

ヤング率

24cb062h 菅原明

共同実験者:原口優希

1. 目的

光のてこを用いて金属棒の荷重によるたわみを測定し,ヤング率を求める.

2. 原理

Fig. 1 のように幅 A 厚さ B の試料棒を間隔 l の支持の上に置く. 中央に荷重 F をくわえたとき, たわみが生じ h だけ下がる. 荷重をかけない補助棒を試料棒と平行におき,その上に鏡を置く.

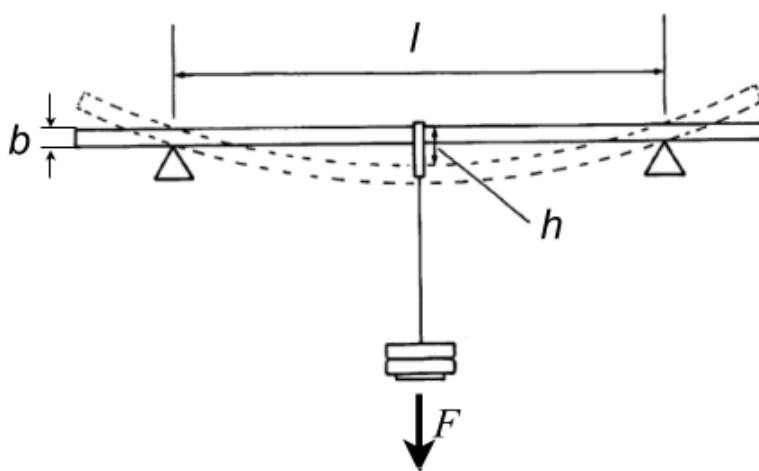


Fig. 1: 試料棒のたわみの様子

2.1. ヤング率

金属などの固体は力を加えると変形し,力を取り除くともとに戻るといふ弾性変形がおきる. 加えた力があまり大きくないとき,フックの法則が成り立つ.いま,

2.2. 光のてこ

試料棒がたわんだとき, Fig. 2 のようになる. このとき鏡と望遠鏡の距離 d は十分大きいものとして見る事ができ,これより,鏡の傾き α は,補助棒と試料棒の支点環の距離を c とすると,

$$\alpha \sim \tan(\alpha) = \frac{h}{c} \quad (1)$$

だけ回転する.鏡から d はなれた望遠鏡の隣にスケールをおく.おもりをおいていないときの読みを y_0 ,おもりを載せたときのスケールの読みを y とする.このとき 鏡で反射させたスケールを読むと,鏡が回転したことで,

$$\Delta y = y - y_0 = 2d\alpha \quad (2)$$

変化する. Eq. 1, Eq. 2 からたわみ h は

$$h = \frac{c}{2d} \Delta y \quad (3)$$

となる.

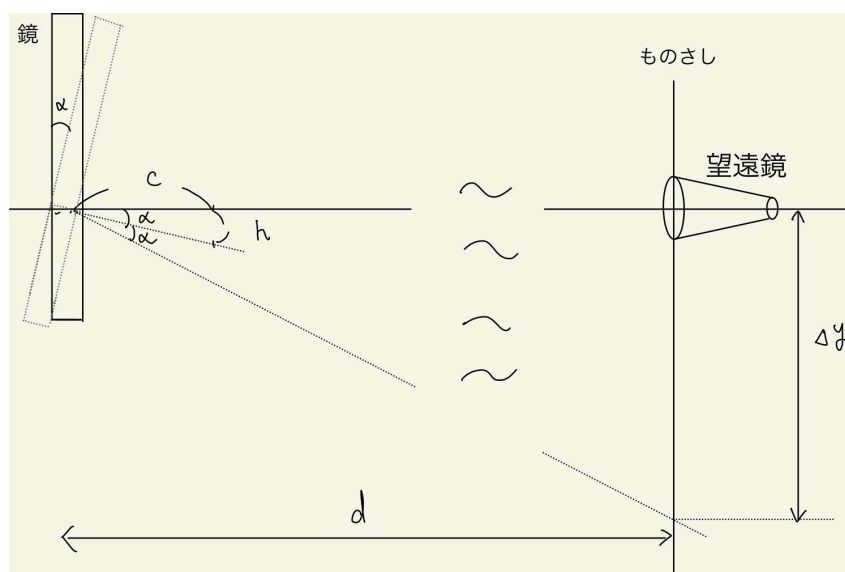


Fig. 2: 光てこの関係図

一方,たわみの大きさ h は Eq. 4 で与えることができる[1].

$$h = \frac{Fl^3}{4EAB^3} \quad (4)$$

Eq. 3,Eq. 4 からよみ y は

$$y = \frac{dl^3}{2EAB^3C}F + y_0 \quad (5)$$

となり,力 F の一次関数となる.この傾き a を求めることで,ヤング率

$$E = \frac{dl^3}{2KAB^3C} \quad (6)$$

を求める.

3. 実験方法

3.1. 実験装置

- たわみ弾性率測定装置 Fig. 3
- 読み取り望遠鏡
- ものさし
- メジャー

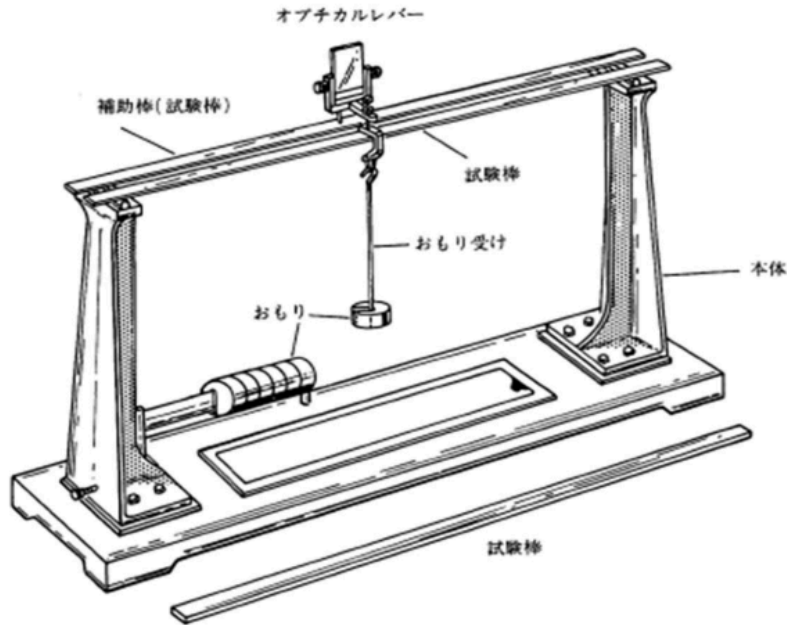


Fig. 3: 装置の概略図[1]

3.2. 測定

以下の手順を試料棒 A,B,C で行う

- Fig. 3 のように, 試料棒と補助棒を支持のうえにおき, 中央に鏡と重りを置く.
- Fig. 4 のように, 望遠鏡を設置し, ものさしを垂直にさす. 望遠鏡のピントを合わせる. この際ピントが合いづらいとき, 望遠鏡の位置をずらしてみるのが効果的.
- おもりを乗せる前のものさしの値を記録する. 目盛りは 0.1mm の精度で読み取る. つぎに, 分銅を一つずつ載せていき, 都度ものさしの値を同様に記録する. 分銅を少なくし測定のチェックをする.

分銅はゆっくり置くと, 記録しやすい.

- 鏡からものさしまでの距離 d , 支持間の距離 l を測る. 試料棒の幅 A 厚さ B をノギスで 5 点図り平均を出す. 試料棒と補助棒の間の距離は鏡の脚の間隔を測定する.

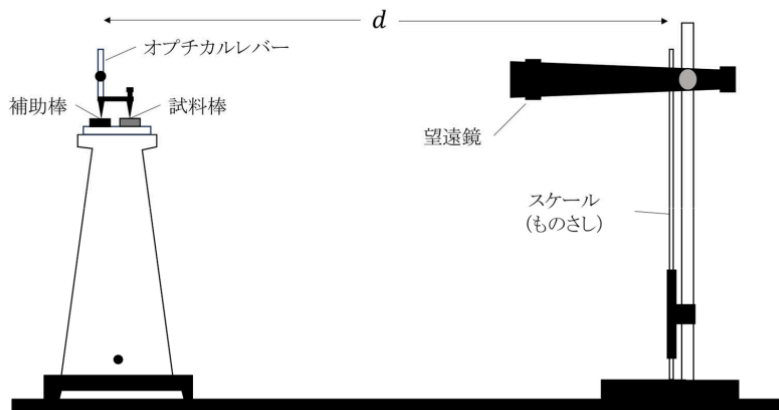


Fig. 4: 実験装置の配置図[1]

3.3. 計算

今回、傾きを求める際の最小二乗法の計算をするのに、以下の Julia のプログラムを用いた。

```
1 using CSV
2 using DataFrames
3 using Plots
4 using Printf
5
6 # CSVファイルを読み込み、データフレームとして取得
7 df = CSV.read("data/data3.csv", DataFrame)
8
9 # 荷重を表す配列 (0~7まで)
10 n = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
11
12 # データの2列目と3列目を取得 (複数回の計測値と仮定)
13 y_1 = df[:, 2]
14 y_2 = df[:, 3]
15
16 # 計測値の平均をとってYとする
17 Y = (y_1 .+ y_2) ./ 2
18
19 # データ点の数
20 N = length(n)
21
22 # 重力加速度 [m/s^2]
23 g = 9.8
24
25 # 質量[n] から力F [N] を計算
26 F = 0.2 .* g .* n # 0.2kg単位の荷重をかけていると仮定
27
28 # 最小二乗法のための共通項 delta を計算
29 delta = N * sum(F.^2) - sum(F)^2
30
31 # 傾きaと切片bを最小二乗法で求める
32 a = (N * sum(F .* Y) - sum(F) * sum(Y)) / delta
33 b = (sum(F.^2) * sum(Y) - sum(F .* Y) * sum(F)) / delta
34
35 # 以下はヤング率Eの計算に必要な定数 (装置の仕様)
36 d = 832 # 望遠鏡と鏡の距離 [mm]
37 l = 400 # 支持間距離 [mm]
38 A = 16 # 幅 [mm]
39 B = 5.008 # 厚さ [mm]
40 C = 35.2 # [mm]
41
42 # ヤング率 E を計算 (式はたわみの公式に基づく)
43 E = (d * l^3) / (2 * a * A * B^3 * C)
44 E = E * 10^6 # mm^2 -> m^2 に変換 (ヤング率の単位調整)
45
46 # aの標準誤差の近似値
47 sigma_a = 1 * sqrt(N / delta)
48
49 # ヤング率の誤差の合成 (誤差伝播式)
50 delta_E = E * sqrt(
51     (1/d)^2 +
52     (3 * 1 / l)^2 +
53     (sigma_a / a)^2 +
54     (0.05 / A)^2 +
55     (3 * 0.05 / B)^2 +
56     (0.05 / C)^2
57 )
58 delta_E = delta_E * 10^6 # 単位変換
59
60 # 結果をテキストファイルに出力
61 open("data/txt3.txt", "w") do io
```

```

62     println(io, "a = $a")
63     println(io, "b = $b")
64     println(io, "E = $E")
65     println(io, "delta_E = $delta_E")
66 end
67
68 # 実測値とフィッティング直線をプロット
69 plt = plot(F, Y,
70     label="Mesured Line",
71     marker=:circle,
72     xlabel="Weight[N]",
73     ylabel="Scale reading[mm]"
74 )
75
76 # フィッティング直線を上に重ねる
77 plot!(F, a .* F .+ b, label="Fit Line", lw=2)
78
79 # プロットをPDFとして保存
80 savefig(plt, "figure/plt3.pdf")

```

3.3.1. 説明

分銅 w 増加していくときの測定値を y_1 減少していくときを y_2 とした.

- 14 行目 モジュールを宣言
- 7 行目 データの読み込み
- 17 行目 y_1, y_2 の平均値を用いる

$$Y[i] = \frac{y_1[i] + y_2[i]}{2} \quad (7)$$

- 26 行目 力 F の定義

$$F[i] = 0.2 \cdot n[i] \cdot g \quad (8)$$

- 29 行目 Δ の定義

$$\Delta = N \sum_i F^2[i] - \left(\sum_i F[i] \right)^2 \quad (9)$$

- 32,33 行目 最小二乗法で傾きと切片を求める

$$a = \frac{N \sum_i (F[i] \cdot Y[i]) - \sum_i F[i] \cdot \sum_i Y[i]}{\Delta} \quad (10)$$

$$b = \frac{\sum_i F^2[i] \cdot \sum_i Y[i] - \sum_i (F[i] \cdot Y[i]) \cdot \sum_i F[i]}{\Delta} \quad (11)$$

- 43 行目 ヤング率の計算

$$E = \frac{dl^3}{2aAB^3C} \quad (12)$$

- 47 行目 標準誤差 σ_a

$$\sigma_a = 1 \cdot \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad (13)$$

- 50 行目 誤差の計算

$$\frac{\delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + \left(3\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta A}{A}\right)^2 + \left(3\frac{\delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\delta C}{C}\right)^2} \quad (14)$$

ただし今回は $\delta d = \delta l = 1[\text{mm}]$, $\delta A = \delta B = \delta C = 0.05[\text{mm}]$ とする.

- 測定値の図のプロット
- 77 行目 フッティング直線のプロット(上書き)
- 80 行目 図の保存

4. 結果

4.1. 試料棒 A

4.1.1. 測定値

Table 1: 試料棒 A の測定値

分銅の個数	増加時の測定値 [mm]	減少時の測定値 [mm]
7	332.5	332.5
6	336.9	336.8
5	342.0	341.5
4	346.2	345.1
3	351.8	350.5
2	355.0	355.0
1	359.8	359.4
0	363.5	363.8

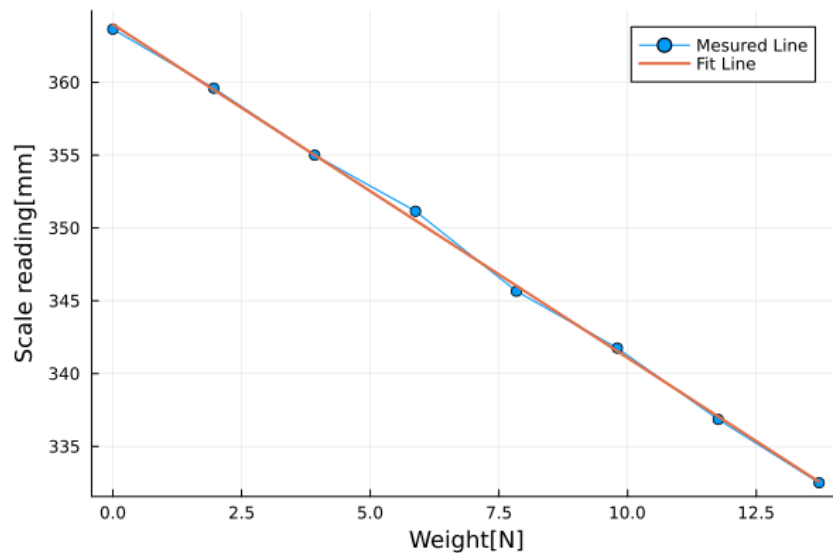


Fig. 5: 試料棒 B の測定値にフッティングをしたもの

試料棒の幅 $A = 16.00[\text{mm}]$, 試料棒の厚み $B = 5.01[\text{mm}]$, 試料棒と補助棒の間隔 $C = 35.20[\text{mm}]$, 鏡からのものさし $d = 832.00[\text{mm}]$, 支持間 $l = 400[\text{mm}]$

ヤング率(絶対値)は

$$E = 1.64 \cdot 10^{11} [\text{N/m}^2]$$

$$E \pm \Delta E = 1.64 \cdot 10^{11} \pm 7.62 \cdot 10^9 [\text{N/m}^2] \quad (15)$$

となる.

4.2. 試料棒 B

4.2.1. 測定値

Table 2: 試料棒 B の測定値

分銅の個数	増加時の測定値 [mm]	減少時の測定値 [mm]
7	314.3	314.3
6	321.8	323.0
5	331.0	331.8
4	339.9	340.8
3	348.8	349.9
2	358.0	359.0
1	367.1	367.9
0	376.4	377.0

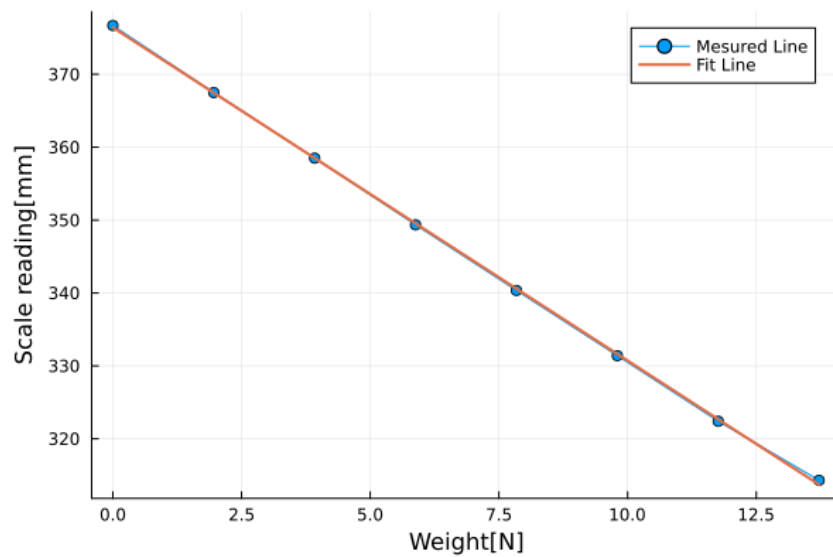


Fig. 6: 試料棒 B の測定値にフィッティングをしたもの

試料棒の幅 $A = 16.00 [\text{mm}]$, 試料棒の厚み $B = 5.01 [\text{mm}]$, 試料棒と補助棒の間隔 $C = 35.20 [\text{mm}]$, 鏡からのさし $d = 832.00 [\text{mm}]$, 支持間 $l = 400 [\text{mm}]$

ヤング率(絶対値)は

$$E = 8.23 \cdot 10^{10} [\text{N/m}^2]$$

$$E \pm \Delta E = 8.23 \cdot 10^{10} \pm 2.93 \cdot 10^9 [\text{N/m}^2] \quad (16)$$

となる.

4.3. 試料棒 C

4.3.1. 測定値

Table 3: 試料棒 C の測定値

分銅の個数	増加時の測定値 [mm]	減少時の測定値 [mm]
7	322.0	322.0
6	330.0	329.9
5	337.0	332.0
4	344.7	344.1
3	352.0	351.3
2	359.4	358.8
1	367.6	366.1
0	374.1	374.0

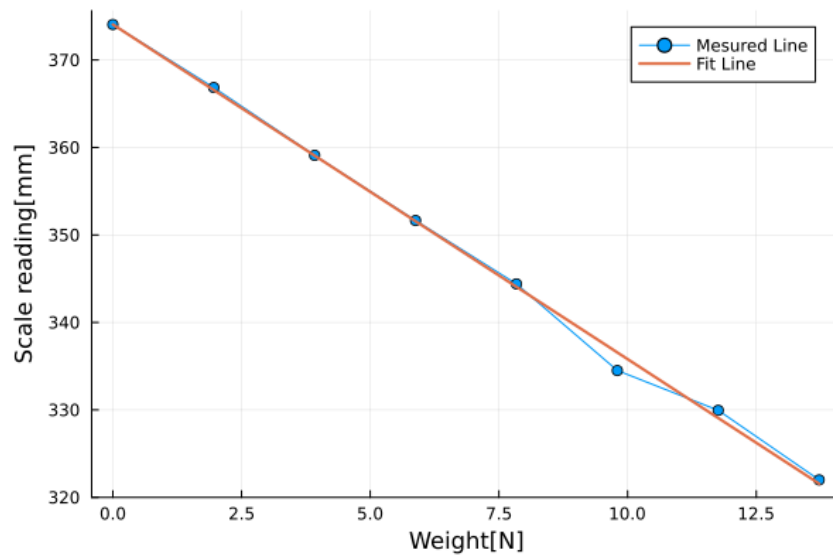


Fig. 7: 試料棒 B の測定値にフィッティングをしたもの

試料棒の幅 $A = 16.00[\text{mm}]$, 試料棒の厚み $B = 5.01[\text{mm}]$, 試料棒と補助棒の間隔 $C = 35.20[\text{mm}]$, 鏡からのものさし $d = 832.00[\text{mm}]$, 支持間 $l = 400[\text{mm}]$

ヤング率(絶対値)は

$$\begin{aligned}
 E &= 1.07 \cdot 10^{11} [\text{N/m}^2] \\
 E \pm \Delta E &= 1.07 \cdot 10^{11} \pm 4.10 \cdot 10^9 [\text{N/m}^2]
 \end{aligned} \tag{17}$$

となる.

5. 考察

Table 4: 材料の弾性係数[2]

材 料	縦弾性係数（ヤング係数） N/mm ²
鑄鉄	74,000 ～ 117,000
構造用鋼	192,000 ～ 200,000
軟鋼	201,000 ～ 206,000
硬鋼	206,000
鑄鋼	172,000 ～ 212,000
特殊鋼	195,000 ～ 206,000
銅鑄物	82,000 ～ 88,000
銅合金（一般）	103,000 ～ 119,000
黄銅	69,000 ～ 98,000
青銅鑄物	79,000 ～ 82,000
リン青銅	93,000 ～ 103,000
洋銀針金	108,000
モネルメタル	172,000 ～ 180,000

教科書[1] に載っている値とを比較すると,試料棒はそれぞれ

- ・ A:白金
- ・ B 金
- ・ C:銅

であると予想できる.しかし,Cに関しては誤差が少しばかり大きすぎる.いまほかの文献で調べると,今回銅のヤング率の誤差に収まっている.このことから,参照する資料内で用いられる銅の純度も今回の測定に影響をしていると考えられる.今回,教科書[1]における銅の値に比べて,測定値が小さかった.Eq. 10 Eq. 12 から, E が大きくなるには a が小さくならなければならない.したがって,ものさしを測るさいの測定の精度が上がるほど, E の値は大きくなり,求めたいヤング率の値に近づく.

参考文献

- [1] 基礎物理実験 立教大学理学部物理学科 2025 年版. 2025.
- [2] 標準機械設計図表便覧 改新增補 5 版. 2005.