Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

Курсовая работа

Студент:	Попов Илья Викторович
Преподаватель:	Валединский Владимир Дмитриевич
Группа:	310

Москва

2025

Сравнение многогранников: оценка качества алгоритма построения объёмной модели трехмерного тела

Попов Илья

7 мая 2025 г.

Аннотация

Работа включает в себя методы сравнения трёхмерных многогранников для оценки качества алгоритма построения трехмерной модели. Предложена система метрик между гранями трехмерных многогранников для опреления расстояние между ними и дальнейшего его использования в различных алгоритмах нахождения оптимального распределения : венгерский алгоритм и жадный алгоритм.

1 Введение

1.1 Постановка проблемы

Алгоритму необходимо получить число, корое характеризовало бы схожесть двух многогранников в некорором смысле.

2 Математическая модель

2.1 Формальное описание многогранника

Многогранник P может быть задан в виде троки:

$$P = (V, E, F), \text{ где} \tag{1}$$

- $V = \{\mathbf{v}_i\} \subset \mathbb{R}^3$ — множество вершин
- $E = \{e_{ij}\}$ — множество рёбер
- $F = \{f_k\}$ — множество граней

Для каждой грани f_k многогранника определим её основные характеристик:

- Центр масс: $\mathbf{c}_k = \frac{1}{S_k} \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_k} S_T \cdot \mathbf{c}_T$ где:
  - $\mathcal{T}_k$ – множество треугольников триангуляции грани f_k с помощью диагоналей
  - T – отдельный треугольник в триангуляции (элемент $\mathcal{T}_k$)
  - $S_T = \frac{1}{2}\|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)\|$ – площадь треугольника T с вершинами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
  - $\mathbf{c}_T = \frac{1}{3}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ – центр масс треугольника T
  - $S_k = \sum_{T \in \mathcal{T}_k} S_T$ – общая площадь грани f_k
- Нормаль: $\mathbf{n}_k$ – нормаль к плоскости, наилучшим образом приближающеё точки в смысле минимума суммы квадратов отклонений

3 Метрики сравнения граней

1. Евклидово расстояние между центрами и евклидовов расстояние между нормалями:

$$d(f, g) = \alpha \cdot \sqrt{\|\mathbf{c}_f - \mathbf{c}_g\|_2} + \sqrt{\beta \cdot \|\mathbf{n}_f - \mathbf{n}_g\|_2} \tag{2}$$

где:

- α, β - весовые коэффициенты
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ - множество положительных действительных чисел
- $\|\mathbf{c}_f - \mathbf{c}_g\|_2$ - евклидово расстояние между центрами
- $\|\mathbf{n}_f - \mathbf{n}_g\|_2$ - евклидово расстояние между нормалями

2. Метрика на основе симметрической разности проекций Для граней f и g определим метрику сравнения плоскостности:

$$d(f, g) = \frac{S(A \triangle B)}{S(A) + S(B)} \tag{3}$$

где:

- H_{avg} – усредненная плоскость между гранями
- $A = \text{proj}_{H_{avg}}(f)$ – проекция грани f на H_{avg}
- $B = \text{proj}_{H_{avg}}(g)$ – проекция грани g на H_{avg}
- $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – симметрическая разность проекций
- $S(\cdot)$ – площадь соответствующей проекции

Заметим некоторые очевидные свойства этой метрикик:

- $d_{sd} \in [0, 1]$ (нормирована)
- $d_{sd} = 0$ при полном совпадении проекций
- $d_{sd} = 1$ при нулевом пересечении проекций

3. Метрика сравнения граней на основе хаусдорфова расстояния: Для двух компактных множеств $A, B \subset \mathbb{R}^2$ хаусдорфово расстояние определяется как: $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\}$

$$d(f, g) = d_H(\text{proj}_{H_{avg}}(f), \text{proj}_{H_{avg}}(g)) \tag{4}$$

4 Алгоритмы сопоставления

4.1 Жадный алгоритм

Пусть заданы:

- Многогранник M_{ref} с гранями $\{f_i\}_{i=1}^{n}$
- Многогранник M_{rec} с гранями $\{g_j\}_{j=1}^{m}$
- Метрика $d(f_i, g_j) \geq 0$ (соответствий тем лучше, чем меньше расстояние)

4.1.1 Алгоритм

1. Инициализировать пустое множество соответствий $\phi = \emptyset$
2. Пока есть не сопоставленные грани:
   (a) Для всех пар (f_i, g_j) найти минимальное значение метрики:
   $$(f^*, g^*) = \operatorname*{arg\,min}_{f_i \in F_{\text{несоп.}}, g_j \in G_{\text{несоп.}}} d(f_i, g_j)$$
   (b) Добавить соответствие в множество: $\phi \leftarrow \phi \cup \{f^* \leftrightarrow g^*\}$
   (c) Удалить f^* из $F_{\text{несоп.}}$, g^* из $G_{\text{несоп.}}$
3. Вернуть ϕ

Особенности алгоритам:

- Сложность:
  Пусть $m >= n$, тогда
  $\sum_{i=0}^{m-1} (m-i) \cdot (n-i) = \sum_{i=0}^{m-1} (m \cdot n - i \cdot m - i \cdot n + i^2) = O(m^2 \cdot n + \frac{1}{6} \cdot m^3)$
- Не гарантирует глобално оптимальное соответствие

4.2 Венгерский алгоритм

Определение 1 (Потенциал)**.** *Два массива $u[1 \dots n]$ и $v[1 \dots n]$ называются* ***потенциалом****, если:*

$$u[i] + v[j] \leq a[i][j] \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Значение потенциала: $f = \sum u[i] + \sum v[j]$. Для любого решения sol верно $sol \geq f$.

Основная идея

Алгоритм поддерживает:

- Потенциалы u, v и паросочетание M в графе жёстких рёбер $H = \{(i, j) | u[i] + v[j] = a[i][j]\}$
- Если $|M| = n$, то M — оптимальное решение
- Иначе пересчёт потенциалов для расширения H

Шаги алгоритма

1. **Инициализация**:

$$u[i] = 0, \quad v[j] = 0 \quad \forall i, j$$
$$M = \emptyset$$

2. **Поиск увеличивающего пути**:
   - Построить ориентированный граф: рёбра M направлены справа налево, остальные — слева направо
   - Искать путь из ненасыщенных вершин слева в ненасыщенные справа
   - При успехе — увеличить M вдоль пути
3. **Пересчёт потенциалов** (если путь не найден):

- Z_1 — достижимые вершины слева, Z_2 — справа
- Вычислить
$$\Delta = \min_{\substack{i \in Z_1 \\ j \notin Z_2}} (a[i][j] - u[i] - v[j])$$
- Обновить:
$$u[i] += \Delta \quad \forall i \in Z_1$$
$$v[j] -= \Delta \quad \forall j \in Z_2$$

Свойства пересчёта

- Сохраняются все жёсткие рёбра текущего паросочетания
- Появляется новое жёсткое ребро между Z_1 и $V_2 \setminus Z_2$
- Размер достижимого множества $(Z_1 \cup Z_2)$ строго растёт

Корректность

- После $O(n)$ пересчётов мощность M увеличивается
- Всего требуется n увеличений
- Сложность: $O(n^4)$, но оптимизируется до $O(n^3)$

Ключевые моменты.
- Инвариант: $sol \geq f$ сохраняется всегда
- Пересчёт потенциалов гарантирует прогресс
- Максимальное паросочетание в H соответствует оптимальному решению

$\square$

Список литературы

[1] Kuhn H.W. *The Hungarian Method for the assignment problem*. Naval Research Logistics, 1955.

[2] Tangelder J.W., Veltkamp R.C. *A survey of content based 3D shape retrieval methods*. Multimedia Tools and Applications, 2008.