . Тогда  $\forall y^* \in [\min[f(a), f(b)], \max[f(a), f(b)]] \exists x^* \in [a, b]: f(x^*) = y^*$ .

*Доказательство.* Для удобства доказательства положим  $f(a) < f(b)$ , в противном случае доказательство не изменится с точностью до знаков.

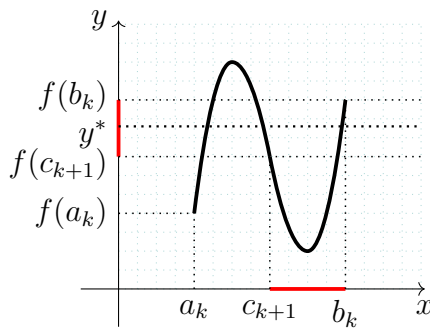
Примечание. В доказательстве запись  $[l, r]$  подразумевает отрезок  $[\min(l, r), \max(l, r)]$ . Опять же исключительно для удобства записи мы так сокращаем.

Пусть  $[a, b] = I^0$ . Поделим  $I^0$  пополам, то есть рассмотрим  $c_1 = \frac{a+b}{2}$ .

Возможно 2 варианта:  $\begin{cases} y^* \in [f(c_1), f(b)]; \\ y^* \in [f(a), f(c_1)]. \end{cases}$  Выберем такую половину  $I^0$ , что  $y^*$  принад-

лежит отрезку, образованному значениями  $f$  в концах половинок, назовём его  $I^1$ . Такой отрезок обязательно найдётся, иначе мы бы пришли к противоречию с тем, что  $y^* \in I^0$ .

Пусть построено  $k+1$  отрезков:  $I^0 \supset I^1 \supset \dots \supset I^k$ .  $I^k = [a_k, b_k]$ , при этом  $y^* \in [a_j, b_j] \forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$ .  $|I^j| = \frac{|b-a|}{2^j} \forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$ .



На  $k + 1$  шаге делим  $I^k$  пополам. Пусть  $c_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$ .

Возможно 2 случая: 
$$\begin{cases} y^* \in [f(c_{k+1}), f(b_k)]; \\ y^* \in [f(a_k), f(c_{k+1})]. \end{cases}$$

Обязательно найдётся половина, для которой  $y^*$  будет принадлежать отрезку, образованному значениями функции в концах этой половины, иначе  $y^* \notin [a_k, b_k]$ , что противоречит построению.

По индукции мы построили стягивающуюся последовательность вложенных отрезков  $\{I^k\}_{k=1}^\infty \Rightarrow \exists! x^* = \bigcap_{k=1}^\infty I^k$ . По построению  $\forall k \in \mathbb{N} \ y^* \in [f(a_k), f(b_k)]$ .

Но  $f$  непрерывна в точке  $x^*$ , то есть  $a_k \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty$  и  $b_k \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty \Rightarrow f(a_k) \rightarrow f(x^*), k \rightarrow \infty$  и  $f(b_k) \rightarrow f(x^*), k \rightarrow \infty$ . Тогда по теореме о двух милиционерах и так как  $y^*$  — стационарная последовательность, то  $y^* = f(x^*)$ . □

**Определение 4.26.** *Промежутком* назовём либо отрезок, либо интервал, либо полуинтервал, то есть  $[a, b] \Leftrightarrow [a, b]$  или  $(a, b)$ , или  $[a, b)$ , или  $(a, b]$ .

**Теорема 4.15.** (Обобщённая теорема о промежуточном значении) Пусть  $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ . Пусть  $f \in C([a, b])$ . Пусть  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Тогда  $\forall y^* \in (m, M) \ \exists x^* \in [a, b]: f(x^*) = y^*$ .

*Доказательство.* По определению инфимума  $\exists a_1 \in [a, b]: m \leq f(a_1) < y^*$ . Аналогично по определению супремума  $\exists b_1 \in [a, b]: M \geq f(b_1) > y^*$ . Следовательно  $y^* \in [f(a_1), f(b_1)]$ . И при этом  $f \in C([a_1, b_1]) \Rightarrow$  по [теореме Больцано-Коши](#)  $\exists x^* \in [a_1, b_1]: f(x^*) = y^*$ , что и требовалось. □

**Следствие.** Если  $f \in C([a, b])$ , то  $f([a, b]) = [\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x)]$ .

*Доказательство.* Было доказано, что (так как  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , а отрезок компактен)  $\exists x_m \in [a, b]: \forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \geq f(x_m)$  и  $\exists x_M \in [a, b]: \forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x_M) \geq f(x)$ .

Получается,  $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \in [f(x_m), f(x_M)]$ . Но по [теореме Больцано-Коши](#) получаем сюръекцию (все значения принимаются), то есть  $\forall y \in [f(x_m), f(x_M)] \ \exists x \in [a, b]: f(x) = y$ . Значит  $f([a, b]) = [f(x_m), f(x_M)]$ . □

**Задача.** Верно ли, что образ интервала — интервал?

*Решение.* Нет. К примеру,  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ . Но для монотонных функций это верно.

## 4.9 Колебания

**Определение 4.27.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $E \neq \emptyset$ . Пусть  $f: E \mapsto \mathbb{R}$ .

Колебание  $f$  на  $E$  —  $\omega_E[f] := \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|$ .

**Определение 4.28.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in X$ . Тогда колебанием функции в точке назовём  $\omega_{x_0}[f] := \inf_{\delta > 0} \omega_{U_\delta(x_0)}[f]$ .

**Теорема 4.16.** Функция непрерывна в точке по множеству  $\Leftrightarrow$  колебание в ней 0. То есть пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in X$ ,  $f$  — непрерывна в точке  $x_0$  по множеству  $X \Leftrightarrow \omega_{x_0}[f] = 0$ .

*Доказательство. Шаг 1.* Пусть  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$  по неравенству треугольника.

Получается  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): \omega_{U_\delta(\varepsilon)(x_0) \cap X}[f] \leq \varepsilon$ , но так как есть монотонность по  $\delta$ , то  $\exists \lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_{U_\delta(\varepsilon)(x_0) \cap X}[f] = 0 = \inf_{\delta > 0} \omega_{U_\delta(\varepsilon)(x_0) \cap X}[f]$  по [теореме Вейерштрасса](#). В одну сторону доказали.

*Шаг 2.* Пусть  $\omega_{x_0}[f] = 0$ . Покажем непрерывность.

В силу монотонности  $\omega_{U_\delta(\varepsilon)(x_0) \cap X}[f]$  по  $\delta$  получаем, что  $\exists \lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_{U_\delta(\varepsilon)(x_0) \cap X}[f] = 0$ . Тогда по определению получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall \delta \in (0, \delta(\varepsilon)] \hookrightarrow \omega_{U_\delta(\varepsilon)(x_0) \cap X}[f] < \varepsilon.$$

Тогда, взяв  $x_1 = x_0$ , а  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \sup_{x_2 \in U_\delta(\varepsilon)(x_0) \cap X} |f(x_2) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f \text{ — непрерывна в точке } x_0.$$

□

**Примечание.** Можно легко доказать разрывность функции Дирихле в каждой точке.

Заметим, что  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R} \omega_{U_\delta(\underline{x})}[D] = 1$ , поскольку любой невырожденный интервал на числовой прямой содержит как рациональные, так иррациональные точки  $\Rightarrow \omega_{\underline{x}}[D] = 1 \forall \underline{x} \in \mathbb{R}$ , а значит по [теореме 4.16](#) функция Дирихле разрывна в каждой точке.

**Определение 4.29.** *Функцией Римана* назовём:

$$R(x) := \begin{cases} 0, & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \forall x \in \mathbb{Q} \ (x = \frac{p}{q}, \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}, \ (p, q) = 1) \end{cases}$$

**Задача.** Доказать, что функция Римана непрерывна в  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  и разрывна в  $\mathbb{Q}$ .

*Решение.* Поскольку в любой окрестности любой точки содержатся иррациональные числа, получаем

$$\omega_x[R] \geq \frac{1}{q} \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Тогда в силу [теоремы 4.16](#) получаем, что функция Римана разрывна в каждой рациональной точке.

Покажем, что функция Римана непрерывна в каждой иррациональной точке. Зафиксируем  $\underline{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Заметим, что  $\forall q \in \mathbb{N} \exists \delta(\underline{x}, q) > 0: U_{\delta(\underline{x}, q)}(\underline{x})$  не содержит несократимых дробей со знаменателями  $q' \in \{1, \dots, q\}$ . Действительно, положим

$$\delta(\underline{x}, q) := \min\{|\underline{x} - \frac{p'}{q'}| : 1 \leq q' \leq q, \frac{p'}{q'} \text{ — несократимая дробь}\}$$

Но тогда получается, что  $R(\underline{x}) - R(x) = 0 \ \forall x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap U_{\delta(\underline{x}, q)}(\underline{x})$ . Если же  $x \in \mathbb{Q} \cap U_{\delta(\underline{x}, q)}(\underline{x})$ , то  $|R(\underline{x}) - R(x)| < \frac{1}{q}$ . В итоге получаем, что  $\forall n \in \mathbb{N} \forall \underline{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \exists \delta(\underline{x}, n) > 0: \omega_{U_{\delta(\underline{x}, n)}(\underline{x})}[R] < \frac{1}{n}$ . Отсюда получаем

$$\omega_x[R] = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

**Задача.** Доказать, что не существует функции, непрерывной в  $\mathbb{Q}$  и разрывной в  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Теорема 4.17.** (О замене переменной под знаком предела) Пусть  $x_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $y: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f: \mathring{U}_{\delta_0}(y_0) \mapsto \mathbb{R}$ .

Пусть  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$ ,  $A \in \hat{\mathbb{R}}$  и  $y(x) \neq y_0 \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = A$ .

*Доказательство.* Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$ , то

$$\exists \beta \in (0; \beta_0) : \forall y \in U_\beta(y_0) \hookrightarrow f(y) \in U_\varepsilon(A).$$

По определению предела □

**Теорема 4.18.** (*Предел композиции 2*) Пусть  $f : U_{\sigma_0}(y_0) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $y : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto U_{\sigma_0}(y_0)$ . Пусть  $f$  непрерывна в точке  $y_0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0$ , Тогда:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f \circ y(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = f(y_0)$$

*Доказательство.*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma(\varepsilon) \in (0, \sigma_0) : \forall y \in U_{\sigma(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon \\ \forall \sigma > 0 \exists \delta(\sigma) \in (0, \delta_0) : \forall y \in U_{\delta(\sigma)}(x_0) \hookrightarrow |y(x) - y_0| < \sigma \end{cases}$$

Объединяя высказывания, получим:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\delta}(\varepsilon) = \delta(\sigma(\varepsilon)) \in (0, \delta_0) \\ & \forall x \in \mathring{U}_{\tilde{\delta}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\sigma(\varepsilon)}(y_0), \text{ а значит } |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

В итоге, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\delta}(\varepsilon) \in (0, \delta_0) : \forall x \in \mathring{U}_{\tilde{\delta}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = f(y_0).$$

□

**Следствие.** Если  $f : U_{\sigma_0}(y_0) \mapsto \mathbb{R}$ , где  $y_0 = y(x_0)$ ,  $y : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ , то  $\exists \bar{\delta} \in (0, \delta_0) : f \circ y$  определена в некоторой  $U_{\bar{\delta}}(x_0)$  и  $f \circ y$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Так как  $y$  непрерывна в  $y_0 = y(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0$ .

Значит,  $\exists \bar{\delta} > 0 : \forall x \in U_{\bar{\delta}}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\sigma_0}(y_0) \Rightarrow f \circ y(x)$  определена  $\forall x \in U_{\bar{\delta}}(x_0)$

Так как  $f$  непрерывна в точке  $y_0$  и  $y(x) \rightarrow y_0 = y(x_0), x \rightarrow x_0$ , можно воспользоваться предыдущей теоремой. Получается,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = f(y_0) = f(y(x_0))$$

Следовательно,  $f \circ y$  непрерывна в точке  $x_0$  □

## 4.10 Обратная функция

**Лемма 4.8.**  $f : X \mapsto Y$  — обратима на  $X$ , когда  $f$  — сюръекция и инъекция.

*Доказательство.* Шаг 1. Пусть  $f$  — сюръекция и инъекция, докажем, что  $f$  обратима.

Рассмотрим  $y \in Y$ . Так как  $f$  — сюръекция,  $\exists x \in X : f(x) = y$ . Но так как  $f$  — инъекция, то этот  $x$  единственный ( $\forall x' \neq x f(x') \neq f(x) = y$ ). Следовательно, определим  $f^{-1}(y) = x$  (единственный). В одну сторону доказали.

Шаг 2. Пусть  $f$  обратима, докажем, что  $f$  — сюръекция и инъекция.

Так как  $f$  обратима, то  $\exists f^{-1} : Y \mapsto X \Rightarrow f$  — сюръекция.

$$\forall y \in Y \exists x = f^{-1}(y) : f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Покажем, что  $f$  — инъекция. Возьмем  $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) = y \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1}(y) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

□

**Лемма 4.9.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ . Пусть  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  строго монотонна. Тогда  $f$  обратима, то есть  $\exists f^{-1} : f(X) \mapsto X$ .

Более того, если  $f$  строго возрастает на  $X$ , то  $f^{-1}$  строго возрастает на  $f(X)$ . Если  $f$  строго убывает на  $X$ , то  $f^{-1}$  строго убывает на  $f(X)$ .

**Примечание.** Лемма неверна, если не требовать строгой монотонности.

**Пример.**  $f(x) \equiv 1$  на  $\mathbb{R}$ . Это нестрого монотонная функция и она необратима на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Из строгой монотонности  $f$  следует, что  $f : X \mapsto f(X)$  инъективно (так как иначе  $\exists x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2$  и  $f(x_1) = f(x_2)$ , то есть нарушается строгая монотонность).

Рассмотрим случай возрастания на  $X$ , так как случай строго убывания аналогичен.

Обратная  $f^{-1} : f(X) \mapsto X$  существует в силу инъективности  $f$  (сюръективность очевидна, так как мы используем отображение в  $f(X)$ ). Покажем, что она тоже строго возрастает. Возьмём  $y_1, y_2 \in f(X)$ . Пусть  $y_2 > y_1$ . Предположим, что  $f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1)$  (равно быть не может в силу обратимости  $f$ )

Так как  $f$  строго возрастает, то  $f(f^{-1}(y_2)) < f(f^{-1}(y_1))$ , то есть  $y_2 < y_1$ . Получили противоречие с нашим предположением, следовательно,  $\forall y_1, y_2 \in f(X)$  из  $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ . То есть обратная функция имеет тот же характер монотонности. □

**Теорема 4.19.** (Об обратной функции) Пусть  $f \in C([a, b])$  строго монотонна на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists f^{-1} \in C([m, M])$  (где  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ , а  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ ) и имеет характер монотонности тот же, что и у  $f$ .

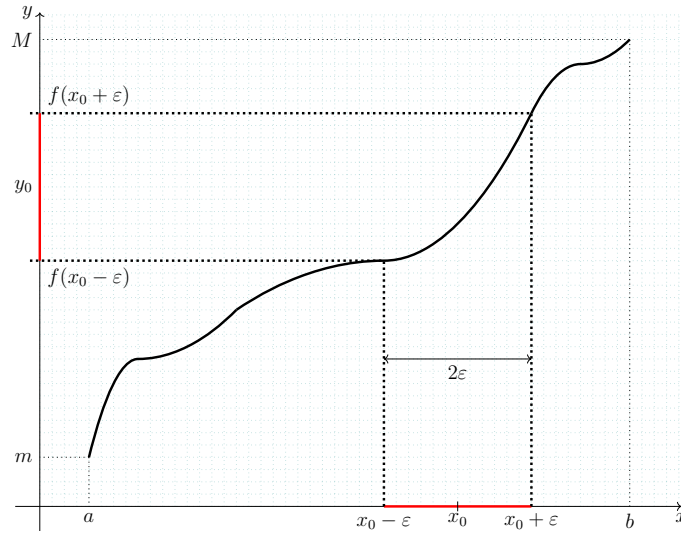
*Доказательство.* Тот факт, что  $\exists f^{-1}$  и она имеет тот же характер монотонности, что  $f$ , вытекает из [предыдущей леммы](#).

$f([a, b]) = [m, M]$  следует из [теоремы Больцано-Коши](#).

Остаётся показать  $f^{-1} \in ([m, M])$ . Рассмотрим случай  $y_0 \in (m, M)$

Так как  $y_0 \in (m, M)$ , то  $x_0 \in (a, b)$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  такое, что  $U_\varepsilon(x_0) \subset (a, b)$ .

Рассмотрим отрезок  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$ . На нём  $f$  строго возрастает и непрерывна.



Следовательно,  $f$  осуществляет биекцию  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  на  $[f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$

$$\delta(\varepsilon) = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}.$$

Рассмотрим интервал  $(f(x_0) - \delta(\varepsilon), f(x_0) + \delta(\varepsilon)) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall y \in (f(x_0) - \delta(\varepsilon), f(x_0) + \delta(\varepsilon)) \hookrightarrow f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$$

Следовательно,  $f^{-1}$  непрерывна в точке  $y_0$ .

Для концевых точек аналогично, только в них будет односторонняя непрерывность.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $f \in C([a, b])$ ,  $a, b \in \hat{\mathbb{R}}$  и строго монотонна. Тогда  $\exists f^{-1} \in C((m, M))$  и строго монотонна с тем же характером монотонности, что и  $y$   $f$ .

*Доказательство.* Так как  $f$  строго монотонна, то  $\exists f^{-1}$ , имеющая тот же характер монотонности. Покажем, что  $f((a, b)) = (m, M)$ .

$$m = \inf_{x \in (a, b)} f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$$

$$M = \sup_{x \in (a, b)} f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$$

В силу [обобщённой теоремы о промежуточном значении](#).

$$f((a, b)) \supset (m, M).$$

Но  $m$  и  $M$  не могут приниматься. Рассмотрим случай строгого возрастания (для убывания аналогично).

$$\text{Если } \exists x^* \in (a, b) : M = f(x^*) \Rightarrow \exists x^{**} \in (x^*, b) : f(x^{**}) > f(x^*) = M,$$

$$\text{но это противоречит тому, что } M = \sup_{x \in (a, b)} f(x). \Rightarrow f((a, b)) \subset (m, M) \Rightarrow$$

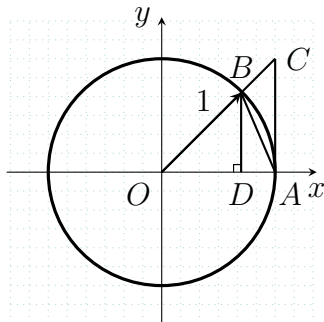
$$\Rightarrow f((a, b)) = (m, M).$$

Непрерывность  $f^{-1}$  доказывается так же, как в предыдущей теореме.  $\square$

## 4.11 Первый замечательный предел и непрерывность элементарных функций

**Примечание.** В этом параграфе утверждения доказываются неточно (но для экзамена и так сойдёт).

**Лемма 4.10.**



$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

*Доказательство.*

$$S_{OAB} < S_{\text{сектора}} < S_{OAC}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

□

**Следствие.** (Первый замечательный предел)

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Доказательство.* Так как мы работаем в проколотой окрестности нуля, то  $\frac{\sin x}{x}$  определена. В силу принципа локализации достаточно считать, что мы изучаем  $\frac{\sin x}{x}$  в интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ ;  $\frac{\sin x}{x}$  — чётная.

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1 \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

В силу чётности:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (*)$$

В силу непрерывности  $\cos x$  в нуле  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ .

Пользуясь (\*) и [теоремой о двух милиционерах](#) получаем, что  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

□

**Теорема 4.20.**  $\sin x$  и  $\cos x$  непрерывны по всей своей области определения.

*Доказательство.* В силу [теоремы о композиции непрерывных функций](#) достаточно доказать непрерывность синуса в каждой точке, так как  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: |\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2 \sin \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right) \cos \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \sin \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right) \right| \leq 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2|$$

Следовательно, если зафиксировать  $x_0$ , то

$$0 \leq |\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| \rightarrow 0, x \rightarrow x_0.$$

По [теореме о двух милиционерах](#)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ .

□

**Определение 4.30.** Функция  $\arcsin x$  по определению обратна к  $\sin x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

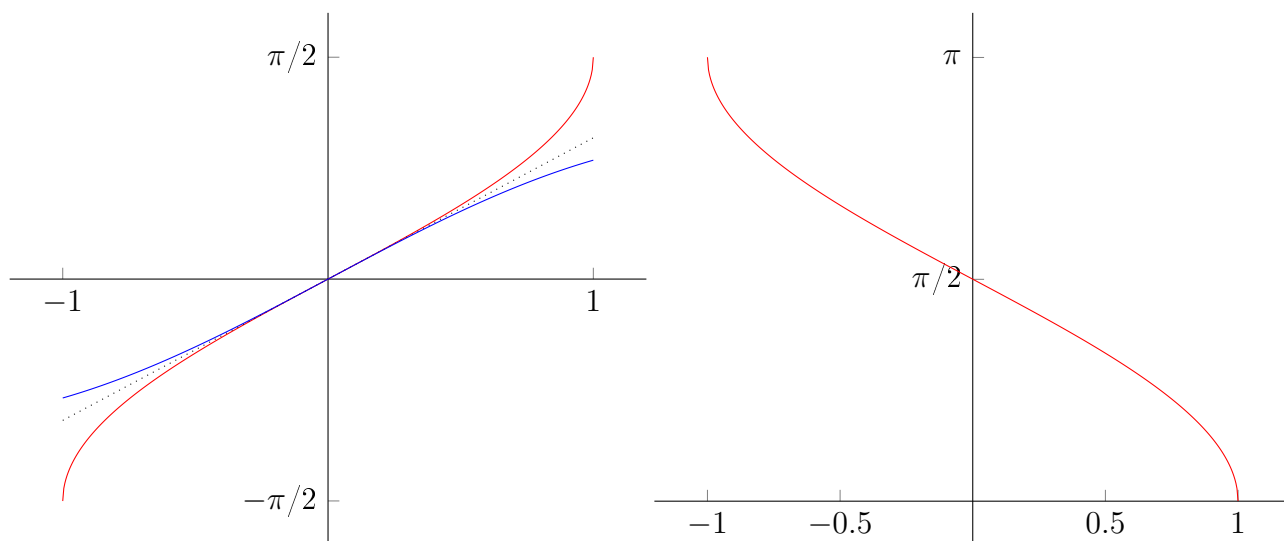
Она существует, так как  $\sin x$  монотонен и непрерывен на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Следовательно,  $\arcsin x$  строго возрастает и непрерывна на  $[-1, 1]$ .

**Определение 4.31.** Функция  $\arccos x$  по определению обратна к  $\sin x$  на отрезке  $[0, \pi]$

Она существует, так как  $\cos x$  монотонен и непрерывен на отрезке  $[0, \pi]$ .

Следовательно,  $\arccos x$  строго убывает и непрерывна на  $[-1, 1]$ .



## 4.12 Число $e$

**Лемма 4.11.** (Неравенство Бернулли)

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x \geq -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Доказательство.* Будем доказывать по индукции:

При  $n = 1$  верно.

Предположим, что доказали при  $n = k \in \mathbb{N}$ . Покажем, что для  $n = k + 1$  верно.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x, \text{ так как } kx^2 \geq 0.$$

Следовательно, по индукции верно для всех  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Теорема 4.21.** Последовательность:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$$

ограничена снизу и монотонно не возрастает.

*Доказательство.*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Значит, она ограничена снизу.



Докажем монотонное возрастание (нестрогое убывание) для  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{x_{n-1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} = \frac{n-1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{n+1}{(n+1)(n-1)}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли для  $x = \frac{1}{n^2-1}$ .

$$\text{Итого получаем: } \forall n \geq 2 \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} \geq 1.$$

Следовательно, последовательность нестрого убывает.  $\square$

**Теорема-определение 4.1.**  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$  и это число называется «числом  $e$ ».

*Доказательство.*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ из неравенства Бернулли.}$$

В силу предыдущей теоремы и [теоремы Вейерштрасса о монотонной последовательности](#)

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \inf \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Переходя к пределу в неравенстве:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad n \rightarrow \infty \text{ и } 2 \rightarrow 2, \quad n \rightarrow \infty, \text{ откуда получаем } e \geq 2. \quad \square$$

### 4.13 Показательная функция

**Лемма 4.12.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  функция  $f(x) = x^n$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

Кроме того,  $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$  (\*)

*Доказательство.* Непрерывность следует по индукции из непрерывности произведения непрерывных функций.

Докажем (\*). Так как  $x \geq 0$ , то, очевидно,  $f([0, +\infty)) \subset [0, +\infty)$ .

Из  $f \in C([0, +\infty))$  и [теоремы о промежуточном значении](#):

$$\left( \inf_{x \in [0, +\infty)} f(x), \sup_{x \in [0, +\infty)} f(x) \right) \subset f([0, +\infty))$$

$$\begin{aligned} \inf_{x \in [0, +\infty)} x^n &= 0 \\ \sup_{x \in [0, +\infty)} x^n &= +\infty \end{aligned} \Rightarrow (0, +\infty) \subset f([0, +\infty))$$

Но кроме того  $f(0) = 0$ , следовательно:

$$[0, +\infty) \subset f([0, +\infty))$$

Из  $f([0, +\infty)) \subset [0, +\infty)$  и  $[0, +\infty) \subset f([0, +\infty))$  следует, что  $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$ .  $\square$

**Лемма 4.13.**  $\forall n \in \mathbb{N}$   $f(x) = x^n$  строго возрастает на луче  $[0, +\infty)$

*Доказательство.* Из только что доказанного следует,  $\exists f^{-1} : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ , обратная к  $f(x) = x^n$ .  $\square$

**Определение 4.32.** Корень  $n$ -ой степени:  $f^{-1}(x^n) := \sqrt[n]{x}$ .

**Примечание.**  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  строго возрастает на  $[0, +\infty)$  и  $C([0, +\infty))$ .

**Определение 4.33.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{m}{n}$  — несократимая дробь.

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{x})^m, \quad x \in [0, +\infty).$$

**Определение 4.34.**  $x^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^m}, \quad x \in (0, +\infty)$ .

**Примечание.** Следующие свойства являются «школьными»:

Пусть  $a \in (0; +\infty), b \in (0; +\infty)$ .

1.  $a^{r_1} < a^{r_2}, a > 1, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}: r_1 < r_2$
2.  $a^{r_1} > a^{r_2}, a \in (0, 1), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}: r_1 < r_2$
3.  $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$
4.  $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2} \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$
5.  $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$
6.  $a^0 = 1$

*Доказательство.* Докажем свойство 1. Так как  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ , то мы всегда можем представить их в виде дробей  $\frac{m_1}{n}$  и  $\frac{m_2}{n}$  соответственно, где  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ , притом  $m_1 < m_2$ .

Тогда нам нужно доказать, что  $\sqrt[n]{a^{m_1}} < \sqrt[n]{a^{m_2}}$  (1), а для этого доказать, что  $a^{m_1} < a^{m_2}$  и  $\sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$  (2), где  $b, c \in (0; +\infty)$ :

Шаг 1. Докажем (1).

Для случая  $m_1, m_2 > 0$  очевидно, так как исходное неравенство преобразуется к виду  $a^{m_1} \cdot (a^{m_2-m_1} - 1) > 0$ , где оба множителя положительные.

Для случая  $m_1 < 0, m_2 > 0$ : рассмотрим  $a^{-|m_1|} \vee a^{m_2} \Leftrightarrow 0 \vee \frac{a^{m_2} \cdot a^{|m_1|} - 1}{a^{|m_1|}}$ , а так как слева и делемое, и делитель положительные, то должен стоять знак  $<$ , что нам и нужно было.

Случай  $m_1, m_2 < 0$  делается аналогично предыдущему (рассмотрением  $a^{-|m_1|}$  и  $a^{-|m_2|}$ ).

Шаг 2. Неравенство (2) следует из **строгого возрастания**  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  на луче  $[0; +\infty)$ .

Объединяя, получаем  $a^{r_1} < a^{r_2}$ ,  $a > 1$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Лемма 4.14.** (Неравенство Бернулли 2) Пусть  $a > 1$ ,  $|r| \leq 1$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ . Тогда

$$|a^r - 1| \leq 2|r| \cdot (a - 1) \quad (*)$$

*Доказательство.* Сначала докажем для  $r = \frac{1}{n}$ . Поскольку  $a > 1$ , то  $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

$$a = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha \Rightarrow \alpha \leq \left( \frac{a - 1}{n} \right), \text{ значит при } r = \frac{1}{n} \quad (*) \text{ выполняется.}$$

Пусть  $r \in (0, 1]$ . Следовательно,  $\exists! n \in \mathbb{N} : r \in \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ . И  $2r \geq \frac{1}{n}$ .

$$a^r - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n} \cdot (a - 1) \leq 2r \cdot (a - 1), \text{ получается при } r \in (0, 1] \text{ доказали.}$$

Для  $r = 0$  очевидно.

Рассмотрим случай  $r \in [-1, 0)$ . Тогда  $a^r = a^{-|r|} = \frac{1}{a^{|r|}}$ .

$$|a^r - 1| = 1 - \frac{1}{a^{|r|}} = \frac{1}{a^{|r|}} \cdot (a^{|r|} - 1) \leq \frac{2|r| \cdot (a - 1)}{a^{|r|}} \leq 2|r| \cdot (a - 1)$$

$\square$

Чтобы доказать неравенство для произвольных действительных  $|r| \leq 1$ , нужно  $\forall x \in (-1; 1)$  взять рациональную последовательность  $r_n$ , сходящуюся к  $x$ , так как для рациональных неравенство верно. А далее предельный переход в неравенстве.

**Теорема-определение 4.2.** Пусть  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\forall \{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q} : \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ .

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} =: a^x$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности  $\{r_n\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $a > 1$ . Зафиксируем  $x \in \mathbb{R}$  и произвольную последовательность  $\{r_n\} \subset \mathbb{Q} : \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ .

Так как сходящаяся последовательность ограничена, то

$$\exists M \in \mathbb{N} : |r_n| \leq M \Rightarrow \frac{1}{a^M} \leq a^{r_n} \leq a^M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ .

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m} \cdot |a^{r_n - r_m} - 1| \leq a^M \cdot |a^{r_n - r_m} - 1|.$$

Так как  $\{r_n\}$  — сходящаяся последовательность, то она фундаментальна. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } n, m \geq N(1) \hookrightarrow |r_n - r_m| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } n, m \geq N(1) \hookrightarrow |a^{r_n} - a^{r_m}| \leq 2a^M |r_n - r_m| \cdot (a - 1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N}(\varepsilon) = N\left(\frac{\varepsilon}{2a^M \cdot (a - 1)}\right) : \forall n, m \geq \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow |a^{r_n} - a^{r_m}| \leq \frac{\varepsilon \cdot 2a^M \cdot (a - 1)}{2a^M \cdot (a - 1)} = \varepsilon$$

Следовательно,  $\{a^{r_n}\}$  фундаментальна. Значит, по критерию Коши:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^x.$$

Проверим корректность, то есть независимость от выбора последовательности  $\{r_n\}$ .

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = x$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} r''_n = x$ .

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{N} \hookrightarrow |r'_n - r''_n| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \tilde{N} : |a^{r'_n} - a^{r''_n}| = a^{r'_n} \cdot |a^{r''_n - r'_n} - 1| \leq 2a^{r'_n} \cdot |r'_n - r''_n| \cdot (a - 1)$$

Так как  $\{a^{r'_n}\}_{n=1}^\infty$  — сходящаяся последовательность, то она ограничена, значит

$$\exists C > 0 : a^{r'_n} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq |a^{r'_n} - a^{r''_n}| \leq 2C \cdot (a - 1) \cdot |r'_n - r''_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

По [теореме о двух милиционерах](#):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r''_n} = a^x.$$

Случай  $a = 1$  тривиален.

Случай  $a \in (0, 1)$  сводится к только что рассмотренному, если учесть, что

$$a^r = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^r, \quad \frac{1}{a} > 1.$$

□

**Лемма 4.15.** [Новое определение](#) совпадает с [предыдущим](#) при  $x \in \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.* При  $x \in \mathbb{Q}$  рассмотрим стационарную последовательность  $\{r_n\}_{n=1}^\infty = x$ .

Тогда по [новому определению](#)  $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$  для любой последовательности  $\{r_n\}$ , сходящейся к  $x$ , в частности и для последовательности  $\{r_n\} = x$ .

Но тогда  $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$  по [старому определению](#). □

Таким образом, мы построили при любом  $a > 0$  функцию  $a^x : \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty)$ .

**Теорема 4.22.** Пусть  $a > 0$ . Функция  $f(x) = a^x$  непрерывна в каждой точке числовой прямой.

*Доказательство.* Пусть  $a > 1$ . Фиксируем точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Тогда по неравенству Бернулли:

$$\forall x \in U_1(x_0) \hookrightarrow |a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} \cdot |a^{x-x_0} - 1| \leq 2a^{x_0} \cdot |x - x_0| \cdot (a - 1)$$

$$0 \leq |a^x - a^{x_0}| \leq 2a^{x_0} \cdot |x - x_0| \rightarrow 0, x \rightarrow x_0 \Rightarrow a^x \rightarrow a^{x_0} \cdot (a - 1), x \rightarrow x_0$$

Следовательно,  $a^x$  непрерывна в точке  $x_0$ . Но  $x_0$  была выбрана произвольно. При  $a > 1$  доказано.

Случай  $a = 1$  тривиален, так как  $1 = 1^r \quad \forall r \in \mathbb{Q} \Rightarrow 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Случай  $a \in (0, 1)$  сводится к только что рассмотренному, если учесть, что

$$a^r = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^r, \quad \frac{1}{a} > 1.$$

□

#### 4.14 Свойства показательной функции

**Теорема 4.23.** Докажем свойства показательной функции. Считаем  $a, b, c \in (0; +\infty)$ , если не сказано обратного.

1.  $a^x$  — строго возрастает  $a \in (1; +\infty)$
2.  $a^x$  — строго убывает  $a \in (0, 1)$
3.  $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
5.  $(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
6.  $(bc)^x = b^x \cdot c^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
7.  $a^x \in C(\mathbb{R})$  (доказали используя третье)

*Доказательство.* 1. Докажем первое свойство,  $a \in (1; +\infty)$ , второе аналогично. Возьмём  $x, y \in \mathbb{R}: x < y$ .

Так как  $x < y \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Q}: p \geq x$  и  $q \leq y: x < p < q < y$ .

Возьмем последовательность  $\{r'_n\} \subset \mathbb{Q}: \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = x$ . Тогда  $x \leq r'_n \leq p \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Возьмем последовательность  $\{r''_n\} \subset \mathbb{Q}: \lim_{n \rightarrow \infty} r''_n = y$ . Тогда  $q \leq r''_n \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Пользуясь свойством монотонности  $a^r$  по  $r \in \mathbb{Q}$

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n}, \quad a^y := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r''_n}.$$

$$a^{r'_n} \leq a^p < a^q \leq a^{r''_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Из предельного перехода в неравенствах и используя определения  $a^x$  и  $a^y$  получаем:

$$\begin{cases} a^x \leq a^p \\ a^q \leq a^y \end{cases} \Rightarrow a^x \leq a^p < a^q \leq a^y$$

2. Докажем третье свойство:

$a > 1, a \in (0, 1)$  аналогично

Пусть  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\exists p \in \mathbb{Q}: p \leq x$ , но для любого рационального числа:  $0 < a^p \leq a^x$ .

3. Докажем четвертое свойство:

Пусть  $x, y \in \mathbb{R}$ . Возьмем аппроксимирующие последовательности:

$$\{r'_n\}, \{r''_n\} \subset \mathbb{Q}: \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r''_n = y.$$

$$a^{r'_n} \cdot a^{r''_n} = a^{r'_n + r''_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Переходим к пределу в равенстве:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Так как  $x$  и  $y$  - произвольные, верно для всех

4. Докажем пятое свойство: Фиксируем произвольные  $x, y \in \mathbb{R}$  Возьмем две аппроксимирующие последовательности для  $x$

Обозначим  $r'_n \downarrow x, n \rightarrow \infty$  Последовательность  $r'_n$  монотонно убывает к  $x$

Обозначим  $r''_n \uparrow x, n \rightarrow \infty$  Последовательность  $r''_n$  монотонно возрастает к  $x$

$$\rho'_n \uparrow y, n \rightarrow \infty$$

$$\rho''_n \uparrow y, n \rightarrow \infty$$

$$(a^{r''_n})^{\rho''_n} \leq (a^x)^{\rho''_n} \leq (a^x)^y \leq (a^{r'_n})^y \leq a^{r'_n \cdot \rho'_n}$$

В итоге

$$(a^{r''_n})^{\rho''_n} \leq (a^x)^y \leq a^{r'_n \cdot \rho'_n}$$

Переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в этих двух неравенствах

$$a^{x \cdot y} \leq (a^x)^y \leq a^{x \cdot y} \Rightarrow (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

5. Шестое свойство доказывается также предельным переходом

$$\{r'_n\} \subset \mathbb{Q}: r'_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$$

$$(bc)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (bc)^{r'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{r'_n} c^{r'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{r'_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} c^{r'_n} = b^x c^x$$

6. Седьмое свойство (о непрерывности) доказано. □

**Определение 4.35.** Если в показательной функции  $a = e$ , то функция вида  $e^x$  называется экспонентой

**Определение 4.36.** Пусть  $a > 0, a \neq 1$ , тогда существует обратная функция к  $a^x$ , называется логарифмом и записывается как  $\log_a x$

**Примечание.** Если  $a = 1$  разрешить, то теряется инъективность. Так как  $1^x$  это константа, которая отображает все  $x$  в одну точку.

**Теорема 4.24.** Если  $a > 1$ , то  $\log_a x$  корректно определена, строго возрастает и непрерывна на луче  $(0, +\infty)$ , а ее область значений —  $\mathbb{R}$ ;

Если  $a \in (0, 1)$  то  $\log_a x$  корректно определена, строго убывает и непрерывна на луче  $(0, +\infty)$ , а ее область значений —  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Докажем при  $a > 1$ , при  $a \in (0, 1)$ , аналогично.

Так как  $a^x$  - строго возрастает и непрерывна, то существует обратная к ней

Область значений луч  $(0, +\infty)$

При  $n \in \mathbb{N}, a^n \geq 1 + (a - 1)n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{(a-1)n} \rightarrow +0, n \rightarrow +\infty$$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} a^x = 0$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} a^x = +\infty$$

По обобщенной теореме о промежуточном значении для  $a^x$  и теоремы об обратной функции.  $\log_a x$  -непрерывен строго возрастает на луче  $(0, +\infty)$ , и область значений  $\mathbb{R}$  □

**Определение 4.37.**  $\ln x := \log_e x$  и называется натуральным логарифмом

**Определение 4.38.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим функцию:

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln x}, \quad x > 0$$

Эта функция строго монотонна (за исключением случая  $\alpha = 0$ ). Она непрерывна на луче  $(0, +\infty)$  как композиция непрерывных функций.

Если  $\alpha \geq 0$ , то  $x^\alpha$  можно рассмотреть на луче  $[0, +\infty)$ , полагая  $0^\alpha := 0$

**Теорема 4.25.** Доказательство некоторых школьных свойств логарифма по определению

$$1. \log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad a > 0, a \neq 1, \quad \forall x, y > 0$$

$$2. \log_a b \cdot \log_b a = 1 \quad a > 0, a \neq 1, \quad b > 0, b \neq 1$$

$$3. \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.* 1. Фиксируем произвольные  $x, y$ , по определению логарифма (обратная функция):

$$xy = a^{\log_a(xy)}$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = (a^{\log_a x})(a^{\log_a y}) = xy = a^{\log_a x}$$

Так как  $a^x$  инъективно

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y} \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

2. В силу инъективности  $a^x$

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a = a^1$$

$$3. a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha$$

$$a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha$$

□

## 4.15 Второй замечательный предел

**Лемма 4.16.** Пусть  $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$  — последовательность натуральных чисел, такая что  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ . Тогда:

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

*Доказательство.* По определению числа  $e$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in U_\varepsilon(e)$$

Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ , то  $\exists K(\varepsilon) : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow n_k \geq N(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \in U_\varepsilon(e) \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

□

**Лемма 4.17.**  $\exists \lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x)^{1/x} = e$

*Доказательство.* Возьмем последовательность Гейне в нуле (справа)  $\{x_k\}$ , то есть  $x_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  и  $x_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$

Так как  $x_k \rightarrow +0, k \rightarrow \infty \Rightarrow \exists K_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq K_0 \hookrightarrow x_k \in (0, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall k \geq K_0 \exists n_k \in \mathbb{N} : (x_k)^{-1} \in [n_k, n_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} &\leq (1+x)^{1/x_k} \leq \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \\ \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k+1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}} \rightarrow e, k \rightarrow \infty \text{ по предыдущей лемме} \\ \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} &\rightarrow e, k \rightarrow \infty \text{ аналогично предыдущему} \end{aligned}$$

Так как последовательность Гейне была выбрана произвольно, то вышенаписанное справедливо для любой последовательности Гейне, значит, по теореме об эквивалентности определений по Коши и по Гейне для одностороннего предела функции (аналогична теореме об эквивалентности определений по Коши и по Гейне для предела функции) получаем  $\exists \lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x)^{1/x} = e$  □

**Лемма 4.18.**  $\exists \lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{1/x} = e$

*Доказательство.* Возьмем последовательность Гейне  $\{x_k\}$  такую, что  $x_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  и  $x_k < 0 \forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{Рассмотрим последовательность } y_k = \frac{-x_k}{1+x_k} > 0 \Rightarrow x_k = \frac{-y_k}{1+y_k}$$

$$(1+x_k)(1+y_k) = 1 \forall k \in \mathbb{N}$$

$$(1+x_k)^{1/x_k} = \left[(1+y_k)^{-1}\right]^{-\frac{1+y_k}{y_k}} = (1+y_k)^{\frac{1}{y_k}+1} = (1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} \cdot (1+y_k) \rightarrow e, k \rightarrow \infty$$

$$(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} \rightarrow e, k \rightarrow \infty, \quad (1+y_k) \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$$

Следовательно,  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} (1+x_k)^{1/x_k} = e$ . Значит,  $\exists \lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{1/x} = e$ . □

**Следствие.**  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$  — второй замечательный предел

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x}$$



$y(x) = (1+x)^{1/x}$  корректно определена в проколотой окрестности 0,  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = e$   
 $\ln(y)$  непрерывна на всей числовой прямой, в частности непрерывна в точке  $e$ .  
 Значит, [по теореме о замене переменной при вычислении предела](#)

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \ln(y(x)) = \lim_{y \rightarrow e} \ln(y) = \ln e = 1$$

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x - 1 \\ x &= \ln(1 + y(x)) \end{aligned} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = \frac{y(x)}{\ln(1 + y(x))}$$

Так как  $e^x$  строго растёт, то  $e^x - 1$  тоже. Значит,  $y(x)$  — инъекция. Следовательно, если  $x \neq 0$ , то  $y(x) \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_\delta(0) \hookrightarrow y(x) \neq 0$ .

Значит, можно воспользоваться [теоремой о замене переменной при вычислении предела](#):

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{\ln(1 + y(x))} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = 1$$

## 4.16 Эквивалентность функций

**Определение 4.39.** Пусть  $\delta_0 > 0$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ ,  
 $g : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ ,

Будем говорить, что  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$ , если  $\exists \theta : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ , такая что

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \theta(x) = 1$ ;
2.  $f(x) = \theta(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ .

**Определение 4.40.** (Из стандартных книжек).

$f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$ , если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ,  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Примечание.** « $\sim$ » — действительно отношения эквивалентности на множестве функций, заданных в  $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ .

- а) Рефлексивность:  $f(x) \sim f(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$

*Доказательство.* Возьмём  $\theta \equiv 1$ . □

- б) Симметрия:  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow g(x) \sim f(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство.*  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \exists \theta(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \theta(x) = 1 \\ f(x) = \theta(x)g(x) \end{cases}$

Тогда пусть  $\bar{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta(x)}, & \theta(x) \neq 0 \\ 1, & \theta(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{\theta}(x) = 1 \\ g(x) = \bar{\theta}(x)f(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$  □

- в) Транзитивность:  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$  и  $g(x) \sim h(x)$ ,  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \sim h(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$

$$\exists \theta_1(x) : f(x) = \theta_1(x)g(x)$$

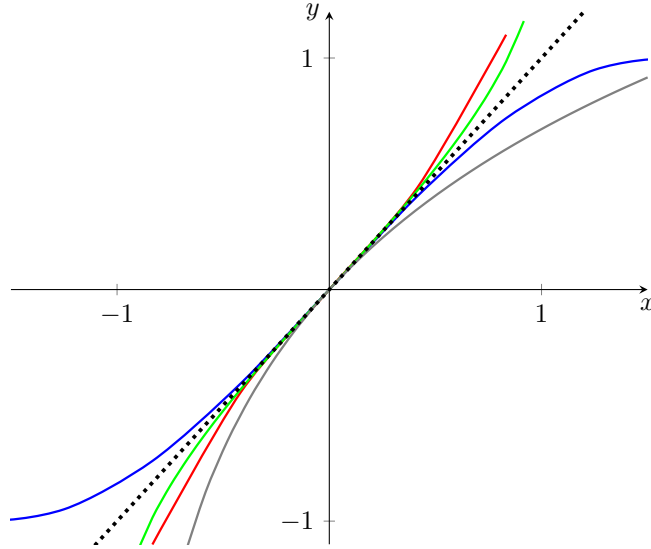
$$\text{Доказательство. } \exists \theta_2(x) : g(x) = \theta_2(x)h(x) \Rightarrow \theta(x) := \theta_1(x)\theta_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \theta_2(x) = 1$$

$$\text{Так как } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \theta(x) = 1 \\ f(x) = \theta(x)h(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \end{cases} \Rightarrow f(x) \sim h(x), x \rightarrow x_0 \quad \square$$

### Примеры.

1.  $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$
2.  $\cos x \sim 1, x \rightarrow 0$
3.  $\tan x \sim x, x \rightarrow 0$
4.  $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0$
5.  $e^x \sim 1 + x, x \rightarrow 0$
6.  $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$



**Лемма 4.19.** Пусть  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, \delta_0 > 0$   $f_1, f_2, g_1, g_2: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R} \leftarrow$  но так писать не следует, лучше каждую отдельно.

$$\text{Пусть } \begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0 \\ f_2(x) \sim g_2(x), x \rightarrow x_0 \end{cases}, \text{ тогда } f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x), x \rightarrow x_0.$$

$$\text{Если дополнительно } f_2(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0), \text{ тогда } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}, x \rightarrow x_0.$$

*Доказательство.*  $f_i(x) \sim g_i(x), x \rightarrow x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow i = 1, 2 \quad \exists \theta_i(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \theta_i(x) = 1 \\ f_i(x) = \theta_i(x)g_i(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0), \end{cases}$$

$$\theta(x) = \theta_1(x)\theta_2(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \theta(x) = 1 \\ f_1(x)f_2(x) = \theta(x)g_1(x)g_2(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x), x \rightarrow x_0$$

Для частного рассуждения аналогичны. □

**Примечание.** Если  $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0 \\ f_2(x) \sim g_2(x), x \rightarrow x_0 \end{cases}$ , то из этого **не** следует, что  $f_1(x) \pm f_2(x) \sim g_1(x) \pm g_2(x), x \rightarrow x_0$

**Пример.** Возьмём  $x^3 + x \sim x + x^2, x \rightarrow 0$  и  $x \sim x, x \rightarrow 0$ .

Вычтем одно из другого. Неверно, что  $x^3 \sim x^2, x \rightarrow 0$ .

**Примечание.** Эквивалентность исходных функций в  $\mathring{U}_{\delta_0}(x)$  доказывается легко по [«книжному» определению](#).

Замена на эквивалентность позволяет относительно легко вычислять пределы.

*Примера не будет. Автор устал!*

**Лемма 4.20.** Пусть  $\delta_0 > 0$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$  и  $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$  и если они оба существуют, то равны.

*Доказательство.* Задание на дом □

**Определение 4.41.** (о-малое) Пусть  $\delta_0 > 0$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f, g : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ .

Говорят, что  $f$  является бесконечно малой функцией по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ , и записывается это как  $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$ , если  $\exists \varepsilon(x) : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$  такая что:

1.  $\varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$ ;
2.  $f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ .

**Примечание.**  $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$  необратимо, то есть нельзя писать  $o(g(x)) = f(x)$ , потому что  $o(g(x))$  — это не индивидуально взятая функция, а целый класс функций.

**Лемма 4.21.** Пусть  $\delta_0 > 0$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f, g : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ . Тогда если  $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$ , то  $f(x) - g(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \exists \theta(x) : \begin{cases} o(x) = 1 \\ f(x) = \theta(x)g(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0), & \Leftrightarrow f(x) - g(x) = (\theta(x) - 1)g(x) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \varepsilon(x) = \theta(x) - 1 \rightarrow 0, x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

□

**Примеры.**

1.  $\sin x = x + o(x), x \rightarrow 0$ ;
2.  $\cos x = 1 + o(x), x \rightarrow 0$ ;
3.  $\tan x = x + o(x), x \rightarrow 0$ ;
4.  $\arcsin x = x + o(x), x \rightarrow 0$ ;
5.  $e^x = 1 + x + o(x), x \rightarrow 0$ ;
6.  $\ln(1 + x) = x + o(x), x \rightarrow 0$ .

**Определение 4.42.** Пусть  $\delta_0 > 0$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $f, g : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ .

Будем говорить, что  $f$  ограничена относительно  $g$  в окрестности точки  $x_0$  и записывать  $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$ , если

$$\begin{cases} \exists C > 0 : \\ \exists \delta \in (0, \delta_0) \end{cases} \quad |f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0)$$

**Примечание.**  $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$  необратимо, то есть нельзя писать  $O(g(x)) = f(x)$ , потому что  $O(g(x))$  — это не индивидуально взятая функция, а целый класс функций.

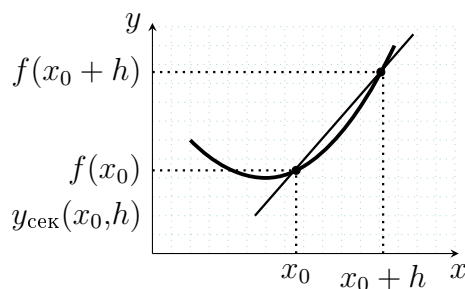
1.  $o(f) \pm o(f) = o(f), x \rightarrow x_0$
2.  $o(f) \cdot o(f) = o(f^2), x \rightarrow x_0$
3.  $O(f) \pm O(f) = O(f), x \rightarrow x_0$
4.  $O(f) \cdot O(f) = O(f^2), x \rightarrow x_0$
5.  $o(f) \cdot O(g) = o(f \cdot g), x \rightarrow x_0$
6.  $o(f) \pm O(f) = O(f), x \rightarrow x_0$
7.  $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g), x \rightarrow x_0$

## 5 Производная функции в точке. Дифференциал. Дифференцируемость

**Определение 5.1.** Пусть  $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ . Производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

**Определение 5.2.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ ,  $x_0, x_0 + h \in U_{\delta_0}(x_0)$ . Секущей называется прямая, проходящая через точки  $(x_0, f(x_0))$  и  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$



$$y_{\text{сек.}}[x_0, h](x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

**Примечание.** Геометрический смысл производной — предельное положение секущей, то есть прямая, тангенс угла наклона которой является пределом тангенсов углов наклона секущих в зависимости от  $h$

**Определение 5.3.** Пусть  $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ . Будем говорить, что  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , если  $\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$

**Теорема 5.1.** Функция  $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) \in \mathbb{R}$ . При этом  $A = f'(x_0)$ .

*Доказательство.* Функция дифференцируема в точке  $x_0$  значит:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0), \quad \forall x \in U_{\delta_0}(x_0), \text{ и } \varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varepsilon(x), \varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

□

**Определение 5.4.** Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда дифференциалом  $f$  в точке  $x_0$  называется функция  $df_{x_0}(h) = f'(x_0)h$

На практике обычно используют обозначения  $df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$

**Задача.** Как связаны условия:

1.  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$
2.  $f$  непрерывна в точке  $x_0$

*Решение.* 1)  $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}: f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \rightarrow f(x_0), A(x - x_0) \rightarrow 0, o(x - x_0) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0 \Rightarrow 2)$ .

Из 2) не следует 1). Действительно, дифференцируемость равносильна существованию конечной производной. Следовательно, достаточно предъявить функцию непрерывную в точке, но не имеющую в ней конечной производной.

Например,  $f(x) = |x|$  непрерывна в каждой точке, но в нуле не имеет производной.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x| - 0}{x} = \operatorname{sign} x.$$

Но  $\operatorname{sign} x$  в нуле не имеет предела.

**Ответ:** из 1) следует 2)

## 5.1 Односторонние производные

**Определение 5.5.** Односторонние окрестности:

$$U_{\delta}^{+}(x_0) := [x_0, x_0 + \delta)$$

$$U_{\delta}^{-}(x_0) := (x_0 - \delta, x_0]$$

**Определение 5.6.** Пусть  $f : U_{\delta_0}^{+}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ . Тогда если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

то он называется *правосторонней производной функции  $f$  в точке  $x_0$*  и обозначается  $f'_+(x_0)$

Аналогично определяется *левосторонняя производная функции  $f$  в точке  $x_0$*  и обозначается  $f'_-(x_0)$

**Пример.** Рассмотрим  $f(x) = |x|$ .

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = -1.$$

**Теорема 5.2.** Пусть  $f$  дифференцируется в точке  $x_0$ . Тогда  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ :

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

□

## 5.2 Правила вычисления производных и дифференциалов

**Теорема 5.3.** Пусть функции  $f$  и  $g$  дифференцируемые в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Тогда  $f \pm g$  и  $f \cdot g$  дифференцируемые в точке  $x_0$ , если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  дифференцируема в точке  $x_0$

Более того справедливы равенства:

1.  $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2.  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g'(x_0) \neq 0.$

*Доказательство.* Введем обозначения  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ ,  $\Delta g = g(x) - g(x_0)$ ,  $\Delta x = x - x_0$ .

$$1. \frac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f \pm \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x};$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0), \Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x_0), \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\text{Тогда } \frac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \pm g'(x_0), x \rightarrow x_0 \Rightarrow (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), x \rightarrow x_0.$$

$$2. \frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x)[g(x) - g(x_0)]}{\Delta x} + \frac{g(x_0)[f(x) - f(x_0)]}{\Delta x} =$$

$$= f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0), \Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x_0), \Delta x \rightarrow 0$$

$f(x) \rightarrow f(x_0), \Delta x \rightarrow 0$ , так как из дифференцируемости в точке  $x_0$  следует непрерывность

$$\text{Тогда } \frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} \rightarrow f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0), \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

$$3. \frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)\Delta x} =$$

$$= \left( \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{\Delta x} \right) \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0, \quad g \text{ непрерывна в}$$

точке  $x_0$ .

Следовательно, переходя к пределу при  $x \rightarrow x_0$  получим требуемое.

□

**Следствие.**  $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

**Следствие.** Пусть  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x_0$ . Тогда выполнено следующее:

1.  $d(f \pm g)(x_0) = df(x_0) \pm dg(x_0)$

$$2. d(f \cdot g)(x_0) = df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)$$

$$3. dg(x_0) \neq 0 \quad d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{df(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot dg(x_0)}{g^2(x_0)}$$

**Теорема 5.4.** (Производная сложной функции) Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $y_0$ ,  $g$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда композиция  $f \circ g$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ .

**Примечание.** Функция  $f$  дифференцируема в точке  $y_0$ ,  $g$  — в точке  $x_0$ , значит они определены в некоторой окрестности. Значения функции  $g$  попадут в область определения функции  $f$ , потому что  $g$  непрерывна (так как дифференцируема). Значит, для любой окрестности, где определена  $f$  найдется такая окрестность, что как только  $x$  попадает в нее, то  $g(x)$  попадает окрестность, где определена  $f$ .

*Доказательство.* Так как  $f$  дифференцируема в точке  $y_0$ , то  $\exists f'(y_0) \in \mathbb{R}$ .

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \varepsilon_1(y)(y - y_0) \quad \forall y \in U_\delta(y_0) \quad \varepsilon_1(y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow y_0;$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_2(x)(x - x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0), \quad \varepsilon_2(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0.$$

Вместо  $y$  подставим  $g(x)$

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_2(x)(x - x_0)) +$$

$$+ \varepsilon_1(g(x))(g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_2(x)(x - x_0)) = (f \circ g)(x_0) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) +$$

$$+ \left\{ \varepsilon_2(x)f'(g(x_0))(x - x_0) + \varepsilon_1(g(x))g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(g(x))\varepsilon_2(x)(x - x_0) \right\}$$

$$\{ \} = (x - x_0) \left[ \varepsilon_2(x)f'(g(x_0)) + \varepsilon_1(g(x))g'(x_0) + \varepsilon_1(g(x))\varepsilon_2(x) \right] = (x - x_0) \cdot \varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$$

Доопределим  $\varepsilon_1(g(x_0)) = \varepsilon_1(y_0) = 0$ . Тогда  $\varepsilon_1$  становится непрерывной в  $y_0$ . И [по теореме о замене переменной при вычислении предела](#)  $\varepsilon_1(g(x)) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$   $\square$

**Теорема 5.5.** (Производная обратной функции) Пусть  $y : U_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{R}$  строго монотонна и непрерывна в этой окрестности. Пусть  $y'(x_0) \neq 0$ . Тогда существует обратная функция  $x : U_\sigma(y_0) \mapsto U_\delta(x_0)$  строго монотонна и непрерывна в  $U_\sigma(y_0)$ . При этом  $x$  дифференцируема в точке  $y_0 = y(x_0)$  и  $x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$

*Доказательство.* Первая часть теоремы была доказана ранее. Докажем существование производной.

$$\frac{y - y_0}{x(y) - x(y_0)} = \frac{1}{\frac{x(y) - x(y_0)}{y - y_0}} \Leftrightarrow \frac{x(y) - x(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y(x(y)) - y(x(y_0))}{x(y) - x(y_0)}}$$

$y(x)$  и  $x(y)$  взаимнообратны.

Так как  $x(y)$  осуществляет биективное отображение  $U_\delta(y_0) \mapsto U_\delta(x_0)$ , то  $x(y) \neq x_0$  при  $y \neq y_0$ . Из непрерывности  $x(y)$  в точке  $y_0$  следует  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} x(y) = x(y_0)$ . Следовательно, можно воспользоваться [теоремой о замене переменной при вычислении предела](#).

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{y(x(y)) - y(x(y_0))}{x(y) - x(y_0)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} = \frac{1}{y'(x_0)} = x'(y_0)$$

□

**Следствие.**

- |  |  |
|--|--|
| 1. $a^x = a^x \cdot \ln a, \quad \forall a \in (0; +\infty), \quad x \in \mathbb{R}$               | 8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty)$                                    |
| 2. $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$  | 9. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$                              |
| 3. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$   | 10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$               |
| 4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$                           | 11. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$               |
| 5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$                         | 12. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}$               |
| 6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ | 13. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$   |
| 7. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0; \pi)$                                  | 14. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$ |

*Доказательство.*

- $\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} \rightarrow e^{x_0}, x \rightarrow x_0 \Rightarrow (e^x)' = e^x$   
 $(a^x)' = (e^{\ln a \cdot x})' = e^{y(x)} \cdot y'(x) = a^x \cdot \ln a, \quad y(x) = \ln a \cdot x.$
- $\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{\sin x_0 \cdot \cos(\Delta x) + \cos x_0 \cdot \sin(\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \cos x_0.$
- Редукция с помощью сдвига на  $\frac{\pi}{2}$ .
- $(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
- Аналогично  $(\operatorname{ctg} x)'$ .
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
- Аналогично  $(\arccos x)'$ .
- $y'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{e^{y(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \frac{1}{1+x^2}.$



10. Аналогично  $(\arctan x)'$ .

11. Задание на дом:)

12. Задание на дом:)

$$13. (\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$14. (\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

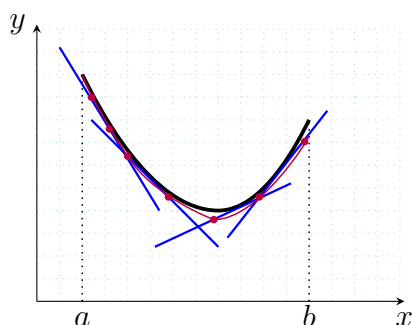
□

### 5.3 Производные и дифференциалы высших порядков

**Определение 5.7.**  $f^0 = f(x)$ ,  $f'(x)$  определили. ( $f'(x)$  — функция точки  $x$ ).

Далее по индукции. Если в некоторой окрестности точки  $x_0$  определена  $f^{(n)}(x)$ , то  $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$

**Определение 5.8.** Пусть  $f$  дифференцируема в окрестности точки  $x_0$  и  $\exists f''(x_0)$ . Тогда дифференциалом 2-ого порядка функции  $f$  в точке  $x_0$  называется дифференциал от дифференциала 1-ого порядка как функции точки  $x$  при фиксированном  $dx$



То есть  $d^2 f(x) := d(df(x))$

В каждой точке графика построим касательную. Взять дифференциал от дифференциала означает следующее.  $df(x)$  — семейство этих касательных. У каждой касательной нужно зафиксировать приращение (на рисунке отмечено жирными точками). Таким образом наша функция — огибающая этих приращений. Ее и нужно дифференцировать.

**Определение 5.9.** Если определён  $d^{(n)} f(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  и  $\exists f^{(n+1)}(x_0)$ , то  $d^{(n+1)} f(x_0) := d(d^{(n)} f(x))(x_0)$

**Теорема 5.6.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists f^{(n)}(x_0)$ . Тогда  $d^{(n+1)} f(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)(dx)^n$

*Доказательство.* Докажем по индукции. При  $n = 1$  очевидно.

При  $n \geq 2$  пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$ .

$$d^2 f(x_0) = d(df(x)) \Big|_{x=x_0} = d(f'(x)dx)(x_0) = f''(x_0)(dx)^2$$

Пусть формула доказана при  $k \in \mathbb{N}$

$$1 \leq k \leq n-1 \quad d^k f(x_0) = d(d^k f(x))(x_0) = d(f^{(k)}(x_0)(dx)^k) = f^{(k+1)}(x_0)(dx)^{k+1}$$

□

**Теорема 5.7.** (Инвариантность формы первого дифференциала и неинвариантность формы высших дифференциалов) Пусть функция  $y = y(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а функция  $z = z(y)$  дифференцируема в точке  $y_0 = y(x_0)$ . Тогда дифференциал  $z$ , рассматриваемый как функция лишь от  $y$  в точке  $y_0$ , и дифференциал функции  $z = z(y(x)) = f(x)$  в точке  $x_0$  записываются одинаково, а именно  $dz = z'(y_0) dy$ . При этом в первом случае (когда  $z = z(y)$ )  $dy = y - y_0$ , а во втором  $dy$  — дифференциал функции  $y(x)$  в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Для функции  $z = z(y)$  по определению дифференциала

$$dz(y_0) = z'(y_0) dy, \quad dy = y - y_0.$$

Рассмотрим композицию функций  $z = z(y(x)) = f(x)$ .

$$dz = f'(x_0) dx = z'(y(x_0)) y'(x_0) dx = z'(y(x_0)) dy(x_0)$$

□

**Примечание.** Для второго дифференциала форма записи не инвариантна.

*Доказательство.* Действительно, пусть функция  $z = z(y)$  дважды дифференцируема в точке  $y_0$

$$d^2 = z''(y_0) (dy)^2, \quad dy = y - y_0$$

Если же  $z = z(y(x))$

$$d^2 z = f''(x_0) (dx)^2 = \left( z'(y(x)) \cdot y'(x) \right)' (dx)^2, \Big|_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned} &= \left[ z''(y(x)) \cdot (y'(x))^2 + z'(y(x)) \cdot y''(x_0) \right] \cdot (dx)^2 = z''(y_0) \cdot (y'(x_0))^2 \cdot (dx)^2 + z'(y(x_0)) \cdot y''(x_0) \cdot (dx)^2 = \\ &= z''(y_0) (dy)^2 + z'(y_0) d^2 y(x_0) \end{aligned}$$

□

## 5.4 Формула Лейбница

Введём некоторые обозначения:  $0! := 1$ ,  $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$C_n^k$  — биномиальный коэффициент,  $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Соглашение:  $u^{(0)}(x) \equiv u(x)$ .

**Теорема 5.8.** *Формула Лейбница* Пусть  $\exists u^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$  и  $\exists v^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\exists (u \cdot v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(x_0) \cdot v^{(n-k)}(x_0)$

*Доказательство.* Будем доказывать по индукции.

База: при  $n = 1$  верно ([обычное правило дифференцирование произведения](#)).

Пусть доказано при некотором  $n = k \in \mathbb{N}$ , установим при  $k + 1$ .

При  $k$  имеем:

$$(u \cdot v)^{(k)} = \sum_{s=0}^k C_k^s u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0)$$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(k+1)} &= \left( \sum_{s=0}^k C_k^s u^{(s)}(x) \cdot v^{(k-s)}(x) \right)' \Big|_{x=x_0} = \\
&= \sum_{s=0}^k C_k^s u^{(s+1)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0) + \sum_{s=0}^k C_k^s u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) = (*)
\end{aligned}$$

Произведем замену индексов:  $s + 1 = j$ ,  $s + j - 1$ . Получаем

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} u^{(j)}(x_0) \cdot v^{(k-j+1)}(x_0) + \sum_{j=0}^k C_k^j u^{(j)}(x_0) \cdot v^{(k-j+1)}(x_0) = \\
&= C_k^k u^{(k+1)}(x_0) \cdot v(x_0) + C_k^0 u(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0) + \sum_{j=1}^k (C_k^{j-1} + C_k^j) u^{(j)}(x_0) \cdot v^{(k+1-j)}(x_0) =
\end{aligned}$$

Заметим, что  $C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$ ,  $C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1$ ,  $C_k^{j-1} + C_k^j = \frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!} + \frac{k!}{(j)!(k-j)!} = \frac{k!}{(j)!(k-j+1)!} \cdot (k-j+1+j) = \frac{(k+1)!}{(j)!(k+1-j)!} = C_{k+1}^j$ .

С учетом этого перепишем выражение (\*)

$$(u \cdot v)^{(k+1)} = (*) = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j u^{(j)}(x_0) \cdot v^{(k+1-j)}(x_0)$$

Шаг индукции доказан. Значит, формула верна при всех  $n \in \mathbb{N}$ . □

## 5.5 Вычисление производных функций, заданных неявно

**Определение 5.10.** Будем говорить, что функция  $y : X \mapsto \mathbb{R}$  *неявно задана уравнением*  $F(x, y) = 0$ , если  $F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in X$ .

**Пример.**

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$  — функция, неявно заданная уравнением  $F(x, y) = 0$

$y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$  — функция, неявно заданная уравнением  $F(x, y) = 0$

Также заметим, что функций, неявно задающихся данным уравнением, бесконечно много.

**Примечание.** В домашних задачах априори предполагается, что неявно заданные функции существуют и они дифференцируемы. Однако в общем случае это нужно доказывать.

Чтобы найти производную неявно заданной функции, необходимо:

1. Продифференцировать обе части уравнения, вместо  $y$  подставляя  $y(x)$ . Так как оно является тождеством при всех значениях  $x$ ,
2. Выразить производную  $y'(x)$ .

## 5.6 Производные функций, заданных параметрически

Пусть  $y = y(t)$ ,  
 $x = x(t)$  определены в некоторой  $U_\delta(t_0)$ .

Если для  $x$  выполнены условия, требуемые для [теоремы об обратной функции](#), то  $\exists t = t(x)$ , определенная в  $U_\delta(x_0)$ ,  $x_0 = x(t_0)$ .

Пусть также выполнены все условия [теоремы о дифференцировании обратной функции](#) и [теоремы о дифференцировании сложной функции](#). Тогда

$$f(x) = y(t(x))$$

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}, \text{ где } t_0 = t(x_0)$$

## 5.7 Теоремы о среднем

**Определение 5.11.** Пусть  $f : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $X \subset \mathbb{R}$ .

Будем говорить, что точка  $x_0$  — точка локального максимума (локального минимума) функции  $f$ , то есть, точка локального экстремума, если

$$\exists \delta = \delta(x_0) > 0 : \begin{cases} f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \\ f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \end{cases}$$

**Определение 5.12.** Пусть  $f : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $X \subset \mathbb{R}$ .

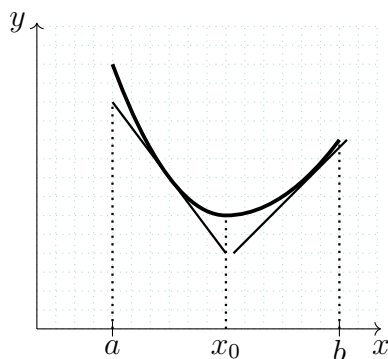
Будем говорить, что точка  $x_0$  — точка строгого локального максимума (строгого локального минимума), то есть строгого экстремума функции  $f$ , если

$$\exists \delta = \delta(x_0) > 0 : \begin{cases} f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \\ f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \end{cases}$$

**Лемма 5.1.** Пусть  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ . Пусть  $x_0$  — точка локального минимума (локального максимума).

$$\begin{aligned} & \exists f'_+(x_0), \text{ то } f'_+(x_0) \geq 0 \\ & \exists f'_-(x_0), \text{ то } f'_-(x_0) \leq 0 \\ \text{Тогда, если} & \begin{pmatrix} \exists f'_+(x_0), \text{ то } f'_+(x_0) \leq 0 \\ \exists f'_-(x_0), \text{ то } f'_-(x_0) \geq 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Доказательство. .



Докажем для случая, когда  $x_0$  — точка локального минимума, так как для локального максимума доказательство аналогично.

$$\text{Пусть } \exists f'_+(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Так как  $x_0$  — локальный максимум, то

$$\exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap [a, b]$$

А так как берется правосторонний предел, то  $x > x_0$ .

Следовательно,  $\forall x \in \mathring{U}_\delta^+(x_0) \cap [a, b] \hookrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Следовательно, делая [предельный переход в неравенстве](#), получим  $f'_+ \geq 0$

Если  $\exists f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , то  $\exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$

Так как  $x$  приближается к  $x_0$  слева, то  $x - x_0 \leq 0$ . Следовательно,

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta^-(x_0) \cap [a, b] \hookrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Следовательно, делая [предельный переход в неравенстве](#), получим  $f'_- \leq 0$  □

**Теорема 5.9.** (Теорема Ферма) Пусть  $f : U_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда, если  $x_0$  — локальный экстремум  $f$ ,  $f'(x_0) = 0$

*Доказательство.* В силу предыдущей леммы  $\begin{cases} f'_+(x_0) \geq 0 \\ f'_-(x_0) \leq 0, \end{cases}$  если  $x_0$  — локальный минимум. Следовательно,  $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \\ \exists f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$  и  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

Доказательство для локального максимума аналогично. □

**Теорема 5.10.** Ролля (о среднем) Пусть  $f \in C([a, b])$  и дифференцируема на интервале и  $f(a) = f(b)$ . Тогда  $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$ .

*Доказательство.* Возможны два случая:

Случай 1.  $f \equiv \text{const.}$   $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .

Значит, в качестве  $\xi$  можно взять любую точку из  $(a, b)$ .

Случай 2. Если  $f \neq \text{const.}$ , то в силу непрерывности  $f$  достигает наибольшего и наименьшего значения на  $[a, b]$ .

Следовательно, существует точка локального экстремума  $\xi \in [a, b]$  (в котором достигается либо локальный максимум, либо локальный минимум).

Значит, так как  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , по [теореме Ферма](#)  $f'(\xi) = 0$ . □

**Теорема 5.11.** (Коши о среднем) Пусть  $f, g \in C([a, b])$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Пусть  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Тогда  $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

*Доказательство.* Так как  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , то  $g(a) \neq g(b)$ . Иначе получили противоречие [теореме Ролля](#). Следовательно, формула корректна.

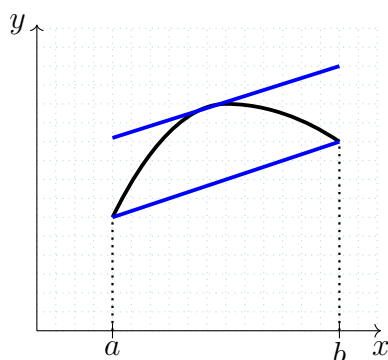
Рассмотрим функцию  $h(x) = f(x) - k \cdot g(x)$ , при  $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

Заметим, что  $h(b) = h(a)$ .

Так как  $h \in C([a, b])$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то по [теореме Ролля](#)

$$\exists \xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0$$

$$h'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) = 0 \Rightarrow k = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \square$$



Предположим, что на малом интервале  $x(t)$  обратима и удовлетворяет условиям [теоремы об обратной функции](#)

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad y'(x) = \left. \frac{y'(t)}{x'(t)} \right|_{t=t(x)}$$

**Следствие.** (Теорема Лагранжа о среднем) Пусть  $f \in C([a, b])$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ .

Тогда найдется  $\xi \in (a, b)$  :  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

*Доказательство.* Применить теорему Коши о среднем при  $f = f$  и  $g = x$  □

## 5.8 Следствия из теоремы Лагранжа о среднем

**Теорема 5.12.** Пусть  $f \in C(U_\delta(x_0))$  Пусть  $f$  дифференцируема в  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$ , то  $\exists f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$

Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x)$ , то  $\exists f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x)$

*Доказательство.* Докажем для правой производной, так как для левой аналогично.

Фиксируем  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta^+(x_0)$ . Выполнены все условия теоремы Лагранжа о среднем на отрезке  $[x_0, x] \Rightarrow \xi(x) \in (x_0, x)$  :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi(x)) \quad (*)$$

$x$  был выбран произвольно,  $\xi(x) \neq x_0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta^+(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(\xi(x)) = \lim_{\xi \rightarrow x_0+0} f'(\xi) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

Значит, в силу (\*) получаем  $\lim_{\xi \rightarrow x_0+0} f'(\xi) = f'_+(x_0)$

Аналогично для левосторонней производной. □

**Следствие.** Если  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то  $f'$  не имеет разрывов 1-ого рода и устранимых разрывов.

*Доказательство.* Из следствия теоремы Лагранжа о среднем вытекает, что если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ , то он обязан быть равен  $f'(x_0)$ . Значит, устранимых разрывов быть не может.

При разрыве 1-ого рода односторонние пределы существуют, но не равны. Из следствия теоремы Лагранжа это значит, что существует правосторонняя и левосторонняя производная, но они не равны. Но это противоречит условию, что  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ . Значит,  $f'$  не имеет разрывов 1-ого рода. □

Таким образом, если функция дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то разрывы у нее могут быть только второго рода.

**Пример.** 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f$  дифференцируема всюду на  $\mathbb{R}$ , но производная имеет разрыв второго рода

*Доказательство.* Если  $x \neq 0$ , то  $f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{-1}{x^2} \right) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \Rightarrow f'$  имеет в нуле разрыв второго рода □

## 5.9 Теорема Дарбу

**Лемма 5.2.** Пусть  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ .

Пусть  $x, y \in (a, b)$  и  $f'(x) \cdot f'(y) < 0$ . Тогда  $\exists \xi \in (x, y) : f'(\xi) = 0$

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $f'(x) > 0$   $f'(y) < 0$ . Так как  $f \in C((a, b)) \Rightarrow f \in C([x, y])$ . Значит,  $f$  достигает максимума и минимума на  $[x, y]$ . Точка максимума находится

на  $(x, y)$ , так как  $\begin{cases} f'_+(x_M) \leq 0 \\ f'_-(x_M) \geq 0 \end{cases}$ . То есть точка максимума  $\begin{cases} x_M \neq x, \\ x_M \neq y. \end{cases}$

Следовательно, по теореме Ферма  $f'(x_M) = 0$ .

Аналогично рассматривается случай  $f'(x) < 0$   $f'(y) > 0$ . □

**Теорема 5.13.** (Теорема Дарбу) Пусть  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Тогда если  $f'$  принимает какие-либо два значения, то она принимает все значения между ними.

*Доказательство.*  $\begin{cases} f'(x) = A \\ f'(y) = B \\ A \neq B \end{cases}$  Покажем, что  $\forall C \in (A, B) \exists x_c \in (x, y) : f'(x_c) = C$

Фиксируем  $C \in (A, B)$ . Рассмотрим  $h(t) = f(t) - C \cdot t$ .

$h$  дифференцируема на  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - C = A - C \\ h'(y) &= f'(y) - C = B - C \end{aligned} \Rightarrow h'(x) \cdot h'(y) = (A - C)(B - C) < 0$$

Следовательно, по предыдущей лемме:

$$\exists \xi \in (x, y) : h'(\xi) = 0 = f'(\xi) - C \Rightarrow f'(\xi) = C$$

Тогда положим  $x_c = \xi$  □

## 5.10 Формула Тейлора

**Определение 5.13.** Пусть  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f : U_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{R}$  имеет  $n$ -ую (конечную) производную в точке  $x_0$ . Тогда полиномом (многочленом) Тейлора функции  $f$  с центром в точке  $x_0$  называется

$$T_{x_0}^n[f](x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Определение 5.14.** Формальным  $n$ -ым остаточным членом формулы Тейлора функции  $f$  с центром в точке  $x_0$  называется

$$r_{x_0}^n[f](x) := f(x) - T_{x_0}^n[f](x), \quad x \in U_{\delta_0}(x_0)$$

**Лемма 5.3.**  $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$  Тогда

$$a) \quad \forall k \in \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \varphi_n^{(k)} = n(n-1) \dots (x-k+1)(x-x_0)^{n-k},$$

$$\forall k > n \hookrightarrow \varphi_n^{(k)}(x) \equiv 0$$

$$b) \quad \varphi_n^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0, k \neq n \\ n!, k = n \end{cases}$$

*Доказательство.* Пункт b) сразу следует из пункта a)

Пункт a) доказывается по индукции:

При  $k = 1$  очевидно.

Пусть доказано при каком-то  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\text{Тогда } \left( (x_0)^n \right)^{(k+1)} = \left( n(n-1) \dots (n-k+1)(x-x_0)^{n-1} \right)' =$$

$$= n(n-1) \dots (x-k+1)(x-x_0)^{n-(k+1)}$$

□

**Лемма 5.4.** Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\forall k \in \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \left( r_{x_0}^n[f](x) \right)^{(k)}(x_0) = 0$

*Доказательство.* Фиксируем  $k \in \{0, \dots, n\}$

$$r_{x_0}^n[f](x) = f(x_0) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j$$

$$\left( r_{x_0}^n[f](x) \right)^{(k)} \Big|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) - \left( \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j \right)^{(k)} \Big|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) - f^{(k)}(x_0) \frac{k!}{k!} = 0$$

□

**Теорема 5.14.** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) Пусть  $f$  дифференцируемо в точке  $x_0$   $n$  раз,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), x \rightarrow x_0$$

**Примечание.** Запись  $x \rightarrow x_0$  означает, что равенство справедливо в некоторой окрестности  $U_\delta(x_0)$

$o\left((x-x_0)^n\right)$  — это «функция», представляемая в виде

$$\varepsilon_n[f](x)(x-x_0)^n, \text{ где } \varepsilon_n[f](x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0.$$

*Доказательство.* Так как  $\exists f^{(n)}(x_0)$ , то  $\exists U_\delta(x_0)$ , в которой определена  $f^{(n-1)}(x)$ .

По определению  $r_{x_0}^n[f](x) = f(x_0) - T_{x_0}^n[f](x)$ ,  $\varphi_n(x) = (x-x_0)^n$

Достаточно доказать, что  $\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x-x_0)^n} \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$

Заметим, что  $\varphi_n(x_0) = (x-x_0)^n = 0$ ,  $r_{x_0}^n[f](x_0) = 0$ . Тогда

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r_{x_0}^n[f](x) - r_{x_0}^n[f](x_0)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)}$$



Так как  $r_{x_0}^n[f](x)$  дифференцируема  $n$  раз, то можно применить [теорему Коши о среднем](#):

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x) - r_{x_0}^n[f](x_0)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)'(\xi)}{\varphi_n'(\xi)}, \text{ где } \xi \in (x, x_0)$$

По предыдущей лемме имеем  $\forall k \in \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \left(r_{x_0}^n[f](x)\right)^{(k)}(x_0) = 0$  и

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \hookrightarrow \varphi_n^{(k)}(x_0) = 0$$

$$\frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)'(\xi)}{\varphi_n'(\xi)} = \frac{r_{x_0}^{n-1}[f'](\xi)}{n \cdot \varphi_{n-1}(\xi)} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)'(\xi_1) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)'(x_0)}{n(\varphi_{n-1}(\xi_1) - \varphi_{n-1}(x_0))}$$

Тогда, снова применяя [теорему Коши о среднем](#) получаем:

$$\frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)'(\xi_1) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)'(x_0)}{n(\varphi_{n-1}(\xi_1) - \varphi_{n-1}(x_0))} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(2)}(\xi_1)}{\varphi_n^2(\xi_1)}, \text{ где } \xi \in (\xi_1, x_0)$$

Повторяем предыдущий шаг  $n-1$  раз. После него получим

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x - x_0)^n} = \dots = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)}, \text{ где } \xi_{n-1} \in (\xi_{n-2}, x_0)$$

Заметим, что  $\xi_{n-1}(x) \in (x_0, x)$ . Следовательно,  $\xi_{n-1}(x) \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0$ , но  $\xi_{n-1}(x) \neq x_0$ .

Значит,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)}$ . По [теореме о замене переменной при вычислении предела](#) он равен

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_{n-1} \rightarrow x_0} \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} &= \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n)}(x_0)}{n!} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x - x_0)^n} = 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 5.15.** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) Пусть  $\exists f^{(n+1)}$  в некоторой  $U_\delta(x_0)$ . Тогда  $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$  справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ где } \xi \in (x_0, x).$$

*Доказательство.*  $\varphi_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}$

$$r_{x_0}^n[f](x) = f(x_0) - T_{x_0}^n[f](x)$$

Можно применить [теорему Коши](#)  $n+1$  раз:

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Так как  $(n+1)$ -ая производная полинома степени  $n$  равна нулю, то справедливо равенство

$$\frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}, \xi := \xi_{n+1}$$

□

**Теорема 5.16.** (Теорема о единственности) Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ . Тогда, если

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), x \rightarrow x_0, \text{ то } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

**Примечание.** Теорема верна, только если выполняется условие  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ . Может случиться так, что производная не существует, но разложение есть.

**Пример.** Задача на дом

*Доказательство.* Так как  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ , можно воспользоваться [формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано](#). Тогда

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), x \rightarrow x_0, \\ f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), x \rightarrow x_0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0 = f(x_0)$$

$$\begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=1}^n a_k(x-x_0)^{k-1} + o\left((x-x_0)^{n-1}\right), x \rightarrow x_0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + o\left((x-x_0)^{n-1}\right), x \rightarrow x_0 \end{cases}$$

$$a_1 = f'(x_0)$$

$$\text{И так далее } n \text{ шагов. Получим, что } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

□

**Теорема 5.17.** (Почленное дифференцирование формулы Тейлора) Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $\exists f^{(n)}(x_0)$ .

Тогда если  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), x \rightarrow x_0$ , то

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot k \cdot (x-x_0)^{k-1} + o\left((x-x_0)^{n-1}\right), x \rightarrow x_0.$$

*Доказательство.* В силу [теоремы о единственности](#)  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, примененной к функции  $f'$ ,

$$\text{получим, что } f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^{n-1}\right), x \rightarrow x_0$$

$$j = k + 1$$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{(j-1)!}(x-x_0)^{j-1} + o\left((x-x_0)^{n-1}\right), x \rightarrow x_0$$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot j \cdot (x - x_0)^{j-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right), x \rightarrow x_0$$

$$k = j$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right), x \rightarrow x_0.$$

□

**Теорема 5.18.** (Почленное интегрирование формулы Тейлора) Пусть  $\exists f^{(n+1)}(x_0)$  и

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right). \text{ Тогда}$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right), x \rightarrow x_0$$

*Доказательство.* В силу теоремы о единственности  $b_k = \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, примененной к функции  $f$ , получим, что  $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^{n+1}\right), x \rightarrow x_0$

$$j = k - 1$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^n \frac{(f')^{(j)}(x_0)}{(j+1)!} (x - x_0)^{j+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right), x \rightarrow x_0$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^n \frac{(f')^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot \frac{1}{j+1} \cdot (x - x_0)^{j+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right), x \rightarrow x_0$$

$$k = j$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right), x \rightarrow x_0.$$

□

**Задача.** Пусть  $f(x) = f(x_0) + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0$ . Верно ли, что

1.  $f$  непрерывна в точке 0
2.  $f$  дифференцируема в точке 0
3.  $f$  дважды дифференцируема в точке 0

## 5.11 Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора

**Определение 5.15.** Путем сдвига формулы Тейлора с центром в точке  $x_0$  может быть редуцирована к формуле Тейлора с центром в нуле. Тогда такая формула называется *формулой Маклорена*. То есть если  $\exists f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$ , то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n), x \rightarrow 0$$

**Лемма 5.5.** Пусть  $f$  дифференцируема в окрестности 0. Тогда

1. Если  $f$  четная, то  $f'$  нечетна,
2. Если  $f$  нечетная, то  $f'$  четна

*Доказательство.* Докажем пункт 1. так как пункт 2. аналогичен.

Пусть  $f$  — четная функция, тогда.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x - \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{-\Delta x} = -f'(-x)$$

□

**Примечание.** Аналогично можно доказать, что если  $f$  четная и дифференцируема в нуле, то ее  $f'(0) = 0$

**Лемма 5.6.** Пусть  $f$  — четная и  $\exists f^{(2n+1)}(0) \in \mathbb{R}$ , тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)} \cdot x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0$$

Если  $f$  — нечетная и  $\exists f^{(2n+2)}(0) \in \mathbb{R}$ , тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k+1)} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0$$

*Доказательство.*  $f$  — четная, но  $f'$  — нечетная,  $f''$  — четная,  $f'''$  — нечетная и так далее. Но в силу предыдущей леммы и замечания  $f'(0) = f'''(0) = \dots = f^{(2n+1)}(0) = 0$ .

Значит, по формуле Тейлора с остаточным членом в форма Пеано

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{f^{(j)}}{j!} x^j + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0 \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)} \cdot x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Для нечетной доказательство аналогично

□

$$1. (e^{x(n)})(0) = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2. (\operatorname{sh} x)^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, j = 2k \\ 1, j = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0$$

Аналогично  $\operatorname{ch} x$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0$$

$$3. (\sin x)^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, j = 2k \\ (-1)^k, j = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0$$

Аналогично  $\cos x$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0$$

$$4. \left((1+x)^\alpha\right)^{(n)} = \alpha \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n), x \rightarrow 0,$$

$$\text{где } \begin{cases} C_\alpha^k = \frac{\alpha \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{k!}, k \in \mathbb{N} \\ C_\alpha^0 = 1 \end{cases}$$

$$5. \ln(1+x)' = \frac{1}{1+x} \quad (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), x \rightarrow 0$$

Тогда  $\ln(1+x)$  получается из [теоремы о почленном интегрировании формулы Тейлора](#) с учетом, что  $\ln(1) = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n), x \rightarrow 0$$

**Задача.** Пусть  $x_0 > 0$ . Разложить  $\ln x$  по степеням  $(x - x_0)$  с точностью до  $o((x - x_0)^{n+1})$

$$\text{Решение. } \ln(x_0 + x - x_0) = \ln x_0 + \ln \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)$$

$$t(x) = \frac{x - x_0}{x_0}, \quad t(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0$$

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (x - x_0)^k}{k \cdot x_0^k} + o((x - x_0)^{n+1}), x \rightarrow x_0$$

**Примечание.** Заметим, что разложение  $\ln(1+x-1)$  не является решением данной задачи (если  $x_0 \neq 1$ ), так как в условии просят разложить по степеням  $x - x_0$ , а  $x - 1 \not\rightarrow 0$ , при  $x - x_0 \rightarrow 0$

**Задача.** Разложить  $\operatorname{tg} x$  в окрестности нуля с точностью до  $o(x^3)$

$$\text{Решение. } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$$

$$t(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3), t(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

$$(1 - t(x))^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k (t(x))^k + o((t(x))^n), t(x) \rightarrow 0$$

Условие  $t(x) \rightarrow 0$  необходимо, так как оно влияет на величину «поправки»  $o((t(x))^n) = \varepsilon(t(x)) t^n(x)$ , где  $\varepsilon(t(x)) \rightarrow 0, x \rightarrow 0$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} = (1 - t(x))^{-1} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3), x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), x \rightarrow 0$$

## 5.12 Правило Лопиталю

**Теорема 5.19.** (Раскрытие неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ ) Пусть  $-\infty < a < b < +\infty$ . Пусть  $f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a, b)$ , а также  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$  и  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Тогда, если  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = C$

*Доказательство.* Доопределим функции  $f$  и  $g$  нулем в точке  $a$ . Тогда  $f$  и  $g$  станут непрерывными справа в точке  $a$ . Значит,  $\forall x \in (a, b)$  можно воспользоваться [теоремой Коши о среднем](#):  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$ , где  $\xi(x) \in (a, x)$ .

Так как  $\lim_{x \rightarrow a+0} \xi(x) = a$ ,  $\xi(x) \neq a \quad \forall x \in (a, b)$ , можно воспользоваться [теоремой о замене переменной при вычислении предела](#), то есть  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{\xi \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = C$ .

Следовательно, переходя к пределу равенства, получаем  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ . □

**Теорема 5.20.** Пусть  $f$  и  $g$  дифференцируемы на луче  $(A, +\infty)$ ,  $(A > 0)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Пусть  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (A, \infty)$ . Тогда если  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ .

*Доказательство.* Сделаем замену:  $t = t(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x(t) = \frac{1}{t}$ . Получаем:  $(A, +\infty) \rightarrow (0, \frac{1}{A})$ . Рассмотрим функции  $f_1(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ ,  $g_1(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ .

Теперь заметим, что  $\lim_{t \rightarrow +0} f_1(t) = \lim_{t \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Аналогично  $\lim_{t \rightarrow +0} g_1(t) = 0$ .

$f_1$  и  $g_1$  дифференцируемы на отрезке  $(0, \frac{1}{A})$  и  $g_1'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right) \neq 0 \quad \forall t \in (0, \frac{1}{A})$ .

Следовательно, можем воспользоваться предыдущей теоремой:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{-1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{-1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

**Теорема 5.21.** (неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$ ) Пусть  $-\infty < a < b < +\infty$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} |f(x)| = +\infty$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow +0} |g(x)| = +\infty$ . Пусть  $f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a, b)$  и  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ . Тогда если  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ .

**Примечание.** Правило Лопиталя справедливо не только для интервала  $(a, b)$ , но также для лучей.

*Доказательство.* По определению предела  $\forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon \in (a, b) : \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(C) \forall x \in (a, a_\varepsilon)$ .

Зафиксируем  $\varepsilon \in (0, 1)$  и  $a_\varepsilon$ . Заметим, что если  $x \in (a, a_\varepsilon)$ , то по теореме Коши о среднем:

$$\frac{f(x) - f(a_\varepsilon)}{g(x) - g(a_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}, \text{ где } \xi(x) \in (x, a_\varepsilon) \quad (*)$$

Из-за того, что  $\lim_{x \rightarrow a+0} |f(x)| = +\infty$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow +0} |g(x)| = +\infty$ , в окрестности  $a$  эти функции

не равны нулю. Более того,  $\exists \delta(\varepsilon) \in (a, a_\varepsilon) : \forall x \in (a, \delta(\varepsilon)) \hookrightarrow \begin{cases} \frac{|f(a_\varepsilon)|}{|f(x)|} < \frac{\varepsilon}{3} \\ \frac{|g(a_\varepsilon)|}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$

Из (\*) следует:  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$ , где  $\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \in U_\varepsilon(C)$  и

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \varepsilon/3}{1 + \varepsilon/3} < \frac{1 - \frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}} < \frac{1 + \varepsilon/3}{1 - \varepsilon/3} < 1 + \varepsilon$$

Значит,  $\forall x \in (a, \delta_\varepsilon) \hookrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \in \begin{cases} ((c - \varepsilon)(1 - \varepsilon), (c + \varepsilon)(1 + \varepsilon)), & C \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}, +\infty\right), & C = +\infty \\ \left(-\infty, \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}\right), & C = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \quad \square$

**Пример.**  $\begin{matrix} f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \\ g(x) = a^x, a > 1. \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} - ?$

*Решение.*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{\ln a \cdot a^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(\ln a)^n \cdot a^x} = 0$

**Пример.**  $f(x) = \ln x, \quad g(x) = x^\varepsilon, \varepsilon > 0. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} - ?$

*Решение.*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\varepsilon \cdot x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon \cdot x^\varepsilon} = 0$

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x - ?$

*Решение.*  $\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$

### 5.13 Исследование функций

**Теорема 5.22.** Пусть  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда:

1.  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$  нестрого возрастает на  $(a, b)$ .
2.  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$  нестрого убывает на  $(a, b)$ .
3. Если  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , то  $f$  строго возрастает на  $(a, b)$ .
4. Если  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , то  $f$  строго убывает на  $(a, b)$ .

*Доказательство.* Докажем 1., 2 — аналогично.

Шаг 1. Пусть  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Рассмотрим две точки  $x, y \in (a, b)$ . По [теореме Лагранжа о среднем](#):  $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$ , где  $f'(\xi) \geq 0, (y - x) > 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$  (\*).

Шаг 2. Пусть  $f$  нестрого возрастает на  $(a, b)$ . Фиксируем точку  $x, x_0 \in (a, b)$ .

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , так как если  $x > x_0$ , то числитель неотрицательный, а знаменатель положительный, а если  $x < x_0$ , то числитель неположительный, а знаменатель отрицательный.

Так как по условию  $f$  о условию дифференцируема в точке  $x_0$ , [переходя к пределу в неравенстве](#) получим  $f'(x_0) \geq 0$ . Но  $x_0$  можно выбрать произвольно.

Пункты 3. и 4. доказываются применением (\*) □

**Пример.**  $f(x) = x^3$ .

$f$  строго возрастает на  $\mathbb{R}$ .  $f'(0) = 0$ . Поэтому из строгого возрастания не вытекает положительность производной

**Теорема 5.23.** (Достаточное условие экстремума) Пусть  $f \in C(U_\delta(x_0))$  и дифференцируема в  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . Тогда если производная меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то  $x_0$  — точка локального экстремума (если знак меняется с «−» на «+», то локальный минимум, если с «+» на «−», то локальный максимум).

*Доказательство.* Если  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ , то по [теореме Лагранжа о среднем](#):  $f(x) - f(x_0) = f'(\xi(x))(x - x_0)$ . Если  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ,  $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ,  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Значит,  $x_0$  — нестрогий локальный максимум.

Аналогично доказываются остальные случаи. □

**Теорема 5.24.** (Достаточное условие экстремума в терминах высших производных) Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . При этом  $f^{(i)}(x_0) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Тогда если  $n$  нечетно, то  $x_0$  не является точкой экстремума, если  $n$  четно и  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  — строгий локальный минимум, если  $n$  четно и  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  — строгий локальный максимум.

*Доказательство.* Так как  $\exists f^{(n)}(x_0)$ , то по [теореме Тейлора с остаточным членом в форме Пеано](#)  $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ .

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x), \text{ где } \varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0.$$

Если  $n$  четно и  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Leftrightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) > 0$  и  $(x - x_0)^n > 0$ . Следовательно,  $f(x) - f(x_0) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . Значит,  $x_0$  — строгий локальный минимум.



Аналогично рассматривается случай  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .

Если  $n$  нечетно, то знак правой части сохраниться в некоторой  $U_\delta(x_0)$ , но знак  $(x - x_0)^n$  меняется при переходе через  $x_0$ . Тогда и знак числителя тоже меняется при переходе через  $x_0$ . Значит,  $x_0$  не является точкой локального экстремума.  $\square$

**Примечание.** В теореме выше изложено лишь достаточное условие.

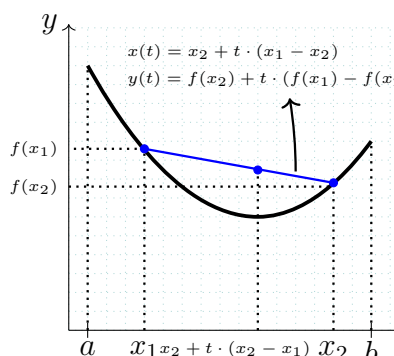
**Теорема 5.25.** (Необходимое условие экстремума в терминах второй производной) Пусть  $\exists f''(x_0)$ . Тогда если  $x_0$  — точка локального экстремума, то  $f'(x_0) = 0$  и, если  $x_0$  — локальный максимум,  $f''(x_0) \leq 0$ , а если локальный минимум, то  $f''(x_0) \geq 0$ .

*Доказательство.* То, что  $f'(x_0) = 0$ , следует из [теоремы Ферма](#).

Докажем утверждение для локального минимума. Предположим противное: пусть если  $x_0$  — локальный минимум, то  $f''(x_0) < 0$ . Но из этого условия по предыдущей теореме при производной порядка  $n = 2$  получаем, что  $x_0$  — строгий локальный максимум. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно и если  $x_0$  — локальный минимум, то  $f''(x_0) \geq 0$ .

Доказательство для локального максимума аналогично.  $\square$

## Выпуклости и точки перегиба



**Определение 5.16.** Функция  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  называется нестрого выпуклой вниз (вверх) на  $(a, b)$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \Leftrightarrow f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) (\leq) t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \quad \forall t \in [0, 1]$$

**Определение 5.17.** Функция  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  называется строго выпуклой вниз (вверх) на  $(a, b)$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \Leftrightarrow f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) (<) t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \quad \forall t \in (0, 1)$$

**Примечание.** Выпуклые вверх функции иногда называют *вогнутыми*

**Задача.** Доказать, что если  $f$  выпукла вверх (вниз) на  $(a, b)$ , то она непрерывна на  $(a, b)$

**Теорема 5.26.** Пусть  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  дважды дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда

1.  $f$  выпукла вниз на  $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
2.  $f$  выпукла вверх на  $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

*Доказательство.* Докажем пункт 1., так как пункт 2. аналогичен.

Шаг 1. Пусть  $f$  выпукла вниз. Фиксируем  $x_0 \in (a, b)$ . Введем  $u \in (0, \min\{x_0 - a, b - x_0\})$ ,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - u \\ x_2 &= x_0 + u \end{aligned} \Rightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Разложим функцию  $f$  по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)(-u) + \frac{f''(x_0) \cdot u^2}{2} + o(u^2), u \rightarrow 0 \\ f(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)(u) + \frac{f''(x_0) \cdot u^2}{2} + o(u^2), u \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Используем условие выпуклости при  $t = \frac{1}{2}$ :

$$f(x_0) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{2f(x_0) + f''(x_0) + o(u^2)}{2} = f(x_0) + f''(x_0) \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$f(x_0) \leq f(x_0) + f''(x_0) \frac{u^2}{2} + o(u^2) \Rightarrow f''(x_0) \frac{u^2}{2} + o(u^2) \geq 0 \Rightarrow \frac{f''(x_0)}{2} + o(1)$$

Переходя к пределу в неравенстве получим  $f''(x_0) \geq 0$

Шаг 2. Пусть наоборот  $f''(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ . Покажем, что  $f$  выпукла вниз на  $(a, b)$ .

Фиксируем произвольные точки  $x_1, x_2 \in (a, b)$  и  $t \in (0, 1)$ . Покажем, что выполняется

$$f(\underbrace{t \cdot x_1(1-t) \cdot x_2}_{x_0}) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$$

Воспользуемся [формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа](#):

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x_0)^2, \quad \xi_1 \in (x_1, x_0)$$

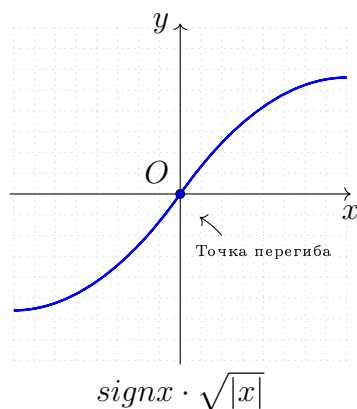
$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - x_0)^2, \quad \xi_2 \in (x_0, x_2)$$

Так как  $\frac{f''(\xi_1)}{2!} \geq 0$  и  $\frac{f''(\xi_2)}{2!} \geq 0$ , то  $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$  Следовательно,  
 $f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$ .

$$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \geq t \cdot f(x_0) + (1-t) \cdot f(x_0) + t \cdot f'(x_0)(x_1 - x_0) + (1-t) \cdot f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

$$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0) \underbrace{\left( t \cdot (x_1 - x_0) + (1-t) \cdot (x_2 - x_0) \right)}_0 = f(x_0)$$

Так как  $t \in (0, 1)$  и точки  $x_1, x_2$  выбраны произвольно, то теорема доказана.  $\square$



**Определение 5.18.** Пусть  $f \in C((a, b))$  и

$\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть выполняется одно из двух условий:

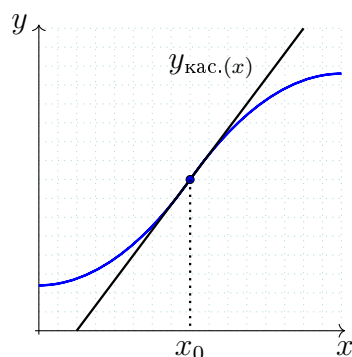
1.  $f$  выпукла вниз на  $U_\delta^-(x_0)$  и выпукла вверх на  $U_\delta^+(x_0)$
2.  $f$  выпукла вверх на  $U_\delta^-(x_0)$  и выпукла вниз на  $U_\delta^+(x_0)$

Тогда  $x_0$  называется *точкой перегиба графика функции  $f$*

**Теорема 5.27.** (Критерий точки перегиба) Пусть  $f \in C(U_\delta(x_0))$  и  $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f$  дважды дифференцируема в  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . Тогда  $x_0$  — точка перегиба графика функции  $f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) \geq 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ и } f''(x) \leq 0 \forall (x_0, x_0 + \delta) \\ f''(x) \leq 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ и } f''(x) \geq 0 \forall (x_0, x_0 + \delta) \end{cases}$$

*Доказательство.* Доказательство состоит в применении определения и критерия выпуклости.  $\square$



**Определение 5.19.** Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Будем говорить что, график функции  $f$  переходит с одной стороны касательной на другую при переходе через точку  $x_0$ , если  $\exists \delta > 0$  :

$$\begin{cases} y_{\text{кас.}}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ и } y_{\text{кас.}}(x) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ y_{\text{кас.}}(x) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ и } y_{\text{кас.}}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases}$$

**Теорема 5.28.** Пусть  $f$  дважды дифференцируема в  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  и дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда если  $x_0$  — точка перегиба графика функции  $f$ , то график переходит с одной стороны касательной на другую.

Обратное неверно.

*Доказательство.* Пусть  $x_0$  — точка перегиба графика. Тогда в силу [критерия точки перегиба](#)  $\exists \delta > 0 : f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$  и  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$  (второй случай рассматривается аналогично).

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{y_{\text{кас.}}} + \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2}, \quad \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2} \leq 0 \Rightarrow$$

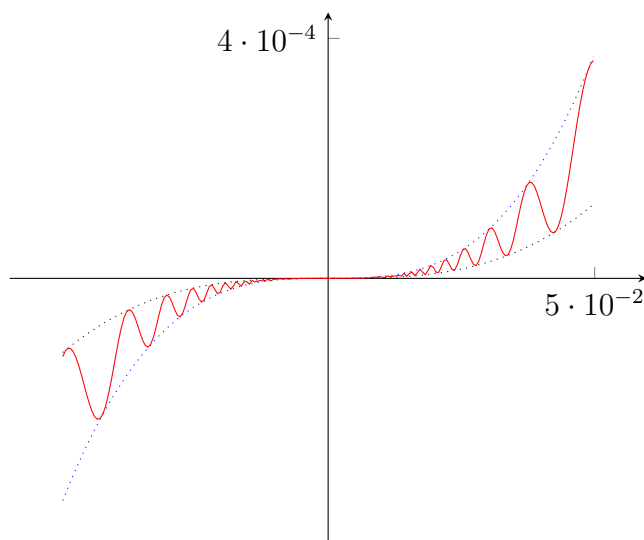
$$\Rightarrow f(x) \leq y_{\text{кас.}}(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{y_{\text{кас.}}} + \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2}, \quad \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \geq y_{\text{кас.}}(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Следовательно, график перешел с одной стороны касательной на другую.

Почему обратное неверно?

**Пример.**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = 0$$

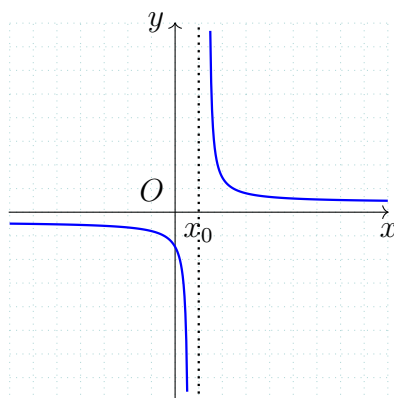
Горизонтальная касательная в точке 0:

$$y_{\text{кас.}} = 0$$

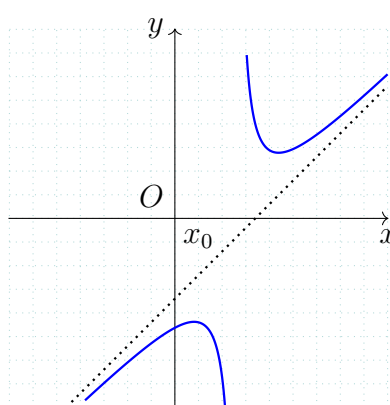
$$\begin{cases} f(x) > 0, & x > 0 \\ f(x) < 0, & x < 0 \end{cases}$$

Но точка 0 не является точкой перегиба графика  $f$ , так как  $f$  не обладает какой-либо выпуклостью в левой или правой полукрестности точки 0.

□

**Асимптоты**

Вертикальная асимптота



Наклонная асимптота

**Определение 5.20.** Будем говорить, что график функции  $f$  имеет *вертикальную асимптоту* в точке  $x_0$ , если

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \pm\infty \end{cases}$$

**Определение 5.21.** Прямая  $y = k \cdot x + b$ ,  $b, k \in \mathbb{R}$  называется *наклонной асимптотой* графика функции  $f: (A, \infty)$ , если  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ .

Аналогично определяется *наклонная асимптота* на  $-\infty$

**Теорема 5.29.** (Критерий асимптоты)

$$\text{Прямая } y = kx + b \text{ — асимптота функции } f: (A, +\infty) \Leftrightarrow (*) \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b \end{cases}$$

*Доказательство.* Шаг 1. Пусть  $y = kx + b$  — асимптота. Следовательно,

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) - b = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b \Rightarrow f(x) - kx = b + o(1), x \rightarrow +\infty$$

Разделив все на  $x$ , получаем

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{1}{x}o(1), x \rightarrow \infty.$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ .

Шаг 2. Пусть обратно выполнена (\*). Тогда  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$ . □

### План построения графика

1. Найти область определения.
2. Найти точки пересечения с осями координат.
3. Построить асимптоты, если они есть.
4. Нарисовать эскиз графика.
5. Найти  $f'(x)$ , точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.
6. Найти  $f''(x)$ , интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
7. Строим уточненный график.

## 6 Первообразная, неопределенный интеграл, полиномы, комплексные числа

**Определение 6.1.** Будем говорить, что  $f: (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  имеет *первообразную*  $F$  на  $(a, b)$ , если  $F$  — дифференцируема на  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b) F'(x) = f(x)$ .

**Примечание.** Бессмысленно считать первообразную в точке, мы всегда рассматриваем интервалы.

**Примечание.** Если  $f: (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  имеет устранимый разрыв или разрыв первого рода, то она не имеет на  $(a, b)$  первообразной (следствие из теоремы Лагранжа о среднем).

**Определение 6.2.** *Неопределенным интегралом* функции  $f$  на  $(a, b)$  будем называть множество всех первообразных на  $(a, b)$  и записывать  $\int f(x) dx$ .

**Лемма 6.1.** Пусть  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f(x) \equiv \text{const}$ .

*Доказательство.* 1. Если  $f(x) = t \forall x \in (a, b)$ , то  $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ .

2. Пусть  $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ . Рассмотрим произвольные  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , тогда по теореме Лагранжа  $\exists \xi \in (a, b): f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ . А так как  $x_1$  и  $x_2$  были выбраны из  $(a, b)$  произвольно, то  $f(x) = \text{const}$  на  $(a, b)$ . □

**Следствие.** Пусть  $F$  — первообразная  $f$  на  $(a, b)$ . Тогда  $\int f(x) dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — две различные первообразные  $f$ . Тогда  $F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$  по лемме 2.1  $F_1 - F_2 = \text{const} \Rightarrow$  первообразные отличаются только на  $C \in \mathbb{R}$ . □

## 6.1 Свойства неопределенного интеграла

### 1. Линейность

**Теорема 6.1.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a < b$  и существуют первообразные для  $f_1$  на  $(a, b)$  и  $f_2$  на  $(a, b)$ . Тогда если  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ :  $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ , то существует первообразная для  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$  и более того  $\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx$ .

*Доказательство.* Пусть  $F_1$  — первообразная для  $f_1$ , а  $F_2$  — первообразная для  $f_2$ . Тогда  $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$  — первообразная для  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$  (так как производные обладают свойством линейности), можно убедиться в этом, взяв производную  $\Rightarrow \int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) dx = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + C$ . С другой стороны  $\alpha_1 \int f_1(x) dx = \alpha_1 F_1(x) + C_1$  и  $\alpha_2 \int f_2(x) dx = \alpha_2 F_2(x) + C_2$ , сложив это, получим  $\alpha_1 F_1(x) + C_1 + \alpha_2 F_2(x) + C_2$ , что равно  $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + C$ , так как что  $C_1 + C_2$ , что  $C$  «пробегают» все вещественные числа.

**Примечание.** Равенство надо понимать, как равенство семейств функций, то есть семейства совпадают.  $\square$

**Примечание.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arcsin x + C \text{ или же } \arccos x + C$$

но это не значит, что  $-\arcsin x = \arccos x$ . Это значит, что данные семейства равны (константы не равны).

### 2. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

**Теорема 6.2.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a < b$  и  $f$  имеет первообразную  $F$  на  $(a, b)$ . Пусть  $x: (\alpha, \beta) \mapsto (a, b)$  дифференцируема на  $(\alpha, \beta)$ . Тогда  $\int f(x(t))x'(t) dt = \int f(x(t)) dx(t) = F(x(t)) + C$ .

*Доказательство.* По теореме о дифференцировании композиции функций получается  $F(x(t))' = F'(x(t))x'(t) \forall t \in (\alpha, \beta)$ . Тогда отсюда и из [структуры множества первообразных](#) получаем искомое.  $\square$

### 3. Интегрирование по частям

**Теорема 6.3.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a < b$  и  $U, V$  дифференцируемы на  $(a, b)$ . Тогда выполняется  $\int U(x) dV(x) = U(x) \cdot V(x) - \int V(x) dU(x)$ , где  $dV(x) = V'(x)dx$ ,  $dU(x) = U'(x)dx$ .

*Доказательство.* Так как  $U, V$  дифференцируемы на  $(a, b)$ , то  $\exists (UV)'(x) = U'(x)V(x) + V'(x)U(x)$  по формуле Лейбница, откуда в силу линейности интеграла  $\int (UV)' dx = \int U'(x)V(x) dx + \int V'(x)U(x) dx \Rightarrow \int U(x)V'(x) dx = U(x)V(x) + C - \int U'(x)V(x) dx = U(x)V(x) - \int U'(x)V(x) dx$ , где равенство понимается с точки зрения семейства функций.  $\square$

### Стандартные интегралы

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C, |x| < 1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C, x^2 + a > 0$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln |x+a| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C, x \neq 0$$

$$\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccot} x + C$$

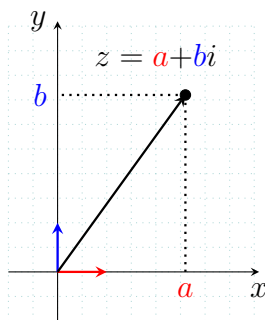
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos} x + C, |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq \pm a$$

## 6.2 Комплексные числа

**Определение 6.3.**  $\mathbb{C}$  — множество пар вещественных чисел  $(x_1, x_2)$  с введёнными следующим образом операциями:

1.  $(x_1, x_2) \pm (y_1, y_2) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2), \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{C};$
2.  $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R};$
3.  $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2), \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{C};$
4.  $\forall z \neq 0 \exists! \frac{1}{z}: z \cdot \frac{1}{z} = 1.$



Также  $(1, 0) \equiv 1, i := (0, 1)$ . Действительной частью назовём  $x_1$  и будем обозначать  $\operatorname{Re} z$ , мнимой —  $x_2$  и будем обозначать  $\operatorname{Im} z$ .

- Свойства комплексных чисел:
1.  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
  2.  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
  3.  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
  4.  $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
  5.  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Если ввести на плоскости полярные координаты, то любой ненулевой вектор можно представить как  $z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , где  $r$  — модуль вектора,  $\varphi$  — аргумент. То есть мы можем ввести *тригонометрическую форму записи комплексного числа* —  $z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$ , где  $\varphi$  определено с точностью до  $2\pi$ .

**Определение 6.4.** Пусть  $z = x + iy$ . Тогда  $e^z := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$ .

**Следствие.**  $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$  — формула Эйлера. Как следствие  $z = re^{i\varphi} \forall z \in \mathbb{C}$ .

Свойства экспоненты комплексного числа:  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Пусть  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ .

Тогда  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = (e^{x_1} \cdot e^{x_2}) \cdot (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot (\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{x_1+x_2} \cdot (\cos y_1 + y_2 + i \sin y_1 + y_2) = e^{z_1+z_2}$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , то  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ , а  $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ .

*Доказательство.* Достаточно записать числа в экспоненциальном виде и воспользоваться свойством, которое мы доказали ранее  $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 \cdot r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 \cdot r_2$ , а  $\arg z_1 \cdot z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \varphi_1 + \varphi_2$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$ . Тогда  $\exists! z = \frac{z_1}{z_2}$ , при этом  $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , а  $\arg z = \arg z_1 - \arg z_2$ .

*Доказательство.* Представим исходную дробь как  $z \cdot z_2 = z_1$ . Пусть  $z = re^{i\varphi}, z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ . По правилам, выведенным ранее, получим  $(r \cdot r_2) e^{i(\varphi+\varphi_2)} = r_1 e^{i\varphi_1} \Rightarrow r = \frac{r_1}{r_2}$ , а  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .  $\square$

**Определение 6.5.** Пусть  $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$ . Тогда его комплексно сопряженным числом назовем  $\bar{z} := a - bi$ .

$$1. \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2;$$

$$2. \overline{\bar{z}} = z;$$

Свойства комплексных сопряжений:  $3. \overline{z^n} = (\bar{z})^n;$

$$4. z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z;$$

$$5. z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z.$$

## 6.3 Полиномы

**Определение 6.6.** Комплексным полиномом  $n$ -ой степени назовём  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ , притом  $\alpha_k \in \mathbb{C} \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Утверждение 6.1.** Следующие условия эквивалентны:

$$1. P_n(z) = Q_n(z) \forall z \in \mathbb{C};$$

$$2. P_n(x) = Q_n(x) \forall x \in \mathbb{R};$$

$$3. a_k = b_k \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

*Доказательство.* (1)  $\Rightarrow$  (2), (3)  $\Rightarrow$  (1) очевидно.

Докажем (2)  $\Rightarrow$  (3). Имеем  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, Q_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ , подставим  $x = 0$ , тогда  $a_0 = b_0$ , тогда вычитая один полином из другого и деля на  $x$ , получим  $a_1 = b_1$  и так далее. Итого  $a_k = b_k \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .  $\square$

**Определение 6.7.** Алгебраической дробью назовём  $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ . Притом, если  $n \geq m$ , то дробь называется неправильной, иначе правильной.



**Теорема 6.4.** Для любых полиномов  $P_n(z)$  и  $Q_m(z)$ :  $n \geq m$ ,  $\exists! D_{n-m}(z)$  и  $R(z)$ :  $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = D_{n-m}(z) + \frac{R(z)}{Q_m(z)}$ , где  $\deg R(z) < m$ .

*Доказательство.* Пусть  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ,  $Q_m(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$ . Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов для поиска  $D_{n-m}(z)$ . Приведём к общему знаменателю, то есть умножим на  $Q_m(z)$ , получим  $P_n(z) = D_{n-m}(z)Q_m(z) + R(z)$ . Запишем  $D_{n-m}(z)$  в виде  $\sum_{k=0}^{n-m} d_k z^k$ , тогда имеем  $\sum_{k=0}^n a_k z^k = \sum_{k=0}^{n-m} d_k z^k \cdot \sum_{j=0}^m b_j z^j + R(z)$  младшие члены, так как степень  $R(z)$  меньше, чем  $n-m$ . А так как [полиномы равны](#), то  $a_n = d_{n-m} \cdot b_m \Rightarrow d_{n-m} = \frac{a_n}{b_m}$  однозначно. Рассмотрим разность  $P_n(z) - d_{n-m} z^{n-m} \cdot Q_m(z) = \tilde{P}(z)$ , так как от  $n$ -ой степени мы уже избавились, то степень  $\tilde{P}(z)$  не выше  $n-1$ . Итого имеем  $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = d_{n-m} z^{n-m} + \frac{\tilde{P}(z)}{Q_m(z)}$ , пока степень  $\tilde{P} > Q_m$ , то продолжаем по индукции с  $\tilde{P}(z)$ . Получаем, что требовалось.  $\square$

**Теорема 6.5.** (Теорема Безу) Число  $z_0$  является корнем полинома  $P_n(z) \Leftrightarrow P_n(z)$  делится на  $(z - z_0)$  без остатка.

*Доказательство.* В силу только что доказанной [теоремы](#)  $\frac{P_n(z)}{z - z_0} = P_{n-1}(z) + \frac{C_0}{z - z_0} \Leftrightarrow P_n(z) = P_{n-1}(z)(z - z_0) + C_0$ , а так как  $z_0$  корень, то  $P_n(z_0) = 0 = C_0$ , а значит есть деление без остатка.  $\square$

**Теорема 6.6.** (Основная теорема алгебры) Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда любой полином  $P_n(z)$  имеет хотя бы один комплексный корень.

**Следствие.** Любой полином  $P_n(z) = a \prod_{k=1}^n (z - z_k)$  (без учёта кратности).

*Доказательство.* По [основной теореме алгебры](#)  $P_n(z)$  имеет корень  $z_1$ , тогда в силу [теоремы Безу](#) можно поделить  $P_n(z)$  на  $(z - z_1)$  без остатка, то есть  $P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$ . Продолжая по индукции, получаем разложение многочлена на множители.  $\square$

Далее до конца главы коэффициенты подразумеваются вещественные.

**Определение 6.8.** Пусть  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ,  $a_k \in \mathbb{R} \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Тогда  $\overline{P_n(z)} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{z^k} = \sum_{k=0}^n a_k (\overline{z})^k = P_n(\overline{z})$ .

**Определение 6.9.** Будем говорить, что  $z_0$  — корень кратности  $k$  ( $k \leq n$ ) полинома  $P_n(z)$ , если  $P_n(z) = (z - z_0)^k \cdot Q(z)$ , где  $Q(z)$  не имеет в качестве корня  $z_0$ .

**Теорема 6.7.** Пусть  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ,  $a_k \in \mathbb{R} \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$  и  $z_0$  — корень кратности  $k \leq n$ . Тогда  $\overline{z_0}$  — корень кратности  $k$ .

*Доказательство.* Так как  $z_0$  — корень кратности  $k$ , то  $P_n(z) = (z - z_0)^k \cdot Q(z)$ . Тогда  $\overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k \cdot Q(z)}$ , но так как  $\overline{P_n(z)} = P_n(\bar{z})$ , то получаем  $P_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \cdot Q(\bar{z}) \Rightarrow P_n(z) = (z - \bar{z}_0)^k \cdot \overline{Q(\bar{z})}$ , откуда получаем, что  $\bar{z}_0$  — корень кратности  $k$ .

*Примечание.* Необходимо также убедиться, что  $Q(\bar{z})$ . Пусть  $Q_1(z) = \overline{Q(\bar{z})}$ . Тогда  $Q_1(\bar{z}_0) = \overline{Q(\bar{z}_0)} = \overline{Q(z_0)} \neq 0$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ,  $a_k \in \mathbb{R} \ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Тогда  $P_n(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$ ,  $n = k_1 + \dots + k_s + l_1 + \dots + l_t$ , где  $\forall i \in \{1, 2, \dots, t\} \hookrightarrow p_i^2 - 4q_i < 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $P_n(z) = a(z - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - x_s)^{k_s} \cdot (z - z_1)^{l_1} \cdot (z - \bar{z}_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (z - z_t)^{l_t} \cdot (z - \bar{z}_t)^{l_t}$ , где  $x_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Раскроем все полиномы  $(z - z_i)(z - \bar{z}_i) \ \forall i \in \{1, 2, \dots, t\}$ , получим  $z^2 - (z_i + \bar{z}_i)z + z_i \bar{z}_i$ , тогда  $p_i^2 - 4q_i = (z_i + \bar{z}_i)^2 - 4z_i \bar{z}_i = (z_i - \bar{z}_i)^2 = (2i \cdot \text{Im} z_i)^2 = -4(\text{Im} z_i)^2$ , что меньше нуля.  $\square$

**Теорема 6.8.** Пусть  $P(x)$ ,  $Q(x)$  — полиномы с вещественными коэффициентами,  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  — правильная дробь и  $x_0$  — корень кратности  $k$  знаменателя, то есть  $Q(x) = (x - x_0)^k \cdot \tilde{Q}(x)$ , где  $\tilde{Q}(x_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists! A \in \mathbb{R}$ ,  $F(x): \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - x_0)^k} + \frac{F(x)}{(x - x_0)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$ , где  $\deg F(x) < \deg \tilde{Q}(x) + k - 1$ .

*Доказательство.* Равенство теоремы равносильно  $P(x) = A \cdot \tilde{Q}(x) + F(x) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow P(x) - A \cdot \tilde{Q}(x) = F(x) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$  левая часть делится на  $(x - x_0)$  без остатка, следовательно по [теореме Безу](#)  $P(x_0) - A \cdot \tilde{Q}(x_0) = 0$ , а так как  $\tilde{Q}(x_0) \neq 0$ , то  $A = \frac{P(x_0)}{\tilde{Q}(x_0)}$  — однозначно,

откуда однозначно определяется  $F(x) = \frac{P(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)}{x - x_0}$ . Получаем  $\deg P(x) - A \cdot \tilde{Q}(x) < \deg Q(x) \Rightarrow \deg F(x) < \deg Q(x) - 1 = \deg \tilde{Q}(x) + k - 1$ .  $\square$

**Теорема 6.9.** Пусть  $P$  и  $Q$  — полиномы с вещественными коэффициентами,  $\frac{P}{Q}$  — правильная дробь и  $z_0 \in \mathbb{C}$  ( $\text{Im} z_0 \neq 0$ ) — корень кратности  $k$ . Тогда  $\exists! B, C \in \mathbb{R}$  и полином  $F: \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + p_0x + q_0)^k} + \frac{F(x)}{(x^2 + p_0x + q_0)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$ , где  $\tilde{Q}(x)$  определяется из  $Q(x) = (x^2 + p_0x + q_0)^k \cdot \tilde{Q}(x)$ , при этом второе слагаемое — правильная дробь.

*Доказательство.* Равенство теоремы равносильно  $P(x) = (Bx + C) \cdot \tilde{Q}(x) + F(x)(x^2 + p_0x + q_0) \Leftrightarrow P(x) - (Bx + C) \cdot \tilde{Q}(x) = F(x)(x^2 + p_0x + q_0) \Leftrightarrow P(x) - (Bx + C) \cdot \tilde{Q}(x)$  делится без остатка на  $(x - z_0)$ , что по [теореме Безу](#) равносильно  $P(z_0) - (Bz_0 + C) \cdot \tilde{Q}(z_0) = 0$ , но  $\tilde{Q}(z_0) \neq 0$ , тогда

$Bz_0 + C = \frac{P(z_0)}{\tilde{Q}(z_0)} = x_1 + y_1 i$ . Пусть  $z_0 = x_0 + y_0 i$ . Тогда  $Bx_0 + By_0 i + C = x_1 + y_1 i \Rightarrow Bx_0 + C = x_1$

и  $By_0 = y_1$ . А так как  $\text{Im} z_0 \neq 0$ , то  $B = \frac{y_1}{y_0} \Rightarrow C = x_1 - \frac{y_1}{y_0} \cdot x_0$ , то есть мы однозначно нашли коэффициенты, а тогда полином  $F$  тоже строится однозначно.

То, что второе слагаемое правильная дробь доказывается аналогично [предыдущей теореме](#).  $\square$

**Следствие.** Пусть  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  — правильная дробь и  $Q(x) = a(x-x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-x_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$ ,  $n = k_1 + \dots + k_s + l_1 + \dots + l_t$ , где  $\forall i \in \{1, 2, \dots, t\} \hookrightarrow p_i^2 - 4q_i < 0$ . Тогда  $R(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_j^i}{(x-x_i)^j} + \sum_{i'=1}^t \sum_{j'=1}^{l_{i'}} \frac{B_{j'}^{i'}x + C_{j'}^{i'}}{(x^2 + p_{i'}x + q_{i'})^{j'}}$ .

*Доказательство.* «Доказывается многократным повторением теорем, которые только что были» (с) Тюленев А.И.  $\square$

## 6.4 Интегрирование дробей

Алгоритм работы с дробями: если дробь неправильная, значит надо поделить её в столбик.

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^k} dx = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1.$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^k} dx = \ln|x-x_0| + C.$$

Научимся считать  $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}, \quad l \in \mathbb{R}.$

Вынесем  $\frac{B}{2}$ , получим  $\frac{B}{2} \int \frac{2x + \frac{2C}{B}}{(x^2+px+q)^l} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^l} dx + \left(C - \frac{B \cdot p}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2+px+q)^l} dx$

Первый интеграл берётся заменой  $t = x^2 + px + q$ , со вторым сложнее:

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^l} dx = \int \frac{1}{\left((x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})\right)^l} dx, \text{ так как } q - \frac{p^2}{4} > 0, \text{ то оно представимо}$$

в виде  $a^2$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$ , сделаем замену  $t = x + \frac{p}{2}$ . Получаем  $\int \frac{1}{(t^2+a^2)^l} dx$ .

Если  $l = 1$ , то искомый интеграл равен  $\frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C$ . Если  $l > 1$ , то будем интегрировать по частям. Обозначим  $I_l(t) = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^l} dt$ . Получаем  $\frac{t}{(t^2+a^2)^l} + l \cdot \int \frac{t \cdot 2t}{(t^2+a^2)^{l+1}} dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \cdot \int \frac{1}{(t^2+a^2)^l} dt - 2l \cdot a^2 \cdot \int \frac{1}{(t^2+a^2)^{l+1}} dx$ .

Итого получаем  $I_l(t) = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \cdot I_l(t) - 2l \cdot a^2 \cdot I_{l+1}(t)$ , то есть рекуррентное соотношение. Откуда  $I_{l+1}(t) = \left[ \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + (2l-1) \cdot I_l(t) \right] \cdot \frac{1}{2l \cdot a^2}$ .

- 1)  $\int R(x^{1/n}) dx$   
делается замена  $t = x^{1/n}$

2)  $\int R(x, ) dx$

3) Подстановки Чебышева  $\int ax^m(bx^n+c)^p dx$

**Теорема 6.10.**

COMING SOON.....

## 7 Линейные пространства (векторные пространства)

**Определение 7.1.**  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  — пространство строк длины  $n$  из вещественных чисел, то есть  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Примечание.** В литературе можно ещё встретить  $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$ .

**Определение 7.2.** Пусть  $E$  — множество, на котором введены операции (отображения):

$\langle + \rangle : E \times E \mapsto E$

удовлетворяющее следующим условиям:

$\langle \cdot \rangle : \mathbb{R} \times E \mapsto E$

1.  $a + b = b + a \quad \forall a, b \in E$
2.  $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in E$
3.  $\exists \bar{0} \in E: a + \bar{0} = a \quad \forall a \in E$
4.  $\exists -a \in E: a + (-a) = \bar{0} \quad \forall a \in E$
5.  $(\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in E$
6.  $1 \cdot a = a \quad 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in E$
7.  $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in E$
8.  $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in E$

то  $(E, +, \cdot)$  называется *вещественным векторным пространством* или *вещественным линейным пространством* или *линейным пространством над полем вещественных чисел* ( $\mathbb{R}$ ).

**Примечание.** Заменяя вещественные числа на комплексные, можно получить определение *комплексного линейного пространства* или *линейного пространства над  $\mathbb{C}$* .

**Примеры.** «Базовые» линейные пространства —  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ .

В  $\mathbb{R}^n$  введём операцию  $\langle + \rangle$  следующим образом:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ , а  $\langle \cdot \rangle$  так:  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ . Требуемым аксиомам  $\mathbb{R}^n$  очевидно удовлетворяет.

**Утверждение 7.1.** Элемент  $\bar{0}$  единственен.

*Доказательство.* Пусть  $\exists \bar{0}_1, \bar{0}_2: \bar{0}_1 \neq \bar{0}_2$ . Тогда по аксиомам 1 и 3 получаем  $\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_2 \Rightarrow \bar{0}_1 = \bar{0}_2$ , то есть исходное предположение было неверно и  $\bar{0}$  единственен.  $\square$

**Утверждение 7.2.**  $\forall a \in E$  элемент  $-a$  единственен.

*Доказательство.* Пусть  $\exists -a_1$  и  $-a_2 \in E: a + (-a_1) = 0$  и  $a + (-a_2) = 0$ . Тогда  $-a_1 = -a_1 + 0 = -a_1 + a + (-a_2) = 0 + (-a_2) = -a_2 \Rightarrow -a_1 = -a_2$ , то есть исходное предположение было неверно и  $-a$  единственно.  $\square$

**Утверждение 7.3.**  $0 \cdot a = \bar{0}, \forall a \in E$ .

*Доказательство.*  $0 \cdot a = (0 \cdot a) + \bar{0} = (0 \cdot a) + a + (-a) = (0 + 1) \cdot a + (-a) = a + (-a) = \bar{0}$ .  $\square$

Линейные пространства — это не только  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{C}^n$ .

**Примеры.** Пусть  $E = \{P(x): x \in \mathbb{R}\}$ , то есть пространства всех полиномов  $P(x)$ . Это будет вещественным векторным пространством, так как удовлетворяет всем аксиомам. Также  $F = \{P(z): z \in \mathbb{C}\}$  — комплексное векторное пространство.

**Примечание.** Эти примеры интересны тем, что они «бесконечномерны», но об этом позже.

## 7.1 Нормированное пространство

**Определение 7.3.** *Линейное нормированное пространство (ЛНП)* — это пара  $(E, \|\cdot\|)$ , где  $E$  — вещественное линейное пространство, а  $\|\cdot\|: E \mapsto [0; +\infty)$  — отображение, удовлетворя-

- ющее свойствам (назовём это нормой):
1.  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$
  2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
  3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$

**Пример.** В  $\mathbb{R}^n$   $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$  и  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ . Проверка, почему эти нормы удовлетворяют свойствам, очевидна.

**Примечание.**  $\forall p \in (1; +\infty)$   $\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ , но эту формулу тяжелее доказать.

**Пример.**  $C([a, b])$  — линейное пространство всех непрерывных на  $[a, b]$  функций, будем рассматривать его как вещественное линейное пространство ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

Пусть  $f_1 \in C([a, b])$ ,  $f_2 \in C([a, b])$ . Тогда  $\begin{cases} (f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x) \quad \forall x \in [a, b] \\ (\alpha f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b] \end{cases}$  —

определение операций над функциями из  $C([a, b])$ . Заметим, что данные операции корректно введены, так как сумма двух непрерывных функций — непрерывная функция и произведение числа на непрерывную функцию — непрерывная функция.

Таким образом мы наделяем множество непрерывных на  $[a, b]$  функций структурой линейного пространства.

Также введём норму в  $C([a, b])$ :  $\|f\|_{C([a, b])} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . Заметим, что  $\max$  непрерывной на отрезке функции достигается. Проверим аксиомы нормы:

1.  $\|f\|_{C([a, b])} \geq 0$  очевидно;  $\|f\|_{C([a, b])} = 0 \Leftrightarrow \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ ;
2.  $\|\alpha f\|_{C([a, b])} = \max_{x \in [a, b]} |\alpha f(x)| = |\alpha| \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = |\alpha| \|f\|_{C([a, b])}$ ;
3.  $\|f_1 + f_2\|_{C([a, b])} = \max_{x \in [a, b]} |f_1(x) + f_2(x)| = |f_1(x^*) + f_2(x^*)| \leq |f_1(x^*)| + |f_2(x^*)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_1(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f_2(x)| = \|f_1\|_{C([a, b])} + \|f_2\|_{C([a, b])}$ .

**Замечание:**  $x^*$  — точка отрезка в которой достигается максимум (в силу непрерывности на отрезке).

## 7.2 Метрическое пространство

**Определение 7.4.** Пара  $(X, \rho)$  — *метрическое пространство (МП)*, где  $X$  — абстрактное множество,  $X \neq \emptyset$ , а  $\rho: X \times X \mapsto [0; +\infty)$ , удовлетворяющее следующим аксиомам:

1.  $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
2.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
3.  $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$
4.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

**Определение 7.5.** Пусть  $(X, \rho)$  метрическое пространство. *Открытым шаром* с центром в точке  $x \in X$  и радиуса  $r \geq 0$  называется множество  $B_r(x) := \{y \in X: \rho(x, y) < r\}$ ,  $\bar{B}_r(x) := \{y \in X: \rho(x, y) \leq r\}$  — «замкнутый» шар, а  $\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$  — проколотый шар.

**Примеры.**

1.  $X = \mathbb{R}$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ ;
2.  $X = \mathbb{Q}$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ ;
3.  $X = [0; 1]$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ ;
4.  $X = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ ;
5.  $X = \mathbb{R}$ ,  $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$ ;
6. Любое линейно нормированное пространство  $(E, |||)$  становится метрическим пространством, если  $\rho(x, y) := ||x - y||$ .

**Примечание.** Если  $(X, \rho)$  — метрическое пространство, тогда  $X' \subset X$  — непустое множество,  $X'$  само становится метрическим пространством если сузить метрику  $\rho$  на него.

**Задача.** Может ли в метрическом пространстве шар меньшего радиуса внутри себя строго содержать шар большего радиуса?

*Решение.* Да, может. Возьмём  $X = [0; 1]$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ , а  $B_{\frac{3}{4}}(\frac{1}{2}) = [0; 1]$ ,  $B_{\frac{7}{8}}(1) = (\frac{1}{8}; 1]$  — все условия выполнены.

**Примечание.** Шар в метрическом пространстве не однозначно определяет центр и радиус: так в  $X = [0; 1]$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$  получается  $B_{\frac{3}{4}}(1) = B_2(1) = [0; 1]$ .

**Определение 7.6.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$ .  $x_0 \in X$  — точка прикосновения  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \emptyset$ .

**Определение 7.7.** Пусть  $(X, \rho)$  метрическое пространство,  $E \subset X$ .  $x_0 \in X$  — предельная точка  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathring{B}_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \emptyset$ .

**Определение 7.8.** Пусть  $(X_1, \rho_1)$ ,  $(X_2, \rho_2)$  метрические пространства,  $E \subset X_1$ ,  $f: E \mapsto X_2$ ,  $x_0 \in X_1$  — предельная точка  $E$ . Будем говорить, что  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = y_0 \in X_2$  по Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (\mathring{B}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E) \hookrightarrow f(x) \in B_\varepsilon(y_0).$$

**Определение 7.9.** Пусть  $(X_1, \rho_1)$ ,  $(X_2, \rho_2)$  метрические пространства,  $E \subset X_1$ ,  $f: E \mapsto X_2$ ,  $x_0 \in X_1$  — предельная точка  $E$ . Будем говорить, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \in X_2$  по Гейне, если

$$\forall \text{ последовательности Гейне } \{x_n\} \subset E \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0.$$

**Примечание.** Определение последовательности Гейне в точке  $x_0$  остается тем же, за тем исключением, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in B_\varepsilon(x_0) \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$ .

**Определение 7.10.** Пусть  $(X_1, \rho_1)$ ,  $(X_2, \rho_2)$  метрические пространства,  $E \subset X_1$ ,  $E \neq \emptyset$ ,  $f: E \mapsto X_2$ ,  $x_0 \in E$ . Будем говорить, что  $f$  непрерывно в точке  $x_0$ , если:

1.  $x_0$  — изолированная точка  $E$ , то есть  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap E = \emptyset$ ;
2.  $x_0$  — предельная точка  $E$ , то есть  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0)$ .

**Определение 7.11.** Пусть  $(X_1, \rho_1)$ ,  $(X_2, \rho_2)$  метрические пространства,  $E \subset X_1$ ,  $E \neq \emptyset$ . Отображение  $f: E \mapsto X_2$  называется непрерывным на  $E$ , если оно непрерывно в каждой точке множества  $E$ .

### 7.3 Равномерная непрерывность

**Определение 7.12.** Пусть  $(X_1, \rho_1)$ ,  $(X_2, \rho_2)$  метрические пространства,  $E \subset X_1$ ,  $E \neq \emptyset$ . Будем говорить, что отображение  $f: E \mapsto X_2$  *равномерно непрерывно* на  $E$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in E \quad \rho_1(x', x'') < \delta(\varepsilon) \hookrightarrow \rho_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

**Задача.** Как связаны условия?

1.  $f \in C(E)$ ;
2.  $f$  равномерно непрерывна на  $E$ .

*Решение.* Запишем в кванторах первое утверждение:

$$\forall x' \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x', \varepsilon) > 0 : \forall x'' \in E \quad \rho_1(x', x'') < \delta(x', \varepsilon) \hookrightarrow \rho_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Отсюда видно, что из (2)  $\Rightarrow$  (1), так как  $\forall x' \in E$  возьмём  $\delta(x', \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$  из равномерной непрерывности, но из (1)  $\nRightarrow$  (2). В качестве примера возьмём  $X_1 = \mathbb{R}$ ,  $X_2 = \mathbb{R}$ ,  $\rho_1 = |x_1 - y_1|$ ,  $\rho_2 = |x_2 - y_2|$ , где  $x_1, y_1 \in X_1$ ,  $x_2, y_2 \in X_2$  (обычные расстояния на  $\mathbb{R}$ ). Отображение  $f(x) = x^2$  — непрерывно в каждой точке числовой прямой, но равномерно непрерывно оно не будет. **Нужна КартинОчка**

Сформулируем отрицание к равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x', x'' \in \mathbb{R} : |x' - x''| < \delta, \quad |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon, \quad \text{то есть } |(x')^2 - (x'')^2| \geq \varepsilon,$$

$$(x')^2 - (x'')^2 = (x' - x'')(x' + x'').$$

$$\exists \varepsilon = 1 : \forall \delta > 0 \exists x' = \frac{2}{\delta}, x'' = \frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta} : |x' - x''| < \delta, \quad |(x')^2 - (x'')^2| \geq 1.$$

Значит равномерной непрерывности нет.

**Определение 7.13.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Множество  $K \subset X$  называется *компактом*, если  $\forall \{x_n\} \subset K \exists \{x_{n_j}\}$  — подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке  $x^* \in K$ .

**Примечание.** Критерий компактности, который мы ввели ранее, здесь не работает (компактность не эквивалентна ограниченности и замкнутости, но из компактности следует ограниченность и замкнутость).

**Определение 7.14.** Пустое множество  $\emptyset$  по определению считаем компактом.

**Теорема 7.1.** (Теорема Кантора) Пусть  $(X_1, \rho_1)$ ,  $(X_2, \rho_2)$  — метрические пространства,  $K \subset X_1$  — компакт и  $f: K \mapsto X_2$ . Если  $f$  непрерывно на  $K$ , то оно равномерно непрерывно на  $K$ .

*Доказательство.* Будем доказывать от противного. Пусть  $f \in C(K)$ , но не равномерно непрерывно на  $K$ . Сформулируем отрицание к равномерной непрерывности, то есть

$$\exists \varepsilon^* > 0 : \forall \delta > 0 \exists x', x'' \in K : \rho_1(x', x'') < \delta, \quad \rho_2(f(x'), f(x'')) \geq \varepsilon^*.$$

Раз  $\forall \delta$ , то возьмём  $\delta$  вида  $\frac{1}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x'_n, x''_n \in K : \begin{cases} \rho_1(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n} \\ \rho_2(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon^* \end{cases}$

Последовательность  $\{x'_n\} \subset K$ . Тогда по определению компактности  $\exists \{x'_{n_j}\} \subset K$  — подпоследовательность и  $\exists x^* \in K$ :  $\rho_1(x'_{n_j}, x^*) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$  (1), то есть сходится к  $x^*$ . Но  $f$  непрерывна к  $x^*$  по условию, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (B_{\delta(\varepsilon)}(x^*) \cap K) \hookrightarrow \rho_2(f(x^*), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x', x'' \in (B_{\delta(\varepsilon)} \cap K) \hookrightarrow \rho_2(f(x'), f(x'')) \leq \rho_2(f(x^*), f(x')) + \rho_2(f(x^*), f(x'')) < \varepsilon \quad (2).$$

Из (1) и с учетом того, что  $\rho_2(x''_{n_j}, x^*) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$  получается, что  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall j \geq N \hookrightarrow x'_{n_j}, x''_{n_j} \in B_{\delta(\varepsilon^*)}(x^*) \Rightarrow \rho_2(f(x'_{n_j}), f(x''_{n_j})) \geq \varepsilon^*, \forall j \geq N$ .

С другой стороны из (2)  $\forall j \geq N \hookrightarrow \rho_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon^*$ . Противоречие. То есть исходное предположение было неверно. **Нужна картиночка.**  $\square$

**Нужна картиночка.**

## 7.4 Евклидово пространство

**Определение 7.15.** (*Вещественное евклидово пространство*) Пусть  $E$  — линейное пространство, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \mapsto \mathbb{R}$  удовлетворяющее следующим условиям:

1.  $\langle x, x \rangle \in [0; +\infty)$   $\forall x \in E$
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$   $\forall x, y \in E$
4.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in E$

тогда  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  называется *евклидовым пространством* со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Определение 7.16.** *Комплексное евклидово пространство* — пара  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , где  $E$  — линейное пространство, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \mapsto \mathbb{C}$ , удовлетворяющее следующим условиям:

1.  $\langle x, x \rangle \in [0; +\infty)$   $\forall x \in E$
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$   $\forall x, y \in E$
4.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y, z \in E$

Далее будем работать с вещественными евклидовыми пространствами.

**Теорема 7.2.** (*Неравенство Коши-Буняковского-Шварца*) Пусть  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  — евклидово пространство. Тогда справедливо

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \forall x, y \in E.$$

*Доказательство.* Фиксируем  $x, y$  и рассмотрим  $\langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$  (по аксиомам скалярного произведения). Оно раскрывается как  $\langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим это как квадратный трехчлен относительно  $t$ , тогда дискриминант должен быть  $\leq 0$ , то есть  $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$ .  $\square$

**Пример.**  $\mathbb{R}^n$  становится евклидовым пространством, если ввести скалярное произведение следующим способом —  $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ . По определению проверяются все аксиомы.

Итого получаем следующее неравенство:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$



**Определение 7.17.** Определим *евклидову норму*, как  $\|x\|_e := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Теорема 7.3.** *Объект, который мы только что определили, действительно задает норму.*

*Доказательство.* Просто проверим аксиомы нормы:

1.  $\|x\|_e \geq 0 \ \forall x \in E$  — верно;
2.  $\|x\|_e = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  — верно;
3.  $\|\alpha x\|_e = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \langle x, x \rangle$  — верно;
4.  $\|x+y\|_e^2 = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle)^2$ ,  
то есть  $\|x+y\|_e \leq (\|x\|_e + \|y\|_e)^2$  — верно.

Итого получаем, что введённая нами норма удовлетворяет всем аксиомам нормы.  $\square$

**Тут нужна картинка**

**Определение 7.18.** Под  $\|x\|_2$  будем обозначать  $\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ .

**Задача.** Пусть  $(E, \|\cdot\|)$  — линейное нормированное пространство. Можно ли в  $E$  ввести скалярное произведение так, чтобы  $\|\cdot\|$  порождалось через скалярное произведение?

**Теорема 7.4.** (Критерий евклидовости) Пусть  $E = (E, \|\cdot\|)$ . Норма  $\|\cdot\|$  является евклидовой  $\Leftrightarrow$  выполнено тождество параллелограмма, то есть

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in E.$$

*Доказательство.* Шаг 1. Пусть  $\|\cdot\|$  — евклидова норма. Тогда

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Шаг 2. Пусть выполнено тождество параллелограмма. Предъявим скалярное произведение. Рассмотрим  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ , проверим, что выполнены аксиомы скалярного произведения. Покажем, что  $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ :

$$\langle x, z \rangle = \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2)$$

$$\langle y, z \rangle = \frac{1}{4}(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2)$$

$$\text{Сложив, получим } \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \quad (1).$$

Применим тождество параллелограмма:

$$\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2)$$

$$\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2)$$

Вычтем одно из другого и получим

$$\begin{aligned}
 (1) &= \frac{1}{8} (\|x + y + 2z\|^2 - \|x + y - 2z\|^2) = \\
 &= \frac{1}{8} \left( 4 \left\| \frac{x+y}{2} + z \right\|^2 - 4 \left\| \frac{x+y}{2} - z \right\|^2 \right) = 2 \cdot \frac{1}{4} \left( \left\| \frac{x+y}{2} + z \right\|^2 - \left\| \frac{x+y}{2} - z \right\|^2 \right) = \\
 &= 2 \langle \frac{x+y}{2}, z \rangle.
 \end{aligned}$$

Пока мы доказали, что  $\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 2 \langle \frac{x+y}{2}, z \rangle$ . Подставим  $y = 0$ . С учетом  $\langle 0, z \rangle = 0$  получим  $\langle x, z \rangle = 2 \langle \frac{x}{2}, z \rangle \forall x, z \in E$ . Подставляя это в ранее доказанное нами тождество, получим то, что требовалось, то есть  $\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = \langle x + y, z \rangle$ .

Имеем:

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \forall x, y \in E$  — очевидно;
2.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \forall x, y, z \in E$  — проверили только что;
3.  $\langle \frac{x}{2}, z \rangle = \frac{1}{2} \langle x, z \rangle \Leftrightarrow \langle \frac{m}{2^n} x, z \rangle = \frac{m}{2^n} \langle x, z \rangle \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$ ;
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  и  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \forall x \in E$  — очевидно по тому, как мы ввели скалярное произведение.

Так как  $f(\alpha) = \|\alpha x + y\|$  — непрерывна как функция от  $\alpha$  (так как  $|f(\alpha) - f(\beta)| = \|\alpha x + y - \beta x - y\| \leq |\alpha - \beta| \|x\| \rightarrow 0, \beta \rightarrow \alpha$ ), а так как любое иррациональное число является пределом последовательности двоично рациональных чисел, то (3) с помощью предела преобразуется в  $\langle \alpha x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, z \in E$ .

Итого теорема полностью доказана.  $\square$

**Утверждение 7.4.** Вспомним про [линейное пространство непрерывных на отрезке функций](#). Его норма  $\|f\|_C$  является неевклидовой, то есть не может быть порождена каким-либо скалярным произведением.

*Доказательство.* Без ограничения общности будем считать, что  $a = 0, b = 1$ , так как его всегда можно отмасштабировать к любому другому отрезку.

**Нужна картиночка**

Проверим тождество параллелограмма. Возьмём  $f_1(x) = x$ , а  $f_2(x) = 1 - x$ .  $2\|f_1\|^2 = 2$ ,  $2\|f_2\|^2 = 2$ ,  $\|f_1 + f_2\|^2 = 1$ ,  $\|f_1 - f_2\|^2 = 1$ , но так как  $4 \neq 2$  (подставляя значения в тождество параллелограмма) получаем, что норма не является евклидовой.  $\square$

## 7.5 Топология метрического пространства

**Определение 7.19.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$  — множество. Точка  $x_0 \in E$  называется *внутренней*, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset E.$$

**Определение 7.20.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$  — множество. *Внутренностью*  $E$  будем называть множество всех внутренних точек  $E$  и обозначать  $\text{int} E$ .

**Примечание.** Определения [точки прикосновения](#) и [предельной точки](#) уже были даны.

**Определение 7.21.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$  — множество. *Замыканием*  $E$  будем называть множество всех точек прикосновения и обозначать  $clE$  или  $\bar{E}$ .

**Утверждение 7.5.**  $intE \subset E \subset clE$ .

**Определение 7.22.** Множество  $E$  — открыто, если  $E \subset intE \Leftrightarrow E = intE$ .

**Определение 7.23.** Множество  $E$  — замкнуто, если  $clE \subset E \Leftrightarrow E = clE$ .

**Примечание.** Множества бывают и не открытые и не замкнутые, к примеру,  $\mathbb{Q}$  или  $(a; b]$  (полуинтервал).

**Определение 7.24.** Пустое множество  $\emptyset$  и  $X$  считаются и открытыми, и замкнутыми.

**Пример.** Бывают нетривиальные множества, которые и открыты, и замкнуты. Пусть  $X = [0; 1] \cap [2; 3]$ ,  $\rho = |x - y|$ . Тогда  $[0; 1]$  и  $[2; 3]$  — и открыты, и замкнуты.

**Нужна картинка.**

**Определение 7.25.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$  называется *топологически связным*, если его нельзя представить в виде непересекающегося (дизъюнктного) объединения двух и более множеств, которые одновременно и открыты, и замкнуты.

**Лемма 7.1.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда  $\forall x \in X, \forall r > 0 \Leftrightarrow B_r(x)$  — открытое множество.

*Доказательство.* По определению  $B_r(x) = \{y \in X: \rho(x, y) < r\}$ .

**Нужна картинка**

Пусть  $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(x, y) < r$ . Тогда  $\rho(x, y) < r$ . Пусть  $\delta = r - \rho(x, y) > 0$ . Докажем, что  $B_\delta(y) \subset B_r(x)$ :

Пусть  $z \in B_\delta(y)$   $\rho(y, z) < \delta$ . Тогда  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + \delta = \rho(x, y) + r - \rho(x, y) = r \Rightarrow \rho(x, z) < r \Rightarrow z \in B_r(x)$ , что и требовалось.  $\square$

**Утверждение 7.6.**  $E_1 \subset E_2 \Rightarrow intE_1 \subset intE_2$ .

**Теорема 7.5.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$ . Тогда

1.  $intE$  — открытое множество  $\Leftrightarrow int(intE) = intE$ ;
2.  $clE$  — замкнутое множество  $\Leftrightarrow cl(clE) = clE$ .

*Доказательство.* Шаг 1. Пусть  $x_0 \in intE \Rightarrow \exists B_r(x_0) \subset E \Rightarrow intB_r(x_0) \subset intE$ , а  $intB_r(x_0) = B_r(x_0)$  по только что доказанной [лемме](#)  $\Rightarrow intE$  — открытое множество.

Шаг 2. Пусть  $x_0$  — точка прикосновения  $clE$ . Покажем, что  $x_0 \in clE$ . Так как  $x_0$  — точка прикосновения, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x_0) \cap clE \neq \emptyset \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in clE : y \in (B_\varepsilon \cap clE).$$

Так как  $y$  — точка прикосновения  $E$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(y) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in E, y \in clE$ :

$$\begin{cases} \rho(x_0, y) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow \rho(x_0, z) \leq \rho(x_0, y) + \rho(y, z) < \varepsilon.$$

Таким образом  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in E: \rho(x_0, z) < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in clE$ , то есть любая точка прикосновения принадлежит этому же множеству  $\Rightarrow$  оно ( $clE$ ) замкнуто.

**Нужна картинка.**  $\square$

**Примечание.**  $\overline{B}_r(x)$  не всегда совпадает с замыканием открытого шара. Также стоит отметить, что происходит такая коллизия обозначений.

**Пример.** Пусть  $X = [0; 1] \cap \{2\}$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Возьмём  $B_1(1) = (0; 1]$ .  $\text{cl} B_1(1) = [0; 1]$ , но  $\overline{B}_1(1) = X$ , то есть замкнутый шар может быть «шире», чем замыкание открытого шара.

**Лемма 7.2.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда  $\forall E \subset X \hookrightarrow$

1.  $X \setminus \text{cl} E = \text{int}(X \setminus E)$ ;
2.  $X \setminus \text{int} E = \text{cl}(X \setminus E)$ .

*Доказательство.* Покажем (2), так как (1) аналогично.

$$\text{Пусть } x^* \in (X \setminus \text{int} E). \text{ Тогда } \begin{cases} x^* \in X \\ \neg(x^* \in \text{int} E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* \in X \\ \forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x^*) \not\subset E \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x^*) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset \Leftrightarrow x^* \text{ — точка прикосновения } X \setminus E \Leftrightarrow x^* \in \text{cl}(X \setminus E).$$

□

**Следствие.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда множество  $E$  замкнуто  $\Leftrightarrow (X \setminus E)$  открыто.

*Доказательство.* Так как  $E$  замкнуто, то оно совпадает со своим замыканием. В силу [предыдущей леммы](#)  $X \setminus E = X \setminus \text{cl} E = \text{int}(X \setminus E)$  —  $X \setminus E$  открыто. □

**Определение 7.26.** Пусть  $E$  — множество в метрическом пространстве. Тогда *границей множества* назовём  $\text{cl} E \setminus \text{int} E$  и будем обозначать  $\partial E$ .

**Лемма 7.3.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$ . Тогда  $x_0 \in \partial E \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \begin{cases} B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \emptyset \\ B_\varepsilon(x_0) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\text{Доказательство. Так как } x_0 \in \partial E, \text{ то по определению } \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \emptyset \\ \neg(\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset E) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \emptyset \\ \forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x_0) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset \end{cases}, \text{ что нам и нужно было.}$$

□

**Теорема 7.6.** (Критерий точки прикосновения)  $x_0$  — точка прикосновения множества  $E \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E: \rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Ровно [такое же](#), как и на числовой прямой. □

**Теорема 7.7.** (Критерий предельной точки)  $x_0$  — предельная точка множества  $E \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{cases}$$

*Доказательство.* Точно такое же, как и на числовой прямой.

**Я не смог его найти.**

□

**Задача.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Доказать, что  $\forall E \subset X \hookrightarrow E \cup \partial E = \text{cl} E, E \setminus \partial E = \text{int} E$ .

**Задача.** Верны ли следующие включения?

1.  $\text{int}(E_1 \cup E_2) \subset (\text{int}E_1 \cup \text{int}E_2)$ ;
2.  $(\text{int}E_1 \cup \text{int}E_2) \subset \text{int}(E_1 \cup E_2)$ ;
3.  $\text{cl}(E_1 \cup E_2) \subset (\text{cl}E_1 \cup \text{cl}E_2)$ ;
4.  $(\text{cl}E_1 \cup \text{cl}E_2) \subset \text{cl}(E_1 \cup E_2)$ ;
5.  $\partial(E_1 \cup E_2) \subset (\partial E_1 \cup \partial E_2)$ ;
6.  $(\partial E_1 \cup \partial E_2) \subset \partial(E_1 \cup E_2)$ .

**Пример.** Может быть так, что  $\partial E = \mathbb{R}$ , а  $\text{int}E = \emptyset$ . К примеру,  $E = \mathbb{Q}$ .

**Определение 7.27.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$ . Множество  $E$  называется *ограниченным*, если  $\exists B_R(x_0): E \subset B_R(x_0)$ .

**Определение 7.28.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$ . Множество  $E$  *вполне ограничено*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{конечное число точек } \{x_1, \dots, x_{N(\varepsilon)}\} : E \subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i).$$

**Примечание.** И эти точки называются  $\varepsilon$ -сетью для  $E$ .

**Лемма 7.4.** Если множество  $E$  — вполне ограничено, то  $E$  ограничено.

*Доказательство.* Так как  $E$  вполне ограничено, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  конечная  $\varepsilon$ -сеть. Значит и для  $\varepsilon = 1 \exists$  конечная 1-сеть  $\{x_1, \dots, x_N\}$ . Мы можем взять, к примеру,  $M = N + \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \rho(x_1, x_i)$ , тогда  $E \subset B_M(x_1)$  по неравенству треугольника  $\Rightarrow E$  ограничено.  $\square$

**Лемма 7.5.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство, а  $\{x_n\} \subset X$  сходится к  $x^* \in X$ . Тогда  $\{x_n\}$  фундаментальна.

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\} \rightarrow x^*$ ,  $n \rightarrow \infty$ , запишем это:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \rho(x_n, x^*) < \varepsilon.$$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N}(\varepsilon) = N(\frac{\varepsilon}{2}) : \forall n, m \geq \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x^*) + \rho(x^*, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .  $\square$

**Лемма 7.6.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$ . Если множество  $K$  — компакт, то  $K$  — вполне ограниченное множество.

*Доказательство.* Предположим противное. Будем считать, что  $K \neq \emptyset$ , так как пустое множество по определению компакт. Запишем отрицание к определению вполне ограниченного множества:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \text{конечное набора точек } \{x_1, \dots, x_{N(\varepsilon)}\} : E \not\subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i).$$

Пусть  $x_1 \in K$ . Возьмём  $B_\varepsilon(x_1)$ , он не покрывает  $K \Rightarrow \exists x_2 : x_2 \in (K \setminus B_\varepsilon(x_1))$ , но  $\{x_1, x_2\}$  тоже не  $\varepsilon$ -сеть  $\Rightarrow \exists x_3 \in (K \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)))$ . Так продолжим по индукции. Пусть таким образом мы построили точки  $x_1, \dots, x_n : K \setminus \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$ , тогда возьмём

$x_{n+1} \in \left( K \setminus \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) \right)$ , а  $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$  снова не  $\varepsilon$ -сеть. То есть мы построили последовательность  $\{x_n\} \subset K$ :  $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon \forall i \neq j \Rightarrow$  любая её подпоследовательность не является фундаментальной, а значит сходящейся, а значит  $K$  — не компакт. Противоречие.  $\square$

**Определение 7.29.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$  называется *полным*, если любая его фундаментальная последовательность сходится к некоторой точке этого пространства, в противном случае пространство называется *неполным*.

**Примеры.**

$X = \mathbb{R}$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$  — полное (критерий Коши мы доказывали ранее).

$X = \mathbb{Q}$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$  — неполное.

**Утверждение 7.7.** В любом метрическом пространстве любая сфера — замкнутое множество.

**Пример.** Множество, которое ограничено и замкнуто, но не является компактом:

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}, \quad \rho(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|.$$

Рассмотрим  $S_1(0) := \{x \in X : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = 1\}$ , то есть единичную сферу. Оно является ограниченным и замкнутым множеством, но не вполне ограниченным, а значит, не компактом.

Замечание. Для доказательства того, что множество не является вполне ограниченным рассмотрим  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , то есть все 0, кроме 1 на  $n$ -ом месте. Тогда  $\rho(e_n, e_m) = 1$ , то есть мы получили бесконечную систему, между которыми попарные расстояния равны 1  $\Rightarrow$  нет вполне ограниченности.

**Теорема 7.8.** (Гейне-Борель 2.0) Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$  — компакт. Тогда для любого открытого покрытия  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  компакта существует конечное подпокрытие  $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ .

*Доказательство.* Так как из компактности следует вполне ограниченность, то  $\forall n \in \mathbb{N} \exists$  конечная  $\frac{1}{n}$ -сеть, которую обозначим как  $\{z_n(1), \dots, z_n(N)\}$ .

Предположим, что существует открытое покрытие  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  из которого нельзя извлечь конечное подпокрытие. Тогда существует шар радиуса  $\frac{1}{n}$  в центре в какой-то точке  $\frac{1}{n}$ -сети, то есть  $\exists i \in \{1, \dots, N\}$ :  $B_{\frac{1}{n}}(z_n(i))$  нельзя покрыть конечным набором множеств из системы  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , так как в противном случае каждый шар  $B_{\frac{1}{n}}(z_n(i))$  покрывался бы конечным числом элементов из покрытия  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , а так как шаров конечное число и они покрывают  $K$ , то получили бы конечное подпокрытие  $K$ , а мы предположили, что его нет.

Получается,  $\forall n \in \mathbb{Z} \exists z_n \in K$ :  $B_{\frac{1}{n}}(z_n)$  не может быть покрыт конечным числом элементов из  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , получаем последовательность  $\{z_n\}$ , из неё, так как  $K$  компакт, можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $\{z_{n_m}\} \Rightarrow \exists z^* \in K$ :  $\rho(z_{n_m}, z^*) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ . Так как  $z^* \in K$ , а  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — покрытие, то  $\exists \alpha^* \in A$ :  $z^* \in U_{\alpha^*}$ , но  $U_{\alpha^*}$  открытое множество  $\Rightarrow \varepsilon^* > 0$ :  $B_{\varepsilon^*}(z^*) \subset U_{\alpha^*}$ .

Так как  $\{z_{n_m}\}$  сходится к  $z^*$ , то начиная с некоторого номера  $\rho(z_{n_m}, z^*)$  можно сделать меньше, чем  $\frac{\varepsilon^*}{4}$ . Запишем более формально:  $\exists M \in \mathbb{N}$ :  $\forall m \geq M \hookrightarrow \rho(z_{n_m}, z^*) < \frac{\varepsilon^*}{4}$  и  $\frac{1}{n_m} < \frac{\varepsilon^*}{4}$  по построению. Рассмотрим  $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$ . Заметим, что  $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset B_{\varepsilon^*}(z^*) \subset U_{\alpha^*} \Rightarrow \forall m \geq M \hookrightarrow B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset U_{\alpha^*}$  — противоречие с построением.

Замечание. Включение  $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset B_{\varepsilon^*}(z^*)$  верно по неравенству треугольника, то есть возьмём  $y \in B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$ , тогда  $\rho(z^*, y) \leq \rho(z^*, z_{n_m}) + \rho(z_{n_m}, y) < \frac{\varepsilon^*}{4} + \frac{1}{n_m} < \frac{\varepsilon^*}{4} + \frac{\varepsilon^*}{4} < \frac{\varepsilon^*}{2}$   $\square$

**Теорема 7.9.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Если  $K$  — компакт, то он ограничен и замкнут.

*Доказательство.* Ограниченность уже была доказана ранее. Докажем замкнутость. Будем доказывать от противного.

Предположим противное, то есть  $\exists x^* \notin K$  являющаяся его точкой прикосновения. Тогда по критерию точки прикосновения  $\exists \{x_n\} \subset K: \rho(x^*, x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow \forall \{x_{n_j}\}$  подпоследовательности последовательности  $\{x_n\}$  тоже сходится к  $x^* \notin K$  — противоречие с компактностью.  $\square$

**Напоминание.** На пространство  $\mathbb{R}^n$  можно смотреть по-разному.

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R} \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Лемма 7.7.** Последовательность  $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$  сходится к  $x^* \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} x_i^m \rightarrow x_i^*, m \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Шаг 1. Заметим, что  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  справедливо неравенство

$$|x_i^* - x_i^m| \leq \sqrt{|x_i^* - x_i^m|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^m|^2} = \rho(x^*, x^m).$$

Шаг 2. Пусть  $\forall i \in \{1, \dots, n\} x_i^m \rightarrow x_i^*, m \rightarrow \infty$ . Тогда  $\sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^m|^2 \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ .

Извлекая корень, получаем

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^m|^2} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty.$$

$\square$

**Теорема 7.10.** (Теорема Больцано-Вейерштрасса в  $\mathbb{R}^n$ ) Из любой ограниченной последовательности  $\{x^m\}_{m=1}^\infty$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x^{m_j}\}_{j=1}^\infty$ .

*Доказательство.* Доказательство будем проводить по индукции (по размерности пространства).

База: при  $n = 1$  мы её [уже доказали](#).

Предположим, что доказано при  $n_0 \in \mathbb{N}$ , докажем для  $n_0 + 1$ . Возьмём последовательность  $x^m = (x_1^m, \dots, x_{n_0+1}^m) \subset \mathbb{R}^{n_0+1}$  — она ограничена. Спроектируем теперь точки  $x^m$  на  $\mathbb{R}^{n_0} \times \{0\}$ , получим последовательность  $\{\bar{x}^m\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$ , но эта последовательность тоже

ограничена, так как  $\|\bar{x}^m\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0} (\bar{x}_i^m)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0+1} (x_i^m)^2} \leq C \forall m \in \mathbb{N}$ .

По предположению индукции Больцано-Вейерштрасс работает для размерности  $n_0$ , тогда  $\exists \{\bar{x}^{m_k}\}$  сходящаяся к  $\bar{x}^* \in \mathbb{R}^{n_0}$ .

Последовательность  $\{x_{n_0+1}^{m_k}\}$  ограничена в  $\mathbb{R} \Rightarrow$  по теореме Больцано-Вейерштрасса  $\exists \{x_{n_0+1}^{m_{k_j}}\}: \{x_{n_0+1}^{m_{k_j}}\} \rightarrow x_{n_0+1}^*, j \rightarrow \infty$ . Рассмотрим вектор  $x^* = (\bar{x}^*, x_{n_0+1}^*)$ . В итоге так как  $\{\bar{x}^{m_{k_j}}\} \rightarrow \bar{x}^*, j \rightarrow \infty$ , получается, что  $x^{m_{k_j}} \rightarrow x^*, j \rightarrow \infty$ , то есть мы сделали шаг индукции.  $\square$

**Теорема 7.11.** (Критерий компактности в  $\mathbb{R}^n$ ) Множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компактно  $\Leftrightarrow$  оно ограничено и замкнуто.

*Доказательство.* Шаг 1. В одну сторону мы [уже доказали](#) в случае общих метрических пространств.

Шаг 2. Пусть  $K$  — ограничено и замкнуто. Возьмём произвольную последовательность  $\{x^m\} \subset K$ . Поскольку  $K$  ограничено, то по [теореме Больцано-Вейерштрасса в  \$\mathbb{R}^n\$](#)   $\exists \{x^{m_j}\} \subset K$ : она сходится к некоторой точке  $x^* \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$  в силу критерия точки прикосновения  $x^*$  — точка прикосновения для  $K$ , но в силу замкнутости  $K$  получаем  $x^* \in K$ .  $\square$

**Теорема 7.12.** (*Критерий Коши в  $\mathbb{R}^n$* ) Последовательность  $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$  сходится  $\Leftrightarrow$  когда выполнено условие Коши, то есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall m, l \geq N(\varepsilon) \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - x_i^l)^2} \leq \varepsilon$ .

*Доказательство.* Точно такое же, как и в одномерном случае с учётом теоремы Больцано-Вейерштрасса.  $\square$

## 8 Кривые

### 8.1 Вектор-функции

**Определение 8.1.** Отображение  $E \subset \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}^n$  называется *вектор-функцией*.