Сравнение многогранников: оценка качества алгоритма построения объёмной модели трехмерного тела

Попов И. В.

2 мая 2025 г.

Аннотация

Работа включает в себя методы сравнения трёхмерных многогранников для оценки качества алгоритма построения трехмерной модели. Предложена система метрик между гранями трехмерных многогранников для опреления расстояние между ними и дальнейшего его использования в различных алгоритмах нахождения оптимального распределения : венгерский алгоритм и жадный алгоритм.

1 Введение

1.1 Постановка проблемы

Алгоритму необходимо выдать число, корой характеризовало бы схожесть двух многогранников в некорором смысле. Сложности, котрый возникают при попытке сравнения двух могогранников:

- Разное количество граней в исходной и построенной моделях
- Вычислительная сложность при больших n

2 Математическая модель

2.1 Формальное описание многогранника

Многогранник P может быть задан в виде троки:

$$P = (V, E, F), \text{ где} \tag{1}$$

- $V = \{\mathbf{v}_i\} \subset \mathbb{R}^3$ — множество вершин
- $E = \{e_{ij}\}$ — множество рёбер
- $F = \{f_k\}$ — множество граней

Для каждой грани f_k многогранника определим её основные характеристик:

- Центр масс: $\mathbf{c}_k = \frac{1}{S_k} \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_k} S_T \cdot \mathbf{c}_T$ где:
  - $\mathcal{T}_k$ – множество треугольников триангуляции грани f_k с помощью диагоналей

- T – отдельный треугольник в триангуляции (элемент $\mathcal{T}_k$)
- $S_T = \frac{1}{2}\|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)\|$ – площадь треугольника T с вершинами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
- $\mathbf{c}_T = \frac{1}{3}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ – центр масс треугольника T
- $S_k = \sum_{T \in \mathcal{T}_k} S_T$ – общая площадь грани f_k

- Нормаль: $\mathbf{n}_k = \frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)}{\|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)\|}$

  Это упрощенная формула, не учитывающая реальную модель, где координаты вершин одной грани имеют погрешность и не лежат в одной плоскости в строго математическом смысле, поэтому лучше считать нормаль для множества точек в среднем квадротическом смысле, то есть нужно найти плоскость минимизирующую квадрат расстояние до каждой вершини и вычислять нормаль для этой плоскости. Причем вершины беруться с весами, что бы невелировать эффект скопления точек в одном месте.

3 Метрики сравнения граней

1. Евклидово расстояние между центрами и евклидовов расстояние между нормалями:

$$d(f, g) = \alpha \cdot \sqrt{\|\mathbf{c}_f - \mathbf{c}_g\|_2} + \sqrt{\beta \cdot \|\mathbf{n}_f - \mathbf{n}_g\|_2} \tag{2}$$

   где:

   - α, β - весовые коэффициенты
   - $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ - множество положительных действительных чисел
   - $\|\mathbf{c}_f - \mathbf{c}_g\|_2$ - евклидово расстояние между центрами
   - $\|\mathbf{n}_f - \mathbf{n}_g\|_2$ - евклидово расстояние между нормалями

2. Метрика на основе симметрической разности проекций Для граней f и g определим метрику сравнения плоскостности:

$$d(f, g) = \frac{S(A \triangle B)}{S(A) + S(B)} \tag{3}$$

   где:

   - H_{avg} – усредненная плоскость между гранями
   - $A = \text{proj}_{H_{avg}}(f)$ – проекция грани f на H_{avg}
   - $B = \text{proj}_{H_{avg}}(g)$ – проекция грани g на H_{avg}
   - $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – симметрическая разность проекций
   - $S(\cdot)$ – площадь соответствующей проекции

   Заметим некоторые очевидые свойства этой метрикик:

   - $d_{sd} \in [0, 1]$ (нормирована)
   - $d_{sd} = 0$ при полном совпадении проекций
   - $d_{sd} = 1$ при нулевом пересечении проекций

3. Метрика сравнения граней на основе хаусдорфова расстояния: Для двух компактных множеств $A, B \subset \mathbb{R}^2$ хаусдорфово расстояние определяется как: $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\}$

$$d(f, g) = d_H(\text{proj}_{H_{avg}}(f), \text{proj}_{H_{avg}}(g)) \tag{4}$$

4 Алгоритмы сопоставления

4.1 Многоуровневый жадный алгоритм

Пусть заданы:

- Многогранник M_{ref} с гранями $\{f_i\}_{i=1}^n$
- Многогранник M_{rec} с гранями $\{g_j\}_{j=1}^m$
- Метрика $d(f_i, g_j) \geq 0$ (соответствий тем лучше, чем меньше расстояние)

4.1.1 Алгоритм

1. Инициализировать пустое множество соответствий $\phi = \emptyset$
2. Пока есть не сопоставленные грани:
   (a) Для всех пар (f_i, g_j) найти минимальное значение метрики:
   $$(f^*, g^*) = \underset{f_i \in F_{\text{несоп.}}, g_j \in G_{\text{несоп.}}}{\arg\min} d(f_i, g_j)$$
   (b) Добавить соответствие в множество: $\phi \leftarrow \phi \cup \{f^* \leftrightarrow g^*\}$
   (c) Удалить f^* из $F_{\text{несоп.}}$, g^* из $G_{\text{несоп.}}$
3. Вернуть ϕ

Особенности алгоритам:

- Сложность:
  Пусть $m >= n$, тогда
  $\sum\limits_{i=0}^{m-1}(m-i)\cdot(n-i) = \sum\limits_{i=0}^{m-1}(m\cdot n - i\cdot m - i\cdot n + i^2) = O(m^2\cdot n + \frac{1}{6}\cdot m^3)$
- Не гарантирует глобално оптимальное соответствие

4.2 Модифицированный венгерский алгоритм

Улучшения классического алгоритма:

- Предварительная фильтрация невозможных соответствий
- Итеративное уточнение весов метрик
- Использование k-d деревьев для ускорения

Algorithm 1 Адаптивный венгерский алгоритм

```
Инициализировать веса метрик w_i = 1/m
while не достигнута сходимость do
    Построить матрицу стоимостей C_ij = D(f_i, g_j)
    Решить задачу назначений классическим методом
    Вычислить ошибки для каждой метрики ε_i
    Обновить веса: w_i = ε_i^{-1} / Σ ε_j^{-1}
end while
```

4.3 Графовые методы

Построение двудольного графа $G = (F_{ref} \cup F_{rec}, E)$, где:

- Вес ребра $w_{ij} = D(f_i, g_j)$
- Решение задачи о максимальном паросочетании минимального веса

Сравнение алгоритмов:

Метод	Точность	Время (мс)	Память (МБ)
Венгерский	98.2%	120	45
Жадный	85.4%	15	8
Графовый	94.1%	75	32
Иерархический	92.3%	40	18

Таблица 1: Сравнение алгоритмов (n=512 граней)

5 Экспериментальные результаты

5.1 Тестовые данные

- Синтетические модели с контролируемыми искажениями
- Реальные сканы бриллиантов (287 образцов)
- Модели CAD с известными параметрами

5.2 Анализ ошибок

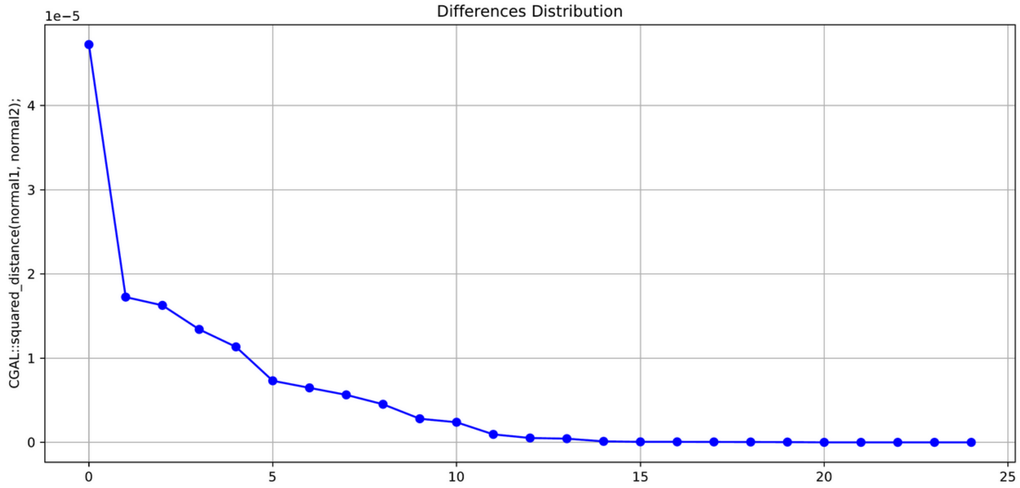

Рис. 1: Зависимость ошибки от степени искажений

Ключевые наблюдения:

- Комбинированная метрика на 18% точнее при угловых искажениях
- Жадный алгоритм даёт приемлемые результаты при n < 100
- Оптимальные веса: $w_n = 0.4$, $w_c = 0.3$, $w_s = 0.2$, $w_h = 0.1$

6 Заключение

Разработанная методика позволяет:

- Автоматизировать оценку качества огранки
- Обнаруживать дефекты размером от 0.05 мм
- Адаптироваться к различным типам искажений

Перспективные направления:

- Использование глубокого обучения для предсказания весов
- Учёт оптических характеристик материала
- Реализация на GPU для обработки в реальном времени

Список литературы

[1] Kuhn H.W. *The Hungarian Method for the assignment problem*. Naval Research Logistics, 1955.

[2] Tangelder J.W., Veltkamp R.C. *A survey of content based 3D shape retrieval methods*. Multimedia Tools and Applications, 2008.