

# Метод Жордана нахождения обратной матрицы с выбором главного элемента по строке

Попов Илья

29 сентября 2024 г.

## Постановка задачи

Находим матрицу обратную к данной

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть  $m$  - размер блока, тогда поделим  $n$  - размер матрицы на  $m$  с остатком  $n = m * k + l$  тогда матрицу можно представить в виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^{m \times m} & A_{12}^{m \times m} & \dots & A_{1,k}^{m \times m} & A_{1,k+1}^{m \times l} \\ A_{21}^{m \times m} & A_{22}^{m \times m} & \dots & A_{2,k}^{m \times m} & A_{2,k+1}^{m \times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{k,1}^{m \times m} & A_{k,2}^{m \times m} & \dots & A_{k,k}^{m \times m} & A_{k,k+1}^{m \times l} \\ A_{k+1,1}^{l \times m} & A_{k+1,2}^{l \times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l \times m} & A_{k+1,k+1}^{l \times l} \end{pmatrix}$$

## 1 Хранение матрицы в памяти

Матрицу будем хранить в памяти следующим образом

$$A = ( a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1,m} \mid a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2,m} \mid \dots \mid a_{m,1} \ \dots \ a_{m,m} \mid a_{1,m+1} \ a_{1,m+2} \ \dots \ a_{1,m+m} \mid \dots )$$

То есть хранение блочное

$$A = \left( A_{11}^{m \times m} \ A_{12}^{m \times m} \ \dots \ A_{1,k}^{m \times m} \ A_{1,k+1}^{m \times l} \ \dots \ A_{k+1,1}^{l \times m} \ \dots \ A_{k+1,k}^{l \times m} \ A_{k+1,k+1}^{l \times l} \right)$$

## 2 Описание функций getBlock и setBlock

Функции getBlock и setBlock возвращают указатель на начало блока. Адресс блока с номером  $(i, j)$  это

$$A + (i - 1) * (m * m * k + m * l) + (j - 1) * m * m$$

где  $A$  - это адресс начала матрицы. Если же  $i = k + 1$ , то адресс будет равняться

$$A + k * (m * m * k + m * l) + (j - 1) * l * m$$

### 3 Описание формул

Пусть  $B$  - присоединённая матрица, которая тоже хранится блоками.

Обратная матрица для блоков находится с помощью обычного метода Жордана с выбором главного элемента по строке.

Норма матрицы :  $\|A^{m \times m}\| = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

$q$  - шаг меняется от 1 до  $k$  включительно

1. На  $q$ -ом шаге алгоритма среди блоков  $A_{q,j}$  при  $j = q, \dots, k$  выбираем блок, у которой норма обратного наименьшая. Для этого данный блок обращается и у него считается норма, если блок не обратим, то пропускаем его. Если все блоки среди  $A_{q,j}$  при  $j = q, \dots, k$  необратимы то данный алгоритм не применим. Пусть у блока  $A_{q,g}$  норма обратной наименьшая, тогда меняем местами столбцы (блочные) с номерами  $q$  и  $g$ . Матрицу  $B$  на данном шаге не трогаем. Запоминаем номера столбцов которые поменяли местами.
2. Умножаем все блоки  $A_{q,j}$  при  $j = q+1, \dots, k, k+1$  слева на  $A_{q,q}^{-1}$ . Блок  $A_{q,q}$  на  $A_{q,q}^{-1}$  не домножаем, просто записываем еденичный блок (этого можно не делать так как обращений к этому блоку больше не будет) В матрице  $B$  домножаем слева на  $A_{q,q}^{-1}$  блоки  $B_{q,j}$  при  $j = 1, \dots, q-1$ . На место блока  $B_{q,q}$  сразу запишем  $A_{q,q}^{-1}$  так как изначально он еденичный.

$$A_{q,j} = A_{q,q}^{-1} * A_{q,j}, \quad j = q+1, \dots, k, k+1$$

$$B_{q,j} = A_{q,q}^{-1} * B_{q,j}, \quad j = 1, \dots, q-1$$

3. В матрицах  $A$  и  $B$  вычитаем из строк с номером  $i \neq q$  строку с номером  $q$  домноженную слева на  $A_{i,q}$   $A$  именно:

$$A_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,q} * A_{q,j}, \quad i = 1, \dots, q-1, q+1, \dots, k+1, \quad j = q+1, \dots, k+1$$

$$B_{i,j} = B_{i,j} - A_{i,q} * B_{q,j}, \quad i = 1, \dots, q-1, q+1, \dots, k+1, \quad j = 1, \dots, q$$

На шаге с номером  $k+1$  ищем обратный блок к блоку  $A_{k+1,k+1}$  если этот блок не обратим, то алгоритм не применим для данного  $m$ . Только в матрице  $B$  выполняем следующие:

$$B_{k+1,k+1} = A_{k+1,k+1}^{-1}$$

$$B_{i,j} = B_{i,j} - A_{i,q} * B_{q,j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k+1$$

Так как в матрице  $A$  мы меняли местами столбцы для нахождения главного элемента, то в матрице присоединённой  $B$  мы меняем местами соответствующие строки.

### 4 Оценка числа операций

Умножение двух матриц  $A^{n \times m} * A^{m \times k} : n * k(m+m-1) = 2 * n * k * m - m * k$

Сложение или вычитание двух матриц  $A^{n \times m} + A^{n \times m} : n * m$

Нахождение обратной матрицы  $A^{m \times m}$  обычным методом Жордана с поиском главного элемента по строке  $2 * m^3 + \frac{11}{2} * m^2 - \frac{13}{2}m$

Расчеты для не блочного метода:

Для исходной матрицы:

$$\sum_{k=1}^{m-1} (m-k) + 2 * (m-1) * \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) + 3 * m^2 - 3 * m = m^2 - m + m * (m^2 - 2 * m + 1) + 3 * m^2 - 3 * m = m^3 + 2 * m - 3 * m$$

Для присоединённой:

$$\sum_{k=1}^m k + 2 * (m-1) * \sum_{k=1}^m k + 3 * m^2 - 3 * m = m^3 + \frac{7}{2} * m^2 - \frac{7}{2} * m$$

Складывая получаем:

$$2 * m^3 + \frac{11}{2} * m^2 - \frac{13}{2} * m$$

Для блочного варианта: (пусть  $q = n/m$  и не будем учитывать не поделившиеся края, так как они не влияют на асимптотику)

Для присоединённой матрицы:

$$\sum_{k=1}^q (2 * m^3 - m^2) + \sum_{k=1}^q (q-1) * k * (2 * m^3 - m^2) + \sum_{k=1}^q (q-1) * k * m^2 =$$

$$= (2 * m^3 - m^2) * (\frac{q^2}{2} + \frac{q}{2}) + (2 * m^3 - m^2) * (q^2 - 1) * \frac{1}{2} + m^2 * (q^2 - 1) * \frac{q}{2} = n^3 + n^2 * m + O(n^2 + n * m + m^2)$$

Для исходной матрицы:

$$(2 * m^3 + \frac{11}{2} * m^2 - \frac{13}{2} * m) * \frac{1+q}{2} * q + \sum_{k=1}^{q-1} (q-k) * (2 * m^3 - m^2) * (q-1) + \sum_{k=1}^{q-1} (q-1)(q-k) * m^2 =$$

$$= (2 * m^3 + \frac{11}{2} * m^2 - \frac{13}{2} * m) * (\frac{q^2}{2} + \frac{q}{2}) + (2 * m^3 - m^2) * (\frac{q^2}{2} - \frac{q}{2}) + 2 * m^3 * (q-1)^2 * \frac{1}{2} =$$

$$= n^3 + m^2 * n + O(n^2 + n * m + m^2)$$

Складывая, получаем:

$$2 * n^3 + m^2 * n + n^2 * m + O(n^2 + n * m + m^2)$$

## 5 Проверка формулы

$$S(n, 1) = 2 * n^3 + O(n^2)$$

$$S(n, n) = 4 * n^3 + O(n^2)$$