

Схема с центральными разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная)

Постановка задачи

Решается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \quad (2)$$

Неизвестными функциями являются плотность ρ и скорость u , которые зависят от переменных Эйлера

$$(t, x) \in \bar{Q} = [0; T] \times [0; X].$$

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0, X]$:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \quad x \in [0, X].$$

Для сеточной функции v , заданной на равномерной сетке с шагом h на отрезке $[a, b]$, введём обозначения:

- $\bar{\omega}_h = \{x_i = a + ih \mid i = 0, \dots, N\}$ — множество всех узлов сетки,
- $\omega_h = \{x_i \mid i = 1, \dots, N-1\}$ — множество внутренних узлов,
- $\gamma_h = \{x_0, x_N\}$ — множество граничных узлов.

Для численного решения используется схема с центральными разностями $(\rho, \rho u)$ вида:

$$\begin{aligned} H_t + 0.5(V\hat{H}_{\bar{x}} + (V\hat{H})_{\bar{x}} + HV_{\bar{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0V_{x,0}) - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_MV_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ (HV)_t + \frac{2}{3}(\hat{H}V\hat{V})_{\bar{x}} + \frac{2}{3}\hat{H}V\hat{V}_{\bar{x}} + \frac{V^2}{3}\hat{H}_{\bar{x}} + p(\hat{H})_{\bar{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned}$$

Выписанная выше РС аппроксимирует эквивалентную систему (при условии гладкости решения), уравнения которой выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial \rho u}{\partial x} + 2 \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f. \quad (4)$$

Расписанная схема имеет вид:

$$\frac{\tau}{4h}(V_m^n + V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1} + H_m^{n+1} + \frac{\tau}{4h}(-V_m^n - V_{m-1}^n)H_{m-1}^{n+1} = H_m^n - \frac{\tau}{4h}H_m^n(V_{m+1}^n - V_{m-1}^n) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\tau}{3h}H_{m+1}^{n+1}V_{m+1}^n + \frac{\tau}{3h}H_m^{n+1}V_m^n - \frac{\mu\tau}{h^2} \right) V_{m+1}^{n+1} + \left(H_m^{n+1} + \frac{2\mu\tau}{h^2} \right) V_m^{n+1} \\ & + \left(-\frac{\tau}{3h}H_{m-1}^{n+1}V_{m-1}^n - \frac{\tau}{3h}H_m^{n+1}V_m^n - \frac{\mu\tau}{h^2} \right) V_{m-1}^{n+1} = H_m^n V_m^n - \frac{\tau}{6h}(V_m^n)^2(H_{m+1}^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}) \\ & - \frac{\tau}{2h}(p(H_{m+1}^{n+1}) - p(H_{m-1}^{n+1})) \end{aligned} \quad (6)$$

1 Отладочный тест

Зададим функции давления и скорости:

$$\rho(t, x) = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5) \quad (7)$$

$$u(t, x) = \cos(2\pi t) \sin(4\pi x) \quad (8)$$

Вычислим правые части f_0 и f исходных уравнений:

Для функции $f_0(t, x)$:

$$f_0(t, x) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

Производная плотности по времени:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [e^t(\cos(3\pi x) + 1.5)] = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5)$$

Производная ρu по координате:

$$\rho u = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5) \cdot \cos(2\pi t) \sin(4\pi x)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = e^t \cos(2\pi t) [-3\pi \sin(3\pi x) \sin(4\pi x) + 4\pi \cos(3\pi x) \cos(4\pi x) + 6\pi \cos(4\pi x)]$$

Таким образом, $f_0(t, x)$ имеет вид:

$$f_0(t, x) = e^t (\cos(3\pi x) + 1.5) + e^t \cos(2\pi t) [4\pi \cos(3\pi x) \cos(4\pi x) - 3\pi \sin(3\pi x) \sin(4\pi x) + 6\pi \cos(4\pi x)]$$

В случае линейной зависимости давления от плотности $p = C\rho$:

$$f_{\text{lin}}(t, x, C, \mu) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

где $\rho = e^t (\cos(3\pi x) + 1.5)$.

Производная ρu по времени:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = e^t (\cos(3\pi x) + 1.5) \sin(4\pi x) (\cos(2\pi t) - 2\pi \sin(2\pi t))$$

Производная ρu^2 по координате:

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = e^t \cos^2(2\pi t) [-3\pi \sin(3\pi x) \sin^2(4\pi x) + 8\pi \sin(4\pi x) \cos(4\pi x) \cos(3\pi x) + 12\pi \sin(4\pi x) \cos(4\pi x)]$$

Вторая производная скорости по координате:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -16\pi^2 \cos(2\pi t) \sin(4\pi x)$$

Производная давления по координате для линейного случая:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C e^t \cdot (-3\pi \sin(3\pi x))$$

В случае степенной зависимости давления от плотности $p = \rho^\gamma$:

$$f_{\text{pow}}(t, x, \gamma, \mu) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Все компоненты, кроме производной давления, аналогичны линейному случаю.

Производная давления по координате для степенного случая:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma e^{(\gamma+1)t} (\cos(3\pi x) + 1.5)^{\gamma-1} \cdot (-3\pi \sin(3\pi x))$$

Таким образом, исходная дифференциальная задача с граничными условиями

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(0, x) &= \cos(3\pi x) + 1.5, \quad x \in [0; 1], \\ \hat{u}(0, x) &= \sin(4\pi x), \quad x \in [0; 1], \\ \hat{u}(t, 0) &= \hat{u}(t, 1) = 0, \quad t \in [0; 1], \end{aligned}$$

имеет гладкое точное решение в области $Q = [0; 1] \times [0; 1]$, задаваемое функциями (7, 8).

Численные эксперименты

В ниже приведенных таблицах представлены нормы разностей точного решения плотности (спроецированного на узлы сетки) и численного решения. В каждой ячейке в столбик записаны четыре числа: первые три — это нормы ошибки численного решения в пространствах C_h , L_2^h и $W_2^{1,h}$ соответственно, а последнее число — это время вычисления теста при соответствующих шагах сетки. Нормы C_h , L_2^h и $W_2^{1,h}$ для вектора разности точного и численного решения вычисляются следующим образом:

Норма в C_h :

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_i \in \omega_h} |v_i|.$$

Норма в $L_{2,h}$:

$$\|v\|_{L_2^h} = \sqrt{h \sum_{x_i \in \omega_h} v_i^2 + \frac{h}{2} \sum_{x_i \in \gamma_h} v_i^2}.$$

Норма в W_2^1 :

$$\|v\|_{W_2^{1,h}} = \sqrt{\|v\|_{L_2^h}^2 + h \sum_{x_i \in \omega_h \cup \gamma_h \setminus \{x_N\}} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)^2}.$$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	$2.893845e-01$	$2.915237e-01$	$2.913509e-01$	$2.913015e-01$	$2.913385e-01$	$2.913374e-01$
	$8.611497e-02$	$8.622999e-02$	$8.623645e-02$	$8.623747e-02$	$8.623915e-02$	$8.623975e-02$
	$3.137688e+00$	$3.131871e+00$	$3.129518e+00$	$3.128874e+00$	$3.128766e+00$	$3.128744e+00$
	$7.407000e-03$	$1.487000e-02$	$2.914100e-02$	$5.815800e-02$	$1.157880e-01$	$2.318680e-01$
0.0025	$1.524219e-01$	$1.543208e-01$	$1.547432e-01$	$1.549055e-01$	$1.549308e-01$	$1.549417e-01$
	$4.202855e-02$	$4.260850e-02$	$4.275977e-02$	$4.279980e-02$	$4.281009e-02$	$4.281264e-02$
	$1.483760e+00$	$1.490807e+00$	$1.492612e+00$	$1.493119e+00$	$1.493253e+00$	$1.493286e+00$
	$1.476000e-02$	$2.921000e-02$	$5.818000e-02$	$1.157410e-01$	$2.311380e-01$	$4.626090e-01$
0.00125	$7.691631e-02$	$7.913400e-02$	$7.966958e-02$	$7.980628e-02$	$7.984871e-02$	$7.985736e-02$
	$2.066607e-02$	$2.136305e-02$	$2.156384e-02$	$2.161647e-02$	$2.162970e-02$	$2.163300e-02$
	$7.220191e-01$	$7.325832e-01$	$7.357691e-01$	$7.366206e-01$	$7.368342e-01$	$7.368874e-01$
	$2.937800e-02$	$5.823900e-02$	$1.160410e-01$	$2.312140e-01$	$4.619780e-01$	$9.264950e-01$
0.000625	$3.733308e-02$	$3.972090e-02$	$4.030919e-02$	$4.047760e-02$	$4.051570e-02$	$4.052520e-02$
	$9.988930e-03$	$1.061650e-02$	$1.083062e-02$	$1.088772e-02$	$1.090215e-02$	$1.090576e-02$
	$3.524930e-01$	$3.620059e-01$	$3.655893e-01$	$3.665641e-01$	$3.668107e-01$	$3.668725e-01$
	$5.863100e-02$	$1.163470e-01$	$2.317190e-01$	$4.624440e-01$	$9.230660e-01$	$1.846046e+00$
0.0003125	$1.710448e-02$	$1.957835e-02$	$2.019278e-02$	$2.036015e-02$	$2.039974e-02$	$2.041011e-02$
	$4.860735e-03$	$5.194855e-03$	$5.401525e-03$	$5.459803e-03$	$5.474727e-03$	$5.478480e-03$
	$1.745043e-01$	$1.783389e-01$	$1.817985e-01$	$1.828096e-01$	$1.831359e-01$	$1.831359e-01$
	$1.171520e-01$	$2.324070e-01$	$4.710840e-01$	$9.240540e-01$	$1.852106e+00$	$3.692200e+00$
0.00015625	$7.498453e-03$	$9.400183e-03$	$1.002532e-02$	$1.018984e-02$	$1.023049e-02$	$1.024057e-02$
	$2.823541e-03$	$2.494873e-03$	$2.669442e-03$	$2.726722e-03$	$2.741789e-03$	$2.745601e-03$
	$9.624038e-02$	$8.738025e-02$	$9.017108e-02$	$9.116381e-02$	$9.142896e-02$	$9.149631e-02$
	$2.341350e-01$	$4.651290e-01$	$9.357880e-01$	$1.846729e+00$	$3.734593e+00$	$7.423286e+00$
$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	$4.900888e+00$	$5.133649e+00$	$5.604197e+00$	$5.981867e+00$	$2.363684e+10$	$2.299583e+09$
	$7.799330e-01$	$7.761854e-01$	$7.659045e-01$	$7.751129e-01$	$8.904598e+08$	$1.176841e+08$
	$8.058803e+01$	$9.244111e+01$	$1.213865e+02$	$3.685580e+02$	$4.015233e+12$	$1.063727e+12$
	$7.417000e-03$	$1.463800e-02$	$2.910300e-02$	$5.809800e-02$	$1.271220e-01$	$2.331790e-01$
0.0025	$1.929420e+00$	$1.990965e+00$	$2.006569e+00$	$2.007622e+00$	$2.008172e+00$	$2.008361e+00$
	$3.631623e-01$	$3.718577e-01$	$3.740268e-01$	$3.745687e-01$	$3.747041e-01$	$3.747380e-01$
	$2.510589e+01$	$2.578269e+01$	$2.596047e+01$	$2.600609e+01$	$2.601758e+01$	$2.602046e+01$
	$1.473900e-02$	$2.951600e-02$	$5.800400e-02$	$1.229880e-01$	$2.557010e-01$	$4.616250e-01$
0.00125	$8.367617e-01$	$9.074929e-01$	$9.228006e-01$	$9.275400e-01$	$9.285267e-01$	$9.287728e-01$
	$1.688927e-01$	$1.783897e-01$	$1.808039e-01$	$1.814097e-01$	$1.815613e-01$	$1.815992e-01$
	$1.022621e+01$	$1.065398e+01$	$1.076655e+01$	$1.079507e+01$	$1.080222e+01$	$1.080401e+01$
	$2.934500e-02$	$5.819200e-02$	$1.161320e-01$	$2.417220e-01$	$4.806590e-01$	$9.331000e-01$
0.000625	$3.573832e-01$	$4.231343e-01$	$4.396450e-01$	$4.434951e-01$	$4.444552e-01$	$4.447130e-01$
	$7.670919e-02$	$8.591451e-02$	$8.831782e-02$	$8.892395e-02$	$8.907580e-02$	$8.911379e-02$
	$4.531714e+00$	$4.866648e+00$	$4.961996e+00$	$4.986508e+00$	$4.992677e+00$	$4.994222e+00$
	$5.853700e-02$	$1.161800e-01$	$2.315130e-01$	$4.676090e-01$	$9.246050e-01$	$1.860994e+00$
0.0003125	$1.388926e-01$	$1.970203e-01$	$2.123008e-01$	$2.160633e-01$	$2.169896e-01$	$2.172297e-01$
	$3.255612e-02$	$4.096086e-02$	$4.331812e-02$	$4.391886e-02$	$4.406971e-02$	$4.410746e-02$
	$2.046380e+00$	$2.291703e+00$	$2.377804e+00$	$2.400630e+00$	$2.406414e+00$	$2.407865e+00$
	$1.279320e-01$	$2.326540e-01$	$4.740430e-01$	$9.290540e-01$	$1.858447e+00$	$3.705711e+00$
0.00015625	$8.227427e-02$	$8.819948e-02$	$1.024888e-01$	$1.061607e-01$	$1.070592e-01$	$1.072839e-01$
	$1.293381e-02$	$1.887575e-02$	$2.115212e-02$	$2.174663e-02$	$2.189661e-02$	$2.193419e-02$
	$9.978122e-01$	$1.077601e+00$	$1.154051e+00$	$1.175836e+00$	$1.181434e+00$	$1.182842e+00$
	$2.337100e-01$	$4.761070e-01$	$9.252340e-01$	$1.852444e+00$	$3.689680e+00$	$7.388481e+00$

$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e+00 -nan -nan 1.867200e-02	0.000000e+00 -nan -nan 2.443300e-02	0.000000e+00 nan nan 4.807400e-02	0.000000e+00 -nan -nan 9.570900e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.218770e-01	0.000000e+00 nan nan 2.403440e-01
0.0025	7.054475e+00 1.272566e+00 3.913050e+02 2.434300e-02	0.000000e+00 nan nan 4.807900e-02	0.000000e+00 nan nan 9.575400e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.908370e-01	0.000000e+00 nan nan 2.317490e-01	0.000000e+00 nan nan 4.713370e-01
0.00125	2.564928e+00 3.803479e-01 8.464561e+01 4.857800e-02	3.857608e+00 4.227302e-01 1.810421e+02 9.697500e-02	6.197531e+00 6.064705e-01 3.853700e+02 1.914690e-01	6.093398e+00 1.902754e+00 5.101565e+02 3.812200e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.617600e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.231580e-01
0.000625	1.419521e+00 1.741238e-01 3.484272e+01 9.678000e-02	2.216273e+00 1.796006e-01 5.115149e+01 1.918480e-01	1.726352e+00 1.566479e-01 6.773710e+01 3.828750e-01	1.039263e+00 1.331874e-01 3.161886e+01 7.618870e-01	1.020661e+00 1.377094e-01 3.094928e+01 9.278520e-01	0.000000e+00 -nan -nan 1.869128e+00
0.0003125	6.877637e-01 7.852395e-02 1.596951e+01 1.930050e-01	9.627884e-01 8.556558e-02 1.935555e+01 3.830890e-01	9.843942e-01 8.595773e-02 2.256076e+01 7.640110e-01	8.376073e-01 8.565856e-02 2.207361e+01 1.524760e+00	7.923757e-01 8.570666e-02 2.177715e+01 1.847773e+00	7.828591e-01 8.572498e-02 2.170835e+01 3.690688e+00
0.00015625	3.794978e-01 4.937137e-02 9.650137e+00 3.859240e-01	4.203847e-01 3.918362e-02 8.248641e+00 7.835370e-01	4.428989e-01 4.355501e-02 9.051167e+00 1.534377e+00	4.227906e-01 4.488731e-02 9.249589e+00 2.812675e+00	4.185418e-01 4.523790e-02 9.292250e+00 3.699041e+00	4.174648e-01 4.532674e-02 9.302605e+00 7.386080e+00
$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	3.470153e-02 1.707447e-02 9.329289e-02 7.434000e-03	4.027325e-02 1.698463e-02 5.473767e-01 1.483100e-02	5.609978e+06 1.135779e+06 1.668156e+08 2.914000e-02	1.312251e+09 2.292786e+08 1.646350e+10 5.816100e-02	2.278166e+29 6.143380e+27 2.803154e+31 1.158330e-01	1.270990e+101 4.612069e+100 4.174368e+104 2.315760e-01
0.0025	1.777109e-02 8.674932e-03 4.809207e-02 1.478900e-02	1.716100e-02 8.513864e-03 4.575653e-02 2.927800e-02	1.701379e-02 8.475284e-03 4.521750e-02 5.808800e-02	1.697756e-02 8.465746e-03 4.508570e-02 1.158190e-01	1.696851e-02 8.463368e-03 4.505294e-02 2.311240e-01	1.696625e-02 8.462774e-03 4.504476e-02 4.626720e-01
0.00125	9.314353e-03 4.460908e-03 2.575681e-02 2.945500e-02	8.682180e-03 4.290377e-03 2.321783e-02 5.836000e-02	8.533851e-03 4.251016e-03 2.266651e-02 1.162190e-01	8.497537e-03 4.241390e-03 2.253454e-02 2.314260e-01	8.488502e-03 4.238996e-03 2.250193e-02 4.642230e-01	8.486244e-03 4.238399e-03 2.249380e-02 9.255960e-01
0.000625	5.111654e-03 2.361180e-03 1.487860e-02 5.870700e-02	4.443472e-03 2.174334e-03 1.199482e-02 1.256800e-01	4.292020e-03 2.133745e-03 1.141523e-02 2.326680e-01	4.255482e-03 2.124019e-03 1.128166e-02 4.621770e-01	4.246453e-03 2.121615e-03 1.124902e-02 9.229790e-01	4.244198e-03 2.121015e-03 1.124091e-02 1.854221e+00
0.0003125	3.039179e-03 1.330538e-03 9.775877e-03 1.176900e-01	2.328490e-03 1.116735e-03 6.430955e-03 2.325720e-01	2.170933e-03 1.073935e-03 5.798238e-03 4.672030e-01	2.133966e-03 1.064053e-03 5.660945e-03 9.239240e-01	2.124906e-03 1.061636e-03 5.628101e-03 1.846479e+00	2.122652e-03 1.061035e-03 5.619986e-03 3.691511e+00
0.00015625	2.022007e-03 8.424085e-04 7.510906e-03 2.342660e-01	1.277785e-03 5.907288e-04 3.716549e-03 4.748030e-01	1.110956e-03 5.439327e-04 2.997016e-03 9.263840e-01	1.073117e-03 5.337635e-04 2.852353e-03 1.848054e+00	1.064001e-03 5.313269e-04 2.819031e-03 3.693649e+00	1.061746e-03 5.307245e-04 2.810890e-03 7.383658e+00

$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e+00 nan nan 7.439000e-03	0.000000e+00 -nan -nan 1.470000e-02	0.000000e+00 nan nan 2.918800e-02	0.000000e+00 nan nan 5.805700e-02	0.000000e+00 nan nan 1.160020e-01	0.000000e+00 nan nan 2.332330e-01
0.0025	1.447342e-02 8.086155e-03 4.273009e-02 1.478700e-02	0.000000e+00 nan nan 2.923400e-02	0.000000e+00 nan nan 5.811500e-02	0.000000e+00 nan nan 1.244220e-01	0.000000e+00 nan nan 2.313330e-01	0.000000e+00 nan nan 4.616980e-01
0.00125	7.618541e-03 4.144107e-03 2.334309e-02 3.214200e-02	7.017173e-03 4.004375e-03 2.020443e-02 5.830400e-02	0.000000e+00 nan nan 1.164190e-01	0.000000e+00 nan nan 2.410050e-01	0.000000e+00 nan nan 4.624120e-01	0.000000e+00 nan nan 9.353200e-01
0.000625	4.238767e-03 2.192574e-03 1.421848e-02 5.868300e-02	3.598201e-03 2.024360e-03 1.052328e-02 1.164040e-01	3.458471e-03 1.993195e-03 9.849092e-03 2.318090e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.722120e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.238610e-01	0.000000e+00 nan nan 1.861632e+00
0.0003125	2.573644e-03 1.252290e-03 1.014084e-02 1.174780e-01	1.899704e-03 1.036750e-03 5.788703e-03 2.337210e-01	1.750393e-03 1.001742e-03 5.019055e-03 4.641840e-01	1.717285e-03 9.944316e-04 4.865621e-03 9.349300e-01	1.709393e-03 9.926978e-04 4.830143e-03 1.880127e+00	1.707448e-03 9.922703e-04 4.821461e-03 3.721943e+00
0.00015625	1.748549e-03 8.280625e-04 8.420904e-03 2.342320e-01	1.058703e-03 5.483113e-04 3.537173e-03 4.658310e-01	8.985621e-04 5.062590e-04 2.622240e-03 9.261650e-01	8.637468e-04 4.984515e-04 2.454994e-03 1.868094e+00	8.557285e-04 4.966845e-04 2.418613e-03 3.735896e+00	8.537762e-04 4.962545e-04 2.409885e-03 7.422385e+00
$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e+00 -nan -nan 7.415000e-03	0.000000e+00 nan nan 1.471200e-02	0.000000e+00 -nan -nan 2.917400e-02	0.000000e+00 nan nan 5.801400e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.158030e-01	0.000000e+00 nan nan 2.319420e-01
0.0025	0.000000e+00 nan nan 1.478000e-02	0.000000e+00 -nan -nan 2.922900e-02	0.000000e+00 -nan -nan 5.809700e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.169840e-01	0.000000e+00 nan nan 2.311160e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.629510e-01
0.00125	0.000000e+00 -nan -nan 2.987100e-02	0.000000e+00 nan nan 5.827000e-02	0.000000e+00 nan nan 1.159390e-01	0.000000e+00 -nan -nan 2.419660e-01	0.000000e+00 nan nan 4.621510e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.237800e-01
0.000625	4.804786e-03 2.244008e-03 1.552917e-02 5.870300e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.164210e-01	0.000000e+00 nan nan 2.322940e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.629840e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.238000e-01	0.000000e+00 nan nan 1.855162e+00
0.0003125	2.989562e-03 1.303740e-03 1.149007e-02 1.175890e-01	2.095558e-03 1.054842e-03 6.072177e-03 2.324700e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.636670e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.242390e-01	0.000000e+00 nan nan 1.847257e+00	0.000000e+00 -nan -nan 3.695794e+00
0.00015625	2.087142e-03 8.908657e-04 9.827234e-03 2.346110e-01	1.186917e-03 5.604874e-04 3.797889e-03 4.654460e-01	9.794936e-04 5.146432e-04 2.719082e-03 9.268990e-01	9.309543e-04 5.073829e-04 4.829216e-02 1.847471e+00	4.063144e+00 2.123764e+00 4.842522e+02 3.695550e+00	0.000000e+00 -nan -nan 7.389896e+00

$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e+00 -nan -nan 7.429000e-03	0.000000e+00 nan nan 1.467000e-02	0.000000e+00 nan nan 2.915400e-02	0.000000e+00 -nan -nan 5.800300e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.158500e-01	0.000000e+00 nan nan 2.314530e-01
0.0025	0.000000e+00 nan nan 1.476100e-02	0.000000e+00 -nan -nan 2.927700e-02	0.000000e+00 nan nan 5.808600e-02	0.000000e+00 nan nan 1.159690e-01	0.000000e+00 nan nan 2.311340e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.622800e-01
0.00125	8.204304e+00 2.358930e+00 4.319501e+02 2.939800e-02	0.000000e+00 nan nan 5.825500e-02	0.000000e+00 nan nan 1.160600e-01	0.000000e+00 -nan -nan 2.315200e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.621620e-01	0.000000e+00 nan nan 9.234320e-01
0.000625	3.926593e-03 2.231145e-03 1.349392e-02 5.864200e-02	4.352413e+00 3.236816e-01 1.420743e+02 1.163990e-01	0.000000e+00 nan nan 2.317330e-01	0.000000e+00 nan nan 4.619150e-01	0.000000e+00 nan nan 9.275290e-01	0.000000e+00 -nan -nan 1.845479e+00
0.0003125	2.461054e-03 1.316312e-03 9.633628e-03 1.171160e-01	1.714661e-03 1.031651e-03 5.335081e-03 2.326350e-01	1.529123e-03 9.783640e-04 4.310425e-03 4.630930e-01	1.482896e-03 9.665211e-04 4.061458e-03 9.239220e-01	1.471353e-03 9.636590e-04 3.999812e-03 1.845893e+00	1.468469e-03 9.629497e-04 3.984441e-03 3.702063e+00
0.00015625	1.728140e-03 8.971344e-04 7.748414e-03 2.361940e-01	9.813768e-04 5.577447e-04 3.371825e-03 4.647520e-01	7.954354e-04 4.975614e-04 2.323685e-03 9.261820e-01	7.491536e-04 4.852107e-04 2.072023e-03 1.848197e+00	7.376099e-04 4.823159e-04 2.010185e-03 3.691257e+00	7.347257e-04 4.816046e-04 1.994804e-03 7.378840e+00
$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e+00 -nan -nan 1.678600e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.472000e-02	0.000000e+00 -nan -nan 3.843300e-02	0.000000e+00 nan nan 5.802500e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.250840e-01	0.000000e+00 -nan -nan 2.317480e-01
0.0025	0.000000e+00 nan nan 1.476500e-02	0.000000e+00 nan nan 2.920600e-02	0.000000e+00 nan nan 6.833100e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.253970e-01	0.000000e+00 -nan -nan 2.317490e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.619390e-01
0.00125	0.000000e+00 nan nan 2.938900e-02	0.000000e+00 -nan -nan 5.825900e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.160580e-01	0.000000e+00 nan nan 2.312040e-01	0.000000e+00 nan nan 4.625210e-01	0.000000e+00 nan nan 9.251190e-01
0.000625	3.875203e-03 2.219355e-03 1.329300e-02 5.860400e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.163060e-01	0.000000e+00 nan nan 2.319200e-01	0.000000e+00 nan nan 4.625050e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.242360e-01	0.000000e+00 -nan -nan 1.847788e+00
0.0003125	2.417445e-03 1.306728e-03 9.494630e-03 1.171230e-01	1.707263e-03 1.029704e-03 5.296081e-03 2.325260e-01	0.000000e+00 nan nan 4.735570e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.242640e-01	0.000000e+00 nan nan 1.847724e+00	0.000000e+00 nan nan 3.701977e+00
0.00015625	1.687110e-03 8.879987e-04 7.633719e-03 2.343890e-01	9.719095e-04 5.558151e-04 3.338353e-03 4.650250e-01	7.957610e-04 4.971985e-04 2.315496e-03 9.262090e-01	8.344639e+00 2.806930e+00 3.998717e+03 1.849222e+00	0.000000e+00 nan nan 3.695493e+00	0.000000e+00 nan nan 7.387029e+00

$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e+00 -nan -nan 7.449000e-03	0.000000e+00 -nan -nan 1.469300e-02	0.000000e+00 -nan -nan 2.923800e-02	0.000000e+00 nan nan 5.807400e-02	0.000000e+00 nan nan 1.162890e-01	0.000000e+00 nan nan 2.408650e-01
0.0025	0.000000e+00 nan nan 1.474600e-02	0.000000e+00 nan nan 2.925700e-02	0.000000e+00 -nan -nan 5.809300e-02	0.000000e+00 nan nan 1.163280e-01	0.000000e+00 nan nan 2.313050e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.620320e-01
0.00125	0.000000e+00 -nan -nan 2.939900e-02	0.000000e+00 -nan -nan 5.829500e-02	0.000000e+00 -nan -nan 1.160300e-01	0.000000e+00 -nan -nan 2.312500e-01	0.000000e+00 -nan -nan 4.622240e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.230520e-01
0.000625	0.000000e+00 nan nan 5.864900e-02	0.000000e+00 nan nan 1.216810e-01	0.000000e+00 -nan -nan 2.320680e-01	0.000000e+00 nan nan 4.625580e-01	0.000000e+00 -nan -nan 9.257180e-01	0.000000e+00 nan nan 1.845128e+00
0.0003125	0.000000e+00 -nan -nan 1.172640e-01	0.000000e+00 -nan -nan 2.328580e-01	0.000000e+00 nan nan 4.637990e-01	0.000000e+00 nan nan 9.243740e-01	0.000000e+00 nan nan 1.859363e+00	0.000000e+00 -nan -nan 3.698847e+00
0.00015625	1.641701e-03 8.844172e-04 7.643047e-03 2.343140e-01	0.000000e+00 nan nan 4.685050e-01	0.000000e+00 nan nan 9.270240e-01	0.000000e+00 nan nan 1.849776e+00	0.000000e+00 -nan -nan 3.693884e+00	0.000000e+00 nan nan 7.389611e+00
$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	1.706045e-01 7.077821e-02 1.296421e+00 9.653000e-03	1.695805e-01 7.043296e-02 1.287694e+00 1.919000e-02	1.693242e-01 7.034590e-02 1.285382e+00 3.814700e-02	1.692604e-01 7.032429e-02 1.284789e+00 7.587800e-02	1.692473e-01 7.031900e-02 1.284648e+00 1.515670e-01	1.692432e-01 7.031769e-02 1.284614e+00 3.025240e-01
0.0025	8.457763e-02 3.529897e-02 6.388418e-01 1.925800e-02	8.351026e-02 3.494365e-02 6.297914e-01 3.815900e-02	8.324401e-02 3.485697e-02 6.275862e-01 7.616900e-02	8.317756e-02 3.483581e-02 6.270476e-01 1.519610e-01	8.316295e-02 3.483063e-02 6.269165e-01 3.024310e-01	8.315886e-02 3.482933e-02 6.268839e-01 6.041500e-01
0.00125	4.257291e-02 1.779484e-02 3.217010e-01 3.828100e-02	4.144679e-02 1.742509e-02 3.121911e-01 7.645000e-02	4.119084e-02 1.733935e-02 3.100425e-01 1.517220e-01	4.112669e-02 1.731859e-02 3.095263e-01 3.126680e-01	4.111053e-02 1.731348e-02 3.093995e-01 6.042710e-01	4.110650e-02 1.731220e-02 3.093679e-01 1.207063e+00
0.000625	2.210761e-02 9.146072e-03 1.671480e-01 7.670700e-02	2.077249e-02 8.742080e-03 1.564907e-01 1.521230e-01	2.050818e-02 8.655232e-03 1.543099e-01 3.031910e-01	2.044370e-02 8.634570e-03 1.538001e-01 6.108930e-01	2.042758e-02 8.629485e-03 1.536753e-01 1.217862e+00	2.042355e-02 8.628218e-03 1.536443e-01 2.412986e+00
0.0003125	1.220562e-02 4.896447e-03 9.239549e-02 1.527590e-01	1.054251e-02 4.425231e-03 7.955691e-02 3.038470e-01	1.026370e-02 4.334201e-03 7.723327e-02 6.063870e-01	1.019846e-02 4.313348e-03 7.671819e-02 1.218437e+00	1.018244e-02 4.308263e-03 7.659387e-02 2.428881e+00	1.017842e-02 4.307000e-03 7.656305e-02 4.825812e+00
0.00015625	7.265290e-03 2.862024e-03 5.766995e-02 3.060650e-01	5.511580e-03 2.279748e-03 4.154228e-02 6.077000e-01	5.167952e-03 2.179642e-03 3.891035e-02 1.211955e+00	5.101333e-03 2.158221e-03 3.837610e-02 2.428425e+00	5.085185e-03 2.153107e-03 3.825096e-02 4.836315e+00	5.081202e-03 2.151843e-03 3.822020e-02 9.653870e+00

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	2.044482e-01 7.467224e-02 1.946596e+00 9.635000e-03	0.000000e+00 nan nan 2.819300e-02	0.000000e+00 nan nan 3.620100e-02	0.000000e+00 nan nan 7.167000e-02	0.000000e+00 nan nan 1.427330e-01	0.000000e+00 nan nan 2.853330e-01
0.0025	7.794318e-02 3.414842e-02 7.570298e-01 2.915900e-02	7.704660e-02 3.378200e-02 7.418792e-01 4.877900e-02	0.000000e+00 -nan -nan 7.516800e-02	0.000000e+00 nan nan 1.488110e-01	0.000000e+00 -nan -nan 2.940430e-01	0.000000e+00 -nan -nan 5.965210e-01
0.00125	3.626583e-02 1.655812e-02 3.570426e-01 3.829500e-02	3.592626e-02 1.621748e-02 3.450495e-01 7.656800e-02	3.606035e-02 1.615747e-02 3.431007e-01 1.616030e-01	3.609067e-02 1.614402e-02 3.426782e-01 3.076930e-01	3.609859e-02 1.614076e-02 3.425766e-01 6.117060e-01	3.610112e-02 1.613995e-02 3.429257e-01 1.215711e+00
0.000625	1.820844e-02 8.406248e-03 1.821730e-01 8.487800e-02	1.734556e-02 7.979580e-03 1.675986e-01 1.520680e-01	1.744792e-02 7.921240e-03 1.658908e-01 3.124030e-01	1.748683e-02 7.909751e-03 1.655887e-01 6.141140e-01	1.749701e-02 7.907073e-03 1.655209e-01 1.219736e+00	1.749958e-02 7.906415e-03 1.655045e-01 2.412807e+00
0.0003125	1.016166e-02 4.629786e-03 1.055329e-01 1.620620e-01	8.542526e-03 3.998062e-03 8.382995e-02 3.139090e-01	8.571057e-03 3.928132e-03 8.174155e-02 6.063460e-01	8.606491e-03 3.916765e-03 8.146274e-02 1.209040e+00	8.616719e-03 3.914311e-03 8.140845e-02 2.415086e+00	8.619327e-03 3.913721e-03 8.139584e-02 4.823369e+00
0.00015625	6.932529e-03 3.009020e-03 7.542591e-02 3.052210e-01	4.341762e-03 2.061902e-03 4.393059e-02 6.081100e-01	4.237283e-03 1.963085e-03 4.076177e-02 1.212473e+00	4.264879e-03 1.950225e-03 4.043259e-02 2.418077e+00	4.274843e-03 1.947780e-03 4.038083e-02 4.828728e+00	4.277615e-03 1.947217e-03 4.036981e-02 9.648475e+00
$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e+00 -nan -nan 1.967600e-02	0.000000e+00 nan nan 1.807600e-02	0.000000e+00 nan nan 3.566100e-02	0.000000e+00 nan nan 7.094300e-02	0.000000e+00 nan nan 1.413970e-01	0.000000e+00 nan nan 2.818480e-01
0.0025	0.000000e+00 nan nan 1.885800e-02	0.000000e+00 nan nan 3.699900e-02	0.000000e+00 nan nan 7.102900e-02	0.000000e+00 nan nan 1.410750e-01	0.000000e+00 nan nan 2.812710e-01	0.000000e+00 nan nan 5.619000e-01
0.00125	7.983929e-02 2.342631e-02 5.068147e+00 4.740000e-02	0.000000e+00 -nan -nan 7.542100e-02	0.000000e+00 nan nan 1.500660e-01	0.000000e+00 nan nan 2.820150e-01	0.000000e+00 nan nan 5.613340e-01	0.000000e+00 nan nan 1.121492e+00
0.000625	2.201153e-02 8.655093e-03 4.381088e-01 8.666200e-02	1.687576e-02 7.970136e-03 1.950966e-01 1.520430e-01	1.686784e-02 7.975823e-03 1.948290e-01 3.037280e-01	0.000000e+00 nan nan 6.023120e-01	0.000000e+00 nan nan 1.165194e+00	0.000000e+00 nan nan 2.242980e+00
0.0003125	1.251618e-02 5.092691e-03 1.776548e-01 1.527140e-01	8.661415e-03 3.943722e-03 9.670960e-02 3.038850e-01	8.202282e-03 3.906231e-03 9.440672e-02 6.059600e-01	8.341972e-03 3.914970e-03 9.458416e-02 1.210741e+00	1.700649e+00 3.232768e-01 3.165305e+02 2.415941e+00	5.168797e+00 1.394496e+00 4.645061e+03 4.826810e+00
0.00015625	1.066272e-02 3.871962e-03 1.270728e-01 3.054590e-01	4.914564e-03 2.056291e-03 5.176541e-02 6.078590e-01	4.004981e-03 1.933495e-03 4.664213e-02 1.211678e+00	4.111847e-03 1.937061e-03 4.659634e-02 2.419923e+00	4.150815e-03 1.940142e-03 4.666816e-02 4.831023e+00	4.161059e-03 1.941048e-03 4.669131e-02 9.660136e+00

Вложенная сетка, плотность

В (k)-ой строке таблицы приводятся нормы разности решения (h), полученного на сетке ($Q_{\tau,h}$), и решения (h^k), полученного на сетке ($Q_{\tau/2^k, h/2^k}$) (столбцы таблицы соответствуют различным начальным шагам сетки). В последней строке содержатся нормы погрешности решения (h - ρ) (то есть численного решения и аналитического) на сетке ($Q_{\tau,h}$). В каждой ячейке в столбик записаны три числа: оценки ошибки численного решения в пространствах

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	5.223002e-01 1.350436e-01 5.334825e+00	3.166982e-02 8.600421e-03 2.949122e-01
$h - h^2$	6.128827e-01 1.743737e-01 6.692537e+00	4.780349e-02 1.294066e-02 4.414830e-01
$h - h^3$	6.404276e-01 1.893355e-01 7.216256e+00	5.594455e-02 1.512291e-02 5.146063e-01
$h - \rho$	6.525722e-01 2.022396e-01 7.680877e+00	6.413494e-02 1.731402e-02 5.876434e-01

(C_h), (L_2^h) и ($W_2^{1,h}$) соответственно.

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	6.002904e + 00 1.303480e + 00 1.736705e + 02	3.913667e - 01 7.384558e - 02 4.606453e + 00
$h - h^2$	5.342923e + 00 1.448873e + 00 1.683045e + 02	5.661443e - 01 1.092706e - 01 6.571359e + 00
$h - h^3$	5.475949e + 00 1.494066e + 00 1.646203e + 02	6.485901e - 01 1.266163e - 01 7.480678e + 00
$h - \rho$	5.780942e + 00 1.548715e + 00 1.641333e + 02	7.270385e - 01 1.437217e - 01 8.345515e + 00
$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	0.000000e + 00 -nan -nan	3.417283e - 03 1.700900e - 03 9.083366e - 03
$h - h^2$	0.000000e + 00 -nan -nan	5.120371e - 03 2.550624e - 03 1.359994e - 02
$h - h^3$	0.000000e + 00 -nan -nan	5.970523e - 03 2.975303e - 03 1.585202e - 02
$h - \rho$	0.000000e + 00 -nan -nan	6.819746e - 03 3.399861e - 03 1.810001e - 02
$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1,4}$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	1.810754e - 01 7.431081e - 02 1.464890e + 00	1.653108e - 02 6.948234e - 03 1.244371e - 01
$h - h^2$	2.661235e - 01 1.096692e - 01 2.116489e + 00	2.472064e - 02 1.040477e - 02 1.860476e - 01
$h - h^3$	3.056367e - 01 1.268425e - 01 2.423717e + 00	2.879527e - 02 1.212853e - 02 2.167010e - 01
$h - \rho$	3.458994e - 01 1.436457e - 01 2.718655e + 00	3.285604e - 02 1.384925e - 02 2.472530e - 01
$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1,4}$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	0.000000e + 00 nan nan	1.460322e - 02 6.516847e - 03 1.391208e - 01
$h - h^2$	0.000000e + 00 nan nan	2.162859e - 02 9.692793e - 03 2.057426e - 01
$h - h^3$	0.000000e + 00 nan nan	2.507996e - 02 1.126091e - 02 2.383676e - 01
$h - \rho$	0.000000e + 00 nan nan	2.849158e - 02 1.281607e - 02 2.705524e - 01

Выводы

На основе анализа таблиц с нормами разности точного решения и численного, можно сделать вывод о том, что сходимость имеет порядок $O(\tau + h^2)$. Так же сходимость является условной и имеет вид $\tau \leq \gamma * h$, где коэффициент γ прямо пропорционален μ и обратно пропорционален C

2 Негладкие начальные данные

Задача (2.24) (номер взят из вычислительного практикума)

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5, \\ 2, & x \in [4.5; 5.5], \end{cases} \quad u_0(x) \equiv 0,$$

с граничными условиями

$$u(t, 0) = u(t, 10) = 0, \quad x \in [0; 10], \quad t \in [0; T].$$

Задача (2.25) (номер взят из вычислительного практикума)

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5, \\ 1, & x \in [4.5; 5.5], \end{cases} \quad \rho_0(x) \equiv 1,$$

с граничными условиями

$$u(t, 0) = u(t, 10) = 0, \quad x \in [0; 10], \quad t \in [0; T].$$

В обеих задачах функция f тождественно равна нулю.

Далее приведены таблицы со значениями нормы

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_{C_h}$$

и изменения массы

$$\Delta_m(n) = \frac{\sum_{m \in \bar{\omega}_h} H_m^0 - \sum_{m \in \bar{\omega}_h} H_m^n}{\sum_{m \in \bar{\omega}_h} H_m^0}$$

Сравнение по методу вложенных сеток проводилось на уровне $n_{st}/10$. Условием выхода на стационар считалось

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_{C_h} \leq 3 * 10^{-3}$$

Также таблицы содержат времена стабилизации $T_{st} = \tau \cdot n_{st}$ решений систем в скобках рядом с n_{st} .

Данные 24, плотность

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (221.6125)$
$norm$	$6.335917e-02$	$1.761714e-02$	$7.228164e-03$	$2.999897e-03$
Δ_{massa}	$-8.497222e-05$	$-9.194601e-05$	$-9.062774e-05$	$-9.094270e-05$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho$	
	tau= 0.0005 ,h= 0.001
$h - h^1$	$1.359262e-02$ $1.755467e-03$ $2.907941e+00$
$h - h^2$	$1.273265e-02$ $1.594230e-03$ $2.908683e+00$
$h - h^3$	$1.166943e-02$ $1.515216e-03$ $2.909050e+00$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1029.5975)$
$norm$	$2.884721e-02$	$1.181850e-02$	$7.154859e-03$	$2.999901e-03$
Δ_{massa}	$-9.731352e-04$	$-9.755389e-04$	$-9.758735e-04$	$-9.769669e-04$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho$	
	tau= 0.0005 ,h= 0.001
$h - h^1$	$2.483872e-03$ $1.984384e-03$ $1.122251e+00$
$h - h^2$	$2.870128e-03$ $2.840468e-03$ $1.122289e+00$
$h - h^3$	$3.354881e-03$ $3.282126e-03$ $1.122335e+00$

$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1888.4165)$
$norm$	$1.663703e-02$	$8.284412e-03$	$7.053292e-03$	$2.999551e-03$
Δ_{massa}	$-8.600899e-03$	$-8.616679e-03$	$-8.619704e-03$	$-8.620794e-03$

$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho$	
	tau= 0.0005 ,h= 0.001
$h - h^1$	$3.996291e-02$ $1.819218e-02$ $9.548312e-01$
$h - h^2$	$5.274678e-02$ $2.739384e-02$ $9.730823e-01$
$h - h^3$	$5.724268e-02$ $3.203174e-02$ $9.780669e-01$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (187.483)$
$norm$	$5.051679e-02$	$4.076296e-02$	$1.138141e-02$	$2.997576e-03$
Δ_{massa}	$-9.706896e-04$	$-9.766310e-04$	$-9.769931e-04$	$-9.773238e-04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h-h^1$	4.876355e-03 2.105070e-03 1.707818e+00			
$h-h^2$	4.803402e-03 2.880025e-03 1.707873e+00			
$h-h^3$	4.574847e-03 3.292906e-03 1.707911e+00			
$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (589.1985)$
$norm$	5.722927e-02	2.049438e-02	8.492197e-03	2.999695e-03
Δ_{massa}	-8.653346e-03	-8.666267e-03	-8.669624e-03	-8.669853e-03
$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h-h^1$	1.753049e-02 1.554916e-02 9.412415e-01			
$h-h^2$	2.667826e-02 2.403054e-02 9.438508e-01			
$h-h^3$	3.127825e-02 2.849464e-02 9.454865e-01			
$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (2635.168)$
$norm$	1.471174e-02	1.190990e-02	7.535936e-03	2.999813e-03
Δ_{massa}	-4.519133e-01	-4.519227e-01	-4.519242e-01	-4.519249e-01
$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h-h^1$	4.776488e-01 1.465135e+00 1.715252e+00			
$h-h^2$	4.907690e-01 1.507871e+00 1.751919e+00			
$h-h^3$	4.992168e-01 1.535449e+00 1.775727e+00			
$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (121.3295)$
$norm$	9.500607e-02	7.830013e-02	4.077086e-02	2.998778e-03
Δ_{massa}	-8.662192e-03	-8.691607e-03	-8.695618e-03	-8.696063e-03
$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h-h^1$	1.299958e-02 1.536093e-02 1.188730e+00			
$h-h^2$	2.014361e-02 2.377904e-02 1.189350e+00			
$h-h^3$	2.388400e-02 2.822526e-02 1.189780e+00			
$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (0.0325)$
$norm$	1.426324e+01	1.177890e+01	3.286096e+02	nan
Δ_{massa}	-1.450957e-02	-2.548713e-02	-5.339185e-02	$-nan$
$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h-h^1$	8.959867e-01 1.374053e-01 8.463612e+01			
$h-h^2$	8.468772e-01 1.437453e-01 8.137679e+01			
$h-h^3$	8.461886e-01 1.441987e-01 8.134313e+01			

$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$					$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho$	
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (0.0085)$		tau= 0.0005 ,h= 0.001
$norm$	$1.213832e + 05$	$1.252954e + 15$	$6.039943e + 53$	nan	$h - h^1$	$1.325384e + 00$ $7.984948e - 02$ $9.877549e + 01$
Δ_{massa}	$1.444504e - 02$	$1.079080e + 10$	$-1.645600e + 50$	$-nan$	$h - h^2$	$1.314252e + 00$ $8.962793e - 02$ $9.866825e + 01$
					$h - h^3$	$1.535339e + 00$ $1.076403e - 01$ $1.160462e + 02$

Данные 24, плотность, степенная зависимость

$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.001, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (216.463)$
$norm$	$5.681971e - 02$	$1.864150e - 02$	$7.515143e - 03$	$2.999948e - 03$
Δ_{massa}	$-2.977654e - 04$	$-3.066084e - 04$	$-3.057219e - 04$	$-3.061398e - 04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.001
$h - h^1$	$1.042427e - 02$ $1.571591e - 03$ $2.499881e + 00$
$h - h^2$	$9.622620e - 03$ $1.518655e - 03$ $2.500033e + 00$
$h - h^3$	$8.754757e - 03$ $1.511313e - 03$ $2.499995e + 00$

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.001, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (903.835)$
$norm$	$2.208349e - 02$	$1.044924e - 02$	$6.598849e - 03$	$2.998357e - 03$
Δ_{massa}	$-2.991606e - 03$	$-3.000915e - 03$	$-3.002678e - 03$	$-3.003029e - 03$

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.001
$h - h^1$	$1.123872e - 02$ $8.286158e - 03$ $1.132674e + 00$
$h - h^2$	$1.696776e - 02$ $1.251547e - 02$ $1.133485e + 00$
$h - h^3$	$1.983996e - 02$ $1.466402e - 02$ $1.134021e + 00$

$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.001, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1301.924)$
$norm$	$2.395606e - 02$	$9.554427e - 03$	$5.182929e - 03$	$2.999678e - 03$
Δ_{massa}	$-2.157569e - 02$	$-2.161886e - 02$	$-2.162690e - 02$	$-2.162971e - 02$

$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.001
$h - h^1$	$6.392893e - 02$ $5.462950e - 02$ $1.163546e + 00$
$h - h^2$	$6.755622e - 02$ $7.621944e - 02$ $1.165135e + 00$
$h - h^3$	$6.966330e - 02$ $8.796646e - 02$ $1.166136e + 00$

Картинки

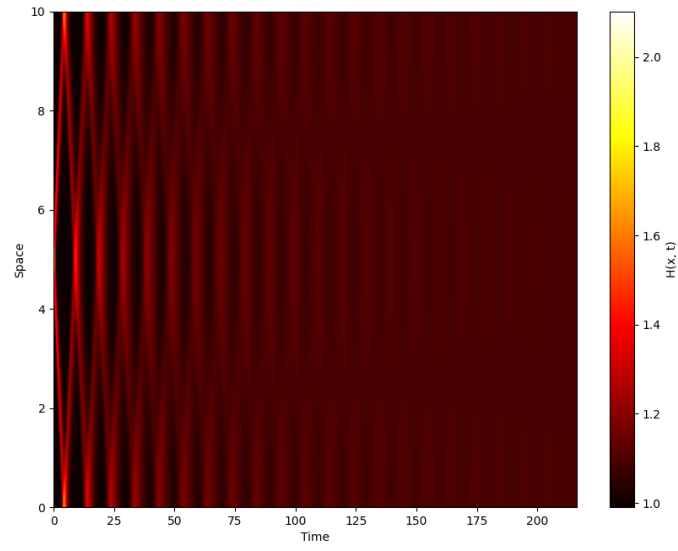


Figure 1: $\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Плотность

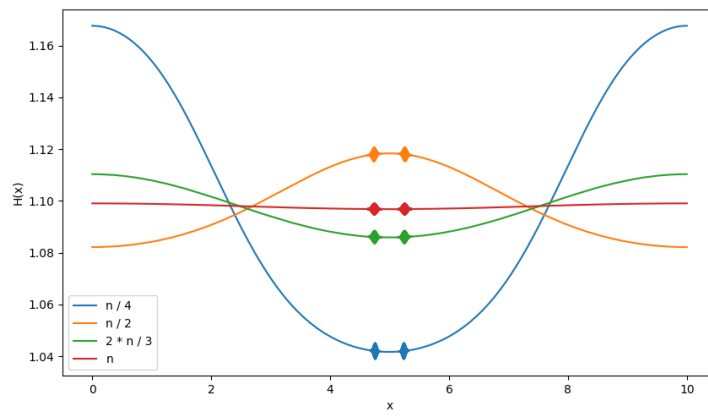


Figure 2: $\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Плотность

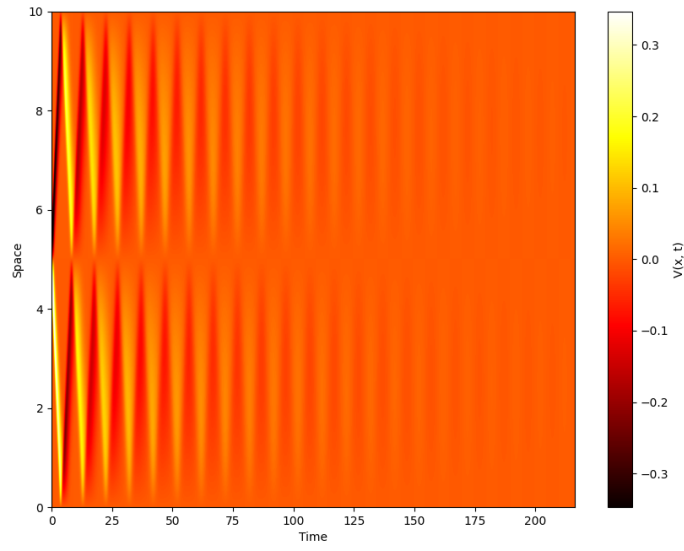


Figure 3: $\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Скорость

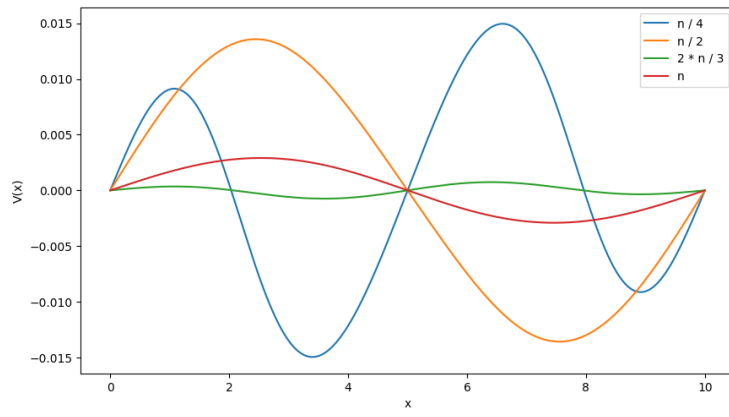


Figure 4: $\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Скорость

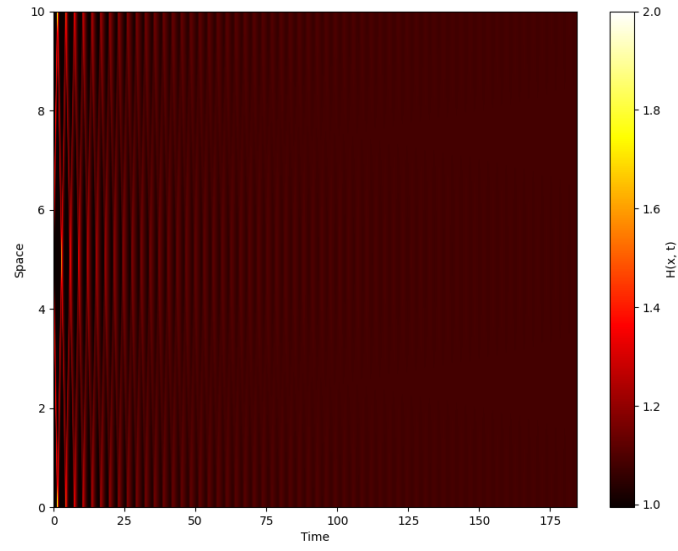


Figure 5: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Плотность

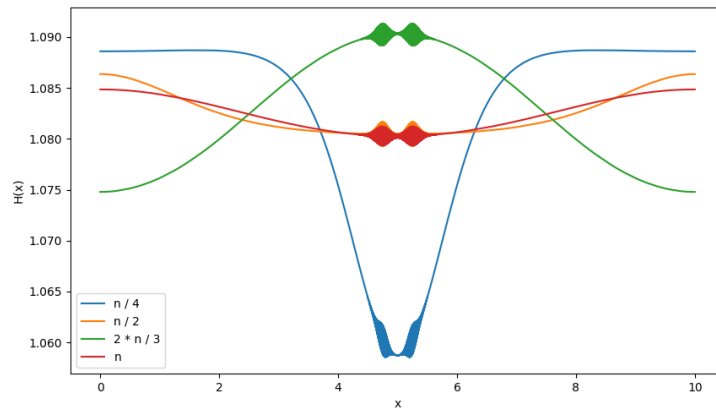


Figure 6: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Плотность

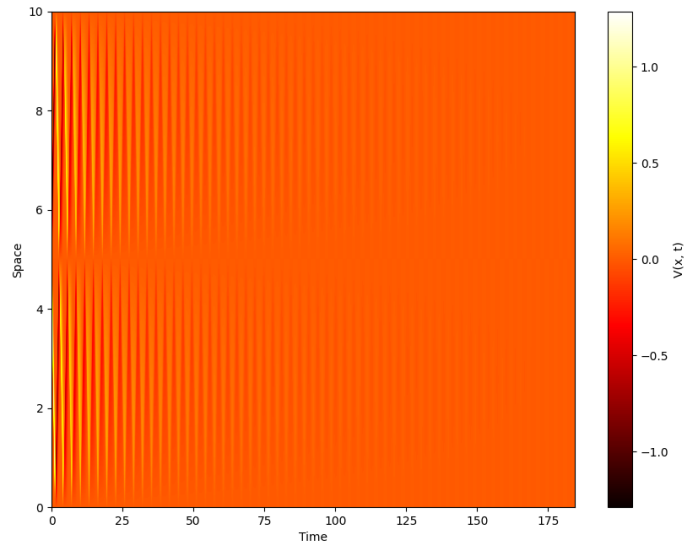


Figure 7: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Скорость

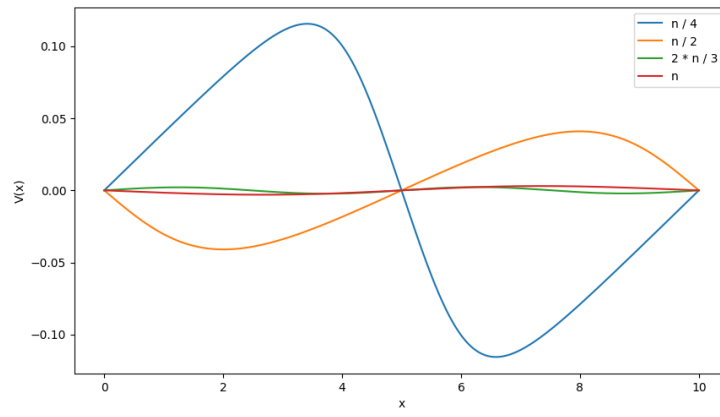


Figure 8: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Скорость

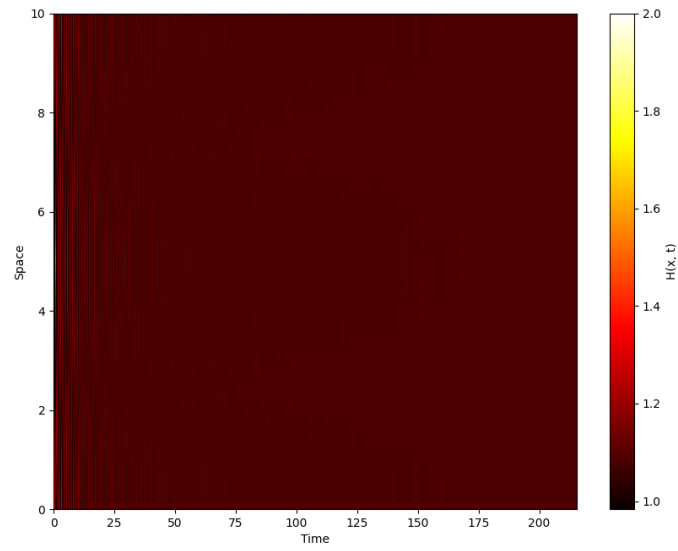


Figure 9: $\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$, Плотность

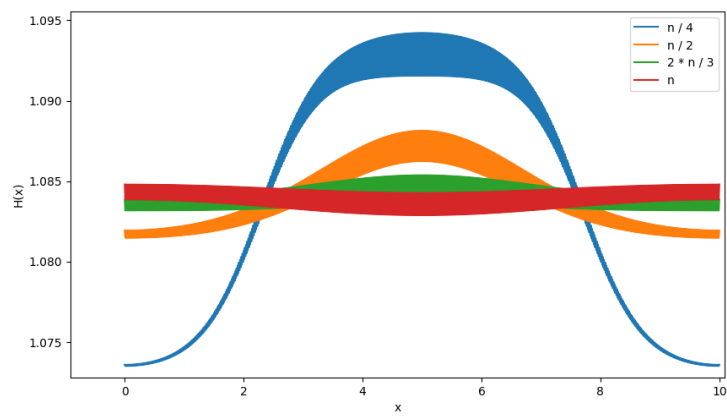


Figure 10: $\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$, Плотность

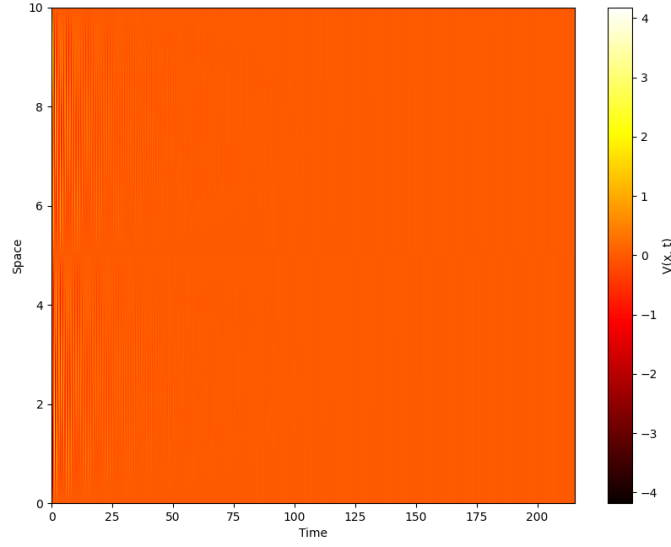


Figure 11: $\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$, Скорость

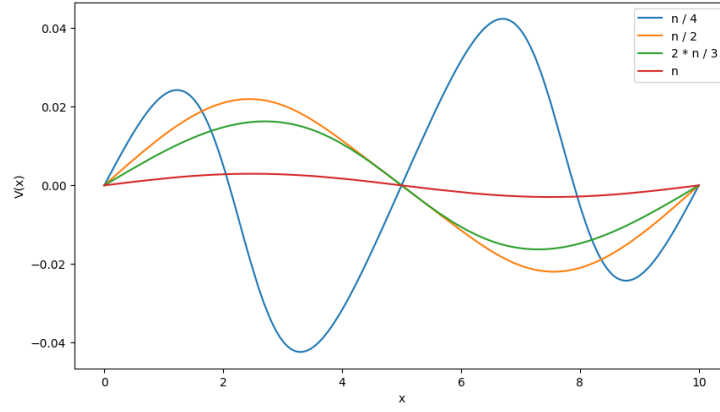


Figure 12: $\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$, Скорость

Данные 25, плотность

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (668.349)$
$norm$	$3.839660e-02$	$1.837735e-02$	$6.169164e-03$	$2.999325e-03$
Δ_{massa}	$-2.805473e-04$	$-2.704568e-04$	$-2.708536e-04$	$-2.713101e-04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho$	
	$\tau = 0.001, h = 0.01$
$h - h^1$	$1.318447e-03$
	$7.613866e-04$
	$9.584584e-02$
$h - h^2$	$9.822267e-04$
	$9.291926e-04$
	$9.587787e-02$
$h - h^3$	$8.932684e-04$
	$1.029921e-03$
	$9.590548e-02$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (2696.025)$
$norm$	$1.031167e-02$	$7.200311e-03$	$6.532619e-03$	$2.999496e-03$
Δ_{massa}	$-2.652262e-03$	$-2.651142e-03$	$-2.653354e-03$	$-2.654120e-03$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho$				
	tau= 0.001 ,h= 0.01			
$h - h^1$	8.067912e - 03 7.412692e - 03 4.912018e - 01			
$h - h^2$	1.220649e - 02 1.099125e - 02 4.914019e - 01			
$h - h^3$	1.428295e - 02 1.283583e - 02 4.915342e - 01			
$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (4432.029)$
$norm$	1.043870e - 02	8.910663e - 03	5.280984e - 03	2.999562e - 03
Δ_{massa}	-1.834481e - 02	-1.835165e - 02	-1.835915e - 02	-1.835982e - 02
$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho$				
	tau= 0.001 ,h= 0.01			
$h - h^1$	2.891479e - 02 3.581518e - 02 8.358497e - 02			
$h - h^2$	3.335960e - 02 5.178577e - 02 9.186983e - 02			
$h - h^3$	3.609001e - 02 6.169430e - 02 9.803321e - 02			
$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (596.762)$
$norm$	3.975561e - 02	8.651050e - 03	4.801005e - 03	2.999910e - 03
Δ_{massa}	-2.488496e - 04	-2.553449e - 04	-2.564704e - 04	-2.565404e - 04
$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.001 ,h= 0.01			
$h - h^1$	3.864145e - 04 5.330813e - 04 4.495568e - 03			
$h - h^2$	5.789405e - 04 7.987596e - 04 4.541646e - 03			
$h - h^3$	6.750737e - 04 9.319649e - 04 4.571391e - 03			
$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1577.446)$
$norm$	1.069576e - 02	8.405689e - 03	7.585584e - 03	2.999356e - 03
Δ_{massa}	-2.456290e - 03	-2.456908e - 03	-2.458633e - 03	-2.459232e - 03
$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.001 ,h= 0.01			
$h - h^1$	1.201349e - 02 8.200527e - 03 2.306872e - 02			
$h - h^2$	1.654842e - 02 1.204669e - 02 3.053420e - 02			
$h - h^3$	1.837793e - 02 1.388256e - 02 3.332919e - 02			
$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (3111.878)$
$norm$	1.513513e - 02	6.666290e - 03	4.151094e - 03	2.999496e - 03
Δ_{massa}	-2.034701e - 02	-2.038516e - 02	-2.039229e - 02	-2.039477e - 02
$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.001 ,h= 0.01			
$h - h^1$	3.836405e - 02 3.564481e - 02 8.081182e - 02			
$h - h^2$	3.742961e - 02 5.325555e - 02 8.493130e - 02			
$h - h^3$	3.827886e - 02 6.009488e - 02 8.853184e - 02			

$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (416.583)$
$norm$	$6.413318e-02$	$2.158382e-02$	$5.502423e-03$	$2.998807e-03$
Δ_{massa}	$-2.472916e-04$	$-2.536136e-04$	$-2.551573e-04$	$-2.555867e-04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$3.050130e-04$ $4.493134e-04$ $5.943127e-04$
$h - h^2$	$4.513209e-04$ $6.710775e-04$ $8.115232e-04$
$h - h^3$	$5.229668e-04$ $7.812033e-04$ $9.238038e-04$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1492.911)$
$norm$	$2.975033e-02$	$1.912081e-02$	$8.641108e-03$	$2.998468e-03$
Δ_{massa}	$-2.640325e-03$	$-2.647241e-03$	$-2.649774e-03$	$-2.650962e-03$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$8.178285e-03$ $7.671919e-03$ $1.458103e-02$
$h - h^2$	$8.869416e-03$ $1.027256e-02$ $1.619646e-02$
$h - h^3$	$9.106382e-03$ $1.144787e-02$ $1.697637e-02$

$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (0.16)$
$norm$	$1.017441e+00$	$9.159054e-01$	$2.660307e+00$	nan
Δ_{massa}	$-1.577254e-04$	$-8.152739e-04$	$-4.341561e-03$	$-nan$

$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$4.148880e-02$ $1.075825e-02$ $1.540234e+00$
$h - h^2$	$3.103599e-02$ $9.959213e-03$ $1.267312e+00$
$h - h^3$	$3.636007e-02$ $1.016260e-02$ $1.267381e+00$

Данные 25, плотность, степенная зависимость

$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (625.827)$
$norm$	$2.812249e-02$	$1.489850e-02$	$7.357532e-03$	$2.999837e-03$
Δ_{massa}	$-2.680372e-04$	$-2.655706e-04$	$-2.670171e-04$	$-2.668034e-04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$9.091587e-04$ $5.795505e-04$ $5.009672e-02$
$h - h^2$	$8.620653e-04$ $7.857459e-04$ $5.012540e-02$
$h - h^3$	$7.995977e-04$ $8.969821e-04$ $5.016078e-02$

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (2253.399)$
$norm$	$1.346128e-02$	$6.656399e-03$	$6.116539e-03$	$2.999672e-03$
Δ_{massa}	$-2.576410e-03$	$-2.573796e-03$	$-2.572480e-03$	$-2.574684e-03$

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$1.116737e-02$ $8.405799e-03$ $2.874337e-02$
$h - h^2$	$1.644330e-02$ $1.266155e-02$ $3.546773e-02$
$h - h^3$	$1.891122e-02$ $1.477518e-02$ $3.878311e-02$

$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.01, \tau = 0.0001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (3756.8286)$
$norm$	$9.356509e-03$	$5.124079e-03$	$3.691411e-03$	$2.999959e-03$
Δ_{massa}	$-2.468180e-03$	$-2.470134e-03$	$-2.470573e-03$	$-2.470738e-03$

$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.0001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$1.995535e-02$ $9.129446e-03$ $9.638065e-02$
$h - h^2$	$2.114815e-02$ $1.131954e-02$ $9.736638e-02$
$h - h^3$	$2.171822e-02$ $1.248057e-02$ $9.770504e-02$

Картинки

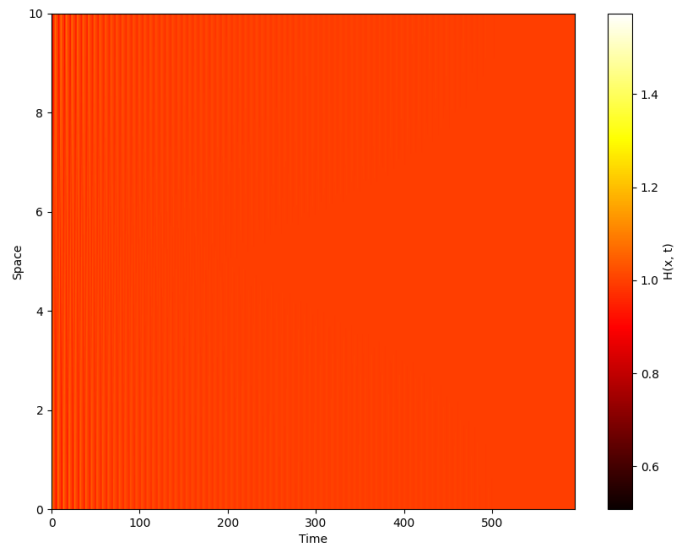


Figure 13: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.01$, Плотность

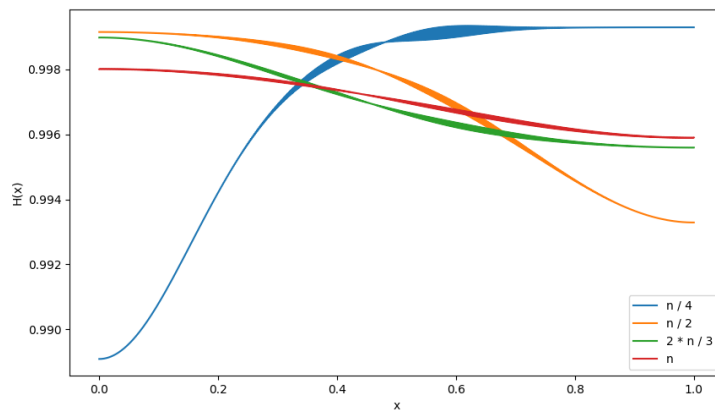


Figure 14: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.01$, Плотность

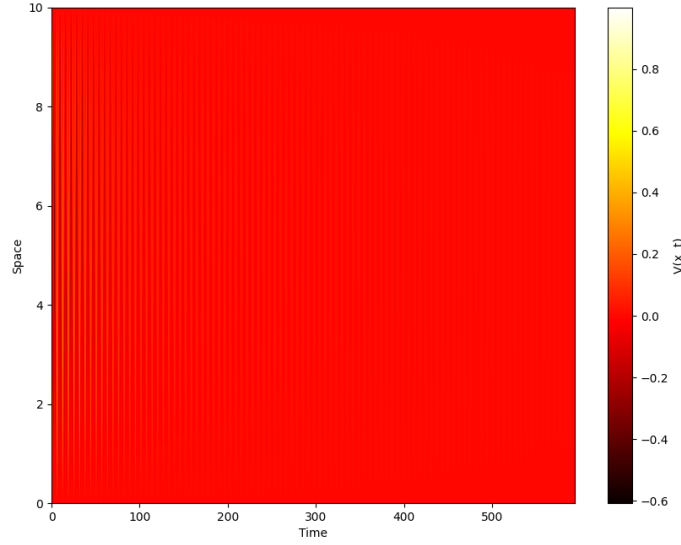


Figure 15: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.01$, Скорость

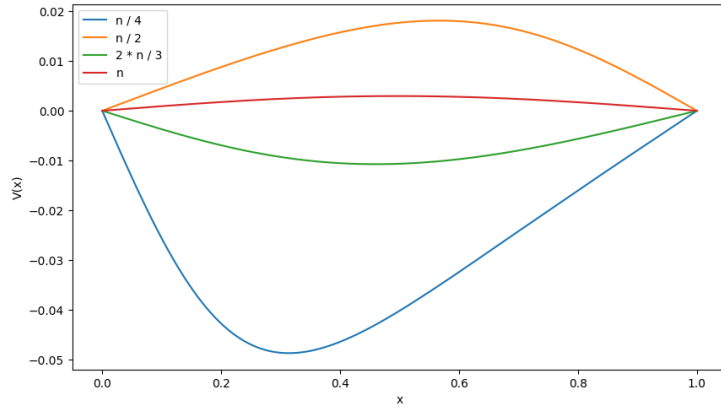


Figure 16: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.01$, Скорость

Выводы

Наблюдается, что при уменьшении коэффициента вязкости процесс стабилизации протекает существенно медленнее. Также отмечается, что при увеличении коэффициента $C : p = C \cdot \rho$ длина цикла сокращается, а процесс стабилизации протекает быстрее. Также схема не является консервативной и изменение в массе соизмеримо с порядком аппроксимации.

3 Стабилизация осциллирующей функции

В области $Q = [0; T] \times [0, 1]$ ставятся две задачи с различными начальными и краевыми условиями:

$$(2.27) \quad \begin{cases} \rho_0(x) = 2 + \sin(k\pi x), & x \in [0, 1], \\ u_0(x) \equiv 0, & x \in [0, 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in [0, T], \\ f \equiv 0, \end{cases}$$

$$(2.28) \quad \begin{cases} \rho_0(x) \equiv 1, & x \in [0, 1], \\ u_0(x) = \sin(k\pi x), & x \in [0, 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in [0, T], \\ f \equiv 0. \end{cases}$$

Натуральное число k , задающее количество колебаний начальной функции, выбиралось для численного эксперимента из диапазона от 1 до $M/10$, где $Mh = 1$.

Далее приведены таблицы со значениями нормы

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_{C_h}$$

Условием выхода на стационар считалось

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_{C_h} \leq 6 \cdot 10^{-3}$$

Начальные данные 2.28

Линейная зависимость

k	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$
1	9.819800	57.645300	191.948400	8.329000	42.872700	99.773400	6.045200	30.250300	99.768200
2	2.564000	17.836800	68.327600	2.116300	14.165900	38.344600	1.622700	9.175100	38.183900
3	1.130800	8.688800	36.873000	0.989200	7.228600	23.142700	0.715400	4.816900	20.955800
4	0.639600	5.263500	24.158600	0.583000	4.374200	15.936000	0.411600	3.012900	13.441800
5	0.463400	3.425100	17.328600	0.344800	2.930600	11.738100	0.269300	2.070400	9.433400
6	0.345300	2.514000	13.108300	0.236100	2.126000	9.097200	0.191100	1.508900	7.027800
7	0.377700	1.874200	10.094600	0.199500	1.596700	7.301000	0.135400	1.150400	5.438100
8	0.394900	1.475400	8.331800	0.138900	1.239300	5.993500	0.106000	0.906400	4.383300
9	0.400600	1.200400	6.741200	0.122000	0.996300	5.011600	0.083100	0.728300	3.596300
10	0.401100	0.982300	5.667600	0.106300	0.833200	4.289100	0.064900	0.604700	3.016700
$10 + \frac{1 \cdot M}{10}$	0.281300	0.041700	0.082300	0.028000	0.007700	0.071500	0.003300	0.006100	0.051200
$10 + \frac{2 \cdot M}{10}$	0.327400	0.043000	0.026000	0.032600	0.003900	0.021800	0.003200	0.002400	0.015400
$10 + \frac{3 \cdot M}{10}$	0.412400	0.050100	0.018500	0.041200	0.004800	0.011400	0.004000	0.001500	0.009100
$10 + \frac{4 \cdot M}{10}$	0.519500	0.060700	0.023000	0.052100	0.006200	0.010000	0.005200	0.003800	0.043300
$10 + \frac{5 \cdot M}{10}$	0.671900	0.076600	0.057600	0.067800	0.009100	0.026700	0.007400	0.010600	0.100300
$10 + \frac{6 \cdot M}{10}$	1.047300	0.117600	0.078900	0.105500	0.014700	0.034700	0.011900	0.023900	0.401400
$10 + \frac{7 \cdot M}{10}$	1.685600	0.186100	0.107900	0.168500	0.020900	0.048900	0.017800	0.038800	0.501600
$10 + \frac{8 \cdot M}{10}$	3.118600	0.343500	0.121500	0.312300	0.035800	0.080700	0.031700	0.046000	0.100600
$10 + \frac{9 \cdot M}{10}$	9.904200	1.098800	0.183200	0.991800	0.111900	0.135600	0.099900	0.044900	0.149300

Степенная зависимость

k	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$
1	9.416000	52.105400	125.826200
2	2.499300	16.522500	53.615500
3	1.139000	8.200100	30.670700
4	0.666700	5.006000	20.887500
5	0.427200	3.332900	15.018100
6	0.298000	2.411200	11.667900
7	0.247200	1.825600	9.034700
8	0.254400	1.392300	7.481200
9	0.267900	1.141000	6.180900
10	0.273300	0.942000	5.224100
$10 + \frac{1 \cdot M}{10}$	0.200500	0.028600	0.080100
$10 + \frac{2 \cdot M}{10}$	0.233100	0.030200	0.025800
$10 + \frac{3 \cdot M}{10}$	0.293500	0.035500	0.014300
$10 + \frac{4 \cdot M}{10}$	0.370300	0.043400	0.015000
$10 + \frac{5 \cdot M}{10}$	0.480800	0.054200	0.033700
$10 + \frac{6 \cdot M}{10}$	0.739400	0.083300	0.000500
$10 + \frac{7 \cdot M}{10}$	1.209100	0.132800	0.000400
$10 + \frac{8 \cdot M}{10}$	2.229200	0.246100	0.100600
$10 + \frac{9 \cdot M}{10}$	7.073600	0.788800	0.133600

Начальные данные 2.27

Линейная зависимость

k	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$
1	4.795900	34.764600	106.767700	5.772200	36.130800	103.335700	6.384600	34.824600	0.032200
2	16.526300	94.445000	228.424000	18.141600	88.649900	169.294700	15.919100	59.229100	0.024500
3	4.814200	32.329000	100.780700	5.456600	31.861700	84.363900	5.296200	25.024200	0.039400
4	13.511000	81.447800	160.447400	16.242500	74.736800	149.751900	14.617700	46.525100	0.030800
5	3.781000	30.183200	99.155800	4.523700	30.872500	81.153300	4.905900	23.458200	0.030200
6	11.596600	78.443000	144.491700	15.075400	72.525500	115.891700	14.317500	47.012300	0.025900
7	3.272900	27.162900	98.099800	4.048800	30.222700	79.232600	4.534500	22.850900	0.023300
8	10.502400	76.442300	135.448200	14.343700	71.887100	96.551100	14.117500	47.403400	0.022300
9	2.770500	24.665600	97.567900	3.734400	29.425400	78.903700	4.253300	22.546600	0.020500
10	9.565400	74.442100	130.432600	13.490800	71.569900	100.028200	13.917200	46.899600	0.020300
$10 + \frac{1 \cdot M}{10}$	1.462400	7.452500	65.435800	4.225500	37.098200	87.359600	6.516700	37.708700	0.164700
$10 + \frac{2 \cdot M}{10}$	64.164800	7.570100	22.466600	3.677200	15.279500	77.560900	4.618500	26.809700	0.188600
$10 + \frac{3 \cdot M}{10}$	502.623500	28.456500	13.474800	45.340400	7.697700	57.022300	5.169000	21.011500	0.002500
$10 + \frac{4 \cdot M}{10}$	329.801700	15.385900	10.477600	33.199900	5.805400	45.019200	3.676700	18.114900	0.002500

Степенная зависимость

k	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$
1	5.067900	33.252500	93.504500
2	17.271900	87.132600	186.082900
3	4.902000	30.490900	85.794300
4	14.327600	73.166800	147.180800
5	3.820100	29.555600	83.842600
6	12.853600	70.951400	120.548500
7	3.462300	27.809100	83.365400
8	12.111200	70.215200	109.429900
9	3.101500	26.034200	82.773700
10	10.723200	69.480700	106.484700
$10 + \frac{1 \cdot M}{10}$	1.794200	12.812900	85.818900
$10 + \frac{2 \cdot M}{10}$	34.336300	5.564500	34.971900
$10 + \frac{3 \cdot M}{10}$	263.318800	16.535700	20.971700
$10 + \frac{4 \cdot M}{10}$	179.994900	8.357700	16.548800
$10 + \frac{5 \cdot M}{10}$	4529.695800	15.056900	15.809700
$10 + \frac{6 \cdot M}{10}$	283.271200	17.217400	10.654500
$10 + \frac{7 \cdot M}{10}$	2416.262600	239.630400	25.338400

Выводы

На основе анализа результатов численного эксперимента, представленных в таблицах, можно сделать следующие выводы о времени стабилизации решения:

- **Зависимость от частоты (k):** Наблюдается обратная зависимость между волновым числом k и временем стабилизации. С увеличением частоты начальных колебаний время, необходимое для прихода системы к равновесному состоянию, уменьшается. Но при значительных значениях k время стабилизации начинает увеличиваться. Так же при начальных данных 27 время стабилизации решения при четных k больше чем при соответствующих нечетных.
- **Зависимость от вязкости (μ):** Уменьшение вязкост приводит к значительному увеличению времени стабилизации. Но при значительных значениях k увеличения вязкости приводит к ускорению стабилизации.

4 Задача "протекания"

Зададим начальные и граничные условия, которые определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 1, & x \in [0, 10] \\ u_0(x) = 0, & x \in [0, 10] \\ u(t, 0) = \tilde{v}, & t \in [0, T] \\ \rho(t, 0) = \tilde{\rho}, & t \in [0, T] \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=10} = 0, & t \in [0, T] \end{cases}$$

Область $\Omega = [0, T] \times [0, 10]$, а функции f и f_0 тождественно равны 0. Параметры \tilde{v} ($\tilde{v} > 0$) и $\tilde{\rho}$ ($\tilde{\rho} \geq 1$) задают скорость и плотность "набегающего" потока.

Вычисления будут проводиться до времени $N_0\tau$, при котором решение перестанет зависеть от времени (выйдет на стационар). Критерием выхода на стационар будем считать выполнение условия:

$$\|(H^n, V^n) - (H^{n_{st}}, V^{n_{st}})\|_C \leq 10^{-4}$$

при $n_{st} \leq n \leq n_{st} + 50$, где n_{st} — момент выхода на стационар.

Численные эксперименты

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	37.183600	26.667400	13.384900	9.111800	7.107800	6.110700	5.749400
2	10.595000	16.015400	10.927700	8.008400	6.983100	6.265400	5.426400
3	8.813600	13.246400	10.036900	7.750200	6.617700	5.981800	5.529400
4	23.592000	11.984800	9.547400	7.660900	6.436000	6.046600	5.408500
5	43.565500	11.279400	9.218700	7.616400	6.857500	6.254500	5.327200
6	49.194500	10.787800	8.979100	7.805500	6.756500	6.202600	5.267000
7	53.766400	10.948400	8.425100	7.693000	6.873800	6.147400	5.215200

$\mu = 0.1, p(\rho) = 10 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	20.626700	16.714200	14.732000	27.878700	22.600000	10.640000	8.016000
2	16.710700	18.382500	18.432000	26.318500	9.215900	6.922300	5.618400
3	14.478200	18.423700	5.172500	14.001300	6.841500	4.542300	4.833900
4	18.470000	5.255900	22.310200	12.787900	5.980400	4.062800	4.487400
5	21.764400	9.460100	25.728500	12.860300	5.894600	4.025300	3.798800
6	17.536300	22.318000	28.387000	12.871400	5.885200	4.111500	3.727500
7	6.306200	24.779700	30.805300	12.864200	5.874900	4.046200	3.669300

$\mu = 0.1, p(\rho) = 100 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	18.218600	14.554200	10.947700	9.338300	8.560500	8.270700	7.106900
2	12.600700	9.325000	8.206000	7.432200	8.218500	8.642300	7.598500
3	9.166400	7.082900	7.809600	8.355900	8.555100	12.317600	18.367800
4	7.981800	7.641600	6.752500	9.938100	16.406800	14.936100	10.225800
5	7.070600	8.240000	9.617600	17.391900	3.603800	22.016300	22.348600
6	7.950700	8.096600	15.271800	6.192100	22.117500	22.353000	22.368400
7	6.428800	11.653100	21.126300	20.950800	22.349800	22.366800	22.371700

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	40.814600	31.269500	13.932800	10.037600	8.413100	6.958400	6.254100
2	14.824300	20.504500	11.711300	9.365800	7.744100	6.803000	5.742500
3	13.660800	16.460900	10.745800	8.661200	7.469700	6.539400	5.527800
4	29.475600	11.916900	9.954400	8.272600	7.304600	6.386700	5.403800
5	44.587400	11.454600	9.599100	8.030100	7.188900	6.284800	5.321100
6	49.482700	11.698700	9.440100	7.867100	7.131400	6.207900	5.258700
7	53.910000	11.958100	9.419400	8.789800	7.071200	6.146900	5.206600

$\mu = 0.01, p(\rho) = 10 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	24.221000	17.921900	15.077300	30.039100	23.725200	12.437000	8.548800
2	17.704700	19.026000	22.102600	26.204600	9.433200	6.139400	4.604200
3	15.389300	22.107700	4.140500	13.480100	6.691300	4.527300	4.081300
4	22.605400	3.994200	22.793700	12.261000	5.748500	4.099900	3.940600
5	22.669200	13.033600	25.757600	12.279100	5.629500	4.245400	3.845100
6	6.743500	23.042900	28.382000	12.281500	5.624800	4.161100	3.776100
7	4.129600	25.114800	30.789700	12.280100	5.622100	4.094500	3.719800

$\mu = 0.01, p(\rho) = 100 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	24.293400	16.700300	12.004800	10.424800	9.996200	9.162000	9.039700
2	5.357100	5.971500	6.527700	7.551200	8.369700	9.496200	8.597500
3	6.930700	4.857300	6.297500	8.476700	11.902200	17.409800	22.851000
4	7.537800	10.062400	14.068200	20.311800	22.909500	9.312800	15.592000
5	17.899300	22.177800	22.938600	8.608400	14.288000	22.354700	22.365600
6	58.459000	3.218900	12.636700	22.343300	22.364400	22.366800	22.369600
7	10.953200	16.589500	22.359200	22.365500	22.368600	22.370300	22.372100

Картинки

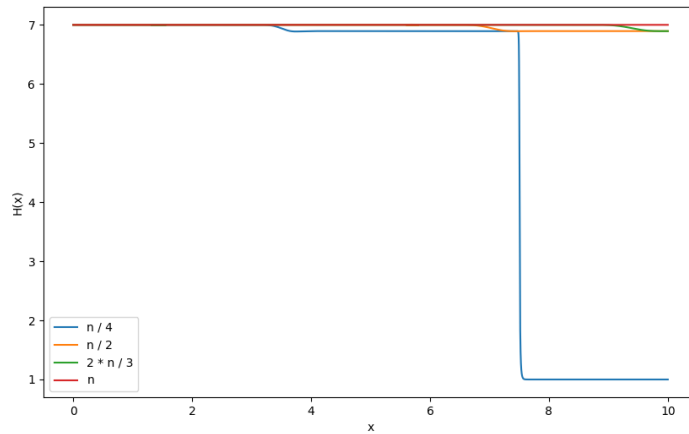


Figure 17: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, u = 7, \rho = 7$, Плотность

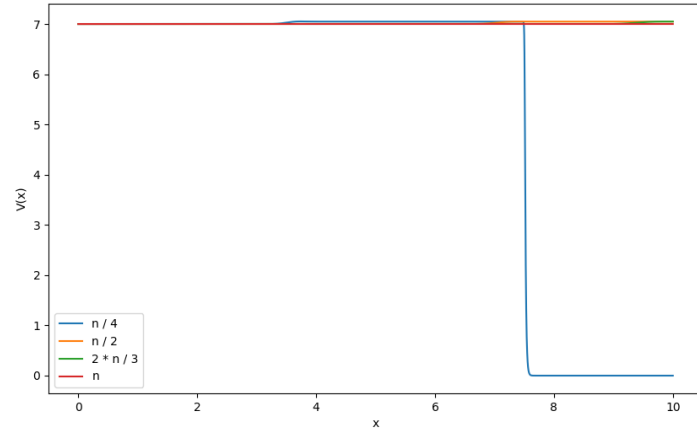


Figure 18: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, u = 7, \rho = 7$, Скорость

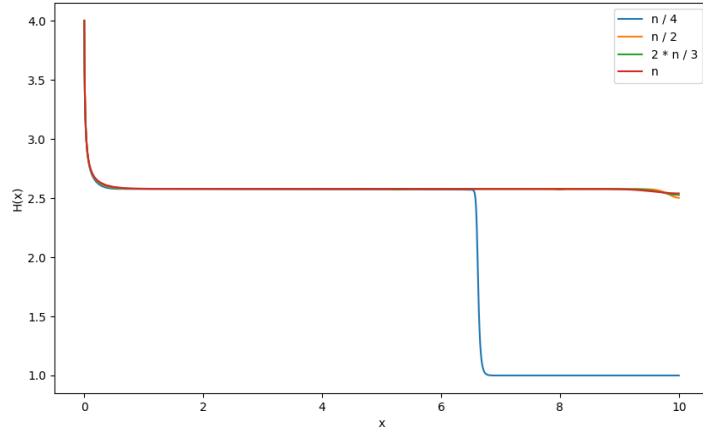


Figure 19: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, u = 2, \rho = 4$, Плотность

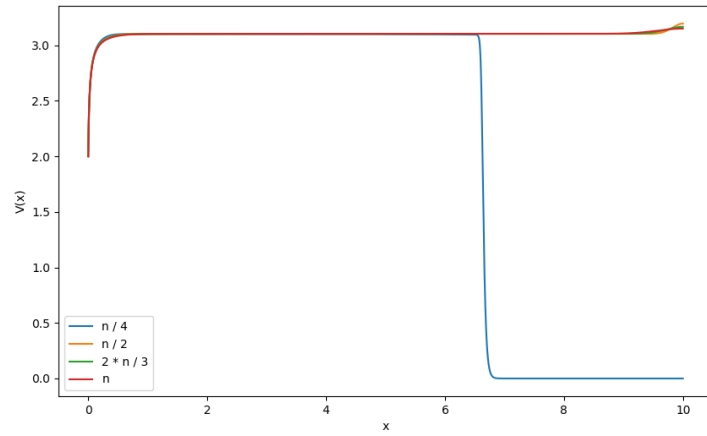


Figure 20: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, u = 2, \rho = 4$, Скорость

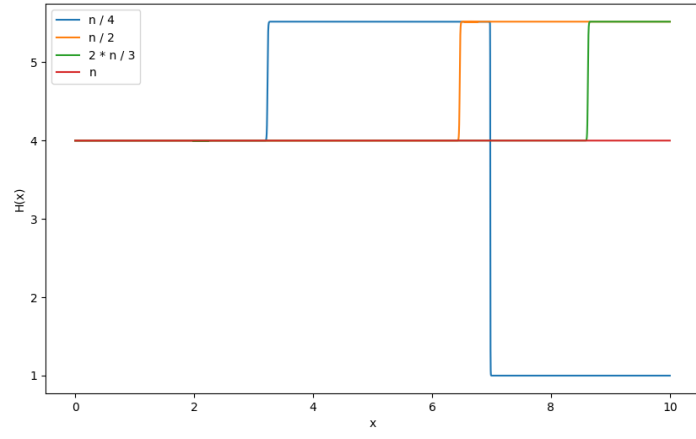


Figure 21: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 7, \rho = 4$, Плотность

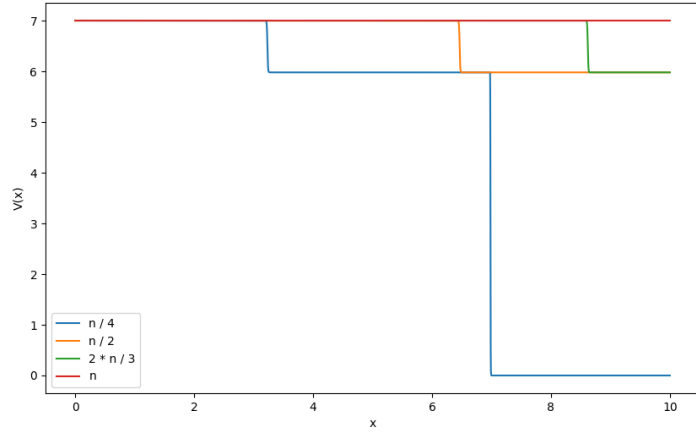


Figure 22: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 7, \rho = 4$, Скорость

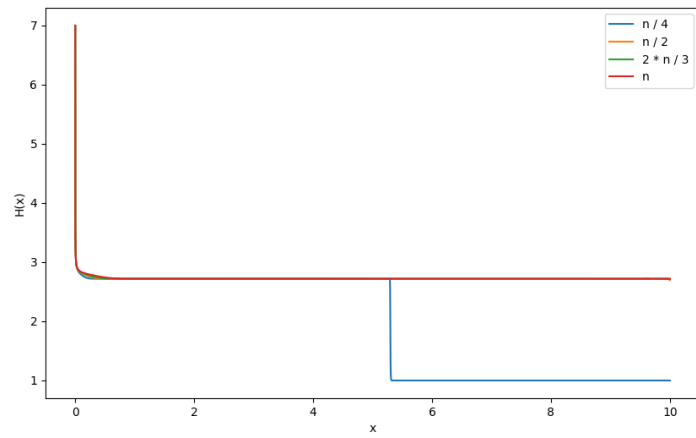


Figure 23: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 1, \rho = 7$, Плотность

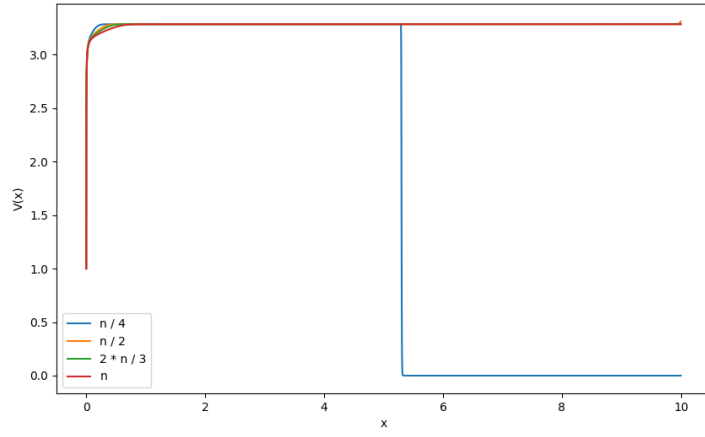


Figure 24: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 1, \rho = 7$, Скорость

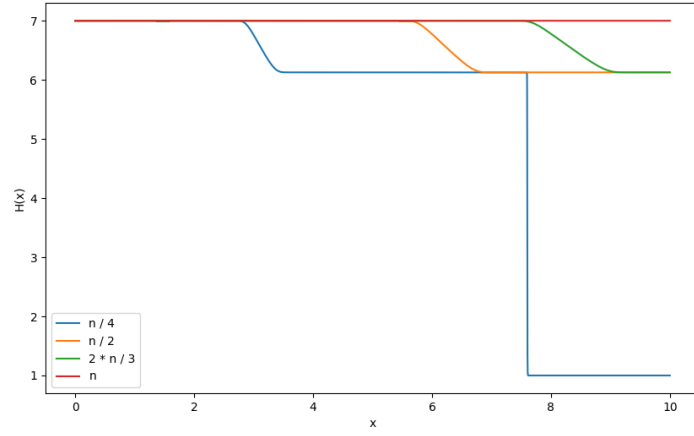


Figure 25: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 6, \rho = 7$, Плотность

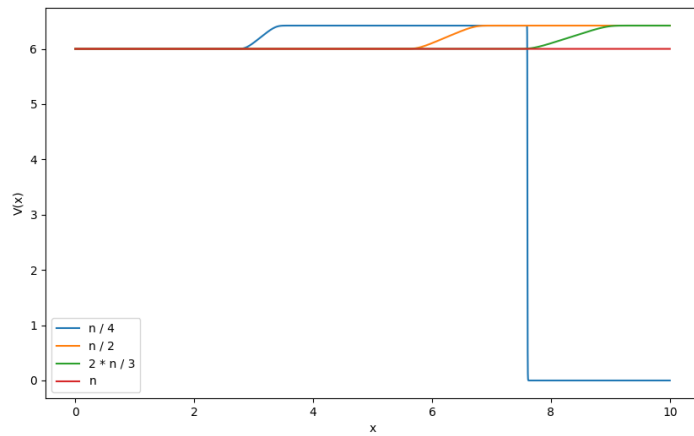


Figure 26: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 6, \rho = 7$, Скорость

Выводы

Видно, что при увеличении скорости набегающего потока время выхода на стационар уменьшается. При увеличении плотности при маленьких значениях скорости время выхода на стационар уменьшается, а при больших значениях скорости время выхода на стационар увеличивается.