

Схема с центральными разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная)

Постановка задачи

Решается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \quad (2)$$

Неизвестными функциями являются плотность ρ и скорость u , которые зависят от переменных Эйлера

$$(t, x) \in \bar{Q} = [0; T] \times [0; X].$$

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0, X]$:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \quad x \in [0, X].$$

Для сеточной функции v , заданной на равномерной сетке с шагом h на отрезке $[a, b]$, введём обозначения:

- $\bar{\omega}_h = \{x_i = a + ih \mid i = 0, \dots, N\}$ — множество всех узлов сетки,
- $\omega_h = \{x_i \mid i = 1, \dots, N - 1\}$ — множество внутренних узлов,
- $\gamma_h = \{x_0, x_N\}$ — множество граничных узлов.

Для численного решения используется схема с центральными разностями $(\rho, \rho u)$ вида:

$$\begin{aligned} H_t + 0.5(V\hat{H}_{\bar{x}} + (V\hat{H})_{\bar{x}} + HV_{\bar{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0 V_{x,0}) - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ (HV)_t + \frac{2}{3}(\hat{H}V\hat{V})_{\bar{x}} + \frac{2}{3}\hat{H}V\hat{V}_{\bar{x}} + \frac{V^2}{3}\hat{H}_{\bar{x}} + p(\hat{H})_{\bar{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned}$$

Выписанная выше РС аппроксимирует эквивалентную систему (при условии гладкости решения), уравнения которой выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial \rho u}{\partial x} + 2\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f. \quad (4)$$

Расписанная схема имеет вид:

$$\frac{\tau}{4h}(V_m^n + V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1} + H_m^{n+1} + \frac{\tau}{4h}(-V_m^n - V_{m-1}^n)H_{m-1}^{n+1} = H_m^n - \frac{\tau}{4h}H_m^n(V_{m+1}^n - V_{m-1}^n) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\tau}{3h}H_{m+1}^{n+1}V_{m+1}^n + \frac{\tau}{3h}H_m^{n+1}V_m^n - \frac{\mu\tau}{h^2} \right)V_{m+1}^{n+1} + (H_m^{n+1} + \frac{2\mu\tau}{h^2})V_m^{n+1} \\ &+ \left(-\frac{\tau}{3h}H_{m-1}^{n+1}V_{m-1}^n - \frac{\tau}{3h}H_m^{n+1}V_m^n - \frac{\mu\tau}{h^2} \right)V_{m-1}^{n+1} = H_m^nV_m^n - \frac{\tau}{6h}(V_m^n)^2(H_{m+1}^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}) \\ &- \frac{\tau}{2h}(p(H_{m+1}^{n+1} - p(H_{m-1}^{n+1}))) \end{aligned} \quad (6)$$

1 Отладочный тест

Зададим функции давления и скорости:

$$\rho(t, x) = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5) \quad (7)$$

$$u(t, x) = \cos(2\pi t) \sin(4\pi x) \quad (8)$$

Вычислим правые части f_0 и f исходных уравнений:

Для функции $f_0(t, x)$:

$$f_0(t, x) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

Производная плотности по времени:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [e^t(\cos(3\pi x) + 1.5)] = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5)$$

Производная ρu по координате:

$$\rho u = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5) \cdot \cos(2\pi t) \sin(4\pi x)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = e^t \cos(2\pi t) [-3\pi \sin(3\pi x) \sin(4\pi x) + 4\pi \cos(3\pi x) \cos(4\pi x) + 6\pi \cos(4\pi x)]$$

Таким образом, $f_0(t, x)$ имеет вид:

$$f_0(t, x) = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5) + e^t \cos(2\pi t) [4\pi \cos(3\pi x) \cos(4\pi x) - 3\pi \sin(3\pi x) \sin(4\pi x) + 6\pi \cos(4\pi x)]$$

В случае линейной зависимости давления от плотности $p = C\rho$:

$$f_{\text{lin}}(t, x, C, \mu) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

где $\rho = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5)$.

Производная ρu по времени:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5) \sin(4\pi x)(\cos(2\pi t) - 2\pi \sin(2\pi t))$$

Производная ρu^2 по координате:

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = e^t \cos^2(2\pi t) [-3\pi \sin(3\pi x) \sin^2(4\pi x) + 8\pi \sin(4\pi x) \cos(4\pi x) \cos(3\pi x) + 12\pi \sin(4\pi x) \cos(4\pi x)]$$

Вторая производная скорости по координате:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -16\pi^2 \cos(2\pi t) \sin(4\pi x)$$

Производная давления по координате для линейного случая:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Ce^t \cdot (-3\pi \sin(3\pi x))$$

В случае степенной зависимости давления от плотности $p = \rho^\gamma$:

$$f_{\text{pow}}(t, x, \gamma, \mu) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Все компоненты, кроме производной давления, аналогичны линейному случаю.
Производная давления по координате для степенного случая:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma e^{(\gamma+1)t} (\cos(3\pi x) + 1.5)^{\gamma-1} \cdot (-3\pi \sin(3\pi x))$$

Таким образом, исходная дифференциальная задача с граничными условиями

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(0, x) &= \cos(3\pi x) + 1.5, \quad x \in [0; 1], \\ \hat{u}(0, x) &= \sin(4\pi x), \quad x \in [0; 1], \\ \hat{u}(t, 0) &= \hat{u}(t, 1) = 0, \quad t \in [0; 1], \end{aligned}$$

имеет гладкое точное решение в области $Q = [0; 1] \times [0; 1]$, задаваемое функциями (7, 8).

Численные эксперименты

В ниже приведенных таблицах представлены нормы разностей точного решения плотности (спроектированного на узлы сетки) и численного решения. В каждой ячейке в столбик записаны четыре числа: первые три — это нормы ошибки численного решения в пространствах C_h , L_2^h и $W_2^{1,h}$ соответственно, а последнее число — это время вычисления теста при соответствующих шагах сетки. Нормы C_h , L_2^h и $W_2^{1,h}$ для вектора разности точного и численного решения вычисляются следующим образом:

Норма в C_h :

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_i \in \omega_h} |v_i|.$$

Норма в $L_{2,h}$:

$$\|v\|_{L_2^h} = \sqrt{h \sum_{x_i \in \omega_h} v_i^2 + \frac{h}{2} \sum_{x_i \in \gamma_h} v_i^2}.$$

Норма в $W_2^{1,h}$:

$$\|v\|_{W_2^{1,h}} = \sqrt{\|v\|_{L_2^h}^2 + h \sum_{x_i \in \omega_h \cup \gamma_h \setminus \{x_N\}} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)^2}.$$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	2.893845e - 01	2.915237e - 01	2.913509e - 01	2.913015e - 01	2.913385e - 01	2.913374e - 01
	8.611497e - 02	8.622999e - 02	8.623645e - 02	8.623747e - 02	8.623915e - 02	8.623975e - 02
	3.137688e + 00	3.131871e + 00	3.129518e + 00	3.128874e + 00	3.128766e + 00	3.128744e + 00
	7.407000e - 03	1.487000e - 02	2.914100e - 02	5.815800e - 02	1.157880e - 01	2.318680e - 01
0.0025	1.524219e - 01	1.543208e - 01	1.547432e - 01	1.549055e - 01	1.549308e - 01	1.549417e - 01
	4.202855e - 02	4.260850e - 02	4.275977e - 02	4.279980e - 02	4.281009e - 02	4.281264e - 02
	1.483760e + 00	1.490807e + 00	1.492612e + 00	1.493119e + 00	1.493253e + 00	1.493286e + 00
	1.476000e - 02	2.921000e - 02	5.818000e - 02	1.157410e - 01	2.311380e - 01	4.626090e - 01
0.00125	7.6916331e - 02	7.913400e - 02	7.966958e - 02	7.980628e - 02	7.984871e - 02	7.985736e - 02
	2.066607e - 02	2.136305e - 02	2.156384e - 02	2.161647e - 02	2.162970e - 02	2.163300e - 02
	7.220191e - 01	7.325832e - 01	7.357691e - 01	7.366206e - 01	7.368342e - 01	7.368874e - 01
	2.937800e - 02	5.823900e - 02	1.160410e - 01	2.312140e - 01	4.619780e - 01	9.264950e - 01
0.000625	3.733308e - 02	3.972090e - 02	4.030919e - 02	4.047760e - 02	4.051570e - 02	4.052520e - 02
	9.988930e - 03	1.061650e - 02	1.083062e - 02	1.088772e - 02	1.090215e - 02	1.090576e - 02
	3.524930e - 01	3.620059e - 01	3.655893e - 01	3.665641e - 01	3.668107e - 01	3.668725e - 01
	5.863100e - 02	1.163470e - 01	2.317190e - 01	4.624440e - 01	9.230660e - 01	1.846046e + 00
0.0003125	1.710448e - 02	1.957835e - 02	2.019278e - 02	2.036015e - 02	2.039974e - 02	2.041011e - 02
	4.860735e - 03	5.194855e - 03	5.401525e - 03	5.459803e - 03	5.474727e - 03	5.478480e - 03
	1.745043e - 01	1.783389e - 01	1.817985e - 01	1.828096e - 01	1.830702e - 01	1.831359e - 01
	1.171520e - 01	2.324070e - 01	4.710840e - 01	9.240540e - 01	1.852106e + 00	3.692200e + 00
0.00015625	7.498453e - 03	9.400183e - 03	1.002532e - 02	1.018984e - 02	1.023049e - 02	1.024057e - 02
	2.823541e - 03	2.494873e - 03	2.669442e - 03	2.726722e - 03	2.741789e - 03	2.745601e - 03
	9.624038e - 02	8.738025e - 02	9.017108e - 02	9.116381e - 02	9.142896e - 02	9.149631e - 02
	2.341350e - 01	4.651290e - 01	9.357880e - 01	1.846729e + 00	3.734593e + 00	7.423286e + 00
$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	4.900888e + 00	5.133649e + 00	5.604197e + 00	5.981867e + 00	2.363684e + 10	2.299583e + 09
	7.799330e - 01	7.761854e - 01	7.659045e - 01	7.751129e - 01	8.904598e + 08	1.176841e + 08
	8.058803e + 01	9.244111e + 01	1.213865e + 02	3.685580e + 02	4.015233e + 12	1.063727e + 12
	7.417000e - 03	1.463800e - 02	2.910300e - 02	5.809800e - 02	1.271220e - 01	2.331790e - 01
0.0025	1.929420e + 00	1.990965e + 00	2.006569e + 00	2.007622e + 00	2.008172e + 00	2.008361e + 00
	3.631623e - 01	3.718577e - 01	3.740268e - 01	3.745687e - 01	3.747041e - 01	3.747380e - 01
	2.510589e + 01	2.578269e + 01	2.596047e + 01	2.600609e + 01	2.601758e + 01	2.602046e + 01
	1.473900e - 02	2.951600e - 02	5.800400e - 02	1.229880e - 01	2.557010e - 01	4.616250e - 01
0.00125	8.367617e - 01	9.074929e - 01	9.228006e - 01	9.275400e - 01	9.285267e - 01	9.287728e - 01
	1.688927e - 01	1.783897e - 01	1.808039e - 01	1.814097e - 01	1.815613e - 01	1.815992e - 01
	1.022621e + 01	1.065398e + 01	1.076655e + 01	1.079507e + 01	1.080222e + 01	1.080401e + 01
	2.934500e - 02	5.819200e - 02	1.161320e - 01	2.417220e - 01	4.806590e - 01	9.331000e - 01
0.000625	3.573832e - 01	4.231343e - 01	4.396450e - 01	4.434951e - 01	4.444552e - 01	4.447130e - 01
	7.670919e - 02	8.591451e - 02	8.831782e - 02	8.892395e - 02	8.907580e - 02	8.911379e - 02
	4.531714e + 00	4.866648e + 00	4.961996e + 00	4.986508e + 00	4.992677e + 00	4.994222e + 00
	5.853700e - 02	1.161800e - 01	2.315130e - 01	4.676090e - 01	9.246050e - 01	1.860994e + 00
0.0003125	1.388926e - 01	1.970203e - 01	2.123008e - 01	2.160633e - 01	2.169896e - 01	2.172297e - 01
	3.255612e - 02	4.096086e - 02	4.331812e - 02	4.391886e - 02	4.406971e - 02	4.410746e - 02
	2.046380e + 00	2.291703e + 00	2.377804e + 00	2.400630e + 00	2.406414e + 00	2.407865e + 00
	1.279320e - 01	2.326540e - 01	4.740430e - 01	9.290540e - 01	1.858447e + 00	3.705711e + 00
0.00015625	8.227427e - 02	8.819948e - 02	1.024888e - 01	1.061607e - 01	1.070592e - 01	1.072839e - 01
	1.293381e - 02	1.887575e - 02	2.115212e - 02	2.174663e - 02	2.189661e - 02	2.193419e - 02
	9.978122e - 01	1.077601e + 00	1.154051e + 00	1.175836e + 00	1.181434e + 00	1.182842e + 00
	2.337100e - 01	4.761070e - 01	9.252340e - 01	1.852444e + 00	3.689680e + 00	7.388481e + 00

$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e + 00					
	-nan	-nan	nan	-nan	-nan	nan
	-nan	-nan	nan	-nan	-nan	nan
	1.867200e - 02	2.443300e - 02	4.807400e - 02	9.570900e - 02	1.218770e - 01	2.403440e - 01
0.0025	7.054475e + 00	0.000000e + 00				
	1.272566e + 00	nan	nan	-nan	nan	nan
	3.913050e + 02	nan	nan	-nan	nan	nan
	2.434300e - 02	4.807900e - 02	9.575400e - 02	1.908370e - 01	2.317490e - 01	4.713370e - 01
0.00125	2.564928e + 00	3.857608e + 00	6.197531e + 00	6.093398e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	3.803479e - 01	4.227302e - 01	6.064705e - 01	1.902754e + 00	-nan	-nan
	8.464561e + 01	1.810421e + 02	3.853700e + 02	5.101565e + 02	-nan	-nan
	4.857800e - 02	9.697500e - 02	1.914690e - 01	3.812200e - 01	4.617600e - 01	9.231580e - 01
0.000625	1.419521e + 00	2.216273e + 00	1.726352e + 00	1.039263e + 00	1.020661e + 00	0.000000e + 00
	1.741238e - 01	1.796006e - 01	1.566479e - 01	1.331874e - 01	1.377094e - 01	-nan
	3.484272e + 01	5.115149e + 01	6.773710e + 01	3.161886e + 01	3.094928e + 01	-nan
	9.678000e - 02	1.918480e - 01	3.828750e - 01	7.618870e - 01	9.278520e - 01	1.869128e + 00
0.0003125	6.877637e - 01	9.627884e - 01	9.843942e - 01	8.376073e - 01	7.923757e - 01	7.828591e - 01
	7.852395e - 02	8.556558e - 02	8.595773e - 02	8.565856e - 02	8.570666e - 02	8.572498e - 02
	1.596951e + 01	1.935555e + 01	2.256076e + 01	2.207361e + 01	2.177715e + 01	2.170835e + 01
	1.930050e - 01	3.830890e - 01	7.640110e - 01	1.524760e + 00	1.847773e + 00	3.690688e + 00
0.00015625	3.794978e - 01	4.203847e - 01	4.428989e - 01	4.227906e - 01	4.185418e - 01	4.174648e - 01
	4.937137e - 02	3.918362e - 02	4.355501e - 02	4.488731e - 02	4.523790e - 02	4.532674e - 02
	9.650137e + 00	8.248641e + 00	9.051167e + 00	9.249589e + 00	9.292250e + 00	9.302605e + 00
	3.859240e - 01	7.835370e - 01	1.534377e + 00	2.812675e + 00	3.699041e + 00	7.386080e + 00
$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	3.470153e - 02	4.027325e - 02	5.609978e + 06	1.312251e + 09	2.278166e + 29	1.270990e + 101
	1.707447e - 02	1.698463e - 02	1.135779e + 06	2.292786e + 08	6.143380e + 27	4.612069e + 100
	9.329289e - 02	5.473767e - 01	1.668156e + 08	1.646350e + 10	2.803154e + 31	4.174368e + 104
	7.434000e - 03	1.483100e - 02	2.914000e - 02	5.816100e - 02	1.158330e - 01	2.315760e - 01
0.0025	1.777109e - 02	1.716100e - 02	1.701379e - 02	1.697756e - 02	1.696851e - 02	1.696625e - 02
	8.674932e - 03	8.513864e - 03	8.475284e - 03	8.465746e - 03	8.463368e - 03	8.462774e - 03
	4.809207e - 02	4.575653e - 02	4.521750e - 02	4.508570e - 02	4.505294e - 02	4.504476e - 02
	1.478900e - 02	2.927800e - 02	5.808800e - 02	1.158190e - 01	2.311240e - 01	4.626720e - 01
0.00125	9.314353e - 03	8.682180e - 03	8.533851e - 03	8.497537e - 03	8.488502e - 03	8.486244e - 03
	4.460908e - 03	4.290377e - 03	4.251016e - 03	4.241390e - 03	4.238996e - 03	4.238399e - 03
	2.575681e - 02	2.321783e - 02	2.266651e - 02	2.253454e - 02	2.250193e - 02	2.249380e - 02
	2.945500e - 02	5.836000e - 02	1.162190e - 01	2.314260e - 01	4.642230e - 01	9.255960e - 01
0.000625	5.111654e - 03	4.443472e - 03	4.292020e - 03	4.255482e - 03	4.246453e - 03	4.244198e - 03
	2.361180e - 03	2.174334e - 03	2.133745e - 03	2.124019e - 03	2.121615e - 03	2.121015e - 03
	1.487860e - 02	1.199482e - 02	1.141523e - 02	1.128166e - 02	1.124902e - 02	1.124091e - 02
	5.870700e - 02	1.256800e - 01	2.326680e - 01	4.621770e - 01	9.229790e - 01	1.854221e + 00
0.0003125	3.039179e - 03	2.328490e - 03	2.170933e - 03	2.133966e - 03	2.124906e - 03	2.122652e - 03
	1.330538e - 03	1.116735e - 03	1.073935e - 03	1.064053e - 03	1.061636e - 03	1.061035e - 03
	9.775877e - 03	6.430955e - 03	5.798238e - 03	5.660945e - 03	5.628101e - 03	5.619986e - 03
	1.176900e - 01	2.325720e - 01	4.672030e - 01	9.239240e - 01	1.846479e + 00	3.691511e + 00
0.00015625	2.022007e - 03	1.277785e - 03	1.110956e - 03	1.073117e - 03	1.064001e - 03	1.061746e - 03
	8.424085e - 04	5.907288e - 04	5.439327e - 04	5.337635e - 04	5.313269e - 04	5.307245e - 04
	7.510906e - 03	3.716549e - 03	2.997016e - 03	2.852353e - 03	2.819031e - 03	2.810890e - 03
	2.342660e - 01	4.748030e - 01	9.263840e - 01	1.848054e + 00	3.693649e + 00	7.383658e + 00

$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e + 00					
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	7.439000e - 03	1.470000e - 02	2.918800e - 02	5.805700e - 02	1.160020e - 01	2.332330e - 01
0.0025	1.447342e - 02	0.000000e + 00				
	8.086155e - 03	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	4.273009e - 02	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	1.478700e - 02	2.923400e - 02	5.811500e - 02	1.244220e - 01	2.313330e - 01	4.616980e - 01
0.00125	7.618541e - 03	7.017173e - 03	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	4.144107e - 03	4.004375e - 03	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	2.334309e - 02	2.020443e - 02	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	3.214200e - 02	5.830400e - 02	1.164190e - 01	2.410050e - 01	4.624120e - 01	9.353200e - 01
0.000625	4.238767e - 03	3.598201e - 03	3.458471e - 03	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	2.192574e - 03	2.024360e - 03	1.993195e - 03	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	1.421848e - 02	1.052328e - 02	9.849092e - 03	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	5.868300e - 02	1.164040e - 01	2.318090e - 01	4.722120e - 01	9.238610e - 01	1.861632e + 00
0.0003125	2.573644e - 03	1.899704e - 03	1.750393e - 03	1.717285e - 03	1.709393e - 03	1.707448e - 03
	1.252290e - 03	1.036750e - 03	1.001742e - 03	9.944316e - 04	9.926978e - 04	9.922703e - 04
	1.014084e - 02	5.788703e - 03	5.019055e - 03	4.865621e - 03	4.830143e - 03	4.821461e - 03
	1.174780e - 01	2.337210e - 01	4.641840e - 01	9.349300e - 01	1.880127e + 00	3.721943e + 00
0.00015625	1.748549e - 03	1.058703e - 03	8.985621e - 04	8.637468e - 04	8.557285e - 04	8.537762e - 04
	8.280625e - 04	5.483113e - 04	5.062590e - 04	4.984515e - 04	4.966845e - 04	4.962545e - 04
	8.420904e - 03	3.537173e - 03	2.622240e - 03	2.454994e - 03	2.418613e - 03	2.409885e - 03
	2.342320e - 01	4.658310e - 01	9.261650e - 01	1.868094e + 00	3.735896e + 00	7.422385e + 00
$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e + 00					
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	7.415000e - 03	1.471200e - 02	2.917400e - 02	5.801400e - 02	1.158030e - 01	2.319420e - 01
0.0025	0.000000e + 00					
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>
	1.478000e - 02	2.922900e - 02	5.809700e - 02	1.169840e - 01	2.311160e - 01	4.629510e - 01
0.00125	0.000000e + 00					
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>
	2.987100e - 02	5.827000e - 02	1.159390e - 01	2.419660e - 01	4.621510e - 01	9.237800e - 01
0.000625	4.804786e - 03	0.000000e + 00				
	2.244008e - 03	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	1.552917e - 02	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	5.870300e - 02	1.164210e - 01	2.322940e - 01	4.629840e - 01	9.238000e - 01	1.855162e + 00
0.0003125	2.989562e - 03	2.095558e - 03	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	1.303740e - 03	1.054842e - 03	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>
	1.149007e - 02	6.072177e - 03	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>
	1.175890e - 01	2.324700e - 01	4.636670e - 01	9.242390e - 01	1.847257e + 00	3.695794e + 00
0.00015625	2.087142e - 03	1.186917e - 03	9.794936e - 04	9.309543e - 04	4.063144e + 00	0.000000e + 00
	8.908657e - 04	5.604874e - 04	5.146432e - 04	5.073829e - 04	2.123764e + 00	<i>-nan</i>
	9.827234e - 03	3.797889e - 03	2.719082e - 03	4.829216e - 02	4.842522e + 02	<i>-nan</i>
	2.346110e - 01	4.654460e - 01	9.268990e - 01	1.847471e + 00	3.695550e + 00	7.389896e + 00

$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e + 00					
	-nan	nan	nan	-nan	-nan	nan
	-nan	nan	nan	-nan	-nan	nan
	7.429000e - 03	1.467000e - 02	2.915400e - 02	5.800300e - 02	1.158500e - 01	2.314530e - 01
0.0025	0.000000e + 00					
	nan	-nan	nan	nan	nan	-nan
	nan	-nan	nan	nan	nan	-nan
	1.476100e - 02	2.927700e - 02	5.808600e - 02	1.159690e - 01	2.311340e - 01	4.622800e - 01
0.00125	8.204304e + 00	0.000000e + 00				
	2.358930e + 00	nan	nan	-nan	-nan	nan
	4.319501e + 02	nan	nan	-nan	-nan	nan
	2.939800e - 02	5.825500e - 02	1.160600e - 01	2.315200e - 01	4.621620e - 01	9.234320e - 01
0.000625	3.926593e - 03	4.352413e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	2.231145e - 03	3.236816e - 01	nan	nan	nan	-nan
	1.349392e - 02	1.420743e + 02	nan	nan	nan	-nan
	5.864200e - 02	1.163990e - 01	2.317330e - 01	4.619150e - 01	9.275290e - 01	1.845479e + 00
0.0003125	2.461054e - 03	1.714661e - 03	1.529123e - 03	1.482896e - 03	1.471353e - 03	1.468469e - 03
	1.316312e - 03	1.031651e - 03	9.783640e - 04	9.665211e - 04	9.636590e - 04	9.629497e - 04
	9.633628e - 03	5.335081e - 03	4.310425e - 03	4.061458e - 03	3.999812e - 03	3.984441e - 03
	1.171160e - 01	2.326350e - 01	4.630930e - 01	9.239220e - 01	1.845893e + 00	3.702063e + 00
0.00015625	1.728140e - 03	9.813768e - 04	7.954354e - 04	7.491536e - 04	7.376099e - 04	7.347257e - 04
	8.971344e - 04	5.577447e - 04	4.975614e - 04	4.852107e - 04	4.823159e - 04	4.816046e - 04
	7.748414e - 03	3.371825e - 03	2.323685e - 03	2.072023e - 03	2.010185e - 03	1.994804e - 03
	2.361940e - 01	4.647520e - 01	9.261820e - 01	1.848197e + 00	3.691257e + 00	7.378840e + 00
$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e + 00					
	-nan	-nan	-nan	nan	-nan	-nan
	-nan	-nan	-nan	nan	-nan	-nan
	1.678600e - 02	1.472000e - 02	3.843300e - 02	5.802500e - 02	1.250840e - 01	2.317480e - 01
0.0025	0.000000e + 00					
	nan	nan	nan	-nan	-nan	-nan
	nan	nan	nan	-nan	-nan	-nan
	1.476500e - 02	2.920600e - 02	6.833100e - 02	1.253970e - 01	2.317490e - 01	4.619390e - 01
0.00125	0.000000e + 00					
	nan	-nan	-nan	nan	nan	nan
	nan	-nan	-nan	nan	nan	nan
	2.938900e - 02	5.825900e - 02	1.160580e - 01	2.312040e - 01	4.625210e - 01	9.251190e - 01
0.000625	3.875203e - 03	0.000000e + 00				
	2.219355e - 03	-nan	nan	-nan	-nan	-nan
	1.329300e - 02	-nan	nan	-nan	-nan	-nan
	5.860400e - 02	1.163060e - 01	2.319200e - 01	4.625050e - 01	9.242360e - 01	1.847788e + 00
0.0003125	2.417445e - 03	1.707263e - 03	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	1.306728e - 03	1.029704e - 03	nan	-nan	nan	nan
	9.494630e - 03	5.296081e - 03	nan	-nan	nan	nan
	1.171230e - 01	2.325260e - 01	4.735570e - 01	9.242640e - 01	1.847724e + 00	3.701977e + 00
0.00015625	1.687110e - 03	9.719095e - 04	7.957610e - 04	8.344639e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	8.879987e - 04	5.558151e - 04	4.971985e - 04	2.806930e + 00	nan	nan
	7.633719e - 03	3.338353e - 03	2.315496e - 03	3.998717e + 03	nan	nan
	2.343890e - 01	4.650250e - 01	9.262090e - 01	1.849222e + 00	3.695493e + 00	7.387029e + 00

$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e + 00					
	-nan	-nan	-nan	nan	nan	nan
	-nan	-nan	-nan	nan	nan	nan
	7.449000e - 03	1.469300e - 02	2.923800e - 02	5.807400e - 02	1.162890e - 01	2.408650e - 01
0.0025	0.000000e + 00					
	nan	nan	-nan	nan	nan	-nan
	nan	nan	-nan	nan	nan	-nan
0.00125	1.474600e - 02	2.925700e - 02	5.809300e - 02	1.163280e - 01	2.313050e - 01	4.620320e - 01
	0.000000e + 00					
	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan
0.000625	2.939900e - 02	5.829500e - 02	1.160300e - 01	2.312500e - 01	4.622240e - 01	9.230520e - 01
	0.000000e + 00					
	nan	nan	-nan	nan	-nan	nan
0.0003125	5.864900e - 02	1.216810e - 01	2.320680e - 01	4.625580e - 01	9.257180e - 01	1.845128e + 00
	0.000000e + 00					
	-nan	-nan	nan	nan	-nan	-nan
0.00015625	1.172640e - 01	2.328580e - 01	4.637990e - 01	9.243740e - 01	1.859363e + 00	3.698847e + 00
	1.641701e - 03	0.000000e + 00				
	8.844172e - 04	nan	nan	nan	-nan	nan
0.00015625	7.643047e - 03	nan	nan	nan	-nan	nan
	2.343140e - 01	4.685050e - 01	9.270240e - 01	1.849776e + 00	3.693884e + 00	7.389611e + 00
$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	1.706045e - 01	1.695805e - 01	1.693242e - 01	1.692604e - 01	1.692473e - 01	1.692432e - 01
	7.077821e - 02	7.043296e - 02	7.034590e - 02	7.032429e - 02	7.031900e - 02	7.031769e - 02
	1.296421e + 00	1.287694e + 00	1.285382e + 00	1.284789e + 00	1.284648e + 00	1.284614e + 00
	9.653000e - 03	1.919000e - 02	3.814700e - 02	7.587800e - 02	1.515670e - 01	3.025240e - 01
0.0025	8.457763e - 02	8.351026e - 02	8.324401e - 02	8.317756e - 02	8.316295e - 02	8.315886e - 02
	3.529897e - 02	3.494365e - 02	3.485697e - 02	3.483581e - 02	3.483063e - 02	3.482933e - 02
	6.388418e - 01	6.297914e - 01	6.275862e - 01	6.270476e - 01	6.269165e - 01	6.268839e - 01
	1.925800e - 02	3.815900e - 02	7.616900e - 02	1.519610e - 01	3.024310e - 01	6.041500e - 01
0.00125	4.257291e - 02	4.144679e - 02	4.119084e - 02	4.112669e - 02	4.111053e - 02	4.110650e - 02
	1.779484e - 02	1.742509e - 02	1.733935e - 02	1.731859e - 02	1.731348e - 02	1.731220e - 02
	3.217010e - 01	3.121911e - 01	3.100425e - 01	3.095263e - 01	3.093995e - 01	3.093679e - 01
	3.828100e - 02	7.645000e - 02	1.517220e - 01	3.126680e - 01	6.042710e - 01	1.207063e + 00
0.000625	2.210761e - 02	2.077249e - 02	2.050818e - 02	2.044370e - 02	2.042758e - 02	2.042355e - 02
	9.146072e - 03	8.742080e - 03	8.655232e - 03	8.634570e - 03	8.629485e - 03	8.628218e - 03
	1.671480e - 01	1.564907e - 01	1.543099e - 01	1.538001e - 01	1.536753e - 01	1.536443e - 01
	7.670700e - 02	1.521230e - 01	3.031910e - 01	6.108930e - 01	1.217862e + 00	2.412986e + 00
0.0003125	1.220562e - 02	1.054251e - 02	1.026370e - 02	1.019846e - 02	1.018244e - 02	1.017842e - 02
	4.896447e - 03	4.425231e - 03	4.334201e - 03	4.313348e - 03	4.308263e - 03	4.307000e - 03
	9.239549e - 02	7.955691e - 02	7.723327e - 02	7.671819e - 02	7.659387e - 02	7.656305e - 02
	1.527590e - 01	3.038470e - 01	6.063870e - 01	1.218437e + 00	2.428881e + 00	4.825812e + 00
0.00015625	7.265290e - 03	5.511580e - 03	5.167952e - 03	5.101333e - 03	5.085185e - 03	5.081202e - 03
	2.862024e - 03	2.279748e - 03	2.179642e - 03	2.158221e - 03	2.153107e - 03	2.151843e - 03
	5.766995e - 02	4.154228e - 02	3.891035e - 02	3.837610e - 02	3.825096e - 02	3.822020e - 02
	3.060650e - 01	6.077000e - 01	1.211955e + 00	2.428425e + 00	4.836315e + 00	9.653870e + 00

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	2.044482e - 01	0.000000e + 00				
	7.467224e - 02	nan	nan	nan	nan	nan
	1.946596e + 00	nan	nan	nan	nan	nan
	9.635000e - 03	2.819300e - 02	3.620100e - 02	7.167000e - 02	1.427330e - 01	2.853330e - 01
0.0025	7.794318e - 02	7.704660e - 02	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	3.414842e - 02	3.378200e - 02	-nan	nan	-nan	-nan
	7.570298e - 01	7.418792e - 01	-nan	nan	-nan	-nan
	2.915900e - 02	4.877900e - 02	7.516800e - 02	1.488110e - 01	2.940430e - 01	5.965210e - 01
0.00125	3.626583e - 02	3.592626e - 02	3.606035e - 02	3.609067e - 02	3.609859e - 02	3.610112e - 02
	1.655812e - 02	1.621748e - 02	1.615747e - 02	1.614402e - 02	1.614076e - 02	1.613995e - 02
	3.570426e - 01	3.450495e - 01	3.431007e - 01	3.426782e - 01	3.425766e - 01	3.429257e - 01
	3.829500e - 02	7.656800e - 02	1.616030e - 01	3.076930e - 01	6.117060e - 01	1.215711e + 00
0.000625	1.820844e - 02	1.734556e - 02	1.744792e - 02	1.748683e - 02	1.749701e - 02	1.749958e - 02
	8.406248e - 03	7.979580e - 03	7.921240e - 03	7.909751e - 03	7.907073e - 03	7.906415e - 03
	1.821730e - 01	1.675986e - 01	1.658908e - 01	1.655887e - 01	1.655209e - 01	1.655045e - 01
	8.487800e - 02	1.520680e - 01	3.124030e - 01	6.141140e - 01	1.219736e + 00	2.412807e + 00
0.0003125	1.016166e - 02	8.542526e - 03	8.571057e - 03	8.606491e - 03	8.616719e - 03	8.619327e - 03
	4.629786e - 03	3.998062e - 03	3.928132e - 03	3.916765e - 03	3.914311e - 03	3.913721e - 03
	1.055329e - 01	8.382995e - 02	8.174155e - 02	8.146274e - 02	8.140845e - 02	8.139584e - 02
	1.620620e - 01	3.139090e - 01	6.063460e - 01	1.209040e + 00	2.415086e + 00	4.823369e + 00
0.00015625	6.932529e - 03	4.341762e - 03	4.237283e - 03	4.264879e - 03	4.274843e - 03	4.277615e - 03
	3.009020e - 03	2.061902e - 03	1.963085e - 03	1.950225e - 03	1.947780e - 03	1.947217e - 03
	7.542591e - 02	4.393059e - 02	4.076177e - 02	4.043259e - 02	4.038083e - 02	4.036981e - 02
	3.052210e - 01	6.081100e - 01	1.212473e + 00	2.418077e + 00	4.828728e + 00	9.648475e + 00

$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}$						
$\tau \setminus h$	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125	0.00015625
0.005	0.000000e + 00					
	-nan	nan	nan	nan	nan	nan
	-nan	nan	nan	nan	nan	nan
	1.967600e - 02	1.807600e - 02	3.566100e - 02	7.094300e - 02	1.413970e - 01	2.818480e - 01
0.0025	0.000000e + 00					
	nan	nan	nan	nan	nan	nan
	nan	nan	nan	nan	nan	nan
	1.885800e - 02	3.699900e - 02	7.102900e - 02	1.410750e - 01	2.812710e - 01	5.619000e - 01
0.00125	7.983929e - 02	0.000000e + 00				
	2.342631e - 02	-nan	nan	nan	nan	nan
	5.068147e + 00	-nan	nan	nan	nan	nan
	4.740000e - 02	7.542100e - 02	1.500660e - 01	2.820150e - 01	5.613340e - 01	1.121492e + 00
0.000625	2.201153e - 02	1.687576e - 02	1.686784e - 02	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
	8.655093e - 03	7.970136e - 03	7.975823e - 03	nan	nan	nan
	4.381088e - 01	1.950966e - 01	1.948290e - 01	nan	nan	nan
	8.666200e - 02	1.520430e - 01	3.037280e - 01	6.023120e - 01	1.165194e + 00	2.242980e + 00
0.0003125	1.251618e - 02	8.661415e - 03	8.202228e - 03	8.341972e - 03	1.700649e + 00	5.168797e + 00
	5.092691e - 03	3.943722e - 03	3.906231e - 03	3.914970e - 03	3.232768e - 01	1.394496e + 00
	1.776548e - 01	9.670960e - 02	9.440672e - 02	9.458416e - 02	3.165305e + 02	4.645061e + 03
	1.527140e - 01	3.038850e - 01	6.059600e - 01	1.210741e + 00	2.415941e + 00	4.826810e + 00
0.00015625	1.066272e - 02	4.914564e - 03	4.004981e - 03	4.111847e - 03	4.150815e - 03	4.161059e - 03
	3.871962e - 03	2.056291e - 03	1.933495e - 03	1.937061e - 03	1.940142e - 03	1.941048e - 03
	1.270728e - 01	5.176541e - 02	4.664213e - 02	4.659634e - 02	4.666816e - 02	4.669131e - 02
	3.054590e - 01	6.078590e - 01	1.211678e + 00	2.419923e + 00	4.831023e + 00	9.660136e + 00

Вложенная сетка, плотность

В (k)-ой строке таблицы приводятся нормы разности решения (h), полученного на сетке ($Q_{\tau,h}$), и решения (h^k), полученного на сетке ($Q_{\tau/2^k, h/2^k}$) (столбцы таблицы соответствуют различным начальным шагам сетки). В последней строке содержатся нормы погрешности решения ($h - \rho$) (то есть численного решения и аналитического) на сетке ($Q_{\tau,h}$). В каждой ячейке в столбик записаны три числа: оценки ошибки численного решения в пространствах

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	5.223002e - 01	3.166982e - 02
	1.350436e - 01	8.600421e - 03
	5.334825e + 00	2.949122e - 01
$h - h^2$	6.128827e - 01	4.780349e - 02
	1.743737e - 01	1.294066e - 02
	6.692537e + 00	4.414830e - 01
$h - h^3$	6.404276e - 01	5.594455e - 02
	1.893355e - 01	1.512291e - 02
	7.216256e + 00	5.146063e - 01
$h - \rho$	6.525722e - 01	6.413494e - 02
	2.022396e - 01	1.731402e - 02
	7.680877e + 00	5.876434e - 01

(C_h), (L_2^h) и ($W_2^{1,h}$) соответственно.

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	6.002904e + 00	3.913667e - 01
	1.303480e + 00	7.384558e - 02
	1.736705e + 02	4.606453e + 00
$h - h^2$	5.342923e + 00	5.661443e - 01
	1.448873e + 00	1.092706e - 01
	1.683045e + 02	6.571359e + 00
$h - h^3$	5.475949e + 00	6.485901e - 01
	1.494066e + 00	1.266163e - 01
	1.646203e + 02	7.480678e + 00
$h - \rho$	5.780942e + 00	7.270385e - 01
	1.548715e + 00	1.437217e - 01
	1.641333e + 02	8.345515e + 00
$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	0.000000e + 00	3.417283e - 03
	-nan	1.700900e - 03
	-nan	9.083366e - 03
$h - h^2$	0.000000e + 00	5.120371e - 03
	-nan	2.550624e - 03
	-nan	1.359994e - 02
$h - h^3$	0.000000e + 00	5.970523e - 03
	-nan	2.975303e - 03
	-nan	1.585202e - 02
$h - \rho$	0.000000e + 00	6.819746e - 03
	-nan	3.399861e - 03
	-nan	1.810001e - 02
$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1,4}$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	1.810754e - 01	1.653108e - 02
	7.431081e - 02	6.948234e - 03
	1.464890e + 00	1.244371e - 01
$h - h^2$	2.661235e - 01	2.472064e - 02
	1.096692e - 01	1.040477e - 02
	2.116489e + 00	1.860476e - 01
$h - h^3$	3.056367e - 01	2.879527e - 02
	1.268425e - 01	1.212853e - 02
	2.423717e + 00	2.167010e - 01
$h - \rho$	3.458994e - 01	3.285604e - 02
	1.436457e - 01	1.384925e - 02
	2.718655e + 00	2.472530e - 01
$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1,4}$		
	tau=h=0.01	tau=h=0.001
$h - h^1$	0.000000e + 00	1.460322e - 02
	nan	6.516847e - 03
	nan	1.391208e - 01
$h - h^2$	0.000000e + 00	2.162859e - 02
	nan	9.692793e - 03
	nan	2.057426e - 01
$h - h^3$	0.000000e + 00	2.507996e - 02
	nan	1.126091e - 02
	nan	2.383676e - 01
$h - \rho$	0.000000e + 00	2.849158e - 02
	nan	1.281607e - 02
	nan	2.705524e - 01

Выводы

На основе анализа таблиц с нормами разности точного решения и численного, можно сделать вывод о том, что сходимость имеет порядок $O(\tau + h^2)$. Так же сходимость является условной и имеет вид $\tau <= \gamma * h$, где коэффициент γ прямо пропорционален μ и обратно пропорционален C

2 Негладкие начальные данные

Задача (2.24) (номер взят из вычислительного практикума)

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5, \\ 2, & x \in [4.5; 5.5], \end{cases} \quad u_0(x) \equiv 0,$$

с граничными условиями

$$u(t, 0) = u(t, 10) = 0, \quad x \in [0; 10], \quad t \in [0; T].$$

Задача (2.25) (номер взят из вычислительного практикума)

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5, \\ 1, & x \in [4.5; 5.5], \end{cases} \quad \rho_0(x) \equiv 1,$$

с граничными условиями

$$u(t, 0) = u(t, 10) = 0, \quad x \in [0; 10], \quad t \in [0; T].$$

В обеих задачах функция f тождественно равна нулю.

Далее приведены таблицы со значениями нормы

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_{C_h}$$

и изменения массы

$$\Delta_m(n) = \frac{\sum_{m \in \bar{\omega}_h} H_m^0 - \sum_{m \in \bar{\omega}_h} H_m^n}{\sum_{m \in \bar{\omega}_h} H_m^0}$$

Сравнение по методу вложенных сеток проводилось на уровне $n_{st}/10$. Условием выхода на стационар считалось

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_{C_h} <= 3 * 10^{-3}$$

Также таблицы содержат времена стабилизации $T_{st} = \tau \cdot n_{st}$ решений систем в скобочках рядом с n_{st} .

Данные 24, плотность

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (221.6125)$
<i>norm</i>	$6.335917e - 02$	$1.761714e - 02$	$7.228164e - 03$	$2.999897e - 03$
Δ_{massa}	$-8.497222e - 05$	$-9.194601e - 05$	$-9.062774e - 05$	$-9.094270e - 05$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001	$h - h^1$	$h - h^2$	$h - h^3$
		$1.359262e - 02$ $1.755467e - 03$ $2.907941e + 00$		
		$1.273265e - 02$ $1.594230e - 03$ $2.908683e + 00$		
		$1.166943e - 02$ $1.515216e - 03$ $2.909050e + 00$		

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1029.5975)$
<i>norm</i>	$2.884721e - 02$	$1.181850e - 02$	$7.154859e - 03$	$2.999901e - 03$
Δ_{massa}	$-9.731352e - 04$	$-9.755389e - 04$	$-9.758735e - 04$	$-9.769669e - 04$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001	$h - h^1$	$h - h^2$	$h - h^3$
		$2.483872e - 03$ $1.984384e - 03$ $1.122251e + 00$		
		$2.870128e - 03$ $2.840468e - 03$ $1.122289e + 00$		
		$3.354881e - 03$ $3.282126e - 03$ $1.122335e + 00$		

$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1888.4165)$
<i>norm</i>	$1.663703e - 02$	$8.284412e - 03$	$7.053292e - 03$	$2.999551e - 03$
Δ_{massa}	$-8.600899e - 03$	$-8.616679e - 03$	$-8.619704e - 03$	$-8.620794e - 03$

$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001	$h - h^1$	$h - h^2$	$h - h^3$
		$3.996291e - 02$ $1.819218e - 02$ $9.548312e - 01$		
		$5.274678e - 02$ $2.739384e - 02$ $9.730823e - 01$		
		$5.724268e - 02$ $3.203174e - 02$ $9.780669e - 01$		

$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (187.483)$
<i>norm</i>	$5.051679e - 02$	$4.076296e - 02$	$1.138141e - 02$	$2.997576e - 03$
Δ_{massa}	$-9.706896e - 04$	$-9.766310e - 04$	$-9.769931e - 04$	$-9.773238e - 04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h - h^1$	4.876355e - 03 2.105070e - 03 1.707818e + 00			
$h - h^2$	4.803402e - 03 2.880025e - 03 1.707873e + 00			
$h - h^3$	4.574847e - 03 3.292906e - 03 1.707911e + 00			
$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (589.1985)$
norm	5.722927e - 02	2.049438e - 02	8.492197e - 03	2.999695e - 03
Δ_{massa}	-8.653346e - 03	-8.666267e - 03	-8.669624e - 03	-8.669853e - 03
$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h - h^1$	1.753049e - 02 1.554916e - 02 9.412415e - 01			
$h - h^2$	2.667826e - 02 2.403054e - 02 9.438508e - 01			
$h - h^3$	3.127825e - 02 2.849464e - 02 9.454865e - 01			
$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (2635.168)$
norm	1.471174e - 02	1.190990e - 02	7.535936e - 03	2.999813e - 03
Δ_{massa}	-4.519133e - 01	-4.519227e - 01	-4.519242e - 01	-4.519249e - 01
$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h - h^1$	4.776488e - 01 1.465135e + 00 1.715252e + 00			
$h - h^2$	4.907690e - 01 1.507871e + 00 1.751919e + 00			
$h - h^3$	4.992168e - 01 1.535449e + 00 1.775727e + 00			
$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (121.3295)$
norm	9.500607e - 02	7.830013e - 02	4.077086e - 02	2.998778e - 03
Δ_{massa}	-8.662192e - 03	-8.691607e - 03	-8.695618e - 03	-8.696063e - 03
$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h - h^1$	1.299958e - 02 1.536093e - 02 1.188730e + 00			
$h - h^2$	2.014361e - 02 2.377904e - 02 1.189350e + 00			
$h - h^3$	2.388400e - 02 2.822526e - 02 1.189780e + 00			
$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho, h = 0.001, \tau = 0.0005$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (0.0325)$
norm	1.426324e + 01	1.177890e + 01	3.286096e + 02	nan
Δ_{massa}	-1.450957e - 02	-2.548713e - 02	-5.339185e - 02	-nan
$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho$				
	tau= 0.0005 ,h= 0.001			
$h - h^1$	8.959867e - 01 1.374053e - 01 8.463612e + 01			
$h - h^2$	8.468772e - 01 1.437453e - 01 8.137679e + 01			
$h - h^3$	8.461886e - 01 1.441987e - 01 8.134313e + 01			

$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho$	
	tau= 0.0005 ,h= 0.001
$h - h^1$	1.325384e + 00 7.984948e - 02 9.877549e + 01
$h - h^2$	1.314252e + 00 8.962793e - 02 9.866825e + 01
$h - h^3$	1.535339e + 00 1.076403e - 01 1.160462e + 02

Данные 24, плотность, степенная зависимость

$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.001, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (216.463)$
<i>norm</i>	5.681971e - 02	1.864150e - 02	7.515143e - 03	2.999948e - 03
Δ_{massa}	-2.977654e - 04	-3.066084e - 04	-3.057219e - 04	-3.061398e - 04

$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.001
$h - h^1$	1.042427e - 02 1.571591e - 03 2.499881e + 00
$h - h^2$	9.622620e - 03 1.518655e - 03 2.500033e + 00
$h - h^3$	8.754757e - 03 1.511313e - 03 2.499995e + 00

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.001, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (903.835)$
<i>norm</i>	2.208349e - 02	1.044924e - 02	6.598849e - 03	2.998357e - 03
Δ_{massa}	-2.991606e - 03	-3.000915e - 03	-3.002678e - 03	-3.003029e - 03

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.001
$h - h^1$	1.123872e - 02 8.286158e - 03 1.132674e + 00
$h - h^2$	1.696776e - 02 1.251547e - 02 1.133485e + 00
$h - h^3$	1.983996e - 02 1.466402e - 02 1.134021e + 00

$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.001, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1301.924)$
<i>norm</i>	2.395606e - 02	9.554427e - 03	5.182929e - 03	2.999678e - 03
Δ_{massa}	-2.157569e - 02	-2.161886e - 02	-2.162690e - 02	-2.162971e - 02

$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.001
$h - h^1$	6.392893e - 02 5.462950e - 02 1.163546e + 00
$h - h^2$	6.755622e - 02 7.621944e - 02 1.165135e + 00
$h - h^3$	6.966330e - 02 8.796646e - 02 1.166136e + 00

Картинки

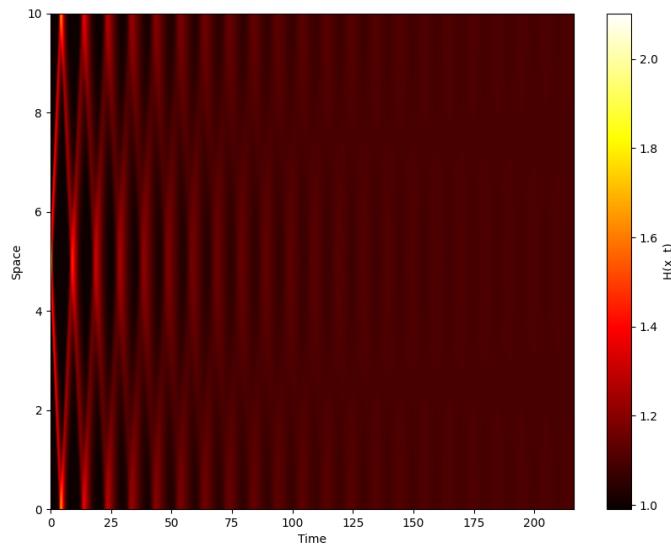


Figure 1: $\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Плотность

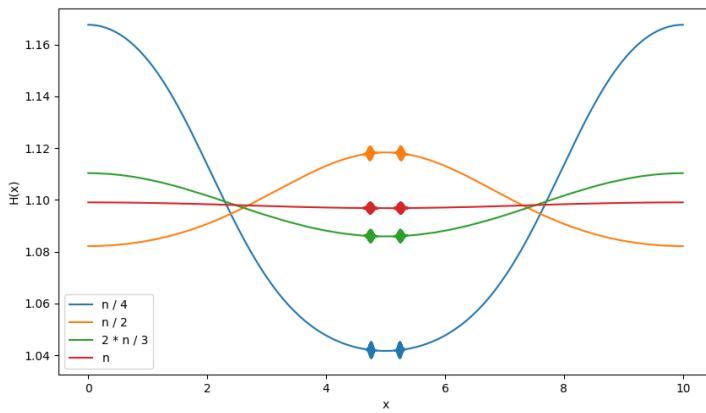


Figure 2: $\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Плотность

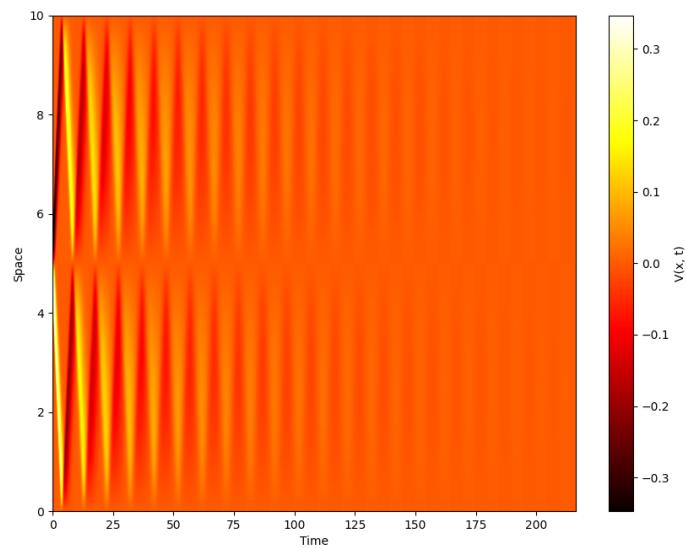


Figure 3: $\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Скорость

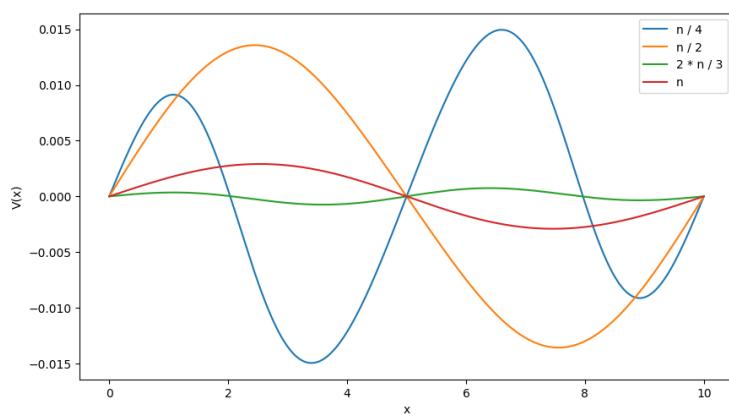


Figure 4: $\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Скорость

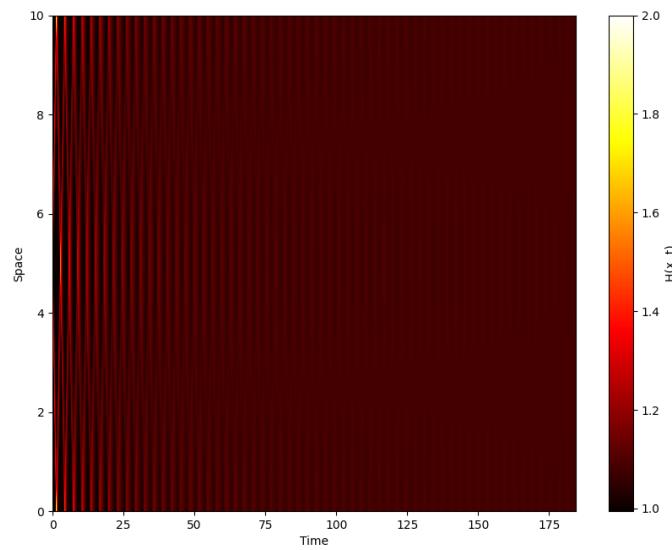


Figure 5: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Плотность

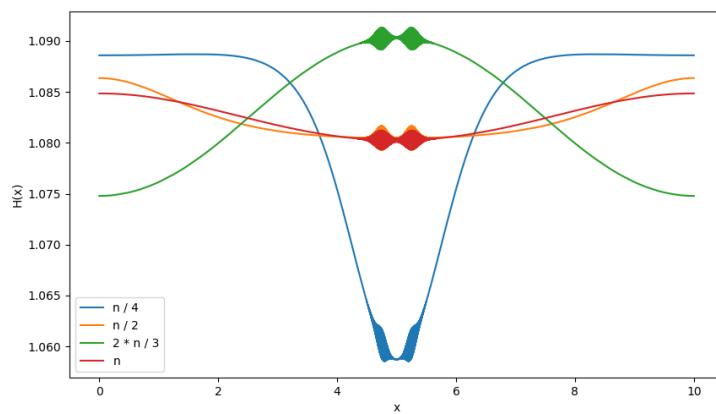


Figure 6: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Плотность

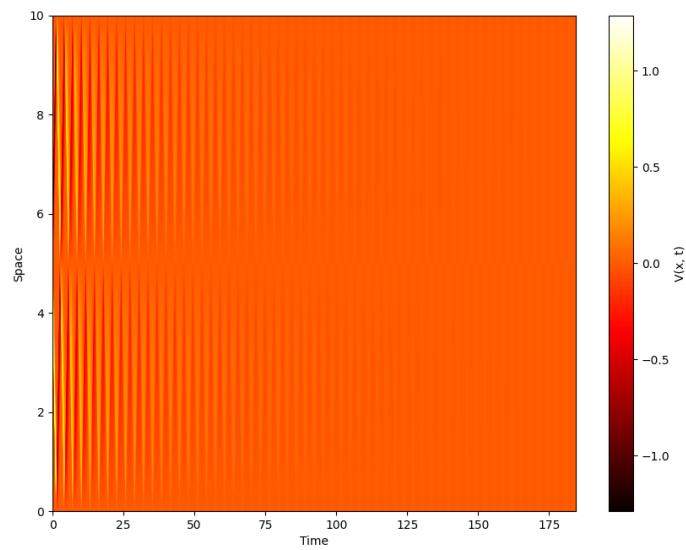


Figure 7: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Скорость

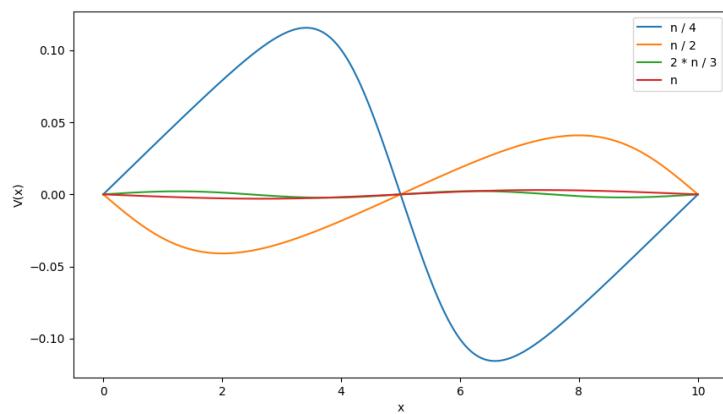


Figure 8: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.001, \tau = 0.01$, Скорость

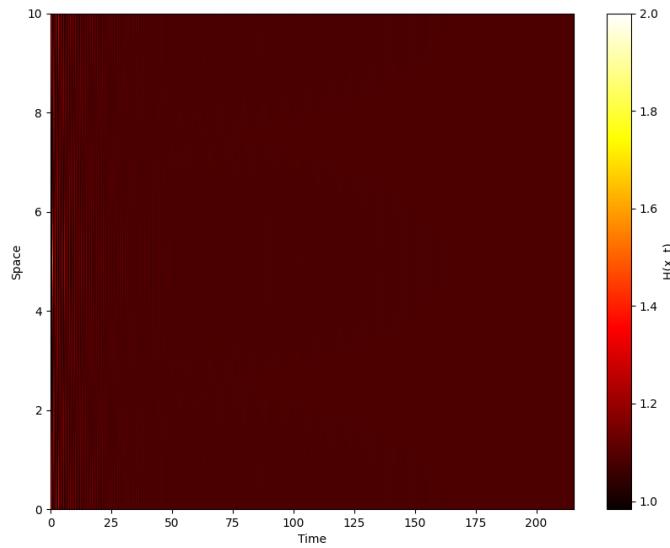


Figure 9: $\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$, Плотность

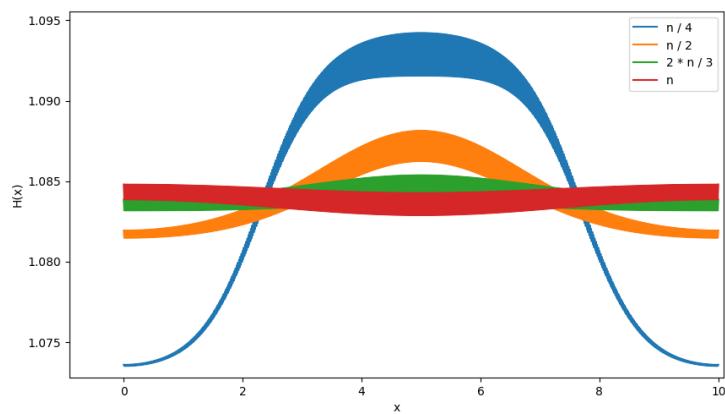


Figure 10: $\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$, Плотность

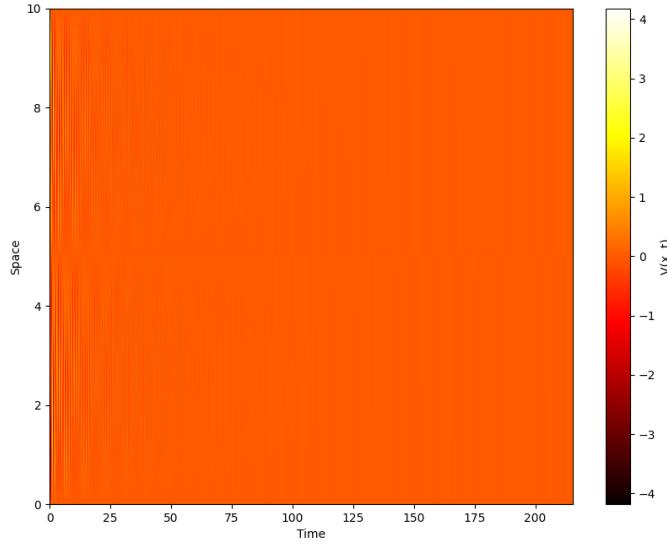


Figure 11: $\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$, Скорость

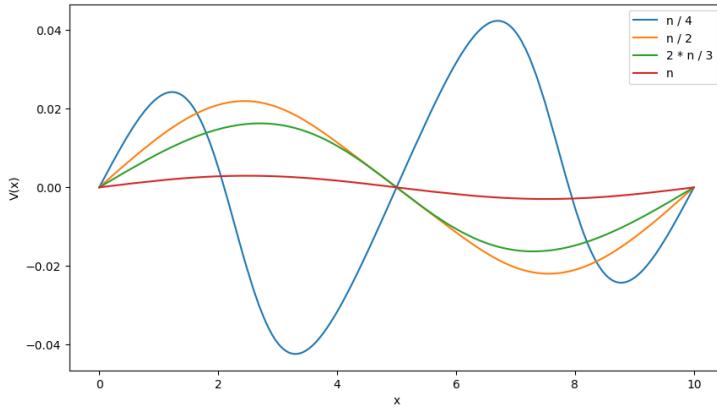


Figure 12: $\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$, Скорость

Данные 25, плотность

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (668.349)$
$norm$	$3.839660e - 02$	$1.837735e - 02$	$6.169164e - 03$	$2.999325e - 03$
Δ_{massa}	$-2.805473e - 04$	$-2.704568e - 04$	$-2.708536e - 04$	$-2.713101e - 04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$1.318447e - 03$ $7.613866e - 04$ $9.584584e - 02$
$h - h^2$	$9.822267e - 04$ $9.291926e - 04$ $9.587787e - 02$
$h - h^3$	$8.932684e - 04$ $1.029921e - 03$ $9.590548e - 02$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (2696.025)$
$norm$	$1.031167e - 02$	$7.200311e - 03$	$6.532619e - 03$	$2.999496e - 03$
Δ_{massa}	$-2.652262e - 03$	$-2.651142e - 03$	$-2.653354e - 03$	$-2.654120e - 03$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	8.067912e - 03 7.412692e - 03 4.912018e - 01
$h - h^2$	1.220649e - 02 1.099125e - 02 4.914019e - 01
$h - h^3$	1.428295e - 02 1.283583e - 02 4.915342e - 01

$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (4432.029)$
<i>norm</i>	1.043870e - 02	8.910663e - 03	5.280984e - 03	2.999562e - 03
Δ_{massa}	-1.834481e - 02	-1.835165e - 02	-1.835915e - 02	-1.835982e - 02

$\mu = 0.001, p(\rho) = 1\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	2.891479e - 02 3.581518e - 02 8.358497e - 02
$h - h^2$	3.335960e - 02 5.178577e - 02 9.186983e - 02
$h - h^3$	3.609001e - 02 6.169430e - 02 9.803321e - 02

$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (596.762)$
<i>norm</i>	3.975561e - 02	8.651050e - 03	4.801005e - 03	2.999910e - 03
Δ_{massa}	-2.488496e - 04	-2.553449e - 04	-2.564704e - 04	-2.565404e - 04

$\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	3.864145e - 04 5.330813e - 04 4.495568e - 03
$h - h^2$	5.789405e - 04 7.987596e - 04 4.541646e - 03
$h - h^3$	6.750737e - 04 9.319649e - 04 4.571391e - 03

$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1577.446)$
<i>norm</i>	1.069576e - 02	8.405689e - 03	7.585584e - 03	2.999356e - 03
Δ_{massa}	-2.456290e - 03	-2.456908e - 03	-2.458633e - 03	-2.459232e - 03

$\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	1.201349e - 02 8.200527e - 03 2.306872e - 02
$h - h^2$	1.654842e - 02 1.204669e - 02 3.053420e - 02
$h - h^3$	1.837793e - 02 1.388256e - 02 3.332919e - 02

$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (3111.878)$
<i>norm</i>	1.513513e - 02	6.666290e - 03	4.151094e - 03	2.999496e - 03
Δ_{massa}	-2.034701e - 02	-2.038516e - 02	-2.039229e - 02	-2.039477e - 02

$\mu = 0.001, p(\rho) = 10\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	3.836405e - 02 3.564481e - 02 8.081182e - 02
$h - h^2$	3.742961e - 02 5.325555e - 02 8.493130e - 02
$h - h^3$	3.827886e - 02 6.009488e - 02 8.853184e - 02

$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (416.583)$
<i>norm</i>	$6.413318e - 02$	$2.158382e - 02$	$5.502423e - 03$	$2.998807e - 03$
Δ_{massa}	$-2.472916e - 04$	$-2.536136e - 04$	$-2.551573e - 04$	$-2.555867e - 04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = 100\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$3.050130e - 04$ $4.493134e - 04$ $5.943127e - 04$
$h - h^2$	$4.513209e - 04$ $6.710775e - 04$ $8.115232e - 04$
$h - h^3$	$5.229668e - 04$ $7.812033e - 04$ $9.238038e - 04$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (1492.911)$
<i>norm</i>	$2.975033e - 02$	$1.912081e - 02$	$8.641108e - 03$	$2.998468e - 03$
Δ_{massa}	$-2.640325e - 03$	$-2.647241e - 03$	$-2.649774e - 03$	$-2.650962e - 03$

$\mu = 0.01, p(\rho) = 100\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$8.178285e - 03$ $7.671919e - 03$ $1.458103e - 02$
$h - h^2$	$8.869416e - 03$ $1.027256e - 02$ $1.619646e - 02$
$h - h^3$	$9.106382e - 03$ $1.144787e - 02$ $1.697637e - 02$

$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (0.16)$
<i>norm</i>	$1.017441e + 00$	$9.159054e - 01$	$2.660307e + 00$	<i>nan</i>
Δ_{massa}	$-1.577254e - 04$	$-8.152739e - 04$	$-4.341561e - 03$	<i>-nan</i>

$\mu = 0.001, p(\rho) = 100\rho$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$4.148880e - 02$ $1.075825e - 02$ $1.540234e + 00$
$h - h^2$	$3.103599e - 02$ $9.959213e - 03$ $1.267312e + 00$
$h - h^3$	$3.636007e - 02$ $1.016260e - 02$ $1.267381e + 00$

Данные 25, плотность, степенная зависимость

$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (625.827)$
<i>norm</i>	$2.812249e - 02$	$1.489850e - 02$	$7.357532e - 03$	$2.999837e - 03$
Δ_{massa}	$-2.680372e - 04$	$-2.655706e - 04$	$-2.670171e - 04$	$-2.668034e - 04$

$\mu = 0.1, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$9.091587e - 04$ $5.795505e - 04$ $5.009672e - 02$
$h - h^2$	$8.620653e - 04$ $7.857459e - 04$ $5.012540e - 02$
$h - h^3$	$7.995977e - 04$ $8.969821e - 04$ $5.016078e - 02$

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.01, \tau = 0.001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (2253.399)$
<i>norm</i>	$1.346128e - 02$	$6.656399e - 03$	$6.116539e - 03$	$2.999672e - 03$
Δ_{massa}	$-2.576410e - 03$	$-2.573796e - 03$	$-2.572480e - 03$	$-2.574684e - 03$

$\mu = 0.01, p(\rho) = \rho^{1.4}$	
	tau= 0.001 ,h= 0.01
$h - h^1$	$1.116737e - 02$ $8.405799e - 03$ $2.874337e - 02$
$h - h^2$	$1.644330e - 02$ $1.266155e - 02$ $3.546773e - 02$
$h - h^3$	$1.891122e - 02$ $1.477518e - 02$ $3.878311e - 02$

$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}, h = 0.01, \tau = 0.0001$				
	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}, (3756.8286)$
$norm$	$9.356509e - 03$	$5.124079e - 03$	$3.691411e - 03$	$2.999959e - 03$
Δ_{massa}	$-2.468180e - 03$	$-2.470134e - 03$	$-2.470573e - 03$	$-2.470738e - 03$
$\mu = 0.001, p(\rho) = \rho^{1.4}$				
	tau= 0.0001 ,h= 0.01			
$h - h^1$	1.995535e - 02	9.129446e - 03	9.638065e - 02	
$h - h^2$	2.114815e - 02	1.131954e - 02	9.736638e - 02	
$h - h^3$	2.171822e - 02	1.248057e - 02	9.770504e - 02	

Картинки

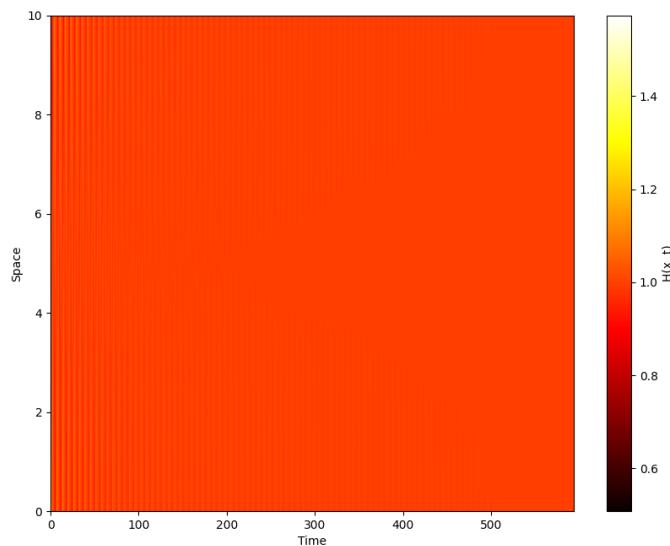


Figure 13: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.01$, Плотность

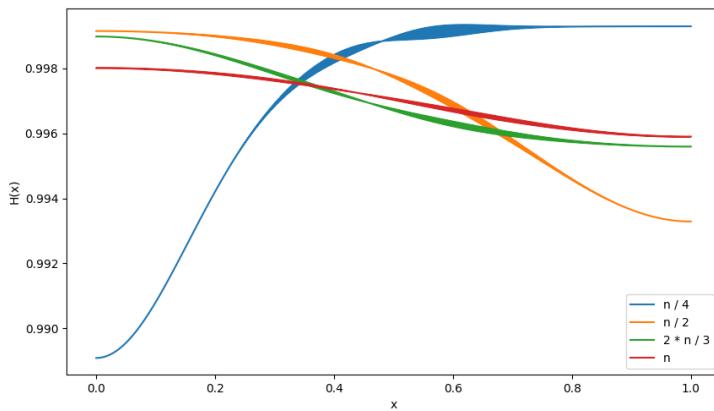


Figure 14: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.01$, Плотность

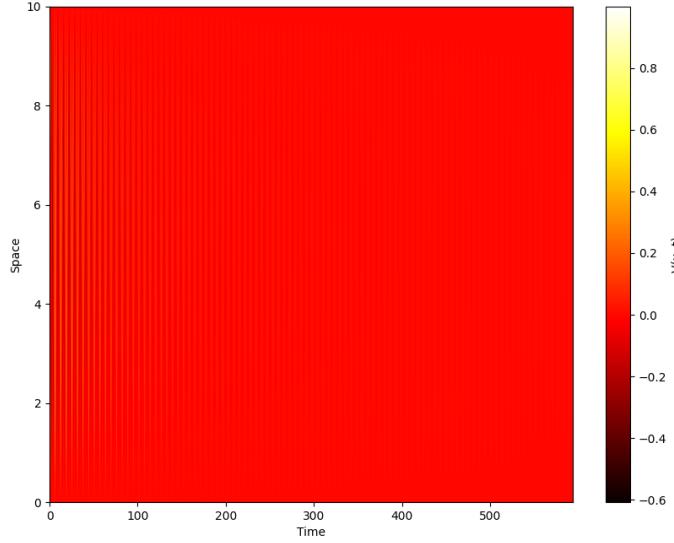


Figure 15: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.01$, Скорость

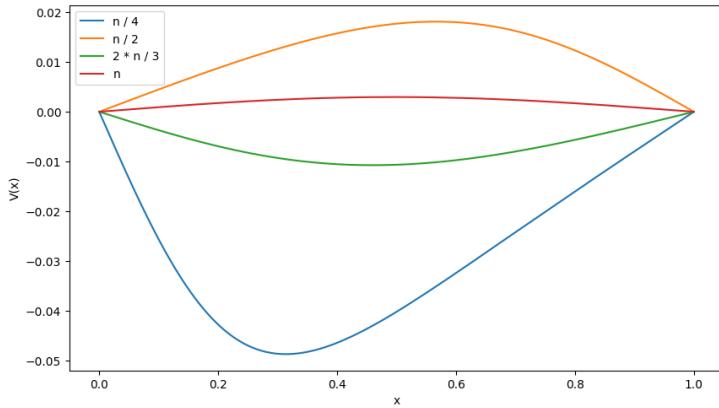


Figure 16: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, h = 0.01, \tau = 0.01$, Скорость

Выводы

Наблюдается, что при уменьшении коэффициента вязкости процесс стабилизации протекает существенно медленнее. Также отмечается, что при увеличении коэффициента $C : p = C \cdot \rho$ длина цикла сокращается, а процесс стабилизации протекает быстрее. Также схема не является консервативной и изменение в массе соизмеримо с порядком аппроксимации.

3 Стабилизация осциллирующей функции

В области $Q = [0; T] \times [0, 1]$ ставятся две задачи с различными начальными и краевыми условиями:

$$(2.27) \quad \begin{cases} \rho_0(x) = 2 + \sin(k\pi x), & x \in [0, 1], \\ u_0(x) \equiv 0, & x \in [0, 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in [0, T], \\ f \equiv 0, & \end{cases}$$

$$(2.28) \quad \begin{cases} \rho_0(x) \equiv 1, & x \in [0, 1], \\ u_0(x) = \sin(k\pi x), & x \in [0, 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in [0, T], \\ f \equiv 0. & \end{cases}$$

Натуральное число k , задающее количество колебаний начальной функции, выбиралось для численного эксперимента из диапазона от 1 до $M/10$, где $Mh = 1$.

Далее приведены таблицы со значениями нормы

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_{C_h}$$

Условием выхода на стационар считалось

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_{C_h} <= 6 * 10^{-3}$$

Начальные данные 2.28

Линейная зависимость

k	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$
1	9.819800	57.645300	191.948400	8.329000	42.872700	99.773400	6.045200	30.250300	99.768200
2	2.564000	17.836800	68.327600	2.116300	14.165900	38.344600	1.622700	9.175100	38.183900
3	1.130800	8.688800	36.873000	0.989200	7.228600	23.142700	0.715400	4.816900	20.955800
4	0.639600	5.263500	24.158600	0.583000	4.374200	15.936000	0.411600	3.012900	13.441800
5	0.463400	3.425100	17.328600	0.344800	2.930600	11.738100	0.269300	2.070400	9.433400
6	0.345300	2.514000	13.108300	0.236100	2.126000	9.097200	0.191100	1.508900	7.027800
7	0.377700	1.874200	10.094600	0.199500	1.596700	7.301000	0.135400	1.150400	5.438100
8	0.394900	1.475400	8.331800	0.138900	1.239300	5.993500	0.106000	0.906400	4.383300
9	0.400600	1.200400	6.741200	0.122000	0.996300	5.011600	0.083100	0.728300	3.596300
10	0.401100	0.982300	5.667600	0.106300	0.833200	4.289100	0.064900	0.604700	3.016700
$10 + \frac{1 \cdot M}{10}$	0.281300	0.041700	0.082300	0.028000	0.007700	0.071500	0.003300	0.006100	0.051200
$10 + \frac{2 \cdot M}{10}$	0.327400	0.043000	0.026000	0.032600	0.003900	0.021800	0.003200	0.002400	0.015400
$10 + \frac{3 \cdot M}{10}$	0.412400	0.050100	0.018500	0.041200	0.004800	0.011400	0.004000	0.001500	0.009100
$10 + \frac{4 \cdot M}{10}$	0.519500	0.060700	0.023000	0.052100	0.006200	0.010000	0.005200	0.003800	0.043300
$10 + \frac{5 \cdot M}{10}$	0.671900	0.076600	0.057600	0.067800	0.009100	0.026700	0.007400	0.010600	0.100300
$10 + \frac{6 \cdot M}{10}$	1.047300	0.117600	0.078900	0.105500	0.014700	0.034700	0.011900	0.023900	0.401400
$10 + \frac{7 \cdot M}{10}$	1.685600	0.186100	0.107900	0.168500	0.020900	0.048900	0.017800	0.038800	0.501600
$10 + \frac{8 \cdot M}{10}$	3.118600	0.343500	0.121500	0.312300	0.035800	0.080700	0.031700	0.046000	0.100600
$10 + \frac{9 \cdot M}{10}$	9.904200	1.098800	0.183200	0.991800	0.111900	0.135600	0.099900	0.044900	0.149300

Степенная зависимость

k	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$
1	9.416000	52.105400	125.826200
2	2.499300	16.522500	53.615500
3	1.139000	8.200100	30.670700
4	0.666700	5.006000	20.887500
5	0.427200	3.332900	15.018100
6	0.298000	2.411200	11.667900
7	0.247200	1.825600	9.034700
8	0.254400	1.392300	7.481200
9	0.267900	1.141000	6.180900
10	0.273300	0.942000	5.224100
$10 + \frac{1 \cdot M}{10}$	0.200500	0.028600	0.080100
$10 + \frac{2 \cdot M}{10}$	0.233100	0.030200	0.025800
$10 + \frac{3 \cdot M}{10}$	0.293500	0.035500	0.014300
$10 + \frac{4 \cdot M}{10}$	0.370300	0.043400	0.015000
$10 + \frac{5 \cdot M}{10}$	0.480800	0.054200	0.033700
$10 + \frac{6 \cdot M}{10}$	0.739400	0.083300	0.000500
$10 + \frac{7 \cdot M}{10}$	1.209100	0.132800	0.000400
$10 + \frac{8 \cdot M}{10}$	2.229200	0.246100	0.100600
$10 + \frac{9 \cdot M}{10}$	7.073600	0.788800	0.133600

Начальные данные 2.27

Линейная зависимость

k	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 1 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 10 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = 100 \cdot \rho$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$
1	4.795900	34.764600	106.767700	5.772200	36.130800	103.335700	6.384600	34.824600	0.032200
2	16.526300	94.450000	228.424000	18.141600	88.649900	169.294700	15.919100	59.229100	0.024500
3	4.814200	32.329000	100.780700	5.456600	31.861700	84.363900	5.296200	25.024200	0.039400
4	13.511000	81.447800	160.447400	16.242500	74.736800	149.751900	14.617700	46.525100	0.030800
5	3.781000	30.183200	99.155800	4.523700	30.872500	81.153300	4.905900	23.458200	0.030200
6	11.596600	78.443000	144.491700	15.075400	72.525500	115.891700	14.317500	47.012300	0.025900
7	3.272900	27.162900	98.099800	4.048800	30.222700	79.232600	4.534500	22.850900	0.023300
8	10.502400	76.442300	135.448200	14.343700	71.887100	96.551100	14.117500	47.403400	0.022300
9	2.770500	24.665600	97.567900	3.734400	29.425400	78.903700	4.253300	22.546600	0.020500
10	9.565400	74.442100	130.432600	13.490800	71.569900	100.028200	13.917200	46.899600	0.020300
$10 + \frac{1 \cdot M}{10}$	1.462400	7.452500	65.435800	4.225500	37.098200	87.359600	6.516700	37.708700	0.164700
$10 + \frac{2 \cdot M}{10}$	64.164800	7.570100	22.466600	3.677200	15.279500	77.560900	4.618500	26.809700	0.188600
$10 + \frac{3 \cdot M}{10}$	502.623500	28.456500	13.474800	45.340400	7.697700	57.022300	5.169000	21.011500	0.002500
$10 + \frac{4 \cdot M}{10}$	329.801700	15.385900	10.477600	33.199900	5.805400	45.019200	3.676700	18.114900	0.002500

Степенная зависимость

k	$\mu = 0.1$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.01$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$	$\mu = 0.001$ $p(\rho) = \rho^{1.4}$ $\tau = 0.0001$ $h = 0.001$
1	5.067900	33.252500	93.504500
2	17.271900	87.132600	186.082900
3	4.902000	30.490900	85.794300
4	14.327600	73.166800	147.180800
5	3.820100	29.555600	83.842600
6	12.853600	70.951400	120.548500
7	3.462300	27.809100	83.365400
8	12.111200	70.215200	109.429900
9	3.101500	26.034200	82.773700
10	10.723200	69.480700	106.484700
$10 + \frac{1 \cdot M}{10}$	1.794200	12.812900	85.818900
$10 + \frac{2 \cdot M}{10}$	34.336300	5.564500	34.971900
$10 + \frac{3 \cdot M}{10}$	263.318800	16.535700	20.971700
$10 + \frac{4 \cdot M}{10}$	179.994900	8.357700	16.548800
$10 + \frac{5 \cdot M}{10}$	4529.695800	15.056900	15.809700
$10 + \frac{6 \cdot M}{10}$	283.271200	17.217400	10.654500
$10 + \frac{7 \cdot M}{10}$	2416.262600	239.630400	25.338400

Выводы

На основе анализа результатов численного эксперимента, представленных в таблицах, можно сделать следующие выводы о времени стабилизации решения:

- Зависимость от частоты (k):** Наблюдается обратная зависимость между волновым числом k и временем стабилизации. С увеличением частоты начальных колебаний время, необходимое для прихода системы к равновесному состоянию, уменьшается. Но при значительных значениях k время стабилизации начинает увеличиваться. Так же при начальных данных 27 время стабилизации решения при четных k больше чем при соответствующих нечетных.
- Зависимость от вязкости (μ):** Уменьшение вязкости приводит к значительному увеличению времени стабилизации. Но при значительных значениях k увеличения вязкости приводит к ускорению стабилизации.

4 Задача "протекания"

Зададим начальные и граничные условия, которые определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 1, & x \in [0, 10] \\ u_0(x) = 0, & x \in [0, 10] \\ u(t, 0) = \tilde{v}, & t \in [0, T] \\ \rho(t, 0) = \tilde{\rho}, & t \in [0, T] \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=10} = 0, & t \in [0, T] \end{cases}$$

Область $\Omega = [0, T] \times [0, 10]$, а функции f и f_0 тождественно равны 0. Параметры \tilde{v} ($\tilde{v} > 0$) и $\tilde{\rho}$ ($\tilde{\rho} \geq 1$) задают скорость и плотность "набегающего" потока.

Вычисления будут проводиться до времени $N_0\tau$, при котором решение перестанет зависеть от времени (выйдет на стационар). Критерием выхода на стационар будем считать выполнение условия:

$$\|(H^n, V^n) - (H^{n_{st}}, V^{n_{st}})\|_C \leq 10^{-4}$$

при $n_{st} \leq n \leq n_{st} + 50$, где n_{st} — момент выхода на стационар.

Численные эксперименты

$\mu = 0.1, p(\rho) = 1 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	37.183600	26.667400	13.384900	9.111800	7.107800	6.110700	5.749400
2	10.595000	16.015400	10.927700	8.008400	6.983100	6.265400	5.426400
3	8.813600	13.246400	10.036900	7.750200	6.617700	5.981800	5.529400
4	23.592000	11.984800	9.547400	7.660900	6.436000	6.046600	5.408500
5	43.565500	11.279400	9.218700	7.616400	6.857500	6.254500	5.327200
6	49.194500	10.787800	8.979100	7.805500	6.756500	6.202600	5.267000
7	53.766400	10.948400	8.425100	7.693000	6.873800	6.147400	5.215200

$\mu = 0.1, p(\rho) = 10 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	20.626700	16.714200	14.732000	27.878700	22.600000	10.640000	8.016000
2	16.710700	18.382500	18.432000	26.318500	9.215900	6.922300	5.618400
3	14.478200	18.423700	5.172500	14.001300	6.841500	4.542300	4.833900
4	18.470000	5.255900	22.310200	12.787900	5.980400	4.062800	4.487400
5	21.764400	9.460100	25.728500	12.860300	5.894600	4.025300	3.798800
6	17.536300	22.318000	28.387000	12.871400	5.885200	4.111500	3.727500
7	6.306200	24.779700	30.805300	12.864200	5.874900	4.046200	3.669300

$\mu = 0.1, p(\rho) = 100 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	18.218600	14.554200	10.947700	9.338300	8.560500	8.270700	7.106900
2	12.600700	9.325000	8.206000	7.432200	8.218500	8.642300	7.598500
3	9.166400	7.082900	7.809600	8.355900	8.555100	12.317600	18.367800
4	7.981800	7.641600	6.752500	9.938100	16.406800	14.936100	10.225800
5	7.070600	8.240000	9.617600	17.391900	3.603800	22.016300	22.348600
6	7.950700	8.096600	15.271800	6.192100	22.117500	22.353000	22.368400
7	6.428800	11.653100	21.126300	20.950800	22.349800	22.366800	22.371700

$\mu = 0.01, p(\rho) = 1 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	40.814600	31.269500	13.932800	10.037600	8.413100	6.958400	6.254100
2	14.824300	20.504500	11.711300	9.365800	7.744100	6.803000	5.742500
3	13.660800	16.460900	10.745800	8.661200	7.469700	6.539400	5.527800
4	29.475600	11.916900	9.954400	8.272600	7.304600	6.386700	5.403800
5	44.587400	11.454600	9.599100	8.030100	7.188900	6.284800	5.321100
6	49.482700	11.698700	9.440100	7.867100	7.131400	6.207900	5.258700
7	53.910000	11.958100	9.419400	8.789800	7.071200	6.146900	5.206600

$\mu = 0.01, p(\rho) = 10 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	24.221000	17.921900	15.077300	30.039100	23.725200	12.437000	8.548800
2	17.704700	19.026000	22.102600	26.204600	9.433200	6.139400	4.604200
3	15.389300	22.107700	4.140500	13.480100	6.691300	4.527300	4.081300
4	22.605400	3.994200	22.793700	12.261000	5.748500	4.099900	3.940600
5	22.669200	13.033600	25.757600	12.279100	5.629500	4.245400	3.845100
6	6.743500	23.042900	28.382000	12.281500	5.624800	4.161100	3.776100
7	4.129600	25.114800	30.789700	12.280100	5.622100	4.094500	3.719800

$\mu = 0.01, p(\rho) = 100 \cdot \rho, h = 0.001, \tau = 0.0001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	24.293400	16.700300	12.004800	10.424800	9.996200	9.162000	9.039700
2	5.357100	5.971500	6.527700	7.551200	8.369700	9.496200	8.597500
3	6.930700	4.857300	6.297500	8.476700	11.902200	17.409800	22.851000
4	7.537800	10.062400	14.068200	20.311800	22.909500	9.312800	15.592000
5	17.899300	22.177800	22.938600	8.608400	14.288000	22.354700	22.365600
6	58.459000	3.218900	12.636700	22.343300	22.364400	22.366800	22.369600
7	10.953200	16.589500	22.359200	22.365500	22.368600	22.370300	22.372100

Картинки

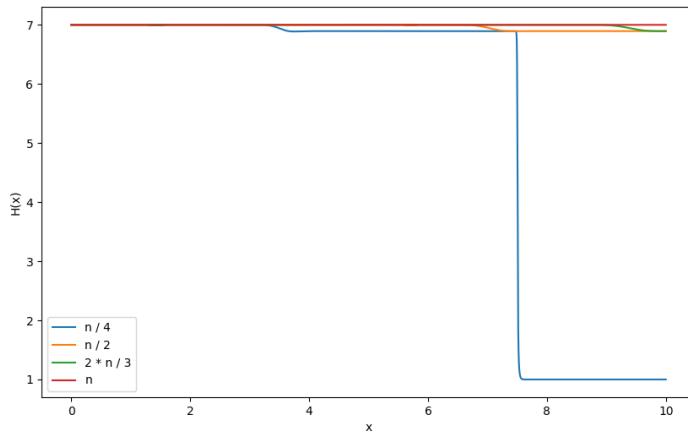


Figure 17: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, u = 7, \rho = 7$, Плотность

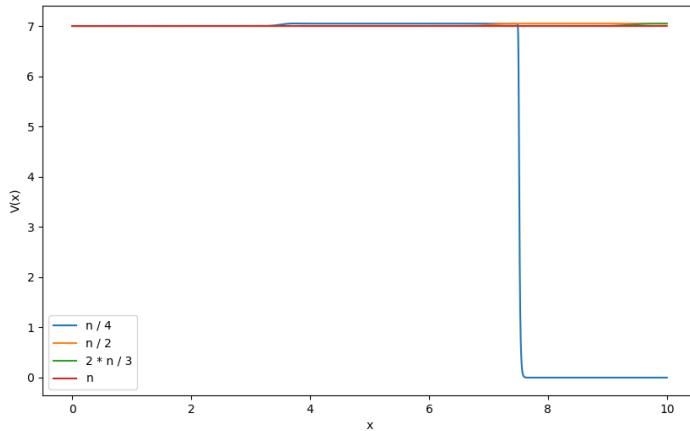


Figure 18: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, u = 7, \rho = 7$, Скорость

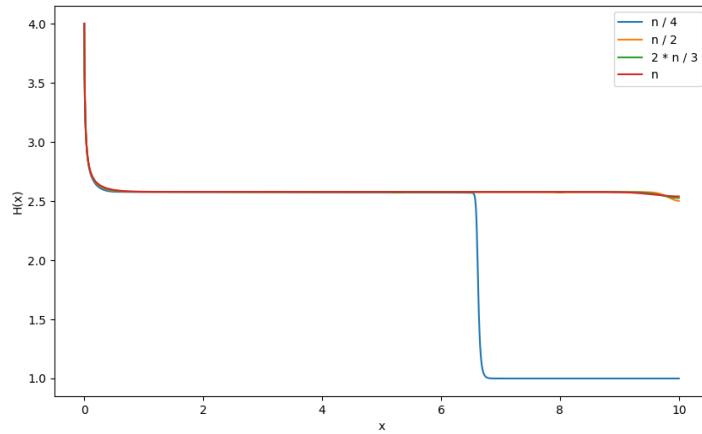


Figure 19: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, u = 2, \rho = 4$, Плотность

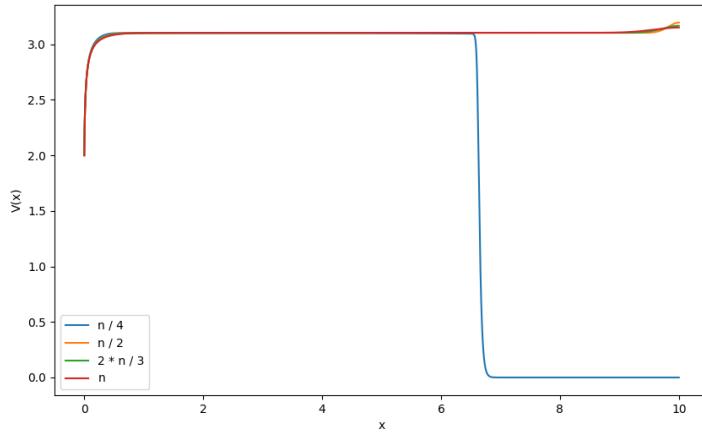


Figure 20: $\mu = 0.1, p(\rho) = 10\rho, u = 2, \rho = 4$, Скорость

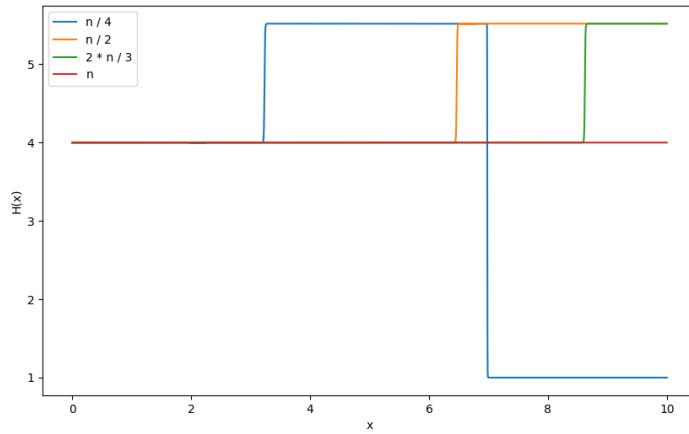


Figure 21: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 7, \rho = 4$, Плотность

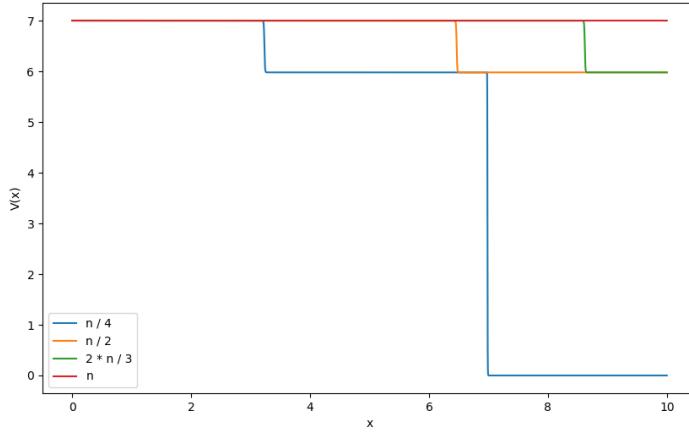


Figure 22: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 7, \rho = 4$, Скорость

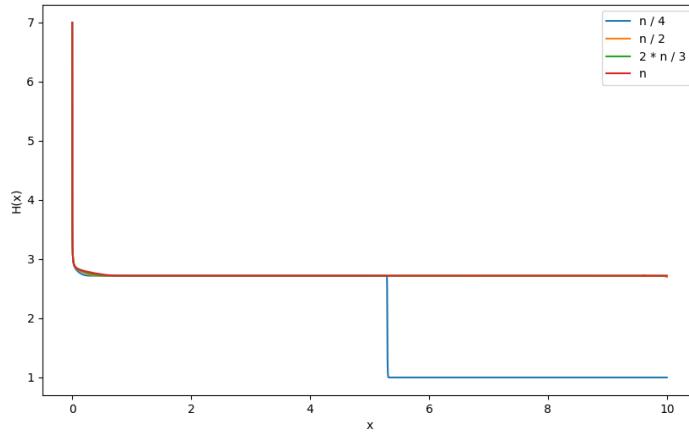


Figure 23: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 1, \rho = 7$, Плотность

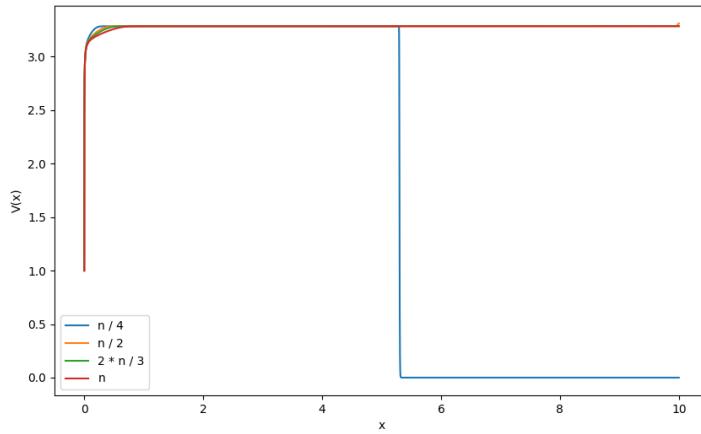


Figure 24: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 1, \rho = 7$, Скорость

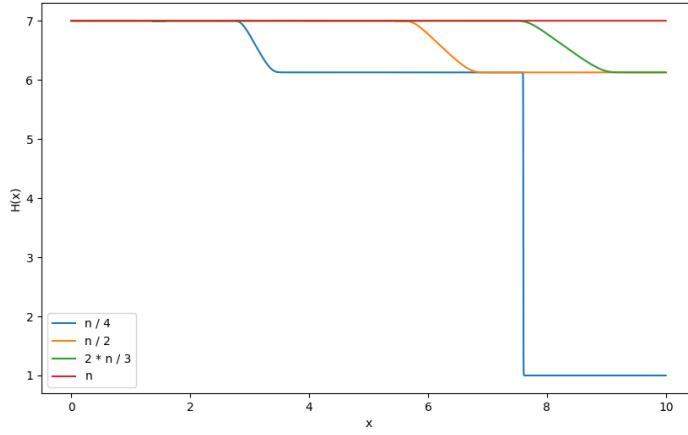


Figure 25: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 6, \rho = 7$, Плотность

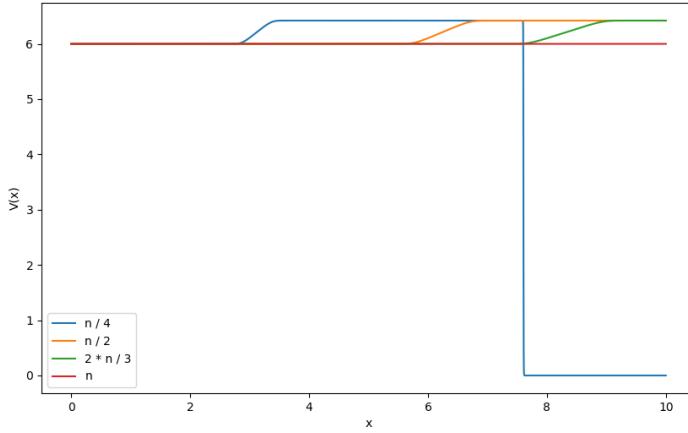


Figure 26: $\mu = 0.01, p(\rho) = 10\rho, u = 6, \rho = 7$, Скорость

Выводы

Видно, что при увеличении скорости набегающего потока время выхода на стационар уменьшается. При увеличении плотности при маленьких значениях скорости время выхода на стационар уменьшается, а при больших значениях скорости время выхода на стационар увеличивается.