Метод Жордана нахождения обратной матрицы с выбором главного элемента по строке

Попов Илья

2 октября 2024 г.

Постановка задачи

Находим матрицу обратную к данной

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть m - размер блока, тогда поделим n - размер матрицы на m с остатком $n = m*k+l$ тогда матрицу можно представить в виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{k,1}^{m\times m} & A_{k,2}^{m\times m} & \cdots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix}$$

1 Хранение матрицы в памяти

Матрицу будем хранить в памяти следующим образом

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|ccc|cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m} & \dots & a_{m,1} & \dots & a_{m,m} & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \dots & a_{1,m+m} & \dots \end{array} \right)$$

То есть хранение блочное

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & \cdots & A_{k+1,1}^{l\times m} & \cdots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix}$$

2 Описание функций getBlock и setBlock

Функции getBlock и setBlock возвращают указатель на начало блока. Адресс блока с номером (i, j) это

$$A + (i-1)*(m*m*k+m*l) + (j-1)*m*m$$

где A - это адресс начала матрицы. Если же $i = k+1$, то адресс будет равняться

$$A + k*(m*m*k+m*l) + (j-1)*l*m$$

3 Описание формул

Пусть B - присоеденённая матрица, которая тоже хранится блоками.
Обратная матрица для блоков находится с помощью обычного метода Жордана с выбором главного элемента по строке.
Норма матрицы : $\|A^{m\times m}\| = \max\limits_{i=1,...,m} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$
q - шаг меняется от 1 до k включительно

1. На q-ом шаге алгоритма среди блоков $A_{q,j}$ при $j = q,...,k$ выбираем блок, у которой норма обратного наименьшая. Для этого данный блок обращается и у него считается норма, если блок не обратим, то пропускаем его. Если все блоки среди $A_{q,j}$ при $j = q,...,k$ необратимы то данный алгоритм не применим. Пусть у блока $A_{q,g}$ норма обратной наименшая, тога меняем местами столбцы (блочные) с номерами q и g. Матрицу B на данном шаге не трогаем. Запоминаем номерая столбцов которые поменяли местами.

2. Умножаем все блоки $A_{q,j}$ при $j = q+1,...,k,k+1$ слева на к $A_{q,q}^{-1}$. Блок $A_{q,q}$ на $A_{q,q}^{-1}$ не домножаем, просто записываем еденичный блок (этого можно не делать так как обращений к этому блоку больше не будет) В матрице B домножаем слева на $A_{q,q}^{-1}$ блоки $B_{q,j}$ при $j = 1,..,q-1$. На место блока $B_{q,q}$ сразу запишем $A_{q,q}^{-1}$ так ка изначално он еденичный.

$$A_{q,j} = A_{q,q}^{-1} * A_{q,j}, \quad j = q+1,...,k,k+1$$

$$B_{q,j} = A_{q,q}^{-1} * B_{q,j}, \quad j = 1,...,q-1$$

3. В матрицах A и B вычитаем из строк с номером $i! = q$ строку с номером q домноженную слева на $A_{i,q}$ А именно:

$$A_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,q} * A_{q,j}, \quad i = 1,...,q-1,q+1,...,k+1, \quad j = q+1,..,k+1$$

$$B_{i,j} = B_{i,j} - A_{i,q} * B_{q,j}, \quad i = 1,...,q-1,q+1,...,k+1, \quad j = 1,...,q$$

На шаге с номером $k+1$ ищем обратный блок к блоку $A_{k+1,k+1}$ если этот блок не обратим, то алгоритм не применим для данного m. Только в матрице B выполняем следующие:

$$B_{k+1,k+1} = A_{k+1,k+1}^{-1}$$

$$B_{i,j} = B_{i,j} - A_{i,q} * B_{q,j}, \quad i = 1,...,k, \quad j = 1,...,k+1$$

Так как в матрице A мы меняли мастами стобцы для нахождения главного элемента, то в матрице присоеденённой B мы меняем мастими соответствующие строки.

4 Оценка числа операций (вариант 1)

Умножение двух матриц $A^{n\times m} * A^{m\times k} : n*k(m+m-1) = 2*n*k*m - m*k$
Сложение или вычитание двух матриц $A^{n\times m} + A^{n\times m} : n*m$
Нахождение обратной матрицы $A^{m\times m}$ обычным методом Жордана с посиком главного элемена по строке $2*m^3 + \frac{11}{2}*m^2 - \frac{13}{2}m$
Расчеты для не блочного метода:
Для исходной матрицы:

$$\sum_{k=1}^{m-1}(m-k) + 2*(m-1)*\sum_{k=1}^{m-1}(m-k) + 3*m^2 - 3*m = m^2 - m + m*(m^2 - 2*m + 1) + 3*m^2 - 3*m = m^3 + 2*m - 3*m$$

Для присоеденённой:

$$\sum_{k=1}^{m} k+2*(m-1)*\sum_{k=1}^{m} k+3*m^2-3*m=m^3+\frac{7}{2}*m^2-\frac{7}{2}*m$$

Складывая получаем:

$$2*m^3+\frac{11}{2}*m^2-\frac{13}{2}*m$$

Для блочного варианта: (пусть $q=n/m$ и не будем учитывать не поделившиеся края, так как они не влияют на ассимптотику)
Для присоеденённой матрицы:

$$\sum_{k=1}^{q}(2*m^3-m^2)+\sum_{k=1}^{q}(q-1)*k*(2*m^3-m^2)+\sum_{k=1}^{q}(q-1)*k*m^2=$$

$$=(2*m^3-m^2)*(\frac{q^2}{2}+\frac{q}{2})+(2*m^3-m^2)*(q^2-1)*\frac{1}{2}+m^2*(q^2-1)*\frac{q}{2}=n^3+n^2*m+O(n^2+n*m+m^2)$$

Для исходной матрицы:

$$(2*m^3+\frac{11}{2}*m^2-\frac{13}{2}*m)*\frac{1+q}{2}*q+\sum_{k=1}^{q-1}(q-k)*(2*m^3-m^2)*(q-1)+\sum_{k=1}^{q-1}(q-1)(q-k)*m^2=$$

$$=(2*m^3+\frac{11}{2}*m^2-\frac{13}{2}*m)*(\frac{q^2}{2}+\frac{q}{2})+(2*m^3-m^2)*(\frac{q^2}{2}-\frac{q}{2})+2*m^3*(q-1)^2*\frac{1}{2}=$$
$$=n^3+m^2*n+O(n^2+n*m+m^2)$$

Складывая, получаем:

$$2*n^3+m^2*n+n^2*m+O(n^2+n*m+m^2)$$

5 Проверка формулы (вариант 1)

$S(n,1)=2*n^3+O(n^2)$
$S(n,n)=4*n^3+O(n^2)$

6 Оценка числа операций (Вариант 2)

$q=\frac{n}{m}$
Для исходной матрицы:
Сложность нахождения обратных блоков для поиска ведущего среди $A_{k,j}$ при $j=k,...,q$:

$$(2*m^3-\frac{m^2}{2}-\frac{m}{2})*\frac{1+q}{2}*q$$

Сложность умножений на блок, обратный к ведущему $A_{k,j}=A_{k,k}^{-1}*A_{k,j}, \quad j=k+1,...,q$:

$$\sum_{k=1}^{q-1}(q-k)*(2*m^3-m^2)$$

Сложность умножений и вычитаний для $A_{i,j}=A_{i,j}-A_{i,k}*A_{k,j}, \quad i=1,...,k-1,k+1,...,q, \quad j=k+1,..,q$:

$$\sum_{k=1}^{q-1}(q-k)*2*m^3*(q-1)$$

Тогда, суммируя, получим: $n^3 + n*m^2 + O(n^2 + m*m + m^2)$
Для присоеденнёной матрицы:
Сложность умножений на блок, обратный к ведущему $B_{k,j} = A_{k,k}^{-1} * B_{k,j}, \quad j = 1,...,k-1$:

$$\sum_{k=1}^{q} (k-1) * (2*m^3 - m^2)$$

Сложность умножений и вычитаний для $B_{i,j} = B_{i,j} - A_{i,k} * B_{k,j}, \quad i = 1,...,k-1,k+1,...,q, \quad j = 1,...,k$:

$$(q-1) * \sum_{k=1}^{q} *k*2*m^3$$

Тогда, суммируя, получим: $n^2*m + n^3 - m^2*n + O(n^2 + m*m + m^2)$
Итог:

$$2*n^3 + n^2*m - n*m^2 + O(n^2 + m*m + m^2)$$

7 Проверка формулы (вариант 2)

$S(n,1) = 2*n^3$ - сложность обычного матода Жордана нахождений обратной матрицы
$S(n,n) = 2*n^3$ - сложность обычного матода Жордана нахождения обратной матрицы, но нет ешё одного умнодения, так как в присоеденённой матрице еденичный блок на $B_{k,k}$ на шаге k на $A_{k,k}^{-1}$ не умножается, а просто заменяется (если все таки умножать, то получится вариант 1, то есть при $m = n$ будет сложность = Жордан + одно умножений = $4*n^3$)