第五章

對偶理論

Duality Theory

章節大綱

1. 前言
2. 對偶問題的定義
3. 主要與對偶問題關係
4. 對偶的各項性質
5. 由單形表中讀對偶解
6. 陰影價格
7. 對偶問題的經濟解釋
8. 對偶單形法
9. 人工限制式技巧

5.2 對偶問題的定義

考慮 LP 標準形式如下：

P： 極大化 $Z=\mathbf{cx}$

受限於 $\mathbf{Ax}\le\mathbf{b} \quad \leftarrow \mathbf{y}$

$\mathbf{x}\ge\mathbf{0}$

若此問題為主要問題（primal problem），則其對偶問題（dual problem）為：

D：極小化 $y_0=\mathbf{yb}$

受限於 $\mathbf{yA}\ge\mathbf{c} \quad \leftarrow \mathbf{x}$

$\mathbf{y}\ge\mathbf{0}$

範例5.1

- 考慮典型範例的模式如下：

$$\begin{aligned} \text{P:}\ \ \text{Max } Z &= 7x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.}\qquad x_1 + 2x_2 &\le 10 \quad \leftarrow y_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \quad \leftarrow y_2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

  - 其對偶問題為

$$\begin{aligned} \text{D:}\ \ \text{Min }\ y_0 &= 10y_1 + 18y_2 \\ \text{s.t.}\qquad y_1 + 3y_2 &\ge 7 \qquad \leftarrow x_1 \\ 2y_1 + 2y_2 &\ge 8 \qquad \leftarrow x_2 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

5.3 主要問題與對偶問題的關係

- 六個對偶關係 (#1與#4為標準形式的對應關係)

編號		極大化	極小化	
#1	變數	≥ 0	$\geq$	限制式
#2		≤ 0	$\leq$	
#3		不受限	$=$	
#4	限制式	$\leq$	≥ 0	變數
#5		$\geq$	≤ 0	
#6		$=$	不受限	

範例5.2

P：Min $Z=10x_1-5x_2$

s.t. $4x_1-8x_2\le 32 \quad \leftarrow y_1$

$7x_1-6x_2=42 \quad \leftarrow y_2$

$x_1+2x_2\ge 2 \quad \leftarrow y_3$

$x_1\ge 0,\ x_2\le 0$

可直接寫出此問題的對偶問題如下：

D：Max $y_0=32y_1+42y_2+2y_3$

s.t. $4y_1+7y_2+y_3\le 10 \quad \leftarrow x_1$

$-8y_1-6y_2+2y_3\ge -5 \quad \leftarrow x_2$

$y_1\le 0,\ y_2$ 不受限, $y_3\ge 0$

5.4 對偶的各項性質

- **弱對偶性質**（weak duality property）：若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是一個極大化問題的可行解，$\bar{\mathbf{y}}$ 是其對偶問題（極小化問題）的可行解，則

$$\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} \le \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$$

- **強對偶性質**（strong duality property）：假設 $\mathbf{x}^*$ 與 $\mathbf{y}^*$ 分別是主要與對偶問題的可行解。則 $\mathbf{x}^*$ 與 $\mathbf{y}^*$ 分別是兩問題的最佳解，若且唯若

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$$

5.4 對偶的各項性質

- **對偶基本定理**（fundamental theorem of duality）：對於主要與對偶兩問題的解，其關係如下：

  1. 兩問題均有最佳解，且其目標函數值相等
  2. 若一個問題是無窮解，則另一個問題無可行解
  3. 若一個問題無可行解，則另一個問題無可行解或無窮解

5.4 對偶的各項性質

- 考慮LP標準形式的擴充形式及其對偶問題：

$$\text{P：Max} \quad Z = \mathbf{cx}$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{s} = \mathbf{b} \quad \leftarrow \mathbf{y}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{D：Min} \quad y_0 = \mathbf{yb}$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{yA} - \mathbf{v} = \mathbf{c} \quad \leftarrow \mathbf{x}$$
$$\mathbf{y}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

5.4 對偶的各項性質

- **互補基解性質**（complementary basic solution property）：P 的每一個基解 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ 均具有一個對應 D 的互補基解 $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{v}})$，其中 $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$ 且

$$\bar{y}_i\,\bar{s}_i = 0 \quad \forall i$$

$$\bar{x}_j\bar{v}_j = 0 \quad \forall j$$

- **互補寬鬆性質**（complementary slackness property）：讓 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ 是 P 的可行解，$(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{v}})$ 是 D 的可行解。此兩個可行解均為最佳解若且唯若

$$\bar{y}_i\,\bar{s}_i = 0 \quad \forall i$$

$$\bar{x}_j\bar{v}_j = 0 \quad \forall j$$

範例5.4

- 考慮典型範例的P及D：

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 7x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 10 \quad \leftarrow y_1 \\ & 3x_1 + 2x_2 + s_2 = 18 \quad \leftarrow y_2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & y_0 = 10y_1 + 18y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + 3y_2 - v_1 = 7 \quad \leftarrow x_1 \\ & 2y_1 + 2y_2 - v_2 = 8 \quad \leftarrow x_2 \\ & y_1, y_2, v_1, v_2 \geq 0 \end{aligned}$$

問題P與D的互補基解 (範例5.4)

主要問題 P					對偶問題 D				
NBV	BV	可行	Z	解	NBV	BV	可行	y_0	解
x_1, x_2	$s_1=10$ $s_2=18$	是	0	次佳	y_1, y_2	$v_1=-7$ $v_2=-8$	否	0	超佳
x_1, s_1	$x_2=5$ $s_2=8$	是	40	次佳	v_2, y_2	$v_1=-3$ $y_1=4$	否	40	超佳
x_1, s_2	$x_2=9$ $s_1=-8$	否	72	超佳	v_2, y_1	$v_1=5$ $y_2=4$	是	72	次佳
x_2, s_1	$x_1=10$ $s_2=-12$	否	70	超佳	v_1, y_2	$v_2=6$ $y_1=7$	是	70	次佳
x_2, s_2	$x_1=6$ $s_1=4$	是	42	次佳	v_1, y_1	$v_2=-\frac{10}{3}$ $y_2=\frac{7}{3}$	否	42	超佳
s_1, s_2	$x_1=4$ $x_2=3$	是	52	最佳	v_1, v_2	$y_1=\frac{5}{2}$ $y_2=\frac{3}{2}$	是	52	最佳

範例5.4

- 由上表可觀察兩互補基解間的關係：
  - 兩互補基解的目標函數值相同（互補基解性質）
  - 最佳解發生在兩互補基解均為可行解時（互補寬鬆性質）
  - 除最佳解外，一個可行的基解對應一個不可行的互補基解
  - 除最佳解外，一個次佳的基解對應一個超佳的互補基解

5.5 由單形表中讀出對偶解

- 根據單形表的矩陣形式以及對偶問題的定義：

$$Z = \mathbf{c_B B^{-1} b}$$

$$y_0 = \mathbf{yb}$$

根據強對偶性質，當兩問題均為最佳解時，

$$Z = y_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c_B B^{-1} b = yb}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y = c_B B^{-1}}$$

因此，只要由最佳單形表中找到 $\mathbf{c_B B^{-1}}$，即找到了對偶最佳解 $\mathbf{y}$，其中 y_i 為 $\mathbf{c_B B^{-1}}$ 的第 i 個元素。

由寬鬆變數讀出

- 假設第 i 個限制式是≤的形式。此時需加上寬鬆變數 s_j，其限制式係數為

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_i$$

由單形表的矩陣形式，得知寬鬆變數 s_j 的 Z 列係數為

$$\mathbf{c_B B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{y}\mathbf{e}_i = y_i$$

因此，≤限制式之 y_i 的最佳解，等於其所對應之 s_j 在最佳單形表中的 Z 列係數。

由剩餘變數讀出

- 假設第 i 個限制式是≥的形式。此時我們需要減去剩餘變數 v_j，其限制式係數為

$$\mathbf{a}_j = -\mathbf{e}_i$$

因剩餘變數 v_j 的 Z 列係數為

$$\mathbf{c_B B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j = -\mathbf{y}\mathbf{e}_i = -y_i$$

因此，≥限制式之 y_i 的最佳解，等於其所對應之 v_j 在最佳單形表中 Z 列係數的負值。

由人工變數讀出

- 假設第 i 個限制式是 $=$ 或 $\geq$ 的形式。此時我們需要加上人工變數 $\bar{x}_j$，其限制式係數為

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_i$$

因人工變數 $\bar{x}_j$ 的 Z 列係數為

$$\mathbf{c_B B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{y e}_i - (-M) = y_i + M$$

因此，對於 max 問題，y_i 的最佳解等於其所對應之 $\bar{x}_j$ 在最佳單形表中的 Z 列係數減 M。對於 min 問題，則為 Z 列係數加 M。

結論

1. 對於≤限制式，其 y_i 的最佳解等於最佳單形表中 s_j 的 Z 列係數
2. 對於≥限制式，其 y_i 的最佳解等於最佳單形表中 v_j 的 $-$ Z 列係數
3. 對於 max 問題的＝或≥限制式，其 y_i 的最佳解等於最佳單形表中 $\bar{x}_j$ 的 Z 列係數 $- M$
4. 對於 min 問題的＝或≥限制式，其 y_i 的最佳解等於最佳單形表中 $\bar{x}_j$ 的 Z 列係數 $+ M$

範例5.6

- 考慮以下LP：

P：Min $Z = 10x_1 + 5x_2$

s.t.
$$4x_1 + 8x_2 + s_1 = 32 \leftarrow y$$
$$7x_1 + 6x_2 + \bar{x}_3 = 42 \leftarrow y$$
$$x_1 - 2x_2 - v_1 + \bar{x}_4 = 2 \leftarrow y$$
$$x_1,\ x_2,\ s_1,\ v_1,\ \bar{x}_3,\ \bar{x}_4 \geq$$

D：Max $y_0 = -32y_1 + 42y_2 + 2y_3$

s.t.
$$-4y_1 + 7y_2 + y_3 + s_2 = 10 \leftarrow x$$
$$-8y_1 + 6y_2 - 2y_3 + s_3 = 5 \leftarrow x$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \text{不受限},\ y_3 \geq 0$$

範例5.6

BV	Z	x_1	x_2	s_1	$\bar{x}_3$	v_1	$\bar{x}_4$	RHS
Z	1	0	0	0	$\frac{5}{4}-M$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}-M$	55
s_1	0	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{7}{20}$	$-\frac{7}{20}$	$\frac{7}{5}$
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{24}{5}$

- 由問題 P 的最佳單形表可直接讀出問題 D 的最佳解：

$$y_1 = 0$$

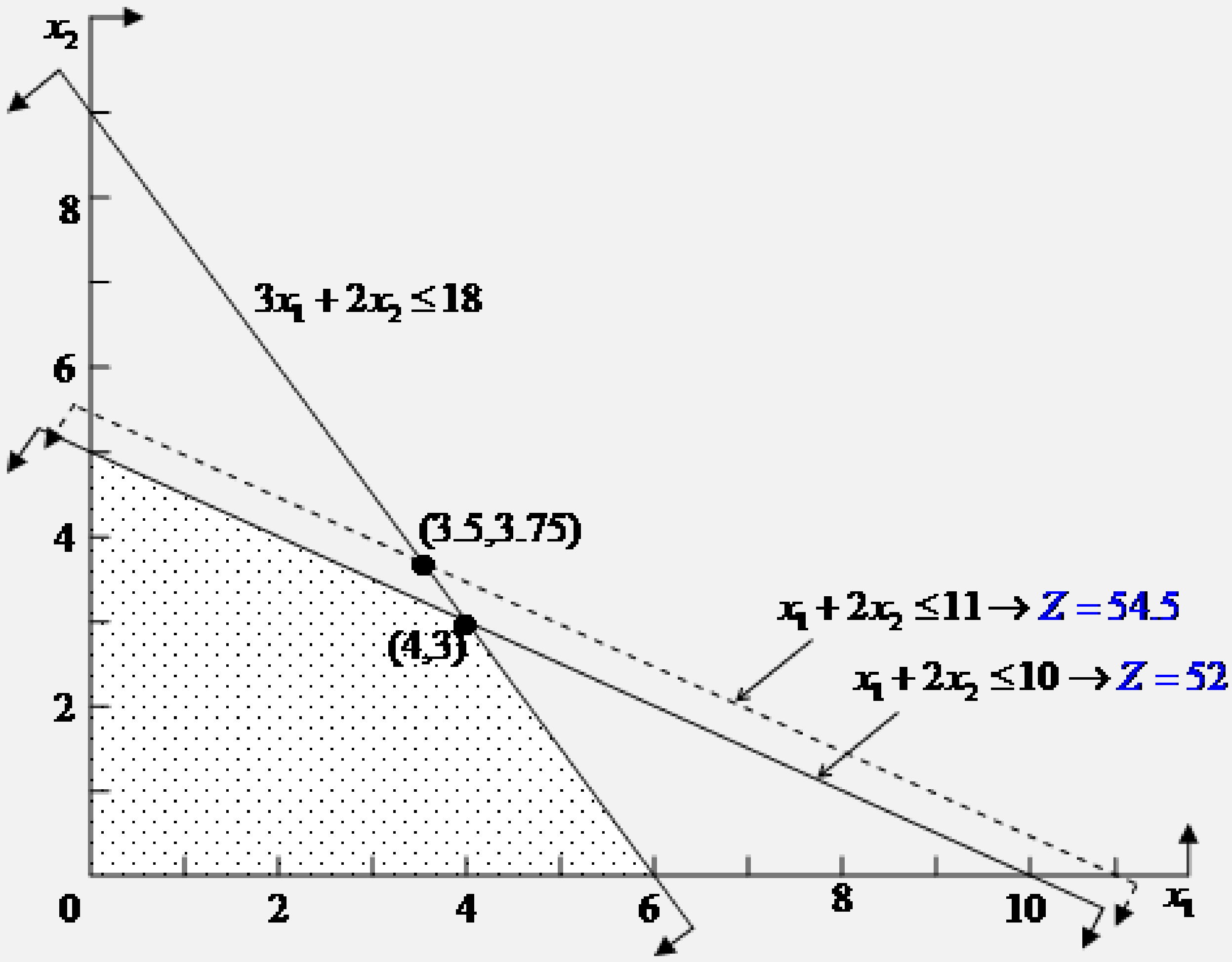
$$y_2 = \left(\frac{5}{4} - M\right) + M = \frac{5}{4}$$

$$y_3 = -\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} \quad \text{或} \quad y_3 = \left(\frac{5}{4} - M\right) + M = \frac{5}{4}$$

5.6 陰影價格

- 陰影價格（shadow price）
  - 每增加1單位資源可增加的利潤。
- 典型範例
  - 若M1的資源由目前的10小時增加至11小時，則最佳解改變如下：
    - 原最佳解：$x_1 = 4, x_2 = 3, Z = 52$
    - 新最佳解：$x_1 = 3.5, x_2 = 3.75, Z = 54.5$
    - Z的增量：$\Delta Z = 2.5$
  - 因此，M1的陰影價格為2.5（即$2,500）

陰影價格的圖示（典型範例）



5.7 對偶問題的經濟解釋

- 以資源分配問題（典型範例）為例：

$$\text{P：Max}\quad Z = 7x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 10 \quad \leftarrow y \\
3x_1 + 2x_2 &\le 18 \quad \leftarrow y \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

$$\text{D：Min}\quad y_0 = 10y_1 + 18y_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad y_1 + 3y_2 &\ge 7 \quad \leftarrow x \\
2y_1 + 2y_2 &\ge 8 \quad \leftarrow x \\
y_1, y_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

5.7 對偶問題的經濟解釋

- 主要問題的意義：在M1與M2兩項資源的限制下，該公司（以A表示）應分別生產多少數量的新產品P1與P2，才能獲得最大總利潤？
- 現在分析對偶問題的意義。假設有家公司（以B表示）要購買A公司用來生產P1與P2的資源，那麼應以多少價格購買？

5.7 對偶問題的經濟解釋

- 定義 y_1 與 y_2 為 M1 與 M2 兩資源的單位購買價格
- B 公司希望價格越低越好，故其目標為：

$$\text{Min} \quad y_0 = 10y_1 + 18y_2$$

- 因 A 公司以 1 小時 M1 和 3 小時 M2，可生產 1 單位 P1，而獲得 7 的利潤，故 $y_1 + 3y_2 \geq 7$；否則 A 不賣
- 同理可得：$2y_1 + 2y_2 \geq 8$
- 單位購買價格必為非負值，即 $y_1, y_2 \geq 0$

5.8 對偶單形法

- 最佳單形表必須滿足以下三個條件：
  - 主要可行性（primal feasibility）
  - 對偶可行性（dual feasibility）
  - 互補寬鬆性（complementary slackness）
- 主要單形法
  - 始終保持條件1與3，最後達到條件2
- 對偶單形法
  - 始終保持條件2與3，最後達到條件1

對偶單形法步驟（對max問題）

- 起始步驟
  - 尋找一個對偶可行基解（對偶BFS），使得所有Z列係數均為非負值，但RHS不受正負號限制
- 最佳性測試
  - 若所有的RHS均為非負值，則停止，否則繼續
- 迭代步驟
  - 決定離開變數：選擇具最負RHS的BV
  - 決定進入變數：選擇具最小比率的NBV

$$\min\left\{\left|\frac{\text{Z列係數}}{\text{負係數}}\right|\right\}$$

  - 產生新單形表：利用高斯消去法

  返回最佳性測試

主要單形法和對偶單形法的差異

- 對max問題

差異項目	主要單形法	對偶單形法
1. Z 列係數	不受正負限制*	必須均為非負值
2. RHS	必須均為非負值	不受正負限制*
3. 判斷最佳解	Z 列係數均非負	RHS 均為非負值
4. 選擇進入變數	最負的 Z 列係數	最負的 RHS
5. 最小比率測試	$\min\left\{\dfrac{\text{RHS}}{\text{正係數}}\right\}$	$\min\left\{\left\|\dfrac{Z\text{列係數}}{\text{負係數}}\right\|\right\}$

* 最佳解除外

對偶單形法適合時機

- 當可很容易地得到起始對偶BFS時
  - 對偶單形法可輕易地將≧限制式轉換為=限制式，而以寬鬆變數處理
  - 若max問題的目標函數係數均為負值（或min問題的目標函數係數均為正值），可很容易地得到起始對偶BFS，而採對偶單形法
- 在敏感度分析中主要可行性違反時
  - 此時可以很方便地以對偶單形法繼續求解

範例5.8

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & Z = 10y_1 + 18y_2 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + 3y_2 \geq 7 \\
& 2y_1 + 2y_2 \geq 8 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

經轉換後可得：

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & -Z = -10y_1 - 18y_2 \\
\text{s.t.} \quad & -y_1 - 3y_2 + y_3 = -7 \\
& -2y_1 - 2y_2 + y_4 = -8 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

範例5.8

BV	Z	y_1	y_2	y_3	y_4	RHS	r
Z	-1	10	18	0	0	0	
y_3	0	-1	-3	1	0	-7	
y_4	0	$\boxed{-2}$	-2	0	1	-8	
Z	-1	0	8	0	5	-40	
y_3	0	0	$\boxed{-2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-3	
y_1	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	4	
Z	-1	0	0	4	3	-52	
y_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	
y_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$	

5.9 人工限制式技巧

- 若目標函數係數有正值（對max問題），則須利用人工限制式技巧（artificial constraint technique）求得起始對偶BFS
- 步驟（對max問題）：
  - 加上人工限制式如下：

$$\sum_{x_j \in \mathrm{NBV}} x_j \le M$$

  - 對人工限制式加上寬鬆變數 x_{n+1}
  - 選擇具最負Z列係數的變數進入，並選擇 x_{n+1} 離開

經過以上步驟，單形表的Z列係數均將大於等於零，而得到起始對偶BFS

5.9 人工限制式技巧

- 繼續以對偶單形法求解，會得到以下結果：
  - 人工問題之對偶問題的解是無窮解
  - 找到人工問題的最佳解，且 $x_{n+1} > 0$
  - 找到人工問題的最佳解，且 $x_{n+1} = 0$
- 根據對偶基本定理
  - 情況1表示主要問題無可行解
  - 情況2表示已找到主要問題的最佳解
  - 情況3表示主要問題是無窮解

範例5.9

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 7x_1 - 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 6x_1 + 7x_2 \geq 42 \\ & -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 先將所有≧限制式的左右兩邊均乘以-1以轉換為≦的形式，並加上寬鬆變數
- 再加上人工限制式及其寬鬆變數：

$$x_1 + x_2 + x_5 = M$$

範例5.9 (表1-2)

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	1	-7	10	0	0	0	0
x_5	0	$\boxed{1}$	1	0	0	1	M
x_3	0	-6	-7	1	0	0	-42
x_4	0	2	-1	0	1	0	-2
Z	1	0	17	0	0	7	$7M$
x_1	0	1	1	0	0	1	M
x_3	0	0	-1	1	0	6	$-42+6M$
x_4	0	0	-3	0	1	$\boxed{-2}$	$-2-2M$

範例5.9 (表3-4)

Z	1	0	$\frac{13}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	0	-7
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	-1
x_3	0	0	-10	1	3	0	-48
x_5	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$1+M$
Z	1	0	0	$\frac{13}{20}$	$\frac{109}{20}$	0	$-\frac{191}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{20}$	$\frac{7}{20}$	0	$\frac{7}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	0	$\frac{24}{5}$
x_5	0	0	0	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{20}$	1	$-\frac{31}{5}+M$