Algoritmi şi structuri de date (I). Seminar 11: Aplicaţii ale tehnicii greedy

Problema 1 *Problema planificării activităţilor (1).* Se consideră un set de n prelucrări ce trebuie executate de către un procesor. Durata execuţiei prelucrărilor este aceeaşi (se consideră egală cu 1). Fiecare prelucrare i are asociat un termen final de execuţie, $t_i \leq n$ şi un profit, p_i. Profitul unei prelucrări intervine în calculul profitului total doar dacă prelucrarea este executată (dacă prelucrarea nu poate fi planificată înainte de termenul final de execuţie profitul este nul). Se cere să se planifice activităţile astfel încât să fie maximizat profitul total (acesta este corelat cu numărul de prelucrări planificate).

Exemplu: considerăm $n = 4$ activităţi având termenele finale: $(2, 3, 4, 2)$ şi profiturile corespunzătoare $(4, 3, 2, 1)$.

Problema 2 *Problema planificării activităţilor (2).* Se consideră un set de n activităţi, fiecare dintre ele fiind caracterizată printr-un interval de desfăşurare (activitatea A_i se desfăşoară în intervalul $[s_i, f_i)$) care trebuie planificate folosind cât mai puţine resurse (activităţile pot fi cursuri iar resursele săli). Propuneţi o strategie de alocare a resurselor la activităţi astfel încât aceeaşi resursă să nu fie alocată unor activităţi care se desfăşoară simultan şi numărul de resurse utilizate să fie cât mai mic (resursele sunt considerate identice şi nu există restricţii privind alocarea acestora la activităţi).

Exemplu: Se consideră 10 activităţi având intervalele de desfăşurare conform tabelului de mai jos:

Activitate	Ora start	Ora final
A	9:00	10:30
B	9:00	12:30
C	9:00	10:30
D	11:00	12:30
E	11:00	14:00
F	13:00	14:30
G	13:00	14:00
H	14:00	16:30
I	15:00	16:30
J	14:30	16:30

Problema 3 *Problema ordonării task-urilor.* Se consideră un set de task-uri T_1, T_2,..., T_n care trebuie executate pe un procesor. Fiecare task T_i este caracterizat de o durată de execuţie L_i şi de un timp de aşteptare până la finalizare, $F_i = S_i + L_i$ unde S_i este momentul la care este lansat în execuţie task-ul T_i. Presupunând că primul task este planificat la momentul 0 şi că task-urile trebuie executate secvenţial propuneţi o ordine de executîe a acestora $(i_1, i_2, ..., i_n)$ astfel încât timpul mediu de aşteptare, $\frac{1}{n}(F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots F_{i_n})$ este minim, în ipoteza că task-urile sunt planificate fără pauze între ele $(S_{i_k} = F_{i_{k-1}})$. Demonstraţi că strategia propusă este optimală.

Exemplu: considerăm un set cu $n = 5$ task-uri având duratele: $(5, 10, 3, 8, 2)$.

Problema 4 *Problema alimentării cu energie.* Se consideră un autoturism electric care are o autonomie de L kilometri şi un traseu pe care sunt staţii de alimentare aflate între ele la distanţele d_1, d_2,..., d_n (d_1 reprezintă distanţa de la punctul de pornire până la prima staţie de alimentare, d_i reprezintă distanţa de la staţia $i-1$ la staţia i, iar d_n reprezintă distanţa de la ultima staţie până la destinaţie. Presupunând că distanţa dintre oricare două staţii este mai mică decât L propuneţi o strategie de alimentare (selecţie a staţiilor) astfel încât numărul de opriri să fie cât mai mic. Se presupune că după fiecare alimentare autonomia este de L kilometri.

Exemplu. $L = 50$ iar distanţele sunt $(20, 25, 15, 20, 10, 10, 15, 30, 10)$.

Problema 5 *Problema impachetarii.* Se consideră un set de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu proprietatea că $a_i \in (0, C]$. Propuneţi o strategie de grupare în cât mai puţine subseturi (k) astfel încât suma elementelor din fiecare subset să nu depăşească valoarea C.

Exemplu. $C = 10$, $a = (7, 5, 1, 4, 3, 8, 9, 6, 2)$.

Problema 6 *Problema acoperirii.* Se consideră un set de n localităţi şi se pune problema conectării acestora printr-o reţea de drumuri. Presupunând că se cunoaşte costul C_{ij} al construirii unui drum între localităţile i şi j stabiliţi care drumuri ar trebui construite astfel încât să se poată ajunge de la o localitate la oricare alta (eventual trecând prin altă localitate) iar costul total să fie cât mai mic. Demonstraţi că strategia propusă este optimală.

Exemplu. Se consideră $n = 6$ localităţi şi costurile construirii drumurilor dintre ele (∞ înseamnă că nu este posibilă construirea nici unui drum).

	A	B	C	D	E	F
A	$-$	2	∞	∞	6	3
B	2	$-$	6	∞	3	∞
C	∞	6	$-$	5	1	∞
D	∞	∞	5	$-$	∞	4
E	6	3	1	∞	$-$	2
F	3	∞	∞	4	2	$-$

Problema 7 *Problema selecţiei în funcţie de importanţă.* Presupunem că un autor trebuie să pregătească o carte de 600 pagini constituită din 5 capitole, fiecare dintre capitole având o anumită importanţă în structura cărţii (un exemplu este ilustrat în tabelul de mai jos, importanţa fiind exprimată prin valori pe o scală de la 1 - foarte mică la 10 - foarte mare). Varianta preliminară a cărţii depăşeşte 600 de pagini şi se pune problema să se decidă cu câte pagini să fie redus fiecare capitol astfel încât să de încadreze în numărul maxim de pagini şi să nu fie exclus prea mult din părţile importante.

Capitol	Pagini	Importanţă
1	120	5
2	150	5
3	200	4
4	150	8
5	140	3