Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра вычислительной математики

Курсовая работа

Студент: Попов Илья Викторович

Преподаватель: Валединский Владимир Дмитриевич

Группа: 310

Москва

2025

Сравнение многогранников: оценка качества алгоритма построения объёмной модели трехмерного тела

Попов Илья

10 мая 2025 г.

Аннотация

Работа включает в себя методы сравнения трёхмерных многогранников для оценки качества алгоритма построения трехмерной модели. Предложена система метрик между гранями трехмерных многогранников для определения расстояние между ними и дальнейшего его использования в различных алгоритмах нахождения оптимального распределения : венгерский алгоритм и жадный алгоритм.

1 Введение

1.1 Постановка проблемы

Алгоритму необходимо получить число, которое характеризовало бы схожесть двух многогранников в некотором смысле.

2 Математическая модель

2.1 Формальное описание многогранника

Многогранник P может быть задан в виде тройки:

$$P = (V, E, F), \text{ где:} \tag{1}$$

- $V = \{\mathbf{v}_i\} \subset \mathbb{R}^3$ — множество вершин
- $E = \{e_{ij}\}$ — множество рёбер
- $F = \{f_k\}$ — множество граней

Для каждой грани f_k многогранника, определим её основные характеристики:

- Центр масс: $\mathbf{c}_k = \frac{1}{S_k} \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_k} S_T \cdot \mathbf{c}_T$ где:
  - $\mathcal{T}_k$ – множество треугольников триангуляции грани f_k с помощью диагоналей
  - T – отдельный треугольник в триангуляции (элемент $\mathcal{T}_k$)
  - $S_T = \frac{1}{2}\|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)\|$ – площадь треугольника T с вершинами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
  - $\mathbf{c}_T = \frac{1}{3}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ – центр масс треугольника T
  - $S_k = \sum_{T \in \mathcal{T}_k} S_T$ – общая площадь грани f_k
- Нормаль: $\mathbf{n}_k$ – нормаль к плоскости, наилучшим образом приближающеё точки в смысле минимума суммы квадратов отклонений

3 Метрики сравнения граней

1. Евклидово расстояние между центрами и евклидово расстояние между нормалями:

$$d(f, g) = \alpha \cdot \|\mathbf{c}_f - \mathbf{c}_g\|_2 + \beta \cdot \|\mathbf{n}_f - \mathbf{n}_g\|_2 \tag{2}$$

где:

- α, β - весовые коэффициенты
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ - множество положительных действительных чисел
- $\|\mathbf{c}_f - \mathbf{c}_g\|_2$ - евклидово расстояние между центрами
- $\|\mathbf{n}_f - \mathbf{n}_g\|_2$ - евклидово расстояние между нормалями

2. Метрика на основе симметрической разности проекций Для граней f и g определим метрику сравнения плоскостности:

$$d(f, g) = \frac{S(A \triangle B)}{S(A) + S(B)} \tag{3}$$

где:

- H_{avg} – усредненная плоскость между гранями
- $A = \text{proj}_{H_{avg}}(f)$ – проекция грани f на H_{avg}
- $B = \text{proj}_{H_{avg}}(g)$ – проекция грани g на H_{avg}
- $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – симметрическая разность проекций
- $S(\cdot)$ – площадь соответствующей проекции

Заметим, некоторые очевидные свойства этой метрики:

- $d_{sd} \in [0, 1]$ (нормирована)
- $d_{sd} = 0$ при полном совпадении проекций
- $d_{sd} = 1$ при нулевом пересечении проекций

3. Метрика сравнения граней на основе хаусдорфова расстояния: Для двух компактных множеств $A, B \subset \mathbb{R}^2$ хаусдорфово расстояние определяется как: $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\}$

$$d(f, g) = d_H(\mathrm{proj}_{H_{avg}}(f), \mathrm{proj}_{H_{avg}}(g)) \tag{4}$$

4 Алгоритмы сопоставления

Пусть заданы:

- Многогранник F_{ref} с гранями $\{f_i\}_{i=1}^n$
- Многогранник G_{rec} с гранями $\{g_j\}_{j=1}^m$
- Метрика $d(f_i, g_j) \geq 0$ (соответствий тем лучше, чем меньше расстояние)

4.1 Жадный алгоритм

4.1.1 Описание алгоритма

1. Инициализировать пустое множество соответствий $\phi = \emptyset$
2. Пока есть не сопоставленные грани:
   (a) Для всех пар (f_i, g_j) найти минимальное значение метрики:
   $$(f^*, g^*) = \underset{f_i\in F_{\text{несоп.}}, g_j\in G_{\text{несоп.}}}{\arg\min} d(f_i, g_j)$$
   (b) Добавить соответствие в множество: $\phi \leftarrow \phi \cup \{f^* \leftrightarrow g^*\}$
   (c) Удалить f^* из $F_{\text{несоп.}}$, g^* из $G_{\text{несоп.}}$
3. Вернуть ϕ

4.1.2 Особенности алгоритма

Сложность:

Пусть $m >= n$, тогда
$\sum\limits_{i=0}^{m-1}(m-i)\cdot(n-i) = \sum\limits_{i=0}^{m-1}(m\cdot n - i\cdot m - i\cdot n + i^2) = O(m^2\cdot n + \frac{1}{6}\cdot m^3)$

Не гарантирует глобально оптимальное соответствие

4.2 Венгерский алгоритм

Положим $N = \max\left\{n, m\right\}$. В рамках этого алгоритма ищется совершенное паросочетание минимальной стоимости в двудольном графе. Вершины левой доли отвечают граням многогранника F, а правой - граням многогранника G. Двудольный граф можно представить как матрицу $a[1...N][1...N]$, где $a[i][j] = d(f_i, g_j)$, то есть значение каждой ячеки матрицы - это вес соответствующего ребра в двудольном графе. Если $n \neq m$, то незаполненные места в матрице заполняются максимальным занчением метрики, ограниченной на множество граней сравниваемых многогранников.

Определение 1. *Два массива $u[1\ldots n]$ и $v[1\ldots n]$ называются* ***потенциалом****, если:*

$$u[i] + v[j] \leq a[i][j] \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Определение 2. *Ребро, соедениющее грани с номерами ij называется* ***жестким****, если: $u[i] + v[j] = a[i][j]$*

Утверждение 1. Заметим, что если есть решение, то есть совершенное паросочетание, использующее только жесткие ребра, то это паросочетание будет ответом на исходную минимализационную задачу.

Обоснование. Пусть sol - это суммарный вес всех ребер, входящих в результирующее паросочетание.

Пусть нашлось соврешенной паросочетание - номер 1 на жесткихх ребрах, тогда

$\sum_{i=1}^{N} u[i]+\sum_{j=1}^{N} v[j] = sol_1$, но любого другого паросочетание под номером q имееем: $\sum_{i=1}^{N} u[i] + \sum_{j=1}^{N} v[j] = sol_q \leq sol_1$, то есть эта сумма не меньше, но ровно стлоько уже есть. $\square$

4.2.1 Описание алгоритма

Алгоритм будет изменять потенциалы таким образом, что бы нашлось совершенное паросочетание на жестких ребрах. Это корректно, благодаря вышедоказанному утверждению.

Пусть u, v - потенциалы, M - паросочетание в графе жёстких рёбер $H = \{(i,j)|u[i]+v[j]=a[i][j]\}$

- В начале алгоритма пологается что $u[i] = v[i] = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$ и $M = \emptyset$
- На каждом шаге алгоритма пытаемся увеличить мощность текущего паросочетания M на еденицу. Для этого в графе H оринтируем все ребра вправо, а ребра из паросочетания ориентируем в лево. Из новой ненасыщенной вершины левой доли ищем удлиняющую цепь, запуская dfs из неё, то есть обход в глубину. Если при этом обходе дошли до свободной вершины правой доли, то в этотм случае получали удлиняющую цепь, значит можем увеличить паросочетание. Иначе слудующий пункт.
- Если не дошли до какой-то свободной вершины правой доли. Обозначим L - левую долю, R - правую долю, L^+, R^+ - вершины, которые были достигнуты во время обхода, L^-, R^- - вершины, которые не были достигнуты во время обхода. Положим $\Delta := \min\left\{a[i][j] - u[i] - v[j], i \in L^+, j \in R^-\right\}$. Затем пересчитаем потенциалы следующим образом:

$$u[i]+ = \Delta, i \in L^+;$$

$$v[j]- = \Delta, j \in R^+$$

При таком пересчете потенциалов не теряются жесткие ребра, участвовашие в предыдущем обходе, и появляется как минимум одно новое жесткое ребро из L^+ в R^-. Пытаемся снова найти удлиняющую цепь. Таким образом при каждом слудующем dfs увеличивается число число вершин, которых достиг алгоритм.

4.2.2 Особенности алгоритам

Сложность: $n \cdot (n \cdot (dfs + n^2)) = O(n^4)$

Гарантируется глобально оптимальное соответствие.

Можно уменьшить сложность до $O(n^3)$ оптимизировав пересчет потенциалов и уменьшив количество поисков вглубину.

5 Заключение

Работа посвящена разработке методов сравнения трёхмерных многогранников. Были предложены метрики для срванения граней:

- Комбинированная метрика на основе евклидовых расстояний между центрами масс и нормалями.
- Метрика симметрической разности проекций с нормированным расстоянием в диапазоне $[0, 1]$.
- Хаусдорфово расстояние между проекциями граней на усреднённую плоскость.

И описаны алгоритмы для сопастовления граней двух многогранников:

- Жадный алгоритм с вычислительной сложностью $O(m^2 \cdot n)$ для быстрого поиска локально оптимальных соответствий.
- Венгерский алгоритм, гарантирующий глобальный оптимум за $O(n^4)$, с возможностью оптимизации до $O(n^3)$.

В качестве меры схожести можно использовать максимальное расстояние между соответствующими гранями после оптимального сопоставления. Формально:

$$d(F, G) = \max_{(f_i, g_j) \in \phi} d(f_i, g_j), \tag{5}$$

где ϕ — соответствие между гранями многогранников F и G, а $d(f_i, g_j)$ — выбранная метрика расстояния между гранями